

# Drei Klassifikationsprobleme für Varietäten mit Toruswirkung der Komplexität eins

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Math.  
Hendrik Süß

geboren am 13.06.1978 in Berlin

Gutachter: Prof. Dr. Bernd Martin  
Gutachter: Prof. Dr. Klaus Altmann  
Gutachter: Dr. Ivan Arzhantsev  
Gutachter: Prof. Dr. Victor Batyrev

Tag der mündlichen Prüfung: 24.11.2010



## Zusammenfassung

Toruswirkungen auf algebraischen Varietäten eröffnen eine nützliche Verbindung zwischen algebraischer Geometrie auf der einen Seite und Kombinatorik und Konvexgeometrie auf der anderen. Allgemeine Konzepte wie Divisoren oder die Auflösung von Singularitäten übersetzen sich in – häufig einfacher zu verstehende – Pendanten in der konvexen Geometrie.

Inhalt dieser Dissertation ist es, sich diese Verbindung zu Nutze machend, Methoden und Hilfsmittel zu entwickeln um Klassifikationsprobleme für Varietäten mit Toruswirkungen, sogenannte T-Varietäten, bearbeiten zu können.

Eine wichtige Voraussetzung für die Klassifikation von algebraischen Varietäten ist die Beschränkung der auftretenden Singularitäten. Großen Raum in dieser Arbeit nimmt daher das Studium von Singularitäten auf T-Varietäten und deren Auflösung ein. Unverzichtbar dabei ist das Verständnis eigentlicher Abbildungen und Divisoren, denen sich folglich jeweils ein eigenes Kapitel widmet.

In der Arbeit werden drei konkrete Klassifikationsprobleme eingehender betrachtet: die Klassifikation von log-Del-Pezzo-Flächen mit beschränktem Gorenstein-Index, von multigradierten faktoriellen Ringen und von lokal faktoriellen Fano-T-Varietäten vom Picard-Rang eins. Die beiden letztgenannten Probleme sind dabei eng mit einander verbunden. Die betrachteten faktoriellen Ringe sind gerade die Cox-Ringe der Fano-T-Varietäten. Um diesen Zusammenhang herauszuarbeiten, widmet sich ein eigenes Kapitel den Cox-Ringen von T-Varietäten.



# Einleitung

Klassifikationsprobleme spielen seit jeher eine herausragende Rolle in der algebraischen Geometrie. Dabei werden Eigenschaften und Invarianten algebraischer Varietäten soweit eingeschränkt, dass nur eine endliche Anzahl von Isomorphieklassen oder allgemeiner Familien verbleibt, die dann detailliert beschrieben werden können. Besonderes Interesse fand und findet unter anderem die Klassifikation von Fano-Varietäten, das heißt Varietäten mit amplem anti-kanonischen Divisor.

Die Klassifikation von glatten Fano-Flächen, so genannten Del-Pezzo-Flächen, ist klassisch. Der Fall glatter Dreifaltigkeiten wurde von Iskovskikh für den Picard-Rang eins [Isk78] und durch Mori und Mukai für höhere Picard-Ränge [MM86] abschließend behandelt.

In der Zwischenzeit erwies sich die torische Geometrie als ein geeignetes Werkzeug zum Studium von bestimmten Fano-Varietäten und deren Anwendung für die Spiegelsymmetrie [Bat94, BB]. Torische Gorenstein Fano-Varietäten sind inzwischen bis in Dimension fünf vollständig klassifiziert [Bat81, Bat99, KN09]. Neben der Ausweitung der Klassifikation auf höhere Dimensionen ist die Einbeziehung von singulären Fano-Varietäten von einigem Interesse. Entscheidend dabei ist die Einschränkung der zugelassenen Singularitäten, um tatsächlich eine endliche Anzahl von Familien zu erhalten. In der Regel betrachtet man log-terminale Singularitäten mit beschränktem Gorenstein-Index.

Für Flächen mit einem Gorenstein-Index  $\leq 2$  konnten Alekseev und Nikulin eine vollständige Klassifikation angeben [AN89]. Für höhere Indizes gelang das immerhin noch für torische Flächen [Dai09, KKN10]. Für torische Dreifaltigkeiten mit terminalen Singularitäten liegt ebenfalls eine vollständige Klassifikation vor [Kas06].

Ziel dieser Dissertation ist es, einige der oben genannten torischen Resultate für T-Varietäten der Komplexität eins zu verallgemeinern und darüber hinaus Werkzeuge für die weitere Klassifikation solcher Varietäten bereitzustellen. Konkret werden Klassifikationsergebnisse für  $k^*$ -Flächen vom Gorenstein-Index  $\leq 3$  sowie für lokal faktorielle Fano-Varietäten vom Picard-

Rang eins präsentiert. Als Hilfsmittel für das letztere Problem dient dabei das Studium von multigradierten faktoriellen Ringen. Diese treten sowohl als affine Karten als auch als Cox-Ringe der untersuchten Varietäten auf. Die dabei ermittelten Klassifikationsergebnisse sind jedoch durchaus auch von eigenständigem Interesse und stehen in der Tradition ähnlicher Resultate von Ishida [Ish77] und Mori [Mor77].

Eine T-Varietät  $X$  ist eine normale Varietät mit der effektiven Wirkung eines algebraischen Torus  $T$ . Dabei heißt die Kodimension ( $\dim X - \dim T$ ) auch Komplexität der Toruswirkung. T-Varietäten der Komplexität null sind damit gerade die torischen Varietäten. Eine erste Beschreibung von Toruswirkungen der Komplexität eins findet sich in [KKMSD73]. Für den Flächenfall entwickelten Orlik und Wagreich eine Beschreibung durch bewertete Graphen [OW77]. Timashev gab in [Tim97] eine allgemeinere Beschreibung von Komplexität-eins-Wirkungen reductiver Gruppen durch so genannte Hyperkegel und Hyperfächer. Schließlich entwickelten Altmann und Hausen [AH06] eine Beschreibung von affinen T-Varietäten beliebiger Komplexität durch polyedrische Divisoren, die im Fall der Komplexität eins mit denen von [KKMSD73] und [Tim97] im Wesentlichen zusammenfällt.

Das erste Kapitel der Arbeit führt in die Beschreibung von T-Varietäten durch polyedrische Divisoren ein. Der Fall von Wirkungen der Komplexität eins wird dabei genauer betrachtet.

Im folgenden Kapitel wird die passende Morphismenklasse für T-Varietäten eingeführt sowie ein Kriterium für die Eigentlichkeit solcher Abbildungen entwickelt. In Kapitel 5 dienen diese Erkenntnisse dem Studium von Auflösungen von Singularitäten.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Weil- und Cartier-Divisoren, die invariant unter der Toruswirkung sind. Deren Studium ist grundlegend sowohl für die Berechnung von Cox-Ringen im folgenden Kapitel als auch zur Bewertung auftretender Singularitäten.

Kapitel 4 widmet sich der Berechnung von Cox-Ringen. Diese erweisen sich im letzten Kapitel als entscheidendes Hilfsmittel für die Klassifikation der lokal faktoriellen Varietäten.

In Kapitel 5 werden Auflösungen von Singularitäten mit *guter* Toruswirkung studiert, ein Kriterium für die log-Terminalität entwickelt sowie der Gorenstein-Index dieser Singularitäten bestimmt.

Das letzte Kapitel schließlich widmet sich der oben erwähnten Klassifikation der  $k^*$ -Flächen, der lokal faktoriellen Varietäten und der faktoriellen Ringe unter Einbeziehung der Erkenntnisse der vorangegangenen Kapitel.

In diese Dissertation sind die Ergebnisse veröffentlichter und eingereichter Artikel eingeflossen, die in Zusammenarbeit mit verschiedenen Koautoren entstanden:

- Kapitel 1: *Gluing affine torus actions via divisorial fans* [AHS08]
- Kapitel 3: *Torus invariant divisors* [PS08], *The Cox ring of an algebraic variety with torus action* [HS10]
- Kapitel 4: *The Cox ring of an algebraic variety with torus action* [HS10]
- Kapitel 5: *Normal singularities with torus actions* [LS10]
- Kapitel 6: *Multigraded Factorial Rings and Fano varieties with torus action* [HHS09]



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>T-Varietäten</b>	<b>1</b>
1.1	Polyedrische Divisoren . . . . .	1
1.2	Divisorielle Fächer . . . . .	6
1.3	Bahnenstruktur . . . . .	9
1.4	Komplexität eins . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Äquivariante Abbildungen</b>	<b>13</b>
2.1	Bahnen dominierende Morphismen . . . . .	13
2.2	Morphismen in Komplexität eins . . . . .	16
2.3	Eigentliche Abbildungen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Invariante Divisoren</b>	<b>21</b>
3.1	Weil-Divisoren . . . . .	21
3.2	Cartier-Divisoren . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Cox-Ringe</b>	<b>31</b>
4.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	31
4.2	Cox-Ringe von T-Varietäten . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Singularitäten</b>	<b>39</b>
5.1	Toroidale und glatte Auflösungen . . . . .	39
5.2	Gorenstein-Eigenschaft und Faktorialität . . . . .	41
5.3	Diskrepanzen . . . . .	43
5.4	Quotientensingularitäten auf Flächen . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Drei Klassifikationsprobleme</b>	<b>51</b>
I	Log-Del-Pezzo-Flächen mit $k^*$ -Wirkung . . . . .	51
II	Multigraduierte faktorielle Ringe . . . . .	65
III	Lokal faktorielle T-Varietäten . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Klassifikationsalgorithmus</b>	<b>79</b>



# Kapitel 1

## T-Varietäten

In diesem Kapitel wird die Beschreibung von T-Varietäten durch polyedrische Divisoren rekapituliert, wie sie in [AH06] und [AHS08] eingeführt wurde. Diese Beschreibung ist essentiell für alle folgenden Kapitel.

Es sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Eine normale Varietät  $X/k$  zusammen mit einer effektiven Wirkung eines algebraischen Torus  $T = (k^*)^n$  heißt T-Varietät. Die Kodimension einer maximalen Bahn ( $\dim X - n$ ) wird als deren Komplexität bezeichnet.

### 1.1 Polyedrische Divisoren

Nach einem Resultat von Sumihiro lässt sich jede  $T$ -Varietät durch  $T$ -invariante affine Teilmengen überdecken [Sum74]. Ein wesentlicher Zwischenschritt ist also das Verständnis des affinen Falles.

In der gesamten Arbeit bezeichnet  $N \cong \mathbf{Z}^n$  ein Gitter und  $M = N^*$  das duale Gitter. Die zugehörigen  $\mathbf{Q}$ -Vektorräume  $N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ ,  $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  werden als  $N_{\mathbf{Q}}$  beziehungsweise  $M_{\mathbf{Q}}$  notiert. Nach der Wahl einer Gitterbasis werden die Elemente aus  $N$  bzw.  $N_{\mathbf{Q}}$  als Zeilenvektoren und die Elemente aus  $M$  bzw.  $M_{\mathbf{Q}}$  als Spaltenvektoren geschrieben.

Sei  $\sigma \in N_{\mathbf{Q}}$  ein streng konvexer polyedrischer Kegel. Dann bezeichne  $\text{Pol}_{\sigma}^+$  die Menge der Polyeder  $\Delta \subset N_{\mathbf{Q}}$ , die eine Minkowskizerlegung  $\Delta = P + \sigma$  besitzen, wobei  $P$  ein (kompaktes) Polytop sei.  $\sigma$  heißt dann Schweifkegel von  $\Delta$  und man schreibt  $\sigma = \text{tail } \Delta$ . Man beachte dabei, dass außer für  $\Delta = \emptyset$  der Schweifkegel eines Polyeders eindeutig bestimmt ist.  $\text{Pol}_{\sigma}^+$  bildet zusammen mit der Minkowski-Addition eine Halbgruppe mit dem neutralen Element  $\sigma$ . Weiterhin trägt  $\text{Pol}_{\sigma}^+$  mit der Multiplikation

$$n \cdot \Delta := \underbrace{\Delta + \dots + \Delta}_{n\text{-mal}} \quad \text{und} \quad 0 \cdot \Delta := \sigma$$

sogar eine Modulstruktur über dem Halbring  $\mathbf{Z}^+$ .

Sei nun  $Y$  eine normale semi-projektive Varietät, d.h. projektiv über der affinen Varietät  $Y_0 = \text{Spec } \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Die effektiven Weil- beziehungsweise Cartier-Divisoren  $\text{Div}^+(Y)$ ,  $\text{CaDiv}^+(Y)$  sind dann Moduln über dem Halbring  $\mathbf{Z}^+$ . Durch Erweiterung der Koeffizienten erhält man *polyedrische* Weil- beziehungsweise Cartier-Divisoren <sup>1</sup>:

$$\text{Div}_\sigma(Y) := \text{Pol}_\sigma^+ \otimes_{\mathbf{Z}^+} \text{Div}^+(Y), \quad \text{CaDiv}_\sigma(Y) := \text{Pol}_\sigma^+ \otimes_{\mathbf{Z}^+} \text{CaDiv}^+(Y).$$

*Bemerkung 1.1.* Ein polyedrischer Weil-Divisor  $\mathfrak{D}$  ist daher eine endlich formale Summe über die Primdivisoren  $Z \subset Y$ :

$$\mathfrak{D} = \sum_{Z \subset Y} \Delta_Z \otimes Z,$$

und das Symbol  $\otimes$  bezeichnet die natürliche bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes &: \text{Pol}_\sigma^+ \times \text{Div}^+(Y) \rightarrow \text{Div}_\sigma(Y) \\ (\Delta, \sum_Z \alpha_Z Z) &\mapsto \sum_Z (\alpha_Z \cdot \Delta) \otimes Z. \end{aligned}$$

Ein polyedrischer Cartier-Divisor ist dann ein polyedrischer Weil-Divisor  $\mathfrak{D}$ , für den eine Darstellung  $\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^r \Delta_i \otimes D_i$  mit effektiven Cartier-Divisoren  $D_i$  existiert.

*Bemerkung 1.2.* Seien  $\mu : \text{Div}(Y)^+ \rightarrow \mathbf{Z}^+$  und  $\mu' : \text{CaDiv}(Y)^+ \rightarrow \mathbf{Z}^+$  lineare Abbildungen, so existieren eindeutige Fortsetzungen  $\text{Div}_\sigma \rightarrow \text{Pol}_\sigma^+$  und  $\text{CaDiv}_\sigma \rightarrow \text{Pol}_\sigma^+$ , die ebenfalls mit  $\mu$  und  $\mu'$  bezeichnet werden. Sei  $Y$  eine Kurve, so definiert  $\text{deg} : \text{Div}(Y)^+ \rightarrow \mathbf{Z}^+$  eine solche Abbildung und man erhält  $\text{deg } \text{Div}_\sigma(Y) \rightarrow \text{Pol}_\sigma^+$  mit  $\text{deg} \left( \sum_y \Delta_y \otimes y \right) = \sum_y \Delta_y$ .

Wie bei normalen Divisoren bezeichnet der *Träger* eines polyedrischen Divisors die Vereinigung der Primdivisoren mit nicht-trivialen Koeffizienten. Analog wird der *Definitionsbereich* als die Vereinigung der Primdivisoren mit nicht-leeren Koeffizienten definiert und mit  $Y(\mathfrak{D})$  bezeichnet:

$$\text{supp } \mathfrak{D} := \bigcup_{\Delta_D \neq \sigma} D, \quad Y(\mathfrak{D}) := \bigcup_{\Delta_D \neq \emptyset} D.$$

Für einen polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D} = \sum_D \Delta_D \otimes D$  mit Schweif  $\sigma$  wird eine Auswertungsabbildung  $\sigma^\vee \rightarrow \text{Div}_{\mathbf{Q}}(Y(\mathfrak{D}))$  wie folgt definiert:

$$u \mapsto \mathfrak{D}(u) := \sum_D \min \langle \Delta_D, u \rangle D.$$

$\mathfrak{D}$  ist genau dann Cartier, wenn alle Auswertungen  $\mathfrak{D}(u)$  Cartier sind.

<sup>1</sup>Das Tensorprodukt von Moduln über Halbringen (hier über  $\mathbf{Z}^+$ ) ist völlig analog zu dem normaler Moduln definiert – siehe auch [RS09]

**Definition 1.3.** Ein polyedrischer Cartier-Divisor  $\mathfrak{D}$  heißt

- i. *semi-ample*, falls  $\mathfrak{D}(u)$  für alle  $u \in \sigma^\vee$  semi-ample ist,
- ii. *big*, falls er einen streng konvexen Schweif hat und  $\mathfrak{D}(u)$  für  $u \in \text{relint}(\sigma^\vee)$  big ist.
- iii. *p-Divisor*, falls  $\mathfrak{D}$  semi-ample und big ist,
- iv. *streng ample*, falls er ein p-Divisor ist und  $\mathfrak{D}(u)$  für  $u \in \text{relint}(\sigma^\vee)$  sogar ample ist.

Die p-Divisoren mit Schweif  $\sigma$  bilden eine  $\mathbf{Q}^+$ -Untermodule  $\text{PolDiv}_\sigma^+(Y) \subset \text{CaDiv}_\sigma(Y)$ .

*Bemerkung 1.4.* Sei  $Y$  projektiv und  $\rho(Y) = 1$ , also beispielsweise eine Kurve oder ein projektiver Raum. Dann liefert ein Erzeuger der Neron-Severi-Gruppe  $\text{NS}Y$  eine Gradabbildung  $\text{deg} : \text{Div} Y \rightarrow \mathbf{Z}$ , die sich zu einer Gradabbildung  $\text{Div}_\sigma(Y) \rightarrow \text{Pol}_\sigma^+$  fortsetzt. Auf dem gewählten  $Y$  sind die Begriffe big und ample für einen Divisor  $D$  äquivalent zu der Bedingung  $\text{deg} D > 0$ . Damit sind die folgende Bedingung äquivalent:

- i.  $\mathfrak{D}$  ist ein p-Divisor,
- ii.  $\mathfrak{D}$  ist streng ample,
- iii.  $\text{deg} \mathfrak{D} \subsetneq \text{tail} \mathfrak{D}$  und falls  $\text{deg} \mathfrak{D}(u) = 0$ , so ist ein Vielfaches von  $\mathfrak{D}(u)$  ein Hauptdivisor.

**Beispiel 1.5.** Man betrachtet den polyedrischen Divisor

$$\mathfrak{D} = ((2/3, 1/3) + \sigma) \otimes 1 + \overline{((0, 0)(0, -1/3) + \sigma)} \otimes 0 - ((1/2, 0) + \sigma) \otimes \infty$$

auf  $Y = \mathbf{P}^1$ , mit dem Schweifkegel  $\sigma = \text{pos}((1, 2), (1, 0)) \subset \mathbf{Q}^2$  – siehe auch Abbildung 1.1. Der Grad  $\text{deg} \mathfrak{D} = \overline{((1/6, 0)(1/3, 1/6) + \sigma)}$  ist dann eine echte Teilmenge von  $\sigma$  und  $\mathfrak{D}$  damit ein p-Divisor.

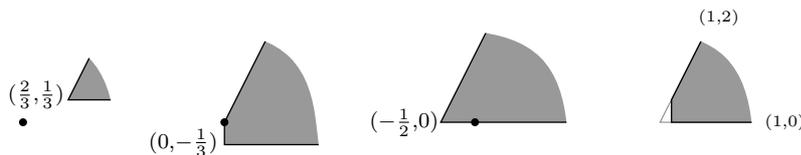


Abbildung 1.1: Die polyedrischen Koeffizienten und der Grad von  $\mathfrak{D}$ .

Einem polyedrischen Divisor wird eine  $M$ -graduierte  $\mathcal{O}_{Y(\mathfrak{D})}$ -Algebra zugeordnet

$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) := \bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u)).$$

Deren globale Schnitte  $\Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{A}(\mathfrak{D}))$  bezeichnet man mit  $A(\mathfrak{D})$ . Für einen semi-amplen polyedrischen Divisor auf einer normalen Varietät  $Y$  erhält man daraus die normalen Varietäten

$$\tilde{X}(\mathfrak{D}) := \mathbf{Spec}_{Y(\mathfrak{D})} \mathcal{A}(\mathfrak{D}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} Y(\mathfrak{D}), \quad X(\mathfrak{D}) := \mathbf{Spec} A(\mathfrak{D}).$$

Dabei induziert die  $M$ -Graduierung eine  $T$ -Wirkung auf den Varietäten.  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  hat die Dimension  $\dim Y + \dim N$ . Ist  $\mathfrak{D}$  zudem big, so ist der natürliche Morphismus  $r : \tilde{X}(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathfrak{D})$  birational und  $X(\mathfrak{D})$  hat dann ebenfalls die Dimension  $\dim Y + \dim N$ . Die globalen Schnitte der Garben  $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(u))$  sind zugleich Elemente des Funktionenkörpers  $K(Y)$ . Man erhält eine Inklusion

$$K(Y) \hookrightarrow K(Y)[M] = \bigoplus_{u \in M} K(Y) \cdot \chi^u \subset K(X)$$

und somit eine dominante rationale Quotientenabbildung  $\pi : X \dashrightarrow Y(\mathfrak{D})$ . Dabei gilt  $\pi = \tilde{\pi} \circ r^{-1}$ . Der Morphismus  $r$  ist ein Isomorphismus außerhalb der kontrahierten abgeschlossenen Teilmenge  $W \subset \tilde{X}(\mathfrak{D})$ . Offensichtlich ist dann  $r(W)$  gerade der Unbestimmtheitsort von  $\pi$  und dieser hat damit eine Kodimension  $\geq 2$ .

**Satz 1.6** ([AH06], Thm. 3.4). *Für jede normale affine  $T$ -Varietät  $X$  existiert eine semi-projektive Varietät  $Y$  der Dimension  $\dim X - \dim T$  und ein polyedrischer Divisor auf  $Y$  mit  $X \cong X(\mathfrak{D})$ .*

*Bemerkung 1.7.* In [AH06] wird die entsprechende Varietät  $Y$  als inverser Limes der GIT-Quotienten konstruiert. Dort, wo die rationale Abbildung  $\pi : X(\mathfrak{D}) \dashrightarrow Y$  definiert ist, stimmt sie lokal mit der Quotientenabbildung eines GIT-Quotienten überein. Die Abbildung  $\pi$  heißt im Folgenden deshalb auch rationale Quotientenabbildung zu  $X(\mathfrak{D})$ .

Die Varietäten  $Y_u = \text{Proj}(\bigoplus_m \Gamma(Y, \mathcal{O}(m \cdot \mathfrak{D}(u))))$  sind gerade die GIT-Quotienten von  $X(\mathfrak{D})$ . Ein streng ampler polyedrischer Divisor  $\mathfrak{D}$  definiert damit gerade eine  $T$ -Varietät mit nur einem maximalen GIT-Quotienten.

*Bemerkung 1.8* ([AH06], Sec. 11). Sei  $X = X_\sigma$  eine affine torische Varietät mit eingebettetem Torus  $T_X$ . Die Einbettung  $T \hookrightarrow T_X$  korrespondiert zu zwei dualen exakten Sequenzen von Gittern

$$0 \rightarrow M \xleftarrow{F^*} M_X \xleftarrow{(P')^*} M' \leftarrow 0, \quad 0 \rightarrow N \xrightarrow{F} N_X \xrightarrow{P'} N' \rightarrow 0,$$

zu der eine kompatible Zerlegung  $N_X \cong N \oplus N'$  mit den entsprechenden Projektionen  $P : N_X \rightarrow N$ ,  $P' : N_X \rightarrow N'$  gewählt werden kann. Sei  $\Sigma = P'(\sigma)$  der Bildfächer von  $\sigma$ . Für jeden Strahl  $\rho \in \sigma(1)$  erhält man ein entsprechendes Polyeder  $\Delta_\rho = P(P'^{-1}(n_\rho))$ . Dann definiert

$$\mathfrak{D}_\sigma = \sum_{\rho \in \sigma(1)} \Delta_\rho \otimes \mathfrak{D}_\rho$$

einen polyedrischen Divisor auf  $Y = X_\Sigma$ .

Startet man umgekehrt mit einem *invarianten* polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D} = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \Delta_\rho \otimes D_\rho$  auf einer torischen Varietät  $Y = X_\Sigma$ , dann definiert  $\mathfrak{D}$  den streng konvexen Kegel  $\sigma$ , der durch die Mengen  $\{n_\rho\} \times \Delta_\rho$  und  $(\text{tail } \mathfrak{D}) \otimes \{0\}$  aufgespannt wird. Ist  $Y$  der affine Raum, dann sind die Strahlen  $\rho$  durch die Elemente einer  $\mathbf{Z}$ -Basis von  $N'$  erzeugt und man erhält den so definierten Cayley-Kegel  $\sigma = C(\Delta_{\rho_1}, \dots, \Delta_{\rho_{n'}})$  zu den Polytopen  $\Delta_{\rho_i}$ . Die Konvexität des Kegels entspricht bei dieser Zuordnung der Eigenschaft semi-ample zu sein, und die Tatsache, dass der Kegel eine Spitze hat, der Eigenschaft des Divisors, big zu sein.

**Beispiel 1.9.** Die Wirkung  $(t, s).(x, y, z) = (ts \cdot x, {}^t/s \cdot y, t \cdot z)$  von  $T^2$  auf  $\mathbf{A}^3$  sei gegeben. Der Kegel von  $\mathbf{A}^3$  wird durch die kanonische Basis  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbf{Z}^3$  aufgespannt. Die Gitterhomomorphismen  $F^*$  und  $F$  sind durch Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben und  $(P')^*$  und  $P'$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Als möglichen Schnitt  $P$  von  $F$  wählt man  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Der Bildfächer  $P'(\sigma)$  ist dann der Fächer des  $\mathbf{P}^1$  mit den Strahlen  $\mathbf{Q}^+$  und  $\mathbf{Q}^-$ . Die Urbilder der primitiven Erzeuger sind

$$P'^{-1}(1) \cap \sigma = \overline{(1, 0, 0)(0, 1, 0)} + \delta \quad \text{und} \quad P'^{-1}(-1) \cap \sigma = (0, 0, 1/2) + \delta,$$

wobei  $\delta = P'^{-1}(0) \cap \sigma = \text{pos}((2, 0, 1), (0, 2, 1))$ . Nach Anwenden von  $P$  erhält man  $\mathfrak{D}_\sigma = \overline{\mathbf{0}(0, -1)} + \tau \otimes 0 + ((1/2, 1/2) + \tau)$ , wobei für den Schweif  $\tau = \text{pos}((1, 1), (1, -1))$  gilt – siehe auch Abbildung 1.2.

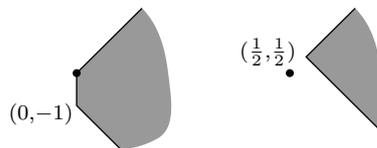


Abbildung 1.2: Die Koeffizienten von  $\mathfrak{D}_\sigma$

## 1.2 Divisorielle Fächer

**Definition 1.10.** Seien  $\mathfrak{D} = \sum_Z \Delta_Z \otimes Z$  und  $\mathfrak{D}' = \sum_Z \Delta'_Z \otimes Z \in \text{Div}_\sigma Y$  zwei polyedrische Divisoren.

- i. Dann definiert man den *Schnitt* der beiden als

$$\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' = \sum (\Delta_Z \cap \Delta'_Z) \otimes Z,$$

- ii. beziehungsweise schreibt  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$ , falls  $\Delta_Z \subset \Delta'_Z$ , für alle Primdivisoren  $Z \subset Y$  gilt.

Gilt nun  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$ , so folgt  $\mathfrak{D}'(u) \geq \mathfrak{D}(u)$  für alle  $u \in (\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$ . Man erhält damit eine Inklusion graduierter  $k$ -Algebren  $A(\mathfrak{D}') \subset A(\mathfrak{D})$  und folglich einen äquivarianten dominanten Morphismus von affinen T-Varietäten  $X(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathfrak{D}')$ . Ist dieser Morphismus eine offene Einbettung, dann heißt  $\mathfrak{D}$  *Seite* von  $\mathfrak{D}'$  und man schreibt kurz  $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{D}'$ .

**Beispiel 1.11** ([AHS08], Prop. 3.3). Sei  $\mathfrak{D}$  ein p-Divisor und  $g = f \cdot \chi^u$  eine homogene Funktion in  $\mathcal{A}(\mathfrak{D})_u$ , das heißt  $f$  ist ein globaler Schnitt von  $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(u))$ . Dann ist der polyedrische Divisor

$$\mathfrak{D}_g = \sum_Z \text{face}(\mathfrak{D}_Z, u) \otimes Z + \emptyset \otimes (f)_0$$

ebenfalls ein p-Divisor und  $\mathcal{A}(\mathfrak{D}) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{D}_{f \cdot \chi^u})$  ist die Lokalisierung nach  $f \cdot \chi^u$ . Es gilt insbesondere  $\mathfrak{D}_g \prec \mathfrak{D}$ . Hierbei bezeichnet  $\text{face}(\mathfrak{D}_Z, u)$  die Seite des Polyeders  $\mathfrak{D}_Z$ , auf der das Funktional  $\langle u, \cdot \rangle$  minimiert wird.

**Proposition 1.12** ([IS09]). Sei  $\mathfrak{D}' = \sum_y \Delta'_y \otimes y$  ein p-Divisor auf einer Kurve  $Y$  und  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$ . Dann ist  $\mathfrak{D}$  ebenfalls ein p-Divisor und es gilt  $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{D}'$ , genau dann, wenn

- i.  $\Delta_y \prec \Delta'_y$  für alle Punkte  $y \in Y$  und  
 ii.  $\deg \mathfrak{D} = \deg \mathfrak{D}' \cap \text{tail } \mathfrak{D}$  gilt.

**Definition 1.13.** Ein *divisorieller Fächer* ist eine Menge  $\mathcal{S}$  von p-Divisoren mit den folgenden Eigenschaften.

- i. Für je zwei Elemente  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \in \mathcal{S}$  liegt auch der Schnitt  $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}'$  in  $\mathcal{S}$ .  
 ii. Es gilt  $\mathfrak{D} \succ \mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' \prec \mathfrak{D}'$ .

**Definition 1.14.** Sei  $y \in Y$  ein nicht-notwendig abgeschlossener Punkt.

- i. Der  $y$ -Anteil eines polyedrischen Divisors  $\mathfrak{D} \in \text{Div}_\sigma Y$  ist dann wie folgt definiert:

$$\mathfrak{D}_y = \sum_{Z \ni y} \Delta_Z,$$

- ii. und der  $y$ -Anteil eines divisoriiellen Fächers  $\mathcal{S}$  als der polyedrische Komplex

$$\mathcal{S}_y = \{\mathfrak{D}_y \mid \mathfrak{D} \in \mathcal{S}\}.$$

**Konstruktion 1.15.** Ausgehend von einem solchen divisoriiellen Fächer erhält man für jeden enthaltenen polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D}$  die affine T-Varietät  $X(\mathfrak{D})$ . Diese verkleben vermittelt der äquivarianten offenen Einbettungen

$$X(\mathfrak{D}) \hookrightarrow X(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}') \hookrightarrow X(\mathfrak{D}')$$

zu einem Schema mit T-Wirkung. Dass hierbei die notwendige Kozyklusbedingung tatsächlich erfüllt ist, wird in [AHS08, Th. 5.3] gezeigt.

Das Gleiche gilt für die (nicht notwendig affinen) Varietäten  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  und man erhält analog eine T-Varietät  $\tilde{X}(\mathcal{S})$ .

Tatsächlich muss das so konstruierte Schema nicht notwendig separiert sein. In Kapitel 2 wird jedoch der folgende Satz bewiesen.

**Satz 1.16.**  $X(\mathcal{S})$  ist genau dann vollständig (also insbesondere separiert), wenn alle Anteile  $\mathcal{S}_y$  vollständige Unterteilungen von  $N_{\mathbf{Q}}$  bilden.

