

# GEOMETRIEPARAMETRISIERUNGEN FÜR DIE AERODYNAMISCHE OPTIMIERUNG VON VERDICHTERSCHAUFELSEKTIONEN UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER KRÜMMUNG

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte

**Dissertation**

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Lars Falk Yves Sommer**

geboren am 30.04.1978 in Eisenhüttenstadt

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Berger

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) Dieter Bestle

Gutachter: PD Dr.-Ing. habil. Bernd Beirow

Tag der mündlichen Prüfung: 22. August 2011



# VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2007 bis 2010 während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus.

Mein besonderer Dank gilt dem Land Brandenburg für die Gewährung eines großzügigen Graduiertenstipendiums für den überwiegenden Teil der Arbeit. Weiterhin bedanke ich mich bei der Firma Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co. KG, namentlich Dr. M. Swoboda und Dr. A. Huppertz, für die finanzielle und fachliche Unterstützung.

Bedanken möchte ich mich weiterhin bei meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) Dieter Bestle für die vielen Anregungen und die unzähligen Stunden intensivster wissenschaftlicher Betreuung. Bei Prof. Dr.-Ing. Ulrich Berger und PD Dr.-Ing. habil. Bernd Beirow bedanke ich mich für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses bzw. des Koreferates.

Meinen ehemaligen Kollegen danke ich nicht nur für die vielen spannenden Gespräche, Diskussionen und Anregungen, sondern vor allem für die schöne gemeinsame Zeit am und außerhalb des Lehrstuhls. Dieser Zusammenhalt hat wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Familie für die bedingungslose Unterstützung während meiner insgesamt sehr langen Ausbildungszeit.

Wolfsburg, Dezember 2011

Lars Sommer



# GEOMETRIEPARAMETRISIERUNGEN FÜR DIE AERODYNAMISCHE OPTIMIERUNG VON VERDICHTERSCHAUFELSEKTIONEN UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER KRÜMMUNG

Stichworte: B-Splines, Parametrisierung, Optimierung, Prozessintegration, Rolling-Ball-Algorithmus, Verdichterschaufelentwurf

Auf dem Gebiet der Prozessintegration und automatisierten Optimierung von Bauteilen nimmt die Triebwerksindustrie eine Vorreiterrolle ein. Insbesondere die aerodynamische Optimierung von Triebwerksschaufeln kann, dank umfangreicher Forschungs- und Entwicklungsarbeit, seit einiger Zeit als Stand der Technik bezeichnet werden. Auf diese Art ist es möglich, trotz kürzer werdender Entwicklungszeiten immer effizientere Schaufeln zu entwerfen, die ihren Beitrag zur notwendigen Reduktion der im Triebwerk produzierten CO<sub>2</sub>-Emission liefern. Ein wichtiger Schritt beim Schaufelentwurf ist die automatisierte Mehrkriterien-Optimierung einzelner Schaufelsektionen. Hierfür sind geeignete Profilparametrisierungen notwendig, die einerseits genügend Entwurfsfreiheiten bieten, andererseits ohne manuelle Nachbearbeitung sinnvolle Profile liefern.

In der vorliegenden Arbeit werden daher drei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten zur automatisierten parametrischen Schaufelprofilerzeugung entwickelt. Im Unterschied zu den meisten bisher vorhandenen Parametrisierungen ist allen drei Methoden gemein, dass die entstandenen Profile stets krümmungsstetig sind. Lediglich beim Übergang zur kreisförmigen Hinterkante wird Tangentenstetigkeit als ausreichend angesehen. Durch diese Vorgehensweise können, anders als vorher, sehr günstige Geschwindigkeitsverläufe an Saug- und Druckseite ohne Überhöhungen an der Vorderkante erreicht werden.

Innerhalb eines auf einem Hochleistungs-Rechen-Cluster parallelisierten Mehrkriterien-Optimierungsprozesses, in dem beispielhaft der Mittelschnitt eines Stators einer Hochdruckverdichterstufe aerodynamisch optimiert wird, werden die drei Methoden anschließend miteinander verglichen. Es kann gezeigt werden, dass alle drei Parametrisierungen zu Profilen führen, die bezüglich ihrer aerodynamischen Verluste deutlich besser sind als ein manuell entworfenes Referenzprofil.

# GEOMETRY PARAMETERIZATIONS FOR THE AERODYNAMICAL OPTIMIZATION OF COMPRESSOR BLADE SECTIONS CONSIDERING CURVATURE

Keywords: B-splines, parameterizaion, optimization, prozess integration, rolling-ball-algorithm, compressor blade design

In the field of process integration and automized optimization of engineering parts the flight engine industry can be recognized as a technology leader. Based on substantial research and developement efforts, especially the arodynamical optimization of engine blades can be regarded as state-of-the-art now. This way it is possible to design more efficient blades in shorter developement time which helps to lower CO<sub>2</sub> emissions of the engine. An important step within the blade design process is the automized multi-criteria optimization of single blade sections. Therefore, useful section parameterization is necessary allowing to explore a wide design space on the one hand, but yielding reasonable blade sections without the need of manual after treatment.

Three different possibilities for automized blade section generation are developed in this thesis. In contrast to most of the prior publications these parameterizations generate curvature continuous sections. Only for the blending of the trailing edge circle to the suction and pressure side, respectively, tangential continuity is regarded as sufficient for proper aerodynamical behavior. This way, advantageous velocity profiles without any spikes on either section side of the leading edge are achieved.

The three methods are tested and compared to each other within a multi-criteria optimization process running in parallel on a high performance computing cluster. For the example of a mid-section of a high pressure compressor stator it can be shown that all three parameterizations yield profiles which dominate a manually optimized reference profile in both optimization criteria, efficiency for design and off-design operation conditions.

# Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	V
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XIII
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Beschreibung von Schaufelprofilen in der Literatur . . . . .	2
1.2 Inhalt und Ziel der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Funktionen und Kurven in der Ebene . . . . .	7
2.1.1 Begriffe und Definitionen . . . . .	7
2.1.2 Stetigkeit von Funktionen . . . . .	9
2.1.3 Stetige Differenzierbarkeit von Funktionen . . . . .	10
2.1.4 Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	12
2.1.5 Krümmung ebener Kurven . . . . .	13
2.1.6 Natürliche Gleichung ebener Kurven . . . . .	16
2.1.7 Charakterisierung von Kurvenübergängen . . . . .	18
2.2 B-Splinekurven . . . . .	21
2.2.1 Definition und Eigenschaften . . . . .	22
2.2.2 Ableitungen von B-Splinekurven . . . . .	23
2.2.3 Beispiel: Quadratischer B-Spline und Ableitungen . . . . .	26
2.3 Ableitungen in den Endpunkten von B-Splinekurven . . . . .	31
2.3.1 Erste Ableitung . . . . .	31
2.3.2 Zweite Ableitung . . . . .	33
2.3.3 Dritte Ableitung . . . . .	35
<b>3 Grundlagen des Verdichterschaufelentwurfs</b>	<b>39</b>
3.1 Verdichter und Verdichterschaufelentwurf . . . . .	39
3.2 Arbeitsweise von Verdichtern . . . . .	41
3.3 Koordinatensysteme beim zweidimensionalen Schaufelentwurf . . . . .	44

3.4	Klassifizierung von Schaufelprofilparametrisierungen . . . . .	45
3.5	Allgemeiner Aufbau und Bezeichnungen am Schaufelprofil . . . . .	47
3.6	Allgemeine Forderungen an die Profilgeometrie . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Direkte Parametrisierung des Schaufelprofils</b>	<b>51</b>
4.1	Ablauf des Profilaufbaus . . . . .	51
4.2	Vorder- und Hinterkante des Profils . . . . .	52
4.3	Parametrisierung von Saug- und Druckseite mittels B-Splinekurven . . . . .	53
4.3.1	$C^0$ -Stetigkeit an Vorder- und Hinterkante . . . . .	54
4.3.2	Tangentenstetigkeit an Vorder- und Hinterkante . . . . .	56
4.3.3	Krümmungsstetigkeit an der Vorderkante . . . . .	58
4.4	Fitten von Referenzprofilen . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Indirekte Parametrisierung des Schaufelprofils</b>	<b>65</b>
5.1	Ablauf des Profilaufbaus . . . . .	65
5.2	Bestimmung der Skelettlinie mittels der natürlichen Gleichung . . . . .	67
5.3	Erzeugung von Saug- und Druckseite . . . . .	69
5.4	Profilaufbau und Einpassen in den Aeroblock . . . . .	72
5.5	Berechnung der Krümmung der Profildseiten . . . . .	74
5.6	Fitten der Referenzprofile . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Semidirekte Parametrisierung des Schaufelprofils</b>	<b>81</b>
6.1	Ablauf des Profilaufbaus . . . . .	81
6.2	Die Saugseite . . . . .	83
6.2.1	Erzeugung der Saugseite aus ihrer Krümmungsverteilung . . . . .	83
6.2.2	Parametrisierung der Krümmungsverteilung . . . . .	85
6.2.3	Anpassen der Profillänge . . . . .	85
6.3	Erzeugung der Druckseite mittels Dickenfunktion . . . . .	87
6.3.1	Bestimmung von Skelettlinie und Druckseite . . . . .	87
6.3.2	Modellierung der Hinterkante . . . . .	89
6.3.3	Modellierung der Vorderkante . . . . .	93
6.3.4	Parametrisierung der Dickenfunktion . . . . .	98
6.3.5	Berechnung der Krümmung der Druckseite . . . . .	101
6.4	Fitten der Referenzprofile . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Aerodynamische Optimierung eines Schaufelprofils</b>	<b>105</b>
7.1	Formulierung der Optimierungsaufgabe . . . . .	105
7.2	Serieller Optimierungsprozess . . . . .	109
7.3	Parallelisierter Optimierungsprozess auf einem HPC-Cluster . . . . .	111
7.3.1	HPC-Cluster . . . . .	112
7.3.2	Parallelisierung auf einem einzelnen Knoten . . . . .	114
7.3.3	Parallelisierung mit der Sun Grid Engine . . . . .	115
7.3.4	Parallelisierung mit statischer Knotenwahl . . . . .	117
7.3.5	Vergleich der Parallelisierungen . . . . .	119



7.4	Diskussion der Ergebnisse und Vergleich der Parametrisierungen . . . . .	121
7.4.1	Übersicht und statistischer Vergleich . . . . .	121
7.4.2	Vergleich der Profilgeometrien . . . . .	123
7.4.3	Vergleich der aerodynamischen Eigenschaften . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>



# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

ACARE	Advisory Council for Aeronautics Research in Europe
CAD	Computer Aided Design
CAE	Computer Aided Engineering
CAM	Computer Aided Manufacturing
CDA	Controlled Diffusion Aerofoils (gezielt entworfene Profile)
CO <sub>2</sub>	Kohlendioxid
DCA	Double Circular Arc (Profilmfamilie)
DGS	Differentialgleichungssystem
HPC	High Performance Computing
IGES	Initial Graphics Exchange Specification
KDE	K Desktop Environment
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NO <sub>x</sub>	Stickoxide
NURBS	Non-Uniform Rational B-Splines
RAID	Redundant Array of Independent Disks
RAM	Random Access Memory
rsh	Remote Shell
sftp	Secure File Transfer Protocoll
SGE	Sun Grid Engine
SQP	Sequential Quadratic Programming

ssh	Secure Shell
STEP	Standard for the Exchange of Product model data
VNC	Virtual Network Computing

## Mathematische Ausdrücke

$()'$	Ableitung nach der Bogenlänge $s$ bzw. Ableitung nach dem allgemeinen Argument einer Funktion
$\dot{()}$	Ableitung nach Kurvenparameter
$\forall$	für alle
lim	Grenzwert
$x \in [a, b]$	$x$ ist Element des beidseitig geschlossenen Intervalls $[a, b]$ , d. h. $a \leq x \leq b$
$x \in [a, b)$	$x$ ist Element des linksseitig geschlossenen und rechtsseitig offenen Intervalls $[a, b)$ , d. h. $a \leq x < b$

## Vektoren und Matrizen

$\mathbf{b}$	B-Splinekurve
$\mathbf{c}$	Nebenbedingungen
$\mathbf{K}$	B-Spline Kontrollpunkte
$\mathbf{M}$	Kreismittelpunkt
$\mathbf{t}$	Tangentenvektor
$\mathbf{U}$	B-Spline Knotenvektor
$\mathbf{X}$	Koordinatenvektor $[x \ y]^T$

## Lateinische Symbole

$A$	Flächeninhalt
$a$	freier Parameter
$b$	freier Parameter
$C$	Stetigkeit
$d$	Querschnitt

$f(x)$	Funktion, Abbildung
$G$	Geometrische Stetigkeit
$g$	B-Spline Polynomgrad
$g(x)$	allgemeine Funktion
$h$	halbe Dicke
$\bar{H}$	Grenzschichtformfaktor für kompressible Strömungen
$J$	Intervall
$k$	k-te Ableitung
$L$	Länge
$m$	meridiane Stromlinienkoordinate
$m'$	auf Stromlinienradius bezogene meridiane Stromlinienkoordinate
$Ma$	MACHzahl
$N$	B-Spline Basisfunktion
$p$	Druck
$r, R$	Radien
$Re$	REYNOLDSzahl
$s$	Bogenlänge
$u$	Kurvenparameter, Geschwindigkeit
$\dot{V}$	Volumenstrom
$x, y, z$	kartesische Koordinaten

## Griechische Symbole

$\beta$	Skelettlinienwinkel
$\delta$	(infinitesimal) kleine Variation
$\bar{\delta}_1$	Verdrängungsdicke (kompressible Strömung)
$\bar{\delta}_2$	Impulsverlustdicke (kompressible Strömung)
$\gamma$	max. Verlust bei Fehlanströmung
$\kappa$	Krümmung
$\mu$	Keilwinkel
$\omega$	Druckverlustkoeffizient

$\psi$	druckseitiger Tangentialwinkel
$\rho$	Dichte
$\rho$	Krümmungsradius
$\pi$	Kreiszahl
$\varepsilon$	(infinitesimal) kleine Variation
$\varphi$	saugseitiger Tangentialwinkel

## **Indizes**

0	total
abs	absolut
aero	Aeroblock
C	Skelettlinie
CH	Verdichtersperren (CHoke)
D	Druckseite
DP	Auslegungspunkt (Design Point)
E	Auslass, Hinterkante
I	Einlass, Vorderkante
isen	isentrop
max	maximal
min	minimal
o	oben
ref	Referenzentwurf
rel	relativ
rot	rotierend
S	Saugseite
ST	Verdichterpumpen (STall)
u	unten

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Halbkreis . . . . .	8
2.2	Definition der Stetigkeit entsprechend der $\varepsilon$ - $\delta$ -Formulierung nach WEIERSTRASS . . . . .	10
2.3	Beispiele für zwei nicht stetig differenzierbare Funktionen und deren Ableitungen . . . . .	12
2.4	Krümmung einer ebenen Kurve . . . . .	14
2.5	Vorzeichen der Krümmung ebener Kurven . . . . .	14
2.6	Berechnung der Koordinaten aus der natürlichen Gleichung einer Kurve . .	17
2.7	Berechnung des Einheitskreises aus der natürlichen Gleichung . . . . .	19
2.8	Tangentenstetiger und -unstetiger Übergang zweier aneinandergereihter Kurven . . . . .	20
2.9	Tangentenstetigkeit . . . . .	20
2.10	Krümmungstetige Übergänge zweier aneinandergängter Kurven . . . . .	21
2.11	Basisfunktionen des quadratischen B-Splines . . . . .	28
2.12	Quadratischer B-Spline . . . . .	28
2.13	Erste Ableitung des quadratischen B-Splines . . . . .	30
2.14	Zweite Ableitung des quadratischen B-Splines . . . . .	31
3.1	Treppenförmiger Schnitt durch ein vereinfachtes CAD-Modell eines Hochdruckverdichters . . . . .	40
3.2	Einteilung typischer, bei der Schaufelauslegung verwendeter Entwurfsmethoden . . . . .	41
3.3	Arbeitsweise einer Verdichterpassage . . . . .	42
3.4	Geschwindigkeitsdreiecke und Strömungsumlenkung einer Verdichterstufe .	44
3.5	Koordinatensysteme im Verdichter nach WU (1952) . . . . .	45
3.6	Klassifizierung möglicher Profilparametrisierungen . . . . .	46
3.7	Bezeichnungen am Schaufelprofil . . . . .	47
3.8	Bezeichnungen an der Profilverdichterkante . . . . .	48
3.9	Schematische Darstellung der Geometrienebenbedingungen an einem „kranken“ Profil . . . . .	49
4.1	Programmablaufplan des Profilaufbaus der direkten Parametrisierung . . .	52

4.2	Vergleich von Kreis und Ellipse als Vorderkante . . . . .	53
4.3	Vorder- und Hinterkante . . . . .	54
4.4	Direkte Parametrisierung des Schaufelprofils . . . . .	55
4.5	Berechnung der Übergangspunkte am Vorder- und Hinterkantenkreis . . .	56
4.6	Erzeugung tangentialstetiger Übergänge zwischen Vorder- bzw. Hinterkan- te und dem B-Spline der Saugseite . . . . .	58
4.7	Erzeugung eines krümmungsstetigen Übergangs zwischen der Kreisvorder- kante und dem B-Spline der Saugseite durch Platzierung des dritten Kon- trollpunkts $\mathbf{K}_2^S$ . . . . .	60
4.8	R01-Profilfitting mit der direkten Parametrisierung und Referenzprofil . . .	61
4.9	S03-Profilfitting mit der direkten Parametrisierung und Referenzprofil . . .	62
4.10	S09-Profilfitting mit der direkten Parametrisierung und Referenzprofil . . .	63
4.11	Normierte Krümmungsverläufe für Profilfittings von R01, S03 und S09 bei der direkten Parametrisierung . . . . .	64
4.12	Sprunghafter Anstieg der Krümmung der Druckseite des Profils S03 nach der Vorderkante VK durch zu geringen Abstand des zweiten Kontrollpunkts vom ersten . . . . .	64
5.1	Programmablaufplan des Profilaufbaus der indirekten Parametrisierung . .	66
5.2	Schematische Darstellung einer möglichen B-Splinekurve für den Krüm- mungsverlauf der Skelettlinie . . . . .	67
5.3	Skelettlinie . . . . .	68
5.4	Profilaufbau mit einem Rolling-Ball . . . . .	70
5.5	B-Splinekurve $r'(s)$ . . . . .	73
5.6	R01-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung und Referenzprofil . .	76
5.7	Verteilungen der indirekten Parametrisierung für R01 . . . . .	77
5.8	S03-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung und Referenzprofil . .	78
5.9	Verteilungen der indirekten Parametrisierung für S03 . . . . .	78
5.10	S09-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung und Referenzprofil . .	79
5.11	Verteilungen der indirekten Parametrisierung für S09 . . . . .	79
5.12	Krümmungsverläufe der Profilsseiten bei der indirekten Parametrisierung .	80
6.1	Programmablaufplan des Profilaufbaus der semidirekten Parametrisierung .	82
6.2	Differentielle Beschreibung der Saugseite . . . . .	83
6.3	Tangentiale Anbindung des Hinterkantenkreises an die Saugseite . . . . .	84
6.4	Darstellung der Krümmungsverteilung der Profilsaugseite mittels einer ku- bischen B-Splinekurve . . . . .	86
6.5	Einpassen der Saugseite in den vorgegebenen Aeroblock mittels der Ereig- nisfunktion des numerischen Integrators <i>ODE45</i> . . . . .	87
6.6	Konstruktion der Druckseite durch Dickenverlauf $h(s)$ rechtwinklig zur Ske- lettlinie . . . . .	88
6.7	Tangentiale Anbindung der Druckseite an die Hinterkante . . . . .	89



6.8	Graphische Herleitung der Bedingungen für tangentielle Stetigkeit an der Hinterkante . . . . .	90
6.9	Winkel an der Hinterkante . . . . .	91
6.10	Spiegelung der Vorderkante . . . . .	94
6.11	Parametrisierte Darstellung der Dickenverteilung . . . . .	100
6.12	R01-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung und Referenzprofil	102
6.13	Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für R01 . . . . .	102
6.14	S03-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung und Referenzprofil	103
6.15	Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für S03 . . . . .	103
6.16	S09-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung und Referenzprofil	104
6.17	Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für S09 . . . . .	104
7.1	Schematische Darstellung einer typischen Verlustpolaren einer Hochdruckverdichterschaufelsektion . . . . .	106
7.2	Programmablaufplan des allgemeinen Optimierungsprozesses . . . . .	110
7.3	Typisches verwendetes CFD-Netz . . . . .	112
7.4	Aufbau des verwendeten High-Performance-Computing-Clusters . . . . .	113
7.5	Parallelisierung auf einem einzelnen Knoten . . . . .	115
7.6	Parallele, paketweise Ausführung der CFD-Analysen mit der <i>SGE</i> . . . . .	116
7.7	Parallele Ausführung der CFD-Analysen mit statischer Knotenwahl . . . . .	118
7.8	Clusterauslastung bei den verschiedenen Parallelisierungen . . . . .	120
7.9	Vergleich der Ergebnisse im Kriterienraum (PARETODiagramm) . . . . .	124
7.10	Optimierte Schaufelblattprofile im Vergleich zum Referenzentwurf . . . . .	125
7.11	Vergleich der Krümmung der Saugseiten . . . . .	126
7.12	Vergleich der Krümmung der Druckseiten . . . . .	127
7.13	Verlauf der MACHzahl bei der direkten Parametrisierung D . . . . .	128
7.14	Verlauf der MACHzahl bei der indirekten Parametrisierung I . . . . .	129
7.15	Verlauf der MACHzahl bei der semidirekten Parametrisierung S . . . . .	130
7.16	Verlustpolaren von direkter (D), semidirekter (S) und indirekter (I) Parametrisierung im Vergleich zum Referenzentwurf R . . . . .	130



# Tabellenverzeichnis

2.1	Übersicht der Parameter der Ableitungen von B-Splinekurven . . . . .	26
7.1	<i>AMGA</i> Einstellungen . . . . .	110
7.2	Vergleich verschiedener Parallelisierungsvarianten bei der direkten Profil- parametrisierung . . . . .	119
7.3	Vergleich statistischer Größen der Optimierungen . . . . .	121
7.4	Vergleich der aerodynamischen Kennzahlen ausgesuchter Entwürfe . . . . .	126



# 1 Einleitung

Ein zentrales Thema der zukünftigen Entwicklung unserer Gesellschaft ist die Lösung der Problematik des bereits stattfindenden Klimawandels. Die öffentliche Debatte konzentriert sich dabei im Moment, sicherlich nicht zu Unrecht, auf den vom Menschen verursachten Ausstoß von sogenannten Schadstoffen wie Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ) oder Stickoxiden ( $\text{NO}_x$ ). Als einer der größten Einzelemittenten rückt die zivile Luftfahrtindustrie dadurch automatisch in das Blickfeld öffentlicher Diskussionen, zumal die Emission der Abgase in den großen Flughöhen, neben den ebenfalls den Treibhauseffekt begünstigenden Kondensstreifen, als besonders klimaschädlich gilt, BURKHARDT u. KÄRCHER (2011), ZABEL (2001). Die Menge des ausgestoßenen  $\text{CO}_2$  ist lediglich vom zu verbrennenden Kraftstoff und dessen Menge abhängig. Bisher existieren keine ernsthaften Alternativen zum Kerosin und für die nähere Zukunft sind, ähnlich wie bei den Kraftstoffen in der Automobilindustrie, lediglich Beimischungen von Biokraftstoffen zu erwarten, DLR (2008). Aber auch diese können das  $\text{CO}_2$ -Problem nicht vollständig lösen, da sie zu einem nicht unerheblichen Teil die  $\text{CO}_2$ -Produktion lediglich vom Triebwerk hin zur Landwirtschaft verlagern. Es ist deshalb unabdinglich, bestehende Triebwerkskonzepte weiter zielstrebig zu verbessern und neue Konzepte zu entwickeln, um so den Kraftstoffverbrauch zu verringern.

Für die Flugzeugbetreiber ist die Reduktion der  $\text{CO}_2$ -Emissionen von zweierlei Bedeutung. Zum einen werden sie ab dem Jahr 2012, gemäß der EU-Richtlinie 2008/101/EG, in den  $\text{CO}_2$ -Emissionshandel einbezogen und zum anderen bedeutet ein hoher  $\text{CO}_2$ -Ausstoß auch einen hohen Kerosinverbrauch. Bei den weiterhin als steigend anzunehmenden Kerosinpreisen und den Kosten aus dem Emissionshandel, entspricht eine Reduktion des Kraftstoffverbrauchs in zunehmendem Maße dem primären Ziel einer jeden Unternehmung, der Gewinnmaximierung.

Eigene Zielvorgaben zur  $\text{CO}_2$ -Reduktion hat die europäische Luftfahrtindustrie zusammen mit Regierungen und Forschungseinrichtungen in den sogenannten ACARE 2020-Zielen (Advisory Council for Aeronautics Research in Europe) formuliert, ACARE (2001). Dort wird, bezogen auf das Jahr 2000, eine Senkung des  $\text{CO}_2$ -Ausstoßes um 50 % bis 2020 angestrebt, wobei etwa 20 – 30 % auf die Triebwerke entfallen sollen. Für die Hersteller der Triebwerke ist diese Situation Fluch und Segen zugleich. Einerseits ist dieses Ziel natürlich eine enorme Herausforderung, da noch weitere Anforderungen wie bessere Haltbarkeit, geringere Wartungskosten und verkürzte Entwicklungszeiten hinzukommen. Andererseits

besteht dadurch ein riesiges Geschäftspotential, falls in dieser Frage eine technologische Führerschaft erarbeitet werden kann. Dafür sind allerdings Entwicklungsmethoden notwendig, die den bisher hauptsächlich angewendeten „trial-and-error“-Strategien überlegen sind. Einen Ansatz zur Lösung versuchen unter anderem von der Europäischen Union finanzierte Forschungsvorhaben zu liefern, in denen vorgeschlagen wird, Entwicklungsprozesse sowohl innerhalb eines Unternehmens als auch unternehmensübergreifend zu integrieren und noch stärker als bisher CAE- und CAM-Prozesse zu verwenden, ACARE (2008), CRESCENDO CONSORTIUM (2010).

Eine besondere Bedeutung spielen dabei automatisierte und integrierte multi-disziplinäre Optimierungsprozesse. Diese befinden sich momentan auf dem Vormarsch und haben im Speziellen in der Luftfahrt- und Triebwerksindustrie bereits eine hohe Akzeptanz gefunden. Gemäß der vereinbarten Ziele im *Flightpath 2050*, EUROPÄISCHE KOMMISSION (2011), sollen diese Prozesse bis zum Jahr 2050 standardmäßig innerhalb der europäischen Luftfahrtindustrie zur Anwendung kommen. Denn durch ihren Einsatz lassen sich in der Regel bei kürzeren Entwicklungszeiten bessere Entwürfe als bisher finden. Allerdings werden so auch neue Anforderungen an die Ingenieure gestellt. Insbesondere die Formulierung der Problemstellung und die parametrische Darstellung des zu optimierenden Objekts setzen ein großes Können an mathematischer Abstraktion und eine umfangreiche Erfahrung mit Optimierungsprozessen voraus.

### 1.1 Beschreibung von Schaufelprofilen in der Literatur

Steigende Anforderungen sowohl an Effizienz und Haltbarkeit der Triebwerke als auch an deren Entwicklungskosten und -zeiten bilden teilweise gegensätzliche Ziele, die von den Herstellern zu erfüllen sind. Dabei ist momentan der Einsatz von automatisierten Optimierungsprozessen zum Entwurf von Bauteilen oder sogar ganzer Baugruppen das Mittel der Wahl, um diesen Anforderungen gerecht zu werden. Eine führende Rolle darin nehmen Entwurf und Auslegung des Verdichters und der Turbine ein, was die hohe Anzahl von Veröffentlichungen zu diesen Themen zeigt. Im Bereich der aerodynamischen Optimierung von Verdichter- und Turbinenschaufeln existiert beispielsweise eine Vielzahl unterschiedlicher Arbeiten, die sich unter anderem in der Art der Geometrieparametrisierung, der numerischen Strömungsanalyse und der Optimierung unterscheiden.

Die wohl am meisten verwendete Schaufelprofilparametrisierung basiert auf der Verwendung einer Mittellinie, der sogenannten Skelettlinie, und einer Dickenverteilung, die rechtwinklig zur Skelettlinie aufgetragen wird. Systematisch kam diese Parametrisierung erstmals zu Beginn der 1930er Jahre bei der Entwicklung der NACA-Profilfamilie zum Einsatz, wobei beide Verläufe mittels Polynomansätzen beschrieben werden, JACOBS u. a. (1933). Eine Herleitung des Profilaufbaus sowie eine ausführliche Beschreibung der NACA-Profilserie finden sich auch in ABBOTT u. VON DOENHOFF (1959). Die Bedeutung dieser

Entwicklung zeigt sich darin, dass bis heute an dieser Art der Parametrisierung, unter anderem bei der Verwendung innerhalb von Optimierungsprozessen, festgehalten wird.

Basierend auf einer Arbeit von CASEY (1983) verwenden SIEVERDING u. a. (2004) beispielsweise bei der Optimierung von Schaufelsektionen eines Industrieverdichters diesen Ansatz. Allerdings werden die Verläufe der Skelettlinie und Dickenverteilung in jeweils vier Abschnitte unterteilt. Die Abschnitte für Vorder- und Hinterkante der Skelettlinienverteilung sind linear, der Vorderkantenabschnitt der Dickenverteilung entspricht dem einer Ellipse. Die beiden Mittelteile der Verteilungen werden durch jeweils zwei Bézier-Splines beschrieben, die tangentialstetig zusammengefügt sind. Durch eine interne Optimierungsschleife werden die entsprechenden Kontrollpunkte so lange variiert, bis eine Krümmungstetigkeit der Skelettlinie an dieser Stelle erreicht ist. Als Optimierer kommt ein skalarer genetischer Algorithmus zum Einsatz, wobei mehrere Ziele in einer Fitnessfunktion durch Wichtungsfaktoren zusammengefasst sind. Zur Erzeugung des gesamten Schaufelblatts werden die einzelnen Sektionen entlang ihrer Schwerpunkte aufgefädelt.

Eine Variation dieses Ansatzes stellt die Parametrisierung des Skelettlinienwinkels anstelle der Skelettlinienkoordinaten dar, SANGER (1982), DUTTA u. a. (2007). Dies beruht auf der Tatsache, dass der tangential Winkel der Skelettlinie prinzipiell aussagekräftiger in Bezug auf die Aerodynamik eines Schaufelblatts ist, als die Skelettlinie selbst. In Hinsicht auf die Verwendung innerhalb eines Optimierungsprozesses spielt dieser Vorteil jedoch nur eine untergeordnete Rolle, da der Optimierer ohne Intuition oder Erfahrung arbeitet. Im Vergleich zur Arbeit von SANGER (1982) werden in DUTTA u. a. (2007) zwar ebenfalls einzelne Schaufelsektionen aerodynamisch optimiert, jedoch steht der dreidimensionale Ansatz im Vordergrund. So sind Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilung als Bézier-Flächen modelliert, wodurch bei der Auffädellung der einzelnen Sektionen eine in radialer Richtung glatte Schaufel entsteht. Zur Minimierung des Verlustes im Auslegungspunkt und Maximierung des Arbeitsbereiches wird ein mehrkriterieller genetischer Algorithmus verwendet.

Eine zweite prinzipielle Variante der Parametrisierung ist die direkte Beschreibung der äußeren Kontur. Im Zuge einer Optimierung verbieten sich hier natürlich einfache Punktwolken, da viel zu viele Parameter entstünden, die noch dazu keinerlei Glattheit der Kontur sicherstellen würden. Deshalb bieten sich Ansätze auf Basis von Splinekurven an, die sowohl einen hohen Freiheitsgrad, als auch wenige Parameter und Glattheit in sich vereinen, PIEGL u. TILLER (1997). KÖLLER u. a. (2000) unterteilen eine Schaufelsektion in vier Abschnitte, wobei Saug- und Druckseite jeweils durch B-Splines dritter Ordnung repräsentiert werden. Die Vorderkante wird durch eine Ellipsenfunktion beschrieben und die Hinterkante entspricht einem Kreisbogen. Die einzelnen Segmente werden tangentialstetig zusammengefügt. Optimiert werden die einzelnen Sektionen mittels eines skalaren, kombiniert stochastischen und gradientenbasierten Verfahrens, wobei mehrere Optimierungsziele gewichtet in einer Zielfunktion zusammengefasst werden. Die Erzeugung einer dreidimensionalen Schaufel findet nicht statt.

In BÜCHE u. a. (2003) wird die Schaufelsektion ebenfalls in vier Abschnitte segmentiert, wobei jeweils ein Bézier-Spline mit sechs Kontrollpunkten eingesetzt wird. Durch geeignete Platzierung der Kontrollpunkte sollen  $C^2$ -stetige Übergänge zwischen den einzelnen Splines erzielt werden. Anstatt die Koordinaten der Kontrollpunkte direkt zu variieren, werden diese in intuitive technische Größen umgerechnet, wie z. B. Winkel- oder Längenangaben. Zur Erzeugung des dreidimensionalen Schaufelblatts werden radiale Verteilungen der variablen Parameter verwendet. Auch in dieser Arbeit werden einzelne Sektionen optimiert, wobei das mehrdimensionale Optimierungsproblem unter Verwendung einer gewichteten Fitnessfunktion in Verbindung mit einem skalaren genetischen Algorithmus gelöst wird. Eine geschlossene Beschreibung der Profilgeometrie mittels eines B-Splines findet sich beispielsweise in EGARTNER (1999). Zusätzlich werden Nebenbedingungen bezüglich der Krümmung bzw. des Tangentialwinkels in bestimmten Bereichen oder Punkten gestellt, um physikalisch und geometrisch sinnvolle Profile zu erhalten.

Bereits 1993 zeigt Korakianitis in drei Veröffentlichungen den Einfluss unstetiger Krümmungsverläufe von Turbinenschaufelsektionen auf das Strömungsfeld, indem er ein Profil so modifiziert, dass nahezu identische Varianten sowohl mit glattem als auch nicht glattem Krümmungsverlauf entstehen, KORAKIANITIS (1993a), KORAKIANITIS u. PAPAGIANNIDIS (1993). Dabei konnte er anhand von numerischen Strömungssimulationen unter anderem zeigen, dass bei krümmungstetigen Vorderkanten keine Überhöhungen der Machzahl auftreten. Weiterhin stellt er verschiedene Möglichkeiten vor, Schaufelsektionen zumindest teilweise krümmungsbasiert parametrisch darzustellen, KORAKIANITIS (1993b). Um die aus ihrer Krümmung abgeleitete Saugseite an Vorder- und Hinterkante anzuschließen, ist es jedoch notwendig, den Krümmungsverlauf iterativ so anzupassen, dass ein glatter Anschluss zur Vorder- und Hinterkante stattfindet. Eine Optimierung der Schaufelsektion oder eine Erweiterung auf das gesamte Schaufelblatt finden nicht statt. In WILSON u. KORAKIANITIS (1998) sind die Erkenntnisse noch einmal zusammengefasst dargestellt.

Obwohl die Ergebnisse der krümmungsbasierten Parametrisierung vielversprechend waren, erfolgte eine neuerliche ernsthafte Umsetzung erst wieder von GODARD u. a. (2008). Am Beispiel einer Verdichterschaufelsektion mit Einblasung wird zunächst die komplette Saugseite, mit Vorder und Hinterkante, durch ihren Krümmungsverlauf beschrieben. Die Druckseite, ohne Vorder- und Hinterkante, wird zunächst durch orthogonales Auftragen einer Flächenverteilung auf die Saugseite gewonnen. Anschließend wird die Krümmungskurve der Druckseite berechnet, wobei die entsprechenden Verteilungen der Vorder- bzw. Hinterkante stetig angeschlossen werden. Durch Integration werden aus der Krümmungskurve die Koordinaten der kompletten Druckseite berechnet, wobei durch ein Schießverfahren die Krümmungsverteilung so lange variiert werden muss, bis eine geschlossene Schaufelkontur entsteht. Die Implementierung dieser Parametrisierung in einen Optimierungsprozess findet nicht statt.

In den bisher aufgeführten Arbeiten geht es ausschließlich um die Auslegung bzw. Optimierung hinsichtlich eines oder mehrerer aerodynamischer Ziele. Tatsächlich unterliegen sowohl Verdichter- als auch Turbinenschaufeln aber auch strengen Anforderungen hinsichtlich der Strukturmechanik, wobei diese entweder als zusätzliches Optimierungsziel



oder aber als Nebenbedingung der Optimierung formuliert werden können. In beiden Fällen ist es notwendig, eine multidisziplinäre Optimierung durchzuführen, in der numerische aerodynamische und strukturmechanische Analysen in einem gemeinsamen automatisierten Prozess integriert werden. Dazu existieren verschiedene Arbeiten, die sowohl in der Verdichtervorauslegung anzusiedeln sind, z.B. AHMED (2005), als auch beim Schaufelauslegungsprozess, OTTO (2009). BÜCHE (2003) optimiert unter anderem ein Schaufelblatt bezüglich seines aerodynamischen Verlustes und Arbeitsbereiches sowie seines Resonanzverhaltens. Für letzteres kommt jedoch nur ein vereinfachter mechanischer Ansatz auf Basis eines Finite-Elemente Balkenmodells zum Einsatz. Weiterhin werden in dieser Arbeit verschiedene Optimierungsalgorithmen verglichen.

## 1.2 Inhalt und Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von parametrischen Geometriebeschreibungen von Schaufelprofilen in Hochdruckverdichtern, die sich in hervorragender Weise für die Verwendung in automatisierten aerodynamischen Optimierungsprozessen eignen. Da in der Vergangenheit oftmals eine krümmungsstetige Beschreibung der Profilkontur vernachlässigt wurde, soll in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk darauf liegen. Es werden drei verschiedene Methoden vorgestellt, die auf höchst unterschiedliche Art und Weise dieses Ziel erreichen und beste aerodynamische Eigenschaften ermöglichen sollen.

Um dieses Ziel zu erreichen, sind genaue Kenntnisse bezüglich der mathematischen Eigenschaften von Kurven und Funktionen unerlässlich. Egal ob die Kurve nun direkt das Profil oder nur einen die Form charakterisierenden Größenverlauf beschreibt, stets müssen ähnliche Stetigkeitsanforderungen erfüllt werden. So wird im zweiten Kapitel nicht nur gezeigt wie parametrische Kurven erzeugt werden können, sondern es werden auch die mathematischen Begriffe und Zusammenhänge dafür aufbereitet. Anschließend folgt eine Einführung in die aerodynamische Entwicklung von Verdichterschaufelprofilen. Es werden die verwendeten Begriffe am Schaufelprofil erläutert und gemeinsame Anforderungen an die Geometrie definiert. Zur besseren Unterscheidung und Einordnung bestehender und künftiger Profilparametrisierungen wird eine Klassifizierung selbiger bezüglich der parametrisierenden Größe entwickelt.

In den folgenden drei Kapiteln werden dann drei verschiedene Profilparametrisierungen vorgestellt. Je nach Art der Beschreibung der Geometrie ist der Grad der Komplexität der Parametrisierung recht unterschiedlich. Auch der numerische Aufwand unterscheidet sich deutlich. Den drei Methoden gemein ist die Forderung nach krümmungsstetiger Kontur, die auch von allen erfüllt wird. Im Kapitel vier wird eine Methode vorgestellt, die die Außenkontur des Profils direkt beschreibt. An den Profilkanten kommen dafür Kreissegmente zum Einsatz, während die Profelseiten B-Splinekurven entsprechen. Im Kapitel fünf wird die Kontur über zwei Hilfsgrößen generiert. Zuerst wird die Skelettlinie des Profils aus ihrer Krümmung erzeugt, durch das Abrollen eines Kreises mit variablem Radius entlang der Skelettlinie entstehen dann Saug- und Druckseite. Die dritte Methode, die in Kapitel

sechs hergeleitet wird, erzeugt zunächst eine höchst glatte Saugseite aus dem parametrisierten Krümmungsverlauf. Anschließend wird ein Dickenverlauf so superponiert, dass gleichzeitig die Druckseite und die wahre Skelettlinie entstehen. In Profiffittings müssen die Methoden zeigen, dass sie prinzipiell geeignet sind, typische Konturen von Verdichterschaukelprofilen zu erzeugen.

Im siebten Kapitel werden die drei vorgestellten Methoden anhand eines aerodynamischen Optimierungsprozesses verglichen. Ziel dieser Optimierung ist die gleichzeitige Minimierung des aerodynamischen Druckverlustes in einem Auslegungspunkt und die Maximierung des Arbeitsbereiches des Profils. Dabei sind zusätzliche Nebenbedingungen einzuhalten. Diese ergeben sich einerseits aus den geometrischen Forderungen an ein akzeptables Profil und andererseits aus weiteren aerodynamischen Anforderungen.

## 2 Mathematische Grundlagen

Im Folgenden werden allgemeine mathematische Grundlagen erläutert, die unverzichtbar für das Verständnis dieser Arbeit sind. Dazu zählen einerseits die Erzeugung parametrischer Kurven und andererseits die Diskussion ihrer Eigenschaften. Den Schwerpunkt bilden dabei B-Splinekurven und ihre Ableitungen.

### 2.1 Funktionen und Kurven in der Ebene

Hauptbestandteil dieser Arbeit ist die Entwicklung von parametrischen Geometriemodellen für ebene Verdichterschaufelprofile. Da für die spätere aerodynamische Auslegung selbiger hohe Ansprüche an die Güte der Geometrie gestellt werden, ist ein tieferes Verständnis der Eigenschaften von Kurven in der Ebene zwingend notwendig. Daher werden im Folgenden Grundlagen, Zusammenhänge und Werkzeuge erläutert bzw. vorgestellt, die im späteren Verlauf der Arbeit verwendet werden.

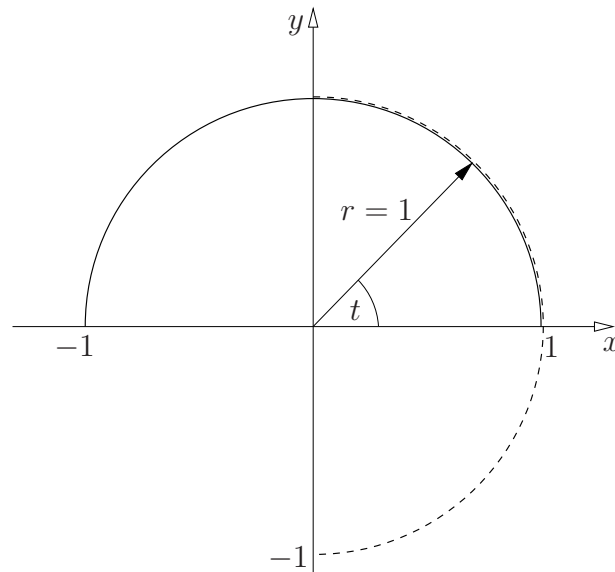
#### 2.1.1 Begriffe und Definitionen

Zentraler Bestandteil der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung von Kurven. Für eine spätere automatisierte Erzeugung dieser Kurven ist eine zweckmäßige mathematische Beschreibung unabdingbar. Am Beispiel eines Halbkreises mit dem Radius  $r = 1$ , Abb. 2.1, können nach BRONSTEIN u. a. (2005) drei verschiedene analytische Darstellungen reeller Funktionen gezeigt werden.

Die erste Möglichkeit ist die explizite Beschreibung in der Form  $y = f(x)$ , wodurch eine direkte Abhängigkeit des Funktionswertes  $y$  vom Argument  $x$  der Funktion hergestellt wird. Für den Halbkreis lautet die Gleichung

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{2.1}$$

mit  $x \in [-1, 1]$ . Wird Gl. (2.1) so umgeformt, dass alle Terme auf einer Seite stehen, entsteht als zweite Möglichkeit die implizite Darstellung  $F(x, y) = 0$ . Für das gewählte

**Abb. 2.1:** Halbkreis

Beispiel ergibt sich

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

mit  $x \in [-1, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . Beiden Formen gemein ist, dass lediglich Funktionen abgebildet werden können, in denen jedem  $x$ -Wert genau ein Funktionswert zugeordnet wird, wie bei dem mit durchgezogener Linie in Abb. 2.1 gezeigten Halbkreis. Sollen Kurven mit nicht eindeutigem funktionalen Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  beschrieben werden, wo also einem  $x$ -Wert mehrere  $y$ -Werte zugeordnet werden können, wie beispielsweise beim zweiten Halbkreis in Abb. 2.1 (gestrichelte Linie), bieten sich als dritte Möglichkeit Formulierungen

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

an, die auf einem zusätzlichen Parameter  $t$  basieren. Es wird daher von der Parameterdarstellung der Kurve gesprochen. Die Gleichungen für beide Halbkreise in Abb. 2.1 lauten dann identisch

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

mit  $t \in [0, \pi]$  für den oberen (durchgezogenen) und  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  für den rechten (gestrichelten) Halbkreis. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Formulierungen ist bei der Parameterdarstellung der positive Richtungssinn der Kurve nicht durch das wachsende Argument  $x$  vorgegeben, sondern durch zunehmende Werte des Kurvenparameters  $t$ , BRONSTEIN u. a. (2005). Der durchgezogene Halbkreis verläuft demnach von rechts nach

links und der gestrichelte Halbkreis von unten nach oben. Eine ausführliche Abhandlung zu den Vorteilen der Parameterdarstellung von Kurven und weitere Beispiele können beispielsweise in BURG u. a. (1994) gefunden werden.

Eine besondere Form der Parameterdarstellung entsteht durch die Verwendung der Bogenlänge  $s$  als Kurvenparameter in der Form

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

mit  $s \in [0, L]$  und der Gesamtlänge der Kurve  $L$ . Da die Bogenlänge einer Kurve keine künstliche, sondern eine immanente Größe ist, wird diese Form der Kurvendarstellung, beispielsweise in BURG u. a. (1994), auch als natürliche Parameterdarstellung bezeichnet. Die Bogenlänge  $s$  einer allgemeinen parametrischen Kurve (2.3) berechnet sich dabei für ein Teilstück  $[t_1, t_2]$  mit  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]dt^2$  als

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Stetigkeit von Funktionen

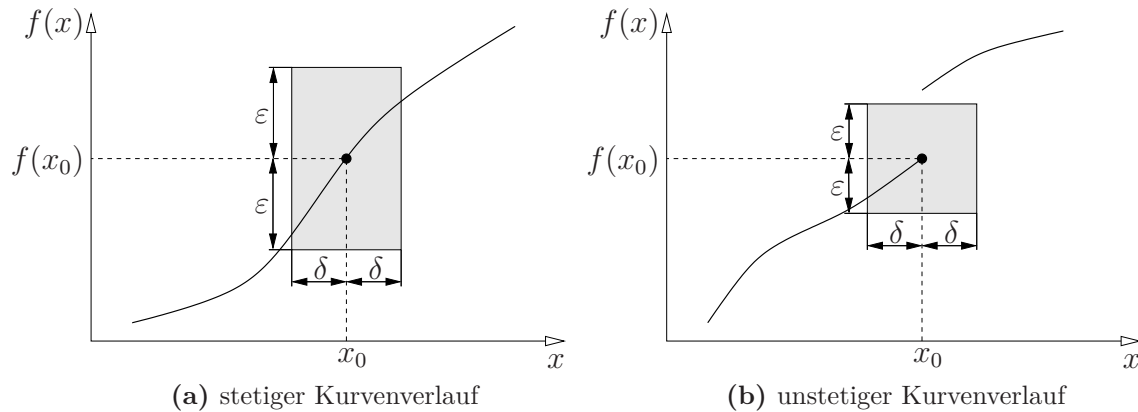
Im Verlauf dieser Arbeit wird an vielen Stellen von der Stetigkeit einer Kurve bzw. von stetigen Übergängen zwischen zwei Kurvensegmenten gesprochen. Anschaulich ausgedrückt ist eine Kurve dann stetig, wenn ihr Graph ohne abzusetzen mit einem Stift gezeichnet werden kann. Dies ist natürlich eine mathematisch unbefriedigende Definition, weshalb an dieser Stelle näher auf den verwendeten Stetigkeitsbegriff eingegangen werden soll.

Im Allgemeinen werden zwei unterschiedliche Definitionen der Stetigkeit verwendet. Bei theoretischen Betrachtungen hat sich die von WEIERSTRASS geprägte, sogenannte  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung bewährt, bei konkreten Stetigkeitsuntersuchungen wird meist eine Grenzwertbetrachtung vorgezogen, BURG u. a. (1992). Bei der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung wird eine Umgebung um den zu untersuchenden Punkt  $x_0$  betrachtet. Wenn Stetigkeit an dieser Stelle vorliegen soll, muss nach WALTER (1997) zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existieren, so dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta. \quad (2.7)$$

Zur Veranschaulichung sind in Abb. 2.2 je eine Konfiguration für eine stetige Kurve und einen unstetigen Verlauf gezeigt. Bei beiden wird an der Stelle  $x_0$  eine beliebige Umgebung  $\varepsilon > 0$  um den Funktionswert  $f(x_0)$  eingezeichnet. Bei der stetigen Kurve in Abb. 2.2a kann ein passendes  $\delta > 0$  gefunden werden, so dass Ungleichung (2.7) erfüllt wird, sprich

die gezeichnete Kurve die linke und rechte Kante des definierten Rechtecks schneidet. Beim unstetigen Kurvenverlauf trifft dies nicht für beliebige Umgebungen zu. So ist in Abb. 2.2b ein  $\varepsilon > 0$  eingezeichnet, zu dem kein  $\delta > 0$  existiert, bei dem die Kurve die rechte Kante des Rechtecks schneidet, also die Bedingung (2.7) erfüllt. Auf einen Beweis wird hier verzichtet, dieser kann beispielsweise in HEUSER (2001) nachvollzogen werden.



**Abb. 2.2:** Definition der Stetigkeit entsprechend der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Formulierung nach WEIERSTRASS

Eine zweite Möglichkeit ist die bei konkreten Stetigkeitsuntersuchungen bevorzugte, ursprüngliche Definition mittels einer Grenzwertbetrachtung, BRONSTEIN u. a. (2005). Eine Funktion  $f$  ist in einem Punkt  $x_0$  stetig, wenn der Funktionswert an der Stelle  $x_0$  identisch mit dem Grenzwert der Funktion für gegen  $x_0$  strebende Argumente  $x$  ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) . \quad (2.8)$$

Ist eine Funktion in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig, so wird auch von  $C^0$ - bzw.  $C$ -Stetigkeit der Funktion gesprochen, wobei die hochgestellte 0 für die nullte Ableitung, also die Funktion selbst, steht, WALTER (1997).

### 2.1.3 Stetige Differenzierbarkeit von Funktionen

Eine Funktion  $f$  ist in einem Intervall  $J$  differenzierbar, wenn für alle Punkte  $x \in J$  der Grenzwert

$$\frac{df}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird als Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  bezeichnet, HEUSER (2001). Abhängig von der Größe, nach der eine Funktion abgeleitet wird, werden in dieser Arbeit verschiedene Schreibweisen verwendet. Wird wie eben eine

Funktion  $f(x)$  nach ihrem Argument  $x$  abgeleitet, wird

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (2.10)$$

geschrieben. In der Kurzschreibweise  $f'(x)$  kennzeichnet, wie allgemein üblich, der Apostroph die Ableitung der Funktion nach  $x$ . Für eine Funktion in Parameterdarstellung, z. B.  $\mathbf{X}(t) = [x(t) \ y(t)]^\top$ , erfolgt die Ableitung nach dem Kurvenparameter  $t$ :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Zur Unterscheidung von (2.10) wird in (2.11) die Kurzform mit einem übergestellten Punkt gekennzeichnet. Einen Sonderfall stellt die in dieser Arbeit oft verwendete Ableitung nach dem speziellen Kurvenparameter  $s$ , also der Bogenlänge, dar. Um diese Ableitung zur Ableitung in (2.11) abzugrenzen und in Anlehnung an die übliche Schreibweise in der Differentialgeometrie, siehe beispielsweise BLASCHKE u. LEICHTWEISS (1973) oder SCHÖNE (1975), wird daher die gleiche Notation wie in (2.10) verwendet:

$$\mathbf{X}'(s) = \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx(s)}{ds} \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Ist die Ableitung der Funktion in dem untersuchten Intervall  $J$  existent und stetig, siehe Abschnitt 2.1.2, so wird die Funktion als stetig differenzierbar in  $J$  bezeichnet. Ist die Funktion  $k$ -mal stetig ableitbar, so wird sie  $k$ -fach stetig differenzierbar genannt, HEUSER (2001). Analog zum Abschnitt 2.1.2 wird auch gesagt, die Funktion sei von der Klasse  $C^k$  oder  $C^k$ -stetig, ALT (2002) oder WALTER (1997).

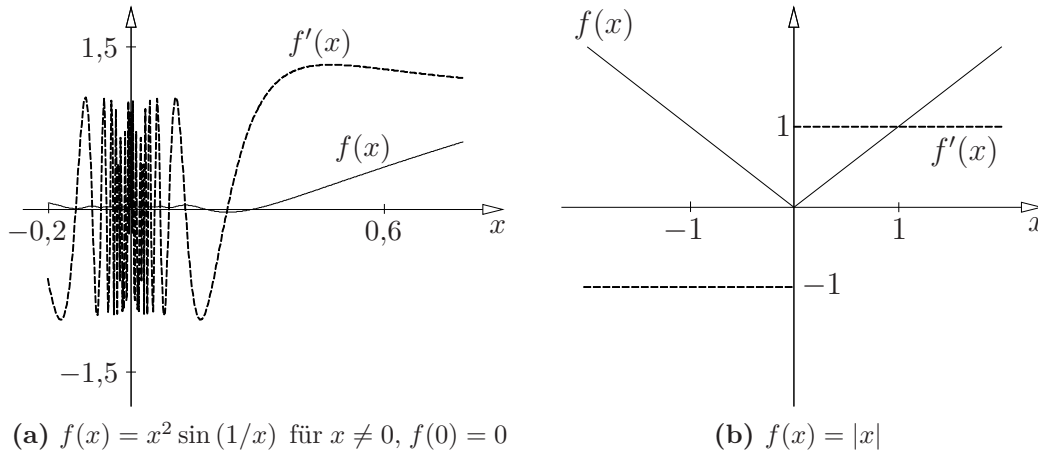
Im Folgenden sollen zur Veranschaulichung zwei Beispiele für nicht stetig differenzierbare Funktionen gezeigt werden. In Abb. 2.3a ist der Graph der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.13)$$

abgebildet. Wie sich mit (2.8) zeigen lässt, ist die Funktion (2.13) stetig, da  $f(x)$  für  $x \rightarrow 0$  gegen Null strebt. Die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.14)$$

ist zwar für alle Punkte existent, weshalb  $f(x)$  in allen Punkten differenzierbar ist, gemäß (2.8) existiert für  $f'(x)$  und  $x \rightarrow 0$  jedoch kein Grenzwert, weswegen  $f'(x)$  in  $x = 0$  unstetig ist, WALTER (1997).



**Abb. 2.3:** Beispiele für zwei nicht stetig differenzierbare Funktionen (—) und deren Ableitungen (---)

Als zweites Beispiel sind in Abb. 2.3b die Graphen der Betragsfunktion und ihrer Ableitung, d. h.

$$g(x) = |x|, \quad (2.15)$$

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

abgebildet. Die Funktion  $g(x)$  weist bei  $x = 0$  zwar einen Knick auf, ist jedoch im gesamten Bereich stetig. Die Ableitung ist an dieser Stelle nicht nur unstetig, sondern gemäß Gl. (2.9) nicht einmal existent, da sich links- und rechtsseitiger Grenzwert unterscheiden. Die Funktion  $g(x)$  ist an dieser Stelle also nicht differenzierbar.

### 2.1.4 Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung

Bei der Verwendung der Parameterdarstellung von Kurven ist es oftmals notwendig, die Ableitungen der Kurve nach dem Parameter in Ableitungen nach einer anderen Größe umzurechnen. Im Folgenden wird daher gezeigt, wie für mittelbare (oder verkettete) Funktionen der Art  $y = f(g(x))$  mit Hilfe der bekannten Kettenregel der Differentialrechnung

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) g'(x) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (2.16)$$



aus den Ableitungen nach dem Kurvenparameter  $t$  die  $k$ -ten Ableitungen  $d^k y/dx^k$  berechnet werden können.

Bei der ersten Ableitung  $y'$  entspricht die Vorgehensweise naturgemäß genau der obigen Regel (2.16), wobei die verkettete Funktion hier die Form  $y = y(x(t))$  hat. Nach Ableiten und Umstellen folgt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \quad (2.17)$$

Eine analoge Vorgehensweise führt zur Umrechnung der zweiten Ableitung, wobei wegen des auftretenden Quotienten  $\dot{y}/\dot{x}$  zusätzlich zur Kettenregel die Quotientenregel der Differentialrechnung

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (2.18)$$

angewendet werden muss:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \frac{dt}{dx} \equiv \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \frac{1}{dx/dt} \\ &= \frac{1}{\dot{x}} \left(\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\right) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Für die Herleitung der dritten Ableitung werden sowohl Ketten- als auch Quotientenregel benötigt:

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} - \frac{\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right) \\ &= \frac{1}{\dot{x}} \left(\frac{\dot{x}^2 \ddot{y} - 2\dot{x}\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^4} - \frac{(\ddot{x}\dot{y} + \ddot{y}\dot{x})\dot{x}^3 - 3\dot{x}^2\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^6}\right) \\ &= \frac{\dot{x}^2 \ddot{y} - 3\dot{x}\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}\dot{x} + 3\dot{x}^2\ddot{y}}{\dot{x}^5}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Allen drei Ableitungen gemein ist, dass im Nenner  $\dot{x}$  steht. Daher gelten die Gln. (2.17), (2.19) und (2.20) nur für  $\dot{x} \neq 0$ . Mit Blick auf Gl. (2.17) erscheint diese mathematische Einschränkung sinnvoll, da eine ebene Kurve für  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\dot{y}(t) \neq 0$  in einem Bereich  $t_1 \leq t \leq t_2$  senkrecht zur  $x$ -Achse verläuft und damit einen unendlich großen Anstieg besitzt. Gemäß der Definition in Abschnitt 2.1.3 ist die Funktion dann in diesem Intervall nicht differenzierbar.

### 2.1.5 Krümmung ebener Kurven

Die Krümmung einer ebenen Kurve beschreibt die Abweichung der Kurve von ihrer Tangente in der Umgebung eines Punktes. Dazu wird das Kurvensegment  $\widehat{PQ}$  der natürlich parametrisierten, ebenen Kurve  $x(s), y(s)$  mit der Bogenlänge  $\Delta s$  in Abb. 2.4 betrachtet.

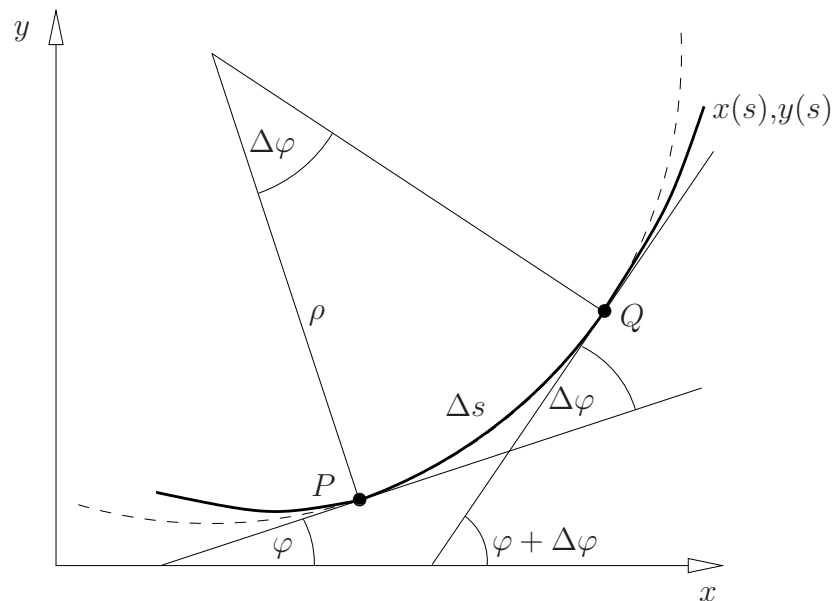


Abb. 2.4: Krümmung einer ebenen Kurve

Nach BURG u. a. (1994) ist die Krümmung  $\kappa$  definiert als der Grenzwert des Quotienten aus der Differenz  $\Delta\varphi$  der Tangentialwinkel in  $P$  und  $Q$  und der Bogenlänge  $\Delta s$ :

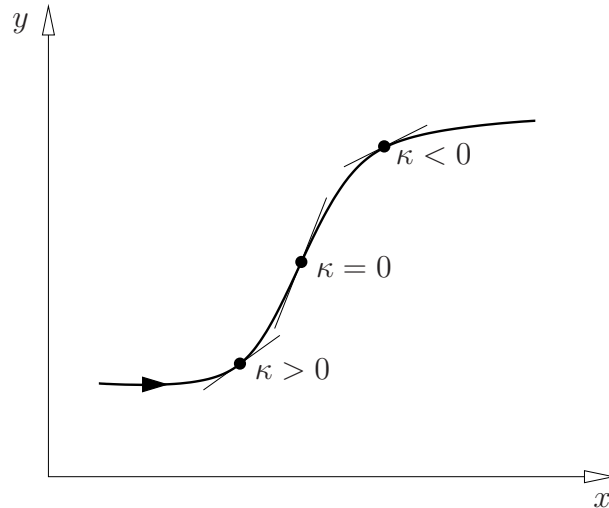
$$\kappa := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.21)$$

Die Winkeldifferenz ist dabei vorzeichenbehaftet und dieses überträgt sich auch auf die Krümmung  $\kappa$ . Bei einer gedanklichen Fahrt entlang der Kurve ist die Krümmung für Linksbiegungen stets positiv, für Rechtsbiegungen stets negativ, und in Wendestellen verschwindet sie, Abb. 2.5.