**Beispiel 1.17.** Seien  $N = \mathbf{Z}^2$  und  $Y = \mathbf{P}^1$  sowie die folgenden Elemente aus  $N_{\mathbf{Q}}$  gegeben:  $v_0 = (0, -1)$ ,  $v_1 = (-1, 0)$ ,  $v_\infty = (1/2, 1/2)$ . Nun betrachtet man vier polyedrische Divisoren mit den Schweifkegeln

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \text{pos}((1, 1), (1, -1)), & \sigma_3 &= \text{pos}((-1, 1), (-1, -1)), \\ \sigma_2 &= \text{pos}((1, 1), (-1, 1)), & \sigma_4 &= \text{pos}((-1, -1), (1, -1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= (\overline{\mathbf{0}v_0} + \sigma_1) \otimes \mathbf{0} + (v_\infty + \sigma_1) \otimes \infty, \\ \mathfrak{D}_2 &= (\overline{\mathbf{0}v_1} + \sigma_2) \otimes \mathbf{1} + (v_\infty + \sigma_2) \otimes \infty, \\ \mathfrak{D}_3 &= (v_1 + \sigma_3) \otimes \mathbf{1} + (\overline{\mathbf{0}v_0} + \sigma_3) \otimes \mathbf{0} + (v_\infty + \sigma_3) \otimes \infty, \\ \mathfrak{D}_4 &= (\overline{\mathbf{0}v_1} + \sigma_4) \otimes \mathbf{1} + (v_0 + \sigma_4) \otimes \mathbf{0} + (v_\infty + \sigma_4) \otimes \infty. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathfrak{D}_1$  der polyedrische Divisor aus Beispiel 1.9. Insbesondere gilt also  $X(\mathfrak{D}_1) = \mathbf{A}^2$ . Darüber hinaus lässt sich leicht überprüfen, dass  $X(\mathfrak{D}_1)$ ,  $X(\mathfrak{D}_2)$ ,  $X(\mathfrak{D}_3)$  und  $X(\mathfrak{D}_4)$  äquivariant isomorph sind.

Bemerkung 1.4 zeigt, dass  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$ ,  $\mathfrak{D}_3$  und  $\mathfrak{D}_4$  jeweils p-Divisoren sind. Nach Proposition 1.12 gilt außerdem  $\mathfrak{D}_i \succ (\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_j) \prec \mathfrak{D}_i$ . Das heißt die

polyedrischen Divisoren bilden zusammen mit ihren Durchschnitten einen divisoriiellen Fächer

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcap_{i \in I} \mathfrak{D}_i \mid I \subset \{1, 2, 3, 4\} \right\}.$$

Die Anteile  $\mathcal{S}_y$  für  $y = 1, 0, \infty$  sind in der Abbildung 1.3 skizziert.

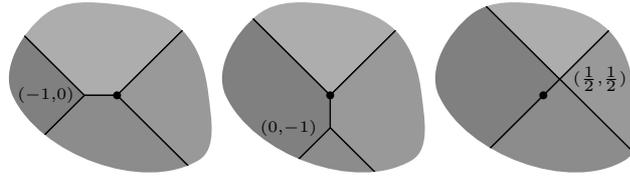


Abbildung 1.3: Die Anteile  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_\infty$  und  $\mathcal{S}_1$

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor auf  $Y$  und  $\mathcal{U} = \{Y_i\}_{i \in I}$  sei eine offene affine Überdeckung von  $Y$ . Dann ist

$$\mathfrak{D}|_{\mathcal{U}} = \{\mathfrak{D}|_{Y_J} \mid Y_J = \bigcap_{i \in J} Y_i, J \subset I\}.$$

**Beispiel 1.18.** Sei  $\mathcal{U}$  eine affine Überdeckung, dann liefert die obige Konstruktion  $X(\mathfrak{D}|_{\mathcal{U}}) = \tilde{X}(\mathfrak{D})$ .

**Beispiel 1.19.** Sei  $\mathcal{U}_0$  eine offene affine Überdeckung von  $\text{Spec } \Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}_Y)$  und  $q^*\mathcal{U}$  die durch  $q : Y \rightarrow Y_0$  induzierte Überdeckung auf  $Y(\mathfrak{D})$ . Dann gilt  $X(\mathfrak{D}|_{q^*\mathcal{U}}) = X(\mathfrak{D})$ .

Für  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}_Y)$  mit  $(f_1, \dots, f_r) = (1)$  erhält man also eine Überdeckung von  $X(\mathfrak{D})$  durch  $X(\mathfrak{D}|_{Y_i})$ , wobei  $Y_i = Y(\mathfrak{D})_{f_i}$ . Dabei gilt  $X(\mathfrak{D}|_{Y_i}) = X_{f_i \cdot \chi^0}$  (Beispiel 1.11).

**Definition 1.20.** Ein divisoriieller Fächer  $\mathfrak{D}|_{q^*\mathcal{U}}$  wie im Beispiel 1.19 wird als *Standardverfeinerung* von  $\mathfrak{D}$  bezeichnet und  $\{X(\mathfrak{D}|_{q^*\mathcal{U}})\}$  als *Standardüberdeckung* von  $X(\mathfrak{D})$ .

Tatsächlich genügt es, sich bei der Betrachtung von affinen Überdeckungen auf die vom obigen Typ zu beschränken, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 1.21.** *Zu jeder invarianten offene affinen Überdeckung von  $X = X(\mathfrak{D})$ , existiert eine verfeinernde Standardüberdeckung.*

*Beweis.* Es genügt sich auf Überdeckungen aus offenen Teilmenge von Typ  $X_g = X \setminus V(g)$  zu beschränken. Seien also  $g_1, \dots, g_r = \mathcal{A}(\mathfrak{D})$  homogene Elemente und  $1 = \sum_i \lambda_i g_i$ . Bezeichne  $g_u$  den Anteil von  $g$  im Grad  $u$ , dann gilt offenbar  $(\sum_i \lambda_i g_i)_0 = 1$  und  $(\sum_i \lambda_i g_i)_u = 0$  für  $u \neq 0$ . Dann gilt aber auch  $1 = \sum_i (\lambda_i g_i)_0$ . Setzt man  $g'_i = (\lambda_i g_i)_0$ . Für  $g' = f \cdot \chi^0 \in A_0$  ist aber  $X_{g'} = X(\mathfrak{D}|_{Y_f})$  von obigem Typ.  $\square$

### 1.3 Bahnenstruktur

Jede Torusbahn liegt im Abschluss einer maximalen Bahn. Zwei Bahnen heißen adjazent, falls die eine im Abschluss der anderen liegt. In [AH06] wurde gezeigt, dass ähnlich wie im torischen Fall, Bahnen zu gewissen konvexen Polyedern korrespondieren.

**Satz 1.22** ([AH06], Cor. 7.11.). *Die Torusbahnen in der Faser von  $\tilde{X}(\mathfrak{D}) \rightarrow Y$  über  $y \in Y$  entsprechen den Polyedern in  $\mathfrak{D}_y$ . Dabei entspricht die Dimension des Polyeders gerade der Kodimension der Bahn in der Faser.*

*Bahnen sind genau dann adjazent, wenn die entsprechenden Polyeder in Seitenbeziehung zueinander stehen.*

Sei  $y \in Y$  und  $F \prec \mathfrak{D}_y$ , dann wird die entsprechen Bahn mit  $\tilde{B}(F, y)$  bezeichnet.

Der Kontraktionsmorphismus  $r : \tilde{X}(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathfrak{D})$  bildet Bahnen von  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  auf solche von  $X(\mathfrak{D})$  ab. Dabei werden unter Umständen verschiedene Bahnen auf  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  miteinander identifiziert.

Zur Charakterisierung der Kontraktion betrachtet man den projektiven Morphismus

$$\vartheta_u : Y(\mathfrak{D}) \rightarrow \text{Proj} \left( \bigoplus_m A(\mathfrak{D})_{m \cdot u} \right).$$

**Proposition 1.23** ([AH06], Thm. 10.1). *Zwei Bahnen  $\tilde{B}(F, y)$  und  $\tilde{B}(F', y')$  werden durch die Kontraktionsabbildung  $r : \tilde{X} \rightarrow X$  genau dann miteinander identifiziert, wenn  $F = \text{face}(\mathfrak{D}_y, u)$ ,  $F' = \text{face}(\mathfrak{D}_{y'}, u)$  und  $\vartheta_u(y) = \vartheta_u(y')$  gilt.*

Falls  $\text{tail } \mathfrak{D}$  volldimensional ist, so folgt aus dem letzten Satz, dass die Fixpunktmenge zu den Punkten von

$$Y_0 = \text{Spec } A(\mathfrak{D})_0 = \text{Spec } \Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}_Y)$$

korrespondiert. In der Tat ist die Fixpunktmenge in  $X(\mathfrak{D})$  durch das Ideal  $I_{\text{fix}} = \bigoplus_{u \neq 0} A(\mathfrak{D})_u$  gegeben und es gilt  $A(\mathfrak{D})_0 \cong A(\mathfrak{D})/I_{\text{fix}}$ .

Ist nun  $Y(\mathfrak{D})$  vollständig, dann ist  $A(\mathfrak{D})_0 = k$ . Es existiert also genau ein Fixpunkt, der im Abschluss aller Bahnen liegt, da jedes homogene Ideal offensichtlich in  $I_{\text{fix}}$  enthalten ist. Andererseits folgt dies aber auch aus den beiden vorangegangenen Sätzen.

**Definition 1.24** (Elliptischer Fixpunkt, gute Toruswirkung). Ein Fixpunkt  $x$ , der im Abschluss aller Bahnen einer Umgebung  $U_x$  liegt, heißt *elliptisch* und eine Toruswirkung mit elliptischem Fixpunkt auf einer affinen Varietät heißt *gut*.

## 1.4 Komplexität eins

Die  $y$ -Anteile eines divisoriiellen Fächers  $\mathcal{S}$  reichen allein nicht aus, um die Varietät  $X(\mathcal{S})$  vollständig zu beschreiben. Im Falle einer T-Varietät der Komplexität eins enthalten sie jedoch tatsächlich bereits einen Großteil der dazu notwendigen Informationen. Diese Aussage soll im Folgenden konkretisiert werden.

Sei  $\mathcal{S}$  ein divisoriieller Fächer auf einer Kurve  $Y$ . Dann wird die Teilmenge  $\mathcal{M} \subset \text{tail } \mathcal{S}$

$$\mathcal{M} = \{\sigma \mid \exists \mathfrak{D} \in \mathcal{S} : \text{tail } \mathfrak{D} = \sigma \text{ und } Y(\mathfrak{D}) = Y\}$$

als die *Markierungsmenge* von  $\mathcal{S}$  bezeichnet und die Elemente als *Markierungen* von  $\mathcal{S}$ .

**Lemma 1.25** ([IS09], Prop. 1.6). *Seien  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  zwei divisoriielle Fächer auf der Kurve  $Y$  und gelte  $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}'_y$  für alle  $y$ -Anteile. Stimmen dann auch noch die Markierungen überein, so sind die entsprechenden T-Varietäten isomorph.*

*Beweis.* Die polyedrischen Divisoren mit vollständigem Definitionsbereich stimmen nach Voraussetzung bereits überein. Für die polyedrischen Divisoren mit affinem Definitionsbereich lassen sich gemäß Beispiel 1.19 gemeinsame Standardverfeinerungen angeben, so dass die verfeinerten divisoriiellen Fächer übereinstimmen.  $\square$

Seien nun umgekehrt Punkte auf  $y_1, \dots, y_s \in \mathbf{P}^1$  sowie Unterteilungen  $\mathcal{S}_{y_1}, \dots, \mathcal{S}_{y_s}$  mit gemeinsamem Schweiffächer  $\Sigma$  und einer Markierungsmenge  $\mathcal{M} \subset \Sigma$  vorgegeben. Zu einem maximalen Schweifkegel  $\sigma \in \Sigma$  existiert dann jeweils ein Polyeder  $\Delta_i^\sigma \in \mathcal{S}_{y_i}$  (oder  $\Delta_i^\sigma := \emptyset$ ). Dann existiert nach [IS09] ein divisoriieller Fächer  $\mathcal{S}$  mit den entsprechenden  $y$ -Anteilen genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- i. Für jeden markierten maximalen Schweifkegel  $\sigma$  gilt  $\emptyset \neq \sum_i \Delta_i^\sigma \subsetneq \sigma$ .

- ii. Sei  $\sigma \in \Sigma$  maximal, dann ist  $\tau \prec \sigma$  genau dann markiert, wenn  $\sigma$  markiert ist und der Durchschnitt  $(\sum_i \Delta_i^e) \cap \tau$  nicht leer ist.

**Beispiel 1.26.** Man betrachte die Unterteilungen aus Abbildung 1.4. Der Schweiffächer findet sich dort ebenfalls. Dabei seien die maximalen Kegel  $\sigma_2 = \text{pos}((1, 0)(2, 1))$  und  $\sigma_1 = \text{pos}((2, 1)(1, 2))$  markiert, der triviale Kegel und  $\rho = \text{pos}((1, 0))$  jedoch nicht (was durch die fehlende Färbung angedeutet wird).

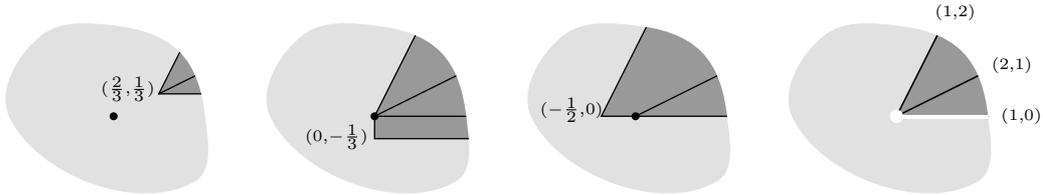


Abbildung 1.4: Anteile  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_\infty$  und Schweiffächer mit Markierungen

Man überprüft leicht, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Tatsächlich erzeugen die folgenden vier polyedrischen Divisoren einen Fächer mit den entsprechenden  $\gamma$ -Anteilen und Markierungen.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \left( (2/3, 1/3) + \sigma_2 \right) \otimes 1, \\ \mathfrak{D}_2 &= \left( (2/3, 1/3) + \sigma_2 \right) \otimes \left( \overline{\mathbf{0}(-1/2, 0)} + \sigma_2 \right) \otimes \infty, \\ \mathfrak{D}_3 &= \emptyset \otimes 1 + \left( \overline{\mathbf{0}(0, -1/3)} + \rho \right) \otimes 0, \\ \mathfrak{D}_4 &= \left( (2/3, 1/3) + \rho \right) \otimes 0 + \emptyset \otimes 0. \end{aligned}$$



# Kapitel 2

## Äquivariante Abbildungen

Im vorigen Kapitel wurde die Klasse der polyedrische Divisoren eingeführt und ihre Korrespondenz mit affinen T-Varietäten beschrieben. Dieses Kapitel widmet sich nun der Beschreibung einer geeigneten Klasse von Morphismen. Die wesentlichen Ideen wurden dabei aus [AH06] übernommen.

Seien  $X$  und  $X'$  zwei Varietäten mit Toruswirkung. Ein äquivarianter Morphismus  $\varphi : X \rightarrow X'$  ist ein Morphismus von Varietäten zusammen mit einem Morphismus  $\tilde{\varphi}$  von Tori, so dass  $\varphi(t.x) = \tilde{\varphi}(t).\varphi(x)$  gilt.

### 2.1 Bahnen dominierende Morphismen

**Definition 2.1.** Eine äquivariante Abbildung  $(\varphi, \tilde{\varphi})$  heißt

- i. *Bahnen dominierend*, falls  $T'.\varphi(X)$  dicht in  $X'$  ist,
- ii. *dominant*, falls  $\varphi$  dominant ist,
- iii. *streng dominant*, falls sowohl  $\varphi$  als auch  $\tilde{\varphi}$  dominant sind.

*Bemerkung 2.2.*

- i. Jede torische Abbildung ist Bahnen dominierend.
- ii. Jede dominante torische Abbildung ist streng dominant.

**Lemma 2.3.** *Ein äquivarianter Morphismus  $(\varphi, \tilde{\varphi})$  ist genau dann streng dominant, wenn er Bahnen dominierend ist und  $\tilde{\varphi}$  dominant ist.*

*Beweis.* Sei  $(\varphi, \tilde{\varphi})$  Bahnen dominierend und  $\tilde{\varphi} : T \rightarrow T'$  dominant. Dann ist  $T'.\varphi(X)$  dicht, also auch  $\tilde{\varphi}(T).\varphi(X)$  und damit auch  $\varphi(T.X) = \varphi(X)$ .  $\square$

**Lemma 2.4.** *Sei  $(\varphi, \tilde{\varphi}) : X \rightarrow X'$  ein äquivarianter Morphismus.*

- i. Dann ist  $\varphi$  genau dann Bahnen dominierend, wenn sein Bild jede offene invariante Teilmenge schneidet.
- ii. Wenn  $X$  und  $X'$  affin sind, dann ist die Bahnendominanz von  $(\varphi, \tilde{\varphi})$  äquivalent zu der Tatsache, dass

$$\ker \varphi^* \cap \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})^{\text{hom}} = 0.$$

- iii. Wenn  $(\varphi, \tilde{\varphi})$  Bahnen dominierend ist, dann ist  $\tilde{\varphi}$  bereits durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Die Dichtheit von  $T'.\varphi(X)$  ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass  $U \cap T'.\varphi(X) \neq \emptyset$  für jede offene Teilmenge  $U \subset X'$  gilt. Das ist äquivalent zu  $T'.U \cap \varphi(X) \neq \emptyset$ . Da  $T'.U$  invariant ist, folgt die erste Behauptung.

Seien  $X$  und  $X'$  affin. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir in (i) annehmen, dass  $U = X_f$  gilt für ein  $f \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})^{\text{hom}}$ . Nun ist aber  $U \cap \varphi(X)$  genau dann nicht leer, wenn  $\varphi^* : \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow K(X)$  sich auf  $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})_f$  fortsetzen lässt, das heißt wenn  $\varphi^*(f) \neq 0$  gilt.  $\square$

Ein Element  $\mathfrak{f} = \sum_i v_i \otimes f_i \in N \otimes K(Y)^*$  wird als Plurifunktion bezeichnet. Die zugehörige Auswertungsabbildung  $\mathfrak{f}(u) = \prod f_i^{(u, v_i)}$  definiert einen Homomorphismus  $M \rightarrow K(Y)^*$ . Durch die Identifikation der Plurifunktion mit ihrer Auswertung erhält man  $N \otimes K(Y)^* \cong \text{Hom}(M, K(Y)^*)$ . Die Bewertung  $\text{ord}_Z : K(Y)^* \rightarrow \mathbf{Q}$  setzt sich dann auf  $N \otimes K(Y)^*$  fort und man erhält so einen *polyedrischen Hauptdivisor*:

$$\mathfrak{H} = \text{div}(\mathfrak{f}) = \sum_Z \text{ord}_Z(\mathfrak{f}) \cdot Z = \sum_i v_i \otimes \text{div}(f_i) \in N \otimes \text{CaDiv}(Y).$$

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor, dann bezeichnet der Ausdruck  $\mathfrak{D} + \mathfrak{H}$  den polyedrischen Divisor

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{H} = \sum_Z (\mathfrak{D}_Z + \mathfrak{H}_Z) \otimes Z.$$

Dies führt zu dem Begriff der linearen Äquivalenz.

**Definition 2.5.**

- i. Zwei polyedrische Divisoren  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  heißen *äquivalent*, falls ein polyedrischer Hauptdivisor mit  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \mathfrak{H}$  existiert.
- ii. Zwei divisorielle Fächer  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  heißen *äquivalent*, falls ein polyedrischer Hauptdivisor  $\mathfrak{H}$  existiert sowie zu jedem  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  ein  $\mathfrak{D}' \in \mathcal{S}'$ , so dass  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \mathfrak{H}$  gilt.

Die dadurch definierten Äquivalenzrelationen werden mit  $\sim$  bezeichnet.

Für einen Gitterhomomorphismus  $F : N \rightarrow N'$  definiert man das Urbild  $F^{-1}(\mathfrak{D})$  eines polyedrischen Divisors koeffizientenweise:

$$F^{-1}(\mathfrak{D})_Z := F^{-1}(\mathfrak{D}_Z).$$

**Definition 2.6** ([AH06], Def. 8.3). Seien zwei polyedrische Divisoren  $\mathfrak{D} \in \text{CaDiv}_\sigma(Y)$  und  $\mathfrak{D}' \in \text{CaDiv}_{\sigma'}(Y')$  gegeben.

Eine Abbildung zwischen polyedrischen Divisoren ist dann ein Tripel  $\varphi = (\psi, F, \mathfrak{f})$  aus einem dominanten Morphismus  $\psi : Y \rightarrow Y'$ , einem Gitterhomomorphismus  $F : N \rightarrow N'$  und einer Funktion  $\mathfrak{f} \in N' \otimes K(Y)^*$  mit der Eigenschaft

$$(2.1) \quad \mathfrak{D} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{D}') := F^{-1}(\psi^*\mathfrak{D}' + \text{div}(\mathfrak{f})).$$

Allgemeiner liefert ein solches Tripel eine Abbildung  $\mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{D}'$  für einen divisoriiellen Fächer  $\mathcal{S}$ , falls es für jeden polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  eine Abbildung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}'$  definiert.

Seien  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$   $p$ -Divisoren, dann definiert jedes Tripel  $\varphi = (\psi, F, \mathfrak{f})$  einen graduierten Ringhomomorphismus

$$X(\varphi) : K(Y')[M'] \rightarrow K(Y)[M], \quad h \cdot \chi^u \mapsto \mathfrak{f}(u)^{-1} \cdot \psi^*h \cdot \chi^{F^*u},$$

der offensichtlich auf den homogenen Elementen nicht verschwindet. Da  $X$  und  $X'$  birational zu  $Y \times T^N$  beziehungsweise zu  $Y' \times T^{N'}$  sind, definiert diese Ringabbildung eine Bahnen dominierende rationale Abbildung der beiden Varietäten. Erfüllt  $\varphi$  die Beziehung (2.1), dann bildet  $X(\varphi)$  Schnitte von  $\mathcal{O}(\mathfrak{D}'(u'))$  auf solche von  $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(F^*u))$  ab und man erhält einen graduierten Homomorphismus der affinen Koordinatenringe  $A(\mathfrak{D}') \rightarrow A(\mathfrak{D})$  und somit einen äquivarianten Morphismus  $X(\varphi) : X(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathfrak{D}')$ .

In dieser Korrespondenz entspricht  $(\text{id}, \text{id}, 1)$  der Identität und die Verknüpfung zweier Morphismen  $\varphi = X(\psi, F, \mathfrak{f})$  und  $\varphi' = X(\psi', F', \mathfrak{f}')$  entspricht der folgenden Abbildung von polyedrischen Divisoren:

$$\varphi \circ \varphi' := (\psi \circ \psi', F \circ F', F'(\mathfrak{f}) \cdot \psi^*\mathfrak{f}').$$

**Satz 2.7** ([AH06], Thm. 8.6).  $\mathfrak{D} \mapsto X(\mathfrak{D})$  definiert einen volltreuen Funktor von der Kategorie der  $p$ -Divisoren in die Kategorie der affinen  $T$ -Varietäten mit Bahnen dominierenden Morphismen.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [AH06]. Die dortige Beschränkung auf dominante Morphismen spielt für den Beweis keine Rolle.  $\square$

**Satz 2.8.** *Seien  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor,  $\mathcal{S}'$  ein divisorieller Fächer und  $\varphi = (\psi, F, \mathfrak{f})$  ein Tripel wie oben, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- i.  $\varphi$  definiert einen Morphismus  $X(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathcal{S}')$ .*
- ii. Es existiert eine Standardverfeinerung  $\{\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m\}$  von  $\mathfrak{D}$ , so dass  $\mathfrak{D}_i \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{D}')$  für ein  $\mathfrak{D}' \in \mathcal{S}'$  gilt.*

*Beweis.* Die  $X(\mathfrak{D})$  bzw.  $X(\mathfrak{D}')$  definieren affine Überdeckungen  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{U}'$ . Die rationale Abbildung  $\varphi$  definiert nun genau dann einen Morphismus, wenn eine Verfeinerung  $\mathcal{U}^{\text{fine}}$  von  $\mathcal{U}$  existiert, so dass zu jedem  $U \in \mathcal{U}^{\text{fine}}$  ein  $U' \in \mathcal{U}'$  existiert, so dass die Einschränkung  $\varphi|_U$  einen Morphismus  $U \rightarrow U'$  definiert.

Lemma 1.21 zeigt nun, dass es genügt, sich auf Standardüberdeckungen zu beschränken.  $\square$

**Proposition 2.9.**  *$(\psi, F, \mathfrak{f})$  definiert genau dann eine streng dominante Abbildung, wenn  $F$  einen endlichen Kokern hat.*

*Beweis.* Das ist eine direkte Folgerung aus Lemma 2.3.  $\square$

**Korollar 2.10.** *Haben  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  die gleiche Komplexität, dann definiert  $(\psi, F, \mathfrak{f})$  genau dann eine dominante Abbildung  $\varphi$ , wenn  $F$  einen endlichen Kokern hat.*

*Beweis.* Wenn  $\varphi$  dominant ist, so muss aus Dimensionsgründen auch  $\tilde{\varphi}$  dominant sein. Damit folgt die Behauptung aus der Proposition.  $\square$

## 2.2 Morphismen in Komplexität eins

Man betrachte nun vollständige divisorielle Fächer  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  auf glatten Kurven  $Y$  und  $Y'$ . Rationale bahnen dominierende Abbildungen werden dann durch Tripel  $(\psi, F, \mathfrak{f})$  definiert, wobei  $\psi : Y \rightarrow Y'$  ein endlicher Morphismus ist. Der Verzweigungsindex von  $\psi$  in  $y$  wird nun mit  $e_y$  bezeichnet.

Aus Satz 2.8 folgt nun sofort

**Korollar 2.11.** *Eine Abbildung  $(\psi, F, \mathfrak{f})$  definiert genau dann einen Morphismus  $X(\mathcal{S}) \rightarrow X(\mathcal{S}')$ , falls  $F$  eine Abbildung der Schweiffächer definiert, die die Markierungen erhält, und  $\frac{1}{e_y}F - \text{ord}_y(\mathfrak{f})$  eine Abbildung  $\mathcal{S}_y \rightarrow \mathcal{S}_{\varphi(y)}$  von polyedrischen Unterteilungen liefert.*  $\square$

Damit lässt sich auch die Frage nach der Isomorphie zweier T-Varietäten der Komplexität eins abschließend beantworten.

**Korollar 2.12.** *Zwei T-Varietäten  $X(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S}')$  sind genau dann isomorph, wenn ein markierungserhaltender Fächerisomorphismus  $F : |\text{tail } \mathcal{S}| \rightarrow |\text{tail } \mathcal{S}'|$ , ein Isomorphismus  $\psi : Y \rightarrow Y'$  und eine Plurifunktion  $f$  existieren, so dass  $F(\mathcal{S}_y) = \mathcal{S}'_{\psi(y)} + \text{ord}_y(f)$  gilt.  $\square$*

Für die rationale Kurve  $Y = \mathbf{P}^1$  lässt sich diese Aussage noch verallgemeinern.

**Satz 2.13** ([Ilt10], Thm 3.2.3). *Seien  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  zwei vollständige divisorielle Fächer auf  $\mathbf{P}^1$  und  $F : |\text{tail } \mathcal{S}| \rightarrow |\text{tail } \mathcal{S}'|$  ein markierungserhaltender Fächerisomorphismus,  $f$  eine Plurifunktion und  $\psi : Y \rightarrow Y'$  eine Bijektion, so dass*

$$F(\mathcal{S}_y) = \mathcal{S}'_{\psi(y)} + \text{ord}_y(f)$$

*gilt. Dann sind  $X(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S}')$  T-invariant deformationsäquivalent.*

Es lässt sich auch eine T-invariante Familie explizit angeben, die  $X(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S}')$  als Fasern enthält.

**Konstruktion 2.14** ([Ilt10]). Seien  $y_1, \dots, y_s \in \mathbf{P}^1$  und  $\mathcal{S}_y = \text{tail } \mathcal{S}$  für  $y \notin \{y_1, \dots, y_s\}$ . Darüber hinaus kann man wegen Lemma 1.25 annehmen, dass  $\mathfrak{D}_y \neq \emptyset$  gilt für  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  und  $y \notin \{y_1, \dots, y_s\}$ .

Man betrachte nun  $\mathcal{M}_{0,r}$ , den Modulraum von  $s$  Punkten auf dem  $\mathbf{P}^1$ , sowie die universelle Familie  $\Psi : \mathcal{U}_{0,r} \rightarrow \mathcal{M}_{0,s}$  mit den universellen Schnitten  $s_1, \dots, s_r$ . Zu jedem polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  liefert

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=1}^r \mathfrak{D}_{y_i} \otimes (\text{im } s_i)$$

einen polyedrischen Divisor auf  $\mathcal{U}_{0,r}$ . Diese bilden wiederum einen divisoriiellen Fächer  $\mathcal{S}^{\text{tot}}$ . Die Abbildung  $X(\mathcal{S}^{\text{tot}}) \rightarrow \mathcal{M}_{0,r}$ , die durch das Tripel  $(\Psi, N \rightarrow 0, 1)$  gegeben ist, beschreibt dann eine Familie von T-Varietäten, und die Fasern über  $(\mathbf{P}^1, y_1, \dots, y_r) \in \mathcal{M}_{0,r}$  und  $(\mathbf{P}^1, \psi(y_1), \dots, \psi(y_r))$  sind isomorph zu  $X(\mathcal{S})$  beziehungsweise  $X(\mathcal{S}')$ .

Schließlich erhält man analog zum affinen Fall die

**Proposition 2.15.** *Sei  $\mathcal{S}$  ein divisoriieller Fächer auf einer Kurve  $Y$ , dann ist  $X(\mathcal{S})$  genau dann torisch, wenn  $Y = \mathbf{P}^1$  gilt und es höchstens zwei Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$  gibt, die keine im Gitter verschobenen Schweiffächer sind.*

*Beweis.* Sei  $X$  torisch und  $T \hookrightarrow T_X$  eine Toruseinbettung der Kodimension eins. Dann liefert das Verfahren aus Bemerkung 1.8 für jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$  einen polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D}^\sigma$  auf  $\mathbf{P}^1$  mit den Koeffizienten  $\mathfrak{D}_0^\sigma$  und  $\mathfrak{D}_\infty^\sigma$ . Es ist leicht zu sehen, dass diese einen divisoriiellen Fächer bilden.

Nach Satz 2.12 ist  $X(\mathcal{S})$  genau dann isomorph zu einer solchen Situation, wenn die obigen Bedingungen gelten.  $\square$

## 2.3 Eigentliche Abbildungen

Die Komplexität der betrachteten Toruswirkung, das heißt die Dimension von  $Y$ , ist jetzt wieder beliebig. Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 2.16.** *Eine Abbildung von divisoriiellen Fächern  $(\psi, F, \mathfrak{f}) = \varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}'$  definiert genau dann einen eigentlichen Morphismus, wenn für jedes  $y \in Y$  der Anteil  $\mathcal{S}_y$  eine vollständige Unterteilung von  $|(\varphi^{-1}\mathcal{D}')_y|$  bildet.*

Wichtigstes Hilfsmittel sind dabei diskrete Bewertungen auf Körpererweiterungen  $K(X) \subset K$ . Das sind Abbildungen  $\nu : K \rightarrow \mathbf{Z}$  mit den Eigenschaften

- i.  $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$  und
- ii.  $\nu(f+g) \geq \min(\nu(f), \nu(g))$  und  $\nu(f+g) = \min(\nu(f), \nu(g))$ , falls  $\nu(f) \neq \nu(g)$  gilt.

Der zugehörige Bewertungsring  $\mathcal{O}_\nu = \{f \in K \mid \nu(v) \geq 0\} \cup \{0\}$  ist ein lokaler Ring mit Maximalideal  $\mathfrak{m}_\nu = \{f \in K \mid \nu(v) > 0\} \cup \{0\}$ . Man sagt,  $\nu$  hat ein Zentrum auf  $x \in X$ , falls der lokale Ring  $\mathcal{O}_x$  von  $\mathcal{O}_\nu$  dominiert wird, d.h.  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_\nu$  und  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_x$ . Äquivalent dazu ist die Aussage, dass ein diagonaler Morphismus mit Bild  $x$  für das folgende kommutative Diagramm existiert.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Spec } \mathcal{O}_\nu & & \end{array}$$

Es sei nun  $\nu$  eine Bewertung auf  $K \supset K(X)$ . Die Einschränkung der Bewertung  $\nu$  auf  $K(Y)[M] \subset K(X)$  definiert via  $\langle v, u \rangle = \nu(\chi^u)$  ein Element  $v \in N$  und via  $\mu(f) = \nu(f \cdot \chi^0)$  eine Bewertung  $\mu$  auf  $K(Y)$ . Diese Beziehung wird mit  $\nu \sim (\mu, v)$  notiert.

Hat nun  $\mu$  auf  $Y(\mathcal{D})$  ein (eindeutiges) Zentrum  $y$ , dann definiert

$$\mu : \text{CaDiv } Y \rightarrow \mathbf{Q}, \quad D \mapsto \mu(f), \quad \text{wobei } D = \text{div}(f) \text{ bei } y,$$

eine Gewichtsfunktion auf den Cartier-Divisoren, die sich zu einer Funktion  $\mu : \text{CaDiv}_\sigma(Y) \rightarrow \text{Pol}_\sigma^+$  fortsetzt. Falls  $\mu$  kein Zentrum auf  $Y(\mathcal{D})$  besitzt, so setzt man  $\mu(\mathcal{D}) = \emptyset$ .

**Lemma 2.17** ([AHS08], Lemma 7.7). *Die Bewertung  $\nu$  hat genau dann ein Zentrum auf  $X(\mathcal{D})$ , wenn  $\mu$  ein Zentrum auf  $Y(\mathcal{D})$  hat und  $v$  in  $\mu(\mathcal{D})$  liegt.*

*Beweis.* Nehmen wir zuerst an, dass  $\nu$  ein Zentrum auf  $X(\mathfrak{D})$  besitzt. Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass  $\nu$  auf  $A(\mathfrak{D})$  nicht negativ ist. Insbesondere ist also  $\mu = \nu|_{K(X)^T}$  nicht negativ auf

$$\Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}_Y) = A(\mathfrak{D})_0 = A(\mathfrak{D}) \cap K(X)^T.$$

Damit hat  $\mu$  ein Zentrum auf  $Y_0 = \Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}_Y)$ . Da  $Y(\mathfrak{D})$  als semi-projektiv vorausgesetzt war, hat also  $\mu$  auch ein Zentrum auf  $Y(\mathfrak{D})$ .

Nehmen wir jetzt an, dass  $v \notin \mu(\mathfrak{D})$ . Dann existiert ein  $u \in (\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$  mit

$$\langle u, v \rangle < \min \langle u, \mu(\mathfrak{D}) \rangle = \langle u, \mu(\mathfrak{D}) \rangle.$$

Sei nun  $u$  so gewählt, dass  $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(u))$  global erzeugt ist, und sei dann  $f \in \Gamma(Y(\mathfrak{D}), \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u)))$  ein globaler Erzeuger. Lokal um  $y$  gilt also die Darstellung  $\mathfrak{D}(u) = -\text{div}(f)$ . Man erhält

$$\mu(f) = -\mu(\mathfrak{D}(u)) < -\langle u, v \rangle.$$

Damit gälte aber  $\nu(f \cdot \chi^0) < 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei nun  $y \in Y(\mathfrak{D})$  ein Zentrum von  $\mu$ . Für alle  $u \in (\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$  gilt dann  $\mu(\mathfrak{D}(u)) = \min \langle u, \mu(\mathfrak{D}) \rangle < \langle u, v \rangle$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u))) &\Rightarrow \text{div}(f) \geq -\mathfrak{D}(u) \\ &\Rightarrow \mu(f) \geq \mu(-\mathfrak{D}(u)) \geq \langle u, v \rangle \\ &\Rightarrow \nu(f) = \mu(f) + \langle u, v \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

□

*Beweis des Satzes.* Sei  $K(X) \subset K$  und  $\nu$  eine diskrete Bewertung auf  $K$  mit dem Bewertungsring  $\mathcal{O}_\nu$ . Man betrachte das kommutative Diagramm

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \varphi \\ \text{Spec } \mathcal{O}_\nu & \longrightarrow & X(\mathfrak{D}') \end{array}$$

Die Eigentlichkeit des Morphismus  $\varphi$  entspricht dann gerade der Existenz und Eindeutigkeit des diagonalen Morphismus.

Nun definiert  $\nu$  auch eine Bewertung auf  $K(Y)[M]$  und  $\nu' = \nu \circ \varphi^*$  eine Bewertung auf  $K(Y')[M']$ . Für die zugehörigen Daten gilt dabei  $\mu' = \mu \circ \psi^*$  und  $\nu' = F(v) - \mu \circ \mathfrak{f}$ . Da  $\nu'$  nach Voraussetzung ein Zentrum auf  $X(\mathfrak{D})$  hat, korrespondiert die Bewertung  $\nu$  zu einem Paar  $(\mu, v)$ , so dass  $\mu \circ \psi^*$  ein Zentrum auf  $Y(\mathfrak{D}')$  hat und  $F(v) - \mu \circ \mathfrak{f} \in (\mu \circ \psi)^*(\mathfrak{D}')$  gilt. Das ist aber

äquivalent zu der Bedingung  $v \in \mu(\varphi^{-1}\mathfrak{D}')$ . Damit der diagonale Morphismus des Diagramms (2.2) existiert, muss sich ein polyedrischer Divisor  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  finden, so dass  $\nu$  ein Zentrum auf  $X(\mathfrak{D})$  hat, das heißt  $\mu$  ein Zentrum auf  $Y(\mathfrak{D})$  hat und  $v \in \mu(\mathfrak{D})$  gilt. Insgesamt muss also für jede Wahl  $(\mu, v)$  mit einem Zentrum von  $\mu \circ \psi^*$  auf  $Y(\mathfrak{D}')$  und  $v \in \mu(\varphi^{-1}\mathfrak{D}')$  ein  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  existieren, so dass  $\mu$  ein Zentrum auf  $Y(\mathfrak{D})$  hat, und  $v \in \mu(\mathfrak{D})$  gilt. Das ist jedoch äquivalent dazu, dass  $\psi$  eigentlich ist und  $\mu(\varphi^{-1}\mathfrak{D}')$  für jedes  $\mu$  von  $\mu(\mathcal{S})$  überdeckt wird.

Da Zentren auf affinen Varietäten immer eindeutig sind, korrespondiert die Eindeutigkeit des Zentrums von  $\nu \sim (\mu, v)$  auf  $X(\mathcal{S})$  zu der Eigenschaft, dass  $v$  in  $\mu(\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2)$  liegt, falls  $v \in \mu(\mathfrak{D}_1)$  und  $v \in \mu(\mathfrak{D}_2)$  gilt. Das heißt  $\mu(\mathcal{S})$  bildet tatsächlich eine Unterteilung (der Schnitt von Polyedern ist wieder ein Polyeder des Komplexes).

Sei jetzt  $\mu$  eine Bewertung mit Zentrum  $y \in Y$ . Dann gilt  $\mu(Z) > 0$  für alle Primdivisoren  $Z$ , die  $y$  enthalten. Das bedeutet, dass sich  $\mu(\mathcal{S})$  und  $\mathcal{S}_y$  nur in der Gewichtung der Minkowski-Summanden unterscheiden. Der Satz 3.1.7 in [Ilt10] sichert dabei, dass  $\mathcal{S}_y$  genau dann eine vollständige Unterteilung von  $\varphi^{-1}(\mathfrak{D}')_y$  bildet, wenn das für  $\mu(\mathcal{S})$  und  $\mu(\varphi^{-1}(\mathfrak{D}'))$  gilt.  $\square$

**Korollar 2.18** ([AHS08], Thm. 7.5). *Ein divisorieller Fächer auf vollständigem  $Y$  definiert genau dann eine vollständige  $T$ -Varietät, wenn die Anteile  $\mathcal{S}_y$  vollständige Unterteilungen von  $N_{\mathbf{Q}}$  bilden.*  $\square$

Ein wichtiger Spezialfall für eigentliche Morphismen ist der Fall eines divisoriiellen Fächers  $\mathcal{S}$ , der die  $y$ -Anteile eines Divisors  $\mathfrak{D}$  weiter unterteilt. Das heißt es gilt  $|\mathcal{S}_y| = |\mathfrak{D}_y|$ . Dann definiert  $\varphi = (\text{id}, \text{id}, 1)$  eine eigentliche birationale Abbildung zwischen den entsprechenden Varietäten  $X(\mathcal{S})$  und  $X(\mathfrak{D})$ . Dann heißt  $\mathcal{S}$  *Verfeinerung* von  $\mathfrak{D}$ .

**Beispiel 2.19.** Der divisorielle Fächer aus Beispiel 1.26 ist eine Verfeinerung des polyedrischen Divisors aus Beispiel 1.5. Um das zu verdeutlichen, sind in der folgenden Abbildung 2.1 die verfeinernden Elemente gestrichelt eingezeichnet.

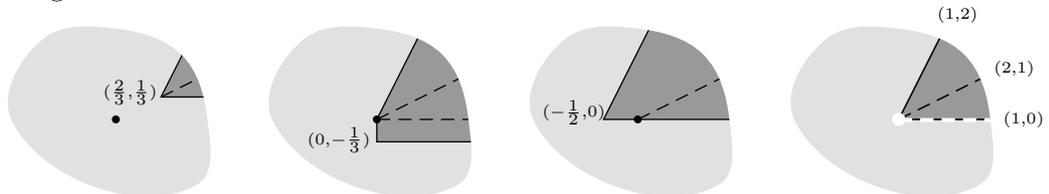


Abbildung 2.1: Ein verfeinerter polyedrischer Divisor.

# Kapitel 3

## Invariante Divisoren

Beim Studium von Divisoren auf  $T$ -Varietäten beschränkt man sich, wie schon bei den Morphismen, auf solche, die kompatibel zur Toruswirkung sind. Kompatibel heißt in diesem Fall, invariant unter der Toruswirkung, d.h. für die Wirkung  $\varphi_t$  eines Toruselementes  $t$  gilt  $D = \varphi_t^* D$ . Dieses Vorgehen wird dadurch gerechtfertigt, dass wie schon im torischen Fall jeder Divisor linear äquivalent zu einem invarianten (Weil-)Divisor ist [FMSS95].

### 3.1 Weil-Divisoren

Ziel dieses Abschnittes ist es, Primdivisoren, das heißt irreduzible abgeschlossene Untervarietäten der Kodimension eins, auf  $T$ -Varietäten zu klassifizieren. Wird diese Untervarietät durch die Toruswirkung in sich selbst überführt, so heißt der Primdivisor invariant. Die Resultate dieses Abschnittes finden sich vollständig in den Arbeiten [PS08] und [HS10] und sind deshalb hier ohne Beweise zitiert.

Die  $T$ -invarianten Primdivisoren lassen sich nach ihrem Bild unter der Quotientenabbildung  $\pi : X \dashrightarrow Y$  in zwei Typen einteilen:

- i. Das Bild *horizontaler* Primdivisoren liegt dicht in  $Y$ .
- ii. Das Bild *vertikaler* Primdivisoren ist selbst ein Primdivisor in  $Y$ .

Die Menge der horizontalen Primdivisoren wird dabei mit  $\mathcal{H}(X)$ , die der vertikalen mit  $\mathcal{V}(X)$  bezeichnet, dabei sei  $\mathcal{V}_Z$  die Teilmenge derjenigen vertikalen Primdivisoren  $D$  mit  $\pi(D) = Z$ . Die Isotropiegruppe des generischen Punktes eines horizontalen Primdivisors hat den Rang eins, während der Torus auf vertikalen Primdivisoren generisch mit endlicher Isotropie wirkt.

Das Urbild eines Primdivisors  $Z \subset Y$  zerfällt in eine endliche Anzahl vertikaler Primdivisoren:  $\pi^{-1}(Z) = \bigcup_{i=1}^r D_i$ . Das Symbol  $\mu(D)$  bezeichnet die Ordnung der generischen Isotropiegruppe für  $D \in \mathcal{V}(X)$  und  $\mu(Z)$  das  $r$ -Tupel  $(\mu(D_1), \dots, \mu(D_r))$ . Ein Primdivisor  $Z \subset Y$  heißt *exceptionell*, falls  $\mu(Z) \neq (1)$ . Ein vertikaler Primdivisor  $D \subset X$  heißt *exceptionell*, falls er im Urbild eines exceptionellen Primdivisors von  $Y$  liegt. Die Menge der exceptionellen vertikalen Primdivisoren wird dann mit  $\mathcal{V}^\times$  bezeichnet.

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor auf  $Y$  mit Schweifkegel  $\sigma$  und weiter sei  $\rho \in \sigma(1)$  ein Strahl. Die homogene Primidealgarbe

$$\mathcal{I}_\rho := \bigoplus_{u \in \sigma^\vee \setminus \rho^\perp} \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u)) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{D})$$

definiert eine invariante, abgeschlossene Teilmenge von  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$ , die mit  $\tilde{E}_\rho$  bezeichnet wird. Ihr Bild  $E_\rho := r(\tilde{E}_\rho)$  in  $X(\mathfrak{D})$  ist dann durch das Primideal  $I_\rho := \Gamma(Y, \mathcal{I}_\rho) \subset A(\mathfrak{D})$  gegeben. Ist  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  ein polyedrischer Divisor in einem Fächer, dann werden die Abschlüsse in  $\tilde{X}(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S})$  ebenfalls mit  $\tilde{E}_\rho$  beziehungsweise  $E_\rho$  bezeichnet.

Ein Strahl  $\rho \in \text{tail } \mathfrak{D}$  heißt *extremal*, falls  $\mathfrak{D}(u)$  für alle  $u \in \text{relint } \rho^*$  big ist. Die Menge aller Strahlen wird im Weiteren auch mit  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{S})$  und die Menge der extremalen Strahlen mit  $\mathcal{H}(\mathcal{S})$  bezeichnet.

**Satz 3.1** ([HS10], Thm. 4.12).

- i. Die Zuordnung  $\rho \mapsto \tilde{E}_\rho$  definiert eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen den Strahlen von  $\mathcal{S}$  und horizontalen Primdivisoren von  $\tilde{X}(\mathcal{S})$ .
- ii. Die Zuordnung  $\rho \mapsto E_\rho$  definiert eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen den extremalen Strahlen von  $\mathcal{S}$  und horizontalen Primdivisoren von  $X(\mathcal{S})$ .

Sei jetzt  $W \subset Y$  ein Primdivisor in  $Y(\mathfrak{D})$  und  $v$  ein Eckpunkt von  $\mathfrak{D}_W$ . Dann wird eine zugehörige Primidealgarbe in  $\mathcal{I}_v \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$  wie folgt definiert

$$\mathcal{I}_v := \bigoplus_{u \in \sigma^\vee} \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u)) \cap \{f \in K(Y) \mid \text{ord}_Z(f) > -\langle u, v \rangle\}.$$

Deren globale Schnitte bilden ein Primideal  $I_v = \Gamma(Y, \mathcal{I}_v) \subset A(\mathfrak{D})$ . Die dadurch definierten abgeschlossenen Teilmengen in  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  und  $X(\mathfrak{D})$  werden ebenso wie ihre Abschlüsse in  $\tilde{X}(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S})$  mit  $\tilde{D}_v$  und  $D_v$  oder auch mit  $\tilde{D}_{Z,v}$  und  $D_{Z,v}$  bezeichnet. Eine Ecke in  $\mathfrak{D}_Z$  heißt *extremal*, falls  $\mathfrak{D}(u)|_Z$  für  $u \in \text{relint}(\mathfrak{D}_Z - v)^\vee$  big ist. Im Folgenden wird für die Menge aller Ecken in  $\mathfrak{D}_Z$  beziehungsweise in  $\mathcal{S}_Z$  die Bezeichnung  $\tilde{\mathcal{V}}_Z(\mathcal{S})$  und für die extremalen Ecken

die Bezeichnung  $\mathcal{V}_Z(\mathcal{S})$  benutzt. Ihre Gesamtheit wird mit  $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) := \dot{\bigcup}_Z \tilde{\mathcal{V}}_Z$  beziehungsweise mit  $\mathcal{V}(\mathcal{S}) := \dot{\bigcup}_Z \mathcal{V}_Z$  bezeichnet. Die Multiplizität einer Ecke sei die kleinste natürliche Zahl  $\mu(v)$ , so dass  $\mu(v)v$  ein Gitterelement ist.

**Satz 3.2** ([HS10], Thm. 4.11).

- i. Die Zuordnung  $v \mapsto \tilde{D}_v$  definiert eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen den Ecken von  $\mathcal{S}_Z$  und vertikalen Primdivisoren von  $\tilde{X}(\mathcal{S})$ , die in  $\tilde{\pi}^{-1}(Z)$  enthalten sind. Dabei gilt  $\mu(v) = \mu(\tilde{D}_v)$ .
- ii. Die Zuordnung  $v \mapsto D_v$  definiert eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen den extremalen Ecken von  $\mathcal{S}_Z$  und vertikalen Primdivisoren von  $X(\mathcal{S})$ , die in  $\pi^{-1}(Z)$  enthalten sind. Dabei gilt  $\mu(v) = \mu(D_v)$ .

Da Primdivisoren  $Z \subset Y$  mit  $\mathcal{V}_Z = \emptyset$  in ihrem Urbild keine Primdivisoren aus  $X(\mathcal{S})$  enthalten, genügt es für das Studium von Weil-Divisoren, sich im Folgenden auf die Teilmenge  $Y^\circ = Y \setminus \bigcup_{\mathcal{V}_Z = \emptyset} Z$  zu beschränken.

Eine semi-invariante Funktion aus  $K(\tilde{X}(\mathcal{D})) = K(X(\mathcal{D}))$  ist ein Quotient homogener Elemente aus  $A(\mathcal{D}) \subset \bigoplus_{u \in M} K(Y) \cdot \chi^u$ . Sie besitzt also eine Standardrepräsentation  $f \cdot \chi^u$  mit  $f \in K(Y)$  und  $u \in M$ . Der folgende Satz charakterisiert nun invariante Hauptdivisoren  $\text{div}(f \cdot \chi^u)$  in  $X(\mathcal{S})$  beziehungsweise  $\tilde{X}(\mathcal{S})$ .

**Satz 3.3** ([PS08], Prop. 3.14). Die invarianten Hauptdivisoren auf  $\tilde{X}(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S})$  sind durch

$$\text{div}(f \cdot \chi^u) = \sum_{\rho \in \tilde{\mathcal{H}}} \langle u, n_\rho \rangle \cdot \tilde{E}_\rho + \sum_Z \sum_{v \in \tilde{\mathcal{V}}_Z} \mu(v) (\langle u, v \rangle + \text{ord}_Z f) \cdot \tilde{D}_v$$

beziehungsweise durch

$$\text{div}(f \cdot \chi^u) = \sum_{\rho \in \mathcal{H}} \langle u, n_\rho \rangle \cdot E_\rho + \sum_Z \sum_{v \in \mathcal{V}_Z} \mu(v) (\langle u, v \rangle + \text{ord}_Z f) \cdot D_v$$

gegeben.

Satz 3.3 erlaubt es auch Primdivisoren von  $Y^\circ$  zurückzuziehen. Man erhält

$$\tilde{\pi}^* Z = \sum_{v \in \tilde{\mathcal{V}}_Z} \mu(v) \cdot \tilde{D}_v, \quad \pi^* Z = \sum_{v \in \mathcal{V}_Z} \mu(v) \cdot D_v.$$

**Satz 3.4** ([PS08], Thm. 3.21). Sei  $K_Y$  ein kanonischer Divisor auf  $Y$ , dann sind

$$K_{\tilde{X}} = \tilde{\pi}^* K_Y + \sum_{v \in \tilde{\mathcal{V}}} (\mu(v) - 1) \tilde{D}_v - \sum_{\rho \in \tilde{\mathcal{H}}} \tilde{E}_\rho \quad \text{und}$$

$$K_X = \pi^* K_Y + \sum_{v \in \mathcal{V}} (\mu(v) - 1) D_v - \sum_{\rho \in \mathcal{H}} E_\rho$$

kanonische Divisoren auf  $\tilde{X}(\mathcal{S})$  beziehungsweise  $X(\mathcal{S})$ .

**Satz 3.5** ([PS08], Cor. 3.15). *Die Divisorenklassengruppe von  $X = X(\mathcal{S})$  ist isomorph zu*

$$\mathrm{Cl} Y^\circ \oplus \bigoplus_{\rho \in \mathcal{H}} \mathbf{Z} E_\rho \oplus \bigoplus_{v \in \mathcal{V}} \mathbf{Z} D_v$$

*modulo der Relationen*

$$\begin{aligned} [Z] &= \sum_{v \in \mathcal{V}_Z} \mu(v) D_v, \\ 0 &= \sum_{\rho \in \mathcal{H}} \langle u, n_\rho \rangle E_\rho + \sum_{v \in \mathcal{H}} \mu(v) \langle u, v \rangle D_v. \end{aligned}$$

**Korollar 3.6** ([PS08], Cor. 3.15). *Insbesondere hat die Klassengruppe den Rang*

$$\mathrm{rang} \mathrm{Cl} Y^\circ + \# \mathcal{H} + \sum_Z \#(\mathcal{V}_Z - 1) - \dim N.$$

*Bemerkung 3.7.* Für den Spezialfall affiner  $k^*$ -Flächen findet man diese Formeln bereits in [FZ03].

**Beispiel 3.8.** Für die vollständige Varietät aus Beispiel 1.17 erhält man mit der Wahl  $K_Y = -2 \cdot \infty$  den kanonischen Divisor  $K_X = -3D_{(1/2, (1/2))}$ .

Die Relationen zwischen den Erzeugern der Klassengruppe sind nach Satz 3.5 durch die Spalten der folgenden Matrix gegeben. Deren Smith-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass die Klassengruppe isomorph zu  $\mathbf{Z}$  ist und die Bilder der invarianten Divisoren  $D_{1,(0,0)}$ ,  $D_{1,(-1,0)}$ ,  $D_{1,(-1,0)}$ ,  $D_{0,(0,0)}$ ,  $D_{0,(0,-1)}$  und  $D_{\infty,(1/2,1/2)}$  jeweils die Klassengruppe erzeugen.

## 3.2 Cartier-Divisoren

Der folgende Abschnitt beschränkt sich im Wesentlichen auf den Fall der Komplexität eins.  $Y$  ist also in der Regel als glatte projektive Kurve vorausgesetzt. Zwar lassen sich die Resultate auch für höhere Komplexität verallgemeinern, aber die benötigten Konstruktionen werden ungleich technischer.

Ähnliche Resultate finden sich bereits in [Tim00], dort sogar allgemeiner für Wirkungen von reductiven Gruppen.

**Lemma 3.9.** *Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor mit projektivem Definitionsbereich  $Y = Y(\mathfrak{D})$ . Dann ist  $\mathrm{Pic} X(\mathfrak{D}) = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $D$  ein invarianter Cartier-Divisor auf  $X = X(\mathfrak{D})$ . Dann existiert eine invariante offene Überdeckung von  $X$ , so dass  $D$  auf den offenen Mengen ein Hauptdivisor ist. Die einzige invariante offene Teilmenge, die den elliptischen Fixpunkt von  $X$  enthält ist jedoch  $X$  selbst. Also ist  $D$  bereits ein Hauptdivisor.  $\square$

Sei  $\Sigma$  eine polyedrische Unterteilung mit dem Support  $|\Sigma| \subset N_\sigma$ . Eine stetige Funktion  $h : |\Sigma| \rightarrow \mathbf{Q}$ , die auf jedem Polyeder  $\Delta \in \Sigma$  affin ist, heißt  $\mathbf{Q}$ -Supportfunktion oder einfach *Supportfunktion*, wenn die Anstiege und Translationen ganzzahlig sind. Die Gruppe der Supportfunktionen wird mit  $\text{SF}(\Sigma)$  bezeichnet, die der  $\mathbf{Q}$ -Supportfunktionen mit  $\text{SF}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)$

Sei nun  $\Delta \in \Sigma$  ein Polyeder, dann ist  $h|_\Delta = \langle u, \cdot \rangle + a$  mit  $u \in M$  und  $a \in \mathbf{Z}$ . Damit sind die linearen Funktionen  $\text{lin } h|_\Delta : \text{tail } \Delta \rightarrow \mathbf{Q}$  durch  $(\text{lin } h|_\Delta)(v) = \langle u, v \rangle$  wohldefiniert. Diese Funktionen fügen sich zu einer stückweise linearen Funktion auf  $\text{tail } \Sigma$  zusammen, die mit  $\text{lin } h$  bezeichnet wird.

Sei nun  $\mathcal{S}$  ein divisorieller Fächer auf einer Kurve  $Y$ . Dann erhält man für jeden Punkt  $y \in Y$  die polyedrische Unterteilung  $\mathcal{S}_y$ . Man definiert die Gruppe der Supportfunktionen  $\widetilde{\text{SF}}(\mathcal{S})$  auf  $\mathcal{S}$  als Menge der Elemente

$$h = (h_y)_{y \in Y} \in \prod_{y \in Y} \text{SF}(\mathcal{S}_y)$$

mit den folgenden Eigenschaften.

**Kohärenz** Die linearen Anteile  $\text{lin}(h_y)$  stimmen für alle  $y \in Y$  überein. Der gemeinsame lineare Anteil wird mit  $\text{lin } h$  bezeichnet.

**Endlichkeit** Nur für eine endliche Menge von Punkten  $y$  gilt  $h_y \neq \text{lin } h$ .

Man kann eine Supportfunktion auf einen Teilfächer  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  oder sogar auf einen polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  einschränken. Diese Einschränkung wird mit  $h|_{\mathcal{S}'}$  beziehungsweise mit  $h|_{\mathfrak{D}}$  bezeichnet.

Sei  $\sigma \in \text{tail } \mathcal{S}$  ein Kegel maximaler Dimension oder markiert, dann existiert in jedem Anteil  $\mathcal{S}_y$  ein eindeutig bestimmtes Polyeder  $\Delta_y$  mit Schweif  $\sigma$ . Dann ist  $h|_{\Delta_y}$  für jedes  $y \in Y$  von der Form  $\langle u, \cdot \rangle + a_y$ . Man kann damit den *Translationsdivisor*  $\text{const } h|_\sigma = \sum_y a_y \cdot y$  definieren. Dieser ist im volldimensionalen Fall eindeutig und im markierten Fall zumindest bis auf lineare Äquivalenz eindeutig gegeben.

**Definition 3.10.** Eine Supportfunktion  $h$  heißt *Cartier*, wenn für jeden markierten maximalen Schweifkegel  $\sigma$  der Divisor  $\text{const } h|_\sigma$  ein Hauptdivisor ist.

Die Menge dieser Supportfunktionen wird mit  $\text{SF}(\mathcal{S})$  bezeichnet.

**Konstruktion 3.11.** Sei  $h \in \text{SF}(\mathcal{S})$  und  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  ein polyedrischer Divisor mit vollständigem Definitionsbereich und volldimensionalem Schweif. Wegen der Cartier-Bedingung ist dann  $h|_{\mathfrak{D}_y} = -\langle u_{\mathfrak{D}}, \cdot \rangle - \text{ord}_y f_{\mathfrak{D}}$  für ein Gitterelement  $u_{\mathfrak{D}} \in M$  und eine rationale Funktion  $f_{\mathfrak{D}} \in K(Y)$ .

Sei  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  ein polyedrischer Divisor mit affinem Definitionsbereich. Dann kann man eine affine Überdeckung  $\{U_i\}_i$  von  $Y(\mathfrak{D})$  wählen, so dass wiederum  $h|_{\mathfrak{D}_y} = -\langle u_{\mathfrak{D}}^i, \cdot \rangle - \text{ord}_y f_{\mathfrak{D}}^i$  für  $y \in U_i$ ,  $u_{\mathfrak{D}}^i \in M$  und  $f_{\mathfrak{D}}^i \in K(Y)$  gilt.

Dann definieren die Paare  $(X(\mathfrak{D}), f_{\mathfrak{D}} \cdot \chi^{u_{\mathfrak{D}}})$  und  $(X(\mathfrak{D}|_{U_i}), f_{\mathfrak{D}}^i \cdot \chi^{u_{\mathfrak{D}}^i})$  einen Cartier-Divisor auf  $X(\mathcal{S})$ , wie sich mittels Satz 3.3 leicht überprüfen lässt. Dieser Cartier-Divisor wird mit  $D_h$  bezeichnet.

**Proposition 3.12.** *Sei  $h$  eine Supportfunktion auf  $\mathcal{S}$ . Die zugehörigen Weil-Divisoren sind dann durch*

$$-\sum_{\rho \in \tilde{\mathcal{H}}} (\text{lin } h)(n_{\rho}) \cdot \tilde{E}_{\rho} - \sum_y \sum_{v \in \tilde{\mathcal{V}}_y} \mu(v) \cdot h_y(v) \cdot \tilde{D}_v$$

beziehungsweise durch

$$-\sum_{\rho \in \mathcal{H}} (\text{lin } h)(n_{\rho}) \cdot \tilde{E}_{\rho} - \sum_y \sum_{v \in \mathcal{V}_y} \mu(v) \cdot h_y(v) \cdot \tilde{D}_v$$

gegeben.

*Bemerkung 3.13.* Dies liefert eine 1-zu-1-Beziehung zwischen T-invarianten Cartier-Divisoren und Elementen aus  $\text{SF}(\mathcal{S})$ . Außerdem zeigt die Konstruktion 3.11 zusammen mit Beispiel 1.18, dass dann die Elemente aus  $\tilde{\text{SF}}(\mathcal{S})$  den Cartier-Divisoren auf  $\tilde{X}(\mathcal{S})$  entsprechen.

Sei  $h$  eine Supportfunktion auf  $\mathcal{S}$ . Dann definiert man das dazugehörige *Gewichtspolyeder*

$$\square_h = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, \cdot \rangle \geq \text{lin } h\}$$

und die *duale Funktion*  $h^* : \square_h \rightarrow \text{Div}_{\mathbf{R}}(Y)$  wie folgt:

$$h^*(u) = \sum_y h_y^*(u) \cdot y = \sum_y \min_{v \in \mathcal{V}_y} (u - h_y)(v) \cdot y.$$

**Satz 3.14** ([PS08], Prop. 3.23). *Sei  $D_h$  ein invarianter Cartier-Divisor auf  $X(\mathcal{S})$ . Dann gilt für die globalen Schnitte*

$$\Gamma(X, D_h) = \bigoplus_{u \in \square_h \cap M} \Gamma(Y, h^*(u)).$$

*Beweis.* Sei  $g = f \cdot \chi^u$  eine homogene Funktion. Dann gilt  $g \in \Gamma(X, D_h)_u$  genau dann, wenn  $\text{div}(g) + D_h$  effektiv ist. Aus Proposition 3.12 und Satz 3.3 folgt damit, dass  $\langle u, n_\rho \rangle \geq (\text{lin } h)(n_\rho)$  für  $n_\rho \in \mathcal{H}$  und

$$\mu(v)(\langle u, v \rangle + \text{ord}_y f) \geq \mu(v)h_y(v)$$

für alle  $v \in \mathcal{V}_y$  gilt. Ersteres bedeutet, dass  $u \in \square_h$  und letzteres, dass  $\text{ord}_y f \geq -h_y^*(u)$  gilt. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.15** ([PS08], Thm. 3.27). *Sei  $h \in \text{SF}(\mathcal{S})$ . Dann ist  $D_h$  genau dann semi-ample, wenn  $h$  konkav ist und für volldimensionales  $\sigma \in \text{tail } \mathfrak{D}$  der Divisor  $-(\text{const } h|_\sigma)$  semi-ample ist (das heißt von positivem Grad oder ein Hauptdivisor).*

*Beweis.* Aus der Konkavität von  $h$  folgt die des linearen Anteils  $\text{lin } h$ . Dann sind die Ecken von  $\square_h$  gerade durch den linearen Anteil von  $h$  auf einem maximalen Schweifkegel  $\sigma \in \text{tail } \mathcal{S}$  gegeben, und es gilt  $h^*(u) = -\text{const } h|_\sigma$ .