Für die Berechnung der Krümmung einer Kurve in Parameterdarstellung kann Gl. (2.21) unter Verwendung der Kettenregel zunächst in

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{ds/dt} \quad (2.22)$$

umgeformt werden. Der Winkel  $\varphi$  ergibt sich aus der bekannten Beziehung am rechtwinkligen Dreieck zu  $\tan \varphi = dy/dx$  bzw.  $\cot \varphi = dx/dy$  für explizit formulierte Kurven und



**Abb. 2.5:** Vorzeichen der Krümmung ebener Kurven

nach Anwenden von Gl. (2.17) für parametrische Darstellungen zu

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} & \forall \dot{x} \neq 0 \\ \operatorname{arccot} \frac{\dot{x}}{\dot{y}} & \forall \dot{y} \neq 0 \end{cases} . \quad (2.23)$$

Für die Ableitung des Tangentialwinkels  $\varphi$  nach dem Parameter  $t$  folgt für beide Fälle aus (2.23)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \operatorname{arccot} \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \right) \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mit  $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , vgl. (2.6), folgt eingesetzt in (2.22) die Krümmung für parametrische Kurven:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} . \quad (2.25)$$

Für die natürliche Parameterdarstellung einer Kurve mit  $t = s$  verschwindet wegen  $ds/dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1$  der Nenner in (2.25) und es folgt für die Krümmung

$$\kappa(s) = x'y'' - x''y' , \quad (2.26)$$

wobei die Vereinbarung  $(\prime) = d()/ds$  gilt. Eine explizite Formulierung  $y = f(x)$  für Kurven wird in dieser Arbeit nicht verwendet. Der Vollständigkeit halber soll dennoch an dieser Stelle die Rechenvorschrift angegeben werden. Sie kann aus (2.25) unter Verwendung der

Beziehungen (2.17) und (2.19) gewonnen werden und lautet

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (2.27)$$

Bei erneuter Betrachtung der Abb. 2.4 kann eine weitere anschauliche Größe zur Beschreibung der Krümmung abgeleitet werden. Durch den Grenzübergang  $\Delta s \rightarrow 0$  kann das nun infinitesimale Bogensegment  $ds$  der Kurve näherungsweise als Kreisbogen mit der bekannten Beziehung für seine Länge

$$ds = \rho |d\varphi| \quad (2.28)$$

angenommen werden. Die Winkeldifferenz  $d\varphi$  kann dabei, wie bereits zu Beginn des Abschnitts erläutert, negativ sein, Radius  $\rho$  und Bogenlänge  $ds$  des Kreisbogens sind aber stets positiv. Umgestellt folgt entsprechend Gl. (2.21)

$$\frac{|d\varphi|}{ds} = |\kappa| = \frac{1}{\rho} \quad (2.29)$$

bzw.

$$\rho := \frac{1}{|\kappa|}. \quad (2.30)$$

Wegen dieser direkten Verbindung zwischen Krümmung und Radius wird  $\rho$  auch als Krümmungsradius bezeichnet.

Weitere Eigenschaften sowie ausführliche Herleitungen zur Krümmung ebener Kurven, räumlicher Kurven aber auch von Flächen finden sich insbesondere in Büchern zur Differentialgeometrie wie beispielsweise GRAY (1994), DO CARMO (1976), PRESSLEY (2001) oder KÜHNEL (2005).

### 2.1.6 Natürliche Gleichung ebener Kurven

Ist der Krümmungsverlauf einer Kurve bekannt, können die Koordinaten der Kurve durch Lösen eines Systems von Differentialgleichungen berechnet werden. Wenn die Krümmung in der Form

$$\kappa = \kappa(s) \quad (2.31)$$

mit der Bogenlänge  $s \in [0, s_E]$  gegeben ist, wird von der natürlichen Gleichung der Kurve gesprochen, BLASCHKE u. LEICHTWEISS (1973). Darin markieren  $s = 0$  den Start- und  $s = s_E$  den Endpunkt der Kurve. Durch Integration von (2.31) bezüglich der Bogenlänge

$s$  ergibt sich aus (2.21) der Tangentialwinkel  $\varphi$  der Kurve zu

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s \kappa(\bar{s}) \, d\bar{s} \quad (2.32)$$

mit dem Anfangswinkel  $\varphi_0$ . Die Koordinaten  $[x(s) \ y(s)]^\top$  der Kurve ergeben sich dann aus den trigonometrischen Beziehungen  $dx = ds \cos \varphi$ ,  $dy = ds \sin \varphi$  am rechtwinkligen Dreieck in Abb. 2.6. Durch Integration bezüglich  $s$  wird mit dem Startpunkt  $[x_0 \ y_0]^\top$

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \int_0^s \begin{bmatrix} \cos \varphi(\bar{s}) \\ \sin \varphi(\bar{s}) \end{bmatrix} d\bar{s} \quad (2.33)$$

gefunden. Bei identischen natürlichen Gleichungen (2.31) entstehen gleiche Kurvenformen, die sich lediglich durch ihre Orientierung und Lage in der Ebene unterscheiden und damit kongruent sind, KOWALEWSKI (1931). Erst mit den Anfangsbedingungen  $\varphi_0, x_0, y_0$  für  $s = 0$ , Abb. 2.6, sind sie eindeutig bestimmt.

Für einfache Graphen, wie Geraden oder Kreise, können leicht analytische Lösungen für (2.32) und (2.33) gefunden werden, wie in den folgenden Beispielen gezeigt wird. Wird der Krümmungsverlauf dagegen durch quadratische oder höhergradige Polynomansätze beschrieben, kann Gl. (2.33) meist nicht analytisch gelöst werden. Es empfiehlt sich daher, die Gln. (2.32) und (2.33) als Differentialgleichungssystem (DGS) in der Form

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \kappa(s), \\ x'(s) &= \cos \varphi(s), \\ y'(s) &= \sin \varphi(s) \end{aligned} \quad (2.34)$$

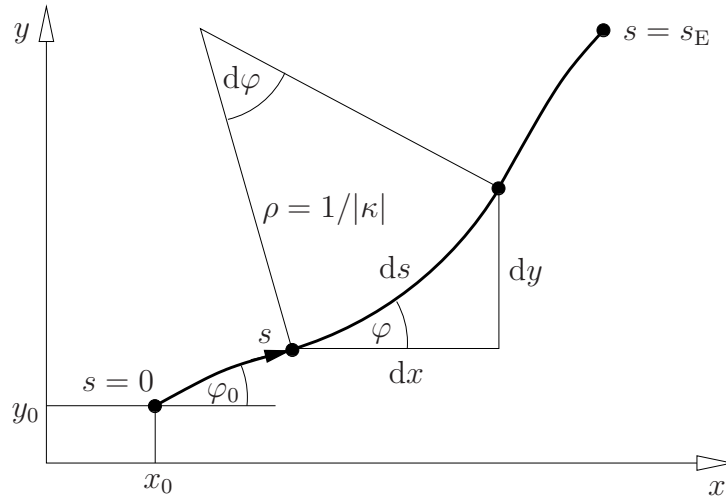
zu schreiben, wobei die vereinbarte Notation  $()' = d()/ds$  gilt.

Das einfachste Beispiel einer natürlichen Gleichung ist die Darstellung einer Geraden. Mit der Vorgabe  $\kappa(s) = 0$  ergibt sich für den Tangentenwinkel aus (2.32)

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int 0 \, ds = \varphi_0. \quad (2.35)$$

Eingesetzt in (2.33) folgen die Koordinaten der Kurve zu

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \int_0^s \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{bmatrix} d\bar{s} = \begin{bmatrix} x_0 + s \cos \varphi_0 \\ y_0 + s \sin \varphi_0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$



**Abb. 2.6:** Berechnung der Koordinaten aus der natürlichen Gleichung einer Kurve

Die erste Zeile in Gl. (2.36) kann nun nach  $s$  umgestellt und in die zweite Zeile eingesetzt werden, woraus die bekannte Ein-Punkt-Form der Geradengleichung folgt:

$$y(x) - y_0 = \tan \varphi_0 (x - x_0). \quad (2.37)$$

Für eine konstante Krümmung  $\kappa(s) = 1$  kann die Gleichung des Einheitskreises in Abb. 2.7 hergeleitet werden. Gl. (2.32) liefert mit  $\varphi_0 = \pi/2$  für den Tangentialwinkel

$$\varphi(s) = \frac{\pi}{2} + \int_0^s 1 \, ds = \frac{\pi}{2} + s. \quad (2.38)$$

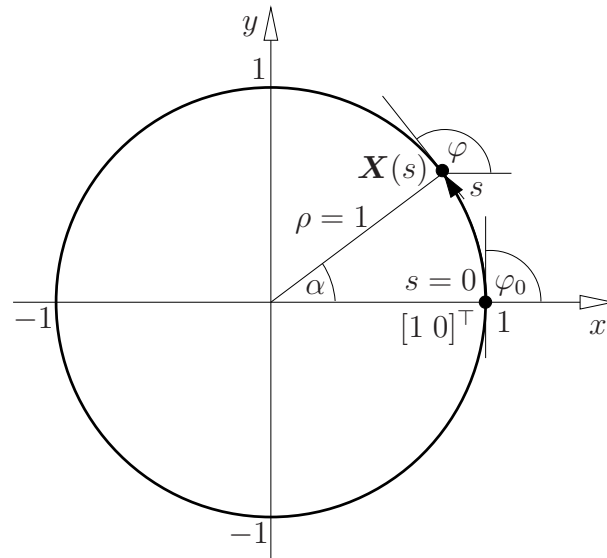
Für die Koordinaten folgt nach Einsetzen von (2.38) in Gl. (2.33) mit dem Startpunkt  $[x_0 \ y_0]^\top = [1 \ 0]^\top$

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + \bar{s}) \\ \sin(\pi/2 + \bar{s}) \end{bmatrix} d\bar{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\pi/2 + s) - 1 \\ -\cos(\pi/2 + s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Da für den Radius des Einheitskreises  $\rho = 1$  gilt, entspricht die Bogenlängenkoordinate  $s = \alpha = \varphi - \pi/2$  gleichzeitig dem eingeschlossenen Winkel zwischen  $x$ -Achse und der Koordinate.

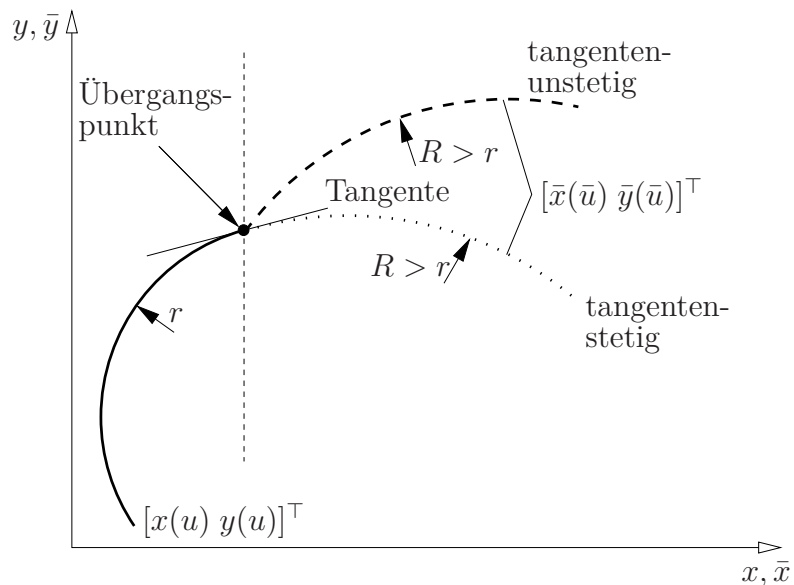
### 2.1.7 Charakterisierung von Kurvenübergängen

Nicht nur die Stetigkeit einer Kurve und ihrer Ableitungen ist in dieser Arbeit von Interesse, sondern insbesondere die Stetigkeit beim Übergang zweier aneinandergängter,



**Abb. 2.7:** Berechnung des Einheitskreises aus der natürlichen Gleichung

parametrisch beschriebener Kurven  $[x(u) \ y(u)]^\top$  und  $[\bar{x}(\bar{u}) \ \bar{y}(\bar{u})]^\top$ . Es wird dabei vorausgesetzt, dass sich die Kurven im Übergangspunkt treffen, womit bereits die  $C^0$ -Stetigkeit, vgl. Abschnitt 2.1.2, erreicht ist. Abb. 2.8 zeigt zwei verschiedene  $C^0$ -stetige Kurvenübergänge, die sich in ihrer Glattheit unterscheiden.



**Abb. 2.8:** Tangentenstetiger und -unstetiger Übergang zweier aneinandergehängter Kurven am Beispiel von Kreissegmenten mit den Radien  $r$  und  $R$

Wird zunächst die gestrichelte Linie in Abb. 2.8 betrachtet, so besitzt diese mit  $R > r$  nicht nur einen anderen Radius als die Ursprungskurve, sondern auch eine steilere Tangente im Übergangspunkt, was sich als deutlich sichtbarer Knick bemerkbar macht. Somit

ergibt sich weder eine Tangenten- noch eine Krümmungstetigkeit. Ein Übergang dieser Art ist aus technischer oder ästhetischer Sicht meist abzulehnen.

Ein deutlich glatterer Übergang wird erreicht, wenn die ersten Ableitungen beider Kurven im Übergangspunkt übereinstimmen, also  $\dot{x} = \dot{\bar{x}}$  und  $\dot{y} = \dot{\bar{y}}$  ist. In diesem Fall ist der Übergang  $C^1$ -stetig, vgl. Abschnitt 2.1.3. Geometrisch betrachtet sind dann die Tangentenvektoren  $\mathbf{t}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  beider Kurven im Übergangspunkt identisch. Für einen tangentialstetigen Übergang genügt es jedoch, wenn beide Tangentenvektoren in dieselbe Richtung zeigen aber unterschiedlich lang sind, d. h.  $\bar{\mathbf{t}} = a\mathbf{t}$  für beliebige  $a \in \mathbb{R}$  ist, Abb. 2.9. In diesem Fall sind die Ableitungen  $y'(x)$  und  $\bar{y}'(\bar{x})$  identisch, denn mit  $\mathbf{t} = [\dot{x} \ \dot{y}]^\top$  und  $\bar{\mathbf{t}} = [\dot{\bar{x}} \ \dot{\bar{y}}]^\top$  folgt

$$\bar{y}' = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{y} \, d\bar{u}}{d\bar{u} \, d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{y}}}{\dot{\bar{x}}} = \frac{a \dot{y}}{a \dot{x}} \equiv \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx} = y' \quad (2.40)$$

und es wird von der geometrischen  $G^1$ -Stetigkeit gesprochen, BENDER u. BRILL (2006). Der tangentialstetige Übergang (gepunktete Linie in Abb. 2.8) ist wesentlich glatter als der  $C^0$ -stetige (gestrichelte Linie) und erfüllt bereits viele technische Anforderungen. Der freie Parameter  $a$ , der durch den Verzicht auf die strengere  $C^1$ -Stetigkeit entsteht, wird im späteren Verlauf der Arbeit innerhalb von Optimierungsprozessen variiert.

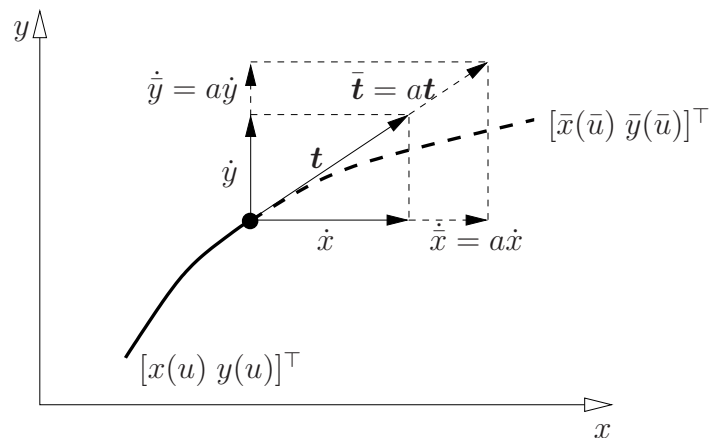


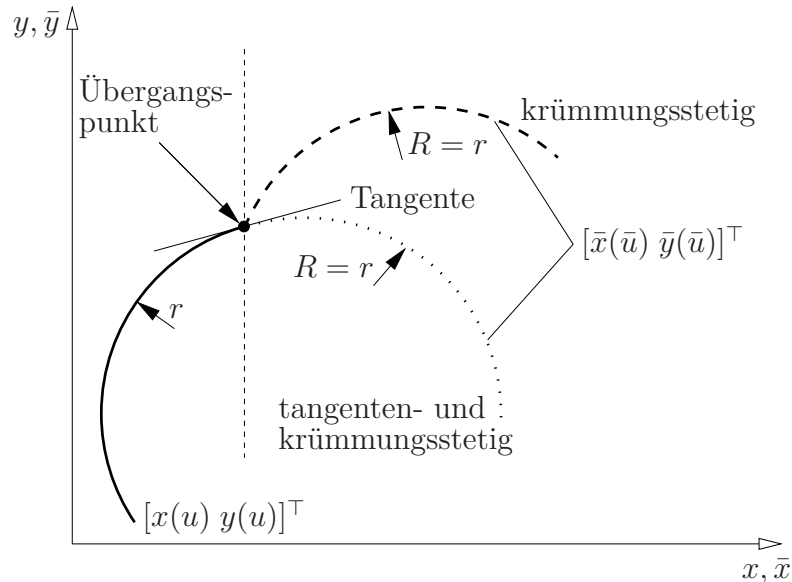
Abb. 2.9: Tangentialstetigkeit

Oft wird auch ein krümmungstetiger Übergang gefordert. In Abb. 2.10 sind zwei verschiedene Übergänge eingezeichnet, bei denen die Krümmung konstant bleibt. Beim Betrachten der gestrichelten Linie wird aber sofort klar, dass die alleinige Forderung nach Krümmungstetigkeit nicht sinnvoll ist, sondern zusätzlich tangentiale Stetigkeit (gepunktete Linie) zu fordern ist. In Anlehnung an die Tangentialstetigkeit wird die zusätzliche Übereinstimmung der Krümmung im Übergangspunkt als  $G^2$ -Stetigkeit bezeichnet und ist nicht zu verwechseln mit  $C^2$ -Stetigkeit. Mit der Gleichung (2.27) für die Krümmung und Gl. (2.40) folgt aus der Forderung  $\kappa \stackrel{!}{=} \bar{\kappa}$ , dass die zweiten Ableitungen

$$y'' \stackrel{!}{=} \bar{y}'' \quad (2.41)$$



im Übergangspunkt identisch sein müssen. Analog zur Vorgehensweise bei der Erfüllung der Tangentenstetigkeit, wird gemäß HOSCHEK u. LASSER (1989) ein weiterer zusätzlicher Freiheitsgrad  $b$  erhalten, der später auch als Optimierungsparameter variiert wird.



**Abb. 2.10:** Krümmungsstetige Übergänge zweier aneinandergängender Kurven am Beispiel von Kreissegmenten mit den Radien  $r$  und  $R$

## 2.2 B-Splinekurven

Zur mathematischen Beschreibung von Kurven existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Möglichkeiten, die sich gemäß ihrer Eigenschaften mehr oder weniger gut für den bestehenden Anwendungszweck eignen. Als ein universell einsetzbarer Ansatz haben sich die sogenannten NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) erwiesen. In professionellen, computergestützten Entwurfsprozessen haben sich NURBS mittlerweile zum Industriestandard entwickelt und bilden die Basis verschiedener Schnittstellen, wie z. B. STEP (STandard for the Exchange of Product model data) oder IGES (Initial Graphics Exchange Specification), PIEGL u. TILLER (1997).

Ein vereinfachender Sonderfall der NURBS sind die Basis- bzw. B-Splines, die zur parametrischen Darstellung von Kurven in dieser Arbeit ausschließlich zur Anwendung kommen und daher näher erläutert werden. In FARIN (2002) ist eine ausführliche geschichtliche Abhandlung zu dieser Thematik zu finden. Eine genaue Herleitung und ausführliche Beschreibung der Eigenschaften kann in vielen Büchern zu CAD (Computer Aided Design), beispielsweise FARIN (1994) oder SALOMON (2006) gefunden werden. Aber auch Bücher zur numerischen Mathematik, wie z. B. SCHWARZ u. KÖCKLER (2009) oder DEUFLHARD u. HOHMANN (2008) bieten grundlegende Übersichten, was die große Bedeutung verdeutlicht, die B-Splines mittlerweile haben. Da sowohl B-Splinekurven als auch -flächen

existieren, soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass im Folgenden stets B-Splinekurven gemeint sind, auch wenn nur kurz B-Splines geschrieben wird.

### 2.2.1 Definition und Eigenschaften

B-Splinekurven sind parametrische, stückweise definierte Polynomfunktionen  $\mathbf{b}(u)$  und berechnen sich allgemein in einer durch die Koordinaten  $x, y$  aufgespannten Ebene nach PIEGL u. TILLER (1997) gemäß

$$\mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n N_{i,g}(u) \mathbf{K}_i, \quad u \in [0, 1]. \quad (2.42)$$

Die entstehende Kurve hängt von den Basispolynomen  $N_{i,g}(u)$  und den Koordinaten der  $n + 1$  Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_i$  ab. Der Kurvenparameter  $u$  ist in dieser Arbeit stets zwischen Null und Eins normiert, wobei prinzipiell auch andere Intervalle zulässig sind. Die Basispolynome ergeben sich rekursiv aus

$$N_{i,j}(u) = \frac{u - U_i}{U_{i+j} - U_i} N_{i,j-1}(u) + \frac{U_{i+j+1} - u}{U_{i+j+1} - U_{i+1}} N_{i+1,j-1}(u), \quad j = 1, 2, \dots, g. \quad (2.43)$$

Tritt in Gl. (2.43) eine Division durch Null auf, wird der gesamte Quotient per Definition auf Null gesetzt. Die Rekursion beginnt mit den Basisfunktionen nullten Grades ( $j = 0$ ), definiert als

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in [U_i, U_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.44)$$

Für die angegebenen Intervallgrenzen in (2.44) existieren in der Literatur verschiedene Angaben. In PIEGL u. TILLER (1997) und PRAUTZSCH u. a. (2002) beispielsweise wird das oben gewählte linksseitig geschlossene und rechtsseitig offene Intervall angegeben, wogegen bei SCHWARZ u. KÖCKLER (2009) oder QUARTERONI u. a. (2004) das Intervall mit  $u \in [U_i, U_{i+1}]$  beidseitig geschlossen ist. Im Folgenden wird die Formulierung von PIEGL u. TILLER (1997) gewählt, wobei für das Beispiel in Abschnitt 2.2.3 gezeigt wird, dass beide Varianten gleichwertig sind.

Die sogenannten Knoten  $U_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, g + n + 1$  in (2.44) werden im Knotenvektor

$$\mathbf{U} = \underbrace{[0 \dots 0]}_{g+1} U_{g+1} \dots U_n \underbrace{[1 \dots 1]}_{g+1}^\top \quad (2.45)$$

zusammengefasst. Der erste und der letzte Knoten werden  $(g + 1)$ -fach wiederholt und die verbleibenden inneren Knoten werden so aufgefüllt, dass deren Werte monoton steigen. Durch die Wiederholung der ersten und letzten Knoten wird erreicht, dass der erste und der letzte Kontrollpunkt die gleichen Koordinaten haben wie der erste bzw. letzte Punkt

der Kurve, was als Endpunktinterpolation bezeichnet wird. Im Normalfall werden die inneren Knoten äquidistant aufsteigend gewählt. In diesem Fall wird von einem uniformen Knotenvektor gesprochen. Für besondere Kurveneigenschaften können jedoch auch andere Verteilungen oder weitere Mehrfachknoten gewählt werden. In diesem Fall wird der Knotenvektor als nicht-uniform bezeichnet. Die  $i$ -te Basisfunktion nullten Grades (2.44) ist nur dann ungleich Null, wenn der Kurvenparameter  $u$  innerhalb des durch die beiden benachbarten Knoten  $U_i$  und  $U_{i+1}$  aufgespannten Intervalls liegt.

Eine ausführliche Analyse der Eigenschaften von B-Splines kann PIEGL u. TILLER (1997) entnommen werden. Die für diese Arbeit wichtigsten sind:

- die Möglichkeit der Endpunktinterpolation,
- die weitgehende Unabhängigkeit der Anzahl der Kontrollpunkte vom Polynomgrad,
- der lokal begrenzte Einfluss der Kontrollpunkte auf die Kurve,
- die analytische Differenzierbarkeit.

Die analytische Ableitbarkeit der B-Splinekurven spielt in dieser Arbeit eine besondere Rolle und wird im Folgenden vertieft. Das im Abschnitt 2.2.3 folgende Beispiel veranschaulicht die oben nur kurz gezeigte Vorgehensweise zur Berechnung der B-Splinekurven.

## 2.2.2 Ableitungen von B-Splinekurven

Die analytische Differenzierbarkeit von B-Splinekurven ist für viele technische Anwendungen eine sehr wichtige Eigenschaft. So können beispielsweise Randbedingungen von Kurven überprüft oder sogar, wie später gezeigt wird, gezielt eingestellt werden. Auch können aus den Ableitungen oft wichtige Größen, beispielsweise Anstieg und Krümmung, berechnet werden, die den Verlauf der Kurven charakterisieren.

Durch das Ableiten eines B-Splines entsteht erneut eine B-Splinekurve. Daher kann (2.42) für die erste Ableitung der B-Splinekurve mit dem Polynomgrad  $g$  nach dem Kurvenparameter  $u$  als

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \frac{d}{du} \mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n \dot{N}_{i,g}(u) \mathbf{K}_i \quad (2.46)$$

geschrieben werden, wobei hier und im Folgenden für den Kurvenparameter stets  $u \in [0, 1]$  gilt. Da die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_i$  unabhängig von  $u$  sind, werden in Gl. (2.46) nur die Basisfunktionen abgeleitet. Diese ergeben sich aus Gl. (2.43) unter Beachtung der

Produktregel zu

$$\begin{aligned} \dot{N}_{i,g}(u) &= \frac{N_{i,g-1}(u)}{U_{i+g} - U_i} + \frac{u - U_i}{U_{i+g} - U_i} \dot{N}_{i,g-1} - \frac{N_{i+1,g-1}(u)}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} + \frac{U_{i+g+1} - u}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} \dot{N}_{i+1,g-1} \\ &\equiv g \left( \frac{N_{i,g-1}(u)}{U_{i+g} - U_i} - \frac{N_{i+1,g-1}(u)}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

wie sich durch vollständige Induktion beweisen lässt, PIEGL u. TILLER (1997). Werden diese in Gl. (2.46) eingesetzt, folgt nach Auflösen der Klammer in (2.47) und Umstellen

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \sum_{i=0}^n g \frac{\mathbf{K}_i}{U_{i+g} - U_i} N_{i,g-1} - \sum_{i=0}^n g \frac{\mathbf{K}_i}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} N_{i+1,g-1}. \quad (2.48)$$

In ihrer Form entspricht Gl. (2.48) nun nicht mehr der gewohnten Formulierung für B-Splinekurven. Zur Vereinfachung wird daher zunächst angestrebt, dass in beiden Summen die gleichen Basisfunktionen und Knoten stehen. Dazu wird zunächst der Summationsbereich für die linke Summe verändert, wodurch die Indizes entsprechend angepasst werden müssen:

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \sum_{i=-1}^{n-1} g \frac{\mathbf{K}_{i+1}}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} N_{i+1,g-1} - \sum_{i=0}^n g \frac{\mathbf{K}_i}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} N_{i+1,g-1}. \quad (2.49)$$

Dies hat zur Folge, dass nun die Summationsbereiche nicht mehr übereinstimmen. Für die linke Summe wird daher der Term für  $i = -1$  und für die rechte Summe der Term für  $i = n$  separat aufgeführt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}(u) &= g \frac{\mathbf{K}_0}{U_g - U_0} N_{0,g-1} + \sum_{i=0}^{n-1} g \frac{\mathbf{K}_{i+1}}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} N_{i+1,g-1} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} g \frac{\mathbf{K}_i}{U_{i+g+1} - U_{i+1}} N_{i+1,g-1} - g \frac{\mathbf{K}_n}{U_{n+g+1} - U_{n+1}} N_{n+1,g-1}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Wegen  $U_g - U_0 = 0$  und  $U_{n+g+1} - U_{n+1} = 0$ , vgl. Gl. (2.45), sind die beiden separaten Terme per Definition Null und es bleiben lediglich die beiden Summen mit identischen Summationsbereichen, Polynomgraden, Knoten und Basisfunktionen übrig. Zusammengefasst folgt mit den „abgeleiteten“ Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^{(1)} := g(\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_i)/(U_{i+g+1} - U_{i+1})$

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,g-1}(u) \mathbf{K}_i^{(1)}, \quad (2.51)$$

wobei sich die neuen Kontrollpunkte ausschließlich aus den Parametern der ursprünglichen B-Splinekurve berechnen lassen und die Basisfunktionen  $N_{i+1,g-1}(u)$  auf dem ursprüngli-

chen Knotenvektor  $\mathbf{U}$  basieren. Die neu entstandene B-Splinekurve  $\dot{\mathbf{b}}(u)$  der ersten Ableitung hat jedoch einen Kontrollpunkt weniger als die Ausgangskurve (Summation in (2.51) über dem Bereich  $i = 0 \dots n - 1$ ) und den reduzierten Polynomgrad  $g - 1$ . Dadurch kann der neue Knotenvektor

$$\mathbf{U}^{(1)} = [\underbrace{0 \dots 0}_g U_{g+1} \dots U_n \underbrace{1 \dots 1}_g]^\top \quad (2.52)$$

gebildet werden, indem der erste und der letzte Knoten in  $\mathbf{U}$  entfallen, womit die Eigenschaft der Endpunktinterpolation erhalten bleibt. Die inneren Knoten bleiben identisch zu (2.45), womit  $U_i^{(1)} = U_{i+1}$  gilt und für die Basisfunktionen  $N_{i,g-1}^{(1)}(u) = N_{i+1,g-1}(u)$  folgt. Dabei ist  $^{(1)}$  nicht mit den abgeleiteten Basisfunktionen (2.47) zu verwechseln, sondern bedeutet, dass die Basisfunktionen mit dem Knotenvektor (2.52) berechnet werden. Die endgültige Gleichung der ersten Ableitung der B-Splinekurve lautet nun

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,g-1}^{(1)}(u) \mathbf{K}_i^{(1)} \quad \text{mit } \mathbf{K}_i^{(1)} = g \frac{\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_i}{U_{i+g+1} - U_{i+1}}. \quad (2.53)$$

Weitere Ableitungen folgen dem selben Schema, so dass analog zu Gl. (2.53) für die  $k$ -te Ableitung allgemein gilt:

$$\mathbf{b}^{(k)}(u) = \frac{d^k}{du^k} \mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} x^{(k)}(u) \\ y^{(k)}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,g-k}^{(k)}(u) \mathbf{K}_i^{(k)}, \quad u \in [0, 1], \quad (2.54)$$

mit den „abgeleiteten“ Kontrollpunkten

$$\mathbf{K}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{K}_i & \text{für } k = 0 \\ \frac{g - k + 1}{U_{i+g+1} - U_{i+k}} (\mathbf{K}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{K}_i^{(k-1)}) & \text{für } k \in [1, g] \end{cases}, \quad (2.55)$$

dem Knotenvektor

$$\mathbf{U}^{(k)} = [\underbrace{0 \dots 0}_{g+1-k} U_{g+1} \dots U_n \underbrace{1 \dots 1}_{g+1-k}]^\top \quad (2.56)$$

und den Basisfunktionen (2.43), PIEGL u. TILLER (1997). Mit dieser Vorgehensweise wird die Natur der  $k$ -ten Ableitung einer B-Splinekurve deutlich. Die Ableitung ist nach Gl. (2.54) eine B-Splinekurve mit reduziertem Polynomgrad  $(g - k)$  und den veränderten Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^{(k)}$ . Wie an der oberen Summationsgrenze zu erkennen, verringert sich gleichzeitig die Anzahl der Kontrollpunkte um den Grad  $k$  der Ableitung und damit auch der Knotenvektor, bei dem die jeweils  $k$  ersten und  $k$  letzten Knoten entfallen.

Die Ableitungen (2.54) können also mit dem selben Algorithmus wie die eigentliche B-Splinekurve berechnet werden, wenn vorher die neuen Kontrollpunkte und der neue Knotenvektor bestimmt werden. Dabei muss rekursiv vorgegangen werden, d. h. zur Berechnung der zweiten Ableitung muss auch die erste Ableitung berechnet werden. In den meisten Anwendungsfällen ergibt sich dadurch jedoch kein Mehraufwand, da ohnehin die niederen Ableitungen gebraucht werden. In Tab. 2.1 sind die Parameter zur Berechnung einer B-Splinekurve und ihrer Ableitungen noch einmal zusammengefasst.

**Tab. 2.1:** Übersicht der Parameter der Ableitungen von B-Splinekurven

	B-Spline	1. Abl.	...	$k$ -te Abl.
Polynomgrad	$g$	$g - 1$	...	$g - k$
Anzahl KP	$n + 1$	$n$	...	$n + 1 - k$
Kontrollpunkte	$\mathbf{K}_i, i \in [0, n]$	$\mathbf{K}_i^{(1)}, i \in [0, n - 1]$	...	$\mathbf{K}_i^{(k)}, i \in [0, n - k]$
Basisfunktionen	$N_{i,g}$	$N_{i,g-1}^{(1)}$	...	$N_{i,g-k}^{(k)}$
Knotenvektor	$[U_0 \dots U_{g+n+1}]^\top$	$[U_0^{(1)} \dots U_{g-1+n}^{(1)}]^\top$	...	$[U_0^{(k)} \dots U_{g+n+1-2k}^{(k)}]^\top$

Da auch für die abgeleiteten B-Splinekurven die Eigenschaft der Endpunktinterpolation besteht, können mit Gl. (2.55) z. B. Stetigkeitsanforderungen am Start- bzw. Endpunkt einer B-Splinekurve erfüllt werden, was in Abschnitt 2.3 gezeigt wird.

### 2.2.3 Beispiel: Quadratischer B-Spline und Ableitungen

Das einfache Beispiel einer quadratischen B-Splinekurve ( $g = 2$ ) mit drei Kontrollpunkten ( $n = 2$ ) und, wie stets in dieser Arbeit verwendet, uniformem Knotenvektor

$$\mathbf{U} = [U_0 \dots U_5]^\top = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^\top \quad (2.57)$$

soll hier ausführlich dargestellt werden. Entsprechend Abb. 2.12b werden die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_0 \dots \mathbf{K}_2$  mit folgenden Koordinaten gewählt:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Werden die Kontrollpunkte in Gl. (2.42) eingesetzt, folgt mit  $g = 2$  und  $n = 2$

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^2 N_{i,2}(u) \mathbf{K}_i = N_{0,2}(u) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + N_{1,2}(u) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + N_{2,2}(u) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

mit  $u \in [0, 1]$ . Zur Berechnung der Kurve sind nun die drei in Gl. (2.59) benötigten Basisfunktionen zu bestimmen. Werden  $i = 0$  und  $j = 2$  in Gl. (2.43) eingesetzt, folgt unter Beachtung der Regel für Nulldivision

$$\begin{aligned} N_{0,2}(u) &= \frac{u - U_0}{U_2 - U_0} N_{0,1}(u) + \frac{U_3 - u}{U_3 - U_1} N_{1,1}(u) \\ &= (1 - u) N_{1,1}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die Basisfunktion  $N_{1,1}$  ergibt sich auf die selbe Art mit  $i = j = 1$  zu

$$\begin{aligned} N_{1,1}(u) &= \frac{u - U_1}{U_2 - U_1} N_{1,0}(u) + \frac{U_3 - u}{U_3 - U_2} N_{2,0}(u) \\ &= (1 - u) N_{2,0}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Für  $N_{2,0}$  ist die Fallunterscheidung gemäß Gl. (2.44) zu berücksichtigen und es folgt

$$N_{2,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in [U_2, U_3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{für } u = 1 \end{cases}. \quad (2.62)$$

An dieser Stelle soll noch einmal auf die kurze Diskussion der Intervallgrenzen in (2.44) im Abschnitt 2.2.1 zurückgekommen werden. Beim Betrachten von (2.61) fällt auf, dass  $N_{1,1}(u)$  für  $u = 1$  unabhängig von  $N_{2,0}$  Null wird. Insofern spielt es keine Rolle, ob das Intervall in (2.62) am rechten Rand offen oder geschlossen ist.

Wird (2.62) in (2.61) und wiederum in Gl. (2.60) eingesetzt, folgt für die gesuchte Basisfunktion

$$N_{0,2}(u) = (1 - u)^2. \quad (2.63)$$

Mit der gleichen Vorgehensweise können

$$N_{1,2}(u) = 2u(1 - u), \quad (2.64)$$

$$N_{2,2}(u) = u^2 \quad (2.65)$$

gefunden werden. Der Verlauf dieser Basisfunktionen ist in Abb. 2.11 gezeichnet. Werden die drei Basisfunktionen nun in Gl. (2.59) eingesetzt, folgt die in Abb. 2.12a dargestellte B-Splinekurve zu

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = (1 - u)^2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2u(1 - u) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + u^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u - 1 \\ 4u^2 - 4u + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

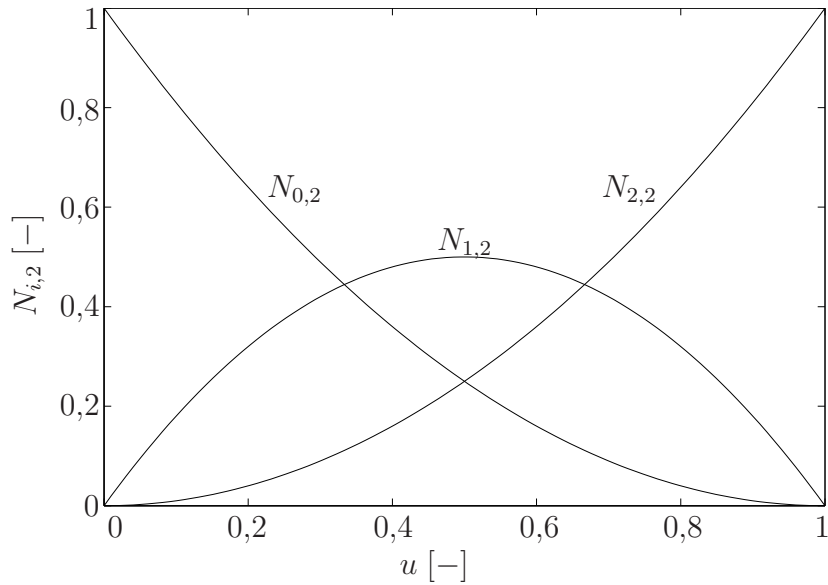


Abb. 2.11: Basisfunktionen des quadratischen B-Splines

Für eine anschauliche, explizite Formulierung kann die erste Zeile nach  $u = (x + 1)/2$  umgestellt und in die zweite Zeile eingesetzt werden. Daraus ergibt sich die in Abb. 2.12b gezeichnete quadratische Parabel

$$y = x^2, \tag{2.67}$$

für die im Folgenden die ersten beiden Ableitungen mittels der in Abschnitt 2.2.2 gezeigten Vorgehensweise berechnet werden sollen.

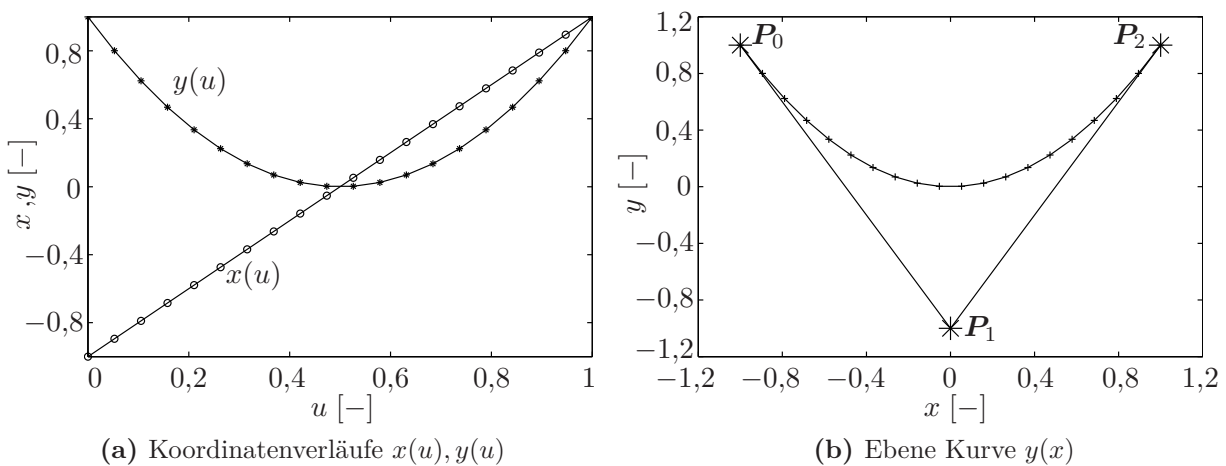


Abb. 2.12: Quadratischer B-Spline



### Erste Ableitung

Zur Bestimmung der ersten Ableitung der Kurve mittels der B-Splineformulierung werden zunächst die Kontrollpunkte mit Hilfe der Gl. (2.55) bestimmt. Mit  $g = 2$  und  $k = 1$  kann mit  $\mathbf{K}_i^{(0)} \equiv \mathbf{K}_i$  und dem ursprünglichen Knotenvektor (2.57)

$$\mathbf{K}_i^{(1)} = \frac{2}{U_{i+3} - U_{i+1}} (\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_i) \quad (2.68)$$

gefunden werden. Die Gleichung für den B-Spline der ersten Ableitung lautet mit den neuen Kontrollpunkten nach Gl. (2.54)

$$\dot{\mathbf{b}}(u) = \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^1 N_{i,1}^{(1)}(u) \mathbf{K}_i^{(1)}, \quad u \in [0,1]. \quad (2.69)$$

Da nun nur noch von 0 bis 1 summiert wird, gibt es nur noch zwei Kontrollpunkte mit den Koordinaten

$$\mathbf{K}_0^{(1)} = \frac{2}{1-0} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0) = 2 \begin{bmatrix} 0 - (-1) \\ -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{K}_1^{(1)} = \frac{2}{1-0} (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) = 2 \begin{bmatrix} 1 - 0 \\ 1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Mit den beiden Kontrollpunkten ist der Verlauf der ersten Ableitung prinzipiell bekannt, da es sich mit  $g - 1 = 1$  um eine lineare Funktion handelt. Trotzdem soll hier der obige Weg beschritten werden, um die Lösung zu erhalten. Unter Berücksichtigung des neuen Knotenvektors  $\mathbf{U}^{(1)} = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^\top$  entsprechend Gl. (2.56) für die erste Ableitung werden die in Gl. (2.69) benötigten Basisfunktionen zu

$$N_{0,1}^{(1)} = \frac{u - U_1^{(1)}}{U_1^{(1)} - U_0^{(1)}} N_{0,0}^{(1)} + \frac{U_2^{(1)} - u}{U_2^{(1)} - U_1^{(1)}} N_{1,0}^{(1)} = 1 - u, \quad (2.72)$$

$$N_{1,1}^{(1)} = \frac{u - U_1^{(1)}}{U_2^{(1)} - U_1^{(1)}} N_{1,0}^{(1)} + \frac{U_3^{(1)} - u}{U_3^{(1)} - U_2^{(1)}} N_{2,0}^{(1)} = u. \quad (2.73)$$

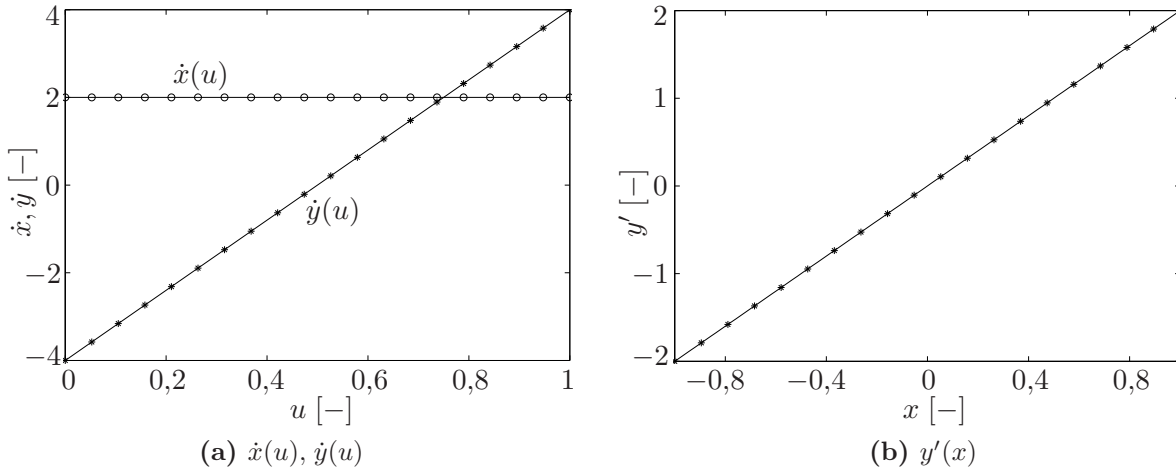
Eingesetzt in Gl. (2.69) folgt die in Abb. 2.13a dargestellte Kurve

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}(u) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{bmatrix} = (1-u) \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 8u - 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Für die explizite Ableitung folgt daraus nach Division der zweiten durch die erste Zeile entsprechend Gl. (2.17) und mit  $u = (x + 1)/2$  (siehe oben)

$$y' = 2x, \quad (2.75)$$

Abb. 2.13b, die sich auch direkt aus (2.67) ergeben würde.



**Abb. 2.13:** Erste Ableitung des quadratischen B-Splines

### Zweite Ableitung

Mit der gleichen Vorgehensweise kann die zweite Ableitung gewonnen werden, siehe Abb. 2.14. Hier ist nur noch ein Kontrollpunkt vorhanden, nämlich

$$\mathbf{K}_0^{(2)} = \frac{1}{U_3 - U_2} \left( \mathbf{K}_1^{(1)} - \mathbf{K}_0^{(1)} \right) = \begin{bmatrix} 2 - 2 \\ 4 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

mit dem ursprünglichen Knotenvektor  $\mathbf{U}$ . Mit  $\mathbf{U}^{(2)} = [0 \ 1]^\top$  und der daraus folgenden Basisfunktion  $N_{0,0}^{(2)} = 1$  lautet die B-Splinegleichung (2.54) mit dem Polynomgrad  $g-2 = 0$

$$\ddot{\mathbf{b}}(u) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(u) \\ \ddot{y}(u) \end{bmatrix} = N_{0,0}(u) \mathbf{K}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

Abb. 2.14a. Die zweite Ableitung ist folglich ein Wertepaar, das für alle  $u \in [0, 1]$  dem Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_0^{(2)}$  entspricht. Für die gewünschte Ableitung  $d^2y/dx^2$  folgt aus Gl. (2.19) mit (2.74) und (2.77)

$$y'' = \frac{2 \cdot 8 - 0 \cdot (8u - 4)}{2^3} = 2 \quad (2.78)$$

als konstanter Wert für alle  $x$ , was den Erwartungen bzw. der zweiten Ableitung der quadratischen Funktion  $y = x^2$  entspricht, vgl. Abb. 2.14b.

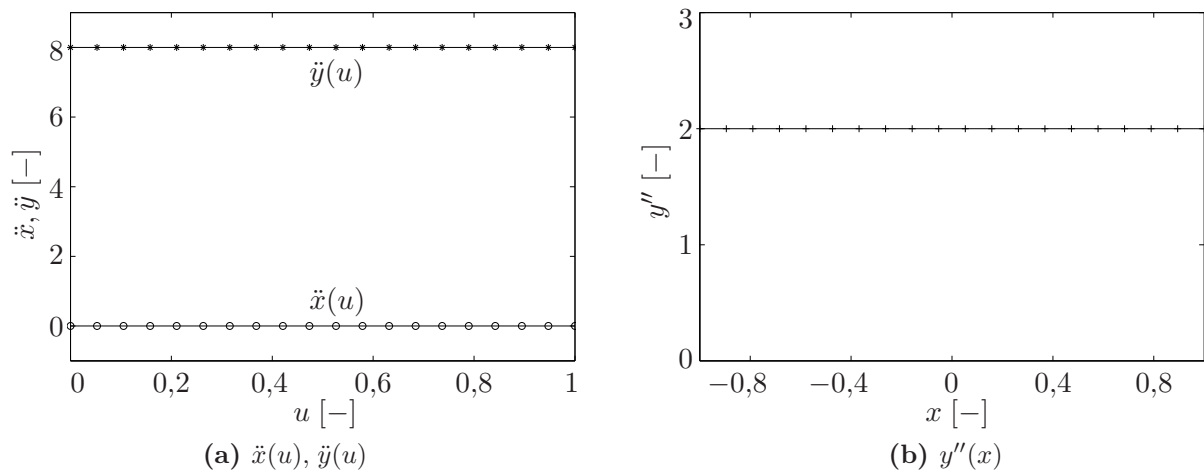


Abb. 2.14: Zweite Ableitung des quadratischen B-Splines

## 2.3 Ableitungen in den Endpunkten von B-Splinekurven

Oftmals ist es erwünscht, für den Start- oder Endpunkt einer B-Splinekurve den exakten Wert für die Ableitungen der Kurve zu kennen oder sogar gezielt einstellen zu können. Letzteres ist beispielsweise dann der Fall, wenn eine B-Splinekurve an eine andere Kurve stetig differenzierbar angefügt werden soll. Ein anderer Anwendungsfall ist z. B. die exakte Erzeugung bestimmter Anfangsbedingungen für eine Kurvenintegration. Infolge der Endpunktinterpolation der B-Splines ist es trivial, eine B-Splinekurve in einem bestimmten Punkt starten bzw. enden zu lassen, da dafür lediglich der erste bzw. letzte Kontrollpunkt mit den gewünschten Koordinaten zu versehen ist. Aufwendiger gestaltet sich die Vorgehensweise, wenn die  $k$ -te Ableitung im Start- bzw. Endpunkt einen bestimmten Wert haben soll. In der vorliegenden Arbeit wird maximal die dritte Ableitung im Startpunkt benötigt. Es wird daher vorausgesetzt, dass im Folgenden eine B-Splinekurve betrachtet wird, die mindestens dreimal stetig differenzierbar ist, also einen Polynomgrad  $g \geq 3$  aufweist.

### 2.3.1 Erste Ableitung

Aus Abschnitt 2.2.2 ist bereits bekannt, dass Ableitungen von B-Splinekurven ebenfalls wieder B-Splinekurven mit der Eigenschaft der Endpunktinterpolation sind. Das heißt, der Startpunkt  $[\dot{x}(u = 0) \ \dot{y}(u = 0)]^\top$  der B-Splinekurve der ersten Ableitung und der

erste Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_0^{(1)}$  sind identisch und es gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(u=0) \\ \dot{y}(u=0) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_0^{(1)}. \quad (2.79)$$

Nach Gl. (2.55) gilt mit  $i = 0$  und  $k = 1$  für den ersten Kontrollpunkt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} &= \frac{g-1+1}{U_{0+g+1} - U_{0+1}} \left( \mathbf{K}_{0+1}^{(1-1)} - \mathbf{K}_0^{(1-1)} \right) \\ &= \frac{g}{U_{g+1}} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0) = \frac{g}{U_{g+1}} \begin{bmatrix} K_{1,x} - K_{0,x} \\ K_{1,y} - K_{0,y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Dabei wird berücksichtigt, dass nach (2.45) der Knoten  $U_1$  für B-Splinekurven mit  $g \geq 1$  stets Null ist. Bei einer B-Splinekurve ist der Anstieg im Startpunkt folglich ausschließlich von der Position der ersten beiden Kontrollpunkte relativ zueinander abhängig.

Da die erste Ableitung nur noch  $n$  Kontrollpunkte und damit einen weniger aufweist als die Ausgangskurve, ergibt sich der letzte Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_{n-1}^{(1)}$  nach (2.54) für  $i = n - 1$ . Wegen der Endpunktinterpolation folgt analog zu (2.79)

$$\mathbf{K}_{n-1}^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x}(u=1) \\ \dot{y}(u=1) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

und mit  $k = 1$  aus Gl. (2.55)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} &= \frac{g-1+1}{U_{n-1+g+1} - U_{n-1+1}} \left( \mathbf{K}_{n-1+1}^{(1-1)} - \mathbf{K}_{n-1}^{(1-1)} \right) \\ &= \frac{g}{1 - U_n} \begin{bmatrix} K_{n,x} - K_{n-1,x} \\ K_{n,y} - K_{n-1,y} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

wobei für  $g \geq 1$  gemäß Gl. (2.45) der zweitletzte Knoten  $U_{n+g} = 1$  ist.

Damit sind zwar die ersten Ableitungen nach dem B-Splinekurvenparameter  $u$  bekannt, meistens interessieren jedoch die Ableitungen  $dy/dx$ . Mit der Ableitungsvorschrift (2.17) für Kurven in Parameterform kann diese durch Division der zweiten durch die erste Zeile aus (2.80) für den Startpunkt der Kurve leicht gewonnen werden:

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = \frac{(g/U_{g+1})(K_{1,y} - K_{0,y})}{(g/U_{g+1})(K_{1,x} - K_{0,x})} \\ &= \frac{K_{1,y} - K_{0,y}}{K_{1,x} - K_{0,x}}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Analog kann aus Gl. (2.82) für die erste Ableitung im Endpunkt

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} = \frac{g/(1-U_n)(K_{n,y} - K_{n-1,y})}{g/(1-U_n)(K_{n,x} - K_{n-1,x})} \\ &= \frac{K_{n,y} - K_{n-1,y}}{K_{n,x} - K_{n-1,x}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

gefunden werden. Die erste Ableitung  $dy/dx$  in den beiden Endpunkten einer B-Splinekurve hängt also lediglich von der Position der ersten beiden bzw. letzten beiden Kontrollpunkte ab. Sind Start- oder Endpunkt einer Kurve gegeben, kann folglich durch gezielte Positionierung des zweiten bzw. vorletzten Kontrollpunkts eine gewünschte Tangente im Start-/ Endpunkt eingestellt werden. Diese Eigenschaft wird im späteren Verlauf der Arbeit benötigt und auch genutzt.

### 2.3.2 Zweite Ableitung

Auf die gleiche Art und Weise wie im vorherigen Abschnitt kann die zweite Ableitung im Start- bzw. Endpunkt des B-Splines gewonnen werden. Für den Startpunkt der zweiten Ableitung der Kurve bei  $u = 0$  gilt wegen der Endpunktinterpolation analog zu (2.79)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(u=0) \\ \ddot{y}(u=0) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_0^{(2)}. \quad (2.85)$$

Mit  $i = 0$  für den ersten Kontrollpunkt sowie  $k = 2$  für die zweite Ableitung ergeben sich nach Einsetzen in Gl. (2.55) die Koordinaten des ersten Kontrollpunkts zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{(2)} &= \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} = \frac{g-2+1}{U_{0+g+1} - U_{0+2}} \left( \mathbf{K}_{0+1}^{(2-1)} - \mathbf{K}_0^{(2-1)} \right) \\ &= \frac{g-1}{U_{g+1}} \left( \mathbf{K}_1^{(1)} - \mathbf{K}_0^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (2.86)$$

wobei die zu Beginn getroffene Annahme  $g \geq 3$  und somit  $U_2 = 0$  berücksichtigt wurde.

Nach Gl. (2.54) besitzt die B-Splinekurve der zweiten Ableitung zwei Kontrollpunkte weniger als die Ausgangskurve. Für den Endpunkt  $u = 1$  folgt aus der Endpunktinterpolation mit  $i = n - 2$  für den letzten Kontrollpunkt und  $k = 2$  für die zweite Ableitung aus (2.55)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n-2}^{(2)} &\equiv \begin{bmatrix} \ddot{x}(u=1) \\ \ddot{y}(u=1) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} = \frac{g-2+1}{U_{n-2+g+1} - U_{n-2+2}} \left( \mathbf{K}_{n-2+1}^{(2-1)} - \mathbf{K}_{n-2}^{(2-1)} \right) \\ &= \frac{g-1}{1-U_n} \left( \mathbf{K}_{n-1}^{(1)} - \mathbf{K}_{n-2}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (2.87)$$

wobei wegen  $g \geq 2$  der Knoten  $U_{n+g-1} = 1$  des ursprünglichen Knotenvektors eingesetzt werden kann. Die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_0^{(1)}$  in (2.86) und  $\mathbf{K}_{n-1}^{(1)}$  in (2.87) sind bereits aus (2.80) bzw. (2.82) vorgegeben. Die beiden anderen Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_1^{(1)}$  bzw.  $\mathbf{K}_{n-2}^{(1)}$  der ersten Ableitung berechnen sich nach Gl. (2.55) mit  $k = 1$  für  $i = 1$  zu

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1^{(1)} &= \frac{g-1+1}{U_{1+g+1}-U_{1+1}} \left( \mathbf{K}_{1+1}^{(1-1)} - \mathbf{K}_1^{(1-1)} \right) \\ &= \frac{g}{U_{g+2}} (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1),\end{aligned}\tag{2.88}$$

bzw. für  $i = n - 2$  zu

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{n-2}^{(1)} &= \frac{g-1+1}{U_{n-2+g+1}-U_{n-2+1}} \left( \mathbf{K}_{n-2+1}^{(1-1)} - \mathbf{K}_{n-2}^{(1-1)} \right) \\ &= \frac{g}{1-U_{n-1}} (\mathbf{K}_{n-1} - \mathbf{K}_{n-2}),\end{aligned}\tag{2.89}$$

wobei erneut  $U_2 = 0$  und  $U_{n+g-1} = 1$  berücksichtigt sind. Werden Gln. (2.79) und (2.88) in (2.86) eingesetzt, folgt

$$\mathbf{K}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} = \frac{g-1}{U_{g+1}} \left( \frac{g}{U_{g+2}} (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) - \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \right)\tag{2.90}$$

für die zweite Ableitung im Startpunkt der B-Splinekurve. Hierin wird  $\mathbf{K}_0^{(1)}$  nicht durch (2.80) ersetzt, sondern zur Verbesserung der Übersicht und zur Verringerung des Aufwands als bekannt angenommen, was bei der praktischen Anwendung meist der Fall ist. Analog kann durch Einsetzen von Gl. (2.81) und (2.89) in Gl. (2.87)

$$\mathbf{K}_{n-2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} = \frac{g-1}{1-U_n} \left( \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} - \frac{g}{1-U_{n-1}} (\mathbf{K}_{n-1} - \mathbf{K}_{n-2}) \right)\tag{2.91}$$

für die zweite Ableitung im Endpunkt der B-Splinekurve erhalten werden.

Um aus den eben berechneten Ableitungen nach dem Kurvenparameter  $u$  die im späteren Verlauf der Arbeit benötigten Ableitungen  $d^2y/dx^2$  zu erhalten, wird die Umrechnungsvorschrift (2.19) verwendet. Unter der Annahme, dass  $y' = \dot{y}/\dot{x}$  bereits bekannt ist, kann diese in

$$y'' = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} - y' \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2}\tag{2.92}$$

umgeschrieben werden. Nach Einsetzen von  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  aus Gl. (2.90) folgt für die zweite Ableitung der B-Splinekurve im Startpunkt  $u = 0$

$$y_0'' = \left( \frac{g(g-1)}{U_{g+1}U_{g+2}} \frac{K_{2,y} - K_{1,y}}{\dot{x}_0^2} - \frac{g-1}{U_{g+1}} \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0^2} \right) - \left( y_0' \frac{g(g-1)}{U_{g+1}U_{g+2}} \frac{K_{2,x} - K_{1,x}}{\dot{x}_0^2} - y_0' \frac{g-1}{U_{g+1}} \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0^2} \right). \quad (2.93)$$

Darin sind mit  $y_0' = \dot{y}_0/\dot{x}_0$  die zweiten Terme beider Klammern mit umgekehrten Vorzeichen identisch und heben sich folglich auf. Übrig bleibt der Ausdruck

$$y_0'' = \frac{g(g-1)}{U_{g+1}U_{g+2}} \left( \frac{K_{2,y} - K_{1,y}}{\dot{x}_0^2} - y_0' \frac{K_{2,x} - K_{1,x}}{\dot{x}_0^2} \right), \quad (2.94)$$

der mit  $\dot{x} = g/U_{g+1} (K_{1,x} - K_{0,x})$  aus Gl. (2.80) weiter vereinfacht werden kann:

$$y_0'' = \frac{(g-1)U_{g+1}}{gU_{g+2}} \left( \frac{K_{2,y} - K_{1,y} - y_0' (K_{2,x} - K_{1,x})}{(K_{1,x} - K_{0,x})^2} \right). \quad (2.95)$$

Durch analoges Vorgehen kann mit (2.82), (2.84) und (2.91) eingesetzt in Gl. (2.92) die zweite Ableitung im Endpunkt gewonnen werden:

$$y_1'' = \frac{(g-1)(1-U_n)}{g(1-U_{n-1})} \left( \frac{K_{n-2,y} - K_{n-1,y} + y_1' (K_{n-1,x} - K_{n-2,x})}{(K_{n,x} - K_{n-1,x})^2} \right). \quad (2.96)$$

Im Gegensatz zu den ersten Ableitungen sind die zweiten Ableitungen in den Endpunkten nicht allein durch die Lage der Kontrollpunkte bestimmt. Auch der Polynomgrad  $g$  der Basisfunktionen und der Knotenvektor (2.45) der Ausgangskurve haben einen Einfluss und müssen berücksichtigt werden.