Nach Voraussetzung ist also  $h^*(u_i)$  semi-ample auf den Ecken  $u_i$  von  $\square_h$ . Nach Konstruktion ist  $h^*$  ebenfalls eine konkave Funktion. Für einen Punkt  $u = \sum_i \lambda_i u_i \in \square_h$  erhält man also  $h^*(u) \geq \sum \lambda_i h^*(u_i)$ . Damit hat  $h^*$  entweder positiven Grad oder ist eine Linearkombination von Hauptdivisoren und damit selbst ein  $\mathbf{Q}$ -Hauptdivisor.

Sei jetzt  $f \cdot \chi^u$  einer der Erzeuger von  $\mathcal{O}(D_h)$  auf einer offenen Menge  $X(\mathfrak{D})$  aus der Konstruktion 3.11, das heißt  $h_y|_{\mathfrak{D}_y} = \langle u, v \rangle + \text{ord}_y f$ . Wegen der Konkavität von  $h$  liegt dann  $u$  in  $\square_h$  und es existiert ein  $f' \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(mh^*(u)))$ , so dass die Divisoren  $\text{div}(f') = \text{div}(f^m)$  auf  $Y(\mathfrak{D})$  übereinstimmen. Nach Satz 3.14 ist  $f' \cdot \chi^{mu}$  dann ein globaler Schnitt des Divisors  $m \cdot D_h = D_{m \cdot h}$ .

Für die Umkehrung sei nun  $y \in Y$  ein Punkt, so dass  $h_y$  nicht konkav ist. Dann existiert ein affiner Bereich  $\langle u, \cdot \rangle + a$  der Funktion  $h$ , so dass  $a > h_y^*(u)$ . Damit kann es keinen globalen Schnitt  $f \cdot \chi^u \in \Gamma(X(\mathcal{S}), \mathcal{O}(D_h))$  geben, so dass  $\text{ord}_y(f) = a$ . Dass Gleiche gilt offensichtlich für die Vielfachen von  $D_h$ . Der Divisor kann dann also nicht semi-ample sein.  $\square$

**Satz 3.16** ([PS08], Cor. 3.28). *Sei  $h \in \text{SF}(\mathcal{S})$ . Dann ist  $D_h$  genau dann ample, wenn  $h_y$  streng-konkav auf  $\mathcal{S}_y$  ist und  $\text{const } h|_\sigma < 0$  gilt, falls  $\sigma$  ein unmarkierter maximaler Schweifkegel ist.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen Satz, wenn man in Betracht zieht, dass  $D_h$  genau dann ample ist, wenn zu jedem  $h'$  der Divisor  $D_{h'} + mD_h = D_{h'+mh}$  für  $m \gg 0$  semi-ample ist.  $\square$

**Korollar 3.17** ([PS08], Cor. 3.29).  *$D_h$  ist genau dann nef, wenn  $h$  konkav ist und  $(\text{const } h|_\sigma) \leq 0$  für alle maximalen Schweifkegel  $\sigma$  gilt.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 3.16, da  $D_h$  genau dann nef ist, wenn  $D_h + \varepsilon \cdot D_{h'} = D_{h+\varepsilon h'}$  für jeden amplen Divisor  $D_{h'}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ample ist.  $\square$

Ein vollständiger divisorieller Fächer  $\mathcal{S}$  beschreibt also eine Fano-Varietät, falls eine streng konvexe Supportfunktion  $h \in \text{SF}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{S})$  existiert, so dass

$$h(v) = K_Y(y) + 1 - \frac{1}{\mu(v)},$$

und dabei  $\deg(\text{const } h|_{\sigma}) < 0$  gilt, sofern  $\sigma$  unmarkiert ist.

Zu einem Punkt  $y \in Y$  betrachtet man  $\Sigma_y$ , den Fächer über dem kompakten Anteil von  $\mathcal{S}_y$  in  $N_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{Q}$ . Dessen Kegel ergeben sich als Kegel über den kompakten Polyedern  $\Delta \in \mathcal{S}_Y$ :  $\sigma(\Delta) = \mathbf{Q}^+ \cdot \Delta \times \{1\}$ .

Damit ergibt sich folgendes notwendiges Fano-Kriterium

**Satz 3.18.** *Falls  $X(\mathcal{S})$  Fano ist, so gilt das auch für die torischen Varietäten zu den Fächern  $\Sigma_y$ , d.h. die Punkte*

$$\{\mu(v) \cdot (1, v) \mid v \in \mathcal{V}_y\}$$

*bilden die Ecken eines konvexen Polytopes.*

*Beweis.* Es ist leicht zu überprüfen, dass aus der Konvexität von  $h_y$  auch die Konvexität der Homogenisierung  $\bar{h} : (v, \mu) \mapsto \mu \cdot h(v/\mu)$  folgt. Darüber hinaus ist  $h$  genau dann auf dem kompakten Teil von  $\mathcal{S}_y$  streng konvex, wenn das Gleiche für  $\bar{h}$  auf  $\Sigma_y$  gilt. Dann ist auch  $\bar{h}' : (v, \mu) \mapsto \bar{h}(v) - \mu \cdot (K_Y(y) + 1)$  streng konvex auf  $\Sigma_y$ . Nach Konstruktion gilt aber  $\bar{h}'(v, \mu(v)) = -1$  für eine Ecke  $v \in \mathcal{V}_y$ . Damit beschreibt  $\bar{h}'$  einen kanonischen Divisor auf  $X_{\Sigma_y}$ .  $\square$

Für eine Supportfunktion  $h$  definiert man das *Volumen*

$$\text{vol } h = \int_{\square_h} \deg \circ h^* \text{ vol}_{M_{\mathbf{R}}}.$$

Dabei bezeichnet  $\text{vol}_{M_{\mathbf{R}}}$  die Standardvolumenform auf  $M_{\mathbf{R}}$ , die durch die Auszeichnung des Gitters  $M \subset M_{\mathbf{R}}$  bestimmt wird.

**Satz 3.19** ([Tim00], Thm. 8; [PS08], Prop. 3.31). *Sei  $\mathcal{S}$  ein vollständiger divisorieller Fächer auf einer Kurve  $Y$  und  $D_h$  ein semi-ampller Cartier-Divisor auf  $X = X(\mathcal{S})$ , dann gilt für die Selbstschnittzahl des Divisors*

$$(D_h)^{\dim X} = \dim X! \cdot \text{vol } h.$$

*Beweis.* Sei  $n = \dim N = \dim X - 1$ . Da  $D_h$  als nef vorausgesetzt wird, gilt nach [Laz04, Thm 1.4.41]

$$(D_h)^{n+1} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\nu^{n+1}} h^0(X, \mathcal{O}(\nu D_h)).$$

Berücksichtigt man, dass  $(\nu h)^*(u) = \nu \cdot h^*(\frac{1}{\nu}u)$  gilt, so lässt sich  $h^0 = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}(D_h))$  wie folgt abschätzen.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sum_{u \in \nu \square_h \cap M} \left( \deg[\nu h^* \left( \frac{1}{\nu}u \right)] - g(Y) + 1 \right) &\leq h^0(\mathcal{O}(\nu D_h)) \\ &\leq \sum_{u \in \nu \square_h \cap M} \deg[\nu h^* \left( \frac{1}{\nu}u \right)] + 1. \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\nu^{n+1}} \sum_{u \in \nu \square_h \cap M} \deg[\nu h^* \left( \frac{1}{\nu}u \right)] &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\nu^n} \sum_{u \in \square_h \cap \frac{1}{\nu}M} \frac{1}{\nu} \deg[\nu h^*(u)] \\ &= (n+1)! \int_{\square_h} (\deg \circ h^*) \operatorname{vol}_{M_{\mathbf{R}}}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu^{n+1}} \sum_{u \in \nu \square_h \cap M} (g-1) = (g-1) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\#(\nu \cdot \square_h \cap M)}{\nu^{n+1}} = 0.$$

Geht man nun in der Gleichung (3.1) zum Limes über, dann konvergiert der Term in der Mitte gegen  $\dim X! \cdot \operatorname{vol} h^*$ .  $\square$

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor mit volldimensionalem Schweif  $\sigma$  und affinem Definitionsbereich. Falls  $v \in \operatorname{relint} \sigma$ , so ist  $I = \bigoplus_{u, \langle u, v \rangle > 0} A(\mathfrak{D})_u$  ein Primideal und  $A(\mathfrak{D})/I$  ist isomorph zu  $A_0 = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Das Ideal  $I$  beschreibt also eine abgeschlossene Untervarietät von  $X(\mathfrak{D})$  mit trivialer Toruswirkung, die isomorph zu  $Y(\mathfrak{D})$  ist.

Für den kompletten Fall der Komplexität eins erhält man also eine Korrespondenz zwischen unmarkierten maximalen Schweifkegeln  $\sigma \in \operatorname{tail} \mathcal{S}$  und Fixpunktcurven  $C_\sigma \subset X(\mathfrak{D})$ .

**Satz 3.20.** *Für die Schnitzzahl zwischen einer Kurve  $C_\sigma$  und einem Cartier-Divisor  $D_h$  gilt  $C_\sigma \cdot D_h = -\operatorname{deg} \operatorname{const} h|_\sigma$ .*

*Beweis.* Nach der Konstruktion 3.11 ist  $D_h$  in einer Umgebung der Kurve  $C_\sigma$  durch den Divisor  $\text{div}(\chi^u) - \pi^* \text{const } h|_\sigma$  gegeben. Mit der Projektionsformel erhält man also

$$C_\sigma \cdot D_h = -\pi_* C_\sigma \cdot \text{const } h|_\sigma = -\text{deg}(\text{const } h|_\sigma).$$

□

**Beispiel 3.21.** Man betrachte wieder die vollständige Varietät  $X$  aus Beispiel 1.17. Der Divisor  $3D_{(1/2, (1/2))}$  war ein anti-kanonischer Divisor dieser Varietät.

Nun seien folgende stückweise affinen Funktionen  $h_1, h_0, h_\infty$  gegeben

$$\begin{aligned} h_1(v) &= \min \left( \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle - 3, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v \right\rangle \right), \\ h_0(v) &= \min \left( \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle - 3, \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v \right\rangle \right), \\ h_\infty(v) &= \min \left( \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle + 3, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle + 3, \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Dann definiert  $h$  ein Element aus  $\text{SF}(\mathcal{S})$ , und der zugehörige Weil-Divisor ist gerade  $-K_X$  (Satz 3.12). In der folgenden Abbildung 3.1 sind  $h$  und  $h^*$  skizziert. Dabei ist  $h$  offensichtlich streng konvex und  $-K_X$  also ample. Man erhält auch  $\text{vol } h = (-K_X)^3 = 28$ . Nach der Klassifikation der Fano-Dreifaltigkeiten ([Isk78]) ist  $X$  also eine glatte Quadrik in  $\mathbf{P}^4$ .

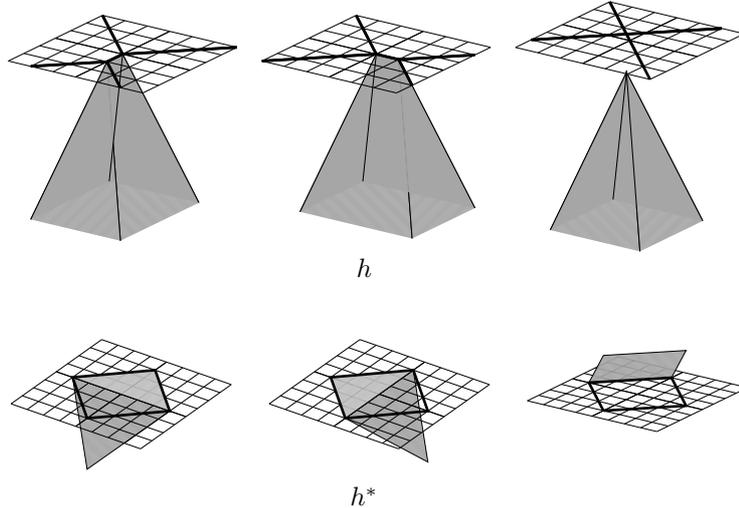


Abbildung 3.1: Eine Supportfunktion und ihre duale Funktion.

# Kapitel 4

## Cox-Ringe

Für eine normale Varietät  $X$  mit endlich erzeugter Klassengruppe  $\text{Cl}(X)$  und  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$  betrachtet man die mit einer (bis auf Isomorphie) kanonischen Multiplikation versehene  $\text{Cl}(X)$ -graduierte  $k$ -Algebra

$$\mathcal{R}(X) = \bigoplus_{[D] \in \text{Cl}(X)} \Gamma(X, \mathcal{O}(D)).$$

Diese Algebra wird als Cox-Ring von  $X$  oder auch als totaler Koordinatenring bezeichnet.

Während projektive Koordinatenringe von der gewählten Einbettung abhängig sind, ist der Cox-Ring eine echte Invariante der Varietät [BH03]. Das macht ihn ähnlich wie den (anti-)kanonischen Ring zu einem geeigneten Hilfsmittel zur Lösung von Klassifikationsproblemen.

### 4.1 Definition und Eigenschaften

Eine genaue Konstruktion der Multiplikationsabbildung findet sich in [BH03] und wird hier wiedergegeben. Vor der eigentlichen Konstruktion bedarf es zunächst einiger Vorarbeit. Es sei  $\Lambda \subset \text{Div}(X)$  eine (frei erzeugte) Untergruppe, die surjektiv auf  $\text{Cl}(X)$  abgebildet wird. Die Untergruppe der Hauptdivisoren in  $\Lambda$  wird mit  $\Lambda_0$  bezeichnet.

Die Multiplikation im Funktionenkörper  $K(X)$  induziert die Multiplikation der  $\Lambda$ -graduierten  $\mathcal{O}_X$ -Algebra

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{D \in \Lambda} \mathcal{S}_D = \bigoplus_{D \in \Lambda} \mathcal{O}(D).$$

Für  $D \sim D' \in \Lambda$  sind die zugehörigen Garben  $\mathcal{O}(D)$  und  $\mathcal{O}(D')$  isomorph. Allerdings ist ein solcher Isomorphismus nicht eindeutig und es existiert auch

keine kanonische Wahl. Es lässt sich jedoch ein kompatibles System solcher Isomorphismen konstruieren. Dazu wählt man eine Basis  $(H_i)_{i \in I}$  von  $\Lambda_0$  und Elemente  $\phi_{H_i} \in K(X)$ , so dass  $\text{div}(\phi_{H_i}) = H_i$ . Vermittels linearer Fortsetzung definiert das einen Gruppenhomomorphismus  $\Lambda_0 \rightarrow K(X)^*$ ,  $H \mapsto \phi_H$ . Für einen Schnitt  $f \in \mathcal{S}_D \subset K(X)$  kann das Produkt  $\phi_H(f) := \phi_H \cdot f \in K(X)$  als Element von  $\mathcal{S}_{D+H}$  interpretiert werden. Man erhält eine sogenannte *Identifikationsfamilie*  $\phi = (\phi_H)_{H \in \Lambda_0}$ , d.h. eine Familie von  $\mathcal{S}$ -Modul-Isomorphismen  $\phi_H : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  mit den folgenden Eigenschaften

- i.  $\phi_H(\mathcal{S}_D) = \mathcal{S}_{D+H}$ ,
- ii.  $\phi_{H+H'} = \phi_H \circ \phi_{H'}$ .

Insbesondere gilt auch

- iii.  $(\phi_H(f))_0 = (f)_0$ .

Umgekehrt lässt sich jede solche Familie über diesen Weg konstruieren.

Nun definiert die surjektive Abbildung  $\Lambda \rightarrow \text{Cl } X$  eine  $\text{Cl}(X)$ -Graduierung auf  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{[D] \in \text{Cl}(X)} \mathcal{S}_{[D]}, \quad \mathcal{S}_{[D]} = \bigoplus_{D' \sim D} \mathcal{O}(D').$$

Sei  $(\phi_H)_H$  eine Identifikationsfamilie. Dann ist die Idealgarbe  $\mathcal{I}$ , die von den Schnitten  $f - \phi_H(f)$  erzeugt wird, homogen bezüglich dieser Graduierung. Die  $\text{Cl}(X)$ -graduierte  $\mathcal{O}_X$ -Algebra  $\mathcal{R} = \mathcal{S}/\mathcal{I}$  wird als *Cox-Garbe* bezeichnet und die globale Schnitte  $\mathcal{R}(X) = \Gamma(X, \mathcal{R})$  als *Cox-Ring*.

Es zeigt sich, dass Cox-Garbe und Cox-Ring damit bis auf Isomorphie wohldefiniert sind. D.h. andere Wahlen von  $\Lambda$ ,  $H_i$  und  $\phi_{H_i}$  liefern isomorphe Objekte  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}(X)$ .

Den effektiven Divisoren  $E$  in  $X$  werden spezielle Elemente des Cox-Rings zugeordnet, nämlich die Bilder eines Schnittes  $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$  mit  $(s)_0 = E$ . Solche Elemente heißen kanonische Schnitte des Primdivisors  $E$ .

Sie sind nur bis auf Multiplikation mit  $\mathcal{R}(X)^* = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$  eindeutig bestimmt. Für jeden Primdivisor  $Z$  wird daher ein Repräsentant gewählt und mit dem Symbol  $1_Z$  bezeichnet. Die getroffene Wahl sei dann im Weiteren fixiert. Für einen beliebigen effektiven Divisor  $E = \sum_Z \alpha_Z Z$  bezeichnet  $1_E$  dann das Produkt  $\prod_Z (1_Z)^{\alpha_Z}$ .

**Lemma 4.1.**  *$\mathcal{R}(X)$  wird als  $k$ -Algebra von den kanonischen Schnitten erzeugt.*

*Beweis.* Sei  $\bar{s}$  das Bild des Schnittes  $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) = \Gamma(X, \mathcal{S}_D)$  im Cox-Ring. Der Verschwindungsdivisor sei gegeben durch  $(s)_0 = \sum \alpha_i Z_i$ . Dann existieren  $D_i \in \Lambda$  mit  $D_i \sim Z_i$ , d.h. es existieren  $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D_i))$  mit  $(s_i)_0 = Z_i$ . Es gilt nun  $D = H + \sum \alpha_i D_i$  für ein  $H \in \Lambda_0$ . Sei dann  $s' = \phi_H(s)$ . Dann gilt  $(s')_0 = (s)_0 = \sum_i \alpha_i \cdot (s_i)_0$ , d.h. bis auf Multiplikation mit einem Element aus  $k^*$  gilt  $s' = \prod_i s_i^{\alpha_i}$  und damit auch  $\bar{s} = \bar{s}' = \prod_i \bar{s}_i^{\alpha_i}$ .  $\square$

In der relativen Situation einer dominanten Abbildung  $\pi : X \rightarrow Y$  kann  $\Lambda_X$  so gewählt werden, dass  $\pi^* \Lambda_Y \subset \Lambda_X$  gilt. Dies liefert eine Inklusion  $\pi^* : \Gamma(Y, \mathcal{S}_Y) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{S}_X)$ . Darüber hinaus kann eine Identifikationsfamilie auf  $\mathcal{S}_Y$  zu einer Identifikationsfamilie auf  $\mathcal{S}_X$  fortgesetzt werden, d.h. wir setzen  $\phi_{\pi^* H_i}^X = \pi^* \phi_{H_i}^Y$ . Mit dieser Wahl steigt die Inklusion  $\Gamma(Y, \mathcal{S}_Y) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{S}_X)$  zu einem (nicht notwendig injektiven) Homomorphismus  $\mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$  ab, der bis auf einen Charakter  $\text{Pic } Y \rightarrow k^*$  eindeutig gegeben ist, und der ebenfalls mit  $\pi^*$  bezeichnet wird.  $\pi^*$  ist dann gegeben durch die Vorschrift  $1_Z \rightarrow 1_{\pi^* Z}$ . Falls  $\pi^* : \text{Cl } Y \rightarrow \text{Cl } X$  injektiv ist, so gilt das auch für den Homomorphismus der Cox-Ringe, da dann zwei Schnitte in  $\pi^* \Gamma(Y, \mathcal{S}_Y)$  genau dann mittels  $\phi^X$  identifiziert werden, wenn die entsprechenden Schnitte in  $\Gamma(Y, \mathcal{S}_Y)$  bereits durch  $\phi^Y$  identifiziert wurden.

## 4.2 Cox-Ringe von T-Varietäten

Ist die Varietät mit einer Wirkung eines Torus  $T = \text{Spec } k[M]$  versehen, so kann man  $\Lambda$  als Untergruppe von *invarianten* Divisoren wählen. Die Schnitte der invarianten Divisoren tragen dann eine natürliche  $M$ -Graduierung. Das liefert eine  $M \times \Lambda$ -Graduierung auf  $\mathcal{S}$ . Offensichtlich können auch die Elemente  $\phi_H$  als  $M$ -homogen gewählt werden. Die  $M \times \Lambda$ -Graduierung lässt sich zu einer Graduierung durch

$$L := (M \times \Lambda) / \langle (\deg(\phi_H), H) \mid H \in \Lambda_0 \rangle$$

vergrößern. Das Ideal  $\mathcal{I}$  ist wiederum homogen bezüglich dieser Graduierung, damit sind  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}(X)$  ebenfalls durch  $L$  graduiert.

Völlig analog zu Lemma 4.1 lässt sich dann zeigen, dass  $\mathcal{R}(X)$  bereits durch die kanonischen Schnitte der invarianten Primdivisoren erzeugt wird. Man betrachte die folgende Abbildung

$$F : M \times \text{Div}^T X \rightarrow (M \times \text{Div}^T X) / \langle (\deg(f), \text{div}(f)) \mid f \in K(X)^{\text{hom}} \rangle \cong L.$$

Die Grade der kanonischen Elemente von invarianten Primdivisoren sind dann durch  $\deg(1_D) = F(0, D)$  gegeben.

Ziel dieses Abschnittes ist es nun, den Cox-Ring von einer T-Varietät  $X$  mit dem ihres Quotienten  $Y$  in Beziehung zu setzen. Dieser Ansatz findet sich für GIT-Quotienten von affinen und projektiven Varietäten bereits in [HK00]. Entscheidend ist in jedem Fall die Wahl des zu betrachtenden Quotienten.

Ein möglicher Kandidat ist der nicht notwendig separierte geometrische Quotient  $X_0/T$ , den man nach Entfernen der niederdimensionalen Bahnen erhält. Bei [Mum65] ist das die Prävarietät  $X^s(\text{Pre})/T$ . Dieser Ansatz wurde in [HS10] verfolgt und auch auf eine sogenannte *Separierung* von  $X_0/T$  ausgeweitet. Die Konstruktion über divisorielle Fächer legt jedoch bereits eine Quotientenabbildung nahe, nämlich  $\pi : X(\mathcal{S}) \dashrightarrow Y$ . Man beschränkt dann noch den Bildbereich auf  $Y^\circ \subset Y$ , wobei  $Y^\circ = Y \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{V}_Z} Z$ . D.h. man entfernt die Primdivisoren aus  $Y$ , die von  $\pi$  nicht getroffen werden. Insbesondere existiert also zu einer T-Varietät  $X$  eine Quotientenabbildung  $\pi : X \dashrightarrow Y^\circ$  mit den folgenden Eigenschaften.

- i.  $\pi$  ist invariant und dominant, und es gilt  $\pi^*K(Y^\circ) = K(X)^T$ .
- ii. Der Unbestimmtheitsort von  $\pi$  sowie  $Y^\circ \setminus (\text{im } \pi)$  haben eine Kodimension von mindestens zwei.
- iii. Das Urbild eines Punktes in  $Y^\circ$  enthält nur eine endliche Menge von Bahnen. Insbesondere ist der Abschluss des Bildes eines Primdivisors in  $X$  entweder ganz  $Y^\circ$  oder selbst ein Primdivisor in  $Y^\circ$ .

*Bemerkung 4.2.* In [HS10] wurde gezeigt, dass  $Y^\circ$  mit der oben erwähnten Separierung des geometrischen Quotienten bis auf eine Menge der Kodimension  $\geq 2$  übereinstimmt.

Für einen Primdivisor  $Z \subset Y^\circ$  ist  $\pi^*Z = \sum_{i=1}^r \mu_i D_i$  ein invarianter Weil-Divisor. Damit wurden die folgenden Werte definiert:  $\mu(D_i) := \mu_i$  und  $\mu(Z) := (\mu_1, \dots, \mu_r)$  sowie die Menge der *vertikalen* Primdivisoren über  $Z$

$$\mathcal{V}_Z := \{D_1, \dots, D_r\}.$$

Primdivisoren  $Z$  mit  $\mu(Z) \neq (1)$  heißen dann exzeptionell, ebenso die invarianten Primdivisoren in  $\mathcal{V}_Z$ . Die Gesamtheit der exzeptionellen vertikalen Primdivisoren auf  $X$  wurde mit  $\mathcal{V}^\times$  bezeichnet. Die invarianten Primdivisoren  $E$  mit  $\overline{\pi(E)} = Y^\circ$  heißen *horizontale* Primdivisoren, ihre Gesamtheit wurde mit  $\mathcal{H}$  bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende

**Satz 4.3** ([HS10], Thm. 1.2, Cor. 4.8). *Sei  $X$  eine T-Varietät, so dass alle globalen invertierbaren Funktionen konstant sind. Dann ist*

$$\mathcal{R}(Y^\circ) \left[ T_D, S_E \mid E \in \mathcal{H}, D \in \mathcal{V}^\times \right] / \left( 1_Z - \prod_{D \in \mathcal{V}_Z} T_D^{\mu(D)} \mid Z \subset Y^\circ \text{ exz.} \right)$$

der Cox-Ring von  $X$ . Die  $\text{Cl}(X)$ -Graduierung ist dann durch

$$\deg(T_D) = [D] \quad \text{und} \quad \deg(S_E) = [E]$$

und die feinere  $L$ -Graduierung durch

$$\deg_L(T_D) = F(0, D) \quad \text{und} \quad \deg_L(S_E) = F(0, E)$$

gegeben.

*Beweis.* Um die Cox-Ringe von  $X$  und  $Y^\circ$  gemäß der obigen Definition darzustellen, wählt man zuerst  $\Lambda^Y \subset \text{Div } Y^\circ$  und dann  $\Lambda^X = \pi^* \Lambda^Y + \langle \mathcal{V}^\times \cup \mathcal{H} \rangle$ . Entsprechend setzt man  $\pi^* \phi^Y$  zu einer Identifikationsfamilie  $\phi^X$  auf  $\mathcal{S}_X$  fort. Dabei sind die Elemente aus  $\pi^* \phi^Y$  gerade die vom  $M$ -Grad 0.

Sei jetzt  $\pi^* f \in \mathcal{S}_X$  und  $\pi^* f - \phi_H^X(\pi^* f)$  eine  $\text{Cl}(X)$ -homogene Relation in  $\mathcal{I}_X$ , dann ist entweder  $\phi_H^X(\pi^* f) \notin \mathcal{S}_X \cap K(X)^T$  oder  $\deg \phi_H^X = 0$ , das heißt  $H = \pi^* H'$  mit  $H' \in \Lambda_0^Y$ . Dann war aber  $f - \phi_{H'}^Y f$  bereits eine Relation in  $\mathcal{I}_Y$ . Folglich ist die induzierte Abbildung  $\pi^* : \mathcal{R}(Y^\circ) \rightarrow \mathcal{R}(X)$  eine Inklusion.

$\mathcal{R}(X)$  wird durch die kanonischen Schnitte der invarianten Primdivisoren erzeugt. Für den Rückzug von Divisoren gilt die Formel  $\pi^* Z = \sum_{D \in \mathcal{V}_Z} \mu(D) D$ . Es folgt damit, dass  $\pi^* 1_Z = 1_{\pi^* Z} := \prod_{D \in \mathcal{V}_Z} 1_D^{\mu(D)}$  gilt.

Die invarianten Primdivisoren in  $X$  sind entweder exzeptionell, das heißt aus  $\mathcal{H}$  oder  $\mathcal{V}^\times$ , oder von der Form  $\pi^* Z$ . Damit ist  $\mathcal{R}(X)$  als  $\mathcal{R}(Y^\circ)$ -Algebra bereits durch die Elemente  $1_E, 1_D$  erzeugt, wobei  $E \in \mathcal{H}$  und  $D \in \mathcal{V}^\times$ .

Es verbleibt zu zeigen, dass der Kern der  $L$ -homogenen Abbildung

$$\mathcal{R}(Y^\circ)[T_D, S_E] \rightarrow \mathcal{R}(X); \quad T_E \mapsto 1_E, T_D \mapsto 1_D$$

bereits durch die Elemente  $1_Z - \prod_{D \in \mathcal{V}_Z} T_D^{\mu(D)}$  erzeugt wird. Sei also  $g = \sum \lambda_i T^{\alpha_i} S^{\beta_i}$  ein  $L$ -homogenes Element aus dem Kern. Dabei bezeichnen die  $T^{\alpha_i} S^{\beta_i}$  Monome in  $T_D$  und  $S_E$ . Wegen der  $L$ -Homogenität gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \deg_L(T^{\alpha_i} S^{\beta_i}) - \deg_L(T^{\alpha_1} S^{\beta_1}) \\ &= F\left(0, \sum_D ((\alpha_i)_D - (\alpha_1)_D) D + \sum_E ((\beta_i)_E - (\beta_1)_E) E\right) \end{aligned}$$

für alle  $i$ . Nach Definition von  $F$  gilt daher

$$\sum_D ((\alpha_i)_D - (\alpha_1)_D) D + \sum_E ((\beta_i)_E - (\beta_1)_E) E = \text{div}(f)$$

mit  $\deg(f) = 0$ , d.h.  $f = \pi^* f'$ . Insbesondere gilt also

$$\sum_D ((\alpha_i)_D - (\alpha_1)_D) D + \sum_E ((\beta_i)_E - (\beta_1)_E) E = \pi^* \text{div}(f').$$

Nach Reduktion von  $g$  mit Elementen der Form  $1_Z - \prod_{D \in \mathcal{V}_Z} T_D^{\mu(D)}$  kann man deshalb annehmen, dass der Divisor sogar verschwindet. Damit erhält man jedoch  $g = (\sum_i \lambda'_i) \cdot T^{\alpha_1} S^{\beta_1}$ . Das Bild von  $T^{\alpha_1} S^{\beta_1}$  in  $\mathcal{R}(X)$  ist jedoch ein kanonischer Schnitt von  $\sum_D (\alpha_1)_D D + \sum_E (\beta_1)_E E$ , insbesondere also nicht null. Das heißt  $(\sum_i \lambda'_i)$  und somit  $g$  mussten bereits null gewesen sein.  $\square$

**Korollar 4.4.** *Der Cox-Ring von  $X$  ist genau dann endlich erzeugt, wenn der Cox-Ring von  $Y^\circ$  endlich erzeugt ist.*

*Beweis.* Sei  $R := \mathcal{R}(Y^\circ)$  und  $\mathcal{R}(X)$  sei endlich erzeugt. Wählt man nun zu jedem exzeptionellen  $Z \subset Y^\circ$  genau ein  $D_Z \in \mathcal{V}_Z$ . Seien weiter  $\{D_1, \dots, D_\ell\} = \mathcal{V}^\times \setminus \{D_Z | Z \subset Y\}$  die übrigen exzeptionellen Divisoren. Dann ist auch

$$\mathcal{R}(X)/(1 - T_{D_1}, \dots, 1 - T_{D_\ell}) \cong R[S, T_1, \dots, T_m]/(r_1 - T_1^{p_1}, \dots, r_\ell - T_\ell^{p_\ell}),$$

mit  $r_i \in R$  endlich erzeugt. Mittels Induktion über  $m$  genügt es also zu zeigen, dass  $R$  endlich erzeugt ist, falls  $R[T]/(r - T^p)$  endlich erzeugt ist. Das folgt aber aus der Tatsache, dass  $R[T]/(r - T^p)$  endlich erzeugt als  $R$ -Modul ist.