### 2.3.3 Dritte Ableitung

Die dritte Ableitung wird in dieser Arbeit nur für den Startpunkt einer B-Splinekurve benötigt, weshalb zur Begrenzung des Aufwands nur deren Herleitung gezeigt wird. Grundsätzlich ist die Vorgehensweise identisch zu der in den beiden vorangegangenen Abschnitten. Insbesondere wegen der aufwendigen Umrechnung der Ableitungen nach dem Kurvenparameter  $u$  in der Ableitung  $d^3y/dx^3$  steigt der Aufwand jedoch nochmals an.

Zunächst kann der erste Kontrollpunkt der B-Splinekurve der dritten Ableitung eines B-Splines wegen der Endpunktinterpolation als

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(u=0) \\ \ddot{y}(u=0) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_0^{(3)} \quad (2.97)$$

definiert werden. Nach Einsetzen von  $i = 0, k = 3$  in Gl. (2.55) ergibt sich dieser zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{(3)} &= \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} = \frac{g-3+1}{U_{0+g+1} - U_{0+3}} \left( \mathbf{K}_{0+1}^{(3-1)} - \mathbf{K}_0^{(3-1)} \right) \\ &= \frac{g-2}{U_{g+1}} \left( \mathbf{K}_1^{(2)} - \mathbf{K}_0^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (2.98)$$

mit  $U_3 = 0$  für  $g \geq 3$  aus dem Knotenvektor der Ausgangskurve. Der Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_0^{(2)}$  der zweiten Ableitung ist bereits aus Gl. (2.90) bekannt. Der zweite Kontrollpunkt der zweiten Ableitung berechnet sich mit  $i = 1, k = 2$  nach Gl. (2.55) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{(2)} &= \frac{g-2+1}{U_{1+g+1} - U_{1+2}} \left( \mathbf{K}_{1+1}^{(2-1)} - \mathbf{K}_1^{(2-1)} \right) \\ &= \frac{g-1}{U_{g+2}} \left( \mathbf{K}_2^{(1)} - \mathbf{K}_1^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Darin ist erneut der Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_1^{(1)}$  der ersten Ableitung durch Gl. (2.88) bekannt. Der dritte Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_2^{(1)}$  der ersten Ableitung kann mit  $i = 2$  und  $k = 1$  eingesetzt in Gl. (2.55) und unter Berücksichtigung von  $U_3 = 0$  für  $g \geq 3$  auf die Kontrollpunkte der Ausgangskurve zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^{(1)} &= \frac{g-1+1}{U_{2+g+1} - U_{2+1}} \left( \mathbf{K}_{2+1}^{(1-1)} - \mathbf{K}_2^{(1-1)} \right) \\ &= \frac{g}{U_{g+3}} \left( \mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_2 \right). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Damit ergibt sich zunächst durch Einsetzen von (2.100) und (2.88) in Gl. (2.99), und anschließend mit (2.85) in Gl. (2.98)

$$\mathbf{K}_0^{(3)} = \frac{g-2}{U_{g+1}} \left( \frac{g(g-1)}{U_{g+2}} \left( \frac{\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_2}{U_{g+3}} - \frac{\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1}{U_{g+2}} \right) - \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} \right), \quad (2.101)$$

worin alle Kontrollpunkte der Ableitungen durch jene der Ausgangskurve ersetzt werden konnten.

Grundlage für die Bildung der dritten Ableitung im Startpunkt ist Gl. (2.20). Erneut wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass die Ableitungen geringerer Ordnung, also  $y'_0$  und  $y''_0$  bereits bekannt sind. Damit bietet es sich an (2.20) für den Startpunkt nach

$$y_0''' = \frac{\ddot{y}_0}{\dot{x}_0^3} - \left( \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} \right) \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0^3} - 3 \left( \frac{\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \ddot{x}_0 \dot{y}_0}{\dot{x}_0^3} \right) \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2} \quad (2.102)$$



umzuformen und nach Ersetzen der ersten Klammer in (2.102) durch  $y'_0$  und der zweiten Klammer durch  $y''_0$  folgt schließlich

$$y_0''' = \frac{1}{\dot{x}_0^3} (\ddot{y}_0 - y_0' \ddot{x}_0 - 3y_0'' \dot{x}_0 \ddot{x}_0). \quad (2.103)$$

Darin werden nun alle noch vorhandenen Ableitungen nach dem Kurvenparameter durch die Gln. (2.80), (2.90) sowie (2.101) ersetzt und nach Zusammenfassen und Vereinfachen ergibt sich die dritte Ableitung im Startpunkt des B-Splines zu

$$y_0''' = \frac{U_{g+1}^2 (g-1)(g-2)}{g^2 (K_{1,x} - K_{0,x})^3} \left( \Delta K_y - y_0' \Delta K_x - 3y_0'' \frac{g(K_{1,x} - K_{0,x})}{(g-2)U_{g+1}} c \right),$$

$$\text{mit } \begin{cases} \Delta K_x \\ \Delta K_y \end{cases} = \frac{\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_2}{U_{g+3} U_{g+2}} - \frac{\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1}{U_{g+2} U_{g+1}} - \frac{\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1}{U_{g+2}^2} + \frac{\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0}{U_{g+1}^2}, \quad (2.104)$$

$$c = \frac{K_{2,x} - K_{1,x}}{U_{g+2}} - \frac{K_{1,x} - K_{0,x}}{U_{g+1}}.$$

Dadurch, dass hier sowohl Polynomgrad  $g$  als auch Knotenvektor  $\mathbf{U}$  noch nicht näher bestimmt sind, ist Gl. (2.104) sehr komplex und es erscheint zunächst wenig vorteilhaft zu sein, den oben gezeigten Aufwand vor dem Festlegen beider Größen zu betreiben. Da aber B-Splinekurven in Hinblick auf die Variation von Polynomgrad oder Anzahl der Kontrollpunkte extrem flexibel und anpassbar sind, ist dieser Aufwand dennoch gerechtfertigt, um diese Flexibilität im Entwicklungsprozess nutzen zu können.



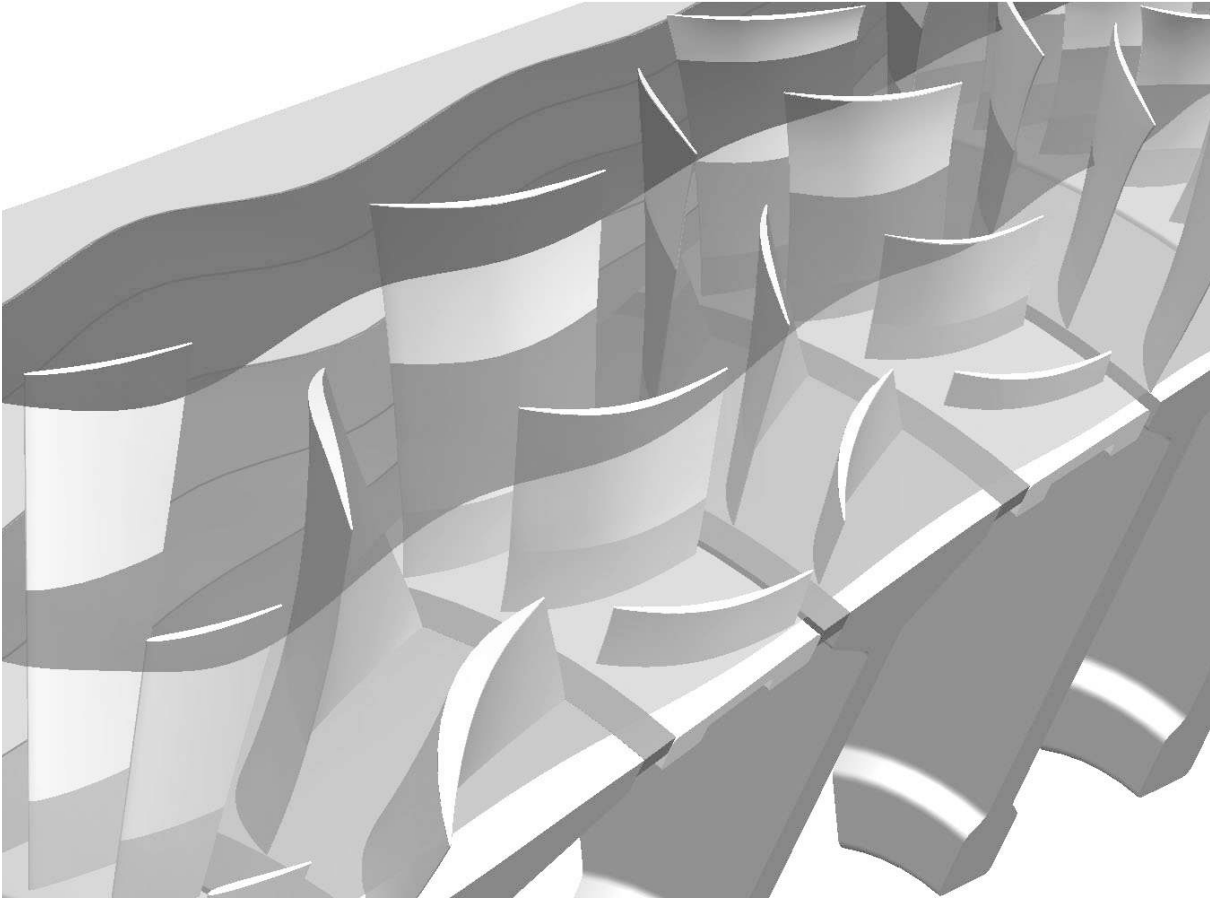
# 3 Grundlagen des Verdichterschaufelentwurfs

Der Verdichter ist die größte Funktionseinheit in modernen Flugzeugtriebwerken und muss folglich einen wesentlichen Beitrag zum Erreichen der in der Einleitung beschriebenen Ziele liefern. Mit Hilfe modernster Entwicklungsmethoden ist es heute beispielsweise möglich, gleichzeitig die Verdichtungsverhältnisse und die Effizienz weiter zu steigern. Die Weiterentwicklung der Methoden des Verdichtersentwurfs sind daher zentraler Bestandteil aktueller industrieller und universitärer Forschungsarbeiten.

Im Folgenden sollen die Grundlagen für die parametrische Erzeugung von Schaufelprofilen erläutert werden. Dazu werden zunächst die für diese Arbeit wichtigen Begrifflichkeiten und Grundlagen des Schaufelprofilentwurfs erklärt und eine Klassifizierung der verwendeten Parametrisierungen vorgenommen.

## 3.1 Verdichter und Verdichterschaufelentwurf

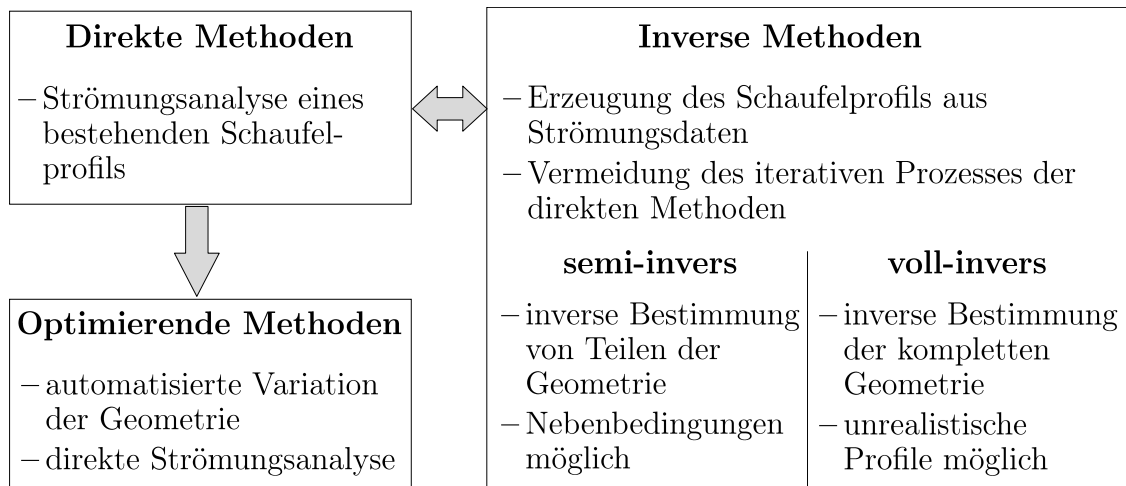
Einen guten Überblick über den modernen Verdichterauslegungsprozess bietet beispielsweise JENNIONS (1994). Innerhalb des Verdichtersentwurfs ist die aerodynamische Auslegung der Schaufelblätter ein wichtiger Arbeitsschritt. Ihm voraus gehen die sogenannten Mittelschnitts- und Meridianströmungsrechnungen, die im Wesentlichen den Ringraum des Verdichters festlegen und die aerodynamischen Randbedingungen für die SchaufelAuslegung liefern, KESKIN (2007). Grundlage dieser Berechnungen ist die Annahme, dass das dreidimensionale Strömungsfeld im Verdichter, wie in Abb. 3.1 dargestellt, in zwei gekoppelte zweidimensionale Strömungen zerlegt werden kann, WU (1952). Diese Vereinfachung wird gemacht, da die dreidimensionale numerische Analyse der Strömung im Gegensatz zu den zweidimensionalen Ansätzen immer noch sehr zeit- und ressourcenaufwendig ist. Die Berechnung der Strömung in der Meridian- oder S2-Stromebene liefert Stromlinien, die durch Rotation um die Maschinenachse die S1-Stromröhren ergeben. Durch Verschneiden der Schaufelblätter mit diesen Stromröhren entstehen die Schaufelprofile, die Gegenstand des zweidimensionalen Schaufelentwurfs sind.



**Abb. 3.1:** Treppenförmiger Schnitt durch ein vereinfachtes CAD-Modell eines Hochdruckverdichters

In der Vergangenheit wurden die Schaufelprofile diversen Profilmfamilien, wie der NACA- und Double Circular Arc (DCA)-Familie entnommen. Seit der Verfügbarkeit von Computern in technischen Entwicklungsabteilungen konnten spezielle Profile für jeden Anwendungsfall entwickelt werden, die als Controlled Diffusion Aerofoils (CDA) bezeichnet werden. Für diesen aerodynamischen Schaufelentwurf wurden verschiedene Methoden entwickelt, die sich nach BRÄUNLING (2001) und MEAUZÉ (1989) in drei Gruppen einordnen lassen: die direkten, die inversen und die optimierenden Methoden, Abb. 3.2.

Da zu Beginn die Rechenkapazität noch sehr eingeschränkt war, wurden Methoden bevorzugt, bei denen mit möglichst wenigen Iterationsschritten akzeptable Schaufelprofile erzeugt werden konnten. In Bezug zur Anzahl der Veröffentlichungen waren insbesondere in den 1980er Jahren die sogenannten inversen Entwurfsmethoden state-of-the-art. Bei diesen Methoden wird z. B. der gewünschte Geschwindigkeitsverlauf an Saug- und Druckseite vorgegeben, um daraus das Profil zu erhalten, welches genau diesen Verlauf erzeugt, VAN DEN BRAEMBUSSCHE (1999). Das klingt zunächst vorteilhaft, da der numerische Aufwand gering ist und am Ende ein Profil steht, das die Anforderungen genau erfüllt. Allerdings entstehen auf diese Art auch leicht Profile, die in keiner Weise den geometrischen Anforderungen genügen.



**Abb. 3.2:** Einteilung typischer, bei der Schaufelauslegung verwendeter Entwurfsmethoden

Dem gegenüber stehen die direkten Entwurfsmethoden, bei denen ein Profil zunächst geometrisch vorgegeben und anschließend aerodynamisch ausgewertet wird. Da davon auszugehen ist, dass dieser Vorgang mehrmals durchlaufen werden muss, um ein Design zu finden, das allen Anforderungen entspricht, sind direkte Methoden nicht nur zeit-, sondern vor allem ressourcenaufwendig. Hinzu kommt die Tatsache, dass nur ein Entwurfsingenieur mit erheblichem Erfahrungsschatz in der Lage ist, mit angemessenem Aufwand ein neues Profil zu entwickeln. Aus diesem Grund wurde in den vergangenen Jahren mit großem Aufwand eine Weiterentwicklung der direkten hin zu den optimierenden Methoden betrieben. Dabei werden prinzipiell die selben Verfahren wie bei den direkten Methoden verwendet, neu ist jedoch die Integration aller benötigten Entwurfsschritte in vollautomatisierte Prozesse. Dafür sind parametrische Geometriemodelle der Profilkontur notwendig, so dass ein Optimierer selbständig durch Verändern der Parameter neue Entwürfe erstellen und das Resultat bewerten kann.

## 3.2 Arbeitsweise von Verdichtern

Eine ausführliche Beschreibung der aerodynamischen Vorgänge innerhalb eines Hochdruckverdichters kann im Rahmen einer solchen Arbeit nicht gegeben werden und ist zum Verständnis auch nicht notwendig, weshalb auf die einschlägige Literatur verwiesen wird. Eine sehr gute Einführung kann beispielsweise in ROLLS-ROYCE PLC (2005) gefunden werden. Weiterführende theoretische Betrachtungen liefern unter anderem WILSON u. KORAKIANITIS (1998) oder CUMPSTY (2004). Eine Herangehensweise aus praktischer, industrieller Sicht wird in sehr ausführlicher Weise von GRIEB (2009) geliefert.

Abb. 3.1 zeigt einen Schnitt durch einen vereinfacht dargestellten Hochdruckverdichter, wobei das Augenmerk auf den Schaufelblättern liegt. Diese werden durch die sich wel-

lenförmig von links nach rechts ausbreitenden Stromröhren geschnitten, wodurch die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Schaufelprofile sichtbar werden. Aufgabe der Verdichterschaufeln ist die kontinuierliche und effiziente Erhöhung des Drucks. Dies wird erreicht, indem die Strömung von Rotoren jeweils beschleunigt und von Statoren wieder verzögert wird. Für stationäre Strömungen entlang einer Stromlinie kann die Kontinuitätsgleichung in der einfachen Weise  $\dot{V} = u \cdot A = \text{konst.}$  mit dem Volumenstrom  $\dot{V}$ , der Fläche  $A$  und der Geschwindigkeit  $u$  geschrieben werden, SCHADE u. KUNZ (2007).

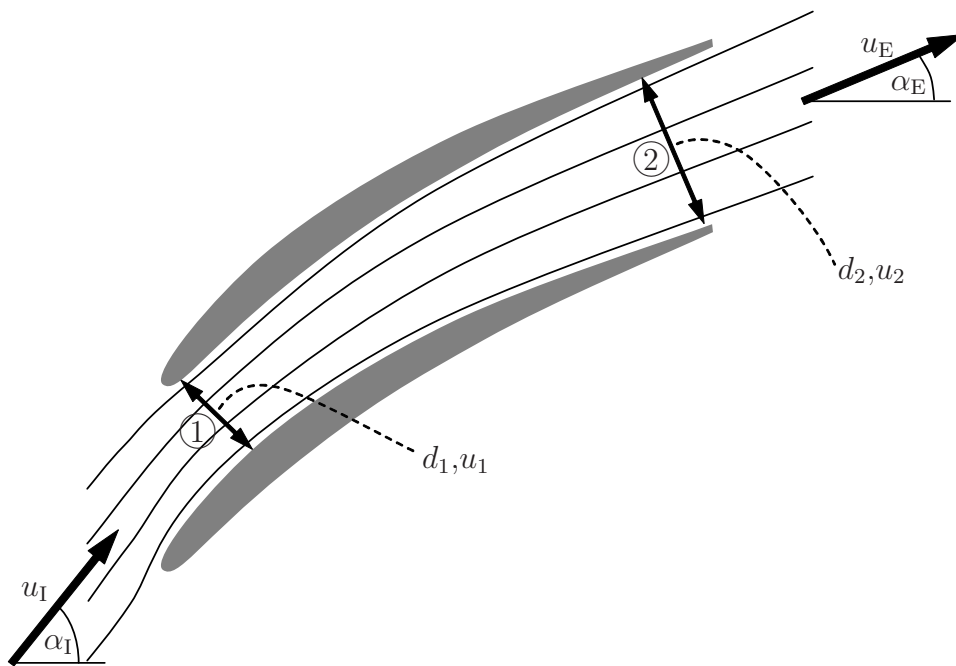


Abb. 3.3: Arbeitsweise einer Verdichterpassage

Bei dem in Abb. 3.3 schematisch gezeigten Schaufelgitter folgt daraus für die beiden Querschnitte ① und ② die vereinfachte Beziehung

$$u_1 d_1 = u_2 d_2, \quad (3.1)$$

wobei davon ausgegangen wird, dass der Abstand zur Rotationsachse entlang der Profile annähernd gleich bleibt. Der von der Strömung passierte Querschnitt ist dabei orthogonal zur Strömungsrichtung zu messen. In Abb. 3.3 ist der Querschnitt  $d_1$  deutlich kleiner als der Querschnitt  $d_2$  am Austritt des Gitters, die Passage zwischen den Schaufeln ist also ein Diffusor. Folglich muss für die Strömungsgeschwindigkeit

$$u_1 = \frac{d_2}{d_1} u_2 > u_2 \quad \text{für } d_1 < d_2 \quad (3.2)$$

gelten, damit die Kontinuitätsgleichung (3.1) befriedigt werden kann. Die Auswirkung der abnehmenden Geschwindigkeit auf den Druck kann mit der BERNOULLIgleichung

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{konst.} \quad (3.3)$$

gezeigt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass diese nur für stationäre, inkompressible und reibungsfreie Strömungen entlang einer Stromlinie gilt und daher nur eine genäherte Tendenz für die realen Verhältnisse in der Verdichterpassage liefert. Für die in Abb. 3.3 gezeigte Situation lautet sie

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2, \quad (3.4)$$

wobei der Schwerterterm  $\rho gz$  als auf beiden Seiten annähernd identisch angenommen wird. Da wegen (3.2) der zweite Term, der sogenannte dynamische Druck, der rechten Seite kleiner ist als der entsprechende Term der linken Seite, folgt für die beiden statischen Drücke

$$p_1 < p_2 \quad \text{für } u_1 > u_2. \quad (3.5)$$

Die Änderung des durchströmten Querschnitts am Gittereintritt bzw. -austritt ist letztlich nicht von der Form des Profils, sondern ausschließlich von der Strömungsumlenkung abhängig. Daher ist auch sofort ersichtlich, dass die Einhaltung der geforderten Umlenkung durch das zu entwerfende Profil enorm wichtig für einen gezielten Druckaufbau ist.

Das Zusammenspiel der abwechselnd auftretenden Rotoren und Statoren ist in Anlehnung an ROLLS-ROYCE PLC (2005) in Abb. 3.4 verdeutlicht. Durch die in Abb. 3.4 links gezeigten Rotoren wird die Strömung in einen Drall versetzt. Folglich kann der Vektor der absoluten Geschwindigkeit  $u^{\text{abs}}$  in die beiden Komponenten  $u^{\text{rot}}$  der Rotationsgeschwindigkeit und  $u^{\text{rel}}$  der Geschwindigkeit relativ zum Schaufelprofil zerlegt werden. Dieses Geschwindigkeitsdreieck und das Profil müssen möglichst gut aufeinander abgestimmt sein, damit die Strömung effizient umgelenkt wird. An der Hinterkante des Rotors kann ein ähnliches Geschwindigkeitsdreieck gezeichnet werden. Da der dem Rotor nachfolgende Stator nicht rotiert, ist seine Ausrichtung der Absolutgeschwindigkeit  $u_{\text{E}}^{\text{abs}}$  angepasst.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass allein aus der zu erfüllenden Funktionalität der Schaufeln im Verdichter hohe und präzise Anforderungen an die Kontur der Profile gestellt werden. Sollen zusätzlich effiziente Profile, also Profile mit sehr geringem Strömungswiderstand, und robuste Profile, die auch bei nicht idealen Geschwindigkeitsdreiecken arbeiten, entstehen, so ist ersichtlich, dass automatisierte und optimierende Entwurfsmethoden nahezu unerlässlich im Entwurfsprozess sind.

### 3.3 Koordinatensysteme beim zweidimensionalen Schaufelentwurf

Bei der Entwicklung von Hochdruckverdichtern spielen mehrere Koordinatensysteme eine wichtige, jeweils spezifische Rolle. Zunächst erfolgt die Positionierung des Bauteils, beispielsweise der Verdichterschaufel, in einem globalen kartesischen  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem, Abb. 3.5. Für die zweidimensionale Schaufelauslegung ist dieses Koordinatensystem jedoch ungeeignet. Hierfür wird ein Koordinatensystem genutzt, das durch eine S1-Stromfläche aufgespannt wird.

Der Ringraum eines Verdichters ist rotationssymmetrisch zur Maschinenachse. Das dreidimensionale Strömungsfeld kann nach WU (1952) in zwei zweidimensionale Felder, die in der S2-Stromebene und in der S1-Stromfläche liegen, zerlegt werden. Die S1-Stromfläche entsteht durch die Rotation der Stromlinien der S2-Ebene um die Maschinenachse. Die S1-Fläche, die durch die Koordinaten  $(m, R \cdot \theta)$  aufgespannt wird, ist doppelt, also in beide Richtungen gekrümmt. Dabei entspricht die  $m$ -Koordinate der Bogenlänge in globaler  $x$ -Richtung und  $R \cdot \theta$  der Bogenlänge in Umfangsrichtung. Da bei der Projektion in die Ebene die wahren Längen abgebildet werden, wird von einem „längentreuen“ Koordinatensystem gesprochen.

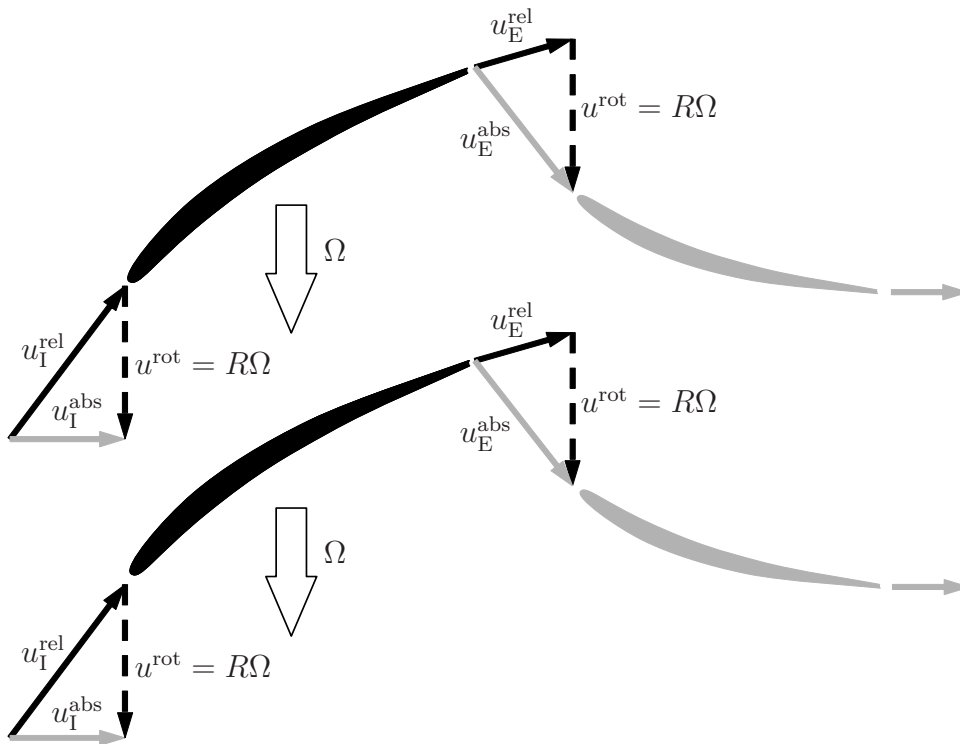
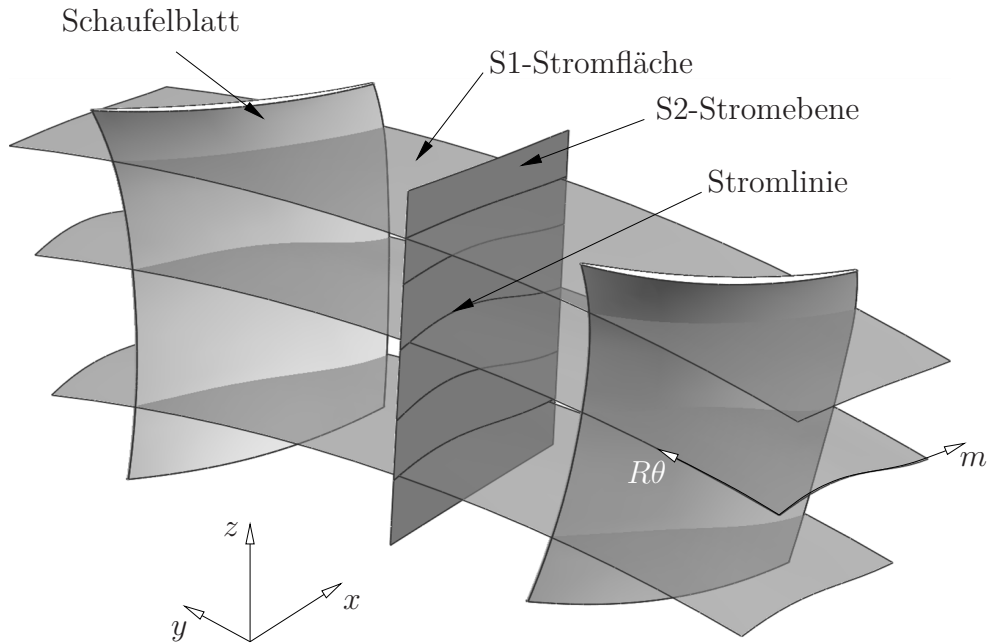


Abb. 3.4: Geschwindigkeitsdreiecke und Strömungsumlenkung einer Verdichterstufe (Rotoren sind schwarz, Statoren grau)





**Abb. 3.5:** Koordinatensysteme im Verdichter nach WU (1952)

Für die numerische Strömungsanalyse kommt es jedoch weniger auf die Längen eines umströmten Körpers an, als vielmehr auf die Winkeländerungen. Die Strömungsanalyse erfolgt daher in einem zweiten „winkeltreuen“  $(m', \theta)$ -Koordinatensystem, das durch eine konforme Abbildung der rotationssymmetrischen S1-Fläche in eine Ebene gewonnen wird, YOUNGREN (1991). Die Koordinaten können wie folgt ineinander umgerechnet werden:

$$\begin{bmatrix} dm' \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} dm \\ R\theta \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

In dieser Arbeit werden die Profile ausschließlich für die aerodynamische Analyse entworfen. Dies hat zur Folge, dass lediglich das  $(m', \theta)$ -Koordinatensystem verwendet wird und keine Umrechnung stattfindet. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden von einem  $(x, y)$ -Koordinatensystem gesprochen, obwohl das  $(m', \theta)$ -System gemeint ist.

### 3.4 Klassifizierung von Schaufelprofilparametrisierungen

Wie bereits bei der Beschreibung des Stands der Technik in der Einleitung deutlich gemacht wurde, existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Herangehensweisen zur parametrischen Erzeugung von Schaufelprofilen. Um hier etwas Ordnung und Orientierung zu schaffen, soll an dieser Stelle eine Einteilung der Methoden vorgenommen werden. Dabei

bietet sich eine Unterteilung nach dem Objekt der parametrischen Beschreibung an, wobei drei Klassen unterschieden werden können:

- direkte Parametrisierungen,
- indirekte Parametrisierungen,
- halb- oder semidirekte Parametrisierungen.

Bei den direkten Parametrisierungen wird die äußere Kontur in beliebiger Weise direkt beschrieben bzw. erzeugt. Das kann beispielsweise durch funktionale Zusammenhänge oder parametrische Kurven, wie Bézier- oder B-Splines erfolgen. Alternativ kann die Kontur als Punktwolke beschrieben werden, wobei die Variation über eine Störfunktion erfolgt, DRELA (1998). Eine weitere interessante Möglichkeit ist die Parametrisierung der Kontur durch die natürliche Gleichung einer Kurve, wie es in Abschnitt 2.1.1 beschrieben ist. Die Zuordnung zu den direkten Methoden mag in diesem Fall auf den ersten Blick nicht korrekt sein, da ja nur die Krümmung der Kontur parametrisiert wird und nicht das Profil selbst. Weil die Kontur mit der natürlichen Gleichung, also dem Verlauf der Krümmung über der Bogenlänge, aber eindeutig festgelegt ist, ist diese Zuordnung dennoch sinnvoll.

Im Gegensatz dazu stehen die indirekten Parametrisierungen. Hier können sofort die Methoden genannt werden, bei denen in beliebiger Form Skelettlinie und Dickenverteilung des Profils parametrisch beschrieben werden und daraus erst die Kontur entsteht. Werden wie in dieser Arbeit Elemente beider Klassen verwendet, um ein Profil zu parametrisieren, kann von einer semidirekten Parametrisierung gesprochen werden. Hier wird beispielsweise die Saugseite direkt parametrisiert, während die Druckseite über eine Dickenverteilung gewonnen wird. Auf diese Art und Weise sollen die Vorteile beider Klassen zum Tragen kommen. In Abb. 3.6 sind Beispiele für Parametrisierungen den drei oben beschriebenen Klassen zugeordnet. Die in dieser Arbeit entwickelten Parametrisierungen sind in fetter Schrift hervorgehoben.

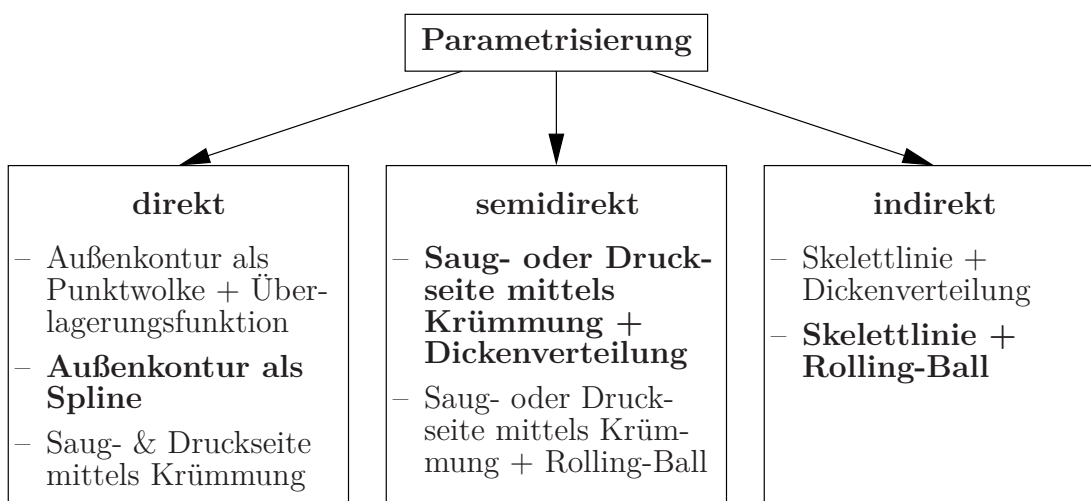
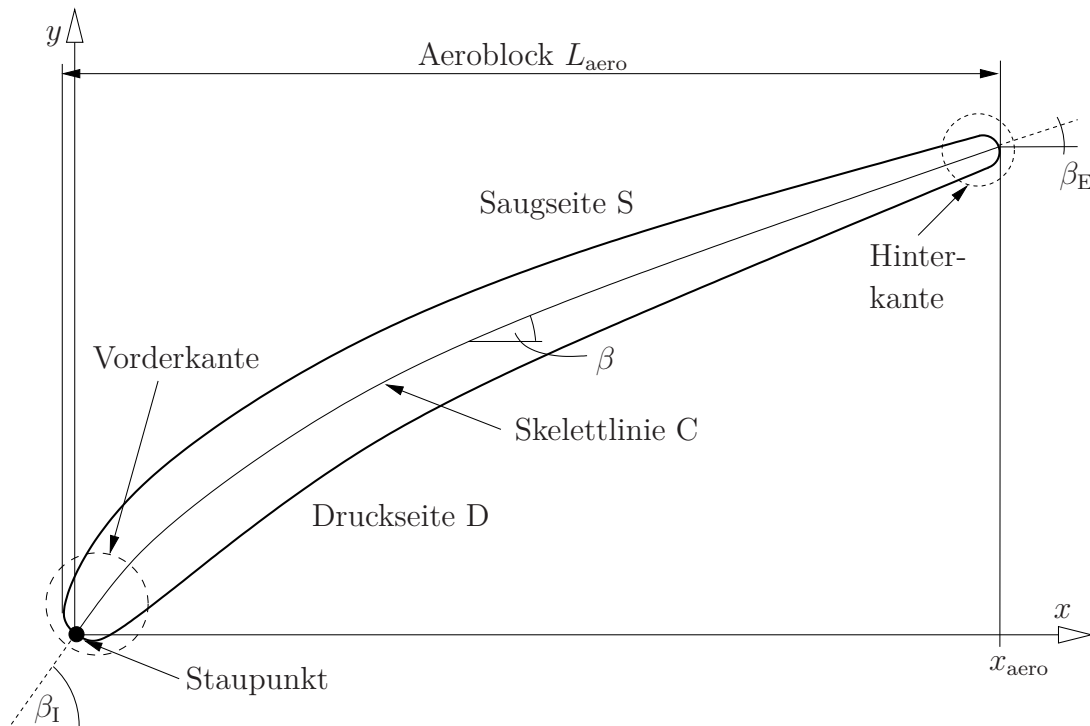


Abb. 3.6: Klassifizierung möglicher Profilparametrisierungen

### 3.5 Allgemeiner Aufbau und Bezeichnungen am Schaufelprofil

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, sollen in dieser Arbeit Verfahren zur Erzeugung von Verdichterschaufelprofilen entwickelt werden. Diese entstehen durch das Verschneiden der Stromröhren mit den Schaufelblättern, siehe Abschnitt 3.3. In Abb. 3.7 ist ein solcher Profilschnitt mit den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen skizziert.



**Abb. 3.7:** Bezeichnungen am Schaufelprofil

Wie allgemein üblich, wird das Profil in eine Saug- und eine Druckseite sowie Vorder- und Hinterkante unterteilt, die sich aus der Lage des Schnittes relativ zum umströmenden Fluid ergeben. Die Mittellinie zwischen Saug- und Druckseite wird als Skelettlinie bezeichnet. Der Tangentialwinkel der Skelettlinie wird als Skelettlinienwinkel  $\beta$  bezeichnet. Die Winkel an Start- und Endpunkt der Skelettlinie werden Metallwinkel  $\beta_I$  und  $\beta_E$  genannt. Der gemeinsame Startpunkt von Saug- und Druckseite sowie Skelettlinie wird in dieser Arbeit als (geometrischer) Staupunkt betitelt, wobei aus Gründen eines besseren Leseflusses meist auf das Adjektiv „geometrisch“ verzichtet wird.

Häufig werden, so wie in dieser Arbeit auch, Saugseite, Druckseite, Vorder- und Hinterkante getrennt (aber nicht unabhängig voneinander) betrachtet und generiert. In diesen Fällen muss besonderes Augenmerk auf die Übergänge zwischen den einzelnen Segmenten des Profils gelegt werden. Abb. 3.8 zeigt ein typisches Beispiel für eine separat erzeugte, kreisförmige Vorderkante an der sich Saug- und Druckseite tangential stetig anschließen. Die Berührungspunkte zwischen Kreis und Profelseiten werden als Blendpunkte bezeichnet. Der von den Tangenten in den Blendpunkten eingeschlossene Winkel wird Keilwinkel

$\mu$  genannt. Die Winkelhalbierende des Keilwinkels geht durch den Mittelpunkt  $M$  des Vorder- bzw. Hinterkantenkreises und bildet mit der  $x$ -Achse den Metallwinkel  $\beta$ . Innerhalb des vorderen Teils des Kreises (bei der Hinterkante der hintere Teil) entspricht die Winkelhalbierende der Skelettlinie C.

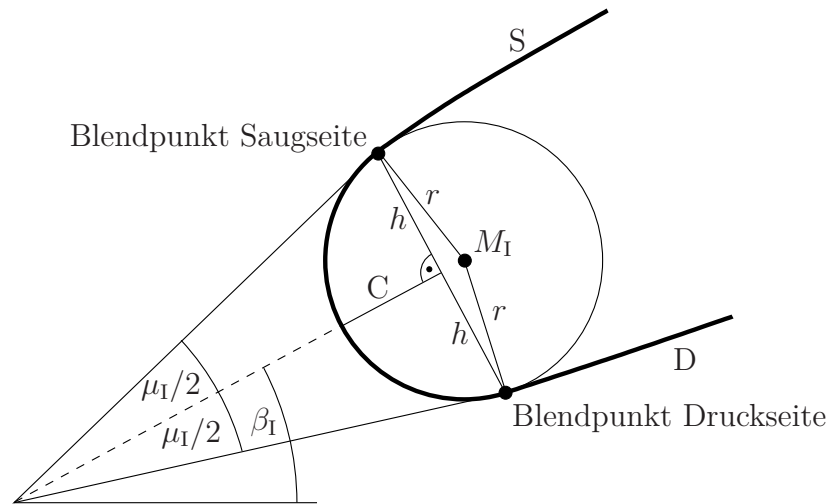


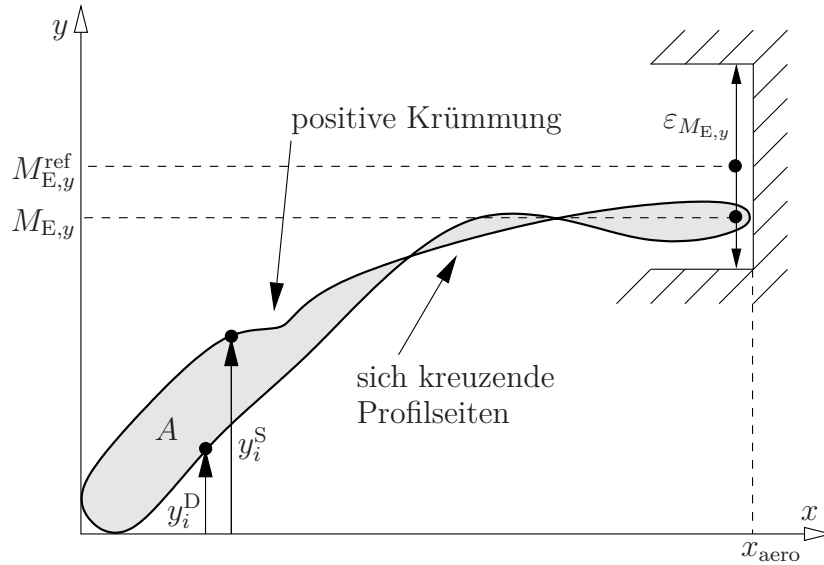
Abb. 3.8: Bezeichnungen an der Profilvorderkante

### 3.6 Allgemeine Forderungen an die Profilgeometrie

Jedes erzeugte Schaufelprofil unterliegt wichtigen Forderungen an seine Geometrie. Diese können struktureller oder aerodynamischer Natur sein. Solche Bedingungen können meist erst durch aufwendige numerische Berechnungsverfahren überprüft und bewertet werden, wie im Kapitel 7 gezeigt wird. Aber auch recht simple Forderungen an eine Geometrie werden bei parametrischen Geometriemodellen mitunter nicht automatisch eingehalten und müssen in einem automatisierten Prozess explizit überprüft werden. In dieser Arbeit werden solche Bedingungen an die Geometrie gestellt und im Folgenden näher erläutert. Abb. 3.9 zeigt sie beispielhaft an einem „kranken“ Entwurf.

Die erste Forderung, die geprüft werden kann, ist die korrekte Lage der Hinterkante. Wie in Abb. 3.9 ersichtlich ist, darf das Profil zum einen nicht über den Aeroblock hinausragen. Dieser Sachverhalt wird in allen in dieser Arbeit entwickelten Methoden bereits in der Parametrisierung berücksichtigt. Zum anderen darf der Mittelpunkt des Hinterkantenkreises keine unsinnig kleinen oder großen  $y$ -Werte annehmen. Diese Forderung muss in zwei der drei Parametrisierungen durch die Nebenbedingung

$$|M_{E,y} - M_{E,y}^{\text{ref}}| \stackrel{!}{\leq} \varepsilon_{M_{E,y}} \quad (3.7)$$



**Abb. 3.9:** Schematische Darstellung der Geometrienebenbedingungen an einem „kranken“ Profil

sichergestellt werden. Darin wird gefordert, dass der  $y$ -Wert des Mittelpunktes  $M_E$  innerhalb eines bestimmten Bereiches um den Wert des Referenzprofils liegt.

Eine weitere wichtige Forderung ist, dass Saug- und Druckseite sich nicht schneiden. Nicht nur, dass solche Profile praktisch nicht existieren können, in diesem Fall erfolgt auch eine fehlerhafte Berechnung des Flächeninhaltes des Profils. Diese Bedingung wird auf einem sehr einfachen Weg geprüft, indem die  $y$ -Werte von Punkten auf Saug- und Druckseite mit gleichem Index  $i$  verglichen werden. Die Mächtigkeit der Menge  $\phi_c$  der Indizes  $i$ , bei denen die Druckseite über der Saugseite liegt, muss also kleiner als Null sein. Da Ungleichungsnebenbedingungen in den später verwendeten Algorithmen leichter zu behandeln sind, wird dies als Ungleichung formuliert:

$$|\phi_c| \stackrel{!}{\leq} 0 \quad \text{mit } \phi_c = \{i \mid y_i^D \geq y_i^S\}. \quad (3.8)$$

Weiterhin wird an die Krümmung der Saugseite die Bedingung gestellt, dass diese stets negativ sein soll. Die Mächtigkeit der Menge  $\phi_\kappa$  der Punkte, wo diese Forderungen nicht erfüllt werden, muss erneut Null sein:

$$|\phi_\kappa| \stackrel{!}{\leq} 0 \quad \text{mit } \phi_\kappa = \{i \mid \kappa_i^S \leq 0\}. \quad (3.9)$$

Anschauliche Überlegungen und Voruntersuchungen zeigen, dass ohne eine entsprechende Einschränkung unrealistische, nahezu beliebig schmale Profile mit dementsprechend geringen aerodynamischen Verlusten in Optimierungsprozessen erzeugt und bevorzugt werden. Als fünfte Forderung soll daher der Flächeninhalt  $A$  des Profils den des Referenzprofils

nicht unterschreiten:

$$A \stackrel{!}{\geq} A^{\text{ref}}. \quad (3.10)$$

Diese Nebenbedingung dient als einfacher Ersatz für eine aufwendige Betrachtung der Festigkeitseigenschaften des Profils. Solche Untersuchungen sind erst bei der Erzeugung des gesamten Schaufelblatts (idealerweise inklusive des Schaufelfußes) sinnvoll und können beispielsweise bei OTTO (2009) gefunden werden. Alternativ zur Fläche werden beispielsweise in SIEVERDING u. a. (2004) die Flächenträgheitsmomente berechnet und mit Referenzwerten verglichen. Eigene Untersuchungen zeigen jedoch keinen Vorteil gegenüber der Flächenbedingung. Da die Form der Profile bei sinnvollen Entwürfen sich sehr ähnelt, korreliert das Flächenträgheitsmoment stark mit dem Flächeninhalt, was beide Methoden etwa gleichwertig macht.

# 4 Direkte Parametrisierung des Schaufelprofils

In den folgenden Abschnitten wird eine Möglichkeit zur direkten Parametrisierung der äußeren Kontur vorgestellt. Im Vergleich zu den anderen Parametrisierungen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, ist diese vielleicht die offensichtlichste und am einfachsten umzusetzende Lösung. Daher werden ähnliche Lösungen, wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, auch in anderen Arbeiten verwendet. Hier wird das Profil in vier Teile, die Vorder- und Hinterkante sowie Saug- und Druckseite, zerlegt, die einzeln, aber wie sich zeigen wird, nicht unabhängig voneinander erzeugt werden.

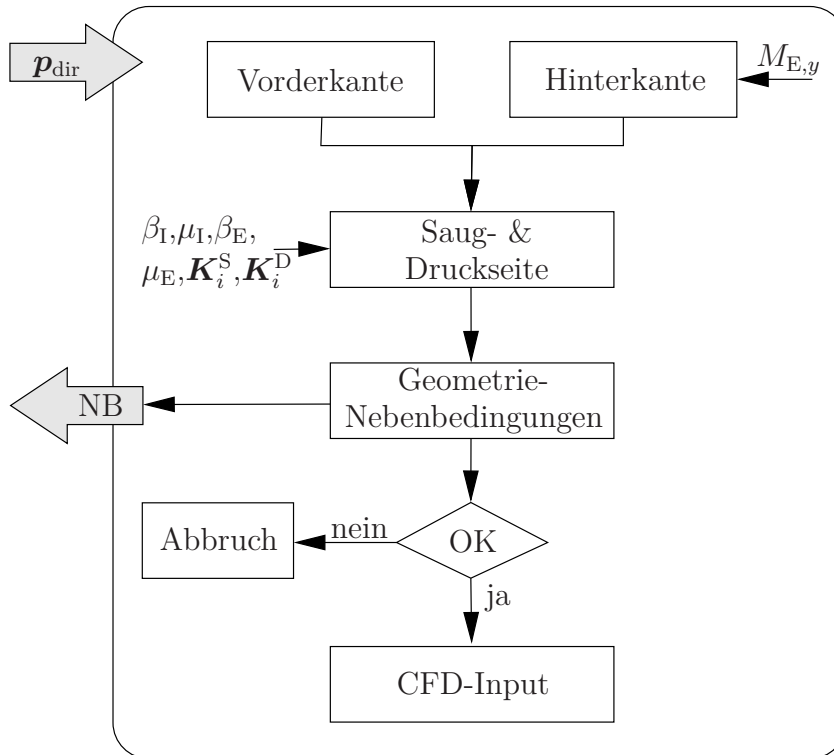
## 4.1 Ablauf des Profilaufbaus

Für den angestrebten Optimierungsvorgang ist ein automatisierter Profilaufbau ohne steuernde oder korrigierende Eingriffe eines Nutzers notwendig. Dafür sind die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Schritte in geeigneter Art und Weise aneinanderzureihen. Außerdem sind den einzelnen Prozessteilen Werte für die jeweils vorhandenen freien Parameter zu übergeben. Abb. 4.1 zeigt den prinzipiellen Ablauf der Profilerzeugung.

Zunächst werden Vorder- und Hinterkante entsprechend Abschnitt 4.2 erzeugt. Dazu ist zur Berechnung des Hinterkantenkreises die  $y$ -Koordinate  $M_{E,y}$  des Mittelpunkts notwendig. Anschließend können parallel sowohl Saug- als auch Druckseite entsprechend Abschnitt 4.3 generiert werden, wobei die Metallwinkel  $\beta_I, \beta_E$  und Keilwinkel  $\mu_I, \mu_E$  beider Profilkanten sowie die freien Koordinaten der Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_i^S, \mathbf{K}_i^D$  vorgegeben werden müssen. Die oben und in den entsprechenden Abschnitten aufgeführten freien Parameter werden im sogenannten Parametervektor

$$\mathbf{p}_{\text{dir}} = [\beta_I \mu_I \beta_E \mu_E M_{E,y} K_{i,x}^S K_{i,y}^S K_{i,x}^D K_{i,y}^D]^\top \quad (4.1)$$

für die direkte Parametrisierung zusammengeführt. Nach dem Profilaufbau wird die Geometrie auf die in Abschnitt 3.6 gestellten Nebenbedingungen getestet. Wird eine der Nebenbedingungen verletzt, wird der Prozess an dieser Stelle abgebrochen, wie im Ablaufplan



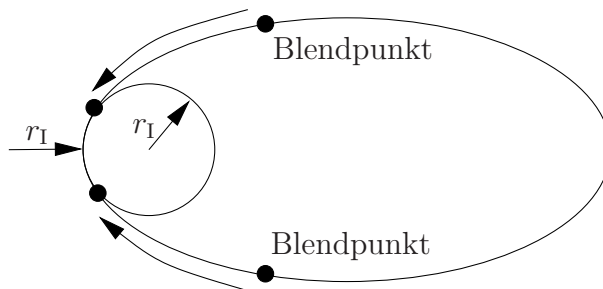
**Abb. 4.1:** Programmablaufplan des Profilaufbaus der direkten Parametrisierung

in Abb. 4.1 gezeigt ist. Sollte die Geometrie jedoch den Anforderungen genügen, werden Eingabedateien für die CFD-Analyse erzeugt.

## 4.2 Vorder- und Hinterkante des Profils

Die Erzeugung des Profils beginnt mit der Platzierung der Vorder- und Hinterkante. Für die Wahl der Form beider Kanten bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Segmente von Kreisen oder Ellipsen wie in KÖLLER u. a. (2000) oder aber Freiformkurven wie bei BÜCHE u. a. (2003) sind die bekanntesten Varianten. In dieser Arbeit wird die Verwendung von Kreissegmenten aus zwei Gründen vorgeschlagen. Zum einen ist die mathematische Formulierung und Einbindung der Kreise in den Profilaufbau die einfachste der drei Varianten. Zum anderen hat sie den Vorteil, dass so die Forderung eines bestimmten minimalen Kantenradius automatisch eingehalten wird. Speziell bei der Verwendung von Freiformkurven ist dies nur durch Nebenbedingungen möglich. Ein Vorteil der Ellipsenvorderkante ist, dass die Anschlüsse von Druck- und Saugseite an Stellen mit kleinerer Krümmung als beim Kreis erfolgen können. Beim Blick auf Abb. 4.2, in der beide Varianten dargestellt sind, relativiert sich dieser Vorteil jedoch. Wird nämlich die Forderung eines bestimmten minimalen Radius streng als maximal erlaubte Krümmung ausgelegt, so ist die resultierende Ellipse deutlich größer als der korrespondierende Kreis, was entweder eine sehr dicke Vorderkante nach sich zieht, oder aber der Vorteil der kleineren Krümmung ist minimal





**Abb. 4.2:** Vergleich von Kreis und Ellipse als Vorderkante

(bei höherem mathematischen Aufwand), wenn der Blendpunkt entsprechend weit vorn gewählt wird.

Der Vorderkantenkreis wird so positioniert, dass er sowohl  $x$ - als auch  $y$ -Achse tangential berührt, Abb. 4.3. Für den Mittelpunkt  $\mathbf{M}_I$  ergeben sich damit bei bekanntem Radius  $r_I$  die Koordinaten

$$\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} M_{I,x} \\ M_{I,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_I \\ r_I \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

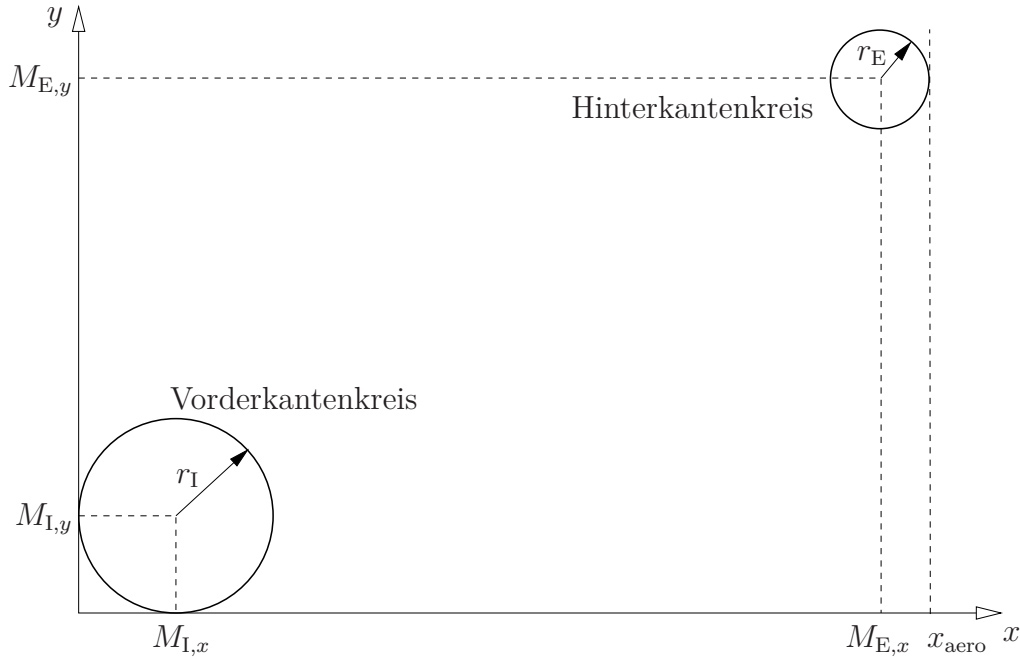
Für den Hinterkantenkreis werden ähnliche Überlegungen angestellt. Zur optimalen Ausnutzung des vorhandenen Bauraums, schmiegt sich der Hinterkantenkreis tangential an die den Aeroblock kennzeichnende Linie an, Abb. 4.3. Bei erneut bekanntem Radius  $r_E$  und maximal zulässiger  $x$ -Koordinate  $x_{\text{aero}}$  folgt der Kreismittelpunkt

$$\mathbf{M}_E = \begin{bmatrix} M_{E,x} \\ M_{E,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\text{aero}} - r_E \\ M_{E,y} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Die  $y$ -Koordinate  $M_{E,y}$  ist hier zunächst unbekannt und wird daher als vorgegebener Parameter in der Optimierung variiert.

### 4.3 Parametrisierung von Saug- und Druckseite mittels B-Splinekurven

Saug- und Druckseite des Profils werden als B-Splinekurven modelliert, wobei eine möglichst glatte Kontur angestrebt wird, Abb. 4.4. Dabei soll „glatt“ so verstanden werden, dass Saug- und Druckseite mindestens  $C^2$ -stetig und frei von Wellen sind. Der Polynomgrad der Basispolynome wird daher zu  $g = 4$  gewählt, so dass die entstehenden Kurven bis zur vierten Ableitung stetig sind. In Verbindung mit der gewählten Anzahl von jeweils  $n + 1 = 8$  Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_0^S \dots \mathbf{K}_7^S$  für die Saugseite und  $\mathbf{K}_0^D \dots \mathbf{K}_7^D$  für die Druckseite ist es einerseits möglich, deren lokalen Einfluss in angemessener Weise so zu begrenzen, dass eine mögliche Welligkeit, also mehrfacher Vorzeichenwechsel der Krüm-



**Abb. 4.3:** Vorder- und Hinterkante

mung, vermieden wird, vgl. Abschnitt 2.2, andererseits ist der Freiheitsgrad groß genug, um aerodynamisch gute Profile abbilden zu können.

Durch die Wahl identischer Parameter für die B-Splines von Saug- und Druckseite sind auch die gleichverteilten Knotenvektoren beider Kurven identisch und lauten

$$\mathbf{U} := \mathbf{U}_S = \mathbf{U}_D = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top. \quad (4.4)$$

Für die Saug- und Druckseite des Schaufelprofils wird eine möglichst glatte Anbindung an Vorder- und Hinterkantenkreis angestrebt. Oft wird dafür ein tangenzenstetiger Übergang gewählt. In dieser Arbeit soll der Übergang an der Vorderkante jedoch zusätzlich zur Tangenzenstetigkeit auch krümmungsstetig erfolgen, um eine bessere Umströmung in diesem Bereich zu erzielen. An der Hinterkante wird dagegen ein tangenzenstetiger Übergang als ausreichend angesehen.

### 4.3.1 $C^0$ -Stetigkeit an Vorder- und Hinterkante

Zunächst gilt es, die vier Übergangspunkte zwischen Vorder- und Hinterkantenkreis und Saug- bzw. Druckseite festzulegen. Dazu werden nicht etwa die Koordinaten direkt auf dem jeweiligen Kreis über eine Kreisgleichung bestimmt. Vielmehr erfolgen die Berechnungen der Übergangspunkte über die Skelettlinienwinkel  $\beta_I$  und  $\beta_E$  am Ein- bzw. Austritt sowie die entsprechenden Keilwinkel  $\mu_I$  und  $\mu_E$ , vgl. Abb. 4.5. Aus diesen können die

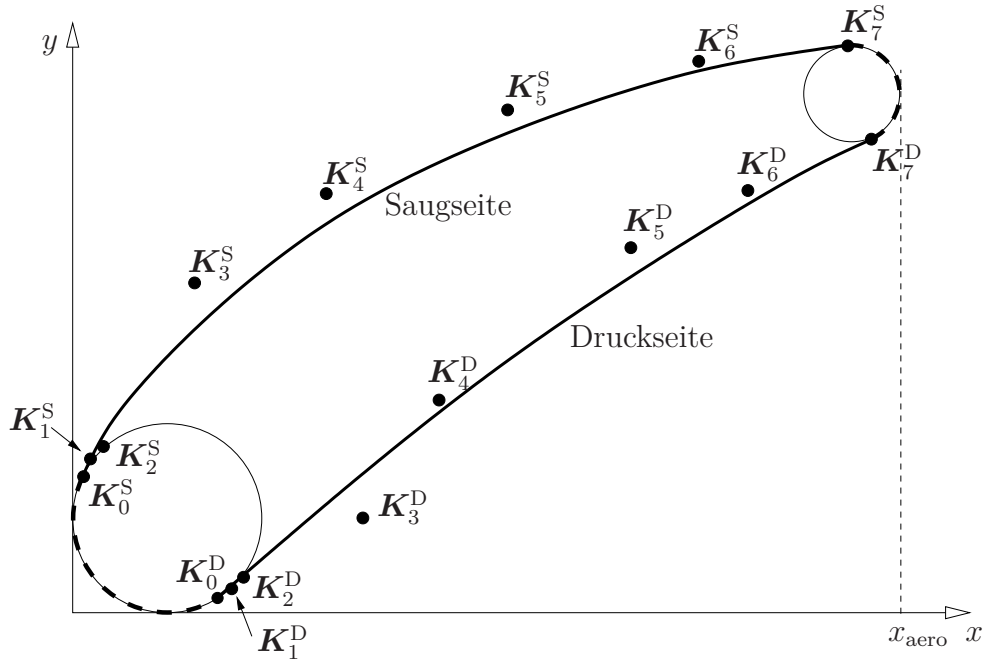


Abb. 4.4: Direkte Parametrisierung des Schaufelprofils

Tangentialwinkel beider Seiten in den Übergangspunkten gemäß

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{I}} &= \beta_{\text{I}} + \frac{\mu_{\text{I}}}{2}, \\ \varphi_{\text{E}} &= \beta_{\text{E}} - \frac{\mu_{\text{E}}}{2}\end{aligned}\tag{4.5}$$

für die Übergänge der Saugseite und

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}} &= \beta_{\text{I}} - \frac{\mu_{\text{I}}}{2}, \\ \psi_{\text{E}} &= \beta_{\text{E}} + \frac{\mu_{\text{E}}}{2}\end{aligned}\tag{4.6}$$

für die Übergänge der Druckseite berechnet werden. Die Koordinaten der Übergangspunkte ergeben sich dann aus den bekannten trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck gemäß Abb. 4.5. Für die Saugseite lauten die Koordinaten der Start- und Endpunkte der beiden B-Splines

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_0^{\text{S}} &= \begin{bmatrix} K_{0,x}^{\text{S}} \\ K_{0,y}^{\text{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\text{I},x} \\ M_{\text{I},y} \end{bmatrix} + r_{\text{I}} \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{\text{I}} \\ \cos \varphi_{\text{I}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_7^{\text{S}} &= \begin{bmatrix} K_{7,x}^{\text{S}} \\ K_{7,y}^{\text{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\text{E},x} \\ M_{\text{E},y} \end{bmatrix} + r_{\text{E}} \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{\text{E}} \\ \cos \varphi_{\text{E}} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.7}$$

und für die Druckseite

$$\mathbf{K}_0^D = \begin{bmatrix} K_{0,x}^D \\ K_{0,y}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{I,x} \\ M_{I,y} \end{bmatrix} + r_I \begin{bmatrix} \sin \psi_I \\ -\cos \psi_I \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_7^D = \begin{bmatrix} K_{7,x}^D \\ K_{7,y}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{E,x} \\ M_{E,y} \end{bmatrix} + r_E \begin{bmatrix} \sin \psi_E \\ -\cos \psi_E \end{bmatrix}.$$
(4.8)

Damit ist eine geschlossene, also stetige Kontur der Schaufelsektion garantiert. In den folgenden beiden Abschnitten werden zusätzliche Maßnahmen ergriffen, um glatte Übergänge zu erzeugen.

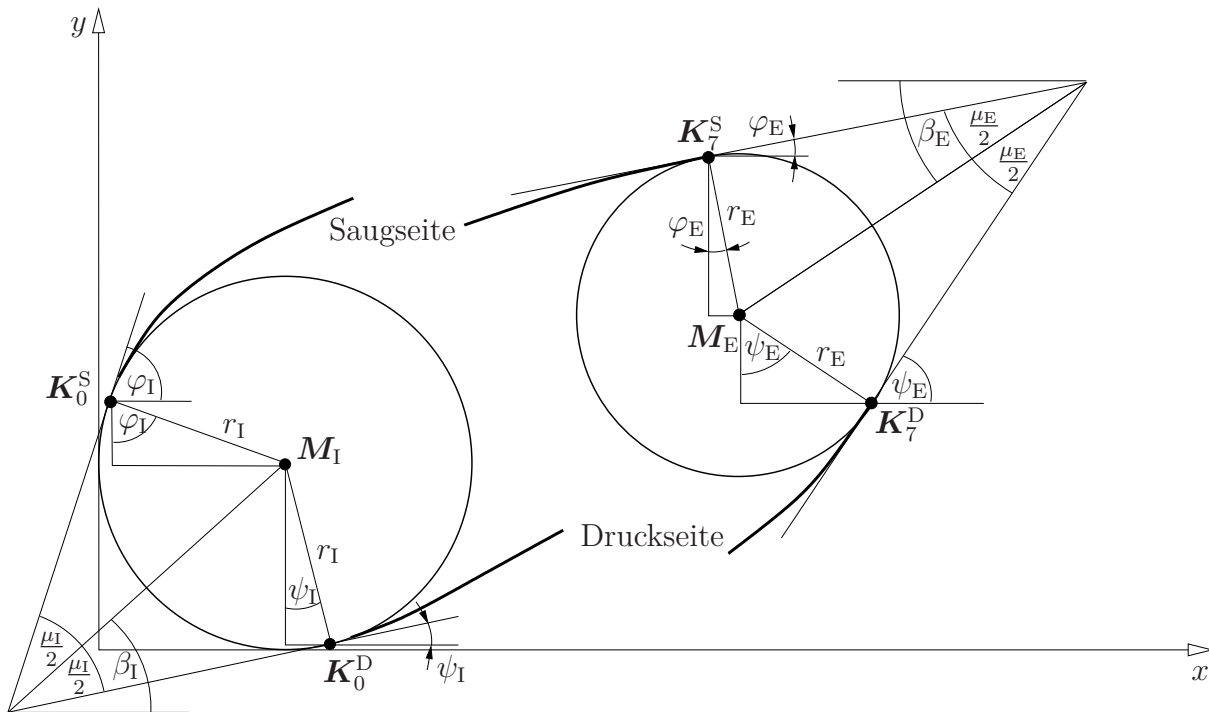


Abb. 4.5: Berechnung der Übergangspunkte am Vorder- und Hinterkantenkreis

### 4.3.2 Tangentenstetigkeit an Vorder- und Hinterkante

Für Tangentenstetigkeit in den Übergangspunkten müssen die Tangentialwinkel bzw. die ersten Ableitungen  $y' = dy/dx$  von Kreis und B-Splinekurve im jeweiligen Übergangspunkt identisch sein. Für die Startpunkte bei  $u_S = u_D = 0$  bzw. die Endpunkte bei  $u_S = u_D = 1$  der B-Splinekurven mit den Kurvenparametern  $u_S$  für die Saug- und  $u_D$  für

die Druckseite können daher für die Vorderkante die Forderungen

$$\begin{aligned} y'_{S,I} &:= y'_S(u_S = 0) \stackrel{!}{=} \tan \varphi_I, \\ y'_{D,I} &:= y'_D(u_D = 0) \stackrel{!}{=} \tan \psi_I \end{aligned} \quad (4.9)$$

aufgestellt werden. Für die Hinterkante lauten sie dementsprechend

$$\begin{aligned} y'_{S,E} &:= y'_S(u_S = 1) \stackrel{!}{=} \tan \varphi_E, \\ y'_{D,E} &:= y'_D(u_D = 1) \stackrel{!}{=} \tan \psi_E. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Um den Anstieg der Saug- und Druckseite gemäß den Forderungen (4.9) in den beiden Startpunkten zu erhalten, kann die im Abschnitt 2.3.1 hergeleitete Gleichung für die erste Ableitung im Startpunkt einer B-Splinekurve verwendet werden. Wie Gl. (2.83) und Abb. 4.6 zeigen, legen die ersten beiden Kontrollpunkte den Anstieg im Startpunkt eindeutig fest. Unter der Voraussetzung, dass der erste Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_0^S$  bzw.  $\mathbf{K}_0^D$  bereits in (4.7) bzw. (4.8) sowie die geforderten Ableitungen in (4.9) gegeben sind, verbleiben die Koordinaten des zweiten Kontrollpunkts  $\mathbf{K}_1^S$  bzw.  $\mathbf{K}_1^D$  als Unbekannte. Durch Umstellen von (2.83) können  $K_{1,y}^S$  und  $K_{1,y}^D$  in Abhängigkeit von der jeweiligen  $x$ -Koordinate dargestellt werden:

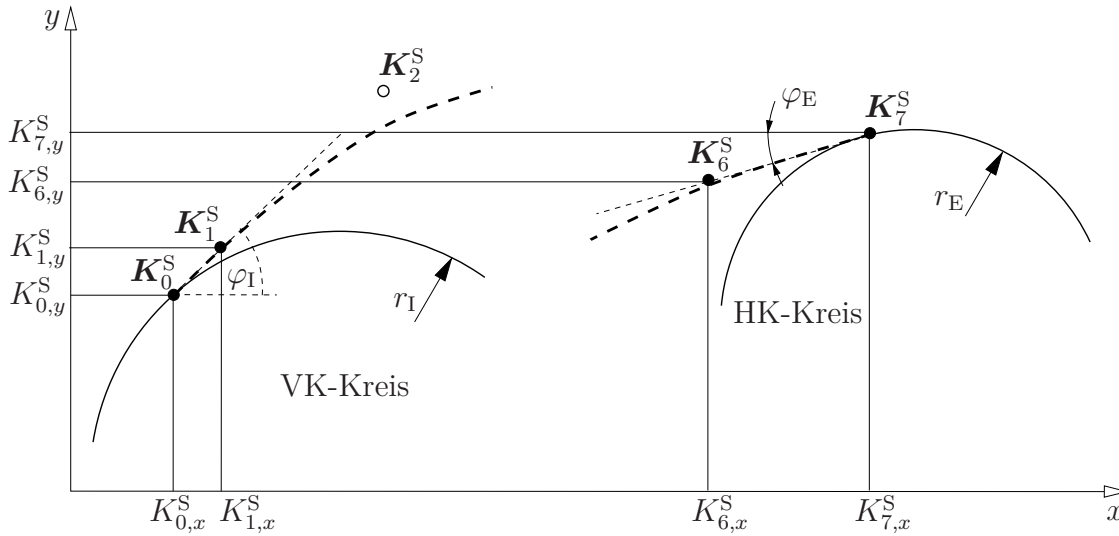
$$\begin{aligned} K_{1,y}^S &= K_{0,y}^S + y'_{S,I} (K_{1,x}^S - K_{0,x}^S), \\ K_{1,y}^D &= K_{0,y}^D + y'_{D,I} (K_{1,x}^D - K_{0,x}^D). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Auf die gleiche Art und Weise werden auch die Ableitungen (4.10) beider B-Splines an der Hinterkante eingestellt, Abb. 4.6. Aus Gl. (2.84) folgt bei acht Kontrollpunkten ( $n = 7$ ) nach Umstellen

$$\begin{aligned} K_{6,y}^S &= K_{7,y}^S - y'_{S,E} (K_{7,x}^S - K_{6,x}^S), \\ K_{6,y}^D &= K_{7,y}^D - y'_{D,E} (K_{7,x}^D - K_{6,x}^D). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die  $x$ -Koordinaten  $K_{1,x}^S$ ,  $K_{1,x}^D$ ,  $K_{6,x}^S$ ,  $K_{6,x}^D$  sind jeweils freie Parameter, die entstehen, wenn entsprechend des Abschnitts 2.1.7 statt einer  $C^1$ -Stetigkeit lediglich die geometrische Tangentenstetigkeit ( $G^1$ -Stetigkeit) gefordert wird. Die freien Größen könnten beispielsweise in einem Optimierungsprozess als Entwurfsgrößen variiert werden. Alternativ können natürlich auch die  $y$ -Koordinaten vorgegeben und (4.11) bzw. (4.12) nach den  $x$ -Koordinaten der Kontrollpunkte umgestellt werden, was in dieser Konfiguration weder Vor- noch Nachteile bringt. Eine dritte Möglichkeit ist die Vorgabe bestimmter Abstände zwischen zwei benachbarten Kontrollpunkten. In Zusammenhang mit den jeweiligen Tangentialwinkeln können so anschaulich beide Koordinaten bestimmt werden. Für die weitere, analoge Vorgehensweise zur Erlangung der  $G^2$ -Stetigkeit mit Hilfe der dritten Kontrollpunkte ist dies

jedoch nicht möglich. Zur Förderung der Verständlichkeit und für eine einheitliche Herangehensweise, wird daher der oben ausführlich beschriebene Weg gewählt.



**Abb. 4.6:** Erzeugung tangentialer Übergänge zwischen Vorder- und Hinterkante und dem B-Spline der Saugseite durch gezielte Platzierung der Kontrollpunkte  $K_1^S$  bzw.  $K_6^S$

### 4.3.3 Krümmungstetigkeit an der Vorderkante

An der Vorderkante soll zusätzlich zur Tangentialstetigkeit auch Krümmungstetigkeit in den beiden Übergangspunkten erreicht werden. Allgemein bietet Gl. (2.29) zunächst eine geeignete Verknüpfung zwischen der Krümmung der Saugseite S bzw. Druckseite D und dem Radius  $r_I$  des Vorderkantenkreises:

$$\begin{aligned} \kappa_{S,I} &:= \kappa_S(u_S = 0) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{r_I}, \\ \kappa_{D,I} &:= \kappa_D(u_D = 0) \stackrel{!}{=} +\frac{1}{r_I}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das Vorzeichen der Krümmung ergibt sich aus der Annahme, dass beide Seiten in Richtung Vorder- zur Hinterkante parametrisiert werden, Abb. 2.5. Für die Krümmung  $\kappa$  gilt für explizit formulierte Kurven ferner die Beziehung (2.27). Eingesetzt in Gl. (4.13) folgt

$$\begin{aligned} \frac{y''_{S,I}}{(1 + y'^2_{S,I})^{3/2}} &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{r_I}, \\ \frac{y''_{D,I}}{(1 + y'^2_{D,I})^{3/2}} &\stackrel{!}{=} +\frac{1}{r_I}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Unter der Voraussetzung, dass die ersten Ableitungen  $y'_{S,I}$ ,  $y'_{D,I}$  bereits mit Gl. (4.9) bekannt sind, kann (4.14) nun nach den zweiten Ableitungen umgestellt werden:

$$\begin{aligned} y''_{S,I} &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{r_I} (1 + y'^2_{S,I})^{3/2}, \\ y''_{D,I} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{r_I} (1 + y'^2_{D,I})^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Diese beiden Bedingungen sind von den B-Splinekurven der Saug- und Druckseite in beiden Startpunkten zu erfüllen, d. h. beide B-Splines müssen in ihren Startpunkten die entsprechende zweite Ableitung aufweisen. Aus Gl. (2.95) folgt mit dem gewählten Polynomgrad  $g = 4$  und  $U_{g+1} = 1/4$ ,  $U_{g+2} = 1/2$  entsprechend dem Knotenvektor (4.4)

$$\begin{aligned} y''_{S,I} &= \frac{3}{8} \frac{K^S_{2,y} - K^S_{1,y} - y'_{S,I} (K^S_{2,x} - K^S_{1,x})}{(K^S_{1,x} - K^S_{0,x})^2}, \\ y''_{D,I} &= \frac{3}{8} \frac{K^D_{2,y} - K^D_{1,y} - y'_{D,I} (K^D_{2,x} - K^D_{1,x})}{(K^D_{1,x} - K^D_{0,x})^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

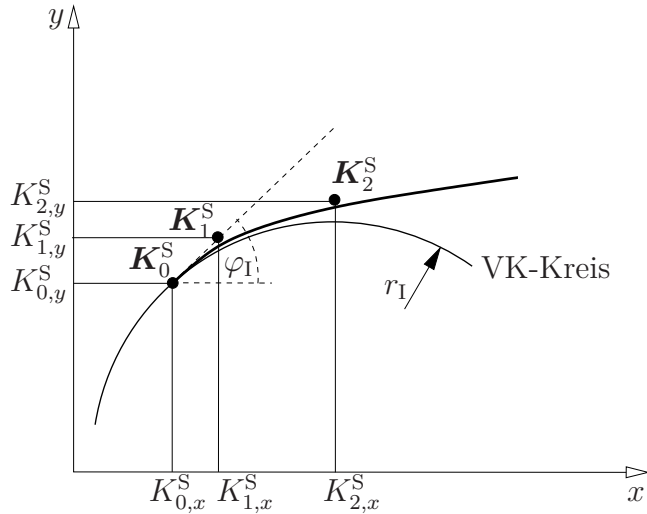
Die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_0^S$ ,  $\mathbf{K}_0^D$  und  $\mathbf{K}_1^S$ ,  $\mathbf{K}_1^D$  sind bereits durch die Maßnahmen im vorherigen Abschnitt eindeutig festgelegt. Offen bleiben die Koordinaten der dritten Kontrollpunkte. Umstellen von (4.16) nach den  $y$ -Koordinaten der dritten Kontrollpunkte liefert

$$\begin{aligned} K^S_{2,y} &= K^S_{1,y} + y'_{S,I} (K^S_{2,x} - K^S_{1,x}) + \frac{8}{3} y''_{S,I} (K^S_{1,x} - K^S_{0,x})^2, \\ K^D_{2,y} &= K^D_{1,y} + y'_{D,I} (K^D_{2,x} - K^D_{1,x}) + \frac{8}{3} y''_{D,I} (K^D_{1,x} - K^D_{0,x})^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei der besseren Übersichtlichkeit wegen Gl. (4.15) nicht eingesetzt wurde. In Abb. 4.7 ist der oben beschriebene Zusammenhang zur Verdeutlichung schematisch für die Saugseite dargestellt.

## 4.4 Fitten von Referenzprofilen

In einem Fitting-Prozess soll die vorgestellte Parametrisierung zunächst auf Ihre Funktionalität hin getestet werden. Dazu werden drei unterschiedliche Mittelschnitte von Schaukeln der ersten, dritten und neunten Stufe eines realen Referenzhochdruckverdichters betrachtet. Entsprechend werden die drei Schnitte im Folgenden als R01 für den Mittelschnitt des Rotors der ersten Stufe, S03 für den Mittelschnitt des Stators der dritten Stufe und S09 für den Mittelschnitt des Stators der neunten Stufe bezeichnet. Für die im



**Abb. 4.7:** Erzeugung eines krümmungsstetigen Übergangs zwischen der Kreisvorderkante und dem B-Spline der Saugseite durch Platzierung des dritten Kontrollpunkts  $K_2^S$

Fittingprozess angewendete Optimierung wird der Parametervektor (4.1) benötigt, wobei die in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten 23 freien Parameter komplett ausgeschrieben werden:

$$\mathbf{p}_{\text{dir}} = [\beta_I \mu_I \beta_E \mu_E M_{E,y} K_{1,x}^S K_{2,x}^S K_{3,x}^S K_{3,y}^S K_{4,x}^S K_{4,y}^S K_{5,x}^S K_{5,y}^S K_{6,x}^S K_{1,x}^D K_{2,x}^D K_{3,x}^D K_{3,y}^D K_{4,x}^D K_{4,y}^D K_{5,x}^D K_{5,y}^D K_{6,x}^D]^\top. \quad (4.18)$$

Der zur Anwendung kommende Optimierer *fmincon* von *Matlab* gehört zu den sogenannten SQP-Verfahren (Sequential Quadratic Programming) und hat ein gutes Konvergenzverhalten, BESTLE (1994). Es variiert den Parametervektor solange, bis eine optimale Übereinstimmung mit den Referenzprofilen auftritt. Dazu wird als Zielfunktion die Summe der Quadrate aus den Differenzen der  $y$ -Koordinaten zweier zugeordneter Punkte des jeweiligen Referenzprofils  $y_i^{\text{ref}}$  und des erzeugten Profils  $y_i$  gewählt:

$$\min_{\mathbf{p}_{\text{dir}} \in \mathcal{P}_{\text{dir}}} \sum (y_i^{\text{ref}} - y_i)^2 \text{ mit } \mathcal{P}_{\text{dir}} := \{\mathbf{p}_{\text{dir}} \in \mathbb{R}^{23} \mid \mathbf{p}_{\text{dir}}^u \leq \mathbf{p}_{\text{dir}} \leq \mathbf{p}_{\text{dir}}^o\}. \quad (4.19)$$

Die Zuordnung der Punkte erfolgt über den Index  $i$ , so dass beide Profile über die selbe Anzahl an Punkten verfügen müssen, die außerdem möglichst ähnlich über den Profilen verteilt sein sollten. Um die Suche des Optimierers einzugrenzen, werden für die Parameter untere  $\mathbf{p}_{\text{dir}}^u$  und obere Grenzen  $\mathbf{p}_{\text{dir}}^o$  vorgegeben, die allerdings empirisch ermittelt und relativ weit gewählt sind. Die durch Fitting erhaltenen Parametersätze sind ein guter Anhaltspunkt für die Parametergrenzen späterer Optimierungsläufe.



### Schaufelprofil R01

Der im Vergleich zu den anderen beiden Profilen sehr lange und schlanke Mittelschnitt des Rotors der ersten Stufe des Referenzhochdruckverdichters in Abb. 4.8 kann von der Parametrisierung sehr gut nachgebildet werden. Auch im Bereich der Vorderkante treten nur geringfügige Abweichungen auf, wobei das Referenzprofil wegen seiner Krümmungsstetigkeit noch etwas schlanker ist. Die Kontrollpunkte sind auf beiden Profilleiten recht gleichmäßig verteilt, lediglich in der zweiten Hälfte der Saugseite sind die Abstände etwas geringer.

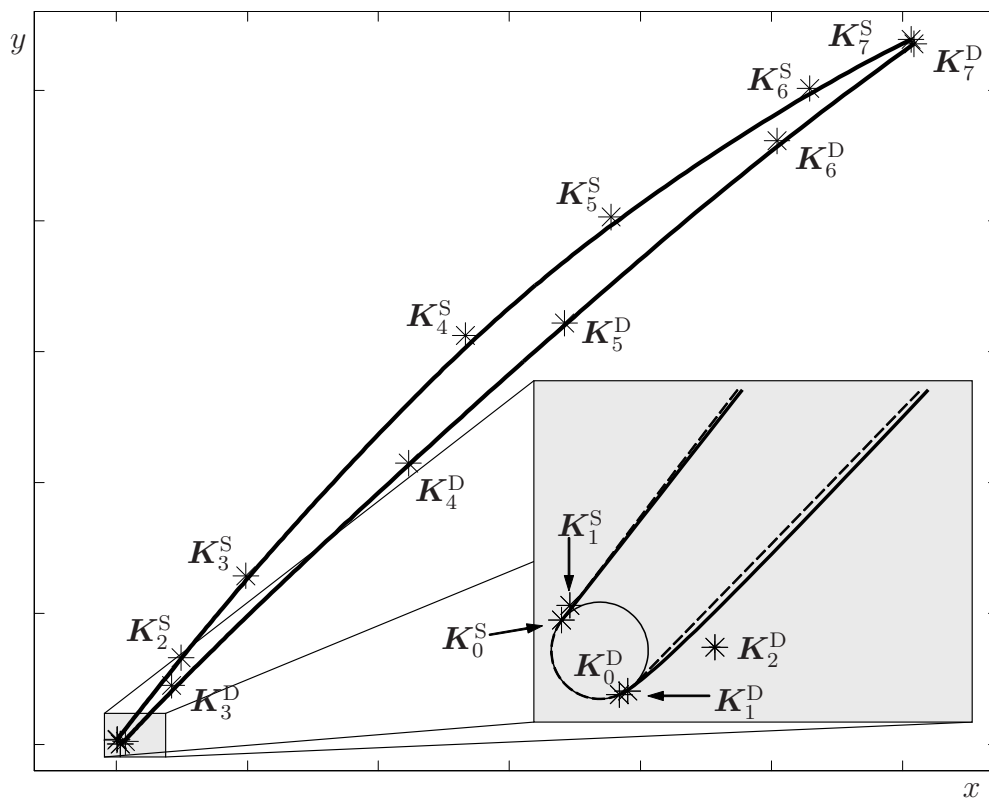
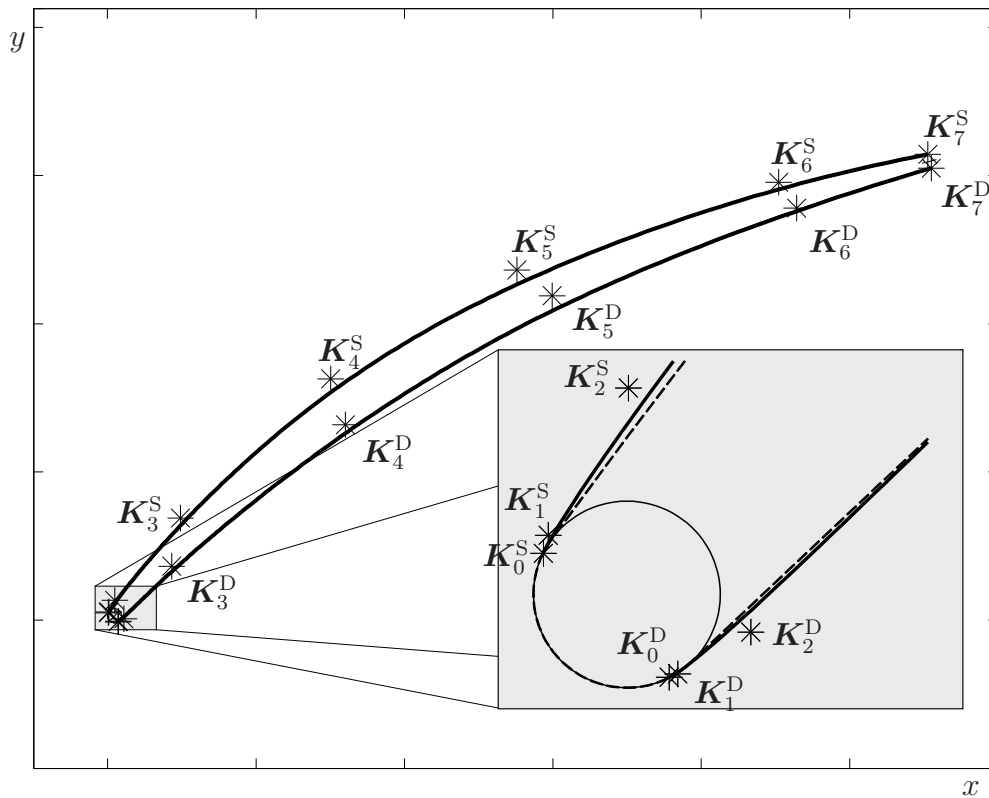


Abb. 4.8: R01-Profilt fitting mit der direkten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

### Schaufelprofil S03

Abb. 4.9 zeigt das Ergebnis des Profilt fittings für den Mittelschnitt des Stators 3. Auch hier kann selbst an der Vorderkante eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden, siehe vergrößerter Ausschnitt in Abb. 4.9. Bis auf die drei Kontrollpunkte an der Vorderkante, die für die Erzeugung der Krümmungsstetigkeit benötigt werden, sind die restlichen Kontrollpunkte auf beiden Profilleiten sehr gleichmäßig verteilt. Dadurch wird die Kontur sehr glatt, was sich sowohl auf die Aerodynamik als auch die Fertigbarkeit positiv auswirkt.



**Abb. 4.9:** S03-Profilfitting mit der direkten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

### Schaufelprofil S09

Das Referenzprofil des Mittelschnitts des Stators der Stufe 9 zeigt nach der Vorderkante ein ausgesprochen welliges Verhalten, Abb. 4.10. Auch diese Eigenart kann von der Parametrisierung gut nachgebildet werden. Dadurch kommt es jedoch auf der Saugseite zu einer Häufung der Kontrollpunkte  $K_2^S$  bis  $K_5^S$  in diesem Bereich. In der zweiten Hälfte der Saugseite steht dann mit  $K_6^S$  nur noch ein freier Kontrollpunkt zur Verfügung, der jedoch offensichtlich ausreicht, das Referenzprofil in diesem Bereich nachzubilden. Direkt im Bereich der Vorderkante sind dann allerdings nicht mehr genügend Kontrollpunkte vorhanden, um eine gute Übereinstimmung zu finden. Das Gleiche trifft auf die Druckseite zu, obwohl hier die Kontrollpunkte etwas gleichmäßiger verteilt sind.

### Krümmungsverläufe der Profelseiten

Zur Beurteilung der Güte der drei gefitteten Profile werden die Krümmungsverläufe der Saug- und Druckseiten mit den analytischen Ableitungen der B-Splinekurven der Profelseiten entsprechend Gl. (2.25) und (2.54) berechnet. Wie Abb. 4.11 zeigt, sind die Krümmungsverläufe für alle Profile stetig. Beim Betrachten der Ausschnitte im Vorderkantenbereich fällt auf, dass die Kurven hier einen Knick aufweisen. Dies liegt an der Formulierung der Übergangsbedingungen, die lediglich Tangenten- und Krümmungstetigkeit fordern, eine stetige Änderung der Krümmung wird jedoch nicht verlangt. Die Krümmung auf der

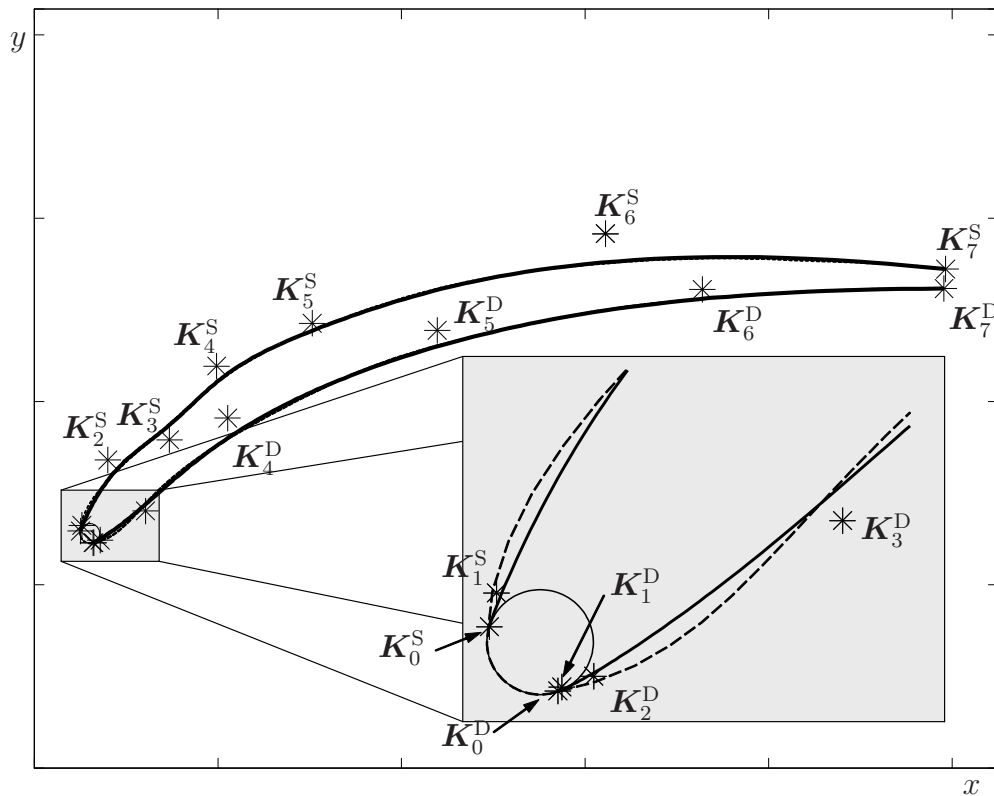


Abb. 4.10: S09-Profilfitting mit der direkten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

Saugseite des Stator 9 hat im vorderen Drittel der Kurve einen stark welligen Verlauf mit mehreren Vorzeichenwechseln. Diese Eigenschaft lässt sich auch schon sehr gut im Profil erkennen, Abb. 4.10. Inwieweit ein solcher Verlauf wünschenswert ist, lässt sich natürlich nur für den konkreten Fall beantworten. Eine Nebenbedingung oder die Reduktion der Anzahl der Kontrollpunkte in diesem Bereich können hier Abhilfe schaffen.

Bei der Durchführung des Fittingprozesses kann eine bemerkenswerte Beobachtung gemacht werden. Wird die untere Grenze für die  $x$ -Koordinate des zweiten Kontrollpunkts  $K_1^D$  der Druckseite zu klein gewählt, kann es unmittelbar nach dem Anschluss an die kreisförmige Vorderkante zu einem sprunghaften Anstieg der Krümmung kommen, siehe Abb. 4.12 für den Stator 3. Der Verlauf der Krümmung bleibt wohlgeartet stetig und verletzt somit nicht die gestellten Anforderungen, gleichwohl entspricht dies sicherlich nicht dem gewünschten Verlauf, bei dem die Krümmung nach der Vorderkante zunächst stetig abnimmt. Soll dieses Phänomen in einem Optimierungsprozess unbedingt verhindert werden, kann eine Nebenbedingung eingeführt werden, die bei Auftreten eines solchen Verlaufs verletzt wird. Meist ist es jedoch vorteilhafter, die Parametergrenzen der Kontrollpunkte so zu wählen, dass dieser Verlauf erst gar nicht auftreten kann. Dabei ist natürlich darauf zu achten, dass der Entwurfsraum nicht zu stark eingeschränkt wird.

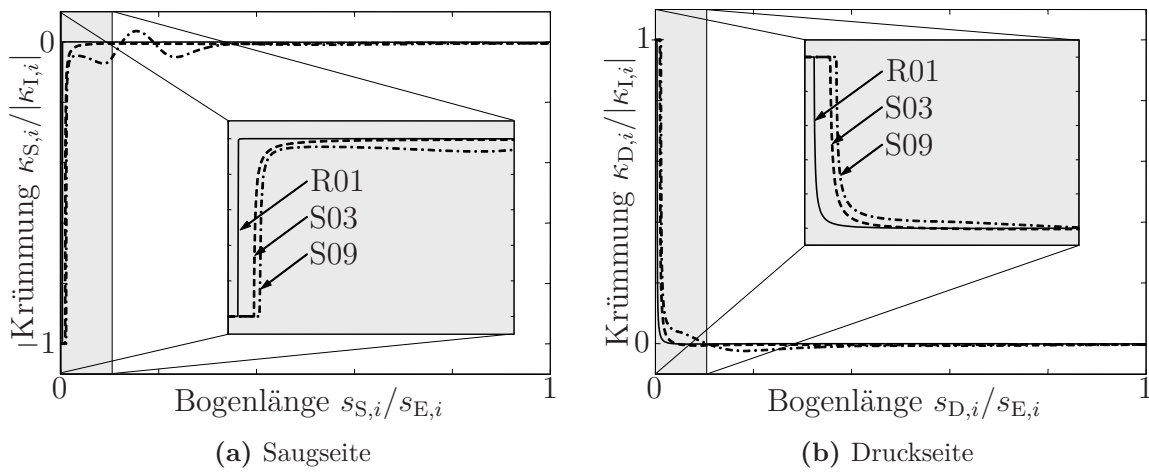


Abb. 4.11: Normierte Krümmungsverläufe für Profilfittings von R01, S03 und S09 bei der direkten Parametrisierung

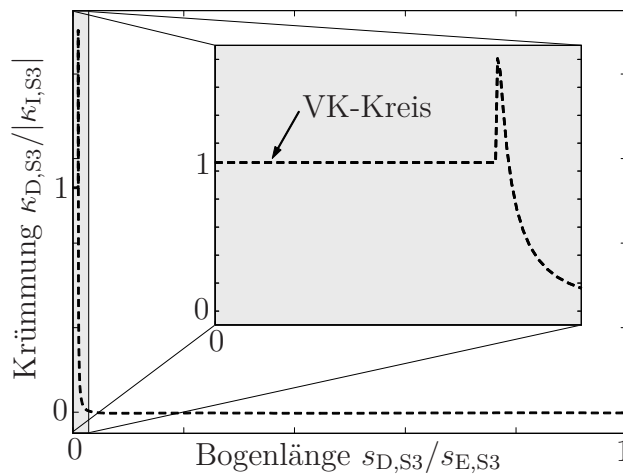


Abb. 4.12: Sprunghafter Anstieg der Krümmung der Druckseite des Profils S03 nach der Vorderkante VK durch zu geringen Abstand des zweiten Kontrollpunkts vom ersten

# 5 Indirekte Parametrisierung des Schaufelprofils

Indirekte Parametrisierungen zeichnen sich dadurch aus, dass das Schaufelprofil über Hilfskonstrukte erzeugt wird. Meist wird zunächst eine Mittellinie des Profils definiert, auf der dann eine Dicke aus einer Verteilungskurve orthogonal aufgetragen wird, so dass Saug- und Druckseite entstehen, siehe beispielsweise FLASSIG (2007). Wie auch bei den direkten Methoden werden Vorder- und Hinterkante meist gesondert erzeugt, da so relativ einfach Nebenbedingungen eingehalten werden können. Wie im Kapitel 4 gezeigt wird, bedarf es bei dieser Vorgehensweise einiger Anstrengung, um glatte Übergänge zwischen den einzelnen Abschnitten des Profils zu erzeugen. Als Alternative wird deshalb im Folgenden eine Methode entwickelt, bei der statt der Dickenverteilung ein Rolling-Ball, oder auch Rollradius, mit variablem Radius entlang der Skelettlinie geführt wird und so Saug- und Druckseite einschließlich der Vorder- und Hinterkante erzeugt. Im Bereich des Schaufelprofilentwurfs wurden Rolling-Ball-Algorithmen bisher verwendet, um von vorhandenen Profilen Skelettlinie und Dickenverteilung zu ermitteln, LANGE u. a. (2008).

## 5.1 Ablauf des Profilaufbaus

Ausgangspunkt des Profilaufbaus bilden zwei in Form von B-Splinekurven parametrisch abgebildete Verteilungen für die Krümmung der Skelettlinie sowie die erste Ableitung des Rolling-Ball-Radius. Aus der Krümmungsverteilung wird zunächst der Verlauf der Skelettlinie berechnet, entlang der anschließend der Rolling-Ball, der aus der Ableitung seines Radius berechnet wird, verschoben wird. Abb. 5.1 zeigt den automatisierten, d. h., abgesehen von den vorzugebenden freien Parametern, vom Benutzer unabhängigen Ablauf dieser Profilparametrisierung in Form eines Programmablaufplans. Die benötigten freien Parameter, das sind der Metallwinkel  $\beta_I$  der Einlassseite sowie die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_i^\kappa$  und  $\mathbf{K}_i^{r'}$  der beiden B-Splinekurven, können im Parametervektor

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \left[ \beta_I \ K_{i,s}^\kappa \ K_{i,\kappa}^\kappa \ K_{i,s}^{r'} \ K_{i,r'}^{r'} \right]^\top \quad (5.1)$$

zusammengefasst werden. Nach dessen Übergabe an den Profilaufbauprozess können zunächst die Verläufe der Skelettlinienkrümmung und der ersten Ableitung des Rolling-Ball-Radius in Abhängigkeit von der Bogenlängenkoordinate  $s$  der Skelettlinie dargestellt werden. Durch Integration werden daraus die Koordinaten und die Länge  $s_E$  der Skelettlinie bestimmt. An dieser Stelle folgt eine Überprüfung der Plausibilität der Skelettlinie anhand der Forderung (3.7) bezüglich der Lage des Hinterkantenkreises. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, wird der Profilaufbau fortgesetzt. Dazu wird der Verlauf der ersten Ableitung des Rolling-Ball-Radius nun solange angepasst, bis der gewollte Radius an der Hinterkante des Schaufelprofils erreicht wird. Damit kann das Profil eindeutig aufgebaut werden. Anschließend werden die weiteren geometrischen Forderungen entsprechend Abschnitt 3.6 überprüft und bei Erfüllung können die Eingabedateien für die CFD-Analyse erzeugt werden. An den Stellen, wo Forderungen an die Geometrie nicht erfüllt werden, wird der restliche Vorgang sofort abgebrochen, um Zeit einzusparen.

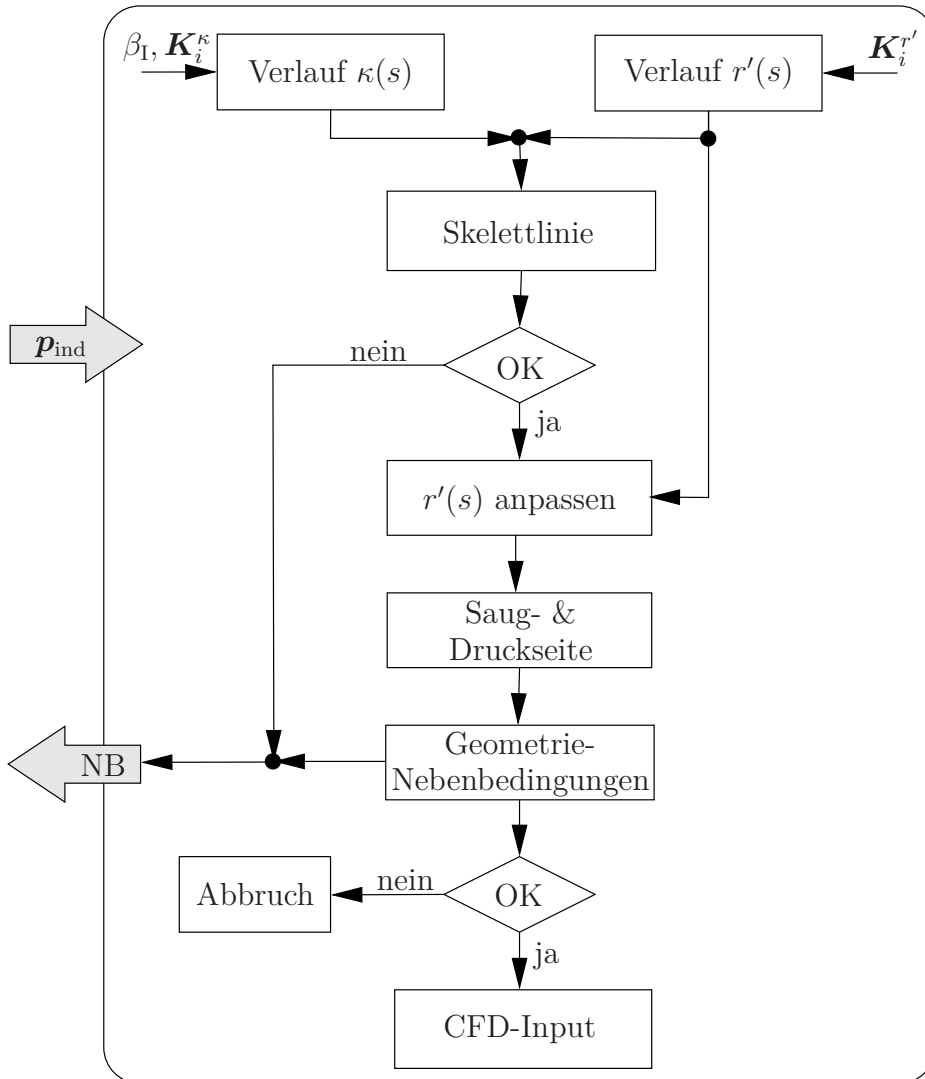


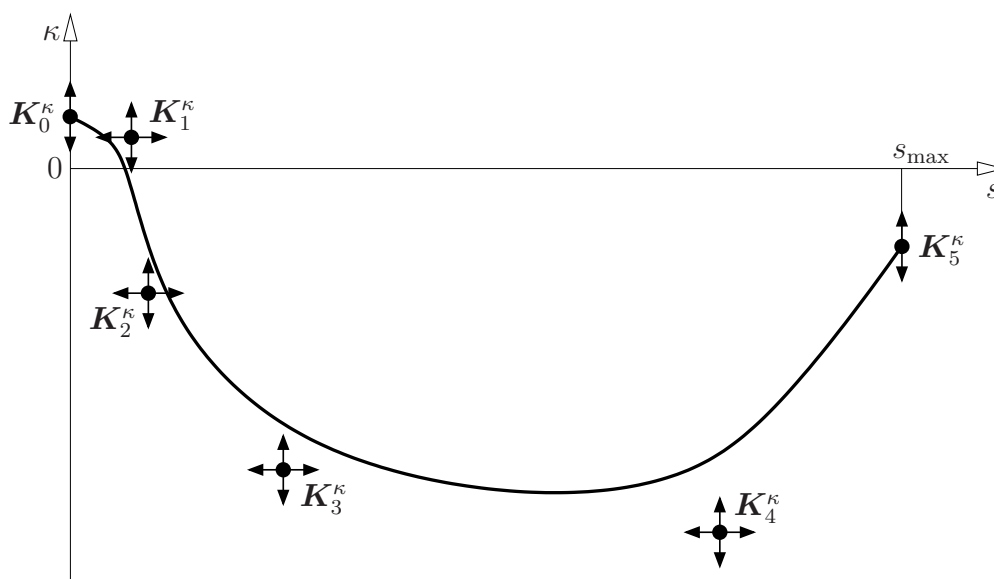
Abb. 5.1: Programmablaufplan des Profilaufbaus der indirekten Parametrisierung

## 5.2 Bestimmung der Skelettlinie mittels der natürlichen Gleichung

Wie bereits angesprochen soll die Skelettlinie des Schaufelprofils über ihre Krümmung berechnet werden. Die Bestimmung der Skelettlinienkoordinaten aus ihrer natürlichen Gleichung ist in Abschnitt 2.1.6 dargestellt. Hier soll die Krümmungsverteilung der Skelettlinie in Form einer B-Splinekurve beschrieben werden, Abb. 5.2. Die Krümmung  $\kappa$  ist dabei in Abhängigkeit von der Bogenlänge  $s \in [0, s_{\max}]$  dargestellt. Zur Parametrisierung eines möglichst realistischen Kurvenverlaufs werden sechs Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_0^\kappa \dots \mathbf{K}_5^\kappa$  und der Polynomgrad  $g = 3$  gewählt. Der uniforme Knotenvektor für den B-Spline lautet dann entsprechend Gl. (2.45)

$$\mathbf{U}_\kappa = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top. \quad (5.2)$$

Die  $s$ -Koordinaten des ersten und des letzten Kontrollpunkts sind bereits mit  $K_{0,s} = 0$  bzw.  $K_{5,s} = s_{\max}$  gegeben, wobei der Wert von  $s_{\max}$  so zu wählen ist, dass die Skelettlinie für vernünftige Krümmungsverläufe lang genug ist und das Schaufelprofil den zur Verfügung stehenden axialen Bauraum, d. h. den Aeroblock, komplett ausfüllen kann. Die restlichen Koordinaten der Kontrollpunkte sind dagegen frei wählbar, was in Abb. 5.2 durch Pfeile kenntlich gemacht ist.



**Abb. 5.2:** Schematische Darstellung einer möglichen B-Splinekurve für den Krümmungsverlauf der Skelettlinie

Abb. 5.3 zeigt die Skelettlinie  $C$  und die zur Berechnung der Koordinaten aus der natürlichen Gleichung, vgl. dazu Abschnitt 2.1.6, notwendigen Größen. Das Differentialgleichungssystem (DGS) dafür ergibt sich aus den im vergrößerten Ausschnitt in Abb. 5.3 dargestellten geometrischen Zusammenhängen  $ds = R |d\beta| = d\beta/\kappa$ ,  $dx_C = ds \cos \beta$  und

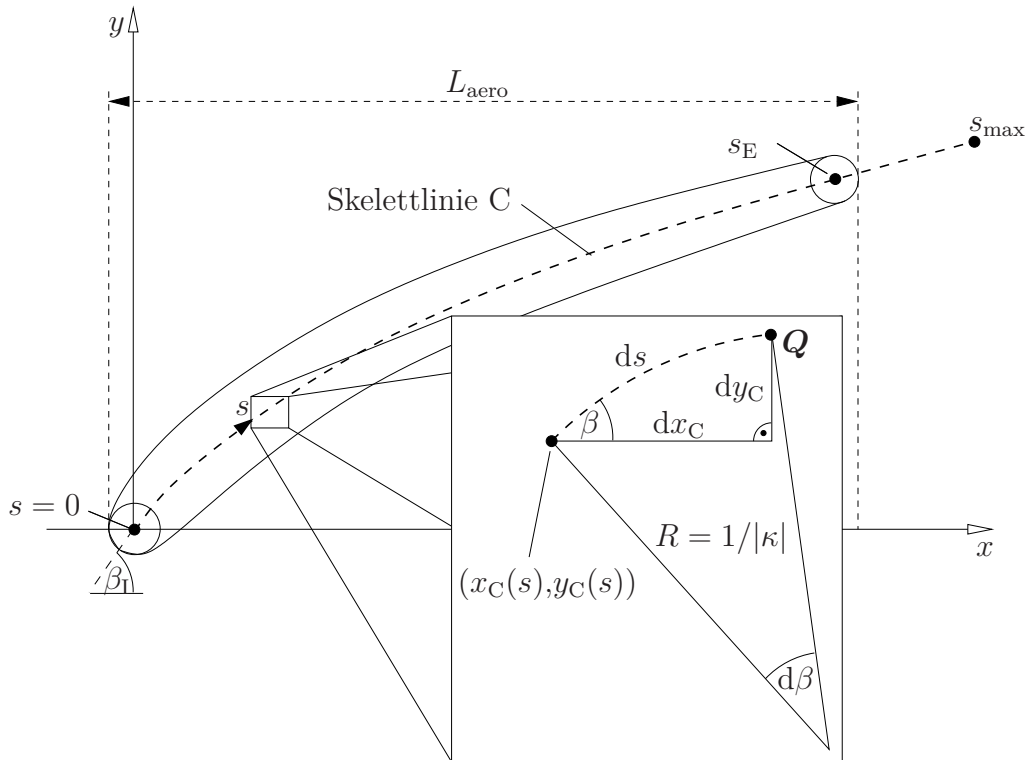


Abb. 5.3: Skelettlinie

$dy_C = ds \sin \beta$  zu

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \kappa(s), \\ x'_C(s) &= \cos \beta(s), \\ y'_C(s) &= \sin \beta(s), \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei die Ableitungen bezüglich der Bogenlänge  $s$  zu nehmen sind. Die Skelettlinie ergibt sich dann durch Integration über dem Bereich  $s \in [0, s_{\max}]$ . Da der Krümmungsverlauf als B-Splinekurve vorliegt, ist eine analytische Lösung des DGS nicht möglich. Stattdessen wird es mit dem Einschrittintegrationsverfahren *ODE45* von *Matlab* numerisch gelöst.

*ODE45* basiert auf der DORMAND-PRINCE-Methode der Ordnung (4,5), vgl. DORMAND u. PRINCE (1980), die zu den expliziten RUNGE-KUTTA-Verfahren gezählt wird. Dabei wird das DGS sowohl mit Genauigkeiten 4. als auch 5. Ordnung gelöst, um aus der Differenz der beiden Lösungen den Fehler der Lösung 4. Ordnung zu schätzen. Die Größe dieses Fehlers geht wiederum in die automatische Steuerung der Schrittweite ein. Aufgrund der guten Genauigkeit und schnellen Konvergenz ist *ODE45* die erste Wahl in *Matlab* für nicht-steife Differentialgleichungssysteme, MATHWORKS (2011).



Die Anfangsbedingungen zur Lösung des DGS (5.3) lauten nach Abb. 5.3

$$\begin{aligned}\beta(s = 0) &= \beta_I, \\ x_C(s = 0) &= 0, \\ y_C(s = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Der Startwinkel der Skelettlinie wird in Analogie zu den anderen Parametrisierungen als Metallwinkel  $\beta_I$  bezeichnet und als bekannte bzw. vorgegebene Größe angenommen. Da die Ausdehnung der Vorderkante vor der Lösung des DGS nicht bekannt ist, startet die Skelettlinie zunächst im Koordinatenursprung.

Das gleiche Problem existiert auch an der Hinterkante. Hier ist die Lage des Endpunkts der Skelettlinie unbekannt, da diese ein Ergebnis der Integration ist. Die endgültigen Koordinaten der Skelettlinie, mit denen das spätere Profil optimal den Aeroblock ausfüllt, können bei vorgegebenem Hinterkantenradius  $r_E$  also erst dann berechnet werden, wenn auch der Verlauf des Rolling-Ball-Radius, zumindest für den Bereich der Vorderkante, und damit die minimale  $x$ -Koordinate bekannt sind. Hierfür müssen allerdings bereits die Gleichungen zum Profilaufbau bekannt sein, die im kommenden Abschnitt hergeleitet werden.

## 5.3 Erzeugung von Saug- und Druckseite

Saug- und Druckseite des Profils werden mit einem sogenannten Rolling-Ball-Algorithmus (oder auch Rollradiusmethode) berechnet. Diese Methode wird hauptsächlich in CAD-Programmen verwendet, wo die Schnittkante zweier sich schneidender Flächen aus fertigungstechnischen Gründen bzw. zur Verminderung von Kerbspannungen mit einem Radius ausgerundet wird, siehe z. B. SANGLIKAR u. a. (1990) für konstante und HERMANN u. a. (1995) für variable Rolling-Ball-Radien. In der Schaufelprofilentwicklung werden Rolling-Ball-Methoden zur nachträglichen Bestimmung der Dickenverteilung eines Profils verwendet, LANGE u. a. (2008).

Hier soll der umgekehrte Fall, also die Entwicklung des Schaufelprofils aus dem Verlauf des Radius eines „rollenden“ Kreises gezeigt werden. Der Mittelpunkt des Kreises mit dem variablen Radius  $r(s)$ , wobei sich die Bogenlängenkoordinate  $s$  auf die Skelettlinie bezieht, wird beginnend an der Vorderkante entlang selbiger geführt und erzeugt Saug- und Druckseite als Einhüllende. Die Skelettlinie kann hier also entsprechend SUGIHARA (2002) und CHOI u. HAN (2002) als sogenannte mediale Achse bezeichnet werden.

Entsprechend dem vergrößerten Ausschnitt in Abb. 5.4 können ausgehend vom bekannten Punkt  $P_C$  der Skelettlinie die dazugehörigen Punkte  $P_S$  und  $P_D$  auf den Profalseiten

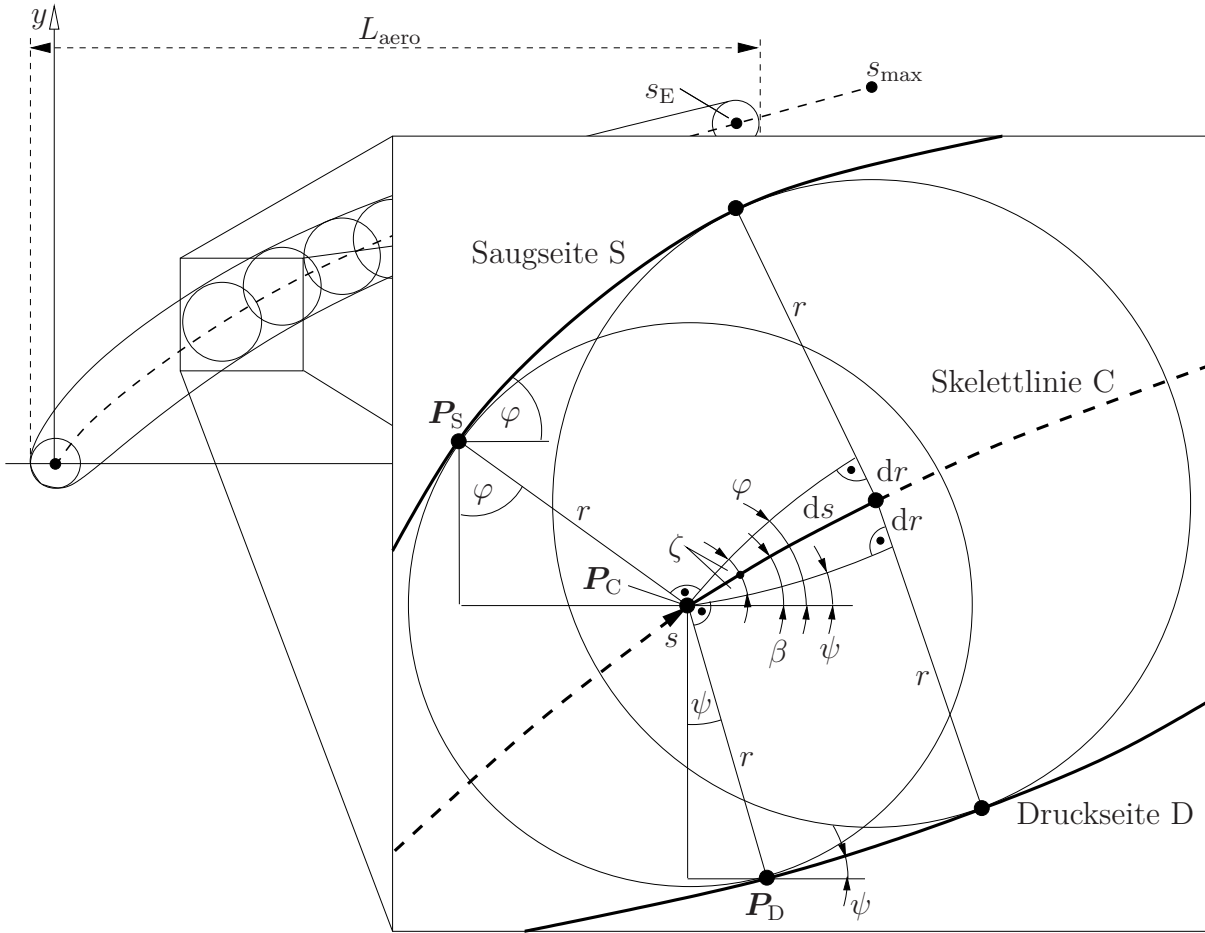


Abb. 5.4: Profilaufbau mit einem Rolling-Ball

durch die vektoriellen Beziehungen

$$\mathbf{P}_S(s) = \mathbf{P}_C(s) + r(s) \begin{bmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

für die Saugseite und

$$\mathbf{P}_D(s) = \mathbf{P}_C(s) + r(s) \begin{bmatrix} \sin \psi(s) \\ -\cos \psi(s) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

für die Druckseite bestimmt werden. Dabei wird der Verlauf des Radius  $r(s)$  des Rolling-Ball-Kreises als bekannt betrachtet. Die Tangentialwinkel  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  auf beiden Profillinien sind dagegen zunächst noch unbekannt. Unter Beibehaltung der Tangentialwinkel können Saug- und Druckseite an die Skelettlinie angetragen werden, wodurch zwei krummlinige Dreiecke entstehen, die für infinitesimal kleine  $ds$  jedoch wie rechtwinklige Dreiecke behandelt werden können, siehe Abb. 5.4. Da in beiden Dreiecken zwei Seiten ( $ds$  und  $dr$ ) sowie der rechte Winkel gegenüber von  $ds$  identisch sind, handelt es sich um kongru-

ente Dreiecke. Damit ist der spitze Winkel  $\zeta$  in beiden Dreiecken ebenfalls gleich groß. Zusammen mit dem Skelettlinienwinkel  $\beta$  können  $\varphi$  und  $\psi$  nun in der Form

$$\varphi(s) = \beta(s) + \zeta(s) \quad (5.7)$$

für die Saugseite und

$$\psi(s) = \beta(s) - \zeta(s) \quad (5.8)$$

für die Druckseite geschrieben werden. Damit scheint noch nicht viel gewonnen zu sein, da  $\zeta$  ebenfalls unbekannt ist. Für kleine Bogenlängen  $ds$  können die gekrümmten Seiten der beiden Dreiecke jedoch zu ihren Tangenten im gemeinsamen Schnittpunkt linearisiert werden und es gilt dann die trigonometrische Beziehung  $\sin \zeta(s) = dr/ds$  am rechtwinkligen Dreieck bzw. nach Umformen und Auflösen für den gesuchten Winkel

$$\zeta(s) = \arcsin r'(s). \quad (5.9)$$

Für kleine Krümmungen der Skelettlinie und beider Profelseiten, also in Fällen, in denen die gekrümmte Linie nur wenig von der geraden Linie abweicht, ist das eine sehr gute Näherung. Dies trifft nahezu auf das komplette Profil zu, an der Vorderkante treten jedoch große Krümmungen bei den Profelseiten auf und es kommt zu größeren Abweichungen, die sich allerdings nicht negativ auf die Qualität des Profils auswirken, wie sich später zeigen wird.