Alternativ lässt sich  $R$  als Invariantenring von  $R[T]/(r - T^p)$  unter der Wirkung von  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  auffassen.  $\square$

**Beispiel 4.5.** Sei  $n \geq 3$  und  $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$  ein linearer Unterraum und  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbf{P}^{n-1}$  eine Menge von Punkten. Dann gilt für den Cox-Ring der Aufblasung

$$\mathcal{R}(\text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^n) = \mathcal{R}(\text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^{n-1})[S].$$

Um das einzusehen, betrachtet man  $\mathbf{P}^n = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$  versehen mit der  $k^*$ -Wirkung, die durch  $\deg(x_0) = 1$  und  $\deg(x_1) = \dots = \deg(x_n) = 0$  gegeben ist. Nun ist  $V(x_0)$  eine Hyperebene bestehend aus Fixpunkten dieser Wirkung und  $x = V(x_1, \dots, x_n)$  ist ein isolierter Fixpunkt. Wählt man nun  $\mathcal{Z} \subset V(x_0)$ , so trägt die Aufblasung eine induzierte  $k^*$ -Wirkung.

Man erhält eine Abbildung  $\pi : \mathbf{P}^n \setminus \{x\} \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ , die auf  $\mathbf{P}^n \setminus V(x_i)$  durch die Inklusionen  $k[x_0/x_i, x_1/x_i, \dots, x_n/x_i] \subset k[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]$  gegeben ist.

Diese Abbildung induziert eine natürliche Fortsetzung

$$\pi' : \text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^n \dashrightarrow \text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^{n-1},$$

die die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt. Für einen Primdivisor  $Z \subset \mathbf{P}^n$  ist  $\pi'^* Z$  wieder ein Primdivisor. Die Menge  $\mathcal{V}^\times$  ist also leer. Außerdem gilt  $\mathcal{H} = \{V(x_0)\}$ . Damit folgt die Behauptung.

Per Induktion erhält man allgemeiner für  $\mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^n$

$$\mathcal{R}(\text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^n) = \mathcal{R}(\text{Bl}_{\mathcal{Z}} \mathbf{P}^r)[S_1, \dots, S_{n-r}].$$

Für den Fall einer rationalen Varietät der Komplexität eins mit guter Toruswirkung lässt sich der Cox-Ring explizit angeben. Hier gilt  $Y^\circ = Y = \mathbf{P}^1$ . Wenn weniger als drei exzeptionelle Primdivisoren  $\{z\} \subset \mathbf{P}^1$  existieren, dann ist  $X$  torisch und der Cox-Ring ist polynomiell. Ansonsten kann man nach geeigneter Wahl homogener Koordinaten annehmen, dass  $z_0 = 0, z_1 = \infty$  und  $z_2, \dots, z_s \in k^* \subset \mathbf{P}^1$  die exzeptionelle Primdivisoren in  $Y = \mathbf{P}^1$  sind, das heißt die Punkte  $z$  mit  $\mu(z) = (\mu_1, \dots, \mu_r) \neq (1)$ .

**Korollar 4.6** ([HS10], Thm. 1.3, Cor. 4.9). *Sei  $X$  eine rationale  $T$ -Varietät der Komplexität eins, so dass alle globalen invertierbaren Funktionen konstant sind. Dann ist der zugehörige Cox-Ring*

$$k \left[ T_{ij}, S_E \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq r_i \end{array}, E \in \mathcal{H} \right] / \left( T_0^{\mu(0)} + z_i T_1^{\mu(\infty)} + T_i^{\mu(z_i)} \mid 2 \leq i \leq r \right).$$

*Beweis.* Nach Satz 4.3 erhält man für den Cox-Ring

$$k[u, v] \left[ T_{ij}, S_E \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq r_i \end{array}, E \in \mathcal{H} \right] / \left( a_i \cdot u - b_i \cdot v - T_i^{\mu(z_i)} \mid 0 \leq i \leq r \right),$$

wobei  $z_i =: (a_i : b_i)$ . Damit gilt im Cox-Ring  $v = -T_0^{\mu(0)}$  und  $u = T_1^{\mu(\infty)}$ . Somit können  $u, v$  als Erzeuger entfallen und die Relationen erhalten nach dem Ersetzen die gewünschte Form.  $\square$

*Bemerkung 4.7.* Die Forderung an die invertierbaren Funktionen ist für alle vollständigen und alle affinen Varietäten mit guter Toruswirkung erfüllt.

**Beispiel 4.8.** Für Beispiel 1.17 erhält man also

$$\mathcal{R}(X) = k[T_1, T_2, T_3, T_4, T_5] / (T_1 T_2 + T_3 T_4 + T_5^2).$$

Die Klassengruppe von  $X$  war gerade  $\mathbf{Z}$  und Bilder der invarianten Divisoren erzeugten jeweils die Klassengruppe, das heißt es gilt  $\deg(T_i) = 1$  für  $I = 1, \dots, 5$ . Damit ist der Cox-Ring von  $X$  gleichzeitig der projektive Koordinatenring der Varietät und  $X$  damit eine Quadrik im  $\mathbf{P}^4$ .

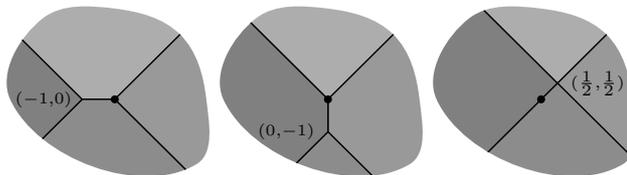


Abbildung 4.1: Der divisorielle Fächer der Quadrik.



# Kapitel 5

## Singularitäten

Der folgende Abschnitt behandelt Singularitäten von T-Varietäten und deren Auflösungen. Es werden dabei Kriterien für  $\mathbf{Q}$ -Gorenstein-Eigenschaft und  $\mathbf{Q}$ -Faktorialität, sowie log-Terminalität von Singularitäten mit Toruswirkung entwickelt. Ein spezieller Abschnitt widmet sich dem Fall der Quotientsingularitäten in Dimension zwei.

### 5.1 Toroidale und glatte Auflösungen

Eine Varietät  $X$  heißt *toroidal*, falls eine offene Teilmenge  $U \subset X$  existiert, so dass für jeden Punkt  $x \in X$  eine torische Varietät  $X'$  mit eingebettetem Torus  $T \subset X'$  und ein Punkt  $x' \in X'$  existieren, so dass  $(U, X, x)$  und  $(T, X', x')$  lokal formal isomorph sind.

Eine abgeschlossene Teilmenge  $Y \subset X$  heißt dann toroidal eingebettet, wenn die lokalen torischen Karten zudem so gewählt werden können, dass  $Y$  mit einer invarianten Teilmenge der torischen Varietät identifiziert wird.

Insbesondere sind glatte Varietäten toroidal und Divisoren mit einfache normalen Schnitten<sup>1</sup> sind darin toroidal eingebettet. Diese Beobachtung motiviert dazu, hier den Begriff der glatten Auflösung wie folgt zu verallgemeinern.

**Definition 5.1.** Ein birationaler eigentlicher Morphismus  $\tilde{X} \rightarrow X$  heißt *toroidale Auflösung* von  $X$  falls  $\tilde{X}$  toroidal und der exzeptionelle Ort toroidal in  $\tilde{X}$  eingebettet ist.

---

<sup>1</sup>D.h. der Träger des Divisors ist eine Konfiguration von glatten Primdivisoren, die in jedem Punkt lokal isomorph zu einer Teilmenge der Koordinatenhyperebenen des affinen Raumes ist. Insbesondere hat eine ebene irreduzible nodale Kurve keine *einfachen* normalen Schnitte.

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor auf  $Y$  und  $\psi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  ein projektiver birationaler Morphismus. Dann sind die assoziierten T-Varietäten  $X(\psi^*\mathfrak{D})$  und  $X = X(\mathfrak{D})$  isomorph. Das gilt jedoch nicht für  $\tilde{X}(\psi^*\mathfrak{D})$  und  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$ .

Ein erster Schritt zu einer Auflösung der Singularitäten von  $X$  besteht nun darin, für das Paar  $(Y, \text{supp } \mathfrak{D})$  eine Auflösung  $\psi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  zu finden, in der Hoffnung, dass die Singularitäten von  $\tilde{X}(\psi^*\mathfrak{D})$  leichter beherrschbar sind. Dass dies tatsächlich der Fall ist, zeigt der folgende

**Satz 5.2** ([Lie08] Lem. 2.3.). *Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor mit einfachen normalen Schnitten auf glattem  $Y$ . Dann ist  $r : \tilde{X}(\mathfrak{D}) \rightarrow X(\mathfrak{D})$  eine toroidale Auflösung. Insbesondere hat  $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  nur torische Singularitäten. Diese entsprechen den Cayley-Kegeln  $C(\mathfrak{D}_{Z_1}, \dots, \mathfrak{D}_{Z_s})^2$  zu Primdivisoren  $Z_1, \dots, Z_s$  mit  $\bigcap_{i=1}^s Z_i \neq \emptyset$ .*

*Beweis.* Sei  $y \in Y$  ein beliebiger Punkt und  $\{Z_1, \dots, Z_s\}$  die Menge der Primdivisoren aus dem Träger von  $\mathfrak{D}$ , die  $y$  enthalten. Nach Voraussetzung ist  $(Y, \text{supp } \mathfrak{D})$  um  $y$  lokal formal isomorph zu  $(\mathbf{A}^n, \{H_1, \dots, H_s\})$ , d.h. zum affinen Raum mit den Koordinatenhyperebenen  $H_i$ . Das heißt, dass ein Isomorphismus  $\mathcal{O}_Y \otimes \hat{\mathcal{O}}_y \cong \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n} \otimes \hat{\mathcal{O}}_o$  existiert, der  $\mathcal{O}(-Z_i) \otimes \hat{\mathcal{O}}_y$  und  $\mathcal{O}(-H_i) \otimes \hat{\mathcal{O}}_o$  miteinander identifiziert.

Man betrachtet nun folgenden polyedrischen Divisor auf  $\mathbf{A}^n$ :

$$\mathfrak{D}' = \sum_{i=1}^s \mathfrak{D}_{Z_i} \otimes H_i,$$

und erhält  $\mathcal{A}(\mathfrak{D}) \otimes \hat{\mathcal{O}}_y \cong \mathcal{A}(\mathfrak{D}') \otimes \hat{\mathcal{O}}_o$ . Mit anderen Worten, die formale Umgebung der Faser von  $\tilde{X}(\mathfrak{D}) = \mathbf{Spec}_Y \mathcal{A}(\mathfrak{D}) \rightarrow Y$  über  $y$  ist isomorph zur formalen Umgebung der Faser über 0 von  $\tilde{X}(\mathfrak{D}') = \mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^n} \mathcal{A}(\mathfrak{D}') \rightarrow \mathbf{A}^n$ . Aus der Bemerkung 1.8 ist aber bereits bekannt, dass  $X(\mathfrak{D}')$  isomorph zur einer torischen Varietät  $X_{\sigma_y}$  ist, wobei  $\sigma_y = C(\mathfrak{D}_{Z_1}, \dots, \mathfrak{D}_{Z_s}) \times (\mathbf{Q}^+)^{n-s}$  durch den Cayley-Kegel zu den Polyedern  $\mathfrak{D}_{Z_i}$  gegeben ist.  $\square$

*Bemerkung 5.3.* Der im Beweis beschriebene Isomorphismus identifiziert die invarianten Primdivisoren von  $\mathfrak{U}_y$  und  $\mathfrak{U}_0$  wie folgt  $\tilde{D}_{Z_i, v} \mapsto V(\mathbf{Q}^+ \cdot (v, e+i))$  und  $\tilde{E}_\rho \mapsto V(\rho \times \mathbf{0})$ .

*Bemerkung 5.4.* Sei  $\mathfrak{D}$  ein Divisor auf einer Kurve  $Y$ . Dann ist die Bedingung der normalen Schnitte automatisch erfüllt und die Singularität in der Faser über  $y \in Y$  isomorph zu der torischen Singularität zum Kegel

$$\sigma_y = \text{pos}(\mathfrak{D}_y \times \{1\}) \subset N \times \mathbf{Q}.$$

Ist  $Y = \mathbf{P}^1$ , dann gilt das sogar im Zariski-lokalen Sinne, da im obigen Beweis statt mit  $\hat{\mathcal{O}}_y$  auch direkt mit  $\mathcal{O}_y$  tensoriert werden kann.

<sup>2</sup>siehe dazu Bemerkung 1.8.

*Bemerkung 5.5.* Falls der Schweifkegel maximale Dimension besitzt, so ist der Cayley-Kegel  $C(\mathfrak{D}_{Z_1}, \dots, \mathfrak{D}_{Z_s})$  genau dann regulär, wenn der Schweif regulär ist und alle Polyeder  $\mathfrak{D}_Z$  im Gitter verschobene Schweifkegel sind.

*Bemerkung 5.6.* Man überprüft leicht, dass für den ersten Teil des Satzes die Bedingung, dass  $Y$  toroidal ist und der Träger von  $\mathfrak{D}$  toroidal eingebettet ist, bereits genügt.

Die einzigen glatten affinen Varietäten mit guter Toruswirkung sind affine Räume. Für den Fall der Komplexität eins ergibt sich damit aus Bemerkung 1.8 das folgende

**Lemma 5.7** ([Süß08]). *Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrische Divisor auf einer projektiven Kurve  $Y(\mathfrak{D})$ . Dann ist  $X(\mathfrak{D})$  genau dann regulär, wenn  $Y(\mathfrak{D}) = \mathbf{P}^1$  und*

$$\mathfrak{D} \sim \Delta \otimes P + \nabla \otimes Q$$

*gilt und  $\overline{\text{pos}(\Delta \times \{1\} \cup \nabla \times \{-1\})}$  ein regulärer Kegel ist.*  $\square$

**Beispiel 5.8.** Man betrachte den divisorien Fächer aus Beispiel 1.26. Man überprüft mittels Bemerkung 5.4, dass  $\mathfrak{D}_3$  und  $\mathfrak{D}_4$  glatt sind. Das obige Lemma liefert das Gleiche für  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$ .

## 5.2 Gorenstein-Eigenschaft und Faktorialität

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor mit volldimensionalem Schweif und vollständigem Definitionsbereich  $Y = Y(\mathfrak{D})$ . Sei weiter  $X = X(\mathfrak{D})$  die zugehörige affine Varietät mit guter Toruswirkung. Man fixiere nun Isomorphismen  $N \cong \mathbf{Z}^n$  und  $\text{NS}(Y) \cong \mathbf{Z}^m$ . Im Folgenden werden Elemente aus  $N$  als Zeilenvektoren, Elemente aus  $M$  und  $\text{NS}(Y)$  jedoch als Spaltenvektoren geschrieben. Das Bild eines Primdivisors in  $\text{NS}(Y)$  wird mit  $\bar{Z}$  bezeichnet. Nach Lemma 3.9 ist der kanonische Divisor  $K_X$  genau dann  $\mathbf{Q}$ -Cartier, wenn er bereits ein  $\mathbf{Q}$ -Hauptdivisor ist. Sei also  $\ell K_X = \text{div}(f \cdot \chi^{\ell \cdot u})$ , wobei  $\text{div}(f) = \ell \cdot \sum a_Z \cdot Z$ . Andererseits gilt nach Satz 3.4

$$K_X = \sum_Z \sum_{v \in \mathcal{V}_Z} (\mu(v) \cdot (1 + b_Z) - 1) \cdot D_v - \sum_{\rho \in \mathcal{H}} E_\rho,$$

wobei  $K_Y = \sum b_Z \cdot Z$  ein kanonischer Divisor auf  $Y$  ist. Unter der Annahme, dass  $\text{supp } \mathfrak{D} \cup \text{supp } K_Y = \{Z_1, \dots, Z_r\}$  und  $\mathcal{V}_{Z_i} = \{v_1^i, \dots, v_{r_i}^i\}$  ist, setzt man  $a_i = a_{Z_i}$ ,  $b_i = b_{Z_i}$  und  $\mu_j^i = \mu(v_j^i)$ . Damit ergibt sich ein lineares Gleichungs-

system.

$$(5.1) \quad \begin{pmatrix} -\bar{Z}_1 & -\bar{Z}_2 & \dots & -\bar{Z}_s & 0 \\ \mu_1^1 & 0 & \dots & 0 & \mu_1^1 v_1^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{r_1} & 0 & \dots & 0 & \mu_1^{r_1} v_1^{r_1} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_s^1 & \mu_s^1 v_s^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_s^{r_s} & \mu_s^{r_s} v_s^{r_s} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & n_{\varrho_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_{\varrho_r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1^1 b_1 + \mu_1^1 - 1 \\ \vdots \\ \mu_1^{r_1} b_1 + \mu_1^{r_1} - 1 \\ \vdots \\ \mu_s^1 b_s + \mu_s^1 - 1 \\ \vdots \\ \mu_s^{r_s} b_s + \mu_s^{r_s} - 1 \\ \hline -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix sind dabei linear unabhängig. Im Fall der Komplexität eins ist jede Ecke eines der Polyeder  $\mathfrak{D}_y$  extremal. Damit bekommt die Matrix eine Stufenstruktur. Für den allgemeinen Fall wurde das in [LS10, Lemma 4.6.] gezeigt. Damit erhält man sofort

**Proposition 5.9** ([LS10], Prop. 4.4). *Eine affine Varietät  $X$  mit guter Toruswirkung ist genau dann  $\mathbf{Q}$ -Gorenstein vom Index  $\ell$ , wenn das obige System eine Lösung  $u \in \frac{1}{\ell}M$  hat und  $\ell \cdot \sum_{i=1}^s a_i \cdot Z_i$  ein Hauptdivisor ist.  $\square$*

Setzt man statt  $K_X$  einen beliebigen Weil-Divisor auf  $X$  an, dann erhält man die beiden folgenden Sätze

**Proposition 5.10** ([PS08], Prop. 3.1). *Eine affine Varietät  $X(\mathfrak{D})$  mit guter Toruswirkung ist genau dann  $\mathbf{Q}$ -faktoriell, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$\text{rang Cl } Y + \sum_Z (\#\mathcal{V}_z - 1) + \#\mathcal{H} = \dim N.$$

*Insbesondere muss die Klassengruppe von  $Y = Y(\mathfrak{D})$  endlich erzeugt sein.  $\square$*

**Proposition 5.11** ([LS10], Prop. 4.5). *Eine affine Varietät  $X(\mathfrak{D})$  mit guter Toruswirkung ist genau dann faktoriell, wenn  $\text{Cl}(Y)$  frei ist und die Matrix in (5.1) die Determinante  $\pm 1$  hat.  $\square$*

**Beispiel 5.12.** Für die affine Varietät aus Beispiel 1.5 erhält man

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Varietät ist also faktoriell.

### 5.3 Diskrepanzen

Sei  $X$   $\mathbf{Q}$ -Gorenstein,  $r : W \rightarrow X$  ein birationaler eigentlicher Morphismus und  $K_X$  ein kanonischer Divisor auf  $X$ , dann existiert ein kanonischer Divisor  $K_W$ , so dass der Träger von  $\text{Discr}(r) := K_W - r^*K_X$  sich auf den exzeptionellen Divisor  $\sum_i E_i$  beschränkt. Die Koeffizienten von  $\text{Discr}(r)$  heißen Diskrepanzen von  $r$  und werden mit  $\text{discr}_{E_i}$  bezeichnet. Die Diskrepanzen eines Paares  $(r, B)$ , bestehend aus  $r$  und einem *Randdivisor*  $B \subset X$ , sind die Koeffizienten des Divisors  $\text{Discr}(r, B) := K_W - r^*(K_X + B)$ . Ist  $B = 0$ , so schreibt man kürzer  $K_{W/X} := \text{Discr}(r) := \text{Discr}(r, 0)$ .  $K_{W/X}$  heißt auch relativer kanonischer Divisor. Mit dieser Notation erhält man für die Diskrepanzen von verketteten Morphismen die Formel

$$\text{Discr}(r' \circ r) = \text{Discr}(r', -\text{Discr}(r)).$$

Sei  $\varphi : W \rightarrow X$  eine log-Auflösung des Paares  $(X, B)$ , d.h. der exzeptionelle Divisor hat nur normalen Schnitte. Dann heißt  $(X, B)$  log-terminal, falls die Koeffizienten von  $B$  kleiner als 1 und die Diskrepanzen größer als  $-1$  sind.  $X$  heißt log-terminal, wenn das Paar  $(X, 0)$  log-terminal ist.

Für eine affine  $\mathbf{Q}$ -Gorenstein Varietät  $X = X(\mathfrak{D})$  mit guter Toruswirkung und einem kanonischen Divisor  $K_{Y(\mathfrak{D})} = \sum_Z b_Z \cdot Z$  liefert die Lösung  $\binom{a}{u}$  des Gleichungssystems (5.1) eine Darstellung des kanonischen Divisors

$$K_X = 1/\ell \cdot \text{div}(f \cdot \chi^{\ell u}) = \text{div}(\chi^{\ell u}) + \pi^* \sum_i a_i Z_i,$$

wobei  $\ell \cdot H := \ell \cdot \sum_i a_i Z_i = \text{div}(f)$  ein Hauptdivisor ist.

Sei  $\mathcal{S}$  eine Unterteilung von  $\mathfrak{D}$  und  $\varphi : X(\mathcal{S}) \rightarrow X(\mathfrak{D})$  die kanonische Abbildung. Dann ist der Rückzug  $\varphi^*K_X$  ebenfalls durch  $1/\ell \cdot \text{div}(f \cdot \chi^u)$  gegeben. Die Formeln für den kanonischen Divisor sowie für den Divisor  $\text{div}(f \cdot \chi^u)$  liefern nun

$$(5.2) \quad \text{discr}_{Z,v} = \mu(v)(b_Z - \langle u, v \rangle - 1/\ell \cdot \text{ord}_Z(f) + 1) - 1, \quad \text{discr}_\rho = -1 - \langle u, n_\rho \rangle$$

für die Diskrepanzen von  $\varphi : X(\mathcal{S}) \rightarrow X(\mathfrak{D})$ .

Sei jetzt  $\mathfrak{D}$  ein streng ample polyedrischer Divisor. Das heißt  $\mathfrak{D}(u)$  ist ample für Werte  $u$  aus dem Inneren von  $(\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$ . Insbesondere sind alle Ecken in den  $Z$ -Anteilen  $\mathfrak{D}_Z$  extremal. Man definiert nun den *Randdivisor*  $B = \sum_Z \frac{\mu_Z - 1}{\mu_Z} Z$  auf  $Y$ , wobei  $\mu_Z = \max\{\mu(v) \mid v \in \mathcal{V}_Z\}$ .

**Satz 5.13.** *Sei  $\mathfrak{D}$  ein streng ampler polyedrischer Divisor, so dass  $Y(\mathfrak{D})$  projektiv ist. Dann ist  $X(\mathfrak{D})$  genau dann log-terminal, wenn  $X(\mathfrak{D})$   $\mathbf{Q}$ -Gorenstein und das Paar  $(Y, B)$  log-Fano ist.*

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{D} = \sum \Delta_Z \otimes Z$  und  $K_X = 1/\ell \cdot \text{div}(f \cdot \chi^{\ell w}) = \pi^* H + 1/\ell \cdot \text{div}(\chi^{\ell w})$ , mit  $H = \sum a_Z Z$  ein Hauptdivisor auf  $Y$ , eine Darstellung des kanonischen Divisors wie oben. Da  $H$  und  $w$  das Gleichungssystem (5.1) erfüllen, gilt

$$(5.3) \quad K_Y + B = H + \sum_Z \langle w, v_Z \rangle \cdot Z.$$

Wobei  $v_Z \in \mathcal{V}_Z$  so gewählt wird, dass  $\mu(v_Z)$  maximal ist. Für jeden Strahl  $\rho \in \text{tail } \mathfrak{D}$  ist  $\langle w, n_\rho \rangle$  negativ. Für nicht-extremale folgt das, weil wegen der log-Terminalität  $-1 - \langle w, n_\rho \rangle > -1$  gilt. Für extremale Strahlen gilt aber  $\langle w, n_\rho \rangle = -1$  nach der Formel aus Satz 3.4 für den kanonischen Divisor. Damit ist  $-w \in \text{relint}(\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$ , und es gilt  $K_Y + B \leq H - \mathfrak{D}(-w)$ . Andererseits war  $B$  gerade so gewählt, dass  $K_Y + B \geq H - \mathfrak{D}(-w)$  gilt. Man erhält also

$$K_Y + B = H - \mathfrak{D}(-w).$$

Da  $\mathfrak{D}(-w)$  nach Voraussetzung ample ist, erhält man die Fano-Bedingung für  $(Y, B)$ .

Sei nun  $\varphi$  ein birationaler eigentlicher Morphismus  $\varphi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  und  $\mathcal{S}$  eine Verfeinerung von  $\varphi^* \mathfrak{D}$ . Dann erhält man den natürlichen Morphismus  $X(\mathcal{S}) \rightarrow X(\varphi^* \mathfrak{D}) = X(\mathfrak{D})$ .

Sei jetzt  $E$  ein exzeptioneller Primdivisor von  $\varphi$  und  $(\varphi^* Z)_E$  der Koeffizient von  $\varphi^* Z$  bei  $E$ . Sei weiter  $v'_Z$  die Ecke von  $\mathfrak{D}_Z$ , die  $w$  minimiert. Dann ist  $v'_E = \sum (\varphi^* Z)_E \cdot v'_Z$  eine Ecke von  $(\varphi^* \mathfrak{D})_E$  und damit von  $\mathcal{S}$ . Für die zugehörige Diskrepanz erhält man

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \text{discr}_{v'_E} &= \mu(v'_E) \left( (K_{\tilde{Y}})_E - 1/\ell \cdot \text{ord}_E(f) - \langle w, v'_E \rangle + 1 \right) - 1 \\ &= \mu(v'_E) \left( (K_{\tilde{Y}})_E - \varphi^*(K_Y + B)_E + 1 \right) - 1. \end{aligned}$$

Damit folgt die log-Terminalität von  $(Y, B)$ .

Für die Umkehrung zeigt man zuerst, dass  $-w$  in  $\text{relint}(\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$  liegt. Für extremale Strahlen gilt wegen der Formel für den kanonischen Divisor wiederum  $\langle w, n_\rho \rangle = -1$ . Für nicht-extremale Strahlen  $\rho$  ist aber  $\mathfrak{D}(u_\rho)$  nach Definition nicht big, falls  $u_\rho \in \rho^\perp$ . Es gibt nun eine Darstellung  $-w = \alpha u + u_\rho \in M$ , so dass  $u_\rho \in (\text{tail } \mathfrak{D})^\vee \cap u_\rho$ ,  $u \in \text{relint}(\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$  und darüber hinaus  $u_\rho$  und  $u$  auf den gleichen Ecken  $v''_Z \in \mathfrak{D}_Z$  minimiert werden. Damit gilt

$$-K_Y - B \leq -H + \sum_Z \langle -w, v''_Z \rangle \cdot Z \sim \mathfrak{D}(u_\rho) + \alpha \mathfrak{D}(u).$$

Nach Voraussetzung ist  $-K_Y - B$  big, also auch die rechte Seite. Da  $\mathfrak{D}(u)$  aber nicht  $\mathfrak{D}(u_\rho)$  big ist, muss  $\alpha > 0$  gelten. Es folgt damit die Beziehung

$$\langle -w, n_\rho \rangle = \alpha \cdot \langle u, n_\rho \rangle > 0.$$

Nach (5.2) erhält man also  $\text{discr}_\rho > -1$  und  $-w \in \text{relint}(\text{tail } \mathfrak{D})^\vee$ . Sei nun  $\varphi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  ein projektiver birationaler Morphismus und  $\mathcal{S}$  eine Verfeinerung von  $\varphi^*\mathfrak{D}$ . Aus der Gleichung (5.4) erhält man wiederum  $\text{discr}_{v_E} > -1$  für jeden exzeptionellen Divisor  $E$  und jede Ecke  $v_E \in (\mathcal{S})_E$ , da nach Definition von  $v'_E$  die Ungleichung  $\langle -w, v_E \rangle \geq \langle -w, v'_E \rangle$  gilt.  $\square$

*Bemerkung 5.14.* Der Satz ist eine Verallgemeinerung des Resultats, dass ein log-terminaler Schnitttring eine log-Fano Varietät voraussetzt ([SS10, Prop. 5.4]), für *polyedrische* Divisoren.

**Korollar 5.15** ([Süß08]; [LS10], Cor. 5.8). *Eine affine  $\mathbf{Q}$ -faktorielle  $T$ -Varietät  $X(\mathfrak{D})$  der Komplexität eins ist genau dann log-terminal, wenn entweder*

- i.  $Y(\mathfrak{D})$  affin ist oder*
- ii.  $Y(\mathfrak{D}) = \mathbf{P}^1$  und  $\sum_Z \frac{\mu_Z - 1}{\mu_Z} < 2$  gilt.*

$\square$

Ein Verallgemeinerung der Tatsache, dass torische Varietäten log-terminal sind, liefert der folgende Satz, der hier nicht bewiesen wird.

**Proposition 5.16** ([LS10], Cor. 4.10). *Jede  $\mathbf{Q}$ -Gorenstein  $T$ -Varietät der Komplexität  $c$  deren singulärer Ort eine Kodimension größer als  $c + 1$  hat, ist log-terminal.*

**Beispiel 5.17.** Man betrachte wiederum die Varietät aus Beispiel 1.5 und ihre Auflösung aus Beispiel 1.26. Die zugehörigen Verfeinerung des polyedrischen Divisors findet sich nochmals in Abbildung 5.1.

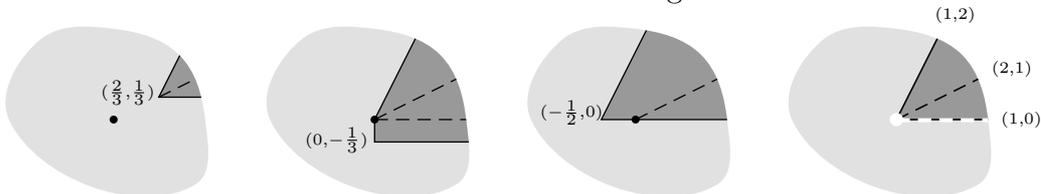


Abbildung 5.1: Die Auflösung der Singularität (aus Beispiel 1.26).

Nun zeigt Satz 5.15, dass die affine Varietät log-terminal ist. Darüber hinaus lässt sich der relative kanonische Divisor der Auflösungsabbildung angeben.

Ein kanonischer Divisor von  $X = X(\mathfrak{D})$  ist nach Satz 3.4 bei der Wahl von  $K_Y = -2\infty$  durch  $K_X = 2D_{(2/3,1/3)} + 2D_{(0,-1/3)} - 3D_{(-1/2,0)}$  gegeben. Das Gleichungssystem (5.1) liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_\infty \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

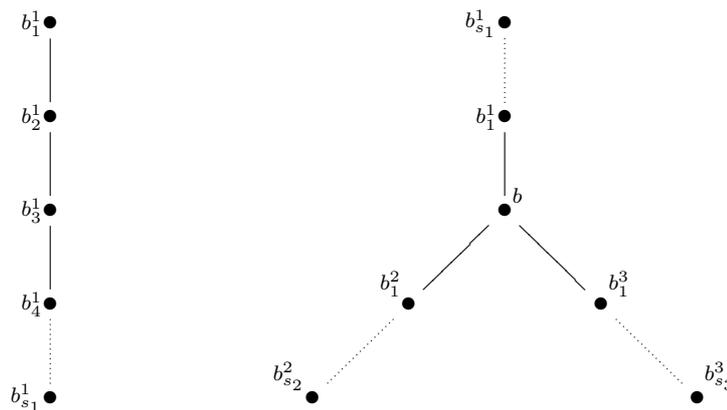
mit der Lösung  $a_1 = 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_\infty = -2$  und  $u = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Für die beiden exceptionellen Divisoren der Abbildung  $D_{\infty,0}$  und  $E_\rho$  erhält man nach (5.2) die Diskrepanzen  $\text{discr}_{\infty,0} = 0$  und  $\text{discr}_\rho = 0$ . Die Auflösung ist also krepant.