Nach Einsetzen von (5.9) in (5.7) und schließlich in (5.5) folgt

$$\mathbf{P}_S(s) = \mathbf{P}_C(s) + r(s) \begin{bmatrix} -\sin(\beta(s) + \arcsin r'(s)) \\ \cos(\beta(s) + \arcsin r'(s)) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

für die Koordinaten der Saugseite. Analog gilt mit (5.6), (5.8) und (5.9) für die Druckseite

$$\mathbf{P}_D(s) = \mathbf{P}_C(s) + r(s) \begin{bmatrix} \sin(\beta(s) - \arcsin r'(s)) \\ -\cos(\beta(s) - \arcsin r'(s)) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Die Profelseiten hängen folglich nicht nur vom Radius  $r$  des Rolling-Ball-Kreises ab, sondern auch von dessen erster Ableitung nach der Bogenlänge der Skelettlinie. Eine Analyse der Gl. (5.9) liefert die Bedingung

$$-1 \stackrel{!}{\leq} r'(s) \stackrel{!}{\leq} 1 \quad (5.12)$$

für die erste Ableitung des Radius, da sonst der Arkussinus von  $r'$  nicht existiert. Weiterhin lässt sich bei Betrachtung der Vorderkante bzw. des Startpunkts der Skelettlinie eine

weitere Bedingung für die Kurve gewinnen. Für den Tangentenwinkel im Startpunkt der Saugseite gilt die Beziehung  $\varphi_0 := \varphi(s=0) = \beta_1 + \pi/2$ . Eingesetzt in Gl. (5.7) folgt

$$\beta_1 + \frac{\pi}{2} = \beta_1 + \zeta(s=0) \quad (5.13)$$

bzw. nach Umstellen

$$\zeta_0 := \zeta(s=0) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.14)$$

Als Startbedingung für die B-Splinekurve des Rolling-Ball-Radius ergibt sich folglich nach Gl. (5.9)

$$r'(s=0) \stackrel{!}{=} \sin \frac{\pi}{2} = 1. \quad (5.15)$$

Eine Möglichkeit, die Forderungen (5.12) und (5.14) zu erfüllen, wäre, den Verlauf  $r(s)$  als B-Splinekurve vorzugeben und daraus die Ableitung  $r'(s)$  zu berechnen. Anschließend müsste jedoch über eine Nebenbedingung geprüft werden, ob die Forderungen eingehalten sind. Es erscheint daher sinnvoller, die Ableitung  $r'(s)$  selbst als B-Spline zu parametrisieren und über die Platzierung der Kontrollpunkte diese Forderung automatisch einzuhalten.

## 5.4 Profilaufbau und Einpassen in den Aeroblock

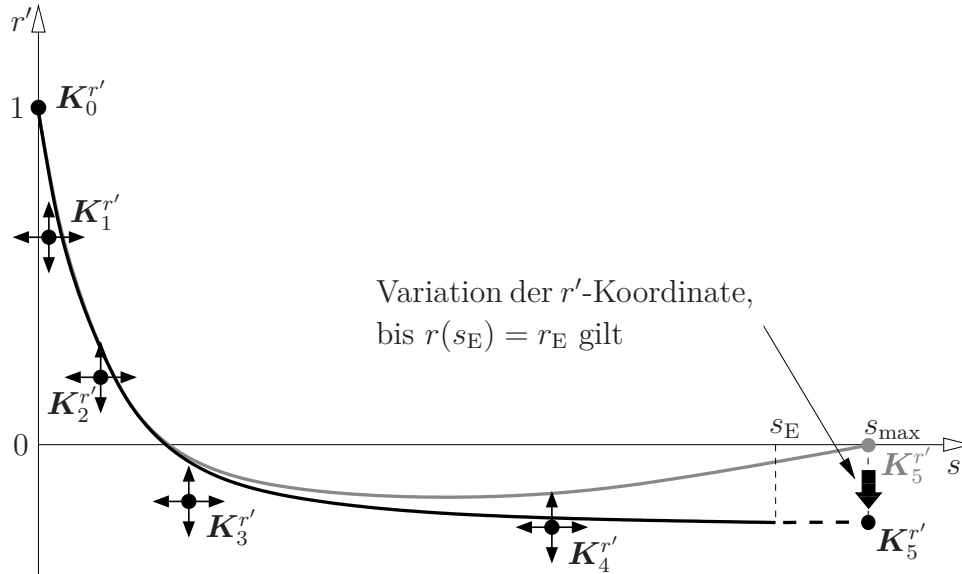
Wie bereits angesprochen, ist die Länge der Skelettlinie erst dann bekannt, wenn die Integration des Anfangswertproblems (5.3), (5.4) und der ersten Ableitung  $r'(s)$  des Rolling-Ball-Radius erfolgt ist. Der dafür benötigte Verlauf der Krümmung  $\kappa(s)$  der Skelettlinie wurde bereits in Abschnitt 5.2 erläutert und in Abb. 5.2 skizziert. Ein möglicher Verlauf der ersten Ableitung des Rolling-Ball-Radius ist in Abb. 5.5 skizziert, wobei ein B-Spline dritten Grades ( $g = 3$ ) mit sechs Kontrollpunkten ( $n = 5$ ) zum Einsatz kommt. Der uniforme Knotenvektor lautet damit

$$\mathbf{U}_{r'} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top. \quad (5.16)$$

Die Koordinaten des ersten Kontrollpunkts  $\mathbf{K}_0^{r'}$  sind bereits durch die Forderung (5.15) festgelegt. Der letzte Kontrollpunkt wird zunächst mit  $\mathbf{K}_5^{r'} = [s_{\max} \ 0]^\top$  an einer sinnvoll gewählten Stelle  $s_{\max}$  fixiert, wie die graue Kurve in Abb. 5.5 zeigt.

Damit können Skelettlinie und Vorderkante durch numerische Integration mit dem DGS-Löser *ODE45* von *Matlab* berechnet werden, wobei die Anfangsbedingung für den Radius

$$r(s=0) = r_1 \quad (5.17)$$



**Abb. 5.5:** B-Splinekurve  $r'(s)$  vor der Optimierung (grau) und nach Optimierung des letzten Kontrollpunkts (schwarz) zur Einhaltung eines minimalen Hinterkantenradius  $r_E$

mit gegebenem Vorderkantenradius  $r_I$  lautet. Um die minimale  $x$ -Koordinate des Profils zu erhalten, wird die sogenannte *event*-Funktionalität von *ODE45* benutzt. Mit ihrer Hilfe können bestimmte Ereignisse während der Integration gezielt durch Schrittweitensteuerung angelaufen werden. In diesem Fall wird der Integrationsschritt gesucht, bei dem der Tangentialwinkel senkrecht nach oben zeigt, da an dieser Stelle die  $x$ -Koordinate minimal ist:

$$x_{S,\min} := x_S(s_0) \mid \varphi(s_0) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.18)$$

Mit  $x_{S,\min}$  kann dann anschließend, während der Integration des DGS, durch eine zweite *event*-Funktion die optimale Länge  $s_E$  der Skelettlinie ermittelt werden. Wird der Hinterkantenradius mit  $r_E$  bezeichnet, ergibt sich die aktuelle axiale Länge des Schaufelprofils zu

$$L(s) = x_C(s) + r_E - x_{S,\min}. \quad (5.19)$$

Soll diese Länge mit der Länge des Aeroblocks übereinstimmen, d. h.  $L(s = s_E) \stackrel{!}{=} L_{\text{aero}}$ , kann die Integration für  $s = s_E$  einfach abgebrochen werden:

$$s_E := s \mid (L_{\text{aero}} - x_C(s) - r_E + x_{S,\min}) = 0. \quad (5.20)$$

Damit der Radius des Rolling-Balls am Ende tatsächlich den gewünschten Wert  $r(s_E) \stackrel{!}{=} r_E$  besitzt, wird der Verlauf der ersten Ableitung des Radius iterativ angepasst, indem nur die  $r'$ -Koordinate des letzten Kontrollpunkts  $K_5^{r'}$  innerhalb einer untergeordneten Optimierungsschleife variiert wird (schwarze Kurve in Abb. 5.5). Dies hat den Vorteil, dass

sich der vordere Teil der Kurve und damit auch die Vorderkante des Profils nicht oder nur unwesentlich ändern. Die Skelettlinie und ihre Länge sind nach einer abschließenden Integration von  $r'(s)$  bekannt und der Profilaufbau kann gemäß den Gln. (5.10) und (5.11) für  $s \in [0, s_E]$  erfolgen.

## 5.5 Berechnung der Krümmung der Profelseiten

Ein Hauptaugenmerk liegt in dieser Arbeit auf der Krümmung der Profelseiten. Da bei der beschriebenen Parametrisierung kein direkter Einfluss auf die Krümmung der Profelseiten genommen werden kann, soll sie zumindest im Nachhinein berechnet und analysiert werden. Gegebenenfalls können so auch Nebenbedingungen bezüglich der Krümmung innerhalb eines Optimierungsprozesses formuliert werden. Gemäß Gl. (2.25) berechnet sich die Krümmung für parametrische Kurven aus den ersten beiden Ableitungen der Koordinaten nach dem Kurvenparameter.

Die erste Ableitung der Saugseite (5.5) nach dem Kurvenparameter  $s$  lautet

$$\begin{bmatrix} x'_S \\ y'_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix} + r' \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} - r \varphi' \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

wobei aus Gründen einer möglichst übersichtlichen Schreibweise der Tangentialwinkel  $\varphi$  und dessen Ableitung  $\varphi'$  an dieser Stelle noch nicht ersetzt werden. Analog ergibt sich die Ableitung der Druckseite (5.6) zu

$$\begin{bmatrix} x'_D \\ y'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix} + r' \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{bmatrix} + r \psi' \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Die Ableitungen der Koordinaten des Skelettlinienpunkts  $\mathbf{P}_C$  ergeben sich direkt aus (5.3), so dass in beiden Gleichungen alle Größen bis auf die Ableitungen der Tangentialwinkel aus dem Profilaufbau bekannt sind. Diese lauten entsprechend Gl. (5.7) bzw. (5.8)  $\varphi' = \beta' + \zeta'$  und  $\psi' = \beta' - \zeta'$ , wobei nach Gl. (5.3)  $\beta' = \kappa$  bekannt ist. Die erste Ableitung des Hilfswinkels  $\zeta$  in (5.9) nach der Bogenlänge  $s$  der Skelettlinie lautet

$$\zeta' = \frac{r''}{\sqrt{1 - r'^2}}, \quad (5.23)$$

wobei  $r'(s)$  als B-Splinekurve gegeben ist. Die zweite Ableitung  $r''(s)$  ist nach Abschnitt 2.2.2 durch die analytische Ableitbarkeit von B-Splinekurven ebenfalls bekannt bzw. leicht berechenbar.

Die zweite Ableitung der Saugseite nach der Bogenlänge  $s$  der Skelettlinie ergibt sich aus (5.21) zu

$$\begin{bmatrix} x''_S \\ y''_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_C \\ y''_C \end{bmatrix} + r'' \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} - (2r'\varphi' + r\varphi'') \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} - r\varphi'^2 \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

durch Ableiten von (5.22) wird für die Druckseite

$$\begin{bmatrix} x''_D \\ y''_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_C \\ y''_C \end{bmatrix} + r'' \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{bmatrix} + (2r'\psi' + r\psi'') \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} + r\psi'^2 \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

gefunden. Für die zweiten Ableitungen  $\varphi'' = \beta'' + \zeta''$  und  $\psi'' = \beta'' - \zeta''$  der Tangentialwinkel an Saug- und Druckseite werden die zweiten Ableitungen des Skelettlinienwinkels  $\beta$  und des Hilfswinkels  $\zeta$  benötigt. Mit  $\beta' = \kappa$  folgt  $\beta'' = \kappa'$ , wobei durch Vorgabe der Krümmung  $\kappa(s)$  als B-Splinekurve die Ableitung  $\kappa'(s)$  analytisch berechenbar ist. Erneutes Ableiten von Gl. (5.23) liefert

$$\zeta'' = \frac{r'''}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r'r''^2}{(1-r'^2)^{3/2}}. \quad (5.26)$$

Die dritte Ableitung  $r'''(s)$  des Rolling-Ball-Radius kann mit (2.54) erneut analytisch durch zweimaliges Ableiten der B-Splinekurve  $r'(s)$  gewonnen werden. Für die zweiten Ableitungen der Tangentialwinkel ergeben sich dann durch Einsetzen von  $\beta''$  und  $\zeta''$

$$\varphi'' = \kappa' + \frac{r'''}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r'r''^2}{(1-r'^2)^{3/2}}, \quad (5.27)$$

$$\psi'' = \kappa' - \frac{r'''}{\sqrt{1-r'^2}} - \frac{r'r''^2}{(1-r'^2)^{3/2}}, \quad (5.28)$$

die wiederum in die Gln. (5.24) und (5.25) eingesetzt werden können. Die erste Ableitung der Skelettlinie ist im Differentialgleichungssystem (5.3) als  $[x'_C \ y'_C]^\top = [\cos \beta \ \sin \beta]^\top$  gegeben. Die benötigten zweiten Ableitungen folgen daraus durch Differentiation nach  $s$  zu

$$\begin{bmatrix} x''_C \\ y''_C \end{bmatrix} = \beta' \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Damit sind nun alle Größen berechenbar und die Krümmungen beider Profilseiten können mit Hilfe der Gl. (2.25) bestimmt werden.

## 5.6 Fitten der Referenzprofile

Wie schon für die im Kapitel 4 beschriebene direkte Parametrisierung werden zur Demonstration der Leistungsfähigkeit der indirekten Parametrisierung im Folgenden zunächst die drei aus Abschnitt 4.4 bekannten Referenzprofile nachgebildet. Dazu wird mit *Matlab* prinzipiell der gleiche Fitting-Prozess wie in Abschnitt 4.4 durchgeführt. Wegen des bei dieser Parametrisierung vorliegenden Parametervektors (5.1) oder ausführlicher entsprechend Abb. 5.2 und Abb. 5.5

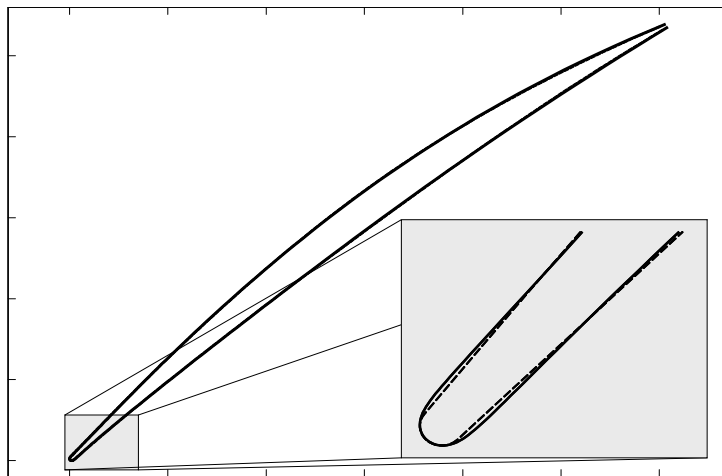
$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \left[ \beta_{\text{I}} K_{0,\kappa}^{\kappa} K_{1,s}^{\kappa} K_{1,\kappa}^{\kappa} K_{2,s}^{\kappa} K_{2,\kappa}^{\kappa} K_{3,s}^{\kappa} K_{3,\kappa}^{\kappa} K_{4,s}^{\kappa} K_{4,\kappa}^{\kappa} K_{5,\kappa}^{\kappa} K_{1,s}^{r'} K_{1,r'}^{r'} K_{2,s}^{r'} K_{2,r'}^{r'} K_{3,s}^{r'} K_{3,r'}^{r'} K_{4,s}^{r'} K_{4,r'}^{r'} \right]^{\top}, \quad (5.30)$$

ändert sich das Optimierungsproblem (4.19) leicht zu

$$\min_{\mathbf{p}_{\text{ind}} \in \mathcal{P}_{\text{ind}}} \sum (y_i^{\text{ref}} - y_i)^2 \quad \text{mit } \mathcal{P}_{\text{ind}} := \{ \mathbf{p}_{\text{ind}} \in \mathbb{R}^{19} \mid \mathbf{p}_{\text{ind}}^{\text{u}} \leq \mathbf{p}_{\text{ind}} \leq \mathbf{p}_{\text{ind}}^{\text{o}} \}. \quad (5.31)$$

### Schaufelprofil R01

Der bekannte Mittelschnitt des Rotors der ersten Stufe kann von der Parametrisierung sehr gut nachgebildet werden, Abb. 5.6. Lediglich im Bereich der Vorderkante treten kleine Abweichungen auf, wobei das Referenzprofil schlanker ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Referenzprofil eine kreisförmige Vorderkante besitzt und Saug- und Druckseite lediglich tangentialstetig an diese Vorderkante angebunden sind. Bei der gewählten Parametrisierung sind beide Seiten jedoch inklusive der Vorderkante geschlossen formuliert und

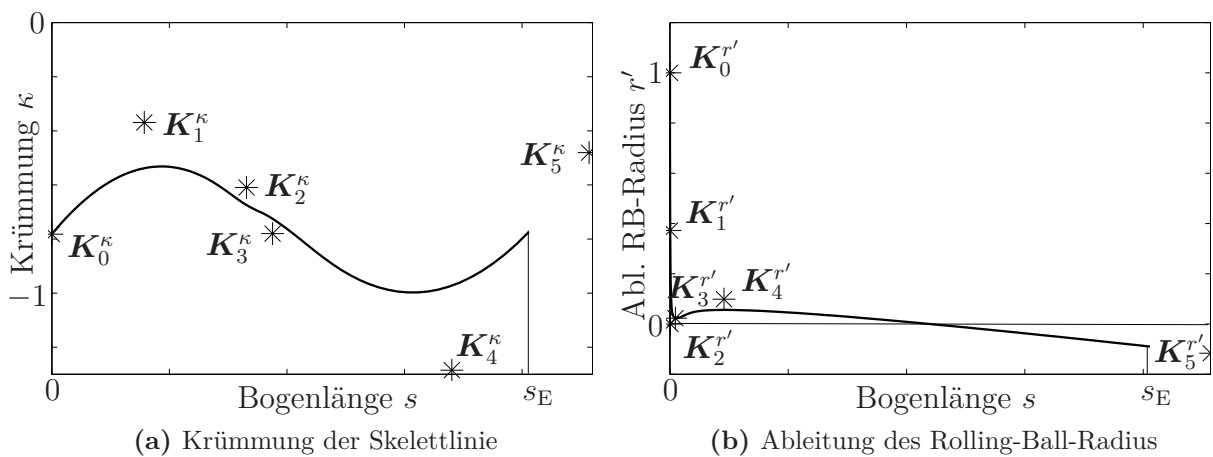


**Abb. 5.6:** R01-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)



folglich auch krümmungsstetig. Deshalb wird die sehr große Krümmung der Vorderkante langsamer abgebaut als beim Referenzprofil und das Profil ist somit etwas fülliger.

Bei der Krümmungsverteilung der Skelettlinie in Abb. 5.7a fällt zunächst auf, dass die Krümmung stets negativ ist. Die Skelettlinie ist also wie erwartet über das gesamte Profil hinweg nach unten gekrümmt, so dass der Skelettlinienwinkel stetig abnimmt. Insgesamt ist die Kurve sehr glatt und die Krümmung schwankt nur gering, was sich auch in dem relativ geraden Profil äußert.



**Abb. 5.7:** Verteilungen der indirekten Parametrisierung für R01

Die erste Ableitung des Rolling-Ball-Radius  $r'$  weist einen völlig anderen Verlauf auf. Nachdem der erste Kontrollpunkt mit  $\mathbf{K}_0^{r'} = [0 \ 1]^T$  festgelegt ist, fällt die Kurve sehr steil ab. Das heißt, der Radius wird zwar noch größer, aber das Tempo der Zunahme wird sehr schnell kleiner. Anschließend steigt  $r'$  noch einmal leicht an, um dann gleichmäßig abzunehmen. Der Nulldurchgang von  $r'$  und damit der maximale Radius  $r$  ergibt sich erst in der zweiten Hälfte der Bogenlänge, was die Beobachtung der Position der maximalen Dicke des Profils in Abb. 5.6 bestätigt.

### Schaufelprofil S03

Abb. 5.8 zeigt das Ergebnis des Profilttings für den Mittelschnitt des Stators 3. Auch hier kann eine sehr gute Übereinstimmung erreicht werden. Erst bei näherer Betrachtung der Vorderkante fallen erneut leichte Abweichungen ins Auge, welche dieselben Ursachen wie beim Rotor 1 haben.

Wie dem Profil in Abb. 5.8 bereits angesehen werden kann, ist die Skelettlinie nach oben gewölbt und die Krümmung somit stets negativ, Abb. 5.9a. Der Verlauf unterscheidet sich jedoch qualitativ deutlich von dem des Rotors 1. Die Ableitung des Rolling-Ball-Radius in Abb. 5.9b ähnelt dagegen sehr dem Verlauf aus Abb. 5.7b, lediglich der Nulldurchgang findet etwas früher statt.

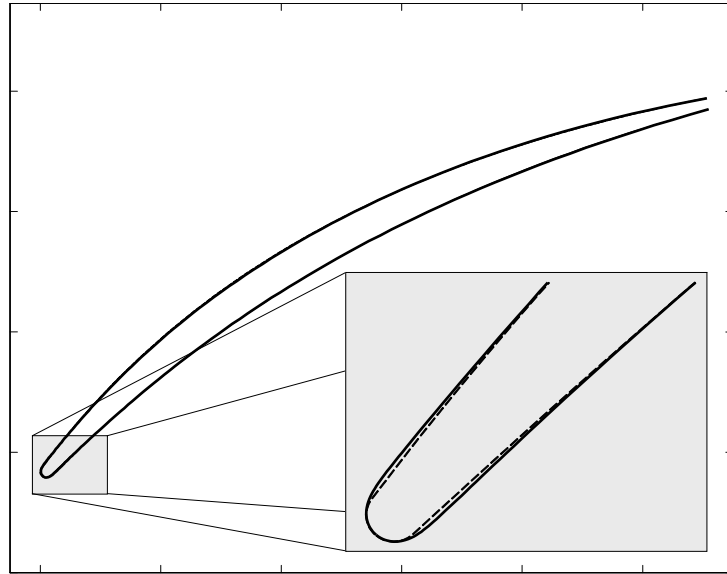


Abb. 5.8: S03-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

### Schaufelprofil S09

Der wellige Charakter des Mittelschnitts des Stators der Stufe 9 kann von der indirekten Parametrisierung offensichtlich nicht nachgebildet werden, Abb. 5.10. Insgesamt wirkt der Bereich der Vorderkante deutlich spitzer und glatter als beim Referenzprofil. Durch die Hinzunahme weiterer Kontrollpunkte für die Verteilung der ersten Ableitung des Radius könnte hier mit Sicherheit ein besseres Ergebnis für das Fitting erzielt werden, was allerdings nicht getestet wird, da dieses Profil im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht näher untersucht wird.

Der Krümmungsverlauf der Skelettlinie, Abb. 5.11a, ist auch beim Stator 9 negativ. Betragsmäßig nimmt die Krümmung von der Vorder- zur Hinterkante ab. Die Ableitung

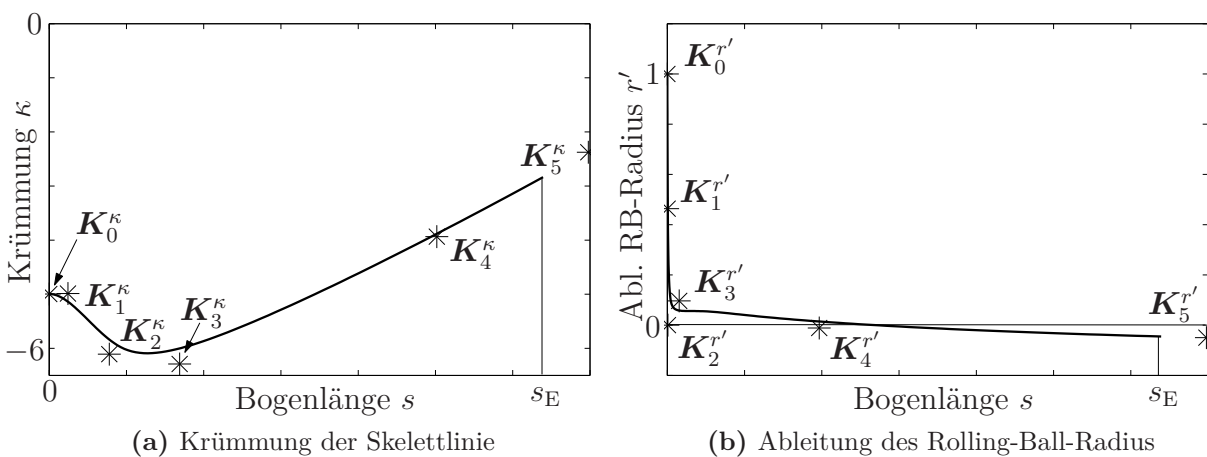
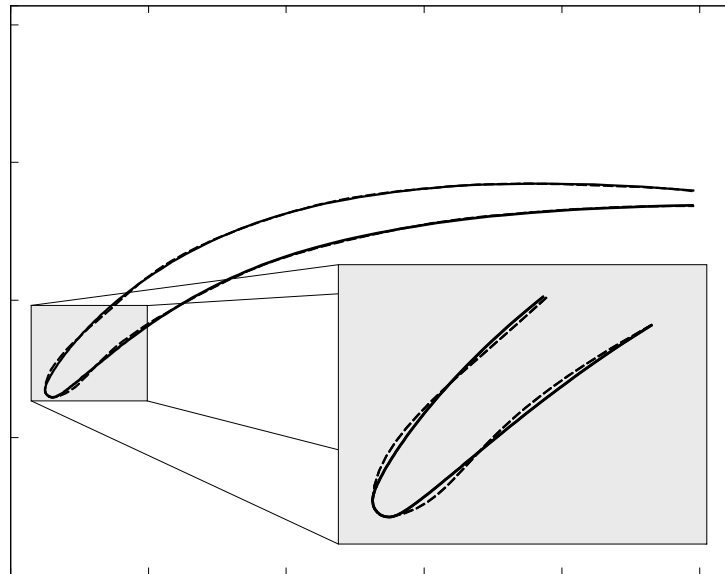
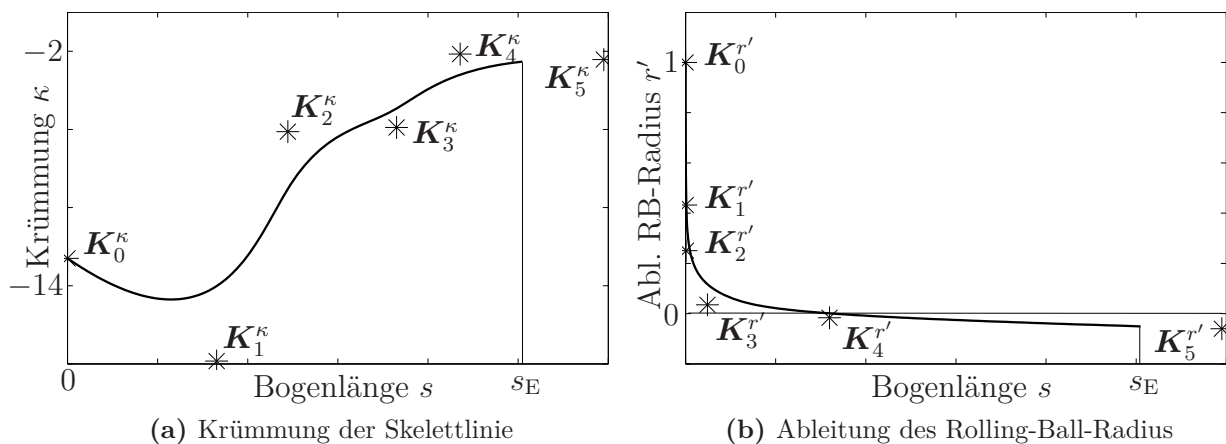


Abb. 5.9: Verteilungen der indirekten Parametrisierung für S03



**Abb. 5.10:** S09-Profilfitting mit der indirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

des Rolling-Ball-Radius fällt etwas weniger stark ab als bei den beiden anderen Profilen, Abb. 5.11b. Das Profil ist demnach an der Vorderkante deutlich dicker als zuvor.



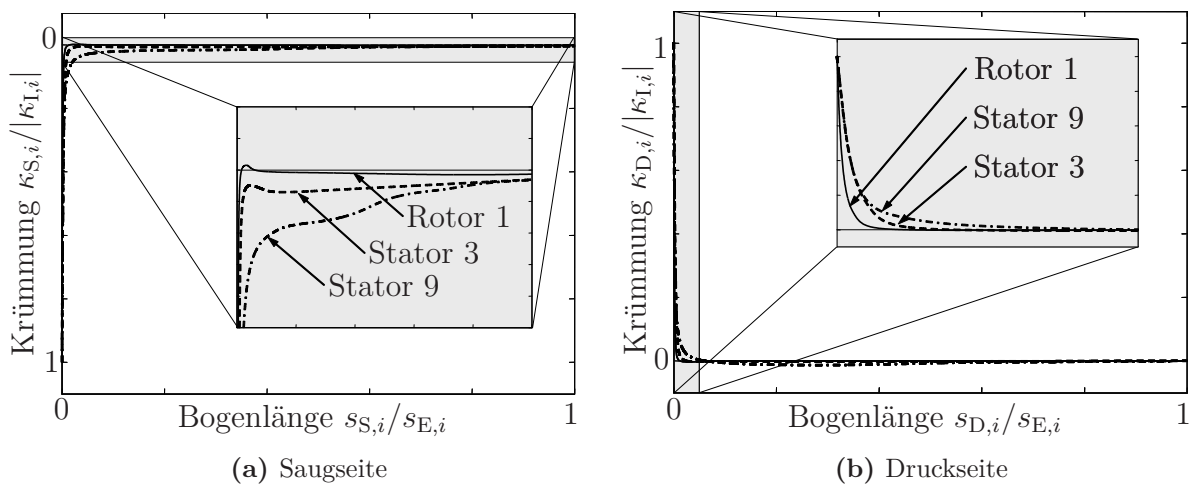
**Abb. 5.11:** Verteilungen der indirekten Parametrisierung für S09

### Krümmungsverläufe der Profelseiten

Eine wichtige Anforderung an die Profilparametrisierung ist die Erzeugung möglichst glatter Saug- und Druckseiten. Unter Glattheit wird hier ein stetiger Krümmungsverlauf bis zur Hinterkante verstanden. Nach Abb. 5.12 ist dies für die gefitteten drei Profile der Fall. Charakteristisch für alle Verläufe ist die betragsmäßig sehr große Krümmung bei  $s = 0$ , die aus dem Kehrwert des gegebenen Vorderkantenradius entsteht. Im vergrößerten Ausschnitt der Abb. 5.12b ist gut zu erkennen, dass die Krümmung an der Vorderkante

nicht nur stetig verläuft, sondern sogar glatt, also stetig ableitbar ist. Dadurch hat die Profiloberfläche dieser Parametrisierung eine besonders hohe Güte.

Beim Betrachten der Kurven der Saugseitenkrümmung des Rotors 1 und Stators 3 fällt auf, dass im vorderen Bereich jeweils ein kleines lokales Maximum existiert, Abb. 5.12a. Beim Rotor 1 liegt dieses sogar im positiven Krümmungsbereich, d. h. die Saugseite ist dort lokal nach innen gewölbt. Das gleiche Phänomen tritt mit entgegengesetzten Vorzeichen in etwas schwächerer Form bei den entsprechenden Kurven der Druckseite auf. Dies liegt daran, dass die Fittingroutine versucht, das parametrisierte Profil möglichst genau an das Referenzprofil anzupassen, wodurch es dann zu solchen „Überschwingern“ kommt. Sollte dieses Verhalten in einem Optimierungsprozess unerwünscht sein, kann es nur durch geeignete Nebenbedingungen gezielt unterdrückt werden.



**Abb. 5.12:** Krümmungsverläufe der Profilleiten bei der indirekten Parametrisierung

# 6 Semidirekte Parametrisierung des Schaufelprofils

Im Folgenden wird eine Parametrisierung entwickelt, bei der die Saugseite direkt aus ihrer natürlichen Gleichung, sprich der Krümmung, gewonnen wird. Dazu wird der Krümmungsverlauf über der Bogenlänge der Saugseite parametrisch als B-Splinekurve dargestellt. Durch numerische Integration kann aus der Krümmungsverteilung die Saugseite bestimmt werden. Die Druckseite wird über einen Dickenverlauf generiert, der ebenfalls als B-Splinekurve vorgegeben wird und auf geeignete Art und Weise mit den Koordinaten der Saugseite superponiert wird. Da sowohl Eigenschaften einer direkten als auch indirekten Parametrisierung vorliegen, wird diese Methode den semidirekten Parametrisierungen zugeordnet.

## 6.1 Ablauf des Profilaufbaus

Die Profilerzeugung erfolgt nach Abb. 6.1 mit Hilfe der frei wählbaren Parameter

$$\mathbf{p}_{\text{sem}} = [s_B \ \beta_I \ \beta_E \ K_{i,x}^\kappa \ K_{i,y}^\kappa \ K_{i,x}^h \ K_{i,y}^h]^\top. \quad (6.1)$$

Sie startet im Unterschied zu Kapitel 5 nicht mit der Skelettlinie, sondern mit der B-Splinekurve des Krümmungsverlaufs  $\kappa(s)$  der Saugseite, wobei die Krümmung  $\kappa$  über der Bogenlänge  $s$  der Saugseite aufgetragen ist und aus den Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^\kappa$  und dem Metallwinkel  $\beta_I$  der Vorderkante berechnet wird. Entspricht der Verlauf den Erwartungen (3.9), wird mittels numerischer Integration die Saugseite generiert. Anschließend kann die Lage des Mittelpunkts des Hinterkantenkreises berechnet und die Bedingung (3.7) überprüft werden. Im Falle der Nichterfüllung wird der Vorgang an dieser Stelle abgebrochen und das nächste Profil erzeugt, anderenfalls kann die Druckseite generiert werden. Dazu wird zunächst die Vorderkante bis zum Blendpunkt  $s_B$  gespiegelt. Anschließend können die B-Splinekurve des Dickenverlaufs  $h(s)$  aus den Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^h$  und daraus wiederum die Koordinaten der Druckseite erzeugt werden.

Nachdem das Profil fertiggestellt ist, können die weiteren Anforderungen entsprechend Abschnitt 3.6 ausgewertet werden. Nur wenn das Profil insgesamt alle Anforderungen erfüllt, werden die Eingabedateien für die CFD-Analyse erzeugt. Ist dies nicht der Fall, wird der Vorgang abgebrochen. Sollte der Profilaufbau vor der Berechnung des Flächeninhalts unterbrochen werden, wird der Flächeninhalt des Profils im Sinne einer Penalty-Strategie auf Null gesetzt.

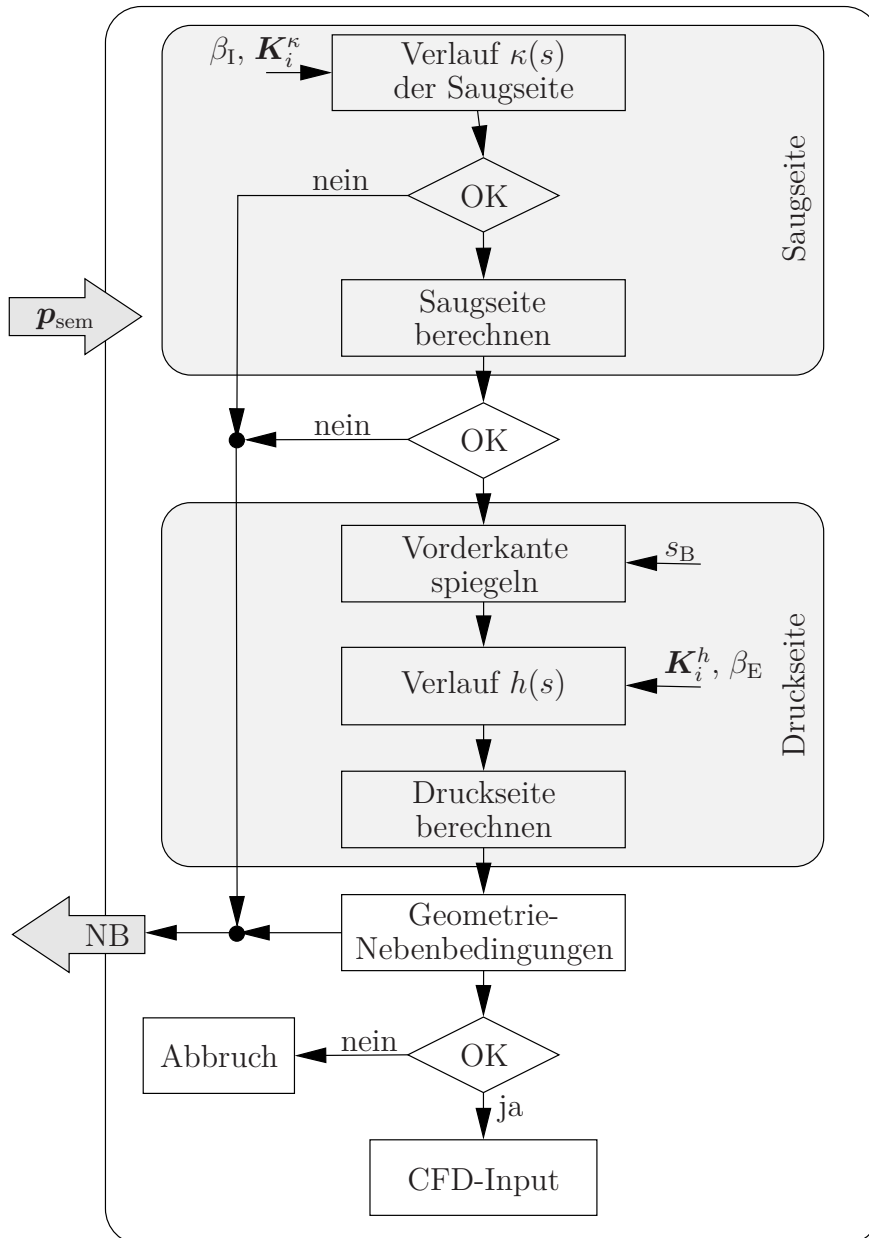


Abb. 6.1: Programmablaufplan des Profilaufbaus der semidirekten Parametrisierung

## 6.2 Die Saugseite

Der erste Schritt zur Erzeugung des Schaufelprofils ist die krümmungsbasierte Berechnung der Schaufelsaugseite einschließlich der saugseitigen Hälfte der Vorderkante. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Verlauf der Krümmung  $\kappa$  in Abhängigkeit von der Bogenlängenkoordinate  $s$  der Saugseite, und nicht wie bisher der Skelettlinie, bekannt ist bzw. im Zuge einer Optimierung vorgegeben wird.

### 6.2.1 Erzeugung der Saugseite aus ihrer Krümmungsverteilung

Zur Herleitung eines Gleichungssystems für die Bestimmung der Saugseite aus ihrem Krümmungsverlauf wird ein infinitesimales Linienelement der Saugseite mit der Länge  $ds$  betrachtet, Abb. 6.2. Aus  $\kappa = d\varphi/ds$  entsprechend Gl. (2.21) bzw.

$$\frac{d\varphi}{ds} \equiv \varphi'(s) = \kappa(s) \quad (6.2)$$

folgt der Tangentialwinkel  $\varphi$  durch Integration, wobei zu beachten ist, dass dieser mit zunehmendem  $s$  kleiner wird und demzufolge die Krümmung  $\kappa$  der Saugseite stets negativ ist, vgl. Abb. 2.5. Für die betrachtete infinitesimal kleine Bogenlänge ist eine Linearisierung des Bogens  $ds$  zulässig. Mit dem nun angenäherten rechtwinkligen Dreieck  $PQS$

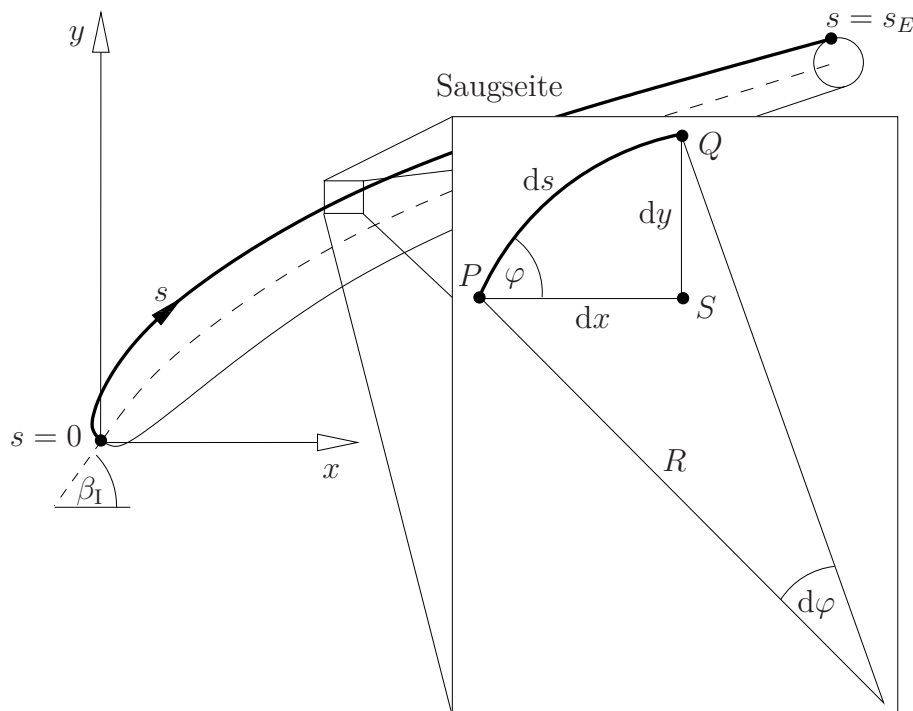


Abb. 6.2: Differentielle Beschreibung der Saugseite

können die Differentialgleichungen für die Koordinaten  $(x_S, y_S)$  der Saugseite

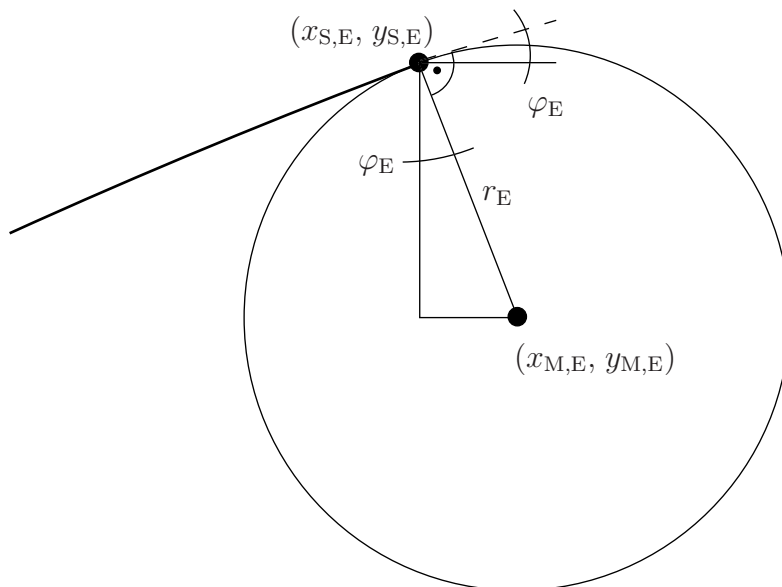
$$\begin{aligned}x'_S(s) &= \cos \varphi(s), \\y'_S(s) &= \sin \varphi(s)\end{aligned}\tag{6.3}$$

formuliert werden. Diese beiden Differentialgleichungen sind aufgrund ihrer Nichtlinearität im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. In GODARD u. a. (2008) werden die trigonometrischen Funktionen deshalb vor dem Lösen der Integrale in TAYLORreihen entwickelt. In dieser Arbeit wird ein numerischer Ansatz gewählt. In Verbindung mit den aus Abbildung 6.2 ablesbaren Anfangsbedingungen für den Stagnationspunkt  $s = 0$ , d. h.

$$\varphi(0) = \beta_I + \pi/2, \quad x_S(0) = 0, \quad y_S(0) = 0,\tag{6.4}$$

können die Gleichungen (6.2) und (6.3) in *Matlab* mit dem bereits oben erläuterten Einschrittintegrationsverfahren *ODE45*, siehe auch MAGRAB u. a. (2000), für  $0 \leq s \leq s_E$  sehr schnell und hinreichend genau gelöst werden.

Obwohl es prinzipiell möglich wäre, einen Krümmungsverlauf derart vorzugeben, dass auch die Hinterkante des Profils erzeugt wird, wird in dieser Arbeit eine andere Vorgehensweise vorgeschlagen. Die Hinterkante soll, wie auch in anderen Arbeiten üblich, als Kreis ausgeführt sein, wobei sich sowohl Saug- als auch Druckseite tangential an diesen Kreis anschließen sollen, Abb. 6.3.



**Abb. 6.3:** Tangentiale Anbindung des Hinterkantenkreises an die Saugseite

In Bezug auf die Saugseite ist diese Forderung einfach zu erfüllen, da nach Lösen der Differentialgleichungen nicht nur die Koordinaten des letzten Punkts der Saugseite bekannt sind, sondern auch der Anstieg  $\varphi_E := \varphi(s = s_E)$  in diesem Punkt. Mit einem vorgegebenen



Radius  $r_E := r(s_E)$ , folgen dann die Koordinaten des Mittelpunkts des Hinterkantenkreises zu

$$\begin{bmatrix} x_{M,E} \\ y_{M,E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S,E} \\ y_{S,E} \end{bmatrix} + r_E \begin{bmatrix} \sin \varphi_E \\ -\cos \varphi_E \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Für die noch zu bestimmende Druckseite ergeben sich aus dieser Forderung dagegen Einschränkungen, vgl. Abschnitt 6.3.2

### 6.2.2 Parametrisierung der Krümmungsverteilung

In Gl. (6.2) ist der Krümmungsverlauf der Saugseite vorzugeben. Da dieser im Rahmen von Optimierungsläufen variiert werden soll, wird analog zur Skelettlinienbeschreibung in Kapitel 5 eine parametrische Darstellung der Krümmungsverteilung  $[s(u) \ \kappa(u)]^\top$  in Form einer B-Splinekurve gewählt. Es wird ein kubischer B-Spline ( $g = 3$ ) mit  $n + 1 = 7$  Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^\kappa$  und dem uniformen Knotenvektor

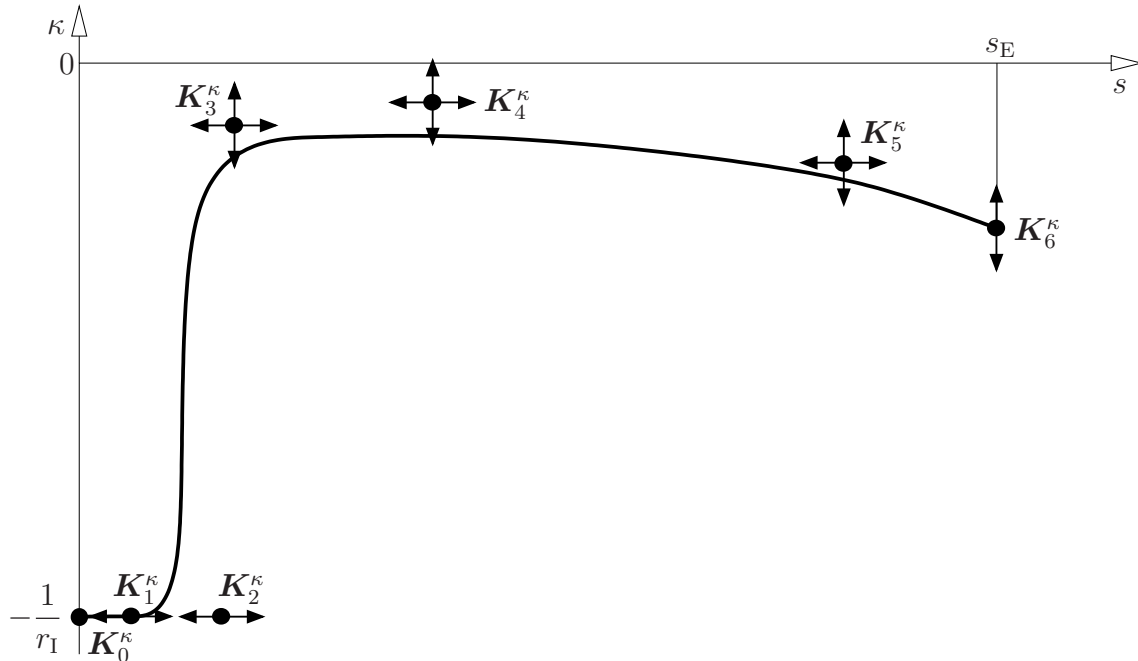
$$\mathbf{U}^\kappa = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top \quad (6.6)$$

gewählt, Abb. 6.4. Der geforderte minimale Vorderkantenradius  $r_I$  kann automatisch eingehalten werden, indem der erste Kontrollpunkt und damit auch der erste Kurvenpunkt auf den Wert  $\mathbf{K}_0^\kappa = [0 \ -1/r_I]^\top$  festgelegt wird und alle anderen Kontrollpunkte keine betragsmäßig größeren Werte der  $\kappa$ -Koordinate aufweisen. Die beiden folgenden Kontrollpunkte besitzen den gleichen  $\kappa$ -Wert wie der erste Kontrollpunkt. Zum einen wird dadurch erreicht, dass der Vorderkantenbereich nahe des Staupunkts nahezu kreisförmig ist und damit die Vorderkante so spitz wie möglich ist, zum anderen verringert sich so die Zahl der Freiheitsgrade. Beim letzten Kontrollpunkt  $\mathbf{K}_6^\kappa$  ist die  $s$ -Koordinate durch die Länge der Saugseite auf den noch zu diskutierenden Wert  $K_{6,s}^\kappa = s_E$  festgelegt, die  $\kappa$ -Koordinate  $K_{6,\kappa}^\kappa$  ist dagegen frei. Für die weiteren Kontrollpunkte bestehen keine Einschränkungen der Freiheitsgrade.

### 6.2.3 Anpassen der Profillänge

Bei einer als konstant gewählten maximalen Saugseitenlänge  $s_E$  würden bei variierenden Krümmungsverteilungen  $\kappa(s)$  innerhalb eines Optimierungsprozesses verschiedene Sehnenlängen der resultierenden Schaufelsektion auftreten. Zu lange Schaufeln würden dann aber nicht in den vorgesehenen Aeroblock hineinpassen, zu kurze Schaufelprofile führen bei gleicher Strömungsumlenkung zu größeren Strömungsverlusten als längere. Dies legt nahe, das Schaufelprofil möglichst genau in den Aeroblock einzupassen.

Zur Realisierung dieses Vorhabens wurden mehrere Lösungsmöglichkeiten untersucht. Eine zunächst naheliegende ist die Variation der maximalen Bogenlänge  $s_E$  als zusätzlicher Parameter innerhalb des Optimierungslaufes. Dies erweist sich jedoch als wenig zielfüh-

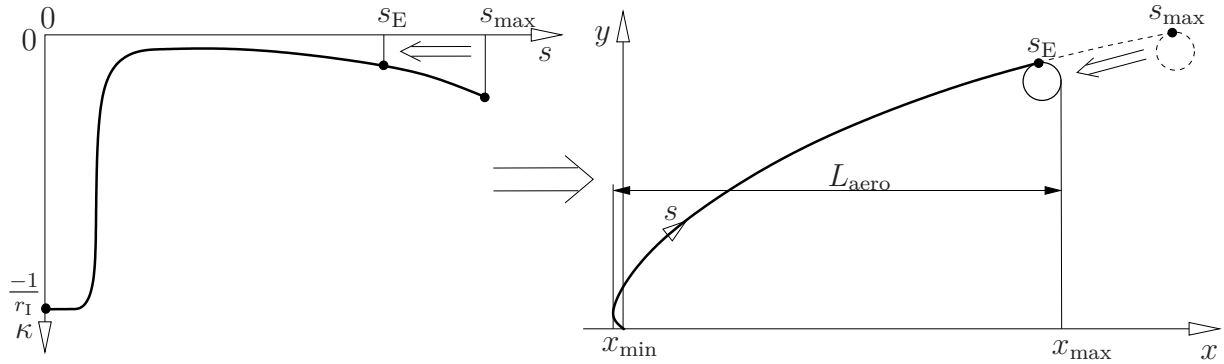


**Abb. 6.4:** Darstellung der Krümmungsverteilung der Profilsaugseite mittels einer kubischen B-Splinekurve mit sieben Kontrollpunkten

rend, da im Laufe der Optimierung jede noch so kurze Schaufel, mit dementsprechend hohen aerodynamischen Verlusten, besser bewertet wird, als eine etwas zu lange Schaufel mit geringen Verlusten, wodurch sich der Optimierer schnell auf kurze Saugseiten festlegt. Ein zusätzliches Optimierungskriterium, welches den Abstand zum Aeroblock minimiert, würde dem sicherlich abhelfen, trotzdem würde der Optimierer zunächst viele Entwürfe mit zu kurzer Sehnenlänge entwickeln, die den Ausgang der Optimierung nur unzureichend positiv beeinflussen würden. Daher sind Verfahren zu bevorzugen, welche die Schaufel bereits bei der Profilerzeugung automatisch in den Aeroblock einpassen.

Eine erste Möglichkeit hierfür ist die Anpassung der maximalen Bogenlänge  $s_E$  in einer die Saugseitenerzeugung umschließenden Optimierungsschleife. Darin wird  $s_E$  und damit die Position von  $K_{6,s}^\kappa$  in Abb. 6.4 so lange variiert, bis die Schaufel optimal in den Aeroblock passt. Diese Vorgehensweise ist hinsichtlich der erzielbaren Strömungsverluste ideal, verlängert aber den Profilaufbau um ca. 1,5 s gegenüber der im Folgenden beschriebenen Methode.

Gleich gute Ergebnisse bei deutlich schnellerem Profilaufbau können erzielt werden, indem eine maximale Bogenlänge der Saugseite  $s_{\max}$  gewählt wird, bei der vernünftige Krümmungsverteilungen entstehen und der Aeroblock etwas überschritten wird, Abb. 6.5. Die numerische Integration wird dann aber an einer Stelle  $s = s_E$  abgebrochen, bei der die Saugseite die optimale Länge aufweist, d. h. den Aeroblock exakt ausfüllt. Das gewählte numerische Integrationsverfahren *ODE45* bietet wie bereits erwähnt die Möglichkeit, eine Ereignisfunktion (*event function*) zu definieren, die nach jedem Integrationsschritt überprüft wird. Zum Erreichen des gestellten Ziels werden damit zwei Ereignisse über-



**Abb. 6.5:** Einpassen der Saugseite in den vorgegebenen Aeroblock mittels der Ereignisfunktion des numerischen Integrators *ODE45*

prüft: Zunächst wird der minimale  $x$ -Wert der Saugseite  $x_{\min}$  identifiziert, für den der Tangentialwinkel  $\varphi(s) = \pi/2$  auftritt:

$$x_{\min} = x(s) \mid \varphi(s) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.7)$$

*ODE45* findet dieses Ereignis durch automatische Schrittweitensteuerung. Da die Integration fortgesetzt werden soll, wird festgelegt, dass bei diesem Ereignis kein Abbruch stattfindet, sondern erst dann, wenn das zweite Ereignis für das Einpassen in den Aeroblock auftritt, vgl. Abb. 6.3:

$$x_{\max} := x_S(s) + r_E (\sin \varphi(s) + 1) \mid L_{\text{aero}} - (x_{\max} - x_{\min}) = 0. \quad (6.8)$$

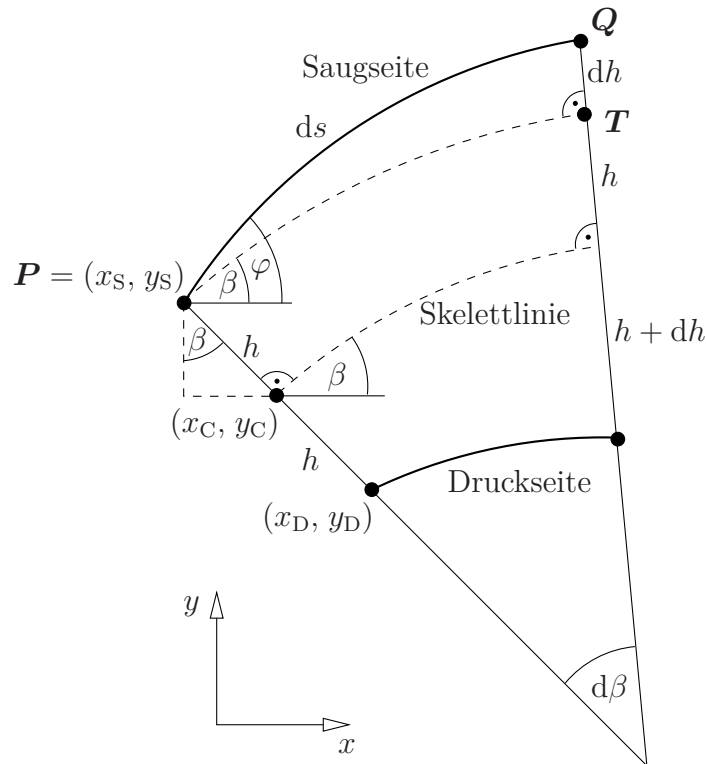
Im Grunde macht diese Methode nichts anderes, als die Saugseite an der Stelle abzuschneiden, an der bei angefügtem Hinterkantenkreis der Aeroblock optimal ausgenutzt würde, wobei durch die Schrittweitensteuerung die Stelle  $s_E$  sehr genau gefunden wird.

## 6.3 Erzeugung der Druckseite mittels Dickenfunktion

Neben der Form der Saugseite des Schaufelprofils ist der Verlauf der Dicke sowohl für das aerodynamische als auch das strukturelle Verhalten von entscheidender Bedeutung. Daher muss neben dem Krümmungsverlauf der Saugseite auch der Verlauf der Dicke, bzw. zur Vereinfachung der halben Dicke  $h(s)$ , optimal festgelegt werden.

### 6.3.1 Bestimmung von Skelettlinie und Druckseite

Für die Dicke eines Schaufelprofils existieren unterschiedliche Definitionen. In diesem Kapitel wird die Dicke als Länge der Verbindungslinie zwischen einem Punkt auf der Saugseite und dem dazugehörigen Punkt auf der Druckseite definiert, wobei diese rechtwinklig



**Abb. 6.6:** Konstruktion der Druckseite durch Dickenverlauf  $h(s)$  rechtwinklig zur Skelettlinie

auf der Skelettlinie steht, Abb. 6.6. Der Verlauf der halben Dicke  $h(s)$  und damit auch der Verlauf der ersten Ableitung  $h'(s)$  werden zunächst als gegeben vorausgesetzt. Für kleine Abschnitte  $d\beta$  der Skelettlinie kann dann ein Hilfskreissegment mit dem konstanten Abstand  $h$  zur Skelettlinie durch den Punkt  $P$  der Saugseite gezeichnet werden, woraus für  $ds \ll 1$  das rechtwinklige Dreieck  $PQT$  mit dem Winkel  $\varphi(s) - \beta(s)$  entsteht. Daraus folgt die trigonometrische Beziehung

$$\sin(\varphi(s) - \beta(s)) = \frac{dh(s)}{ds} = h'(s) \quad (6.9)$$

oder nach Umstellen der Skelettlinienwinkel

$$\beta(s) = \varphi(s) - \arcsin h'(s) \quad (6.10)$$

aus der ersten Ableitung  $h'(s)$  der halben Dicke. Da  $h$  und  $h'$  als bekannt vorausgesetzt werden, können die Koordinaten der Skelettlinie rein analytisch mit

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

berechnet werden. Die Druckseite folgt analog zu

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + 2h \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Damit existiert eine sehr einfache Formulierung für die gesamte Druckseite. Lediglich an Vorder- und Hinterkante müssen zusätzlich spezielle Überlegungen getroffen werden, um die gewünschten Stetigkeiten bzw. Formen zu erreichen. Diese Überlegungen werden in den folgenden beiden Abschnitten ausführlich diskutiert.

### 6.3.2 Modellierung der Hinterkante

Wie bereits im Abschnitt 6.2 angedeutet, soll die Hinterkante als Kreissegment ausgeführt sein und sich tangential an Saug- und Druckseite anschmiegen, Abb. 6.7. Für die Saugseite ist dies mit Gl. (6.5) bereits erreicht. Die halbe Dicke  $h_E := h(s_E)$  an der Hinterkante resultiert dann aus dem vorgegebenen Radius  $r_E$  des Hinterkantenkreises, dem Metallwinkel  $\beta_E := \beta(s_E)$  an der Hinterkante und dem Tangentialwinkel  $\varphi_E := \varphi(s_E)$  des letzten Punkts der Saugseite:

$$h_E = r_E \cos(\beta_E - \varphi_E). \quad (6.13)$$

Der Metallwinkel  $\beta_E$  an der Hinterkante soll dabei nicht zufällig aus Gl. (6.10) entstehen, sondern genau wie der Metallwinkel  $\beta_I$  der Vorderkante direkt vorgegeben werden. Die Beziehung  $\beta_E = \beta(s_E)$  führt dann gemäß Gl. (6.9) auf die erste Ableitung  $h'_E := h'(s_E)$

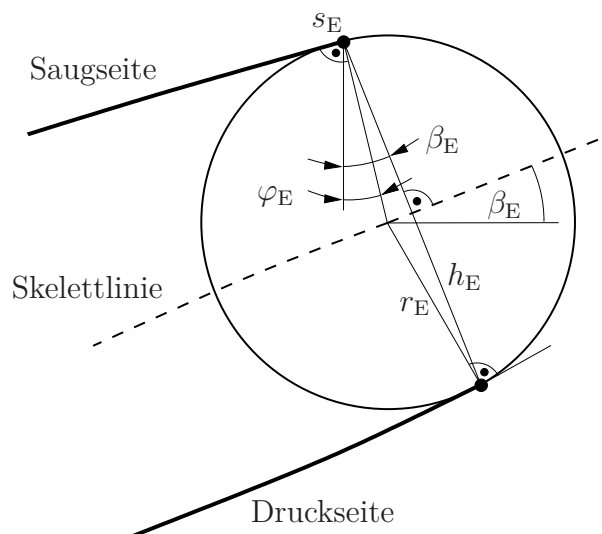


Abb. 6.7: Tangentiale Anbindung der Druckseite an die Hinterkante

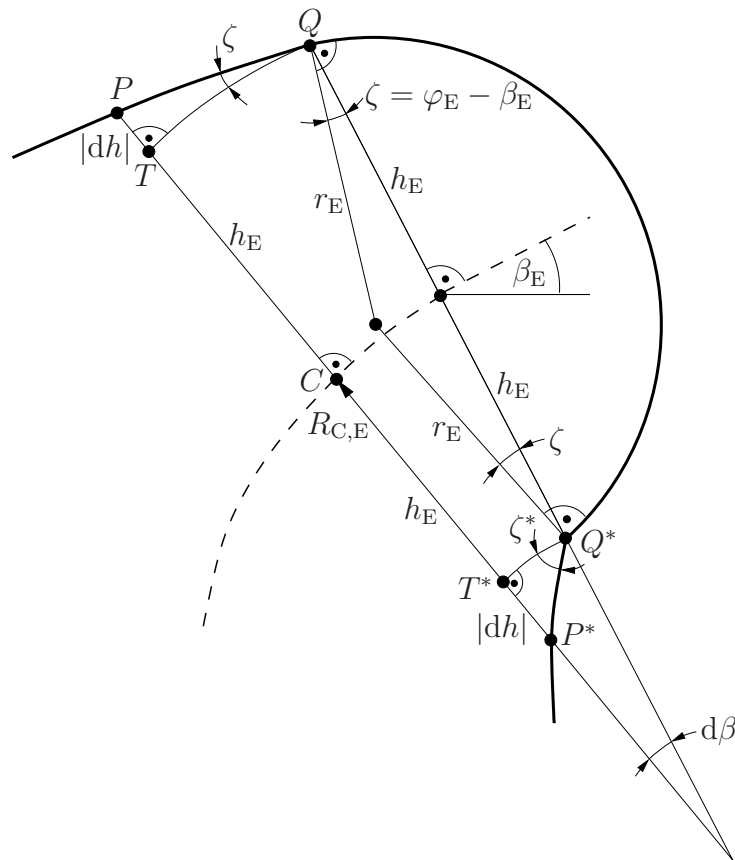
der halben Hinterkantendicke:

$$h'_E = \sin(\varphi_E - \beta_E). \quad (6.14)$$

Damit ist die Position des Blendpunkts der Druckseite mit der Hinterkante durch (6.12) für  $s = s_E$  und  $\beta = \beta_E$  eindeutig bestimmt. Für einen tangentialen Anschluss der Druckseite an den Hinterkantenkreis, sind jedoch zusätzliche Bedingungen einzuhalten. Abb. 6.8 zeigt den Hinterkantenkreis zunächst für eine beliebige Konfiguration mit nicht tangenstetigem Anschluss der Druckseite an den Hinterkantenkreis. Daraus wird deutlich, dass Tangentialität in  $Q^*$  nur erreicht werden kann, wenn der Winkel  $\zeta^*$  identisch mit  $\zeta = (\beta_E - \varphi_E)$  ist, vgl. Abb. 6.7. In diesem Fall sind bei den Dreiecken  $PQT$  und  $P^*Q^*T^*$  jeweils zwei Winkel ( $\zeta^* = \zeta$  und  $\pi/2$ ) sowie die Seite  $|dh|$  identisch, woraus die Kongruenz der beiden Dreiecke folgt. Damit besitzen auch die Kanten  $\overline{QT} = (R_{C,E} + h_E) d\beta$  und  $\overline{Q^*T^*} = (R_{C,E} - h_E) d\beta$  die gleiche Länge, was im Fall von  $h_E \neq 0$  nur für  $d\beta = 0$  bzw.

$$\beta'_E := \beta'(s_E) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.15)$$

erfüllt sein kann.



**Abb. 6.8:** Graphische Herleitung der Bedingungen für tangentialen Anschluss an der Hinterkante

Die gleiche Erkenntnis lässt sich auch analytisch gewinnen. Im Blendpunkt  $Q^*$  zwischen Druckseite und Hinterkantenkreis müssen für tangentielle Stetigkeit die Anstiege von Druckseite und Kreis identisch sein, d. h.

$$\tan \psi_E \stackrel{!}{=} \tan \psi_{\text{HK}}, \quad (6.16)$$

wobei  $\psi_E := \psi(s = s_E)$  analog zur Saugseite der Anstieg der Druckseite an der Stelle  $s = s_E$  ist und  $\psi_{\text{HK}}$  der Tangentenwinkel des Hinterkantenkreises im selben Punkt, Abb. 6.9. Für die Druckseite ergibt sich

$$\tan \psi_E = \frac{dy_D(s_E)}{dx_D(s_E)} = \frac{y'_D(s_E)}{x'_D(s_E)} \quad (6.17)$$

und für den Hinterkantenkreis nach Abb. 6.9

$$\psi_{\text{HK}} = \beta_E + \frac{\mu_E}{2} = \beta_E + (\beta_E - \varphi_E) = 2\beta_E - \varphi_E. \quad (6.18)$$

Werden Gln. (6.17) und (6.18) in die Bedingung (6.16) eingesetzt, folgt

$$\frac{y'_D(s_E)}{x'_D(s_E)} = \frac{\sin(2\beta_E - \varphi_E)}{\cos(2\beta_E - \varphi_E)}, \quad (6.19)$$

was beispielsweise dadurch erfüllt werden kann, dass Zähler und Nenner beider Seiten jeweils identisch sind. Für die linke Seite von (6.19) ist zunächst die Ableitung der Gl. (6.12)

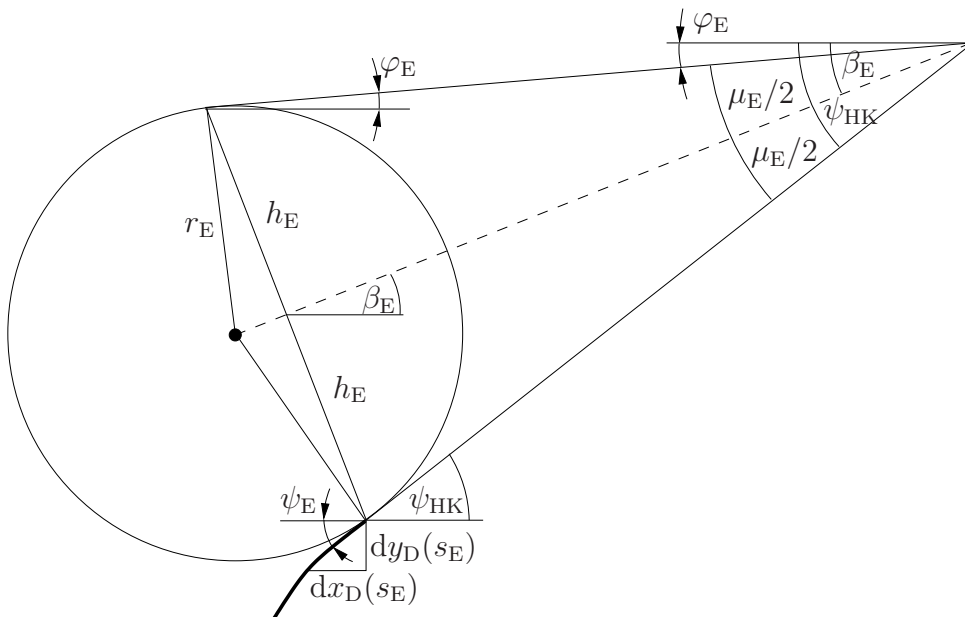


Abb. 6.9: Winkel an der Hinterkante

zu bilden:

$$\begin{bmatrix} x'_D \\ y'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_S \\ y'_S \end{bmatrix} + 2h' \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{bmatrix} + 2h\beta' \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

mit  $x'_S = \cos \varphi$  und  $y'_S = \sin \varphi$  nach Gl. (6.3). Aus der Übereinstimmung der Nenner folgt dann an der Stelle  $s = s_E$  die Beziehung

$$\cos \varphi_E + 2h'_E \sin \beta_E + 2h_E \beta'_E \cos \beta_E \stackrel{!}{=} \cos (2\beta_E - \varphi_E). \quad (6.21)$$

Für die Ableitung der halben Dicke gilt gemäß Gl. (6.9)  $h'_E = \sin (\varphi_E - \beta_E)$ . Mittels Additionstheorem kann die Winkeldifferenz zu  $h'_E = \sin \varphi_E \cos \beta_E - \sin \beta_E \cos \varphi_E$  aufgelöst werden. Eingesetzt in Gl. (6.21) folgt

$$\cos \varphi_E + 2 \sin \varphi_E \sin \beta_E \cos \beta_E - 2 \sin^2 \beta_E \cos \varphi_E + 2h_E \beta'_E \cos \beta_E \stackrel{!}{=} \cos (2\beta_E - \varphi_E). \quad (6.22)$$

Der Term  $\sin^2 \beta_E$  wird mit dem passenden Additionstheorem zu  $\sin^2 \beta_E = (1 - \cos 2\beta_E) / 2$  aufgelöst:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_E + 2 \sin \varphi_E \sin \beta_E \cos \beta_E - \cos \varphi_E \\ + \cos 2\beta_E \cos \varphi_E + 2h_E \beta'_E \cos \beta_E \stackrel{!}{=} \cos (2\beta_E - \varphi_E). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Darin heben sich die Terme  $\cos \varphi_E$  gegenseitig auf und mit  $2 \sin \beta_E \cos \beta_E = \sin 2\beta_E$  folgt

$$\sin 2\beta_E \sin \varphi_E + \cos 2\beta_E \cos \varphi_E + 2h_E \beta'_E \cos \beta_E \stackrel{!}{=} \cos (2\beta_E - \varphi_E) \quad (6.24)$$

und weiter mit  $\sin 2\beta_E \sin \varphi_E + \cos 2\beta_E \cos \varphi_E = \cos (2\beta_E - \varphi_E)$  schließlich

$$2h_E \beta'_E \cos \beta_E \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.25)$$

Für  $h_E \neq 0$  und  $\beta_E \neq \pi/2$  folgt daraus

$$\beta'_E \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.26)$$

Das gleiche Ergebnis folgt aus der Übereinstimmung der Zähler in Gl. (6.19), wenn die Additionstheoreme  $\cos^2 \beta_E = 1/2 (1 + \cos 2\beta_E)$  und  $\sin 2\beta_E \cos \varphi_E - \cos 2\beta_E \sin \varphi_E = \sin (2\beta_E - \varphi_E)$  an den entsprechenden Stellen verwendet werden. Beide sind identisch mit der geometrisch gefundenen Bedingung (6.15).



Mit der ersten Ableitung von Gl. (6.10) sowie den Gln. (6.2) und (6.9) folgt die Ableitung des Skelettlinienwinkels zu

$$\beta'_E = \varphi'_E - \frac{h''_E}{\sqrt{1 - h_E'^2}} \equiv \kappa_E - \frac{h''_E}{\cos(\varphi_E - \beta_E)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.27)$$

Durch Umstellen ergibt sich schließlich eine einschränkende Forderung an die zweite Ableitung der halben Dicke:

$$h''_E = \kappa_E \cos(\varphi_E - \beta_E), \quad (6.28)$$

wobei  $\kappa_E = \kappa(s_E)$ ,  $\varphi_E = \varphi(s_E)$  und  $\beta_E = \beta(s_E)$  bezeichnen. Zusammengefasst ergeben sich aus (6.13), (6.14) und (6.28) die folgenden Bedingungen, die durch die Dickenverteilung am Punkt  $s = s_E$  eingehalten werden müssen, um einen tangentialstetigen Anschluss der Druckseite an die Hinterkante zu gewährleisten:

$$\begin{aligned} h_E &= r_E \cos(\beta_E - \varphi_E), \\ h'_E &= \sin(\varphi_E - \beta_E), \\ h''_E &= \kappa_E \cos(\varphi_E - \beta_E). \end{aligned} \quad (6.29)$$

### 6.3.3 Modellierung der Vorderkante

Im Gegensatz zu vielen anderen Arbeiten, in denen die Vorderkante als Kreis- oder Ellipsensegment modelliert wird, entspricht die Vorderkante in dieser Parametrisierung einer Freiformkurve. Dies ist im Prinzip schon durch die Art und Weise der Saugseitenparametrisierung gegeben, die abhängig von der Krümmungsverteilung  $\kappa(s)$  zu unterschiedlichen Vorderkanten führt.

Aufgrund von strukturellen Überlegungen soll die Vorderkante einen vorgegebenen Krümmungsradius  $r_I$  nicht unterschreiten. Für die Saugseite kann dies sehr einfach über die Einhaltung der Bedingung  $\kappa(s) \geq -1/r_I$  in der Krümmungsverteilung sichergestellt werden, Abb. 6.4. Um auch eine Druckseite zu erzeugen, die diese Bedingung einhält, müssen zusätzliche Forderungen an den Dickenverlauf im Bereich der Vorderkante gestellt werden. Weiterhin erscheint es aus aerodynamischer Sicht bei variierendem Anströmwinkel vorteilhaft, eine symmetrische Vorderkante zu erzeugen, was über Bedingungen an den Krümmungsverlauf nur schwer zu erreichen ist. Deshalb wird in dieser Arbeit vorgeschlagen, die Saugseite des Profils in einem Bereich  $s \in [0, s_B]$  an einer Linie zu spiegeln, die durch den Stagnationspunkt  $\mathbf{P}_S^0$  und den vorgegebenen Metallwinkel  $\beta_I$  definiert ist, Abb. 6.10. Die Spiegelung erfolgt prinzipiell mit der gleichen Berechnungsvorschrift (6.12) wie für den Rest der Druckseite. Der Skelettlinienwinkel  $\beta$  ist für diesen Bereich als Metallwinkel  $\beta_I$  vorgegeben und konstant. Die zugehörige Dicke  $h_{VK}(s)$  wird nach PAPULA (2008) bestimmt, indem für die Punkte der Saugseite im Intervall  $s \in [0, s_B]$  das Lot auf die in

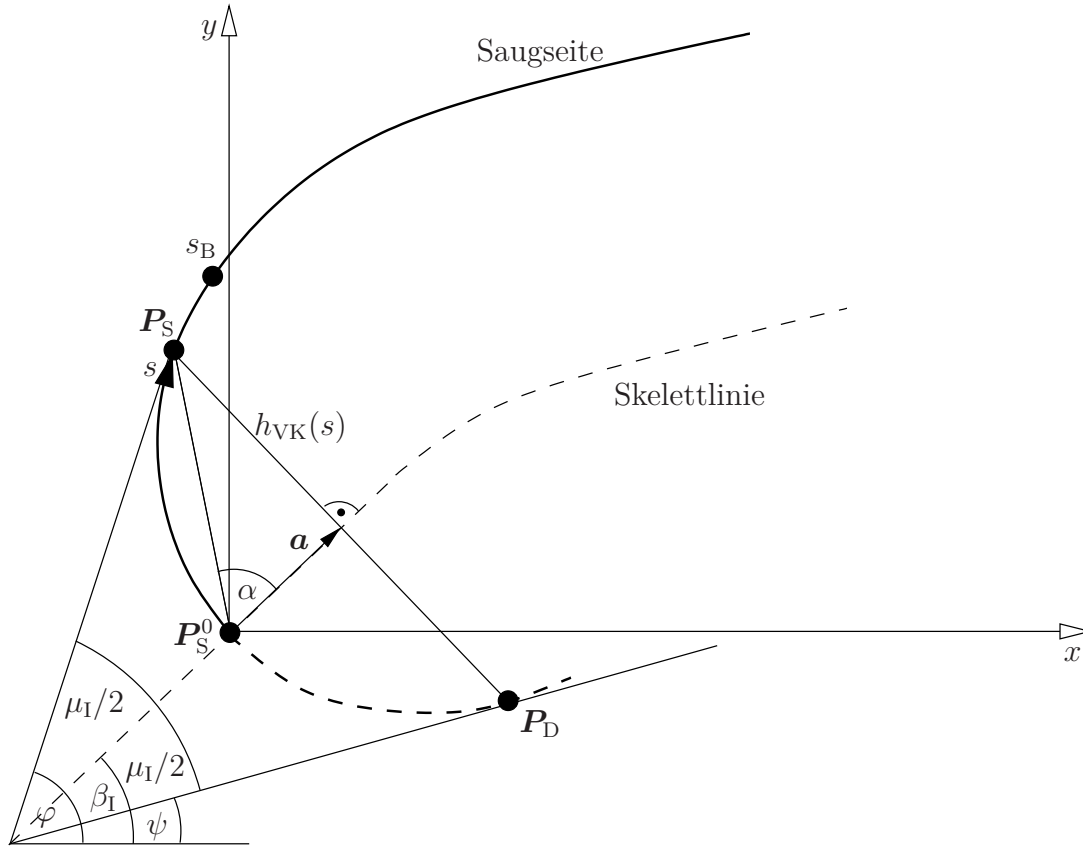


Abb. 6.10: Spiegelung der Vorderkante

diesem Bereich lineare Skelettlinie (Spiegelachse) gefällt wird:

$$h_{\text{VK}}(s) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{P}_S^0 \mathbf{P}_S} \right\| \sin \alpha = \frac{|\mathbf{a} \times (\mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S^0)|}{|\mathbf{a}|} \quad \text{mit } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix}, \quad s \in [0, s_B]. \quad (6.30)$$

Wenn der Staupunkt  $\mathbf{P}_S^0$  des Profils wie in Abb. 6.10 mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, kann auch einfacher die Koordinatengleichung für  $\mathbf{P}_S$

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix} + h_{\text{VK}}(s) \begin{bmatrix} -\sin \beta_I \\ \cos \beta_I \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

ausgewertet werden, indem die erste Zeile mit  $(-\sin \beta_I)$  und die zweite Zeile mit  $\cos \beta_I$  multipliziert und danach beide Zeilen addiert werden:

$$h_{\text{VK}}(s) = y_S \cos \beta_I - x_S \sin \beta_I, \quad (6.32)$$

womit alle in Gl. (6.12) benötigten Größen bekannt sind. Die Koordinate  $s_B$ , die bestimmt, wie viel der Saugseite gespiegelt werden soll, muss vorgegeben werden und kann beispielsweise in einem Optimierungsprozess als Entwurfsgröße variiert werden.

Der verbleibende Teil der Druckseite wird gemäß Gl. (6.12) durch die Dickenfunktion  $h(s)$  erzeugt. Für gute aerodynamische Eigenschaften ist ein stetiger Übergang am Blendpunkt der Druckseite notwendig, der nur durch zusätzliche Bedingungen für den Startpunkt der Dickenfunktion erreicht werden kann. Aufgrund der Symmetrie der gespiegelten Vorderkante ergeben sich identische Überlegungen wie an der Hinterkante, so dass analog zu (6.19) gelten muss:

$$\frac{y'_D(s_B)}{x'_D(s_B)} = \frac{\sin(2\beta_B - \varphi_B)}{\cos(2\beta_B - \varphi_B)}. \quad (6.33)$$

Eingesetzt in Gl. (6.20) folgen analog zu (6.26) die Bedingung  $\beta'_B \stackrel{!}{=} 0$  und analog zu Gl. (6.29) für die tangentielle Stetigkeit die Bedingungen

$$\begin{aligned} h_B &= h_{VK}(s_B) = y_S(s_B) \cos \beta_I - x_S(s_B) \sin \beta_I, \\ h'_B &= \sin(\varphi_B - \beta_I), \\ h''_B &= \kappa_B \cos(\varphi_B - \beta_I) \end{aligned} \quad (6.34)$$

mit  $\kappa_B = \varphi'(s_B) = \kappa(s_B)$ .

Um zusätzlich Krümmungsstetigkeit zu erhalten, die an der Hinterkante keine Rolle spielt, muss

$$\kappa_D = \frac{x'_D y''_D - x''_D y'_D}{(x'^2_D + y'^2_D)^{3/2}} \quad (6.35)$$

entsprechend Gl. (2.25) am Blendpunkt sowohl für die linke als auch die rechte Seite, also den gespiegelten Teil der Druckseite und den mittels Dickenverteilung erzeugten Teil, identische Werte liefern. Da durch obige Bedingungen bereits Gleichheit bei den ersten Ableitungen  $x'_D, y'_D$  erreicht wurde, ist dies der Fall, wenn auch die zweiten Ableitungen der Druckseite, die durch Ableiten aus (6.20) folgen, d. h.

$$\begin{bmatrix} x''_D \\ y''_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_S \\ y''_S \end{bmatrix} + 2h'' \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{bmatrix} + 4h' \beta' \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + 2h \beta'' \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + 2h \beta'^2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

sich im Blendpunkt stetig aus den zweiten Ableitungen der Vorderkante fortsetzen. Für den Blendpunkt liefern Gln. (6.3) in Analogie zur Saugseite

$$\begin{aligned} x'_{VK} &= \cos(2\beta_I - \varphi), \\ y'_{VK} &= \sin(2\beta_I - \varphi) \end{aligned} \quad (6.37)$$

für die erste Ableitung, worin analog zu (6.18)  $\psi = 2\beta_I - \varphi$  der Tangentialwinkel der gespiegelten Vorderkante ist, vgl. Abb. 6.10. Mittels Differentiation folgt für die zweite

Ableitung an der Stelle  $s = s_B$

$$\begin{bmatrix} x''_{VK} \\ y''_{VK} \end{bmatrix}_B = \kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

wobei für die gespiegelte Vorderkante im Blendpunkt  $\varphi'_B = -\kappa_B$  gesetzt werden muss. Diese muss für  $s = s_B$  identisch zu Gl. (6.36) sein, die wegen der geraden Skelettlinie in diesem Punkt mit  $\beta_B = \beta_I$  und  $\beta'_B = 0$  in Analogie zu (6.15) vereinfacht werden kann zu:

$$\begin{bmatrix} x''_{VK} \\ y''_{VK} \end{bmatrix}_B \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} x''_S(s_B) \\ y''_S(s_B) \end{bmatrix} + 2h''_B \begin{bmatrix} \sin \beta_I \\ -\cos \beta_I \end{bmatrix} + 2h_B \beta''_B \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Mit den zweiten Ableitungen der Saugseite

$$\begin{aligned} x''_S(s_B) &= -\kappa_B \sin \varphi_B, \\ y''_S(s_B) &= \kappa_B \cos \varphi_B, \end{aligned} \quad (6.40)$$

die aus den Gln. (6.3) mit jetzt  $\varphi'(s_B) = \kappa_B$  nach (6.2) resultieren,  $h''_B$  aus Gl. (6.34) und der linken Seite (6.38) folgt aus Gl. (6.39)

$$\begin{aligned} \kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} &\stackrel{!}{=} \\ \kappa_B \begin{bmatrix} -\sin \varphi_B \\ \cos \varphi_B \end{bmatrix} + 2\kappa_B \begin{bmatrix} \cos(\varphi_B - \beta_I) \sin \beta_I \\ -\cos(\varphi_B - \beta_I) \cos \beta_I \end{bmatrix} + 2h_B \beta''_B \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (6.41)$$

bzw. zusammengefasst

$$\kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \kappa_B \begin{bmatrix} 2 \cos(\varphi_B - \beta_I) \sin \beta_I - \sin \varphi_B \\ -2 \cos(\varphi_B - \beta_I) \cos \beta_I + \cos \varphi_B \end{bmatrix} + 2h_B \beta''_B \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Mit dem Additionstheorem  $\cos(\varphi_B - \beta_I) = \sin \varphi_B \sin \beta_I + \cos \beta_I \cos \varphi_B$  kann Gl. (6.42) weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} &\stackrel{!}{=} \\ \kappa_B \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \beta_I \sin \varphi_B + 2 \sin \beta_I \cos \beta_I \cos \varphi_B - \sin \varphi_B \\ -2 \cos^2 \beta_I \cos \varphi_B - 2 \sin \beta_I \cos \beta_I \sin \varphi_B + \cos \varphi_B \end{bmatrix} + 2h_B \beta''_B \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (6.43)$$

Werden weiterhin die Additionstheoreme  $\sin^2 \beta_I = (1 - \cos 2\beta_I)/2$  für die  $x$ -Koordinate und  $\cos^2 \beta_I = (1 + \cos 2\beta_I)/2$  für die  $y$ -Koordinate sowie  $2 \sin \beta_I \cos \beta_I = \sin 2\beta_I$  für beide Zeilen angewendet, folgt

$$\kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \kappa_B \begin{bmatrix} \sin \varphi_B \xrightarrow{0} \sin \varphi_B - \cos 2\beta_I \sin \varphi_B + \sin 2\beta_I \cos \varphi_B \\ \cos \varphi_B \xrightarrow{0} \cos \varphi_B - \sin 2\beta_I \sin \varphi_B - \cos 2\beta_I \cos \varphi_B \end{bmatrix} + 2h_B \beta_B'' \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Die in der ersten Klammer auf der rechten Seite verbleibenden Terme können nun mit den entsprechenden Additionstheoremen wieder zusammengefasst werden:

$$\kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \kappa_B \begin{bmatrix} \sin(2\beta_I - \varphi_B) \\ -\cos(2\beta_I - \varphi_B) \end{bmatrix} + 2h_B \beta_B'' \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Nun ist zu erkennen, dass die linke Seite identisch mit dem ersten Term der rechten Seite ist, weshalb letztendlich nur noch

$$2h_B \beta_B'' \begin{bmatrix} \cos \beta_I \\ \sin \beta_I \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.46)$$

bleibt. Diese Gleichung ist für beliebige  $h_B \neq 0$  nur dann zu erfüllen, wenn die zweite Ableitung des Skelettlinienwinkels (6.10) im Blendpunkt Null wird:

$$\beta_B'' = \kappa_B' - \frac{h_B'''}{\sqrt{1 - h_B'^2}} + \frac{h_B' h_B''^2}{(1 - h_B'^2)^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.47)$$

bzw. mit Gl. (6.34)

$$\beta_B'' = \kappa_B' - \frac{h_B'''}{\cos(\varphi_B - \beta_I)} - \kappa_B^2 \frac{\sin(\varphi_B - \beta_I)}{\cos(\varphi_B - \beta_I)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.48)$$

Für die dritte Ableitung der halben Dicke  $h$  am Blendpunkt ergibt sich daraus die zusätzliche Nebenbedingung

$$h_B''' = \kappa_B' \cos(\varphi_B - \beta_I) - \kappa_B^2 \sin(\varphi_B - \beta_I) \quad (6.49)$$

für  $h(s)$  am Blendpunkt B der Druckseite, um Krümmungsstetigkeit zu erreichen.

### 6.3.4 Parametrisierung der Dickenfunktion

Die Verteilungskurve der halben Dicke  $h(s)$  wird als B-Splinekurve  $[s(u) \ h(u)]^\top$  mit  $n + 1 = 9$  Kontrollpunkten  $\mathbf{K}_i^h$  dargestellt. Da zur Einhaltung der Nebenbedingungen (6.49) die dritte Ableitung benötigt wird, wird der Polynomgrad  $g = 4$  gewählt. Der dazugehörige uniforme Knotenvektor lautet dann

$$\mathbf{U}^h = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/5 \ 2/5 \ 3/5 \ 4/5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top. \quad (6.50)$$

Die Nebenbedingungen (6.34) und (6.49) für den krümmungsstetigen Übergang können nun in Bedingungen für die ersten vier Kontrollpunkte umgewandelt werden, die Nebenbedingung (6.29) in Bedingungen für die letzten drei Kontrollpunkte. Der erste Kontrollpunkt

$$\mathbf{K}_0^h = \begin{bmatrix} s_B \\ h_B \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

der mit dem Startpunkt der Kurve identisch ist, ergibt sich unmittelbar aus der ersten Bedingung in (6.34). Gleiches gilt auch für den letzten Kontrollpunkt, dessen Koordinaten sich aus der Dicke (6.29) am Hinterkantenkreis ergeben:

$$\mathbf{K}_8^h = \begin{bmatrix} s_E \\ h_E \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

#### Nebenbedingungen für glatte Anbindungen an die Vorderkante

Um die weiteren Nebenbedingungen erfüllen zu können, kann Gl. (2.55) in Verbindung mit der Eigenschaft der Endpunktinterpolation verwendet werden. Wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt ist  $\mathbf{K}_0^{h,(1)}$  identisch zur ersten Ableitung  $[ds/du \ dh/du]^\top$  im Startpunkt der Dickenverteilung, woraus sich nach Gl. (2.80) in Verbindung mit dem Polynomgrad  $g = 4$  und dem Knotenvektor (6.50)

$$\mathbf{K}_0^{h,(1)} = \begin{bmatrix} \dot{s}_B \\ \dot{h}_B \end{bmatrix} = \frac{4}{U_{4+1}} (\mathbf{K}_1^h - \mathbf{K}_0^h) = 20 (\mathbf{K}_1^h - \mathbf{K}_0^h) \quad (6.53)$$

ergibt. Aus der Division der zweiten Zeile durch die erste Zeile folgt Gl. (2.83) oder hier

$$h'_B = \frac{\dot{h}_B}{\dot{s}_B} = \frac{K_{1,h}^h - K_{0,h}^h}{K_{1,s}^h - K_{0,s}^h}. \quad (6.54)$$

Da  $h'_B$  durch die Forderung (6.34) gegeben ist, ergibt sich mit (6.51)

$$K_{1,h}^h = h_B + h'_B (K_{1,s}^h - s_B) \quad (6.55)$$

für die  $h$ -Koordinate des zweiten Kontrollpunkts, worin die  $s$ -Koordinate  $K_{1,s}^h$  des zweiten Kontrollpunkts frei vorgegeben werden kann. Mit der gleichen Vorgehensweise können auch die nächsten beiden Ableitungen im Startpunkt erzwungen werden. Die zweite Ableitung der B-Splinekurve in ihrem Startpunkt lautet nach Gl. (2.94)

$$h_B'' = \frac{4 \cdot 3}{1/5 \cdot 2/5} \left( \frac{K_{2,h}^h - K_{1,h}^h}{\dot{s}_B^2} - h_B' \frac{K_{2,s}^h - K_{1,s}^h}{\dot{s}_B^2} \right), \quad (6.56)$$

wobei  $\dot{s}_B$  leicht mit Gl. (6.53) berechnet werden kann. Durch Umstellen folgt die  $h$ -Koordinate des dritten Kontrollpunkts zu

$$K_{2,h}^h = K_{1,h}^h + h_B'' \frac{\dot{s}_B^2}{150} + h_B' (K_{2,s}^h - K_{1,s}^h). \quad (6.57)$$

Zum Erreichen der Stetigkeit der dritten Ableitung der Dickenfunktion, also der Krümmungsstetigkeit im Blendpunkt, muss nun noch auf dem selben Weg die  $h$ -Koordinate des vierten Kontrollpunkts bestimmt werden. Aus Gl. (2.101) folgt zunächst die dritte Ableitung im Startpunkt der B-Splinekurve zu

$$\mathbf{K}_0^{h,(3)} = \begin{bmatrix} \ddot{\ddot{s}}_B \\ \ddot{\ddot{h}}_B \end{bmatrix} = 10 \left( 50\mathbf{K}_3^h - 125\mathbf{K}_2^h + 75\mathbf{K}_1^h - \begin{bmatrix} \ddot{\ddot{s}}_B \\ \ddot{\ddot{h}}_B \end{bmatrix} \right), \quad (6.58)$$

worin die Kontrollpunkte  $\mathbf{K}_1^h$  und  $\mathbf{K}_2^h$  bereits aus den vorherigen Schritten bekannt sind. Weiterhin folgt nach Umstellen aus Gl. (2.103)

$$\ddot{\ddot{h}}_B = \dot{s}_B^3 h_B''' + 3\dot{s}_B \ddot{s}_B h_B'' + \ddot{s}_B h_B', \quad (6.59)$$

wobei  $\ddot{s}_B$  nach Bestimmen des dritten Kontrollpunkts  $\mathbf{K}_2^h$  in (6.57) mit Gl. (2.90) berechnet werden kann. In Analogie zu (6.57) werden nun zur Bestimmung der  $h$ -Koordinate des vierten Kontrollpunkts  $\ddot{\ddot{s}}_B$  und  $\ddot{\ddot{h}}_B$  aus (6.58) in Gl. (6.59) eingesetzt. Nach weiterem Umstellen folgt

$$K_{3,h}^h = \frac{5}{2}K_{2,h}^h - \frac{3}{2}K_{1,h}^h + \frac{\ddot{\ddot{h}}_B}{50} + \frac{\dot{s}_B^3}{500}h_B''' + \frac{3\dot{s}_B\ddot{s}_B}{500}h_B'' + \left( K_{3,s}^h - \frac{5}{2}K_{2,s}^h + \frac{3}{2}K_{1,s}^h - \frac{\ddot{\ddot{s}}_B}{50} \right) h_B' \quad (6.60)$$

mit der vorzugebenden  $s$ -Koordinate  $K_{3,s}^h$  und  $h_B'''$  aus Gl. (6.49).

### Nebenbedingungen für glatte Anbindungen an die Hinterkante

Analog zur Vorderkante können die Nebenbedingungen (6.29) für die Dickenverteilung zur tangenstetigen Anbindung der Druckseite an die Hinterkante erfüllt werden. Mit

$n = 8$  folgt für die Ableitung am Ende der B-Splinekurve nach (2.84)

$$h'_E = \frac{\dot{h}_E}{\dot{s}_E} = \frac{K_{8,h}^h - K_{7,h}^h}{K_{8,s}^h - K_{7,s}^h}. \quad (6.61)$$

Umgestellt nach der gesuchten  $h$ -Koordinate des vorletzten Kontrollpunkts folgt daraus mit (6.52)

$$K_{7,h}^h = h_E - h'_E (s_E - K_{7,s}^h), \quad (6.62)$$

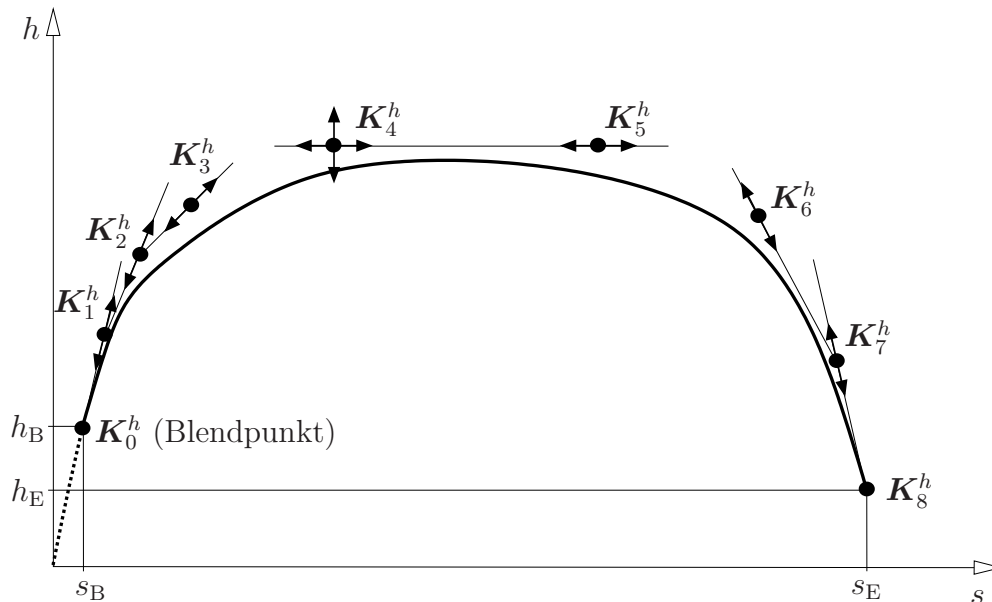
worin  $K_{7,s}^h$  erneut vorgegeben wird. Aus Gl. (2.96) folgt für die zweite Ableitung der Dickenverteilung

$$h''_E = \frac{3 K_{6,h}^h - K_{7,h}^h + h'_E (K_{7,s}^h - K_{6,s}^h)}{8 (K_{8,s}^h - K_{7,s}^h)^2}, \quad (6.63)$$

bzw. nach Umstellen

$$K_{6,s}^h = K_{7,s}^h - \frac{1}{h'_E} \left( \frac{8}{3} h''_E (K_{8,s}^h - K_{7,s}^h)^2 + K_{7,h}^h - K_{6,h}^h \right). \quad (6.64)$$

In diesem Fall wird für den siebten Kontrollpunkt  $K_6^h$  statt der  $s$ -Koordinate die  $h$ -Koordinate  $K_{6,h}^h$  vorgegeben.



**Abb. 6.11:** Parametrisierte Darstellung der Dickenverteilung durch eine quartische B-Splinekurve mit neun Kontrollpunkten (Pfeile an den Kontrollpunkten markieren die Entwurfswahlmöglichkeiten)



Abb. 6.11 zeigt die parametrisierte B-Splinekurve der Dickenverteilung  $h(s)$ . Die Kontrollpunkte sind gekennzeichnet, wobei die jeweiligen Pfeile die Entwurfsfreiheiten in einem Optimierungsprozess anzeigen. Dabei wird nochmals darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zu  $\mathbf{K}_6^h$  bei  $K_{1,h}^h$ ,  $K_{2,h}^h$ ,  $K_{3,h}^h$  und  $K_{7,h}^h$  jeweils die  $s$ -Koordinate vorgegeben wird und sich aus (6.55), (6.57), (6.60) und (6.62) jeweils die passende  $h$ -Koordinate ergibt.

### 6.3.5 Berechnung der Krümmung der Druckseite

Die Krümmung der Saugseite ist bereits durch die Parametrisierung vorgegeben. Um auch die Krümmung der Druckseite bewerten zu können, muss diese mit Gl. (2.25) berechnet werden. Dazu können die erste (6.20) und zweite Ableitung (6.36) der Druckseite benutzt werden, die bereits in den Abschnitten 6.3.2 und 6.3.3 berechnet wurden.

## 6.4 Fitten der Referenzprofile

Genau wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln 4 und 5 soll mittels eines Fittingprozesses überprüft werden, ob die semidirekte Parametrisierung geeignet ist, die drei aus Abschnitt 4.4 bekannten Referenzprofile R01, S03 und S09 nachzubilden. Der dafür zu variierende Parametervektor lautet entsprechend Gl. (6.1) und Abbn. 6.4 und 6.11

$$\mathbf{p}_{\text{sem}} = [s_B \ \beta_I \ \beta_E \ K_{1,s}^\kappa \ K_{2,s}^\kappa \ K_{3,s}^\kappa \ K_{3,\kappa}^\kappa \ K_{4,s}^\kappa \ K_{4,\kappa}^\kappa \ K_{5,s}^\kappa \ K_{5,\kappa}^\kappa \ K_{6,\kappa}^\kappa \ K_{1,s}^h \ K_{2,s}^h \ K_{3,s}^h \ K_{4,s}^h \ K_{4,h}^h \ K_{5,s}^h \ K_{6,h}^h \ K_{7,s}^h]^\top. \quad (6.65)$$

Die Optimierungsaufgabe ist in Analogie zu (4.19) und (5.31)

$$\min_{\mathbf{p}_{\text{sem}} \in \mathcal{P}_{\text{sem}}} \sum (y_i^{\text{ref}} - y_i)^2 \quad \text{mit } \mathcal{P}_{\text{sem}} := \{ \mathbf{p}_{\text{sem}} \in \mathbb{R}^{20} \mid \mathbf{p}_{\text{sem}}^u \leq \mathbf{p}_{\text{sem}} \leq \mathbf{p}_{\text{sem}}^o \} \quad (6.66)$$

und wird mit dem in *Matlab* implementierten SQP-Verfahren *fmincon* gelöst.

### Schaufelprofil R01

Der Mittelschnitt des Rotors 1 kann von der Parametrisierung gut nachgebildet werden, Abb. 6.12. Insbesondere die Saugseite weist eine sehr gute Übereinstimmung auf, wobei im Gegensatz zur indirekten Parametrisierung, Abschnitt 5.6, auch die sehr spitze Vorderkante sehr gut wiedergegeben wird. Auf der Druckseite sind die Abweichungen dagegen größer und zum Teil, wie im vergrößerten Ausschnitt der Vorderkante zu erkennen, sogar erheblich. Nichtsdestotrotz kann mit der beschriebenen Parametrisierung ein solches Profil hinreichend gut beschrieben werden.

Bei der Krümmungsverteilung der Saugseite in Abb. 6.13a ist auffällig, dass die Kurve im Wesentlichen aus zwei Teilen besteht. Zu Beginn fällt der Betrag der Krümmung am

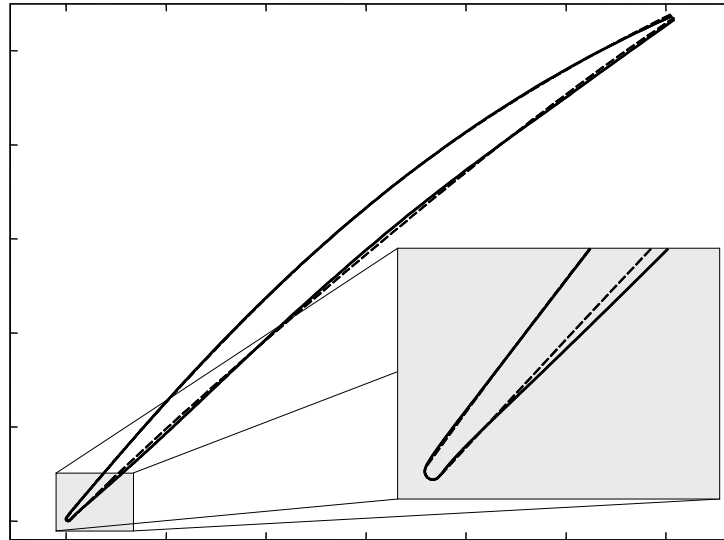


Abb. 6.12: R01-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

Übergang zwischen der stark gekrümmten Vorderkante und der nur schwach gekrümmten Saugseite nahezu senkrecht ab. Danach folgt ein großer Teil mit nahezu konstanter, betragsmäßig geringer Krümmung.

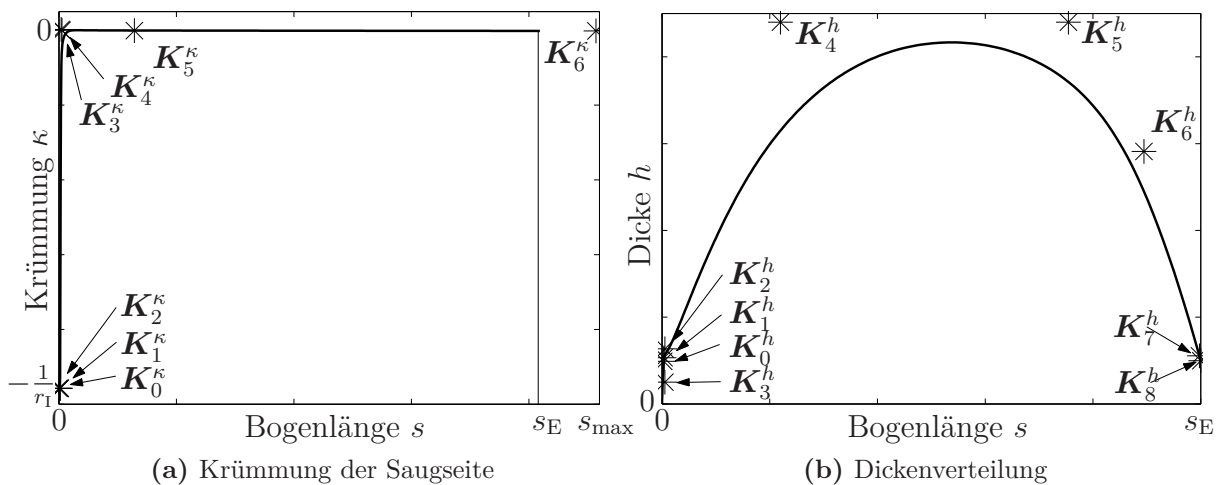


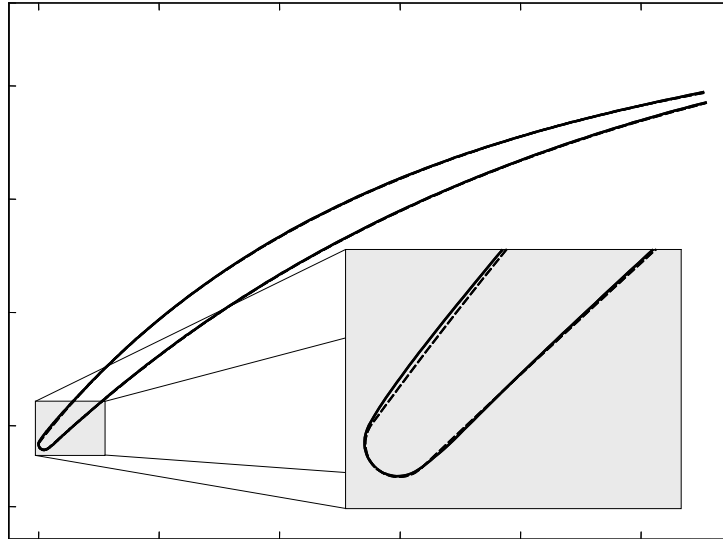
Abb. 6.13: Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für R01

Bei der Dickenverteilung in Abb. 6.13b fällt auf, dass der Kontrollpunkt  $K_3^h$  unterhalb der ersten drei Kontrollpunkte  $K_0^h \dots K_2^h$  liegt, wodurch die Kurve in diesem Bereich eine kleine Delle bekommt und so die sehr schlanke Vorderkante ermöglicht.

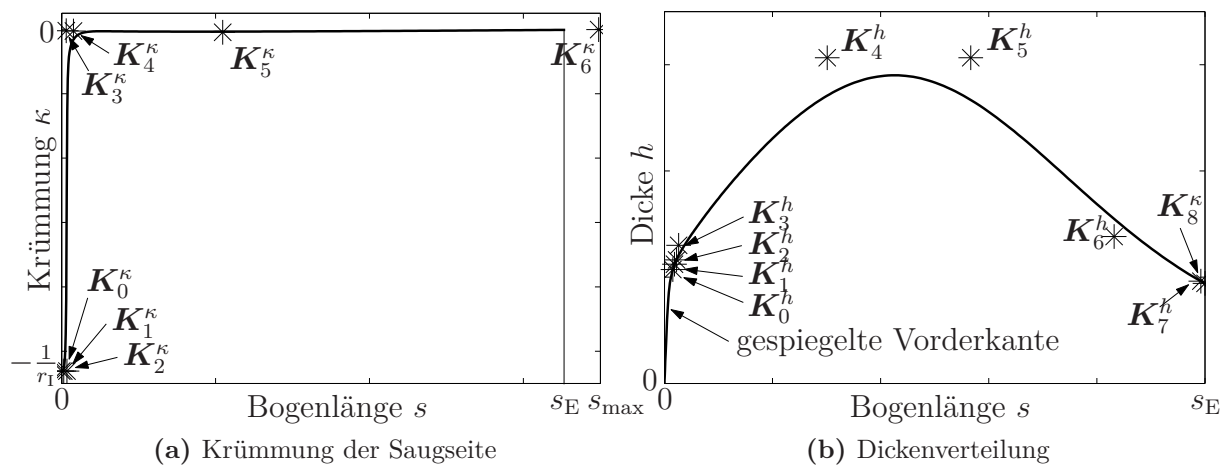
### Schaufelprofil S03

Für den Stator 3 kann ein deutlich besseres Ergebnis als beim Rotor 1 erzielt werden, Abb. 6.14. Die Abweichungen vom Referenzprofil sind über den gesamten Bereich, ein-

schließlich der Vorderkante, marginal. Dies liegt unter anderem daran, dass z. B. Anzahl der Kontrollpunkte und Polynomgrad der B-Splinekurven von Saugseitenkrümmung und Dickenverteilung speziell auf diesen Profilschnitt abgestimmt sind, da dieser im späteren Verlauf der Arbeit weiter untersucht wird.



**Abb. 6.14:** S03-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)



**Abb. 6.15:** Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für S03

Die Krümmungsverteilung der Saugseite in Abb. 6.15a zeigt qualitativ den gleichen Verlauf wie schon beim Rotor 1, Abb. 6.13a. Der Betrag nimmt zu Beginn stark ab und ist dann über den größten Teil der Kurve nahezu konstant. Bei der Dickenverteilung in Abb. 6.15b ergibt sich, im Gegensatz zum Rotor 1, ein sehr sanfter Übergang zwischen der Dicke der gespiegelten Vorderkante und der B-Splinekurve. Charakteristisch ist auch, dass die Kurve im Bereich der maximalen Dicke wesentlich spitzer ausfällt als beim Rotor 1.

## Schaufelprofil S09

Wie schon bei der indirekten Parametrisierung kann das sehr wellige Profil des Stators 9 nicht gut von der Parametrisierung nachgebildet werden, Abb. 6.16. Auch hier ist das erzeugte Profil an der Vorderkante spitzer und glatter. Um eine Vorderkante wie die des Referenzprofils erzeugen zu können, sind eindeutig mehr Kontrollpunkte bei beiden Verteilungen notwendig, als an dieser Stelle verwendet werden.

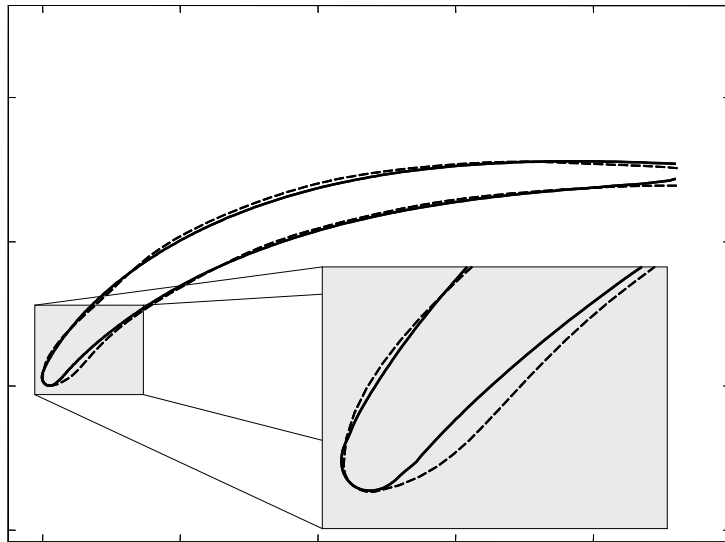


Abb. 6.16: S09-Profilfitting mit der semidirekten Parametrisierung (durchgezogene Linie) und Referenzprofil (gestrichelt)

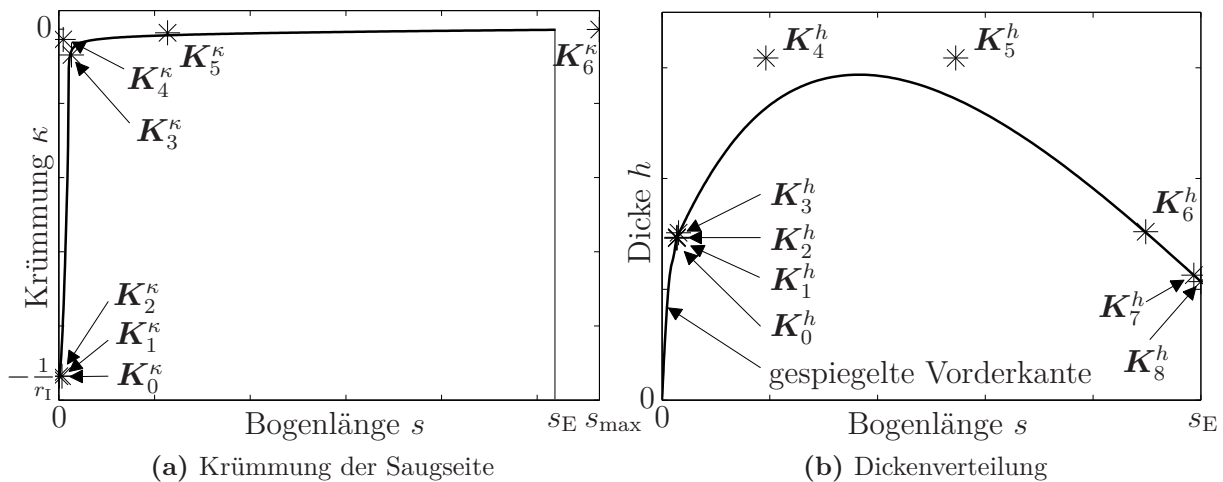


Abb. 6.17: Verteilungen der semidirekten Parametrisierung für S09

Die beiden Verteilungen in Abb. 6.17 weisen die gleichen Eigenschaften auf, wie bei den anderen beiden Schnitten. Eine Anpassung der Anzahl der Kontrollpunkte, um ein eventuell besseres Ergebnis für das Fitting zu bekommen, wurde nicht durchgeführt, da sich die weiteren Untersuchungen auf den Stator 3 beschränken.

# 7 Aerodynamische Optimierung eines Verdichterschaufelprofils – Vergleich der Parametrisierungen

Die in den vorherigen Kapiteln entwickelten Parametrisierungen für Verdichterschaufelprofile sollen nun am Beispiel einer aerodynamischen Optimierung miteinander verglichen werden. Dazu wird natürlich jeweils das identische Problem formuliert und ein vergleichbarer, der jeweiligen Parametrisierung angepasster Prozessablauf entwickelt.

## 7.1 Formulierung der Optimierungsaufgabe

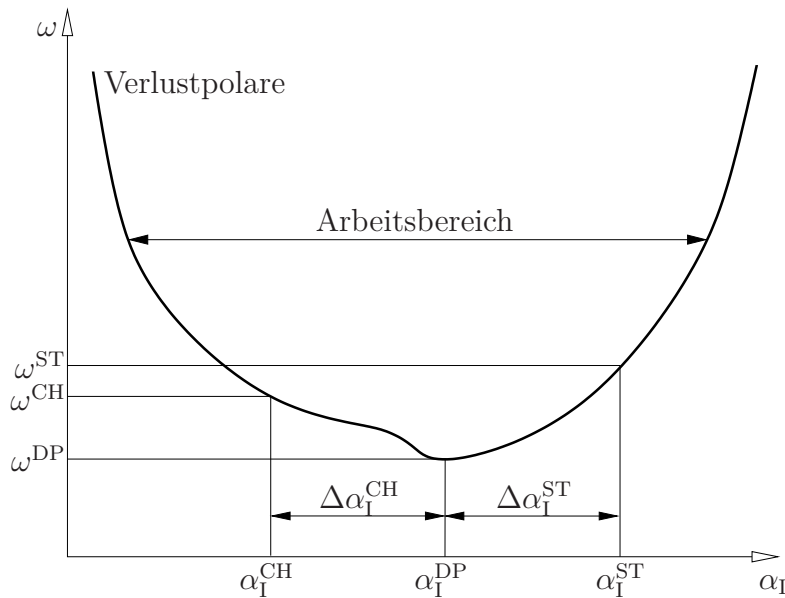
Die Formulierung einer korrekten, der physikalischen bzw. technischen Problemstellung entsprechenden Optimierungsaufgabe ist von entscheidender Bedeutung für jeden Optimierungsvorgang. Dabei treten in der Praxis fast ausschließlich Aufgaben auf, die nicht nur mehreren Nebenbedingungen unterliegen, sondern auch mehrere, meist konfliktäre Ziele in sich vereinen, BESTLE (1994). In vielen Arbeiten werden diese in einer einzigen Zielfunktion zusammengefasst, in der die einzelnen Ziele beispielsweise durch Wichtungsfaktoren unterschiedlich berücksichtigt werden. Dabei haben die rein empirisch festzulegenden Wichtungsfaktoren großen Einfluss auf den Ausgang der Optimierung und es hängt vom Geschick, der Erfahrung und der persönlichen Einstellung des Anwenders ab, wie das Ergebnis letztendlich aussieht. In dieser Arbeit wird daher der Einsatz von Mehrkriterienoptimierungen auf Basis genetischer Optimierungsalgorithmen präferiert. Damit ist das Ergebnis der Optimierung kein einzelnes, optimales Schaufelprofil, sondern eine größere Menge optimaler Kompromisslösungen, die am Ende diskutiert und nochmals durch eventuell vernachlässigte oder für eine Optimierung ungeeignete Kriterien beurteilt werden können, BESTLE (1994).

Bei der Optimierung von Verdichterschaufeln ist es prinzipiell sinnvoll, sowohl aerodynamische Kriterien als auch strukturelle Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Diese Vorgehensweise zieht jedoch die aufwendige Entwicklung komplexer Prozesse nach sich, wie beispielsweise von OTTO (2009) gezeigt wird. Zum Vergleich der in dieser Arbeit ent-

wickelten Schaufelprofilparametrisierungen dient daher ein Optimierungsprozess, in dem ausschließlich aerodynamische Ziele formuliert werden. Zur Findung der Kriterien dient die sogenannte Verlustpolare, Abb. 7.1, in welcher der aerodynamische Druckverlust  $\omega$  der Sektion über dem Anströmwinkel  $\alpha_I$  aufgetragen ist. Der dimensionslose Druckverlustkoeffizient

$$\omega = \frac{p_{0,E}^{\text{isen}} - \bar{p}_{0,E}}{p_{0,I} - p_I} \quad (7.1)$$

soll dabei die aerodynamische Effizienz der Schaufelsektion quantifizieren, YOUNGREN (1991). Die Differenz aus dem theoretisch erreichbaren isentropen Totaldruck  $p_{0,E}^{\text{isen}}$  und dem tatsächlichen massengemittelten Totaldruck hinter der Schaufel  $\bar{p}_{0,E}$  wird auf die Differenz aus Totaldruck  $p_{0,I}$  und statischem Druck  $p_I$ , also dem dynamischen Druck am Einlass, bezogen.



**Abb. 7.1:** Schematische Darstellung einer typischen Verlustpolaren einer Hochdruckverdichterschaufelsektion

Mit Blick auf die Verlustpolare in Abb. 7.1 können nun zwei Ziele für eine möglichst optimale Schaufelsektion definiert werden. Zum Einen soll der Verlust  $\omega^{\text{DP}}$  im Auslegungspunkt DP minimal sein, zum Anderen soll die Schaufel in einem möglichst großen Bereich effizient arbeiten, d. h. der Arbeitsbereich soll maximiert werden. Die Bestimmung des Verlustes im Auslegungspunkt erfordert lediglich eine CFD-Rechnung. Für die Definition des Arbeitsbereiches existieren in der Literatur mehrere Vorschläge. EGARTNER (2000) berechnet beispielsweise den Druckverlust bei vielen verschiedenen Anströmwinkeln und minimiert anschließend erfolgreich die gewichtete Summe der Verluste. KESKIN (2007) verzichtet dagegen auf die aufwendige Bestimmung der kompletten Verlustpolaren, indem er zwei Methoden vorstellt, die jeweils nur zwei zusätzliche CFD-Rechnungen benötigen. Eine dieser Methoden ist die ebenso einfache wie auch effektive Möglichkeit,

eine weitere Verlustgröße

$$\gamma = \max \{ \omega^{\text{CH}}, \omega^{\text{ST}} \} \quad (7.2)$$

zu minimieren, die dem größeren zweier Verluste bei den ausgewählten Anström winkeln  $\alpha_1^{\text{CH}} = \alpha_1^{\text{DP}} - \Delta\alpha_1^{\text{CH}}$  für Verdichtersperren bzw.  $\alpha_1^{\text{ST}} = \alpha_1^{\text{DP}} + \Delta\alpha_1^{\text{ST}}$  für Verdichter pumpen entspricht. In dieser Arbeit wird eine einheitliche Variation des Anström winkels gewählt, so dass

$$\Delta\alpha_1^{\text{CH}} = \Delta\alpha_1^{\text{ST}} = \Delta\alpha_1 \quad (7.3)$$

gilt. Damit wird eine zum Auslegungspunkt weitestgehend symmetrische Verlustpolare angestrebt. Aber auch eine unsymmetrische Wahl kann sinnvoll sein, falls die Polare tendenziell nach links oder rechts verschoben sein soll.