## 5.4 Quotientensingularitäten auf Flächen

In diesem Abschnitt werden einige klassische Resultate in der Sprache der polyedrischen Divisoren nachvollzogen.

Quotientensingularitäten sind die normalen (also insbesondere isolierten) log-terminalen Flächensingularitäten. Sie besitzen alle gute  $k^*$ -Wirkungen. Die folgende Klassifikation dieser Singularitäten findet sich in [Bri68]. Jede Quotientensingularität ist durch einen Auflösungsgraphen der folgenden Form eindeutig bestimmt:



Dabei stehen die Knoten wie üblich für exceptionelle Kurven  $E_i$  der minimalen Auflösung. Die Kanten verbinden Kurven die sich transversal schneiden und  $-b_i^j$  ist die Selbstschnittzahl der entsprechenden exceptionellen Kurve.

ve. Dabei gilt  $b, b_i^j > 1$  und

$$\frac{q_j}{q_j - p_j} = \llbracket b_1^j, b_2^j, \dots, b_{s_j}^j \rrbracket := b_1^j - \frac{1}{b_2^j - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_{s_j}^j}}}$$

für zwei natürliche teilerfremde Zahlen  $p_j$  und  $q_j$ . Im Falle des dreiar-  
migen Baumes bilden  $q_1, q_2, q_3$  eines der Platonischen Tripel  $(2, 2, q)$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  
 $(2, 3, 4)$  oder  $(2, 3, 5)$ . Der Ausdruck  $\langle p_1, q_1 \rangle$  bzw.  $\langle b; p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3 \rangle$  be-  
zeichnet dann den entsprechenden bewerteten Baum<sup>3</sup>. Man beachte, dass Werte  
 $p_i'$  mit  $p_i' \equiv p_i \pmod{q_i}$  den gleichen Baum liefern. Der Baum  $\langle p, q \rangle$  kor-  
respondiert gerade zu der zyklischen Quotientensingularität vom Typ  $(p, q)$ ,  
d.h. zur torischen Singularität zum Kegel  $\text{pos}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$ . Man beachte, dass in  
dieser Schreibweise  $\langle b; p_1, q_1; p_2, q_2; 0, 1 \rangle = \langle p', q_1 q_2 + p_2 q_1 \rangle$  für ein geeignetes  
 $0 \leq p' < p_1 q_2 + p_2 q_1$  gilt.

Diese Ergebnisse lassen sich unter Voraussetzung einer  $k^*$ -Wirkung auch  
aus den vorangegangenen Abschnitten gewinnen. Sei nun also  $X = X(\mathfrak{D})$   
eine affine  $k^*$ -Fläche, d.h.  $Y(\mathfrak{D})$  ist eine Kurve und  $N = \mathbf{Z}$ . Falls  $Y(\mathfrak{D})$  affin  
ist, so ist  $X(\mathfrak{D})$  wegen Lemma 5.1 toroidal. Die Auflösungsgraphen torischer  
Flächensingularitäten sind aber nach [Hir53] gerade die Ketten der Form  
 $\langle p, q \rangle$ .

Sei also  $Y(\mathfrak{D})$  nun projektiv. O.B.d.A. hat dann  $\mathfrak{D}$  den Schweif  $\mathbf{Q}^+$   
und  $\mathfrak{D}$  ist bereits durch den  $\mathbf{Q}$ -Divisor  $\mathfrak{D}(1)$  eindeutig bestimmt. Dann ist  
nach Abschnitt 5.1  $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathfrak{D})$  eine toroidale Auflösung von  $X(\mathfrak{D})$ . Jeder  
echt gebrochene Koeffizient  $p/q$  von  $\mathfrak{D}(1)$  korrespondiert nach Satz 5.2 zu  
einer torischen Flächensingularität vom Typ  $(p, q)$  in  $\tilde{X}$ . Werden diese jeweils  
minimal aufgelöst, so liefert das auch eine minimale Auflösung von  $X(\mathfrak{D})$ .

Satz 5.2 liefert als Auflösung der Singularitäten einen divisoriiellen Fächer  
 $\mathcal{S}$ , dessen  $y_i$ -Anteile  $\mathcal{S}_{y_i}$  Unterteilungen der Intervalle  $\mathfrak{D}_{y_i} = [\frac{p}{q}, \infty)$  sind.  
Diese Unterteilungen resultieren aus der minimalen Auflösungen der Kegel  
 $\text{pos}\left(\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ . Der größte Unterteilungspunkt ist daher jeweils  $\lceil \frac{p_i}{q_i} \rceil$ . Dieses  
Vorgehen erzeugt jeweils einen Teilgraphen der Form  $\langle p_i, q_i \rangle$  im Auflösungs-  
graphen von  $X(\mathfrak{D})$ . Die zum Unterteilungspunkt  $\lceil \frac{p_i}{q_i} \rceil$  gehörige Kurve hat  
dabei den Selbstschnitt  $b_i^j$ . Sie ist auch die einzige, die die *zentrale* Kurve  
 $\tilde{E} = \tilde{E}_{\mathbf{Q}^+}$  schneidet.

Die Kurve  $\tilde{E}$  entspricht dann nach Satz 3.12 dem Cartier-Divisor  $\tilde{D}_h$  mit

$$h_{y_i}(v) = \begin{cases} -v - \lceil \frac{p_i}{q_i} \rceil & , v \in [\lceil \frac{p_i}{q_i} \rceil, \infty) \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>3</sup>Man beachte die leicht abweichende Bezeichnung in [Bri68]

Für den Selbstschnitt erhält man also nach Satz 3.20

$$(5.5) \quad -(\tilde{E})^2 = \deg[\mathfrak{D}(1)].$$

Insbesondere folgt damit, dass die so konstruierte Auflösung genau dann minimal ist, wenn  $\deg[\mathfrak{D}(1)] \geq 2$ . Das ist zum Beispiel automatisch erfüllt, falls  $\mathfrak{D}(1)$  mehr als drei echt-gebrochene Koeffizienten hat.

Sei jetzt  $X(\mathfrak{D})$  log-terminal. Nach Korollar 5.15 muss dann  $Y(\mathfrak{D})$  die projektive Gerade sein und

$$\mathfrak{D}(1) \sim \frac{p_1}{q_1} \cdot P_1 + \frac{p_2}{q_2} \cdot P_2 + \frac{p_3}{q_3} \cdot P_3,$$

wobei  $q_1, q_2$  und  $q_3$  eines der Platonischen Tripel  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(2, 3, 5)$ ,  $(2, 2, q)$  oder  $(1, p, q)$  bilden. Der Fall, dass eines der  $q_i$  eins ist, ist nach Proposition 2.15 wieder torisch.

*Bemerkung 5.18.* Zu gegebenem  $\mathfrak{D}(1) \sim \frac{p_1}{q_1} \cdot P_1 + \frac{p_2}{q_2} \cdot P_2 + \frac{p_3}{q_3} \cdot P_3$  korrespondiert also der Auflösungsgraph  $\langle \sum_i \lceil p_i/q_i \rceil; p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3 \rangle$ , falls  $\deg[\mathfrak{D}(1)] \geq 2$ .

**Proposition 5.19.** *Sei  $X$  eine Quotientensingularität vom Gorenstein-Index  $\ell$  und  $W$  die minimale Auflösung. Dann gilt*

$$-K_{W/X}^2 \leq 2\ell - 2.$$

*Beweis.* Der Beweis aus [Dai06, Cor. 4.6] dient hier als Vorlage: Sei  $K_{W/X} = \sum a_i E_i$ . Dann gilt

$$K_{W/X}^2 = K_{W/X} \cdot K_{W/X} = K_{W/X} \cdot \left( \sum_i a_i E_i \right) = \sum_i a_i (K_{W/X} \cdot E_i).$$

Nach Adjunktionsformel gilt aber  $K_{W/X} \cdot E_i = -E_i^2 - 2$  und da  $X$  nach Voraussetzung log-terminal ist, gilt  $a_i > -1$ . Man erhält also

$$K_{W/X}^2 = \sum_i a_i (-E_i^2 - 2) \geq -\sum_i (-E_i^2 - 2) = \sum_i (2 + E_i^2).$$

Nach [Nik89, Lemma 1.1] gilt jedoch  $m_X = 2 - \sum_i (2 + E_i^2) \leq 2\ell$ . Damit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Sei jetzt  $\mathfrak{D}(1) = \sum_i (p_i/q_i) \cdot y_i$ . Dann liefert das Gleichungssystem (5.1) für den kanonischen Divisor  $K$  auf  $X = X(\mathfrak{D})$

$$(5.6) \quad K = \operatorname{div}(f\chi^u), \quad \text{mit } u = \frac{2 - \sum_i (q_i - 1)/q_i}{\deg \mathfrak{D}(1)} \leq \frac{2 - \sum_i (q_i - 1)/q_i}{\deg[\mathfrak{D}(1)] - \sum_i (q_i - 1)/q_i}.$$

Damit ergibt sich

**Lemma 5.20.** *Sei  $Y(\mathfrak{D}) = \mathbf{P}^1$  und  $X(\mathfrak{D})$  eine Quotientensingularität vom Gorensteinindex  $\ell$ . Dann gilt  $\deg[\mathfrak{D}(1)] \leq 2\ell$ .  $\square$*

Da für  $2 \leq \deg[\mathfrak{D}(1)]$  wie bereits gesehen der Wert der Selbstschnitt einer exzeptionellen Kurve ist, folgt das Lemma auch aus [Nik89, Lemma 1.1].

**Lemma 5.21.** *Sei  $X$  eine zyklische Quotientensingularität vom Typ  $(p, q)$ . Dann hat eine Auflösung mindestens  $\max(q/p - 1, q/\ell^2 - 1)$  exzeptionelle Kurven, wobei  $\ell = \frac{q}{\gcd(p-1, q)}$  den Gorensteinindex der Singularität bezeichnet.*

*Beweis.* Die torische Singularität hat den Kegel  $\sigma = \text{pos}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$ . Nach [Oda88, Prop 1.9] entsprechen die Strahlen durch die Gitterelemente  $\begin{pmatrix} 1 \\ q' \end{pmatrix}$  im Inneren von  $\sigma$  exzeptionellen Kurven der minimalen Auflösung. Es gibt jedoch  $[q/p] - 1$  solcher Elemente. Andererseits existiert ein Element  $u \in \mathbf{Z}^2$ , so dass

$$\left\langle u, \begin{pmatrix} 1/\ell \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle u, \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

gilt. Dann kann aber das Dreieck  $Q = \text{conv}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\ell \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$  keine inneren Gitterpunkte enthalten. Sei nun eine Auflösung der Singularität durch einen unterteilenden Fächer  $\Sigma$  des Kegels  $\sigma$  gegeben. Es seien  $Q_i$  die Dreiecke, die jeweils durch die primitiven Erzeuger von zwei benachbarten Strahlen in  $\Sigma$  und dem Ursprung aufgespannt werden. Nach dem oben Gesagten ist  $Q$  in der Vereinigung der  $Q_i$  enthalten. Da zwei benachbarte Strahlen einen regulären Kegel aufspannen, gilt  $2 \text{vol } Q_i = 1$ . Man erhält also

$$\frac{q}{\ell^2} = 2 \text{vol } Q < 2 \sum_i \text{vol } Q_i = \#\Sigma^{(1)} - 1.$$

Aber  $\#\Sigma^{(1)} - 2$  ist gerade die Anzahl der exzeptionellen Kurven.  $\square$

**Proposition 5.22.** *Sei  $X$  eine Quotientensingularität vom Index  $\ell$  mit dem Auflösungsgraphen  $\langle b; p_1, q_1; p_2, q_2; p_2, q_2 \rangle$ . Dann enthält dieser Graph mindestens  $\frac{q_1}{\ell^2} - 1$  exzeptionelle Kurven.*

*Beweis.* Sei  $(q_1, q_2, q_3)$  eines der Tripel  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  oder  $(2, 3, 5)$ . Dann hat der Graph mindestens vier Knoten und die Bedingung ist erfüllt.

Nach Bemerkung 5.18 korrespondiert der Graph  $\Gamma = \langle b+2; p, q; 1, 2; 1, 2 \rangle$  zu einem polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D}$  mit

$$\mathfrak{D}(1) \sim \left(\frac{p}{q} + b\right) \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 - \frac{1}{2} \otimes P_3.$$

Nach Satz 5.9 ist der Gorenstein-Index dieser Singularität  $p + q \cdot b$ . Insbesondere gilt also  $p \leq \ell$ . Der Graph  $\langle p, q \rangle$  ist ein Teilgraph von  $\Gamma$ . Wegen Lemma 5.21 gilt

$$\#\Gamma \geq \frac{q}{p} - 1 \geq \frac{q}{\ell^2} - 1.$$

Sei nun  $\Gamma = \langle b; p_1, q_1; p_2, q_2; 0, 1 \rangle$ . Dann ist  $\Gamma = \langle p', p_1 q_2 + p_2 q_1 \rangle$  für ein geeignetes  $p' \in \mathbf{N}$ . Wiederum nach Lemma 5.21 gilt damit

$$\#\Gamma \geq \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{\ell^2} - 1 \geq \frac{q_1}{\ell^2} - 1.$$

□

# Kapitel 6

## Drei Klassifikationsprobleme

### I Log-Del-Pezzo-Flächen mit $k^*$ -Wirkung

Ziel des folgenden Abschnittes ist die Klassifikation von Flächen mit amplem anti-kanonischen Divisor und höchstens Quotientensingularitäten. Diese Fragestellung wurde von Nikulin und Alexeev für den Gorensteinindex  $\leq 2$  umfassend beantwortet [AN89]. Hier wird nun ebenfalls der Gorensteinindex beschränkt und zusätzlich die Existenz einer  $k^*$ -Wirkung vorausgesetzt. Neben einigen allgemeinen Resultaten wird eine Liste aller solcher Flächen vom Gorensteinindex  $\leq 3$  und Picard-Rang  $\leq 2$  angegeben. Diese Ergebnisse reihen sich ein in ähnliche Resultate für torische Flächen in [Dai09] und [KKN10].

Betrachtet man Flächen mit effektiver  $k^*$ -Wirkung, so treten als Bahnen nur  $k^*$  selbst und Fixpunkte auf, letztere in drei verschiedenen Formen:

**elliptisch:** Der Fixpunkt ist isoliert und liegt im Abschluss aller Bahnen in der Umgebung.

**hyperbolisch:** Der Fixpunkt ist isoliert und liegt im Abschluss genau zweier maximaler Bahnen.

**parabolisch:** Der Fixpunkt liegt im Abschluss genau einer maximalen Bahn. Parabolische Fixpunkte ordnen sich in Kurven an.



Im Fall von  $k^*$ -Flächen vereinfacht sich die Beschreibung von vollständigen T-Varietäten stark. Der Quotient  $Y$  ist hier eine glatte Kurve und das

zugrundeliegende Gitter ist  $N = \mathbf{Z}$ . Als möglicher Schweifächer kommt nur der Fächer  $\{\mathbf{Q}^-, 0, \mathbf{Q}^+\}$  in Betracht, die möglichen Träger von Markierungen sind die Strahlen  $\mathbf{Q}^-$  und  $\mathbf{Q}^+$ .

Die zu betrachtenden Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$  sind Zerlegungen von  $\mathbf{Q}$  in Intervalle  $(-\infty, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{r-1}, a_r], [a_r, \infty)$  mit  $a_1 < \dots < a_r$ . Solche Zerlegungen lassen sich über ihre Randpunkte mit nichtleeren endlichen Teilmengen  $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbf{Q}$  identifizieren.

Mit dieser Interpretation der Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$  als Teilmengen von  $\mathbf{Q}$  seien die folgenden Divisoren definiert

- i.  $\mathcal{S}^+ = \sum_y \max \mathcal{S}_y \cdot y$ ,
- ii.  $\mathcal{S}^- = \sum_y \min \mathcal{S}_y \cdot y$ ,

Die Bedingungen aus Abschnitt 1.4 für die Markierungen des Schweifächers lesen sich damit wie folgt. Falls  $\mathbf{Q}^\pm$  markiert ist, so muss  $\pm \deg \mathcal{S}^\pm > 0$  gelten.

Die Beschreibung der Bahnenstruktur von T-Varietäten in Abschnitt 1.3 zeigt, wie sich die verschiedenen Fixpunkttypen aus dem korrespondierenden divisoriiellen Fächer ablesen lassen. Ein elliptischer Fixpunkt korrespondiert zu einer Markierung auf  $\mathbf{Q}^\pm$ . Eine Kurve bestehend aus parabolischen Fixpunkten zu einem unmarkierten Element aus  $\{\mathbf{Q}^\pm\}$  und ein hyperbolische Fixpunkt zu einem kompakten Intervall einer Unterteilung  $\mathcal{S}_y$ .

**Lemma 6.1.** *Sei  $\mathcal{S}$  ein divisoriieller Fächer einer  $k^*$ -Fläche auf der Kurve  $Y$  und  $\mathbf{Q}^+$  bzw.  $\mathbf{Q}^-$  seien unmarkiert. Falls der antikanonische Divisor von  $X(\mathcal{S})$  ample ist, so gilt*

$$\deg[\mathcal{S}^+] < -\deg K_Y \text{ bzw. } \deg[\mathcal{S}^-] > \deg K_Y.$$

*Beweis.* Sei  $K_Y = \sum_y b_y \cdot y$  ein kanonischer Divisor auf  $Y$  und o.B.d.A. sei  $\mathbf{Q}^+$  nicht markiert. Nach Satz 3.4 gilt für den antikanonischen Divisor

$$-K_X = (E_{\mathbf{Q}^-}) + (E_{\mathbf{Q}^+}) + \sum_{y \in Y} \sum_{e/m \in \mathcal{S}_y} 1 - m \cdot (b_y + 1)$$

und für die zugehörige Supportfunktion  $h = (h_y)_{y \in Y}$  demnach  $-h^0(-1) = -h^0(1) = 1$ , sowie

$$-m_y^+ \cdot h_y(e_y^+/m_y^+) = -m_y^+(b_y + 1) + 1,$$

wobei  $\mathcal{S}^+ = \sum_y e_y^+/m_y^+ \cdot y$ . Auf dem Intervall  $[\mathcal{S}_y^+, \infty)$  hat  $h_y$  die Form  $h^0(1) + a_y^+$ . D.h. es gilt

$$-a_y^+ = -b_y - 1 + \frac{1}{m_y^+} - \frac{e_y^+}{m_y^+} \leq -b_y - \left\lceil \frac{e_y^+}{m_y^+} \right\rceil.$$

Summiert man nun über alle  $y \in Y$ , so erhält man

$$-\sum a_y^+ \leq -\deg K_Y - \deg[\mathcal{S}^+].$$

Wegen der Fano-Bedingung muss nach Satz 3.16 aber  $-\sum a_y^+ > 0$  gelten. Damit folgt die gewünschte Ungleichung. Das Resultat für  $\mathcal{S}^-$  folgt analog.  $\square$

**Satz 6.2.** *Jede nicht-torische  $k^*$ -Fläche  $X$  mit amplem antikanonischen Divisor*

- i. ist rational, insbesondere gilt  $Y = \mathbf{P}^1$ , und*
- ii. hat zumindest einen elliptischen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $X$  eine vollständige  $k^*$ -Fläche ohne elliptischen Fixpunkt, d.h.  $X = X(\mathcal{S})$ , wobei  $\mathcal{S}$  ein divisorieller Fächer auf einer Kurve  $Y$  ist und weder  $\mathbf{Q}^+$  noch  $\mathbf{Q}^-$  markiert sind.

Nach dem obigen Lemma gilt dann

$$\deg K_Y < \deg[\mathcal{S}^-] \leq \deg[\mathcal{S}^+] < -\deg K_Y$$

Damit folgt sofort, dass  $K_Y$  negativen Grad hat und  $Y$  somit die projektive Gerade ist. Dann gilt somit

$$(6.1) \quad -2 < \deg[\mathcal{S}^-] \leq \deg[\mathcal{S}^+] < 2.$$

Weil  $X$  nicht torisch ist, muss  $\mathcal{S}$  mindestens drei nicht-triviale Koeffizienten haben. Nun gilt für zwei echt-gebrochene rationale Zahlen  $\mathcal{S}_y^- \leq \mathcal{S}_y^+$  die Beziehung  $[\mathcal{S}_y^+] - [\mathcal{S}_y^-] \geq 1$ . Man erhält also  $\deg[\mathcal{S}^+] - \deg[\mathcal{S}^-] \geq 3$ . Unter Beachtung der Ganzahligkeit von  $\deg[\mathcal{S}^-]$  und  $\deg[\mathcal{S}^+]$  liefert das einen Widerspruch zur Ungleichung (6.1).  $\square$

*Bemerkung 6.3.* Es ist darüber hinaus ein bekannter Fakt, dass alle log-Del-Pezzo-Fächen, nicht nur die mit  $k^*$ -Wirkung, rational sind.

Die folgenden beiden Sätze sind essentiell für die Klassifikation der log-Del-Pezzo-Flächen. Sie orientieren sich an ähnlichen Resultaten in den Arbeiten [Dai09] und [DN08]. Auch der Beweis folgt der gleichen Strategie, wie sie in [DN08] zu finden ist.

**Satz 6.4.** *Für jede log-Del-Pezzo-Fläche  $X$  vom Index  $\ell$  mit  $k^*$ -Wirkung ist der Picard-Rang durch*

$$\rho(X) \leq A_\rho(\ell) = 4\ell \cdot (2\sqrt{2}\ell + 1)$$

*beschränkt, sowie die Anzahl der Singularitäten durch*

$$A_{\text{sing}}(\ell) = A_\rho(\ell) + 2.$$

**Proposition 6.5.** *Sei  $X = X(\mathcal{S})$  eine log-Del-Pezzo  $k^*$ -Fläche vom Index  $\ell$ . Dann sind alle Unterteilungen von der Form  $\mathcal{S}_y = \{v\}$ ,  $v \in \mathbf{Z}$ , bis auf*

- i. höchstens  $B_2(\ell) = 4\ell$  Ausnahmen, falls  $X$  zwei elliptische Fixpunkte hat, bzw.*
- ii. höchstens  $B_1(\ell) = 2\ell + 2$  Ausnahmen, falls  $X$  einen elliptischen Fixpunkt hat.*

*Beweis.* Für jede Unterteilung, die nicht nur aus einem ganzzahligen Unterteilungspunkt besteht, gilt  $[\mathcal{S}_y^+] - [\mathcal{S}_y^-] \geq 1$ . Wegen Lemma 5.20 und Lemma 6.1 kann es also maximal  $2\ell + 2$  solche Unterteilungen geben, wenn  $X$  nur einen elliptischen Fixpunkt besitzt, beziehungsweise  $4\ell$ , falls  $X$  zwei elliptische Fixpunkte hat.  $\square$

**Lemma 6.6** ([DN08]). *Sei  $X_\Sigma$  eine torische Fläche vom Gorenstein-Index höchstens  $\ell$  mit amplem anti-kanonischen Divisor.*

- i. Sei  $|\Sigma| = M_{\mathbf{Q}}$ , dann gilt  $\#\Sigma^{(1)} < 4\ell + 2$ .*
- ii. Sei  $|\Sigma| \subset H$ , für einen Halbraum  $H \subset M_{\mathbf{Q}}$ , dann gilt  $\#\Sigma^{(1)} < 2\sqrt{2}\ell + 2$ .*

*Beweis.* Der Beweis des ersten Teils findet sich bereits in [DN08]. Der zweite Teil folgt analog.  $\square$

*Beweis von Satz 6.4.* Die Bedingung, dass  $X(\mathcal{S})$  Fano mit Gorenstein-Index höchstens  $\ell$  ist, impliziert nach Bemerkung 5.4 und Satz 3.18 das Gleiche für die torischen Flächen  $X_{\Sigma_y}$ , wobei  $\Sigma_y$  der von  $\mathcal{S}_y \times \{1\}$  aufgespannte Fächer sei. Lemma 6.6(ii) beschränkt also die Anzahl der Unterteilungspunkte pro Koeffizient durch  $2\sqrt{2}\ell + 2$ . Da es maximal  $4\ell$  Unterteilungen mit  $\#\mathcal{S}_y > 1$  gibt, folgt mittels Korollar 3.6 die Schranke für den Picard-Rang.

Um die Anzahl der singulären Punkte zu beschränken, beachte man, dass Fixpunkte auf  $X(\mathcal{S})$  zu einem der folgenden Elemente von  $\mathcal{S}$  korrespondieren:

- i. einem kompakten Intervall in einem Koeffizienten  $\mathcal{S}_y$ ,
- ii. einer markierten Seite, oder
- iii. einer unmarkierten Seite  $\mathcal{S}^\pm$  zusammen mit einem Punkt  $y \in \mathbf{P}^1$ ,

wobei nach Bemerkung 5.5 der letzte Fall für einen Punkt  $y \in \mathbf{P}^1$  mit trivialem Koeffizienten  $\mathcal{S}_y$  zu einem regulären Fixpunkt korrespondiert.

Die Anzahl der kompakten Intervalle ist durch  $(2\ell + 2) \cdot (2\sqrt{2}\ell + 1)$  bzw. durch  $4\ell \cdot (2\sqrt{2}\ell + 1)$  beschränkt. Je nachdem, ob es ein oder zwei elliptische Fixpunkte gibt, ergibt sich damit als Schranke

$$(2\ell + 2) \cdot (2\sqrt{2}\ell + 1) + 1 + (2\ell + 2) \quad \text{oder} \quad 4\ell \cdot (2\sqrt{2}\ell + 1) + 2.$$

$\square$

**Satz 6.7.** *Sei  $W \rightarrow X(\mathcal{S})$  die minimale Auflösung einer log-Del-Pezzo  $k^*$ -Fläche vom Picard-Rang  $\rho$  und Index  $\ell$ . Dann gelten die folgende Schranken:*

$$\rho(W) < A_{\bar{\rho}}(\ell) = 10 + A_{\text{sing}}(\ell) \cdot (2\ell - 2)$$

sowie

$$\rho(W) < \begin{cases} A_{\bar{\rho},1}(\ell, \rho) = 10 + (2 + 2\rho) \cdot (2\ell - 2) & \text{für einen ell. Fixpunkt,} \\ A_{\bar{\rho},2}(\ell, \rho) = 10 + (2 + \rho) \cdot (2\ell - 2) & \text{für zwei ell. Fixpunkte.} \end{cases}$$

*Beweis.* Noethers Formel liefert

$$\rho(W) = 10 - K_W^2 = 10 - K_X^2 - \sum_{x \in \text{Sing}(X)} (K_{W/X})_x^2.$$

Nun ist  $-\ell K_X$  ample. Es gilt daher  $K_X^2 \geq 0$ . Nach Proposition 5.19 gilt zudem

$$-(K_{W/X})_x^2 < 2\ell - 2$$

für jede auftretende Singularität  $x$ . Der Picard-Rang ist also beschränkt durch

$$\rho(W) < 10 + \#X_{\text{sing}} \cdot (2\ell - 2).$$

Die Anzahl der Singularitäten ist aber beschränkt durch  $A_{\text{sing}}(\ell)$ .

Im Fall von zwei elliptischen Fixpunkten existieren nach den Erkenntnissen zur Orbitstruktur maximal  $(2 + \rho)$  Fixpunkte, da jeder hyperbolische Fixpunkt zu einem kompakten Intervall in einem  $\mathcal{S}_y$  korrespondiert und andererseits für den Picard-Rang

$$2 - \#\mathcal{M} + \sum_{y \in Y} (\#\mathcal{S}_y - 1)$$

gilt. Existiert nun eine Kurve aus parabolischen Fixpunkten, dann sind nach Bemerkung 5.5 nur die singulär, die zu echt gebrochenen Werten  $\mathcal{S}_y^-$  korrespondieren. Da höchstens drei Werte  $\mathcal{S}_y^+$  nicht ganzzahlig sind, müssen die restlichen singulären parabolischen Fixpunkte zu echt gebrochenen Werten  $\mathcal{S}_y^- \neq \mathcal{S}^+$  korrespondieren. Das heißt es müssen entsprechend viele Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$  mit  $\#\mathcal{S}_y > 1$  existieren. Diese beinhalten außerdem ein kompaktes Intervall, das zu einem hyperbolischen Fixpunkt korrespondiert. Man erhält also die Schranke  $(2 + 2\rho) = (3 + 1 + 2(\rho - 1))$ .  $\square$

Im Folgenden sollen log-Del-Pezzo-Flächen für fixierten Index anhand der zugehörigen divisorischen Fächer klassifiziert werden. Als erstes kann man dazu annehmen, dass  $\mathcal{S}$  in der folgenden *Normalform* vorliegt:

- i. Für alle bis auf einen Koeffizienten gilt  $0 \leq \mathcal{S}_y^+ < 1$ .
- ii. Es gilt  $\deg[-\mathcal{S}^-] \leq \deg[\mathcal{S}^+]$ , insbesondere ist  $\mathbf{Q}^+$  markiert.
- iii. Mindestens drei Punkte  $y \in Y$  liefern Unterteilungen  $\mathcal{S}_y \neq \{0\}$ .

Die erste Bedingung lässt sich dabei immer durch Addition von Hauptdivisoren erreichen, die zweite durch die Involution auf  $N = \mathbf{Z}$ . Nach Satz 2.12 ändern diese Operationen nicht die zugehörige Fläche  $X(\mathcal{S})$ . Die dritte Bedingung schließt nach Proposition 2.15 gerade die torischen Fälle aus.

Seien  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  divisorielle Fächer auf  $\mathbf{P}^1$  mit  $\text{supp } \mathcal{S} = \{y_1, \dots, y_s\}$  und  $\text{supp } \mathcal{S}' = \{y'_1, \dots, y'_s\}$ , so dass  $\mathcal{S}_{y_i} = \mathcal{S}'_{y'_i}$  für  $i = 1, \dots, s$  gilt und die Markierungen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  übereinstimmen. Dann liegen  $X(\mathcal{S})$  und  $X(\mathcal{S}')$  in einer gemeinsamen Familie über  $\mathcal{M}_{0,s}$ , siehe Konstruktion 2.14. Es genügt also, die infrage kommenden Multimengen von Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$  zu enumerieren und jeweils mittels der Sätze 3.16 und 5.9 zu testen, ob es sich um eine Del-Pezzo-Fäche mit den vorgegebenen Invarianten handelt.

Mit Hilfe der folgenden Proposition wird die Anzahl der zu testenden Fälle beschränkt, indem Schranken für die Nenner  $\text{denom}(v)$  der Unterteilungspunkte  $v \in \mathcal{S}_y$  angegeben werden. Die verbleibenden Fälle können dann mit einer geeigneten Enumerationsstrategie leicht aufgezählt werden. Der Pseudocode eines solchen naiven Enumerationsalgorithmus findet sich im Anhang A.

**Proposition 6.8.** *Sei  $X(\mathcal{S})$  eine nicht-torische log-Del-Pezzo-Fläche vom Index  $\ell$  und Picard-Rang  $\rho$ , und  $\mathcal{S}$  sei in obiger Normalform. Dann gilt*

- i.  $\text{denom}(v) < A(\ell) := 2\ell^2 \cdot \rho$ , für  $v \in \mathcal{S}_y$ ,
- ii.  $\sum_y \frac{m_y^+ - 1}{m_y^+} < 2$ , wobei  $m_y^+ = \text{denom}(\mathcal{S}_y^+)$ ,
- iii.  $0 < \deg \mathcal{S}^+ < 2\ell + 1$  und
  - (a)  $2 \leq \deg[\mathcal{S}^+] \leq 2\ell$ ,
  - (b)  $[\deg \mathcal{S}^-] > -2$ , falls  $\mathbf{Q}^-$  unmarkiert ist.