Die Optimierungsziele (7.1) und (7.2) werden in der Problemformulierung

$$\min_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{P}_i} \begin{bmatrix} \omega^{\text{DP}} \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{P}_i := \{ \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{0}, \mathbf{p}_i^{\text{u}} \leq \mathbf{p}_i \leq \mathbf{p}_i^{\text{o}} \} \quad (7.4)$$

als Vektor  $[\omega^{\text{DP}} \ \gamma]^\top$  zusammengefasst. Dabei sind beide Ziele zu minimieren, indem der Parametervektor  $\mathbf{p}_i$  der jeweils untersuchten Parametrisierung  $i \in \{\text{dir}, \text{ind}, \text{sem}\}$  variiert wird. Der Parametervektor spannt den Entwurfsraum  $\mathcal{P}_i$  auf, der durch untere Parametergrenzen  $\mathbf{p}_i^{\text{u}}$  und obere Grenzen  $\mathbf{p}_i^{\text{o}}$  sowie die für alle drei Parametrisierungen identischen Nebenbedingungen  $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$  der Optimierung eingeschränkt wird. Diese entstehen, wenn an Entwürfe weitere Forderungen gestellt werden. In dieser Arbeit sind dies einerseits geometrische ( $c_1 \dots c_4$ ) andererseits aerodynamische Nebenbedingungen ( $c_5 \dots c_7$ ):

$$\begin{aligned} c_1 &:= |M_{\text{E},y} - M_{\text{E},y}^{\text{ref}}| - \varepsilon_{M_{\text{E},y}} && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_2 &:= |\phi_c| && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_3 &:= |\phi_\kappa| && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_4 &:= A^{\text{ref}} - A && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_5 &:= \phi_{\text{nc}} && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_6 &:= |\alpha_{\text{E}}^{\text{ref}} - \alpha_{\text{E}}| - \varepsilon_{\alpha_{\text{E}}} && \stackrel{!}{\leq} 0, \\ c_7 &:= \bar{H}_{\text{E}}^{\text{S}} - \bar{H}_{\text{E}}^{\text{S,ref}} && \stackrel{!}{\leq} 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Die geometrischen Nebenbedingungen  $c_1 \dots c_4$  wurden bereits im Abschnitt 3.6 ausführlich besprochen. Zusammengefasst sollen sie sicherstellen, dass eine sinnvolle Kontur erzeugt wird, die grundsätzlich in der Lage sein kann, die aerodynamischen und strukturellen Ziele zu erreichen.

Die weiteren Nebenbedingungen betreffen die CFD-Analyse des Profilentwurfs. Die Bedingung  $c_5$  fordert, dass alle drei CFD-Rechnungen zur Verlustberechnung von  $\omega^{\text{DP}}$ ,  $\omega^{\text{CH}}$ ,  $\omega^{\text{ST}}$  innerhalb eines Prozessdurchlaufs konvergieren, d. h. Ergebnisse für die benötigten aerodynamischen Größen liefern. Die Anzahl  $\phi_{\text{nc}}$  der nichtkonvergierten Rechnungen muss also Null sein. Da evolutionäre Optimierungsstrategien jedoch besser mit Ungleichungs- als mit Gleichungsnebenbedingungen klarkommen, ist diese Forderung wie auch in Abschnitt 3.6 als Ungleichung formuliert.

Bezüglich der aerodynamischen Eigenschaften des Profils werden in dieser Arbeit zwei Nebenbedingungen aus früheren Veröffentlichungen, z.B. KESKIN (2007), übernommen, die für den Auslegungspunkt gelten sollen. Zum Einen muss das Profil natürlich die geforderte Strömungsumlenkung erreichen, weshalb die Nebenbedingung  $c_6$  innerhalb einer Spanne  $\varepsilon_{\alpha_E}$  um den geforderten Wert  $\alpha_E^{\text{ref}}$  aus der S2-Rechnung liegen muss. Eine weitere Forderung  $c_7$  betrifft das Grenzschichtverhalten an der Saugseite. Ziel ist es, Schaufelprofile zu erhalten, die keine Ablöseerscheinungen der Strömung an der Saugseite aufweisen. Als Indikator für das Grenzschichtverhalten dient der dimensionslose Grenzschichtformfaktor für kompressible Strömungen  $\bar{H}^{\text{S}}$ , der die Impulsverlustdicke  $\bar{\delta}_2$  ins Verhältnis zur Verdrängungsdicke  $\bar{\delta}_1$  setzt, SCHLICHTING u. GERSTEN (2006):

$$\bar{H}^{\text{S}} = \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}. \quad (7.6)$$

Für einen einzuhaltenden Grenzwert für den Grenzschichtformfaktor, so dass keine Ablösung der Grenzschicht auftritt, können der Literatur verschiedene Angaben entnommen werden. TRAUPEL (1988) nennt einen Bereich für kritische Werte bei turbulenten Grenzschichten von  $\bar{H}^{\text{S,ref}} = 1,8 \dots 2,4$ , OTTO (2009) verwendet in Anlehnung an CUMPSTY (2004) den Wert 3,5 für sich wiederanlegende Grenzschichten. Mit Bezug auf KESKIN (2007) wird in dieser Arbeit der Wert von CASTILLO u. a. (2004) mit  $\bar{H}_E^{\text{S,ref}} = 2,5$  für den Grenzschichtformfaktor an der Hinterkante der Saugseite übernommen.

Die Parameter der Optimierung folgen direkt aus den in dieser Arbeit entwickelten Geometrieparametrisierungen und werden in den Parametervektoren  $\mathbf{p}_i$  mit  $i \in \{\text{dir}, \text{ind}, \text{sem}\}$  für die direkte in Gl. (4.18), indirekte in Gl. (5.30) bzw. semidirekte Parametrisierung in Gl. (6.65) zusammengefasst. Zum besseren Verständnis der folgenden Abschnitte werden sie an dieser Stelle noch einmal kurz erläutert und dargestellt.

Die Optimierungsparameter der direkten Parametrisierung ergeben sich zum überwiegenden Teil aus den jeweils neun freien Koordinaten der Kontrollpunkte der B-Splinekurven für Saugseite  $\mathbf{K}_i^{\text{S}}$  bzw. Druckseite  $\mathbf{K}_i^{\text{D}}$ , siehe Abschnitt 4.3. Zusätzlich sind die Metallwinkel  $\beta_{\text{I}}, \beta_{\text{E}}$  und die Keilwinkel  $\mu_{\text{I}}, \mu_{\text{E}}$  an der Vorder- und Hinterkante sowie die  $y$ -Koordinate  $M_{\text{E},y}$  des Mittelpunkts des Hinterkantenkreises variabel. Zusammengefasst folgt der Pa-



parametervektor

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{dir}} = & [\beta_{\text{I}} \mu_{\text{I}} \beta_{\text{E}} \mu_{\text{E}} M_{\text{E},y} \\ & K_{1,x}^{\text{S}} K_{2,x}^{\text{S}} K_{3,x}^{\text{S}} K_{3,y}^{\text{S}} K_{4,x}^{\text{S}} K_{4,y}^{\text{S}} K_{5,x}^{\text{S}} K_{5,y}^{\text{S}} K_{6,x}^{\text{S}} \\ & K_{1,x}^{\text{D}} K_{2,x}^{\text{D}} K_{3,x}^{\text{D}} K_{3,y}^{\text{D}} K_{4,x}^{\text{D}} K_{4,y}^{\text{D}} K_{5,x}^{\text{D}} K_{5,y}^{\text{D}} K_{6,x}^{\text{D}}]^{\text{T}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit insgesamt 23 Entwurfsfreiheiten der direkten Profilparametrisierung.

Bei der indirekten Parametrisierung werden die Krümmungsverteilung  $\kappa(s)$  der Skelettlinie und der Verlauf der ersten Ableitung  $r'(s)$  des Rolling-Ball-Radius optimiert. Damit ergeben sich aus den freien Kontrollpunktkoordinaten der B-Splinekurven und dem Metallwinkel  $\beta_{\text{I}}$  insgesamt 19 Parameter, die im Parametervektor

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{ind}} = & [\beta_{\text{I}} K_{0,\kappa}^{\kappa} K_{1,s}^{\kappa} K_{1,\kappa}^{\kappa} K_{2,s}^{\kappa} K_{2,\kappa}^{\kappa} K_{3,s}^{\kappa} K_{3,\kappa}^{\kappa} K_{4,s}^{\kappa} K_{4,\kappa}^{\kappa} K_{5,\kappa}^{\kappa} \\ & K_{1,s}^{r'} K_{1,r'}^{r'} K_{2,s}^{r'} K_{2,r'}^{r'} K_{3,s}^{r'} K_{3,r'}^{r'} K_{4,s}^{r'} K_{4,r'}^{r'}]^{\text{T}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

zusammengefasst sind.

Ähnliches gilt für die semidirekte Parametrisierung, bei der neben Saugseite und halber Dicke zusätzlich noch die Metallwinkel  $\beta_{\text{I}}, \beta_{\text{E}}$  an Vorder- und Hinterkante sowie die Position des Blendpunkts  $s_{\text{B}}$  variiert werden. Es resultiert der Parametervektor

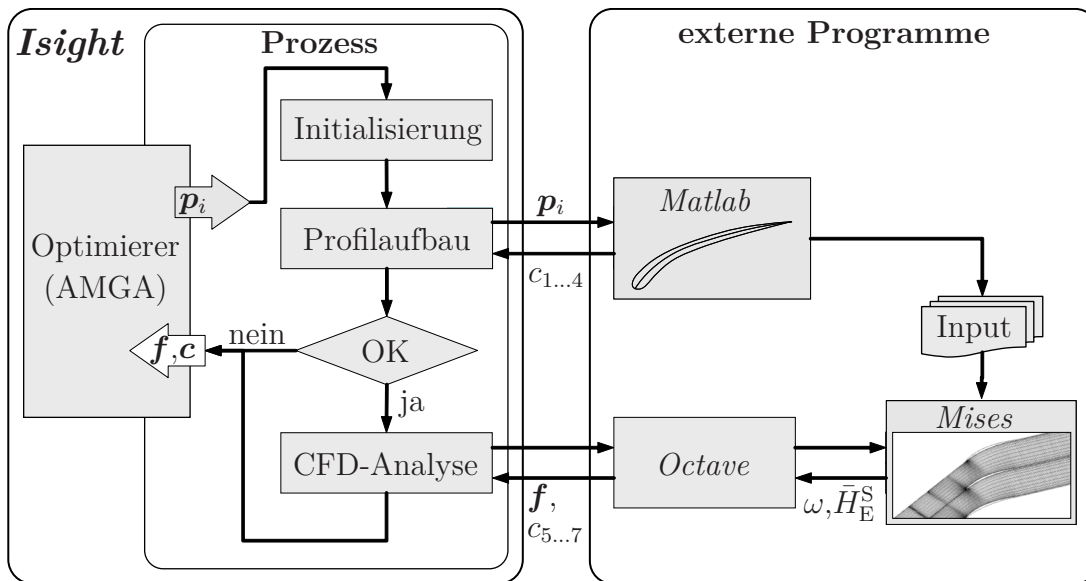
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{sem}} = & [s_{\text{B}} \beta_{\text{I}} \beta_{\text{E}} K_{1,s}^{\kappa} K_{2,s}^{\kappa} K_{3,s}^{\kappa} K_{3,\kappa}^{\kappa} K_{4,s}^{\kappa} K_{4,\kappa}^{\kappa} K_{5,s}^{\kappa} K_{5,\kappa}^{\kappa} K_{6,\kappa}^{\kappa} \\ & K_{1,s}^h K_{2,s}^h K_{3,s}^h K_{4,s}^h K_{4,h}^h K_{5,s}^h K_{6,h}^h K_{7,s}^h]^{\text{T}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

für die semidirekte Parametrisierung mit insgesamt 20 Optimierungsparametern.

## 7.2 Serieller Optimierungsprozess

Die Lösung der Optimierungsaufgabe erfolgt durch einen automatisierten Prozess, der den Profilaufbau, die numerische aerodynamische Analyse der Profile sowie die Berechnung der Ziele und Nebenbedingungen enthält. Dafür wird die Prozessintegrations- und Optimierungssoftware *Isight* von Simulia verwendet. *Isight* besitzt direkte Schnittstellen zu kommerziellen CAD-, FE-, CFD-Programmen und Programmierwerkzeugen, DASSAULT SYSTEMES (2010). So wird die Entwicklungsumgebung *Matlab* sowohl zum Profilaufbau als auch zum Erzeugen der Eingabedateien für den CFD-Löser *Mises* verwendet. Durch die vorhandene direkte Schnittstelle zwischen *Isight* und *Matlab* ist ein sehr schneller Datenaustausch ohne Dateien möglich, was in einem Optimierungsprozess, dessen Entwurfse-

valuierung mehrere tausend mal durchlaufen wird, einen enormen Geschwindigkeitsvorteil bringen kann.



**Abb. 7.2:** Programmablaufplan des allgemeinen Optimierungsprozesses

In Abb. 7.2 ist der Optimierungsprozess in Form eines Programmablaufplans skizziert, wobei hier noch nicht auf die Besonderheiten bei den einzelnen Profilparametrisierungen eingegangen werden soll. Gesteuert wird der Prozess durch den Optimierer. Es wird der von TIWARI u. a. (2008) vorgestellte Optimierungsalgorithmus *AMGA* (Archive-based Micro Genetic Algorithm) verwendet, der eine Weiterentwicklung des bekannten und erprobten *NSGA-II* von DEB u. a. (2002) ist. Beide Algorithmen sind gleichermaßen gut in *Isight* implementiert, VAN DER VELDEN u. KOCH (2010). Vergleichende Studien von FLASSIG u. a. (2008) belegen die gute Eignung des *AMGA* für die Mehrkriterienoptimierung und bestätigen damit die eigenen Erfahrungen, die im Verlaufe dieser Arbeit mit dem oben beschriebenen Optimierungsproblem gewonnen wurden. Die Standard-Einstellungen des *AMGA* werden entsprechend Tab. 7.1 für alle drei Optimierungsläufe identisch angepasst. Dabei werden insbesondere bei der Größe der initialen Population sowie des Archivs sehr große Werte gewählt. Weil keine initiale Population für die Optimierung vorgegeben wird, sondern die Optimierung von „scratch“ startet, werden für die Startpopulation zufällige Parameterkombinationen von *AMGA* erzeugt. In Kombination mit der Wahl vergleichsweise weiter Parametergrenzen  $p_i^u, p_i^o$ , vgl. Gl. (7.4), entstehen zunächst viele Entwürfe, die in keinsten Weise die Nebenbedingungen einhalten. Ziel ist es also, die initiale Population so groß zu wählen, dass möglichst viele Entwürfe zulässig sind, bzw. falls das nicht der Fall sein sollte, der Optimierer aus den Entwürfen richtige Tendenzen erkennen kann. Die Anzahl der Funktionsauswertungen zeigt sich für alle Parametrisierungen als guter Kompromiss zwischen ausreichender Konvergenz der PARETOfront und zeitlichem Aufwand. Populationsgröße und maximale Anzahl der PARETOwerte erlauben nicht nur eine gute

Konvergenz, sondern auch eine praktikable Breite und Gleichmäßigkeit der PARETOfront.

**Tab. 7.1:** *AMGA* Einstellungen

Funktionsauswertungen	15000
Populationsgröße	200
initiale Populationsgröße	1500
maximale Archivgröße	1500
maximale Anzahl PARETOwerte	100

Der vom Optimierer erzeugte Parametervektor  $\mathbf{p}_i$  wird an den Prozess übergeben. Zunächst werden in einem Initialisierungsblock alle Ziele und Nebenbedingungen mit genügend großen, empirisch gefundenen Strafwerten belegt, die einen sehr schlechten, unzulässigen Entwurf kennzeichnen. Diese Vorgehensweise eröffnet die Möglichkeit, den Prozess an ausgewählten Stellen zu unterbrechen, ohne alle Ziele oder Nebenbedingungen berechnet zu haben. Nach dieser Initialisierung erfolgt der Profilaufbau. Dazu wird der Parametervektor an *Matlab* übergeben, wo das Profil komplett erzeugt wird. Zusätzlich werden im gleichen Atemzug alle für die CFD-Analyse benötigten Inputdateien erzeugt und die geometrischen Nebenbedingungen berechnet und an *Isight* zurückgegeben. Wird mindestens eine Nebenbedingung verletzt, kann auf die CFD-Analyse verzichtet und der Durchlauf an dieser Stelle abgebrochen werden, woraufhin der Prozess mit einem neuen Parametersatz fortgesetzt wird. Da die CFD-Analyse mit Abstand die meiste Rechenzeit beansprucht, kann so der gesamte Aufwand reduziert werden.

Bei einem erfolgreichen Profilaufbau erfolgt die angesprochene CFD-Analyse des Profils. Die Steuerung und Übergabe von Daten erfolgt mittels Dateien und Skripten, da keine direkte Schnittstelle zwischen *Isight* und dem CFD-Löser besteht. Weil *Matlab* für einen später geplanten parallelen Aufruf aufgrund der dann vielen benötigten Lizenzen ungeeignet ist, wird stattdessen das freie und in der Handhabung sehr ähnliche *GNU Octave*, siehe EATON u. a. (2008), zur Erzeugung dieser Dateien und Steuerung des CFD-Programms verwendet. Die entworfenen Schaufelprofile werden in ebenen CFD-Rechnungen analysiert. Dafür wird das unter anderem von YOUNGREN u. DRELA (1991) maßgeblich entwickelte *Mises* verwendet, welches die als stationär angenommene, zweidimensionale Strömung um das Schaufelprofil in zwei Bereiche unterteilt. Die viskose, also reibungsbehaftete, Grenzschicht wird über ein System nichtlinearer, integraler Grenzschichtgleichungen modelliert. Mittels eines NEWTON-RAPHSON-Verfahrens erfolgt die Kopplung an das reibungsfrei angenommene äußere Strömungsfeld, DRELA (1986). Das verwendete strukturierte Rechengitter, vgl. dazu LAURIEN u. OERTEL JR. (2009), ist in Abb. 7.3 dargestellt. Ohne weitere Untersuchungen oder Studien zur Güte der Netze werden die Einstellungen aus vorangegangenen Arbeiten, beispielsweise KESKIN (2007), übernommen, die sich auch an den Empfehlungen in DUTTA u. BESTLE (2006) orientieren. Zwischen den Profilen werden 24 Stromlinien, also Gitterkanten, gerechnet. Entlang

der Saug- und Druckseite befinden sich jeweils 70 Gitterpunkte, am Eintritt werden 60 Knoten periodisch wiederholt und am Austritt 45.

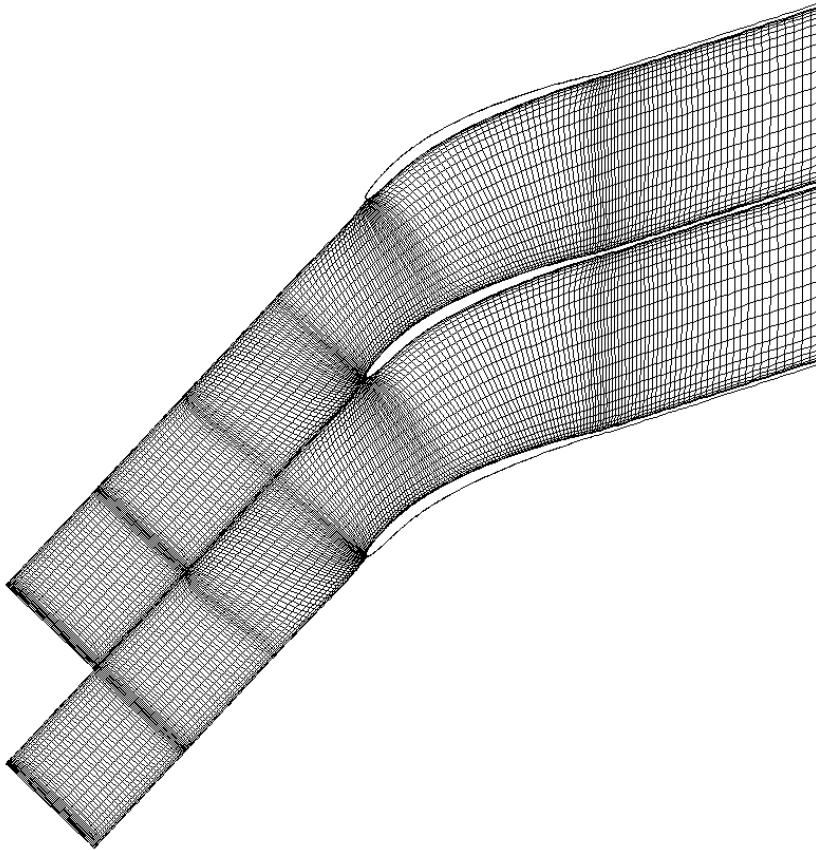


Abb. 7.3: Typisches verwendetes CFD-Netz

Nach der Analyse werden die benötigten Strömungsgrößen, sprich die Druckverluste  $\omega^{\text{DP}}$ ,  $\omega^{\text{CH}}$ ,  $\omega^{\text{ST}}$ , der Abströmwinkel  $\alpha_E$  und der saugseitige Grenzschichtformfaktor  $\bar{H}_E^{\text{S}}$  aus den entsprechenden Ausgabedateien mit *Octave* extrahiert und in Form der Ziele  $\mathbf{f}$  und Nebenbedingungen  $c_5 \dots c_7$  an *Isight* zurückgegeben.

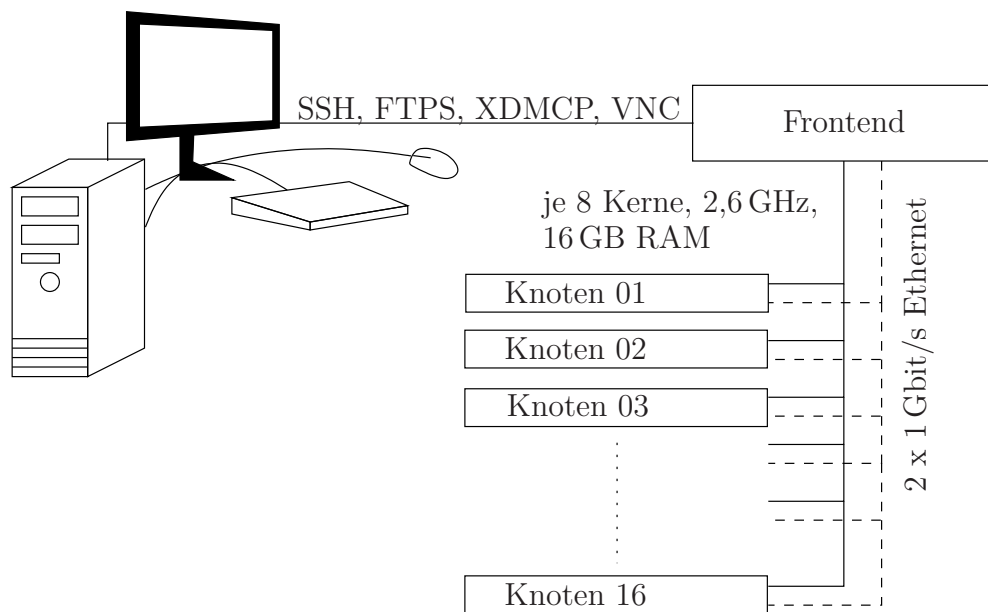
### 7.3 Parallelisierter Optimierungsprozess auf einem HPC-Cluster

Wie oben bereits angesprochen nimmt die CFD-Analyse die mit Abstand meiste Zeit während eines Durchlaufs in Anspruch. Es ist daher naheliegend, an dieser Stelle durch Parallelisierung Zeit einzusparen. *Mises* selbst kann das CFD-Modell nicht verteilt rechnen, YOUNGREN u. DRELA (1998), was bei den vergleichsweise sehr kleinen Modellen auch nur beschränkte Vorteile brächte. Daher werden eigene Methoden zur effizienten parallelen, also gleichzeitigen CFD-Berechnung mehrerer Profile auf einem Hochleistungs-

Rechen-Cluster (HPC-Cluster – High-Performance-Computing-Cluster) untersucht und in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

### 7.3.1 HPC-Cluster

Die Lösung einer Optimierungsaufgabe mit einem genetischen Optimierungsalgorithmus ist eine zeit- und ressourcenintensive Aufgabe. Durch eine möglichst weitreichende parallele Abarbeitung der Aufgaben kann zumindest die Problematik der langen Dauer solcher Optimierungen gelöst werden. Für die vorliegende Arbeit wurde auf einen HPC-Cluster zugegriffen, dessen Aufbau schematisch in Abb. 7.4 dargestellt ist.



**Abb. 7.4:** Aufbau des verwendeten High-Performance-Computing-Clusters

Aufbau und Arbeitsweise eines Clusters sollen an dieser Stelle nur kurz skizziert werden, Einzelheiten können beispielsweise in BAUKE u. MERTENS (2006) nachgelesen werden. Der hier benutzte dedizierte HPC-Cluster ist ein Bladesystem und besteht aus insgesamt 17 einzelnen 19 Zoll Bladeservern. Jedes Blade enthält zwei AMD Opteron 2382 CPUs mit je vier, mit 2,6 GHz getakteten Rechenkernen; als Arbeitsspeicher stehen jeweils 16 GB RAM zur Verfügung. Eines der Blades fungiert als Frontend oder Masterknoten und verfügt daher über zwei 1 TB große Festplatten, die aus Gründen der Datensicherheit in einem RAID 1 Verbund arbeiten, PATTERSON u. a. (1988). Die restlichen Rechenknoten verfügen über je eine 500 GB große Festplatte. Der Datenaustausch innerhalb des Clusters erfolgt über zwei getrennte 1 Gbit/s Ethernet Netzwerke. Als Betriebssystem kommt *SUSE Linux Enterprise Server 10* zum Einsatz, NOVELL (2008).

Der Benutzer erlangt über seinen Arbeitsplatz-Rechner Zugang zum Frontend des Clusters. Dateien können über das FTPS-Protokoll mit entsprechenden Software-Clients trans-

feriert werden. Graphische Benutzeroberflächen werden über das XDMCP-Protokoll, beispielsweise via *XWin32* (*KDE3*), oder als VNC-Client (*Fvwm2*) gestartet. Sämtliche Software sowie die Daten-Verzeichnisse der Benutzer (*/home/username*) liegen auf einem NFS-Laufwerk, das von jedem Knoten erreichbar ist.

Nach ELDRED u. a. (2000) werden vier verschiedene Arten der Parallelisierung von Optimierungsprozessen unterschieden:

- grobe algorithmische Parallelisierung,
- feine algorithmische Parallelisierung,
- grobe Parallelisierung der Funktionsauswertung,
- feine Parallelisierung der Funktionsauswertung.

Bei der groben algorithmischen Parallelisierung werden mehrere unabhängige Funktionsauswertungen zur Berechnung der Zielfunktionen und Nebenbedingungen gleichzeitig auf unterschiedlichen CPUs durchgeführt. Dabei können durchaus mehrere, unterschiedliche Berechnungen für eine Funktionsauswertung notwendig sein. Wird nur eine Funktionsauswertung ausgeführt, jedoch mehrere Berechnungen innerhalb dieser parallel, wird von der groben Parallelisierung der Funktionsauswertung gesprochen. Dem gegenüber stehen die feine algorithmische Parallelisierung, wo einzelne Schritte des Optimierungsalgorithmus parallelisiert werden, und die feine Parallelisierung der Funktionsauswertung, bei der einzelne Berechnungen zur Funktionsauswertung parallel durchgeführt werden.

In dieser Arbeit kommt die grobe algorithmische Parallelisierung zur Anwendung. Das bedeutet, dass mehrere Funktionsauswertungen des Optimierers, also mehrere Profilentwürfe, gleichzeitig berechnet werden. Dafür bietet die verwendete Optimierungs- und Prozessintegrationsumgebung *Isight* entsprechende Einstellungen. In den folgenden Abschnitten werden drei verschiedene Möglichkeiten erläutert, wie diese Parallelisierung auf dem Cluster praktisch umgesetzt werden kann.

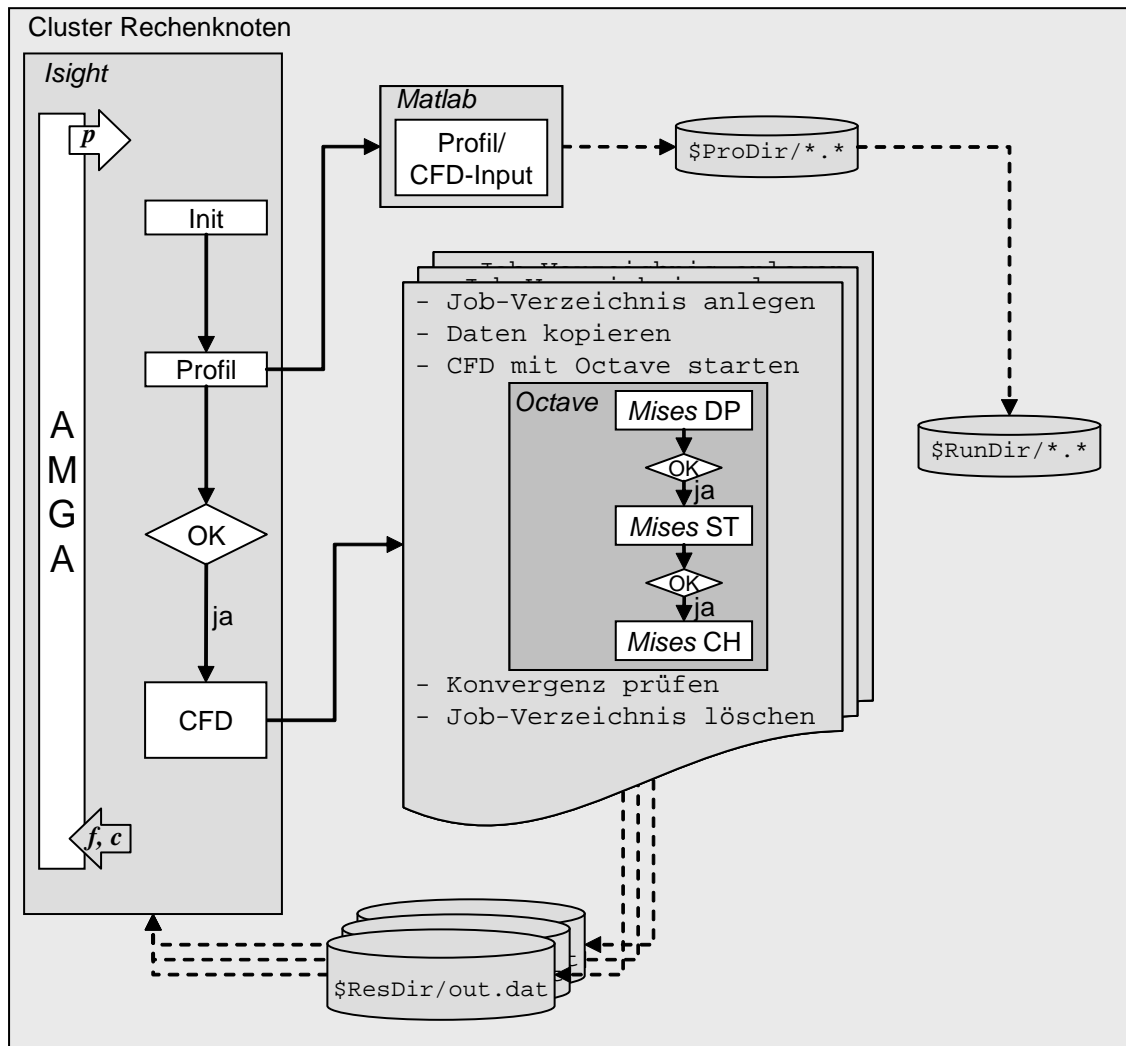
### 7.3.2 Parallelisierung auf einem einzelnen Knoten

Die einfachste Möglichkeit der parallelen Ausführung der Funktionsauswertung im Optimierungsprozess bietet sich bei der Beschränkung auf einen einzelnen Knoten. In diesem Fall findet kein Transfer von Optimierungsdaten zwischen den Knoten statt. Dadurch kann auf die Benutzung eines Prozessverteilungsprogramms, wie z. B. die Sun Grid Engine (*SGE*), verzichtet werden.

Der einzelne Knoten verhält sich wie ein normaler Desktop-PC mit einem Mehr-Kern-Prozessor. Dadurch gestaltet sich das Aufsetzen des Prozesses relativ einfach. Der Ablauf eines Funktionsaufrufs des Optimierers ist in Abb. 7.5 schematisch dargestellt und wird im Folgenden näher erläutert. Es wird lediglich ein Skript benötigt, das die folgenden Arbeitsschritte sukzessive abarbeitet:

1. eindeutig benanntes Arbeitsverzeichnis auf lokaler Festplatte des Knotens anlegen,

2. benötigte *Octave*-Skripte und *Mises*-Eingabedateien in das lokale Arbeitsverzeichnis kopieren,
3. *Mises*-Analyse mittels *Octave*-Skript im lokalen Arbeitsverzeichnis durchführen,
4. lokales Arbeitsverzeichnis bereinigen,
5. überprüfen, ob Ergebnisdatei korrekt in das *Isight*-Verzeichnis geschrieben wurde.



**Abb. 7.5:** Parallelisierung auf einem einzelnen Knoten (durchgezogene Pfeile markieren den Prozessablauf, gestrichelte Pfeile kennzeichnen Datenströme)

Wichtig hierbei ist, dass für jeden Optimierungsentwurf ein neues, eindeutig benanntes und damit zuzuordnendes Verzeichnis angelegt wird, in dem die CFD-Analyse stattfindet. Dieses Verzeichnis sollte unbedingt auf der lokalen Festplatte angelegt werden. Wird es dagegen auf dem NFS-Laufwerk erzeugt, findet ein ständiger Datenaustausch zwischen dem Knoten und dem Frontend statt, der sich negativ auf die Performance des gesamten Clusters auswirken kann. Aus diesem Verzeichnis heraus werden auch die CFD-Analysen mit *Mises* durchgeführt, wobei die drei Berechnungen für die verschiedenen Anström-



winkel nacheinander durchgeführt werden. Durch das sequentielle Abarbeiten der drei CFD-Berechnungen, müssen in einzelnen Fällen nicht alle drei Analysen vorgenommen werden. Konvergiert beispielsweise die erste CFD-Rechnung bereits nicht, werden auch die folgenden beiden nicht mehr durchgeführt, da der Entwurf in jedem Fall unzulässig ist. Dadurch kann der Berechnungsvorgang beschleunigt werden.

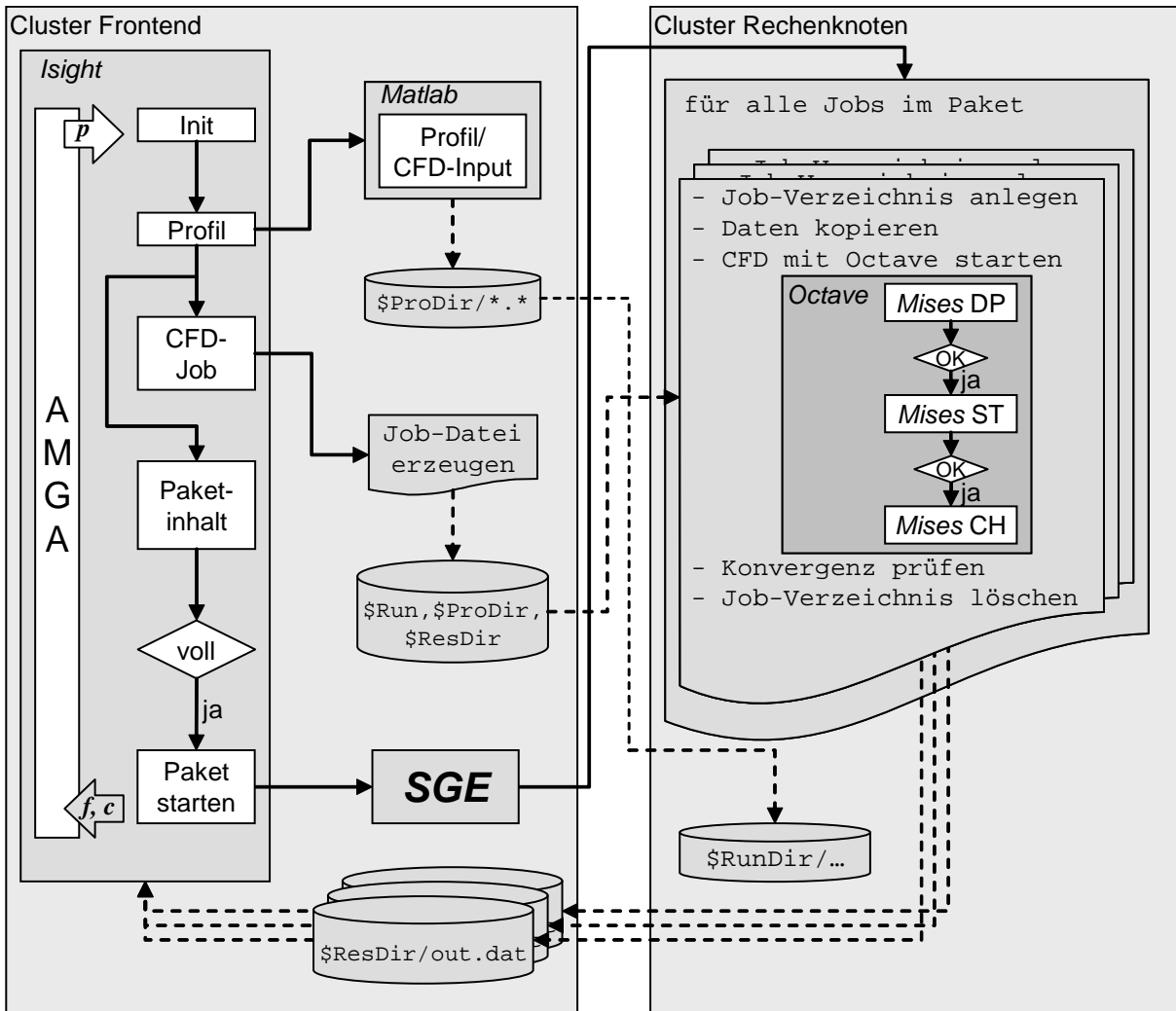
Nach Beendigung der CFD-Analyse wird eine Ergebnisdatei in das *Isight*-Verzeichnis des Entwurfs geschrieben, aus der *Isight* die Werte der Ziele und Nebenbedingungen ausliest. Zur Sicherstellung des Prozessablaufs wird im shell-Skript geprüft, ob diese Datei in das vorgesehene Verzeichnis geschrieben wurde. Ist das nicht der Fall, wird eine Ersatzdatei dorthin kopiert, die sehr schlechte Werte für die Ziele und Nebenbedingungen enthält.

### 7.3.3 Parallelisierung mit der Sun Grid Engine

Soll nicht nur ein Knoten, sondern ein großer Teil oder sogar der gesamte Cluster für die Optimierung genutzt werden, bietet sich die Verwendung eines Prozessverteilers, in diesem Fall die *Sun Grid Engine (SGE)*, SUN MICROSYSTEMS, INC. (2007), an. Dieser verteilt einzelne Aufgaben lastabhängig auf dem Cluster. Das heißt, dass die Auslastung eines Knotens überprüft wird, bevor die Aufgabe (Job) an den Knoten geschickt wird. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn mehrere unabhängige Benutzer gleichzeitig Clusterressourcen nutzen. Ideal ist diese Vorgehensweise dann, wenn der Cluster ausschließlich für sehr zeitaufwendige Analysen benutzt wird. Dann tritt die *SGE* nur selten in Aktion, wenn nämlich ein neuer Job gestartet werden soll. Wenn so wie hier im Zuge einer Optimierung einige Tausend sehr kurze Berechnungen verteilt werden müssen, ist die *SGE* dagegen ständig beschäftigt. In Versuchen zeigt sich, dass es unabhängig von den Einstellungen der *SGE* zu einer starken Auslastung des Cluster-Netzwerkes kommt und den Datentransfer zwischen Frontend und Knoten teilweise extrem ausbremst. Aus diesem Grund werden einzelne Jobs in Pakete zusammengefasst und anschließend als große „Bündel“ an die *SGE* übergeben. Im schematischen Ablaufplan in Abb. 7.6 ist die Vorgehensweise dafür skizziert.

Ausgangspunkt für den parallelisierten Prozess ist der allgemeine sequentielle Prozess in Abb. 7.2. Durch die Maßnahme der Paketbildung ergeben sich jedoch einige Änderungen auch im *Isight*-Prozess. Ein wichtiges Merkmal ist, dass die Profilerzeugung nicht parallel, sondern sequentiell auf dem Frontend ausgeführt wird. Die Profilerzeugung findet in *Matlab* statt, weil keine Portierung in eine freie Programmiersprache wie beispielsweise *Octave* vorhanden ist. Aus lizenzrechtlichen Gründen kann daher keine Verteilung der Profilerzeugung vorgenommen werden. Da dieser Teil jedoch bei allen Parametrisierungen weniger als zwei Sekunden dauert und somit nur einen kleinen Anteil an der Gesamtdauer einer Entwurfsbewertung hat, ist der dadurch entstehende zeitliche Nachteil begrenzt. Ergebnis der Profilerzeugung sind die Eingabedateien für den CFD-Löser *Mises*, die in einem eindeutig dem jeweiligen *Isight*-Run zuordenbaren Verzeichnis auf dem Frontend gespeichert werden. Anschließend wird der CFD-Job definiert, indem die





**Abb. 7.6:** Parallele, paketweise Ausführung der CFD-Analysen mit der *Sun Grid Engine* (durchgezogene Pfeile markieren den Prozessablauf, gestrichelte Pfeile kennzeichnen Datenströme)

*Isight*-Runnummer, das Verzeichnis mit den eben erzeugten Eingabedateien und das Verzeichnis, in dem *Isight* die Ergebnisdatei erwartet, in eine Datei geschrieben werden, die in einem zentralen Verzeichnis auf dem Frontend liegt.

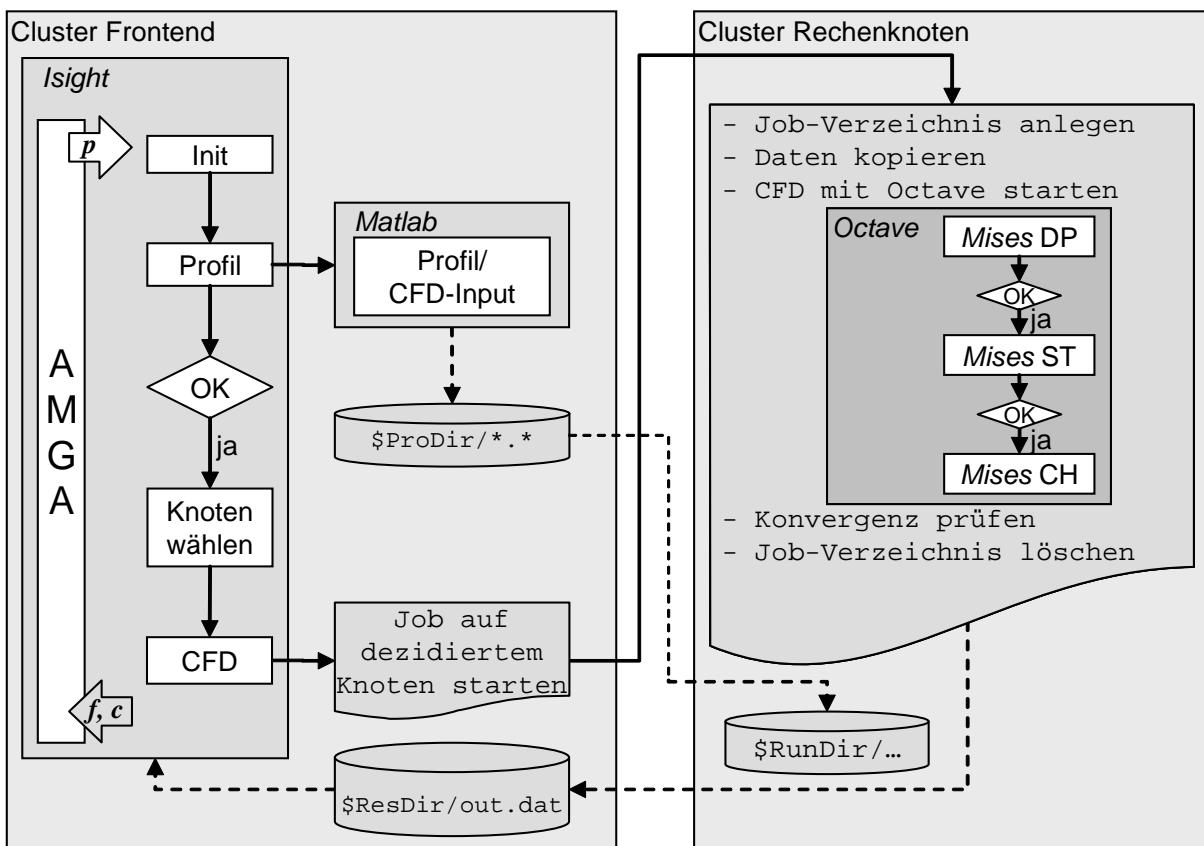
Parallel dazu prüft eine *Isight*-Komponente, ob schon alle Profile für das nächste Paket erzeugt wurden. Sobald das der Fall ist, wird an die *SGE* ein Skript übermittelt, welches die *Isight*-Runnummern des Paketes enthält. Die *SGE* führt das Skript auf einem freien Rechenknoten aus und die eigentliche Aufgabe, die CFD-Analysen der vielen Profile kann starten. Dazu müssen zunächst die Eingabedateien vom Frontend in ein lokales Arbeitsverzeichnis auf dem Knoten kopiert werden. Anschließend erfolgt die CFD-Analyse mit *Mises*, die von *Octave* gesteuert wird. Die Berechnungen für die drei Anströmwinkel (DP, ST, CH) erfolgt seriell, wobei jeweils überprüft wird, ob die vorherige Rechnung erfolgreich war oder nicht. Nach erfolgreicher Berechnung aller drei Fälle oder vorzeitigem Abbruch

wird eine Ergebnisdatei in das entsprechende Verzeichnis auf dem Frontend kopiert, aus der *Isight* unmittelbar darauf die Ziele und Nebenbedingungen ausliest.

Dieser Analyseprozess wird für alle Profile des Pakets parallel ausgeführt, wodurch der Rechenknoten maximal ausgelastet wird. Durch entsprechende Einstellungen in *Isight* kann festgelegt werden, wie viele Runs maximal parallel in *Isight* erzeugt werden, und somit, wie viele Pakete gleichzeitig an die *SGE* übermittelt werden. Damit ist dann auch die Anzahl der verwendeten Knoten auf dem Cluster bestimmt.

### 7.3.4 Parallelisierung mit statischer Knotenwahl

Wie im vorherigen Abschnitt aufgezeigt, entsteht bei der Verwendung eines Schedulers durch die Paketbildung ein vergleichsweise komplizierter Prozessablauf. Dies kann umgangen werden, wenn man auf die dynamische Knotenwahl eines Schedulers verzichtet und stattdessen die einzelnen CFD-Jobs lastunabhängig auf vorher fest ausgesuchte Knoten verteilt.



**Abb. 7.7:** Parallele Ausführung der CFD-Analysen mit statischer Knotenwahl (durchgezogene Pfeile markieren den Prozessablauf, gestrichelte Pfeile kennzeichnen Datenströme)

In Abb. 7.7 ist der Ablauf schematisch dargestellt. Die Optimierung mit *Isight* sowie der Profilaufbau mit *Matlab* finden auf dem Cluster-Frontend statt. Nach dem erfolgreichen Profilaufbau wird zunächst ein Knoten für die CFD-Analyse dieses Profils gewählt. Dabei erfolgt die Wahl rein statisch, also ohne Berücksichtigung der momentanen Clusterauslastung. Es ist also vor Beginn der Optimierung sicherzustellen, dass genügend Ressourcen zur Verfügung stehen und die gewählten Knoten während der Optimierung nicht von anderen Benutzern belastet werden (dafür können diese Knoten beispielsweise in der *SGE* deaktiviert werden). Mittels eines shell-Skriptes wird der CFD-Job auf dem gewählten Knoten über das remote shell (rsh)-Protokoll gestartet. Versuche haben gezeigt, dass bei Verwendung von rsh gegenüber dem secure shell Protokoll (ssh) leichte Vorteile bezüglich der Reaktionsgeschwindigkeit des Clusters beim Einloggen vom Frontend auf die Knoten besteht. Dadurch, dass es nicht möglich ist, sich von außerhalb direkt auf einem Knoten anzumelden, besteht durch die unverschlüsselte Verbindung mit rsh kein Sicherheitsrisiko.

Auf dem Knoten finden die selben Arbeitsschritte wie bei den beiden anderen Methoden statt. Zuerst wird ein lokales, den Job eindeutig kennzeichnendes Arbeitsverzeichnis angelegt, in das anschließend die Inputdateien vom NFS-Laufwerk (Frontend) kopiert werden. Danach erfolgt die CFD-Analyse, die mit *Octave* gesteuert wird. Die Ergebnisdatei wird abschließend in das *Isight*-Verzeichnis des Entwurfs geschrieben und von *Isight* ausgelesen. Da *Isight* nicht auf die Ergebnisse der CFD-Analyse wartet, bevor der nächste Entwurf produziert wird, und die Profilerzeugung vergleichsweise schnell ist, laufen auf diese Art und Weise immer mehrere CFD-Analysen gleichzeitig ab.

### 7.3.5 Vergleich der Parallelisierungen

Die drei beschriebenen Möglichkeiten zur parallelen CFD-Analyse auf dem HPC-Cluster werden mit dem einfachen, nichtparallelisierten Prozess verglichen, siehe Tab. 7.2. Dabei wurde die direkte Parametrisierung des Schaufelprofils verwendet. Natürlich ist der Aufwand, der zur Erstellung des Prozesses betrieben werden muss, bei der seriellen Optimierung am geringsten. Im Gegensatz zu den parallelen Prozessen sind keine zusätzlichen shell-Skripte notwendig, welche die CFD-Jobs verteilen und die gesamte Prozesssteuerung erfolgt ausschließlich durch *Isight*. Wird durch die parallele Ausführung der CFD-Analysen der gesamte Knoten mit acht CPUs ausgelastet, kann bei geringem zusätzlichen Programmieraufwand eine deutliche Beschleunigung des Prozesses erreicht werden. Mit den vorhandenen acht CPU-Kernen und maximal 32 gleichzeitigen Analysen konnte eine Beschleunigung um den Faktor 6 erreicht werden. Die Skalierung, definiert als

$$\text{Skalierung} := \frac{\text{Beschleunigungsfaktor}}{\text{Anzahl CPU-Kerne}},$$

ist in diesem Fall mit 78 % vergleichsweise hoch.

Unter Verwendung der *SGE* als Scheduler steigt der Aufwand rapide an, es kann jedoch kein Geschwindigkeitsvorteil aus der höheren Anzahl der verwendeten Knoten und damit

**Tab. 7.2:** Vergleich verschiedener Parallelisierungsvarianten bei der direkten Profilparametrisierung

	seriell	Knoten	SGE	rsh
Programmieraufwand	–	gering	sehr hoch	hoch
Anzahl CPU-Kerne	1	8	32	32
max. Anzahl <i>Isight</i> -Jobs	1	32	128	128
Dauer	32,2 h	5,2 h	5,8 h	2,2 h
Beschleunigungsfaktor	–	6,2	5,6	14,6
Skalierung	–	78 %	18 %	46 %

auch CPUs gewonnen werden. Die Gesamtdauer ist sogar größer als bei der Verwendung eines einzelnen Knotens, was die Skalierung einbrechen lässt.

Im Gegensatz dazu funktioniert die manuelle Wahl und Verteilung der Aufgaben auf vier Knoten mit zusammen 32 CPU-Kernen sehr gut. Insgesamt ist die Optimierung so fast 15 mal schneller als die serielle Optimierung, was eine völlig neue Qualität im täglichen Gebrauch des Prozesses bedeutet. Die Skalierung ist mit 46 % dabei noch akzeptabel.

Abb. 7.8 zeigt eine Übersicht des Cluster Monitoring Systems *Ganglia*, *MASSIE* u. a. (2004), wobei der Cluster nacheinander mit allen drei Parallelisierungsarten getestet wird. Dargestellt sind das Frontend sowie alle 16 Rechenknoten. Zusätzlich zu den Optimierungen sind auf den Knoten 3, 4 und 13 weitere Anwender aktiv. Die beste Auslastung erzielt die Optimierung auf einem Einzelknoten (großes Diagramm unten in Abb. 7.8). Über den größten Teil der betrachteten Zeit ist der Knoten zu annähernd 100 % ausgelastet. Die Optimierung mit statischer Knotenzuweisung (*rsh*) läuft auf den vier Knoten 8–11 und ist in Abb. 7.8 eckig eingerahmt. Es ist zu erkennen, dass die Auslastung der einzelnen Knoten deutlich geringer ist als beim Einzelknoten. Trotzdem kann zumindest von einer kontinuierlichen Belastung gesprochen werden. Bei der Optimierung mit der *SGE* werden zwar auch maximal vier Knoten gleichzeitig genutzt, insgesamt kommen jedoch alle freien Knoten zur Anwendung. Dadurch kann die Auslastung schlechter beurteilt werden, jedoch kann festgehalten werden, dass deutlich längere Wartezeiten als bei der *rsh*-Parallelisierung auftreten.

Zusammenfassend können insbesondere die Parallelisierung auf einem einzelnen Knoten und die Parallelisierung mit statischer Knotenzuweisung empfohlen werden. Bei der Verwendung der *SGE* steht der Zeitgewinn in keinem Verhältnis zur Anzahl der verwendeten Prozessoren und die beobachtete Verlangsamung der Kommunikation des gesamten Clusters ist nicht akzeptabel.

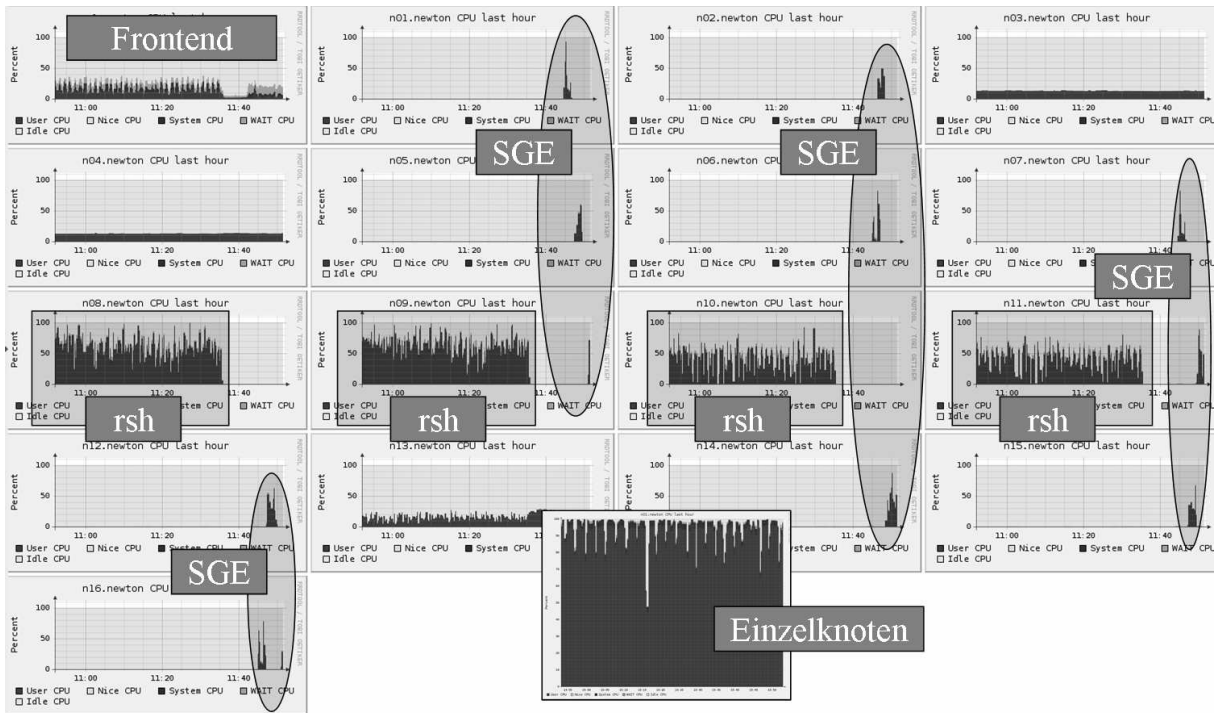


Abb. 7.8: Clusterauslastung bei den verschiedenen Parallelisierungen

## 7.4 Diskussion der Ergebnisse und Vergleich der Parametrisierungen

Im Folgenden wird die aus den Profilittings bekannte Mittelsektion S03 eines Stators der dritten Stufe eines mehrstufigen Hochdruckverdichters aerodynamisch optimiert, wobei die drei beschriebenen Geometrieparametrisierungen miteinander verglichen werden. Mit einer Eintrittsgeschwindigkeit um  $Ma \approx 0,8$ , einer REYNOLDSzahl um  $Re \approx 10^6$  und einer Strömungsumlenkung von  $\alpha_I - \alpha_E \approx 28^\circ$  ist dies eine hochbelastete, transsonische Schaufelsektion.

### 7.4.1 Übersicht und statistischer Vergleich

Bevor ein genauer Blick auf die aus den Optimierungen resultierenden Profile geworfen wird, sollen an dieser Stelle allgemeine Aussagen über die Verläufe der Optimierungen getroffen werden. Tab. 7.3 vergleicht die Statistiken der drei Optimierungen, bei denen jeweils eine andere Parametrisierung eingesetzt wird. Die Einstellungen der Parameter des Optimierers *AMGA* sind dabei jeweils identisch.

Der obere Teil der Tab. 7.3 zeigt die Verletzung der geometrischen Nebenbedingungen und vergleicht die Fähigkeiten der Parametrisierungen, sinnvolle Entwürfe zu erzeugen. Maßgeblich ist am Ende die Anzahl der Entwürfe, die einer CFD-Analyse zugeführt werden. Hier gibt es schon einige Unterschiede zu verzeichnen. So verletzen bei der direkten

**Tab. 7.3:** Vergleich statistischer Größen der Optimierungen (Prozentangaben sind auf die Gesamtzahl der Entwürfe bezogen, Mehrfachangaben sind möglich)

Anzahl		direkt	indirekt	semidirekt
Entwürfe		15000	15000	15000
$ M_{E,y} - M_{E,y}^{\text{ref}}  > \varepsilon_{M_{E,y}}$	[%]	–	7,5	21,3
$ \phi_c  > 0$	[%]	0,4	11,6	1,9
$ \phi_\kappa  > 0$	[%]	7,7	8,5	–
$A < A^{\text{ref}}$	[%]	14,9	19,8	15,4
CFD-Aufrufe	[%]	80,1	76,5	61,3
$ \phi_{nc}  > 0$	[%]	7,2	13,7	8,2
$ \alpha_E^{\text{ref}} - \alpha_E  > \varepsilon_{\alpha_E}$	[%]	27,0	51,2	31,2
$\bar{H}_E^S > \bar{H}_E^{S,\text{ref}}$	[%]	4,3	4,6	2,2
zulässige Entwürfe	[%]	50,3	23,3	27,9
Dauer Profilaufbau	[s]	0,2	0,8	0,9
Dauer Gesamtprozess	[h]	5,3	4,7	6,0

Parametrisierung  $1/5$  der Entwürfe mindestens eine geometrische Nebenbedingung, bei der indirekten etwa  $1/4$  und bei der semidirekten sogar mehr als  $1/3$ . Die Gründe dafür sind höchst unterschiedlich. Bei der direkten Parametrisierung ist die Hauptursache ein zu geringer Flächeninhalt. Bei der indirekten ist dies mit einer ähnlichen Größenordnung zwar auch der Fall, aber es kommen noch weitere Gründe hinzu. So entstehen erstaunlich viele Entwürfe, bei denen sich Saug- und Druckseite kreuzen ( $|\phi_c| > 0$ ). Der Grund hierfür ist die Verwendung weiter Parametergrenzen bei der B-Splinekurve für die erste Ableitung des Rollradius, wodurch der Rollradius selbst ins Negative gehen kann. Zusätzlich scheitern 7,5% der Entwürfe an einer ungünstigen Lage des Mittelpunktes des Hinterkantenkreises ( $|M_{E,y} - M_{E,y}^{\text{ref}}| > \varepsilon_{M_{E,y}}$ ). Diese Nebenbedingung kann bei der direkten Parametrisierung nicht verletzt werden, da die  $y$ -Koordinate des Mittelpunktes Teil der Parametrisierung ist und über die Parametergrenzen sinnvoll begrenzt wird. Bei der semidirekten Parametrisierung verletzen sogar über 21% der Entwürfe diese Forderung. Hier ist die Lage des HK-Kreises Ergebnis der Integration der Saugseitenkrümmung. Offensichtlich ist die Empfindlichkeit durch den sehr großen Betrag der Krümmung an der Vorderkante noch höher, als bei der indirekten Parametrisierung. Als kleiner Ausgleich kommt allerdings zum Tragen, dass durch die Vorgabe der Saugseitenkrümmung über eine B-Splinekurve an dieser Stelle kein Entwurf die entsprechende Nebenbedingung verletzt ( $|\phi_\kappa| < 0$ ). Die Anzahl der Designs mit zu geringem Flächeninhalt ist wieder vergleichbar mit den anderen beiden Methoden.