*Beweis.* Den ersten Teil der Behauptung beweist man zuerst für  $v = \mathcal{S}_y^+$ . Da  $\mathcal{S}$  in Normalform vorliegt, gilt  $\deg[\mathcal{S}^+] \geq 2$ . Nach Lemma 6.9 folgt also  $\text{denom}(\mathcal{S}_y^+) < A_{\bar{\rho}}(\ell)$ .

Sei nun  $v_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathcal{S}_y$  ein Unterteilungspunkt und  $\mathcal{S}_y^+ = v_2 = \frac{p_2}{q_2}$ , und sei  $h$  die zu einem anti-kanonischen Divisor korrespondierende Supportfunktion. Mittels (5.6) erhält man  $u = (\text{lin } h)(1) > -1$ . Wegen Satz 3.4 gilt  $h(v_i) =$

$a_y + 1 - 1/q_i$ , dabei ist  $a_y$  der Koeffizient von  $K_Y$  bei  $y$ . Da  $h$  konkav ist, gilt für den minimalen Anstieg  $u'$  von  $h_y|_{[v_1, v_2]}$

$$u' \leq \frac{q_1 - q_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}.$$

Das Ample-Kriterium erfordert, dass  $h$  streng konkav ist, also  $u' > u$  gilt. Damit erhält man  $p_2 q_1 - p_1 q_2 + q_2 \geq q_1$  und wegen Lemma 6.9 schließlich  $A(\ell) \geq q_1$ .

Teil (iii) folgt direkt aus Lemma 5.20 und Lemma 6.1.  $\square$

**Lemma 6.9.** *Sei  $\mathcal{S}$  ein divisorieller Fächer einer log-Del-Pezzo  $k^*$ -Fläche vom Index  $\ell$ .*

- i. *Sei weiter  $\pm \deg \sum_y [\mathcal{S}^\pm] \geq 2$ . Dann hat eine Auflösung von  $X(\mathcal{S})$  mindestens Picard-Rang  $\frac{1}{\ell^2} \sum_y \text{denom}(\mathcal{S}_y^\pm)$ .*
- ii. *Seien  $v_1 = \frac{p_1}{q_1}, v_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{S}_y$ . Dann hat eine Auflösung von  $X(\mathcal{S})$  mindestens Picard-Rang  $\frac{|p_2 q_1 - p_1 q_2|}{\ell^2}$ .*

*Beweis.* Der Picard-Rang von  $X(\mathcal{S})$  berechnet sich nach Satz 3.6 wie folgt

$$2 - \text{Anzahl ell. Fixpunkte} + \sum_{y \in Y} (\#\mathcal{S}_y - 1).$$

Der Picard-Rang einer Auflösung erhöht sich um die Zahl der exzeptionellen Kurven. Falls  $\pm \deg \sum_y [\mathcal{S}^\pm] \geq 2$ , so ist der Auflösungsgraph vom Typ  $\langle \sum_i [p_i/q_i]; p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3 \rangle$ . Dieser enthält nach Proposition 5.22 mindestens

$$\frac{\max(q_1, q_2, q_3)}{\ell^2} - 1$$

exzeptionelle Kurven. Damit folgt der erste Teil der Behauptung.

Sei jetzt  $\mathcal{S}'$  der Unterteilungsdivisor, den man erhält, wenn man aus  $\mathcal{S}_y$  die Unterteilungspunkte zwischen  $v_1$  und  $v_2$  entfernt. Das bedeutet, dass die Unterteilung  $\mathcal{S}'_y$  das Intervall  $[v_1, v_2]$  enthält. Nach Kapitel 2 existiert dann eine birationale äquivariante eigentliche Abbildung  $X(\mathcal{S}) \rightarrow X(\mathcal{S}')$ .

Der hyperbolische Fixpunkt, der zu dem Intervall  $[v_1, v_2]$  korrespondiert, ist nach Bemerkung 5.4 eine torische Singularität zum Kegel  $\text{pos}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}\right)$ , also eine zyklische Quotientensingularität von Typ  $(p', |p_2 q_1 - p_1 q_2|)$  für ein  $p' \in \mathbf{N}$ . Nach Lemma 5.21 folgt damit die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden werden die Ergebnisse dieser Klassifikation für die Gorenstein-Indizes  $\leq 3$  und den Picard-Rang  $\leq 2$  aufgelistet.

**Satz 6.10.** *Es existieren folgende Gorenstein log-Del-Pezzo  $k^*$ -Flächen mit Picard-Rang eins:*

- i. elf Flächen mit zwei elliptischen Fixpunkten,*
- ii. eine Familie über  $\mathbf{A}^1 \setminus \{0, 1\}$  von Flächen mit zwei elliptischen Fixpunkten,*
- iii. eine Fläche mit einem elliptischen Fixpunkt,*
- iv. fünf torische Flächen (siehe [Dai06], [Dai09]).*

	Unterteilungen	Markierungen	$(K_X)^2$	Singularitäten
(i)	$\{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	$2A_3A_1$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		5	$A_4$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}\}$		2	$A_5A_2$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$		3	$A_5A_1$
	$\{\frac{-3}{2}, -1\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		4	$D_5$
	$\{\frac{-3}{2}, -1\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{2}{3}\}$		1	$E_6A_2$
	$\{\frac{-3}{2}, -1\}, \{\frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$		2	$D_6A_1$
	$\{\frac{-4}{3}, -1\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		3	$E_6$
	$\{\frac{-4}{3}, -1\}, \{\frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1	$E_7A_1$
	$\{\frac{-5}{4}, -1\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		2	$E_7$
	$\{\frac{-6}{5}, -1\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1	$E_8$
(ii)	$\{-2, -1\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	$2D_4$
(iii)	$\{\frac{-1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$+$	2	$D_43A_1$

**Satz 6.11.** *Es gibt 16 log-Del-Pezzo  $k^*$ -Flächen mit Picard-Rang 1 und Index  $\ell = 2$ , davon*

- i. neun Flächen mit zwei elliptischen Fixpunkten,*
- ii. eine Fläche mit einem elliptischen Fixpunkt,*
- iii. sieben torische Flächen (siehe [Dai06],[Dai09]).*

	Unterteilungen	Markierungen	$(K_X)^2$	Singularitäten
(i)	$\{-2, 0\}, \{\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	1	$K_3A_5A_1$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}$		1	$K_2A_7$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}, \{\frac{2}{5}\}$		1	$K_5A_4$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{6}\}, \{\frac{1}{2}\}$		2	$K_1A_7$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{5}{7}\}, \{\frac{1}{3}\}$		5	$K_5$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{7}{9}\}, \{\frac{1}{3}\}$		2	$K_6A_2$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{5}{6}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1	$K_1D_8$
	$\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1	$K_12D_4$
	$\{-\frac{4}{3}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1	$K_1D_5A_3$
(ii)	$\{-\frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$+$	1	$K_1D_62A_1$

**Satz 6.12.** *Es existieren 54 log-Del-Pezzo  $k^*$ -Flächen mit Picard-Rang 1 und Index  $\ell = 3$ , davon*

- i. 28 Flächen mit zwei elliptischen Fixpunkten,*
- ii. drei Familien über  $\mathbf{A}^1 \setminus \{0, 1\}$  von Flächen mit zwei elliptischen Fixpunkten,*
- iii. fünf Flächen mit einem elliptischen Fixpunkt,*
- iv. 18 torische Flächen (siehe [Dai09]).*

	Unterteilungen	Markierungen	$(K_X)^2$
(i)	$\{-4, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$4/3$
	$\{-4, 2\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-3, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$		1
	$\{-2, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}$		$2/3$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$7/3$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}$		$2/3$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{6}\}, \{\frac{1}{3}\}$		1
	$\{-1, 1\}, \{\frac{3}{7}\}, \{\frac{1}{2}\}$		6
	$\{-1, 0\}, \{\frac{3}{7}\}, \{\frac{3}{7}\}$		$2/3$

	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{8}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$5/3$
	$\{-1, 1\}, \{\frac{3}{8}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$10/3$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{5}{8}\}, \{\frac{2}{5}\}$		$13/3$
	$\{-1, 1\}, \{\frac{3}{10}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{7}{10}\}, \{\frac{2}{5}\}$		$1$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{10}{13}\}, \{\frac{1}{4}\}$		$17/3$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{11}{14}\}, \{\frac{1}{4}\}$		$3$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{13}{16}\}, \{\frac{1}{4}\}$		$5/3$
	$\{-\frac{3}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$4/3$
	$\{-\frac{3}{2}, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{4}{5}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$4/3$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{4}{7}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$17/3$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{5}{8}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$8/3$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{7}{8}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-\frac{3}{2}, -1\}, \{\frac{7}{10}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$4/3$
	$\{-\frac{4}{3}, -1\}, \{\frac{4}{5}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$1/3$
	$\{-\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-\frac{5}{4}, \frac{-1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-\frac{6}{5}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}P$		$2/3$
<hr/>			
(ii)	$\{-3, -1\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2/3$
	$\{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$1/3$
	$\{-2, -1\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$1/3$
<hr/>			
(iii)	$\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$+$	$8/3$
	$\{-\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$4/3$
	$\{-\frac{2}{3}\}, \{\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
	$\{-\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$4/3$
	$\{-\frac{5}{6}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$		$2/3$
<hr/>			

**Satz 6.13.** *Es existieren die folgenden nicht-torischen log-Del-Pezzo  $k^*$ -Flächen vom Picard-Rang 2 und Index  $\leq 3$ . Darunter finden sich vier minimale Flächen, diese sind mit einem \* gekennzeichnet.*

Index = 1				
	Unterteilungen	Markierungen	$(K_X)^2$	Singularitäten
	$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	6	$A_2$
	$\{-1, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	3	$2A_2A_1$
	$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	4	$A_3A_1$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	5	$A_3$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{3}\}$	$\pm$	3	$A_4A_1$
*	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	4	$D_4$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{2}{3}\}$	$\pm$	2	$D_5A_1$
	$\{\frac{-1}{3}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	4	$A_4$
	$\{\frac{-1}{3}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	3	$D_5$
	$\{\frac{-1}{3}, 0\}, \{\frac{-1}{3}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	$E_6$
*	$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	$2A_3$
	$\{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$+$	3	$A_32A_1$
Index = 2				
	$\{-2, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	6	$A_2A_1$
	$\{-2, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	2	$A_32A_2$
	$\{-1, 1\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	2	$A_3A_22A_1$
	$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{5}\}$	$\pm$	3	$A_5A_1$
	$\{0, 2\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	3	$A_3A_2A_1$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{5}\}$	$\pm$	2	$A_6A_1$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{4}{5}\}$	$\pm$	1	$D_7A_1$
	$\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	$2A_3A_1$
	$\{\frac{-1}{3}, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	$A_4A_2A_1$
	$\{\frac{-2}{3}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	5	$A_3A_1$
	$\{\frac{-2}{3}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{5}\}$	$\pm$	2	$A_4A_2A_1$
	$\{\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{5}\}$	$\pm$	5	$A_4$
	$\{\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{5}{7}\}$	$\pm$	2	$A_5A_2$
	$\{\frac{-2}{5}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	4	$A_4A_1$
	$\{\frac{-2}{7}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	3	$A_5A_1$
	$\{\frac{-2}{7}, \frac{-1}{4}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	4	$A_5$
	$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}\}$	$\pm$	1	$A_5A_3$

$\{-1, 0\}, \{\frac{2}{3}\}, \{\frac{2}{3}\}$	+	2	$A_3 2A_2$
Index = 3			
$\{-4, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	5	
$\{-4, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	
$\{-4, 4\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	
$\{-3, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	5	
$\{-3, 1\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	
$\{-3, 4\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	
$\{-2, 1\}, \{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	
$\{-2, 4\}, \{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	
$\{-1, 4\}, \{-4, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	
$\{-3, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{20}{3}$	
$\{-3, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$	
$\{-2, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{20}{3}$	
$\{-2, 1\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$	
$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{10}{3}$	
$\{-2, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1	
$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{2}{3}$	
$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{5}\}$	$\pm$	8	
$\{-1, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{5}\}$	$\pm$	2	
$\{-3, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	4	
$\{-2, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	4	
$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{7}\}$	$\pm$	$\frac{8}{3}$	
$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{7}\}$	$\pm$	$\frac{16}{3}$	
$\{0, 3\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{7}\}$	$\pm$	$\frac{8}{3}$	
$\{1, 3\}, \{-2, 0\}, \{\frac{3}{7}\}$	$\pm$	$\frac{8}{3}$	
$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{7}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	6	
$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{8}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{10}{3}$	
$\{0, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{10}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	2	
$\{-1, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{11}\}$	$\pm$	4	
$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{14}{3}$	
$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{13}{3}$	
$\{\frac{-1}{2}, 1\}, \{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$	

	$\{\frac{-1}{2}, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{7}{3}$
	$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	1
	$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{19}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	6
	$\{\frac{-1}{2}, 1\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{4}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{3}{4}\}$	$\pm$	$\frac{7}{3}$
	$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$\frac{11}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$\frac{10}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{5}\}$	$\pm$	$\frac{4}{3}$
	$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$\frac{7}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	2
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{6}{7}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	4
*	$\{\frac{-1}{2}, 1\}, \{\frac{-3}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{4}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{16}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{3}{4}\}$	$\pm$	$\frac{4}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$\frac{8}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$\frac{4}{3}$
	$\{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{6}{7}\}$	$\pm$	$\frac{2}{3}$
	$\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	4
	$\{\frac{-3}{4}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$\frac{17}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	3
	$\{\frac{-3}{4}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{10}{3}$
	$\{\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$\frac{17}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{5}{8}\}$	$\pm$	3
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{7}{10}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-2}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{7}{10}\}$	$\pm$	$\frac{17}{3}$
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-2}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{8}{11}\}$	$\pm$	3
	$\{\frac{-3}{4}, \frac{-2}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{10}{13}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$
	$\{\frac{-3}{5}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{11}{3}$
	$\{\frac{-1}{5}, 1\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$\frac{5}{3}$

$\{\frac{-3}{5}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$16/3$
$\{\frac{-3}{5}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$8/3$
$\{\frac{-3}{5}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$4/3$
$\{\frac{-3}{5}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$3$
$\{\frac{-3}{5}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{4}{7}\}$	$\pm$	$5$
$\{\frac{-3}{5}, \frac{-1}{2}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{5}{8}\}$	$\pm$	$7/3$
$\{\frac{-3}{7}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$3$
$\{\frac{-3}{7}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$14/3$
$\{\frac{-3}{7}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$2$
$\{\frac{-3}{7}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$7/3$
$\{\frac{-3}{7}, \frac{-1}{3}\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$4$
$\{\frac{-3}{7}, \frac{-1}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$4$
$\{\frac{-3}{7}, \frac{-1}{3}\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$10/3$
$\{\frac{-3}{7}, \frac{-2}{5}\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$5$
$\{\frac{-3}{7}, \frac{-2}{5}\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$13/3$
$\{\frac{-3}{8}, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$8/3$
$\{\frac{-3}{8}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$13/3$
$\{\frac{-3}{8}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$5/3$
$\{\frac{-3}{8}, 0\}, \{\frac{-1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2$
$\{\frac{-3}{8}, \frac{-1}{3}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{2}{5}\}$	$\pm$	$10/3$
$\{\frac{-3}{10}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$11/3$
$\{\frac{-3}{11}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$10/3$
$\{\frac{-3}{13}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$8/3$
$\{\frac{-3}{13}, \frac{-1}{5}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$11/3$
$\{\frac{-3}{13}, \frac{-2}{9}\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$14/3$
$\{\frac{-3}{14}, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{4}\}$	$\pm$	$7/3$
$\{-3, 0\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$4/3$
$\{-3, 2\}, \{-1, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2/3$
$\{-2, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$4/3$
$\{-2, 2\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2/3$
* $\{-1, 2\}, \{-3, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2/3$
$\{-1, 0\}, \{-2, -1\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$2/3$
$\{-1, 0\}, \{-2, 0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$\pm$	$1/3$
$\{-1, 1\}, \{\frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$	$+$	$2$

$\{0, 1\}, \{\frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}$	+	3
$\{-1, 0\}, \{\frac{3}{4}\}, \{\frac{3}{4}\}$	+	$\frac{5}{3}$
$\{-1, \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	+	2
$\{0, \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2}\}$	+	$\frac{8}{3}$

---

Die Sätze 6.10, 6.11 und 6.12 zeigen, dass echte Familien von Flächen vom Picard-Rang eins für die Indizes eins und drei existieren, jedoch keine für den Index zwei. Dies gilt nicht nur für  $k^*$ -Flächen, sondern allgemein siehe [AN89]. Man kann nun allgemeiner fragen, für welche Indizes echte Familien existieren. Der folgende Satz gibt dazu eine partielle Antwort.

**Satz 6.14.** *Für jedes ungerade  $\ell \in \mathbf{N}$  existiert eine Familie von log-Del-Pezzo Flächen über  $\mathcal{M}_{0,4}$  mit Picard-Rang eins und Index  $\ell$ .*

*Beweis.* Für  $\ell = 2i + 1$ , liefern Unterteilungen

- i.  $\mathcal{S}_{y_1}^i = \{-2 - i, -1\}, \mathcal{S}_{y_2}^i = \{\frac{1}{2}\}, \mathcal{S}_{y_3}^i = \{\frac{1}{2}\}, \mathcal{S}_{y_4}^i = \{\frac{1}{2}\}$  und
- ii.  $\mathcal{S}_{y_1}^i = \{-2 - i, i - 1\}, \mathcal{S}_{y_2}^i = \{\frac{1}{2}\}, \mathcal{S}_{y_3}^i = \{\frac{1}{2}\}, \mathcal{S}_{y_4}^i = \{\frac{1}{2}\}$

mit Markierungen  $\{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-\}$  durch Variation der vier Punkte  $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{P}^1$  Familien über  $\mathcal{M}_{0,4}$  mit den gewünschten Invarianten.  $\square$

## II Multigraduierte faktorielle Ringe

Dieser Abschnitt widmet sich der Klassifikation faktorieller (also insbesondere normaler)  $k$ -Algebren der Dimension  $n + 1$ , die mit einer effektiven  $\mathbf{Z}^n$ -Graduierung versehen sind, so dass die Invarianten gerade mit den Körperelementen übereinstimmen. In der dualen Sichtweise sind das die affinen faktoriellen Varietäten mit guter Toruswirkung der Komplexität eins. Die Gestalt dieser Ringe wurde bereits in [HS10] und [HHS09] beschrieben.

Sei  $\mathcal{S}$  ein divisorieller Fächer auf  $\mathbf{P}^1$ . Dann liefern die Erzeuger und Relationen für die Klassengruppe auf  $X(\mathcal{S})$  eine Matrix von der folgenden Gestalt:

$$M = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & A & & & * \end{array} \right),$$

wobei  $A$  eine Matrix mit Einträgen in  $\mathbf{Z}^+$  ist, jede Zeile höchstens einen Eintrag ungleich 0 besitzt und jede Spalte mindestens einen nicht-trivialen Eintrag hat.  $M$  hat dabei vollen Rang. Eine solche Matrix wird im Folgenden Primdivisorenmatrix von  $\mathcal{S}$  genannt.

Sei jetzt  $\mathfrak{D}$  ein  $\mathfrak{p}$ -Divisor auf  $\mathbf{P}^1$  mit dem Träger  $\{y_1, \dots, y_s\}$  und den Ecken  $\mathcal{V}_{y_i} = \{v_i^1, \dots, v_i^{r_i}\}$ . Setzt man nun  $\mu_i^j = \mu(v_i^j)$  und  $\underline{\mu}_i = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^{r_i})$ , dann erhält die Matrix die folgende, bereits aus (5.1) bekannte, Gestalt.

$$(6.2) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ \mu_1^1 & 0 & \dots & 0 & \mu_1^1 v_1^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{r_1} & 0 & \dots & 0 & \mu_1^{r_1} v_1^{r_1} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_s^1 & \mu_s^1 v_s^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_s^{r_s} & \mu_s^{r_s} v_s^{r_s} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & n_{\varrho_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_{\varrho_r} \end{pmatrix}$$

Für faktorielle  $X(\mathfrak{D})$  muss diese Matrix quadratisch sein und die Determinante  $\pm 1$  haben. Daraus folgt insbesondere, dass die Werte  $\text{ggT}(\underline{\mu}_i)$  paarweise teilerfremd sein müssen. Ein Tupel  $\mathcal{P} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$  heiße nun *zulässig*, falls diese Koprimebedingung erfüllt wird. Sei  $\mathcal{P}$  ein zulässiges Tupel und  $\mathcal{Z} = (z_3, \dots, z_s)$  eine Konfiguration von  $(\#\mathcal{P} - 2)$  verschiedenen Werten in  $k^*$ . Diesen Daten wird die  $k$ -Algebra  $A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$  zugeordnet, die von den Elementen

$$\{T_{ij} \mid 1 \leq i \leq \#\mathcal{P}, 1 \leq j \leq \#\underline{\mu}_i\}$$

mit den Relationen

$$\langle z_i T^{\underline{\mu}_1} + T^{\underline{\mu}_2} + T^{\underline{\mu}_i} \mid 3 \leq i \leq \#\mathcal{P} \rangle$$

erzeugt wird.

**Satz 6.15** ([HHS09], Thm. 1.9). *Jede affine faktorielle Varietät  $X$  mit einer guten Toruswirkung der Komplexität eins ist von der Form*

$$X = \text{Spec } A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[\underline{S}].$$



größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen  $M_i := \frac{\mu_1 \cdots \mu_s}{\mu_i}$  mit  $1 \leq i \leq s$  ist 1. Das heißt es existieren Koeffizienten  $e_1, \dots, e_s$ , sodass  $1 = \sum e_i M_i$ . Dann erfüllt die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ \mu_1 & 0 & \dots & 0 & e_1 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots & e_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_s & e_s \end{pmatrix}$$

die gestellten Bedingungen. Ist nun  $j > 0$ , dann existiert ein  $\mu_i$  mit  $\#\underline{\mu}_i > 1$ . Nun betrachten wir  $\mathcal{P}'$ , das aus  $\mathcal{P}$  hervorgeht, indem man  $\underline{\mu}_i$  durch

$$\underline{\mu}_i' := (\mu_{i1}, \dots, \text{ggT}(\mu_{ir_{i-1}}, \mu_{ir_j}))$$

ersetzt.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Matrix für  $\mathcal{P}'$ . Zuerst fügt man rechts eine Nullspalte an und ersetzt die zu  $\underline{\mu}_i'$  korrespondierende Zeile  $(0 \cdots 0, \mu'_{jr_{j-1}}, 0 \cdots 0, \mu'_{jr_{j-1}} v'_{jr_{j-1}}, 0)$  durch die beiden Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & \mu_{jr_{j-1}} & 0 \cdots 0 & v'_{jr_{j-1}} & -\beta \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{jr_j} & 0 \cdots 0 & v'_{jr_{j-1}} & \alpha, \end{array}$$

wobei  $\mu'_{ir_{i-1}} = \alpha \mu_{ir_{i-1}} + \beta \mu_{ir_i}$ . Mittels Zeilenumformungen lassen sich diese Zeilen zu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu'_{jr_{j-1}} & 0 \cdots 0 & \mu'_{jr_{j-1}} v'_{jr_{j-1}} & 0 \end{array}$$

transformieren. Die Determinante der Matrix verändert sich durch das Hinzufügen der Nullspalte und den Austausch der einer Zeile durch die beiden neuen nicht.  $\square$

**Konstruktion 6.18.** Zu einer Primdivisorenmatrix  $M$  existiert ein polyedrischer Divisor  $\mathfrak{D}$  auf  $\mathbf{P}^1$  mit dem vollen Definitionsbereich  $\mathbf{P}^1$ , so dass  $M(\mathfrak{D}) = M$  gilt. Zuerst wählt man Punkte  $y_0, \dots, y_s$ , je einen für jede Zeile der Matrix, und betrachtet den Kegel  $\sigma'$  in  $\mathbf{Z}^s \times N$ , der durch die Zeilen der Matrix  $M$  aufgespannt wird. Seien  $p_1$  und  $p_2$  die Projektionen auf die beiden Faktoren und  $e_1, \dots, e_r$  die kanonische Basis von  $\mathbf{Z}^s$ . Dann liefert  $\Delta_i = p_2(p_1^{-1}(e_i) \cap \sigma')$  die Koeffizienten eines p-Divisors  $\mathfrak{D}$  auf  $\mathbf{P}^1$ , zu dem  $M$  als Primdivisorenmatrix korrespondiert.

*Bemerkung 6.19.* Das Verfahren erinnert an die Berechnung des polyedrischen Divisors einer in eine torische Varietät eingebetteten T-Varietät wie sie in [AH06, Sec. 11] ausgeführt wurde. Tatsächlich lässt sich leicht eine

Abbildung  $\varphi = (\psi_{\text{pt}}, F, \mathfrak{f})$  zwischen den polyedrischen Divisoren  $\mathfrak{D}$  und  $\sigma'$  angeben, die eine äquivariante Einbettung beschreibt (Hierbei wird  $\sigma'$  als polyedrischer Divisor auf einem Punkt aufgefasst). Dabei ist  $\psi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \{\text{Pkt}\}$  der eindeutig definierte Morphismus,  $F : N \hookrightarrow \mathbf{Z}^s \times N$  die kanonische Inklusion und  $\mathfrak{f} = \sum_{i=1}^s (e_i, 0) \otimes f_i$ , wobei  $f_i$  eine rationale Funktion auf  $Y = \mathbf{P}^1$  ist, für die  $\text{div}(f_i) = y_i - y_0$  gilt.

$\mathfrak{D}$  ist gerade so gewählt, dass  $M$  eine Primdivisorenmatrix von  $\mathfrak{D}$  ist. Andererseits sind die Spalten von  $M$  auch die Relationen zwischen den Primdivisoren aus  $\sigma'(1)$  der torischen Varietät  $X_{\sigma'}$ . Die Klassengruppen von  $X_{\sigma'}$  und  $X(\mathfrak{D})$  stimmen also überein. Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass  $\varphi$  eine sogenannte *niedliche* Einbettung (neat embedding) definiert – siehe auch [Hau08], d.h. insbesondere, dass  $\varphi^*$  tatsächlich einen Isomorphismus auf den Klassengruppen definiert.

**Korollar 6.20.** *Zu  $A = A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[S_1, \dots, S_r]$  existiert ein polyedrischer Divisor  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(r, \mathcal{P}, \mathcal{Z})$  mit  $A(\mathfrak{D}) = A$ .  $\square$*

### III Lokal faktorielle T-Varietäten

Sei  $X$  eine lokal faktorielle  $T$ -Varietät der Komplexität eins mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$ . Dann ist der Cox-Ring faktoriell und die zugehörige affine Varietät trägt ebenfalls eine  $(T \times k^*)$ -Wirkung der Komplexität eins. Das heißt insbesondere, dass der Cox-Ring von der Form  $\mathcal{R}(X) \cong A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[\underline{S}]$  ist. Es liegt also nahe, die Varietäten mittels ihrer Cox-Ringe zu klassifizieren. Die Idee dazu stammt dabei von den Koautoren der gemeinsamen Arbeit [HHS09].

Es gilt nun also die Frage zu klären welche zulässigen Tupel  $\mathcal{P}$  zu Cox-Ringen der besagten Varietäten korrespondieren und was die entsprechenden divisorischen Fächer sind.

Es sei  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ , wobei  $\mathcal{P}''$  die echten *Multiexponenten* enthält und  $\mathcal{P}'$  die einfachen Exponenten, die nur aus einer einzigen Zahl bestehen. Nun betrachtet man die zulässigen Tupel mit den folgenden Eigenschaften:

- i. Es gibt mindestens ein echtes Tupel, d.h.  $\#\mathcal{P}'' \geq 1$ .
- ii. Die Gewichte der echten Multiexponenten stimmen überein, d.h. es gilt  $\prod_i \underline{\mu}_i = \prod_i \underline{\mu}'_i$  für  $\underline{\mu}, \underline{\mu}' \in \mathcal{P}''$ . Diese Zahl wird mit  $\text{deg } \mathcal{P}$  bezeichnet.
- iii. Die Zahlen  $\mu \in \mathcal{P}'$  sind Teiler von  $\text{deg } \mathcal{P}$ .
- iv. Falls nur ein echtes Tupel existiert, so gilt  $\prod_{\mu \in \mathcal{P}'} \mu = \text{deg } \mathcal{P}$ .

**Satz 6.21.** *Sei  $A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[\underline{S}]$  der Cox-Ring einer lokal faktoriellen Varietät der Komplexität eins mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$ . Dann ist  $\mathcal{P}$  von obiger Form.*

*Beweis.* Sei  $X = X(\mathcal{S})$  eine Varietät mit den geforderten Eigenschaften. Sei  $M$  die Primdivisorenmatrix von  $\mathcal{S}$ , mit der Untermatrix  $A$  wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Sie hat  $(s + \dim N)$  Spalten und  $(s + \dim N + 1)$  Zeilen.

Man wählt nun eine Spalte aus  $A$  mit mehr als einem Eintrag. Man nehme an, die  $i$ -te Zeile habe einen Eintrag in dieser Spalte und bezeichne die Untermatrix, die man durch Streichen dieser Zeile erhält, mit  $M_i$ . Diese Untermatrix ist dann wegen der Lemmata 6.22 und 6.23 die Primdivisorenmatrix eines polyedrischen Divisors  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  mit vollem Definitionsbereich  $Y(\mathfrak{D}) = \mathbf{P}^1$ . Der entsprechende elliptische Fixpunkt ist nach Voraussetzung faktoriell. Da der Fixpunkt im Schnitt aller invarianten Primdivisoren von  $X(\mathfrak{D})$  liegt, muss demnach bereits  $X(\mathfrak{D})$  faktoriell sein. Das heißt die entsprechenden maximalen Minoren  $\det M_i$  der Matrix  $M$  müssen  $\pm 1$  sein.

Die Zeilen der Matrix  $M$  stehen für invariante Primdivisoren  $D_i = D_{v_i}$  von  $X$ , d.h. Erzeuger der Klassengruppe. Die Spalten sind gerade die Relationen zwischen diesen Erzeugern. Falls  $\det M_i = \pm 1$ , so ist also das Bild von  $D_i$  in der Klassengruppe der (eindeutige) effektive Erzeuger von  $\text{Cl } X$ . Allgemeiner gilt  $\bar{D}_j = |\det M_j| \in \mathbf{Z} = \text{Cl } X$ . Der Satz 4.6 zeigt nun, dass der Grad dieser  $T_{D_i}$  im Cox-Ring  $\mathcal{R}(X) = A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[\mathcal{S}]$  gerade 1 ist. Das heißt alle Variablen, die in gemischten Monomen der Gleichungen

$$z_i T^{\mu_0} + T^{\mu_1} + T^{\mu_i}; \quad 2 \leq i \leq s$$

auftauchen, haben den Grad eins. Der Grad eines solchen Monoms ist damit gerade  $\deg \mathcal{P}$ . Die Homogenität der Gleichungen erfordert dann, dass diese Grade für alle gemischten Monome übereinstimmen und die Exponenten der reinen Monome Teiler dieses Grades sind. Damit folgen die Bedingungen (ii) und (iii) für die zulässigen Tupel.

Angenommen, alle  $y$ -Anteile des divisoriiellen Fächers von  $X$  besitzen jeweils nur eine Ecke  $v_y$  und sei  $v = \sum_y v_y$ . Dann betrachtet man den maximalen Kegel  $\sigma$  im Schweifächer mit  $-v \in \sigma$ . Der dazu gehörige polyedrische Divisor  $\mathfrak{D}_\sigma$  hat wegen Lemma 6.22 vollen Definitionsbereich, aber offensichtlich gilt entweder  $v = 0$  oder  $v \notin \sigma$ . Beides ist ein Widerspruch zur Bedingung  $\deg \mathfrak{D}_\sigma \subsetneq \sigma$  für  $p$ -Divisoren. Demnach gibt es also einen  $y$ -Anteil mit mindestens zwei Ecken. Das entspricht der Bedingung  $\#\mathcal{P}'' \geq 1$ .