Von den Entwürfen, die mit *Mises* einer CFD-Analyse unterzogen werden, gibt es bei jeweils etwa 10 % Konvergenzprobleme ( $|\phi_{nc}| > 0$ ), so dass nicht alle benötigten aerodynamischen Kenngrößen berechnet werden können. Bei ungefähr 2...5 % der Profile werden die Forderungen an das Grenzschichtverhalten nicht erfüllt. Der mit Abstand häufigste Grund für unzulässige Entwürfe ist aber die mangelhafte Strömungsumlenkung. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da ein sehr enger Bereich getroffen werden muss. Bei der direkten und bei der semidirekten Parametrisierung fallen so rund 30 % der Schaufelprofile durch das Raster, bei der indirekten sind es über 50 %. Auch wenn davon ein Teil auf die knapp 14 % nicht konvergierten Rechnungen zurückgeht, ist dies immer noch mehr als bei den anderen beiden Methoden. Als eine mögliche Ursache kommt dafür der Metallwinkel  $\beta_E$  an der Hinterkante in Frage, der bei der direkten und semidirekten Methode Entwurfsgröße ist, bei der indirekten jedoch aus der Skelettlinienkrümmung resultiert.

Mit den erläuterten Zusammenhängen folgen daraus die recht unterschiedlichen Zahlen für die zulässigen Entwürfe. Erfolgreichste Methode ist die direkte Parametrisierung mit über 50 %, mit deutlichem Abstand folgt die semidirekte Parametrisierung und mit nur wenig mehr als 23 % die indirekte. Auf die Gesamtdauer der Optimierungen haben diese Unterschiede, genauso wie die Dauer des jeweiligen Profilaufbaus, offensichtlich nur eine geringe Auswirkung. In Tab. 7.3 kann keine eindeutige Korrelation zwischen der Anzahl der CFD-Aufrufe, der Dauer eines einzelnen Profilaufbaus und der Dauer des Gesamtprozesses erkannt werden, was sicherlich mit der starken Parallelisierung der Prozesse begründet werden kann. So hat die semidirekte Parametrisierung beispielsweise einen ähnlich aufwendigen Profilaufbau wie die indirekte Parametrisierung, benötigt aber trotz deutlich weniger CFD-Aufrufe über eine Stunde länger als diese.

In Abb. 7.9 sind die jeweils nicht-dominierten Lösungen der drei Optimierungen dargestellt. Dabei sind sowohl die Verluste im Auslegungspunkt als auch bei Fehlanströmung auf die Werte  $\omega_{DP}^{ref}$ ,  $\gamma^{ref}$  einer manuell „optimierten“ Referenzlösung bezogen. Die Reihenfolge bei der Anzahl der zulässigen Entwürfe scheint sich auf die Güte der PARETOfronten auszuwirken. Die PARETOfront der direkten Parametrisierung liegt eindeutig vor der Front der semidirekten Parametrisierung, die wiederum vor der indirekten Lösung liegt. Für alle drei Fronten kann sowohl eine akzeptable Breite als auch Dichte attestiert werden, wobei diesbezüglich kein eindeutiger Trend zwischen den Methoden festgestellt werden kann. Im Vergleich mit einer früheren Lösung in SOMMER u. a. (2008), die auf einer klassischen Skelettlinienwinkel-Dicken-Parametrisierung sowohl mit als auch ohne Krümmungsnebenbedingungen beruht, können durchweg bessere Ergebnisse erzielt werden.

Alle Entwürfe der drei Paretofronten sind in beiden Kriterien deutlich besser als der Referenzentwurf. Insbesondere der Verlust bei Fehlanströmung kann signifikant verringert werden. Aber auch im Betriebspunkt kann der Verlust auf mindestens 83 % der Referenzlösung reduziert werden. Für einen ausführlichen Vergleich wird jeweils ein Entwurf pro Parametrisierung ausgewählt. Als Auswahlkriterium dient der minimale Abstand zur jeweiligen utopischen Lösung, BESTLE (1994). In Abb. 7.9 sind die ausgewählten Designs mit einem Stern gekennzeichnet und entsprechend ihrer Parametrisierung mit D für die direkte, I für die indirekte und S für die semidirekte Methode benannt. In den folgenden

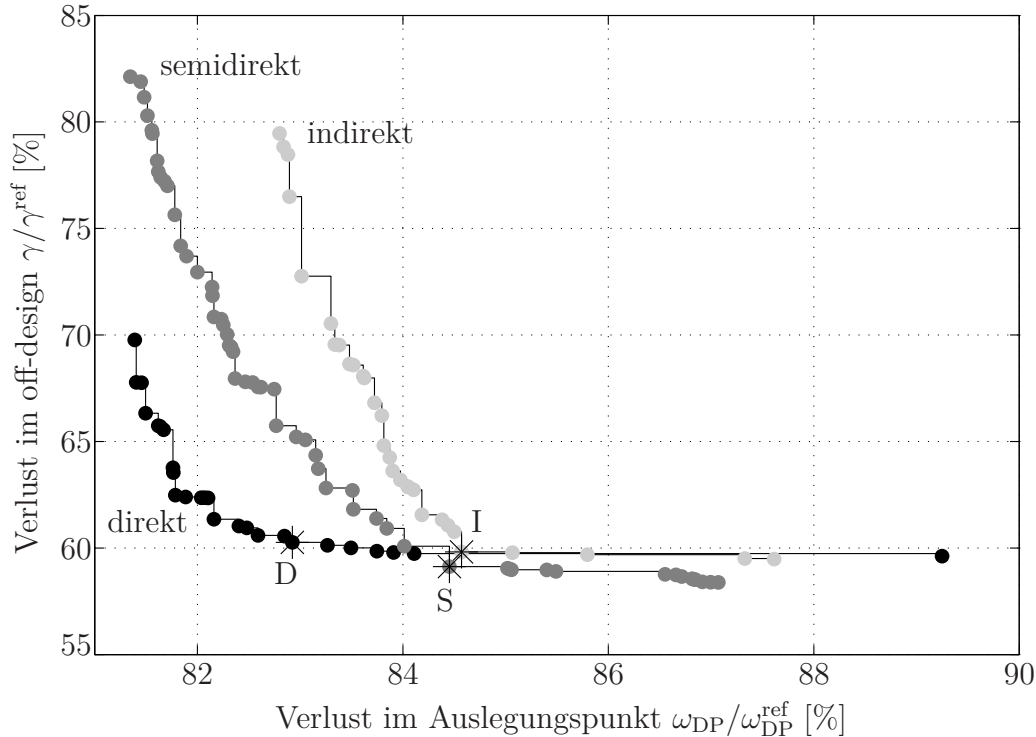


Abb. 7.9: Vergleich der Ergebnisse im Kriterienraum (PARETOdiagramm)

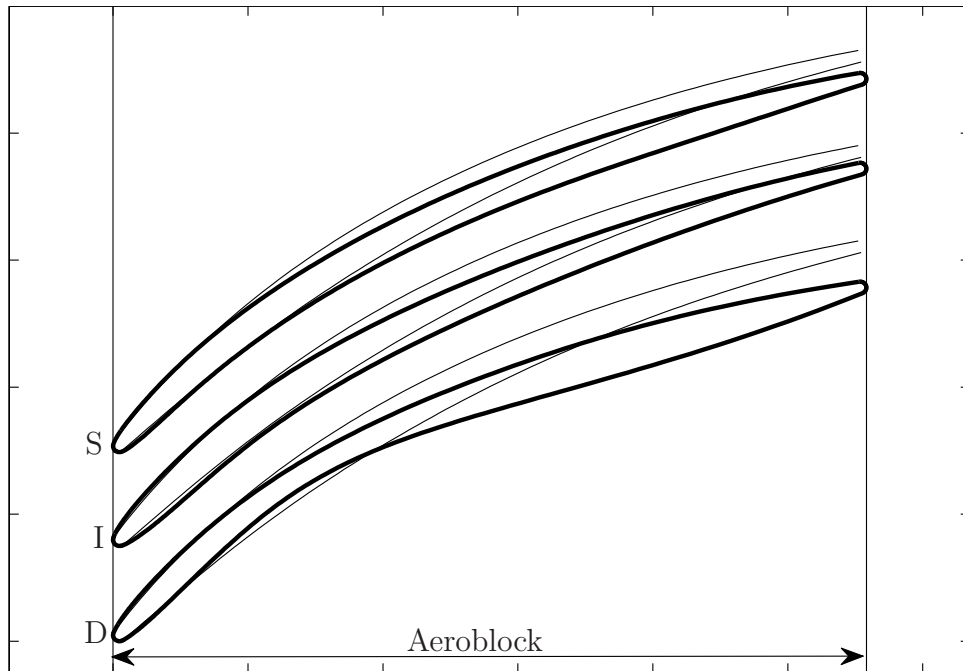
Abschnitten werden diese drei, im Sinne der Mehrzieloptimierung optimalen Entwürfe genauer analysiert und miteinander verglichen.

#### 7.4.2 Vergleich der Profilgeometrien

Als erstes wird die Geometrie der drei Profile betrachtet. Abb. 7.10 zeigt eine Gegenüberstellung der gewählten Entwürfe und einen Vergleich zum Referenzdesign, wobei schon auf den ersten Blick bemerkenswerte Unterschiede, aber auch Gemeinsamkeiten feststellbar sind. Zunächst kann für alle drei Entwürfe festgehalten werden, dass sie, wie in den Parametrisierungen vorgesehen, den vorhandenen Aeroblock perfekt ausfüllen. Damit ist die Grundvoraussetzung für bestmögliche aerodynamische Eigenschaften erfüllt. Weiterhin sind die Konturen augenscheinlich glatt, was unten anhand der Krümmungsverläufe noch weiter untersucht wird. Auffällig ist, dass die drei Entwürfe, gesamt betrachtet, stärker gekrümmt sind als der Referenzentwurf. Es hat also zunächst den Anschein, als würden die optimierten Profile die Strömung deutlich stärker umlenken als das Referenzdesign, was aber nicht der Fall ist, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

In ihrem Aussehen sind sich die Profile S und I ähnlich, während das Design D der direkten Parametrisierung deutlich anders aussieht. Bei den beiden Erstgenannten steigt die Profildicke an der Vorderkante schnell an, bleibt dann über einen weiten Bereich nahezu konstant und fällt anschließend leicht bis zur Hinterkante ab. Beim Entwurf D der direkten Parametrisierung bleibt das Profil sehr lange schlank und erreicht erst in der zweiten

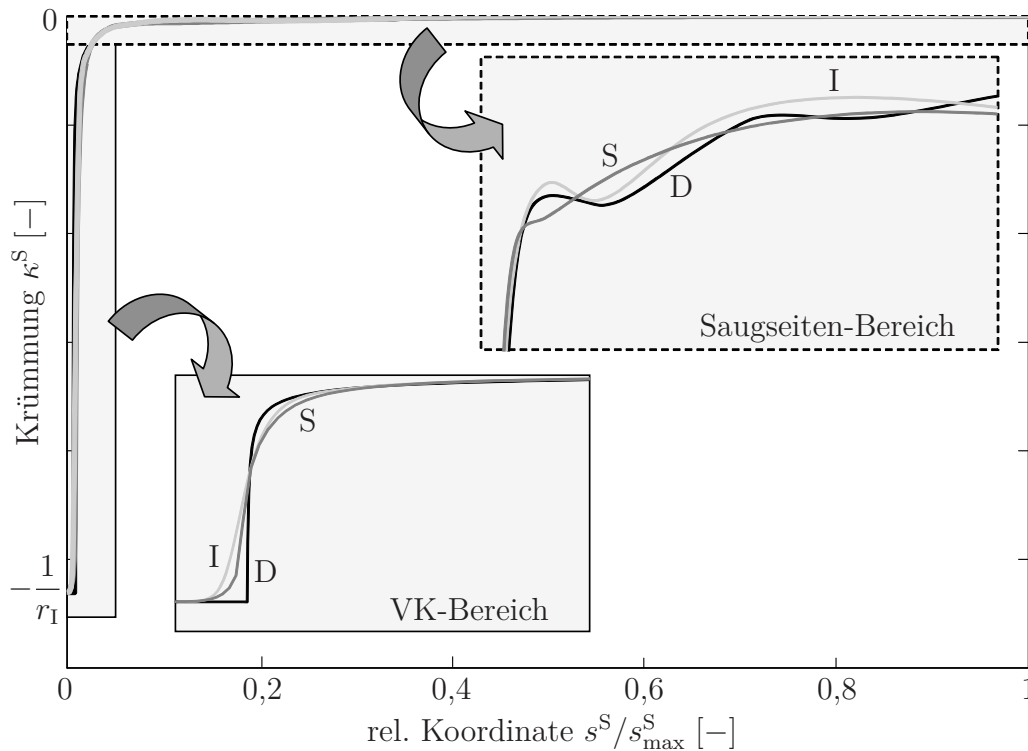




**Abb. 7.10:** Optimierte Schaufelblattprofile im Vergleich zum Referenzentwurf (dünne Kontur)

Profilhälfte seine maximale Dicke, um die geforderte Mindestfläche zu erreichen. An der Hinterkante nimmt die Dicke dann wieder rapide ab. In Verbindung mit der direkten Parametrisierung deckt der Optimierer offensichtlich eine Schwachstelle in der gewählten Problemformulierung auf, nämlich die Flächennebenbedingung als Ersatz für eine „echte“ Strukturforderung. Bei den anderen beiden Optimierungen wird diese Schwäche durch die Parametrisierungen teilweise aufgehoben, da durch die Parametergrenzen bei der Dickenverteilung bzw. der ersten Ableitung des Rollradius solche Designs von vornherein nicht entstehen können.

Bezüglich der Oberflächengüte werden die Krümmungsverläufe der Saugseiten betrachtet, Abb. 7.11. Weil der Wertebereich der Krümmung drei Größenordnungen umfasst, sind zwei Ausschnitte vergrößert dargestellt. Im Bereich der Vorderkante sind die Verläufe der indirekten und semidirekten Parametrisierung ähnlich, bei der direkten Parametrisierung zeigt sich jedoch deutlich die Auswirkung der Vorderkantenkonstruktion auf den Krümmungsverlauf. Dieser ist erst konstant (VK-Kreis) und knickt dann plötzlich ab. Damit ist die Krümmung an dieser Stelle zwar stetig, aber nicht so glatt wie bei den anderen beiden Vorgehensweisen. Anschließend nimmt der Betrag der Krümmung in allen drei Fällen stark ab. Im restlichen Verlauf schwankt sie dann leicht im konstant negativen Bereich. Den glattesten Verlauf in diesem Bereich weist die semidirekte Parametrisierung auf. Dies ist auch nicht verwunderlich, da dieser Verlauf mit einer B-Splinekurve parametrisch erzeugt wird und Teil der Parametrisierung ist. Die anderen beiden Kurven schwanken zwar etwas stärker, da sie jedoch nie positive Werte erreichen, resultieren daraus keine Dellen in der Profilgeometrie.

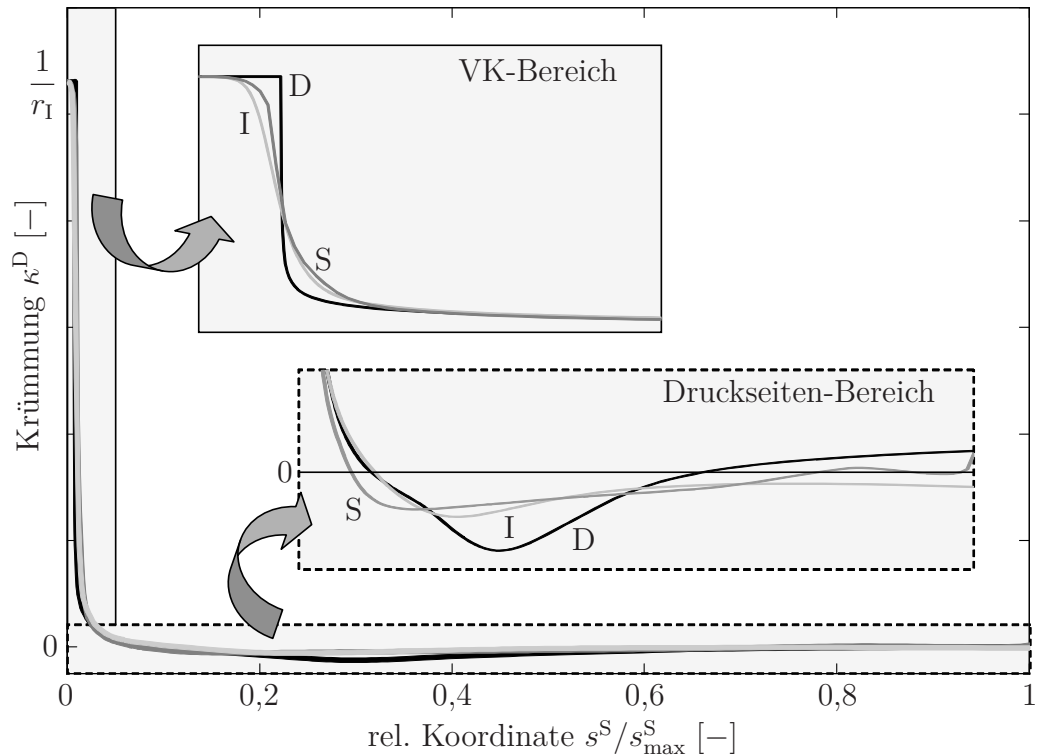


**Abb. 7.11:** Vergleich der Krümmung der Saugseiten der direkten (schwarz), semidirekten (dunkelgrau) und indirekten Parametrisierung (hellgrau)

Für die Krümmungsverläufe der Druckseiten in Abb. 7.12 können nahezu identische Aussagen getroffen werden. Auch hier ist der Knick im Verlauf der direkten Parametrisierung klar erkennbar, während die beiden anderen Kurven glatt sind. Im restlichen Verlauf liegen die Kurven zwar auch relativ dicht beieinander, jedoch kommt es bei der direkten (D) und semidirekten (S) Parametrisierung zu Vorzeichenwechseln der Krümmung. Bei der direkten Methode ist dies noch vergleichsweise harmlos, da hier die Krümmung im gesamten hinteren Bereich positiv und dadurch die Druckseite, wie auch in Abb. 7.10 ersichtlich, konvex, also nach außen gekrümmt ist, wodurch die Dicke schneller abgebaut wird. Bei der semidirekten Parametrisierung ist dies kritischer zu beurteilen, da die Krümmung vor der Hinterkante dreimal das Vorzeichen wechselt, wodurch es an dieser Stelle zu einer kleinen Beule in der Druckseite kommt. Die Krümmung der Saugseite bei der indirekten Parametrisierung I weist hier die geringsten Schwankungen auf und ist im hinteren Bereich der Kurve stets negativ. Dadurch ist die Druckseite sehr glatt und im kompletten hinteren Bereich konkav, also nach innen gebeugt.

### 7.4.3 Vergleich der aerodynamischen Eigenschaften

Im vorherigen Abschnitt sind die teilweise signifikanten Unterschiede in den Geometrien beschrieben. An dieser Stelle sollen nun die Auswirkungen auf die aerodynamischen Eigenschaften untersucht werden. Dafür zeigt Tab. 7.4 zunächst die berechneten Werte für



**Abb. 7.12:** Vergleich der Krümmung der Druckseiten der direkten (schwarz), semidirekten (dunkelgrau) und indirekten Parametrisierung (hellgrau)

die aerodynamischen Nebenbedingungen und Ziele, erneut bezogen auf die Grenzen bzw. den Referenzentwurf.

Alle drei Entwürfe versuchen, den Flächeninhalt zu minimieren, und liegen somit dicht an der unteren Grenze  $A^{\text{ref}}$ , die durch den Referenzentwurf vorgegeben ist. Der Grenzschichtformfaktor  $\bar{H}_E^S$  ist in allen Fällen weit unterhalb seines Grenzwertes und stellt demnach eine einfach einzuhaltende Nebenbedingung dar. Bei der Strömungsumlenkung ist auffällig, dass die Entwürfe D und S die Strömung stärker umlenken als der Zielwert vorschreibt. Trotzdem ist in beiden Fällen der Verlust  $\omega_{\text{DP}}$  geringer als beim Entwurf I, der eine geringe, aber zulässige Minderumlenkung aufweist. Der Verlust  $\gamma$  bei Fehlanströmung ist bei den drei Entwürfen nahezu identisch.

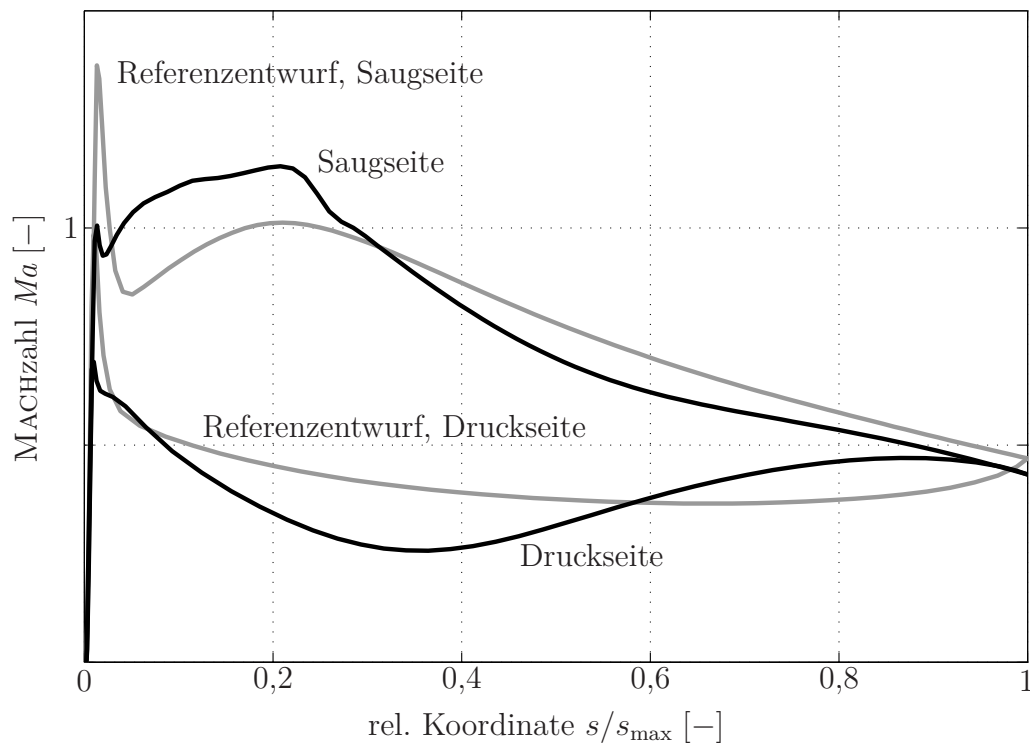
Wichtiges Auslegungskriterium sind geeignete Geschwindigkeitsfelder an den Profelseiten. Als Bewertungsgrundlage können dafür die Verlaufskurven für die MACHzahlen dienen, die deshalb für jedes gewählte Design extra besprochen werden. Als ideal gelten für transsonische Verdichterschaufeln nach HOBBS u. WEINGOLD (1984) Verläufe, die nachfolgende Eigenschaften aufweisen:

- kontinuierliche Beschleunigung bis zur maximalen MACHzahl der Saugseite,
- die maximale MACHzahl soll kleiner als 1,3 sein,
- kontinuierliche Abnahme der MACHzahl vom Maximum bis zur Hinterkante,
- nahezu konstanter MACHzahlverlauf auf der Druckseite.

**Tab. 7.4:** Vergleich der aerodynamischen Kennzahlen ausgesuchter Entwürfe

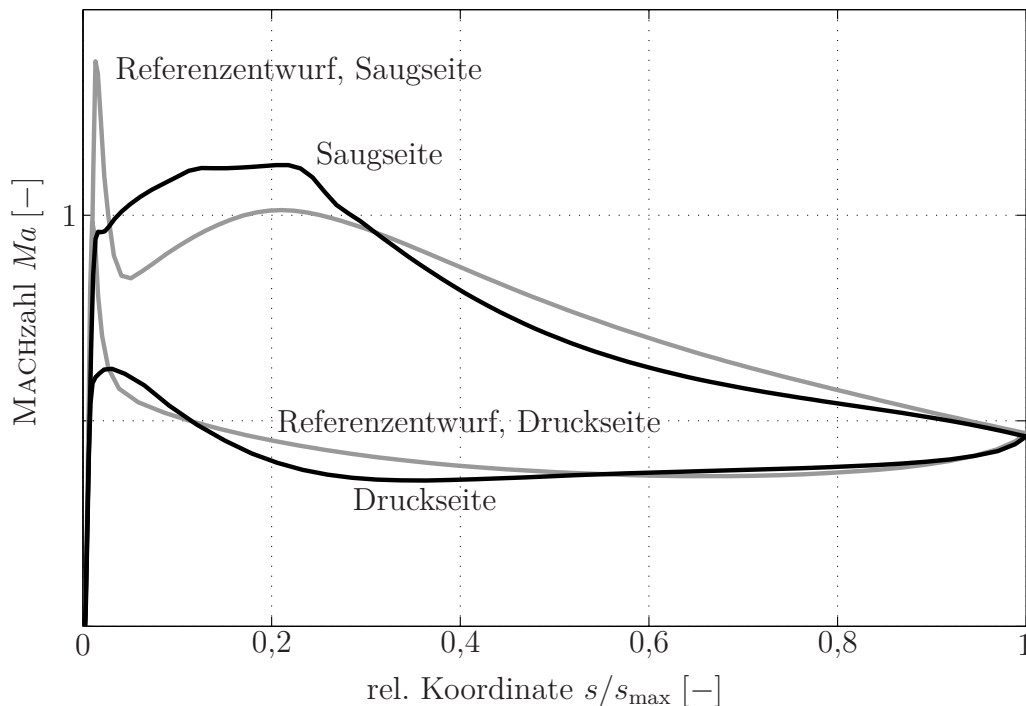
		D	I	S
$(A - A^{\text{ref}})/A^{\text{ref}}$	[%]	3,4	2,5	1,6
$(\bar{H}_E^S - \bar{H}_E^{S,\text{ref}})/\bar{H}_E^{S,\text{ref}}$	[%]	-26,7	-33,1	-29,0
$(\alpha_E^{\text{ref}} - \alpha_E)/\alpha_E^{\text{ref}}$	[%]	1,4	-0,2	0,9
$(\omega_{\text{DP}} - \omega_{\text{DP}}^{\text{ref}})/\omega_{\text{DP}}^{\text{ref}}$	[%]	-17,1	-15,4	-15,5
$(\gamma - \gamma^{\text{ref}})/\gamma^{\text{ref}}$	[%]	-39,7	-40,2	-40,9

Die MACHzahlverläufe beim Entwurf D der direkten Parametrisierung sind in Abb. 7.13 gezeichnet. Zum Vergleich sind in hellgrauer Farbe die Kurven des Referenzentwurfs abgebildet. Auf der Saugseite fällt zunächst ins Auge, dass die starke Überhöhung der MACHzahl an der Vorderkante erheblich verringert werden kann. Nichtsdestotrotz verbleibt eine kleine Spitze, wodurch keine kontinuierliche Beschleunigung bis zum Maximum erreicht wird. Ohne aus Geheimhaltungsgründen genaue Zahlenangaben machen zu können, kann festgestellt werden, dass die zweite Forderung klar eingehalten wird, obwohl hier das Referenzdesign einen deutlich geringeren Wert aufweist. Auch der restliche Verlauf bis zur Hinterkante entspricht den Vorstellungen. Beim Vergleich der beiden Kurven für die MACHzahlverläufe der Druckseiten sind ebenfalls Unterschiede festzustellen. Während das Referenzdesign den gewünschten fast konstanten Verlauf aufweist, schwankt

**Abb. 7.13:** Verlauf der MACHzahl bei der direkten Parametrisierung D

die Geschwindigkeit auf der Druckseite bei der direkten Parametrisierung merklich. Eine weitere Eigenart ist, dass sich an der Hinterkante die Kurven von Saug- und Druckseite stark nähern, also die Geschwindigkeiten fast gleich sind.

Die MACHzahlkurve der Saugseite beim Entwurf I der indirekten Parametrisierung in Abb. 7.14 ist fast identisch mit der Kurve der vorherigen Parametrisierung. Allerdings tritt die kleine Spitze an der Vorderkante nicht mehr auf. Hier wirkt sich anscheinend die nochmals glattere mathematische Formulierung der Parametrisierung positiv aus. Im Vergleich zur direkten Parametrisierung kann zusätzlich festgehalten werden, dass die maximale Geschwindigkeit etwas geringer ausfällt. Die MACHzahl an der Druckseite ist hier wesentlich konstanter als in Abb. 7.13.



**Abb. 7.14:** Verlauf der MACHzahl bei der indirekten Parametrisierung I

Ähnliches kann auch bei den Kurven für die semidirekte Parametrisierung S gesagt werden, Abb. 7.15. Auch hier fehlen bei Saug- und Druckseite die kleinen Spitzen an der Vorderkante und der Geschwindigkeitsverlauf der Druckseite ist relativ konstant. Die Region um den Maximalwert der MACHzahl an der Saugseite ist etwas spitzer als bei den vorherigen beiden Methoden und bildet kein Plateau aus. Auch fällt die Geschwindigkeit danach für einen kurzen Bereich relativ stark ab, um dann ähnlich flach auszulaufen wie in den beiden anderen Diagrammen.

Abschließend werden in Abb. 7.16 die Verlustpolaren der drei ausgesuchten Entwürfe mit der Polaren des Referenzentwurfs verglichen. Es ist erkennbar, dass alle drei optimierten Designs bezüglich des aerodynamischen Druckverlusts deutlich besser sind als der manuell erzeugte Referenzentwurf R. Auch wird deutlich, dass die drei Designs im Prinzip über den größten Bereich fast identisch sind. Lediglich am linken Rand, also bei zu geringen

Anströmwindeln, sind größere Unterschiede zu erkennen, wobei hier die indirekte Parametrisierung I deutlich besser, also bei noch geringeren Verlusten, arbeitet als die Profile der direkten und indirekten Parametrisierungen. Im Gegensatz zum Referenzentwurf arbeiten die drei optimierten Profile im gesamten interessierenden Bereich  $\alpha_I^{\text{CH}} \leq \alpha_I \leq \alpha_I^{\text{DP}}$  mit fast gleich großem Verlust wie im Entwurfspunkt. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die drei optimierten Entwürfe die Anforderungen voll und ganz erfüllen und dabei deutlich bessere aerodynamische Eigenschaften aufweisen als das Referenzprofil.

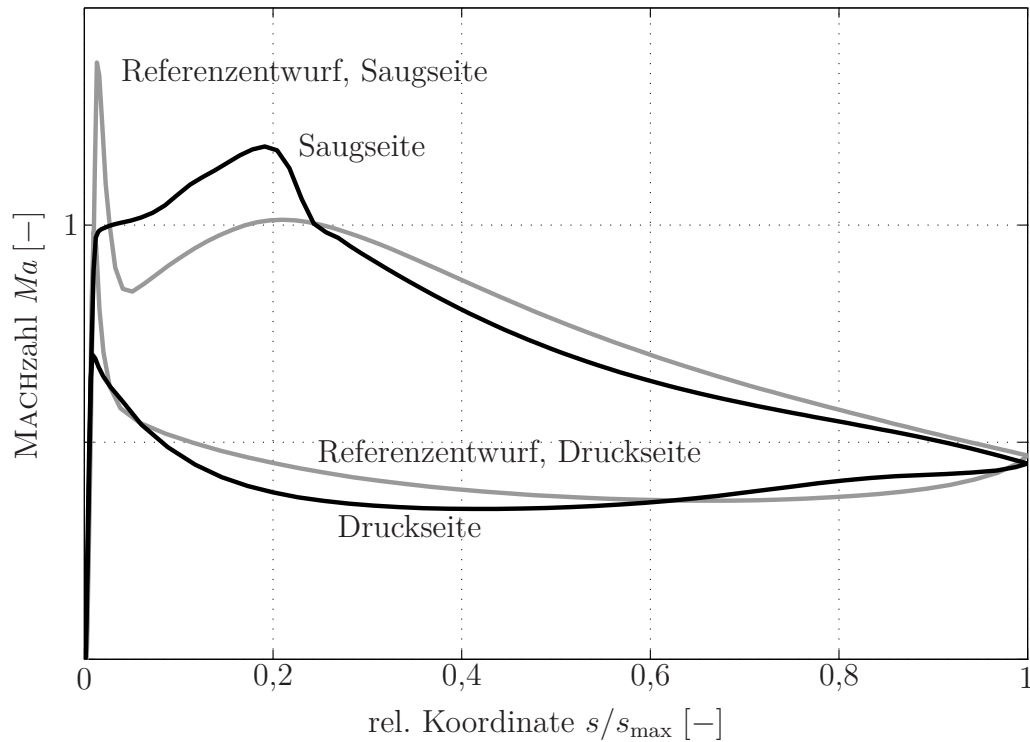
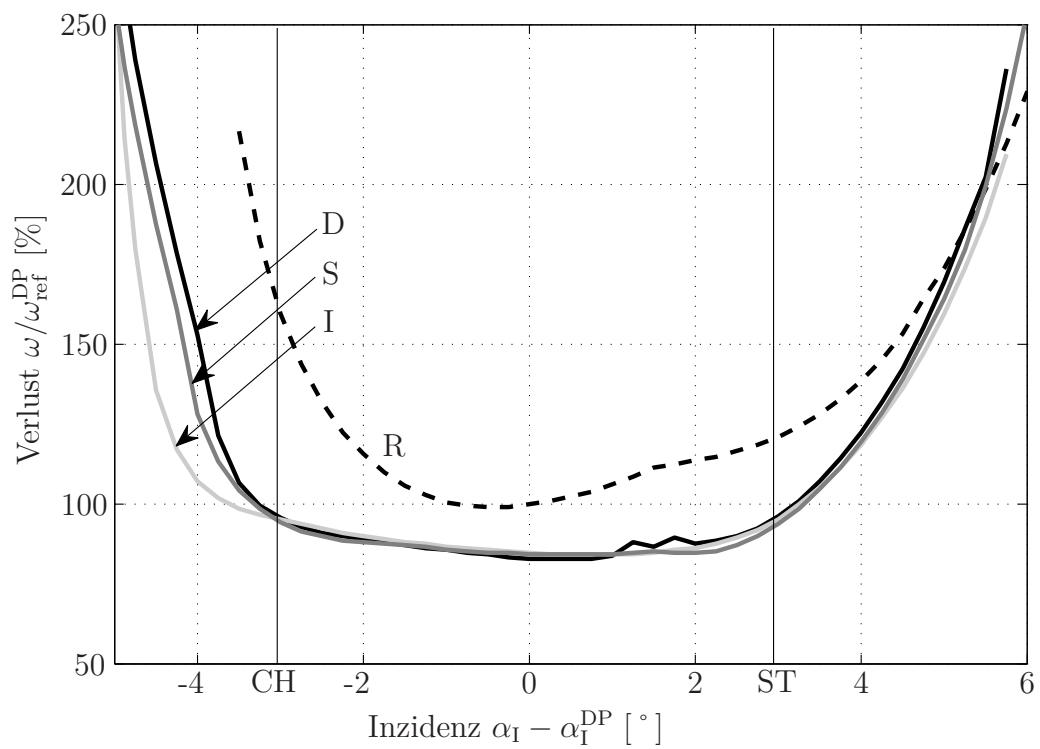


Abb. 7.15: Verlauf der MACHzahl bei der semidirekten Parametrisierung S



**Abb. 7.16:** Verlustpolaren von direkter (D), semidirekter (S) und indirekter (I) Parametrisierung im Vergleich zum Referenzentwurf R





## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung und systematische Untersuchung von parametrischen Geometriemodellen für die Erzeugung ebener Verdichterschaukelprofile innerhalb vollständig automatisierter Optimierungsprozesse. Dabei liegt das Hauptaugenmerk auf einer krümmungsstetigen Formulierung der Profilkontur, um möglichst glatte Profile mit besten aerodynamischen Eigenschaften erhalten zu können. Drei sehr unterschiedliche Parametrisierungen zeigen Möglichkeiten auf, wie die Krümmung der Profelseiten bei unterschiedlichem mathematischen Aufwand berücksichtigt werden kann. Damit das Wesen der Parametrisierungen besser verstanden werden kann, erfolgt eine Klassifizierung der bekannten Strategien zur Profilerzeugung in direkte, indirekte und semidirekte Methoden, basierend auf dem parametrisierten Objekt bzw. der parametrisierten Größe.

Die erste Möglichkeit basiert auf der bekannten und oft verwendeten Erzeugung des Schaukelprofils aus B-Splinekurven. Hierbei werden nur Saug- und Druckseite aus B-Splines erzeugt, während Vorder- und Hinterkante als Kreissegmente dargestellt werden. Da die Kontur direkt abgebildet wird, wird diese Methode in der vorliegenden Arbeit als direkte Parametrisierung bezeichnet. Die Verbindung des Vorderkantenkreises mit den beiden Profelseiten wird krümmungsstetig ausgeführt, was eine positive Auswirkung auf die Umströmung an diesen Stellen hat. Insgesamt ist dies eine relativ einfache Möglichkeit, mit geringem mathematischen und numerischen Aufwand strömungsgünstige Profile zu erzeugen. Negativ ist die Tatsache, dass umfangreiche Nebenbedingungen notwendig sind, wenn bestimmte Profileigenschaften eingehalten werden sollen.

Die zweite vorgestellte Methode ist eine weiterentwickelte Variante der klassischen Skelettlinie-Dicke-Parametrisierung. Hier wird die Kontur indirekt über zwei Hilfsgrößen erzeugt, weshalb dieser Profilaufbau als indirekte Parametrisierung bezeichnet wird. Eine Besonderheit in dieser Arbeit ist, dass die Skelettlinie nicht wie üblich als B-Splinekurve abgebildet oder aus ihrer Tangentialwinkelverteilung berechnet wird, sondern dass sie aus ihrer natürlichen Gleichung, also dem Krümmungsverlauf entsteht. Dadurch wird die Skelettlinie besonders glatt. Saug- und Druckseite inklusive der Vorder- und Hinterkante werden über einen entlang der Skelettlinie abrollenden Kreis mit variablem Radius erzeugt. Diese als Rollradius oder Rolling-Ball bezeichnete Methode erschafft völlig automatisch eine krümmungsstetige Vorderkante und eine tangentialstetige Hinterkante und mithin eine gewünscht glatte Kontur. Der Preis hierfür ist jedoch ein mathematisch und numerisch

relativ hoher Aufwand, da sowohl Skelettlinie als auch Rollradius durch numerische Integration eines Differentialgleichungssystems erst berechnet werden müssen.

Als dritte Methode wird eine semidirekte Parametrisierung entwickelt. Semidirekt bedeutet hier, dass die Saugseite einschließlich der saugseitigen Vorderkante quasi direkt aus ihrer natürlichen Gleichung berechnet wird, während die Druckseite indirekt durch Superposition einer Dickenverteilung auf die Saugseite entsteht. Durch die Bestimmung der Saugseite aus ihrer vorgegebenen Krümmung entstehen höchst glatte und aerodynamisch vorteilhafte Saugseiten, was einen großen Vorteil für das resultierende Geschwindigkeitsfeld hat. Leider ist die Erzeugung einer korrekten Druckseite äußerst kompliziert, da Vorderkantenbereich und restliche Druckseite getrennt erzeugt werden müssen, um sinnvolle Schaufelprofile zu bekommen. Die krümmungsstetige Zusammenführung beider Bereiche ist zwar numerisch einfach, der mathematische Aufwand im Vorfeld jedoch sehr hoch. Vorteilhaft an dieser Methode ist, dass durch die Vorgabe eines Dickenverlaufs bereits durch die Parametrisierung sichergestellt werden kann, dass geometrisch sinnvolle Profile erzeugt werden.

In einem aerodynamischen Optimierungsprozess mit zwei gegensätzlichen Entwurfszielen werden die drei Parametrisierungen getestet und miteinander verglichen. Grundlage für die Formulierung sinnvoller Optimierungsziele ist die Verlustpolare eines Schaufelprofils, in der der aerodynamische Druckverlust über dem Anströmwinkel aufgetragen ist. Einerseits soll natürlich der Verlust des Profils in seinem Auslegungspunkt gering sein, andererseits soll das Profil auch in einem möglichst großen Bereich anderer Anströmwinkel bei geringem Verlust arbeiten. Hinzu kommen Nebenbedingungen wie das Einhalten eines vorgegebenen Abströmwinkels und Grenzschichtformfaktors. Die Berechnung der aerodynamischen Größen erfolgt mittels des 2D-CFD-Programms *Mises*, wobei eine Funktionsauswertung etwa 20 bis 40 Sekunden beansprucht. Um bei den vielen notwendigen Rechnungen trotzdem möglichst kurze Prozesse zu erhalten, erfolgt die Optimierung auf einem Hochleistungs-Rechencluster, was eine intelligente Parallelisierung des Prozesses notwendig macht. Vergleichende Vorbetrachtungen zeigen, dass bei Prozessen dieser Art, wo die einzelne Funktionsauswertung in Form der CFD-Analyse nur eine kurze Zeit beansprucht, eine manuelle Verteilung der Funktionsauswertungen sehr viel schneller ist, als die Benutzung eines Schedulers.

Alle drei Parametrisierungen können in einem beeindruckenden Maße ihre Eignung für die Verwendung in solchen Optimierungsprozessen zeigen, was der Vergleich mit einem manuell erzeugten Referenzdesign zeigt. Für jede Parametrisierung finden sich optimale Entwürfe, die beide Ziele deutlich verbessern und somit in jeder Hinsicht bessere Designs darstellen. Während die untersuchten aerodynamischen Kennzahlen für alle drei Parametrisierungen durchaus vergleichbar sind, unterscheidet sich die Form der Profile deutlich. Insbesondere das ausgesuchte Profil der direkten Parametrisierung erreicht seine sehr geringen Verluste durch eine ungewöhnliche, im vorderen Bereich sehr schlanke Form. Bei den beiden anderen Parametrisierungen tritt dieses Phänomen nicht auf, da hier über die Dicken- bzw. Rollradiusverteilung solche Formen vermieden werden.

---

Nicht verschwiegen werden darf die Tatsache, dass hier nur aerodynamische Betrachtungen durchgeführt werden. An eine Schaufel werden jedoch auch wichtige strukturelle Forderungen gestellt, die unabdingbar eingehalten werden müssen. Sinnvoll ist also die Weiterentwicklung der vorgestellten Parametrisierungen auf das räumliche Schaufelblatt, das die Grundlage für strukturelle Berechnungen darstellt. Weiterhin ist die 3D-Schaukel für räumliche CFD-Analysen notwendig, in denen 3D-Strömungseffekte an den Schaufelblättern untersucht werden.



# Literaturverzeichnis

ABBOTT u. VON DOENHOFF (1959)

I. H. Abbott, A. E. von Doenhoff: *Theory of Wing Sections: Including a Summary of Airfoil Data*. Mineola, NY: Dover Publications, 1959

ACARE (2001)

ACARE: European Aeronautics: A Vision for 2020 – Report of the Group of Personalities / ACARE: Advisory Council for Aeronautics Research in Europe. Luxemburg: Amt für Veröffentlichungen der Europäischen Union, 2001

ACARE (2008)

ACARE: 2008 Addendum to the Strategic Research Agenda – Forschungsbericht / ACARE: Advisory Council for Aeronautics Research in Europe. Luxemburg: Amt für Veröffentlichungen der Europäischen Union, 2008

AHMED (2005)

R. AHMED: Auslegung vielstufiger Axialverdichter mit parallelen Evolutionsstrategien und neuronalen Netzen – Fortschrittsbericht (Reihe 7, Nummer 469). Düsseldorf: VDI, 2005

ALT (2002)

H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung*. 4., überarb. und erweitt. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2002

BAUKE u. MERTENS (2006)

H. Bauke, S. Mertens: *Cluster Computing*. Berlin: Springer-Verlag, 2006

BENDER u. BRILL (2006)

M. Bender, M. Brill: *Computergrafik*. 2., überarb. Auflage. München: Hanser, 2006

BESTLE (1994)

D. Bestle: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Berlin: Springer-Verlag, 1994

BLASCHKE u. LEICHTWEISS (1973)

W. Blaschke, K. Leichtweiß: *Elementare Differentialgeometrie*. 5., vollst. Neubearb. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1973

BRÄUNLING (2001)

W. J. G. Bräunling: *Flugzeugtriebwerke*. Berlin: Springer-Verlag, 2001

BRONSTEIN u. a. (2005)

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt/ M.: Harri Deutsch, 2005

BÜCHE (2003)

D. Büche: *Multi-Objective Evolutionary Optimization of Gas Turbine Components*. PhD Thesis, Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule, 2003

BÜCHE u. a. (2003)

D. Büche, G. Guidati, P. Stoll: Automated Design Optimization of Compressor Blades for Stationary, Large-Scale Turbomachinery. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo*. Atlanta, GA, 2003 (GT2003-38421)

BURG u. a. (1992)

K. Burg, H. Haf, F. Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure*. Band I Analysis. 3., durchges. Auflage. Stuttgart: Teubner, 1992

BURG u. a. (1994)

K. Burg, H. Haf, F. Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure*. Band IV Vektoranalysis und Funktionentheorie. 2., durchges. Auflage. Stuttgart: Teubner, 1994

BURKHARDT u. KÄRCHER (2011)

U. Burkhardt, B. Kärcher: Global Radiative Forcing from Contrail Cirrus. *Nature Climate Change* 1 (2011), S. 54–58

CASEY (1983)

M. V. Casey: A Computational Geometry for the Blades and Internal Flow Channels of Centrifugal Compressors. *ASME Journal of Engineering Gas Turbines Power* 105 (1983), S. 288–295

CASTILLO u. a. (2004)

L. Castillo, X. Wang, W. K. George: Separation Criterion for Turbulent Boundary Layers Via Similarity Analysis. *ASME Journal of Fluids Engineering* 126 (2004), S. 297–304

CHOI u. HAN (2002)

H. I. Choi, Ch. Y. Han: The Medial Axis Transform. In: G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim (Hrsg.): *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: Elsevier, 2002, S. 451–471

CRESCENDO CONSORTIUM (2010)

CRESCENDO Consortium: Collaborative and Robust Engineering Using Simulation Capability Enabling Next Design Optimisation – Periodic Report / CORDIS: Siebtes Rahmenprogramm (RP7-234344). Brüssel: Europäische Kommission, 2010

CUMPSTY (2004)

N. Cumpsty: *Compressor Aerodynamics*. Reprint Edition. Malabar, FL: Krieger Publishing Company, 2004

DASSAULT SYSTÈMES (2010)

Dassault Systèmes: *Isight 4.5 Getting Started Guide*. Vélizy-Villacoublay, 2010

- DEB u. a. (2002)  
K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan: A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation* 6 (2002), S. 182–197
- DEUFLHARD u. HOHMANN (2008)  
P. Deuffhard, A. Hohmann: *Numerische Mathematik 1: Eine algorithmisch orientierte Einführung*. 4., überarb. u. erw. Auflage. Berlin: Walter de Gruyter, 2008
- DLR (2008)  
DLR: Abheben mit Biofuels. *SciTechs - Magazin für Technologietransfers, Spektrum der Wissenschaft, VDI nachrichten* 01 (2008), S. 12
- DO CARMO (1976)  
M. P. Do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976
- DORMAND u. PRINCE (1980)  
J. R. Dormand, P. J. Prince: A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6 (1980), S. 19–26
- DRELA (1986)  
M. Drela: *Two-dimensional Transonic Aerodynamic Design and Analysis Using the Euler Equations*. PhD Thesis, Boston: Massachusetts Institute of Technology, 1986
- DRELA (1998)  
M. Drela: Pros & Cons of Airfoil Optimization. In: D. A. Caughey, M. M. Hafez (Hrsg.): *Frontiers of Computational Fluid Dynamics 1998*. Singapore: World Scientific, 1998, S. 363–381
- DUTTA u. BESTLE (2006)  
A. K. Dutta, D. Bestle: 2D-Schaufelprofilanalyse mit MISES – Forschungsbericht FB-11. Cottbus: Brandenburgische Technische Universität, 2006
- DUTTA u. a. (2007)  
A. K. Dutta, P. M. Flassig, D. Bestle: Multi-Objective Blade Design Using a Quasi-3D Non-Dimensional Parameterization Approach. *Proceedings of CEAS, CEAS-2007-219* (2007)
- EATON u. a. (2008)  
J. W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg: *GNU Octave Manual Version 3*. Bristol: Network Theory Ltd., 2008
- EGARTNER (1999)  
W. Egartner: Formoptimierung von Verdichter- und Turbinenschaufeln – Abschlussbericht zu AG TURBO 1, Turbotech 2 (Vorhaben 1.111) / Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen. Heidelberg: Ruprecht-Karls-Universität, 1999
- EGARTNER (2000)  
W. Egartner: Working Range Optimization for Turbine and Compressor Blading. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 120 (2000), S. 59–65

ELDRED u. a. (2000)

M. S. Eldred, W. E. Hart, B. D. Schimel, B. G. van Bloemen Waanders: Multilevel Parallelism for Optimization on MP Computers: Theory and Experiment. In: *Proceedings of the 8<sup>th</sup> AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 2000 (AIAA-2000-4818)

EUROPÄISCHE KOMMISSION (2011)

Europäische Kommission: Flightpath 2050. Europe's Vision for Aviation. Maintaining Global Leadership & Serving Society's Needs – Report of the High Level Group on Aviation Research / Directorate-General for Research and Innovation and Directorate-General for Mobility and Transport. Luxemburg: Europäische Kommission, 2011

FARIN (1994)

G. Farin: *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design: Eine Praktische Einführung*. Braunschweig: Vieweg, 1994

FARIN (2002)

G. Farin: A History of Curves and Surfaces in CAGD. In: G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim (Hrsg.): *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: Elsevier, 2002, S. 1–21

FLASSIG (2007)

P. M. Flassig: Multi-Objective Compressor Blade Optimisation Using a Non-Dimensional Parameterisation Approach. *Proceedings of CEAS, CEAS-2007-220* (2007)

FLASSIG u. a. (2008)

P. M. Flassig, A. K. Dutta, D. Bestle: Robustheits- und zuverlässigkeitsbasierte Mehrkriterien-Optimierung von Verdichterschaufeln. In: *Tagungsband Weimarer Optimierungs- und Stochastiktage*. Weimar, 2008

GODARD u. a. (2008)

A. Godard, S. Burguburu, A. Fourmaux, F. Lebœuf: Design Method of a Subsonic Aspirated Cascade. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 2008 (GT2008-50835)

GRAY (1994)

A. Gray: *Differentialgeometrie: klassische Theorie in moderner Darstellung*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl., 1994

GRIEB (2009)

H. Grieb: *Verdichter für Turbo-Flugtriebwerke*. Berlin: Springer-Verlag, 2009

HERMANN u. a. (1995)

T. Hermann, G. Lukács, T. Várady: Techniques for Variable Radius Rolling Ball Blends. In: M. Dæhlen, T. Lyche, L. L. Schumaker (Hrsg.): *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 1995



HEUSER (2001)

H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*. Band 1. 14., durchges. Auflage. Stuttgart: Teubner, 2001

HOBBS u. WEINGOLD (1984)

D. E. Hobbs, H. D. Weingold: Development of Controlled Diffusion Airfoils for Multistage Compressor Application. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 106 (1984), S. 271–278

HOSCHEK u. LASSER (1989)

J. Hoschek, D. Lasser: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Stuttgart: Teubner, 1989

JACOBS u. a. (1933)

E. N. Jacobs, K. E. Ward, R. M. Pinkerton: The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-density Wind Tunnel – Technical Report (TR-460). Hampton, VA: NACA, 1933

JENNIONS (1994)

I. K. Jennions: Elements of a Modern Turbomachinery Design System. In: *Turbomachinery Design Using CFD*. Neuilly Sur Seine: NATO/ AGARD (Lecture Series LS-195), 1994

KESKIN (2007)

A. Keskin: *Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design*. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Aachen: Shaker Verlag, 2007

KÖLLER u. a. (2000)

U. Köller, R. Mönig, B. Küsters, H.-A. Schreiber: Development of Advanced Compressor Airfoils for Heavy-Duty Gas Turbines - Part I: Design and Optimization. *ASME Journal of Turbomachinery* 122 (2000), S. 397–405

KORAKIANITIS (1993a)

Th. Korakianitis: Hierarchical Development of Three Direct-Design Methods for Two-Dimensional Axial-Turbomachinery Cascades. *ASME Journal of Turbomachinery* 115 (1993), S. 314–324

KORAKIANITIS (1993b)

Th. Korakianitis: Prescribed-Curvature-Distribution Airfoils for the Preliminary Geometric Design of Axial-Turbomachinery Cascades. *ASME Journal of Turbomachinery* 115 (1993), S. 325–333

KORAKIANITIS u. PAPAGIANNIDIS (1993)

Th. Korakianitis, P. Papagiannidis: Surface-Curvature-Distribution Effect on Turbine-Cascade Performance. *ASME Journal of Turbomachinery* 115 (1993), S. 314–324

KOWALEWSKI (1931)

G. Kowalewski: *Vorlesungen über Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen*. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1931

KÜHNEL (2005)

W. Kühnel: *Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten*. 3., überarb. und erw. Auflage. Wiesbaden: Vieweg, 2005

LANGE u. a. (2008)

A. Lange, K. Vogeler, H. Schrapp, C. Clemen: Ein parametrisches Modell für Verdichterschaufeln zur Abbildung von geometrischen Abweichungen in der numerischen Simulation. In: *Tagungsband 1. Dresdner-Probabilistik-Workshop*. Dresden, 2008

LAURIEN u. OERTEL JR. (2009)

E. Laurien, H. Oertel jr.: *Numerische Strömungsmechanik : Grundgleichungen und Modelle – Lösungsmethoden – Qualität und Genauigkeit*. 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009

MAGRAB u. a. (2000)

E. B. Magrab, S. Azarm, B. Balachandran, J. Duncan, K. Herold, G. Walsh: *An Engineer's Guide to MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000

MASSIE u. a. (2004)

M. L. Massie, B. N. Chun, D. E. Culler: The Ganglia Distributed Monitoring System: Design, Implementation, and Experience. *Parallel Computing* 30 (2004), S. 817–840

MATHWORKS (2011)

MathWorks: *Matlab R 2011a Online Documentation*, 2011.  
<http://www.mathworks.com/help/techdoc>

MEAUZÉ (1989)

G. Meauzé: Overview on Blading Design Methods. In: *Blading Design for Axial Turbomachinery*. Neuilly Sur Seine: NATO/ AGARD (Lecture Series LS-167), 1989

NOVELL (2008)

Novell: *SUSE Linux Enterprise Server – Implementierungsleitfaden*, 2008.  
<http://www.novell.com/de-de/documentation/sles10/>

OTTO (2009)

D. Otto: *Ein Beitrag zur interdisziplinären Prozessintegration und automatischen Mehrzieloptimierung am Beispiel einer Verdichtertrotorschaukel*. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Aachen: Shaker Verlag, 2009

PAPULA (2008)

L. Papula: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Band 1. 11., verbesserte und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2008

PATTERSON u. a. (1988)

D. A. Patterson, G. Gibson, R. H. Katz: A Case for Redundant Arrays of Inexpensive Disks (RAID). In: *Proceedings of the 1988 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, 1988, S. 109–116

PIEGL u. TILLER (1997)

L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*. Berlin: Springer-Verlag, 1997

PRAUTZSCH u. a. (2002)

H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny: *Bézier and B-Spline Techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 2002

PRESSLEY (2001)

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*. London: Springer-Verlag, 2001

QUARTERONI u. a. (2004)

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri: *Numerische Mathematik 2*. Berlin: Springer-Verlag, 2004

ROLLS-ROYCE PLC (2005)

Rolls-Royce plc (Hrsg.): *The Jet Engine*. London: Rolls-Royce plc, 2005

SALOMON (2006)

D. Salomon: *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. New York: Springer-Verlag, 2006

SANGER (1982)

N.L. Sanger: The Use of Optimization Techniques to Design Controlled Diffusion Compressor Blading. *ASME Journal of Engineering Power* 105 (1982), S. 256–264

SANGLIKAR u. a. (1990)

M. A. Sanglikar, P. Koparkar, V. N. Joshi: Modelling Rolling Ball Blends for Computer Aided Geometric Design. *Computer Aided Geometric Design* (1990), S. 399–414

SCHADE u. KUNZ (2007)

H. Schade, E. Kunz: *Strömungslehre*. 3., neu bearbeitete Auflage von F. Kameier und C. O. Paschereit. Berlin: de Gruyter, 2007

SCHLICHTING u. GERSTEN (2006)

H. Schlichting, K. Gersten: *Grenzschicht-Theorie*. Berlin: Springer-Verlag, 2006

SCHÖNE (1975)

W. Schöne: *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte*. Band 6: Differentialgeometrie. 1. Auflage. Leipzig: Teubner, 1975

SCHWARZ u. KÖCKLER (2009)

H. R. Schwarz, N. Köckler: *Numerische Mathematik*. 7., überarb. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009

SIEVERDING u. a. (2004)

F. Sieverding, B. Ribí, M. Casey, M. Meyer: Design of Industrial Axial Compressor Blade Sections for Optimal Range and Performance. *ASME Journal of Turbomachinery* 126 (2004), S. 323–331

SOMMER u. a. (2008)

L. Sommer, P.M. Flassig, A.K. Dutta, D. Bestle: Krümmungs-Nebenbedingungen in der Aerodynamischen Mehrkriterien-Optimierung von Verdichterschaufelprofilen. In: *Tagungsband Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, 2008 (DLRK2008-81195)

SUGIHARA (2002)

K. Sugihara: Voronoi Diagrams. In: G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim (Hrsg.): *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: Elsevier, 2002, S. 429–450

SUN MICROSYSTEMS, INC. (2007)

Sun Microsystems, Inc.: *Sun N1 Grid Engine 6.1 User's Guide*. Santa Clara, CA, 2007

TIWARI u. a. (2008)

S. Tiwari, P. Koch, G. Fadel, K. Deb: AMGA: An Archive-Based Micro Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization. In: *Proceedings of the 10th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO)*. Atlanta, GA, 2008, S. 729–736

TRAUPEL (1988)

W. Traupel: *Thermische Turbomaschinen*. Band 1: Thermodynamisch-strömungstechnische Berechnung. 3., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1988

VAN DEN BRAEMBUSSCHE (1999)

R. A. Van den Braembussche: Application of Inverse Methods to 3D Turbine and Compressor Blade Design. In: *Turbomachinery Blade Design Systems*. Rhode-St-Genèse: Von Karman Institute for Fluid Dynamics (VKI Lecture Series 1999-02), 1999

VAN DER VELDEN u. KOCH (2010)

A. Van der Velden, P. Koch: Isight Design Optimization Methodologies. In: D. Furrer, S.L. Semiatin (Hrsg.): *ASM Handbook Volume 22B: Metals Process Simulation*. Materials Park, OH: ASM International, 2010, S. 614–624

WALTER (1997)

W. Walter: *Analysis*. Band 1. 4., korrigierte Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1997

WILSON u. KORAKIANITIS (1998)

D. G. Wilson, Th. Korakianitis: *The Design of High Efficiency Turbomachinery and Gas Turbines*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998

WU (1952)

C.-H. Wu: A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types – Technical Note (TN 2604) / Lewis Flight Propulsion Laboratory. Brook Park, OH: NACA, 1952

YOUNGREN (1991)

H. Youngren: *Analysis and Design of Transonic Cascades with Splitter Vanes*, Boston: Massachusetts Institute of Technology, Master Thesis, 1991

YOUNGREN u. DRELA (1991)

H. Youngren, M. Drela: Viscous/Inviscid Method for Preliminary Design of Transonic Cascades. In: *27<sup>th</sup> Joint Propulsion Conference (AIAA/SAE, ASME, ASEE)*, AIAA-91-2364. Sacramento, CA, 1991

YOUNGREN u. DRELA (1998)

H. Youngren, M. Drela: *A User's Guide to MISES 2.53*. MIT Computational Aerospace Sciences Laboratory, Cambridge, 1998

ZABEL (2001)

F. Zabel: Wirkung von Abgasen in der Atmosphäre. In: G. Baumbach, U. Zuberbühler, S. Parakenings (Hrsg.): *Luftreinhaltung bei Kraftfahrzeugen und Flugzeugen - Jahresbericht 2000/2001*. Stuttgart: Arbeitsgruppe Luftreinhaltung der Universität Stuttgart - ALS, 2001, S. 54–63