Sei nun  $\#\mathcal{P}'' = 1$ , dann sind alle  $y$ -Anteile des divisoriiellen Fächers bis auf einen, dieser sei o.B.d.A.  $\mathcal{S}_{y_s}$ , (rational) verschobene Schweifächer. In der einen Ausnahme findet sich dann ein volldimensionales Polyeder aufgespannt durch die Ecken  $v_s^1, \dots, v_s^{r_s}$  und die extremalen Strahlen  $\rho_1, \dots, \rho_r$ . Der Kegel

über diesem Polyeder wird dann durch die Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{\mu}_{s1} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\mu}_{sr_s} & * & \cdots & * \\ 0 & & n_{\rho_1} & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & n_{\rho_s} & \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Das Polyeder hat keinen volldimensionalen Schweif. Es folgt, dass er Koeffizient eines polyedrischen Divisors mit affinem Definitionsbereich sein muss. Er korrespondiert außerdem zu einem Fixpunkt  $x \in X$ . Nach Bemerkung 5.4 ist  $X$  Zariski-lokal um  $x$  isomorph zur entsprechenden torischen Singularität. Diese ist also ebenfalls faktoriell. Demzufolge muss die Determinante der Matrix  $\pm 1$  sein. Die Primdivisorenmatrix von  $X(\mathcal{S})$  hat nun die folgende Form

$$\begin{pmatrix} -1 & \cdots & & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & & & & & * & \cdots & * \\ & \mu_2 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \mu_{s-1} & & & & \\ & & & & \underline{\mu}_{s1} & & & \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \underline{\mu}_{sr_s} & * & \cdots & * \\ & & & & & & n_{\rho_1} & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & n_{\rho_r} & \end{pmatrix}.$$

Für die ersten  $s - 1$  Minoren gilt daher  $\det M_i = \mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_{s-1}$  und damit  $\deg T_i^{\mu_i} = \mu_1 \cdots \mu_{s-1}$ . Wegen der Homogenität der Gleichung folgt somit auch die Bedingung (iv).  $\square$

**Lemma 6.22.** *Sei  $X = X(\mathcal{S})$  eine lokal faktorielle vollständige  $T$ -Varietät der Komplexität eins und Klassengruppe  $\mathbf{Z}$ . Dann ist  $X$  ein projektiver Raum oder es gelten die folgenden beiden äquivalenten Aussagen.*

- i.  $X$  hat nur isolierte Fixpunkte,
- ii. Alle polyedrischen Divisoren in  $\mathcal{S}$  mit volldimensionalem Schweif haben auch den vollen Definitionsbereich.

*Beweis.* Die Äquivalenz der beiden Aussagen folgt aus den Erkenntnissen zur Orbiterlegung (Abschnitt 1.3).

Sei  $\mathfrak{D}$  ein polyedrischer Divisor mit volldimensionalem Schweif und affinem Definitionsbereich. Dann hat  $\text{tail } \mathfrak{D}$  und somit auch  $\text{tail } \mathcal{S}$  mindestens  $(\dim N)$  extremale Strahlen. Nach der Formel für den Rang der Klassengruppe (Satz 3.6)

$$(6.3) \quad \text{rang Cl } Y + \# \mathcal{H} + \sum_{\mathbf{Z}} \#(\mathcal{V}_y - 1) - \dim N$$

muss also  $\mathcal{V}_y$  einelementig sein für alle  $y \in Y = \mathbf{P}^1$ . Die entsprechende (eindeutige) Ecke wird mit  $v_y$  bezeichnet. Die Singularität von  $X(\mathfrak{D})$  in der Faser über  $y$  ist nach Bemerkung 5.5 genau dann faktoriell, wenn der Schweifkegel regulär ist und  $v_y$  ein Gitterelement ist.  $\mathcal{S}$  ist also ein divisorischer Fächer, dessen  $y$ -Anteile im Gitter verschobene Schweifächer darstellen. Ein solcher Fächer auf  $\mathbf{P}^1$  ist nach Proposition 2.15 jedoch torisch. Die einzige lokal faktorielle torische Varietät mit einer Klassengruppe vom Rang eins ist jedoch der  $\mathbf{P}^n$ .  $\square$

**Lemma 6.23.** *Sei  $X(\mathcal{S})$  eine  $T$ -Varietät der Komplexität eins und sei  $v \in \mathcal{V}_y$  mit  $\# \mathcal{V}_y > 1$ . Dann existiert ein polyedrischer Divisor  $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$  mit volldimensionalem Schweif, so dass  $v \notin \mathfrak{D}_y$  und  $\mathfrak{D}_y \neq \emptyset$ .*

*Beweis.* Es genügt, sich den  $y$ -Anteil von  $\mathcal{S}$  anzusehen. Sei  $v'$  eine weitere Ecke in  $\mathcal{V}_y$ . Dann muss es einen Schweifkegel geben, der den Vektor  $\vec{v}'$  enthält. Dann gibt es wegen der Vollständigkeit von  $\mathcal{S}$  auch einen polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D}$  mit diesem Schweif und der Eigenschaft  $\mathfrak{D}_y \neq \emptyset$ . Dann kann aber  $\mathfrak{D}_y$  nicht  $v$  enthalten, da sonst  $v'$  in  $v + \text{tail } \mathfrak{D}$  enthalten wäre und somit keine Ecke von  $\mathfrak{D}_y$  bzw.  $\mathcal{S}_y$  sein könnte.  $\square$

**Korollar 6.24.** *Jede vollständige lokal faktorielle  $T$ -Varietät  $X$  der Komplexität eins mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$  ist ein vollständiger Durchschnitt in einem gewichteten projektiven Raum, der durch Gleichungen der Form*

$$z_i T^{\mu_0} + T^{\mu_1} + T^{\mu_i}; \quad 2 \leq i \leq s$$

*gegeben ist. Dabei ist  $\mathcal{P} = (\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_s)$  ein zulässiges Tupel von obigem Typ. Die Gleichungen haben gerade das Gewicht  $\deg \mathcal{P}$ .*

*Sind zwei solche Varietäten isomorph, dann sind die zugehörigen Tupel bis auf Umordnung gleich.*

*Beweis.* Um die letzte Aussage einzusehen, beachte man, dass die Tupel  $\mathcal{P}$  nach Korollar 4.6 zu Invarianten der Toruswirkung korrespondieren. Da die Wirkung eines maximalen Torus auf vollständigem  $X$  jedoch eindeutig ist, sind die Varietäten sogar äquivariant isomorph. Die entsprechenden Tupel müssen also bis auf Umordnung übereinstimmen.  $\square$

*Bemerkung 6.25.* Genauer gesagt, liefern bis auf Umordnung gleiche Tupel  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  gerade homogen deformationsäquivalente Varietäten, siehe dazu auch [Ilt10].

*Bemerkung 6.26.* Die Umkehrung von Satz 6.21 gilt ebenfalls: wenn  $\mathcal{P}$  ein zulässiges Tupel mit den Eigenschaften (i)–(iv) ist, so ist  $A(\mathcal{P}, \mathcal{Z})[S_1, \dots, S_r]$  ein Cox-Ring einer lokal faktoriellen T-Varietät der Komplexität eins mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$ .

Die einzigen glatten torischen Varietäten vom Picard-Rang eins sind projektive Räume. Bis auf jeweils eine Ausnahme in den Dimensionen drei und vier gilt das auch für den Fall der Komplexität eins:

**Korollar 6.27.** *Jede vollständige glatte T-Varietät der Komplexität eins mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$  ist eine der folgenden:*

- i. Ein projektiver Raum,
- ii. die glatte Quadrik  $Q \subset \mathbf{P}^4$ ,
- iii. die Grassmannsche  $G(2, 4)$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Korollar 6.16, da die Glattheit der Varietät impliziert, dass ihr affine Kegel glatt außerhalb des Koordinatenursprungs ist. Zu beachten ist noch, dass die Gleichung der Grassmannschen  $G(2, 4) \subset \mathbf{P}^5$  gerade  $T_1T_2 + T_3T_4 + T_5T_6$  ist.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnittes wird der Fall der Dreifaltigkeiten eingehender untersucht.

**Satz 6.28** ([HHS09], Thm 3.2/4.1). *Es existieren neun dreidimensionale faktorielle Fano-Varietäten mit Klassengruppe  $\mathbf{Z}$  und effektiver  $T^2$ -Wirkung. Die entsprechenden Gleichungen in einem gewichteten projektiven Raum sowie die Selbstschnitte der kanonischen Divisoren sind in der folgenden Tabelle gegeben. Weiterhin gelten folgende Aussagen:*

- i. Nr. 4 ist eine glatte Quadrik in  $\mathbf{P}^4$ .
- ii. Nr. 1, 3, 5, 7 und 9 sind singulär mit ausschließlich kanonischen Singularitäten und besitzen eine krepante Auflösung.
- iii. Nr. 6 und 8 sind singulär mit nicht-kanonischen Singularitäten, aber sie besitzen jeweils ein glattes minimales Modell.
- iv. Nr. 2 ist singulär und besitzt eine terminale Singularität vom Typ  $\mathbf{cA}_1$  und daher nur ein singuläres minimales Modell.

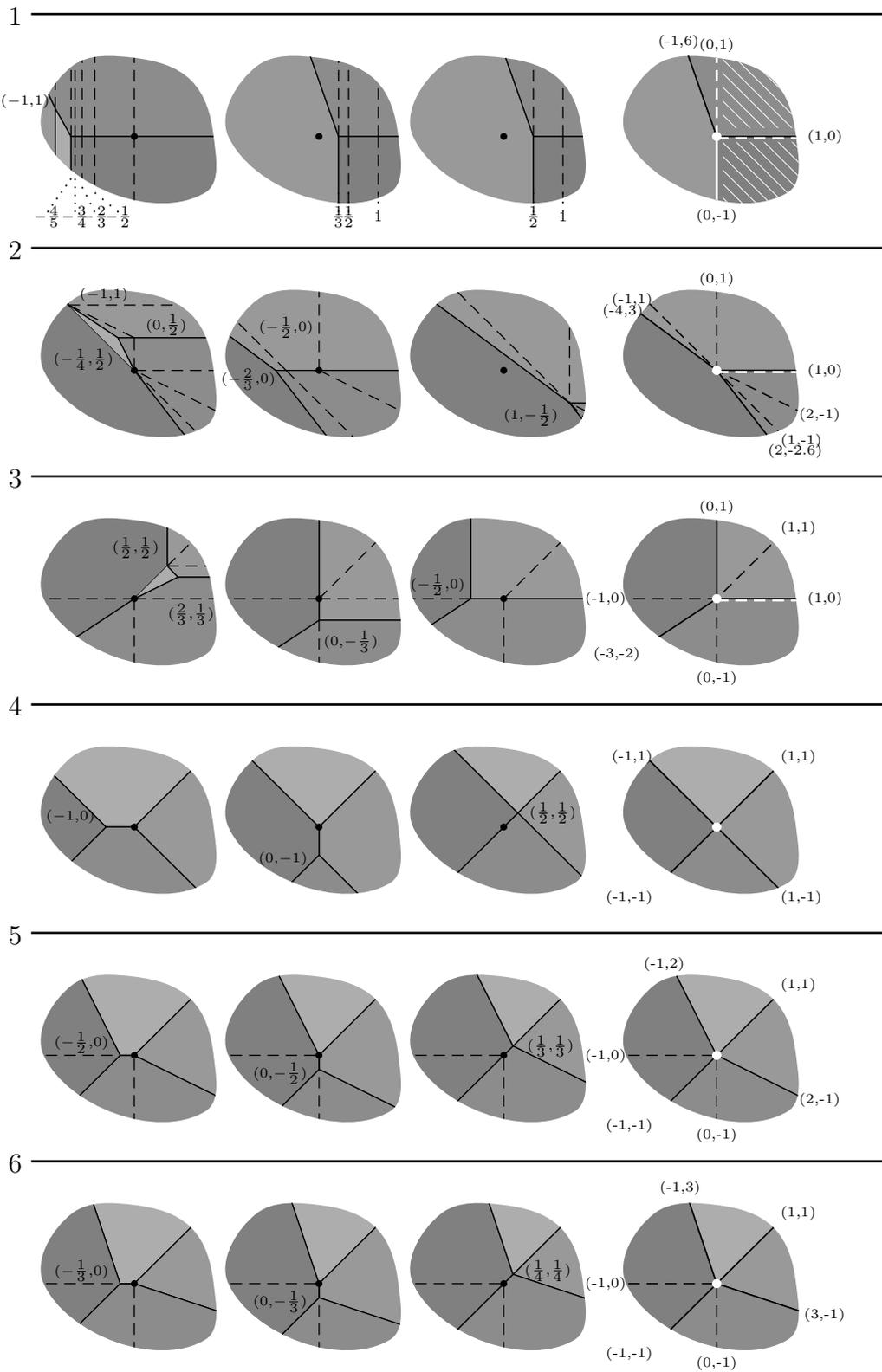
No.	$\mathcal{R}(X)$	$(w_1, \dots, w_5)$	$(-K_X)^3$
1	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^5 + T_3^3 + T_4^2 \rangle$	(1, 1, 2, 3, 1)	8
2	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2 T_3^4 + T_4^3 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 2, 3)	8
3	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^2 T_3^3 + T_4^3 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 2, 3)	8
4	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2 + T_3 T_4 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 1)	54
5	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^2 + T_3 T_4^2 + T_5^3 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 1)	24
6	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^3 + T_3 T_4^3 + T_5^4 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 1)	4
7	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^3 + T_3 T_4^3 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 2)	16
8	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^5 + T_3 T_4^5 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 3)	2
9	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2^5 + T_3^3 T_4^3 + T_5^2 \rangle$	(1, 1, 1, 1, 3)	2

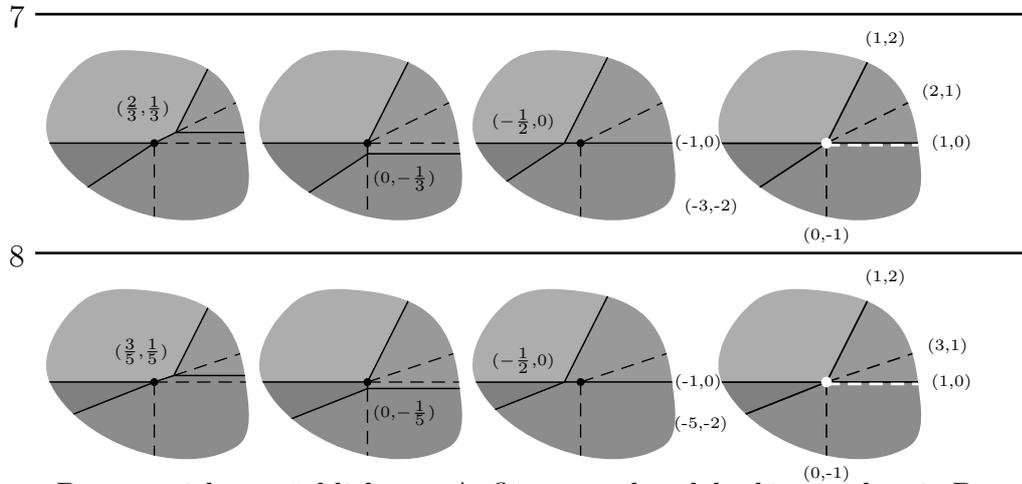
*Beweis.* Die Liste der Gleichungen erhält man aus Korollar 6.24. Die entsprechenden Varietäten sind vollständige Durchschnitte von  $s-2$  Gleichungen vom Grad  $d = \deg \mathcal{P}$  in  $\mathbf{P}(w_1, \dots, w_{s+2})$ . Dann ist  $X$  genau dann Fano, wenn  $(s-2) \cdot d < \sum_i w_i$  gilt. Dies beschränkt die zu betrachtenden Gleichungen auf die obige Liste.

Der Selbstschnitt des kanonischen Divisors ergibt sich für Hyperflächen in gewichteten projektiven Räumen als

$$(-K_X)^{\dim X} = \frac{d \cdot (\sum_i w_i - d)^{\dim X}}{\prod_i w_i}.$$

Für die Aussagen zu den Singularitäten ermittelt man zuerst die divisorien Fächer der Varietäten, zum Beispiel gemäß Konstruktion 6.18. Da die Varietäten in torische Varietäten eingebettet sind, lassen sich die divisorien Fächer auch mit dem Verfahren aus [AH06, Sec. 11] bestimmen. Danach konstruiert man kombinatorisch geeignete Auflösungen. Die Ergebnisse finden sich in der folgenden Liste. In jeder Zeile finden sich die nicht-trivialen Unterteilungen eines divisorien Fächers sowie der Schweiffächer. Dabei sind unmarkierte Kegel weiß gehalten. Die beschriebenen Auflösungen der Singularitäten (bzw. die minimalen Modelle) werden durch Unterteilung der divisorien Fächer beschrieben. Die Unterteilungen sind in den Skizzen durch gestrichelte Linien bzw. Schraffuren wiedergegeben.





Dass es sich tatsächlich um Auflösungen handelt, lässt sich mit Bemerkung 5.4 und Satz 5.7 überprüfen. Die Varietäten sind Gorenstein. Damit stimmen die Begriffe log-terminal und kanonisch überein. Satz 5.15 liefert hier also das entsprechende Ergebnis. Die Diskrepanzen berechnen sich gemäß dem Verfahren in Abschnitt 5.3. Um die Minimalität des Modells zu überprüfen, muss man zeigen, dass der relative kanonischen Divisor relativ ample ist. Dies kann mit Satz 3.16 lokal überprüft werden.

Die entsprechenden Berechnungen werden nun exemplarisch für die Dreifaltigkeit Nr. 6 durchgeführt. Für den Selbstschnitt des kanonischen Divisors erhält man

$$(-K_X)^3 = \frac{4 \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 4)^3}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4.$$

Man greife sich den in Abb. 6.1 dargestellten polyedrischen Divisor  $\mathfrak{D}$  für die Dreifaltigkeit 6 heraus. Von den übrigen 3 maximalen polyedrischen Divisoren sind zwei bereits glatt und der dritte ist isomorph zu dem gewählten. Bezeichnet man die beiden polyedrischen Divisoren, die durch die dargestellte

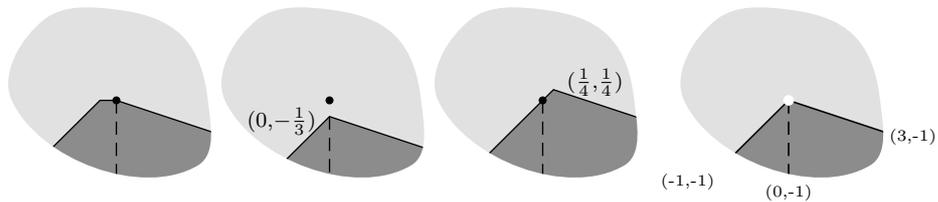


Abbildung 6.1: Eine (verfeinerte) affine Karte der Dreifaltigkeit Nr. 6.

Verfeinerung von  $\mathfrak{D}$  entstehen, mit  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \left( \overline{(-1/3, 0)}\mathbf{0} + \sigma_1 \right) \otimes y_1 + \left( (0, -1/3) + \sigma_1 \right) \otimes y_2, \\ \mathfrak{D}_2 &= \left( \overline{(1/4, 1/4)}\mathbf{0} + \sigma_2 \right) \otimes y_3 + \left( (0, -1/3) + \sigma_2 \right) \otimes y_2. \end{aligned}$$

Die korrespondierenden Kegel nach Lemma 5.7 sind

$$\text{pos} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \text{pos} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

Beides sind reguläre Kegel. D.h. die beiden polyedrischen Divisoren beschreiben glatte affine Varietäten. Zur Berechnung der Diskrepanzen wählt man den kanonischen Divisor  $K_Y = -2y_3$  auf  $Y = \mathbf{P}^1$ . Dann erhält man aus (5.1) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1$  und  $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Für den exzeptionellen Primdivisor  $D_{y_3,0}$  erhält man also  $\text{discr}_{y_3,0} = -1$ .

Die entsprechende Supportfunktion  $h$  mit  $D_h = K_{W/X} = -D_{y_3,0}$  ist auf den  $y$ -Anteilen durch

$$\begin{aligned} h_{y_1}(v) &= \min \left( -\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle, -\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v \right\rangle \right), \\ h_{y_2}(v) &= \min \left( -\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle - 1, -\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v \right\rangle - 1 \right) \quad \text{und} \\ h_{y_3}(v) &= \min \left( -\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle + 1, -\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v \right\rangle + 1 \right) \end{aligned}$$

gegeben. Die Supportfunktion  $h$  ist streng konkav und der relative kanonische Divisor somit ample. Damit ist die Auflösung tatsächlich ein minimales Modell über  $X(\mathfrak{D})$ .  $\square$

**Korollar 6.29.** *Die Cox-Ringe der Auflösungen bzw. der minimalen Modelle sind in der folgenden Tabelle gegeben.*

No.	$\mathcal{R}(\widetilde{X})$
1	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_{14}] / \langle T_1 T_2 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 + T_7^3 T_8^2 T_9 + T_{10}^2 T_{11} \rangle$
2	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_9] / \langle T_1 T_2 T_3^2 T_4^4 + T_5 T_6^2 T_7^3 + T_8^2 \rangle$
3	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_8] / \langle T_1 T_2^2 T_3^3 + T_4 T_5^3 + T_6 T_7^2 \rangle$
4	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_5] / \langle T_1 T_2 + T_3 T_4 + T_5^2 \rangle$
5	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_6] / \langle T_1 T_2^2 + T_3 T_4^2 + T_5^3 T_6 \rangle$
6	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_6] / \langle T_1 T_2^3 + T_3 T_4^3 + T_5^4 T_6 \rangle$

7	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_7] / \langle T_1 T_2^3 + T_3 T_4^3 + T_5^2 T_6 \rangle$
8	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_7] / \langle T_1 T_2^5 + T_3 T_4^5 + T_5^2 T_6 \rangle$
9	$\mathbb{k}[T_1, \dots, T_{46}] / \left\langle \begin{array}{l} T_1 T_2 T_3 T_4^2 T_5^2 T_6^3 T_7^3 T_8^4 T_9^4 T_{10}^5 + \\ + T_{11} \cdots T_{18} T_{19}^2 \cdots T_{24}^2 T_{25}^3 T_{26}^3 + T_{27} \cdots T_{32} T_{33}^2 \end{array} \right\rangle$

*Beweis.* Die Cox-Ringe können aus den divisoriiellen Fächern für die Auflösungen leicht mittels Korollar 4.6 berechnet werden.  $\square$

# Anhang A

## Klassifikationsalgorithmus

Der Klassifikationsalgorithmus wählt zuerst den Divisor  $\mathcal{S}^+$  unter Berücksichtigung der Schranken aus Proposition 6.8.  $\text{Platonic}(A)$  sei hierbei die Menge der Platonischen Tripel  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(2, 3, 5)$ ,  $(2, 2, q)$ ,  $(1, p, q)$ , wobei  $p, q \leq A$ . Danach werden sukzessive solange neue Unterteilungspunkte hinzugefügt, wie es die Begrenzung des Picard-Rangs erlaubt. Letzteres geschieht in der Prozedur **subdivide**. Zum Schluss werden in den Listen die Unterteilungen, die isomorphe Familien beschreiben, identifiziert.

---

**Algorithm 1** `subdivide( $\ell, e, \rho, S, S_{\text{sub}}, s$ )`

---

**Input:**  $\rho \in \mathbf{N}$ , Multimenge  $S$ , Multimenge  $S_{\text{sub}}$ ,  $s \in \mathbf{Z}$ .

**Output:** Menge  $L$  von Familien (Multimengen von Unterteilungen  $\mathcal{S}_y$ )

$L \leftarrow \emptyset$

**choose**  $v_0 \in S$

**for all**  $0 \leq \rho' \leq \min(\rho, 2\sqrt{2}\ell + 2)$  **do**

**for all**  $v_1 > v_2 > \dots > v_{\rho'} \in (s - v_0, v_0) \cap \frac{1}{A}\mathbf{Z}$  **do**

**if**  $\#S = 1$  **then**

$S_{\text{sub}} \leftarrow S_{\text{sub}} \uplus \{\{v_0, \dots, v_{\rho'}\}\}$

**if** `isLDP( $S_{\text{sub}}, \ell, e$ )` **then**

$L \leftarrow \{S_{\text{sub}}\}$

**end if**

**else**

$L \leftarrow L \cup \text{subdivide}(\rho - \rho', S \setminus \{v_0\}, S_{\text{sub}} \cup \{\{v_0, \dots, v_{\rho'}\}\}, s - v_0 + v_{\rho'})$

**end if**

**end for**

**end for**

**return**  $L$

---

---

**Algorithm 2** Enumerieren der log-Del-Pezzo-Flächen

---

**Input:** Gorenstein-Index  $\ell$ , Picard-Rang  $\rho$ , Anzahl der elliptischen Fixpunkte  $e \in \{1, 2\}$ **Output:** Menge  $L$  der Familien vom Index  $\ell$ , Picard-Rang  $\leq \rho$  mit  $e$  elliptischen Fixpunkten. $B \leftarrow B_e(\ell) - 3$  $C^+ \leftarrow 2\ell$  $A \leftarrow A_{\tilde{\rho}, e}(\ell, \rho)$ **if**  $e = 1$  **then** $C^- \leftarrow -2$  $\rho \leftarrow \rho - 1$ **else**  $\{e = 2\}$  $C^- \leftarrow -2\ell$ **end if****for all**  $(q_1, q_2, q_3) \in \text{Platonic}(A)$  **do****for all**  $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{Z}$  s.d.  $p_2/q_2, p_3/q_3 \in [0, 1)$  und  $2 \leq \sum_i \lceil p_i/q_i \rceil < C^+$   
**do** $L \leftarrow L \cup \text{subdivide}(\rho, \{p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \underbrace{0, \dots, 0}_{\times B}\}, \emptyset, e)$ **end for****end for****return** deleteDoublets( $L$ )

---

---

**Procedure 3** deleteDoublets( $L$ )

---

**for all**  $F \in L$  **do****for all**  $F' \in L \setminus \{F\}$  **do****if** isEquivalent( $F, F'$ ) **then** {siehe Satz 2.13} $L \leftarrow L \setminus \{F'\}$ **end if****end for****end for****return**  $L$ 

---

# Literaturverzeichnis

- [AH06] Klaus Altmann and Jürgen Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. *Math. Ann.*, 334(3):557–607, 2006.
- [AHS08] Klaus Altmann, Jürgen Hausen, and Hendrik Süß. Gluing affine torus actions via divisorial fans. *Transform. Groups*, 13(2):215–242, 2008.
- [AN89] Valery A. Alekseev and Viacheslav V. Nikulin. Classification of del Pezzo surfaces with log-terminal singularities of index  $\leq 2$ , and involutions on K3 surfaces. *Sov. Math., Dokl.*, 39(3):507–511, 1989.
- [Bat81] Victor V. Batyrev. Toric Fano threefolds. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 45:704–717, 1981.
- [Bat94] Victor V. Batyrev. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Algebr. Geom.*, 3(3):493–535, 1994.
- [Bat99] Victor V. Batyrev. On the classification of toric Fano 4-folds. *J. Math. Sci., New York*, 94(1):1021–1050, 1999.
- [BB] Victor V. Batyrev and Lev A. Borisov. On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties. Andreatta, Marco (ed.) et al., Higher dimensional complex varieties. Proceedings of the international conference, Trento, Italy, June 15–24, 1994. Berlin: Walter de Gruyter. 39-65 (1996).
- [BH03] Florian Berchtold and Jürgen Hausen. Homogeneous coordinates for algebraic varieties. *J. Algebra*, 266(2):636–670, 2003.
- [Bri68] Egbert Brieskorn. Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Invent. Math.*, 4:336–358, 1968.

- [Dai06] Dimitrios I. Dais. Geometric combinatorics in the study of compact toric surfaces. *Contemporary Mathematics* 423, 71–123, 2006.
- [Dai09] Dimitrios I. Dais. Classification of toric log Del Pezzo surfaces having Picard number 1 and index  $\leq 3$ . *Result. Math.*, 54(3–4):219–252, 2009.
- [DN08] Dimitrios I. Dais and Benjamin Nill. A boundedness result for toric log del Pezzo surfaces. *Arch. Math.*, 91(6):526–535, 2008.
- [FMSS95] William Fulton, Robert MacPherson, F. Sottile, and Bernd Sturmfels. Intersection theory on spherical varieties. *J. Algebr. Geom.*, 4(1):181–193, 1995.
- [FZ03] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg. Normal affine surfaces with  $\mathbf{C}^*$ -actions. *Osaka J. Math.*, 40(4):981–1009, 2003.
- [Hau08] Jürgen Hausen. Cox rings and combinatorics II. *Mosc. Math. J.*, 8(4):711–757, 2008.
- [HHS09] Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Hendrik Süß. Multigraded Factorial Rings and Fano varieties with torus action. *ArXiv e-prints*, October 2009, arXiv:0910.3607.
- [Hir53] Friedrich Hirzebruch. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 126:1–22, 1953.
- [HK00] Yi Hu and Sean Keel. Mori dream spaces and GIT. *Mich. Math. J.*, 48, 2000.
- [HS10] Jürgen Hausen and Hendrik Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. *Advances in Mathematics*, 225(2):977 – 1012, 2010.
- [Ilt10] Nathan O. Ilten. *Deformations of Rational Varieties with Codimension-One Torus Action*. PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2010.
- [IS09] Nathan O. Ilten and Hendrik Süß. Polarized Complexity-One T-Varieties. *to appear in: Michigan Mathematical Journal*, October 2009, arXiv:0910.5919.

- [Ish77] Masa-Nori Ishida. Graded factorial rings of dimension 3 of a restricted type. *J. Math. Kyoto Univ.*, 17:441–456, 1977.
- [Isk78] Vasily A. Iskovskikh. Fano 3-folds II. *Math. USSR, Izv.*, 12:469–506, 1978.
- [Kas06] Alexander M. Kasprzyk. Toric Fano three-folds with terminal singularities. *Tohoku Math. J. (2)*, 58(1):101–121, 2006.
- [KKMSD73] George Kempf, Finn Knudsen, David Mumford, and Bernard Saint-Donat. *Toroidal embeddings I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [KKN10] Alexander M. Kasprzyk, Maximilian Kreuzer, and Benjamin Nill. On the combinatorial classification of toric log del Pezzo surfaces. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 13:33–46, 2010.
- [KN09] Maximilian Kreuzer and Benjamin Nill. Classification of toric Fano 5-folds. *Adv. Geom.*, 9(1):85–97, 2009.
- [Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Lie08] Alvaro Liendo. Affine T-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. *ArXiv e-prints*, December 2008, arXiv:0812.0802.
- [LS10] Alvaro Liendo and Hendrik Süß. Normal singularities with torus actions. *ArXiv e-prints*, May 2010, arXiv:1005.2462.
- [MM86] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. Classification of Fano 3-folds with  $B_2 \geq 2$ . I. Nagata, M. (ed.) et al., Algebraic and topological theories. Papers from the symposium dedicated to the memory of Dr. Takehiko Miyata held in Kinosaki, October 30–November 9, 1984. Tokyo: Kinokuniya Company Ltd. 496–545 (1986)., 1986.
- [Mor77] Shigefumi Mori. Graded factorial domains. *Jap. J. Math., new Ser.*, 3:223–238, 1977.
- [Mum65] David Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. 34. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VI, 145 p. , 1965.

- [Nik89] Viacheslav V. Nikulin. del Pezzo surfaces with log-terminal singularities. *Mat. Sb.*, 180(2):226–243, 304, 1989.
- [Oda88] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [OW77] Peter Orlik and Philip Wagreich. Algebraic surfaces with  $k^*$ -action. *Acta Math.*, 138:43–81, 1977.
- [PS08] Lars Petersen and Hendrik Süß. Torus invariant divisors. *to appear in: Israel Journal of Mathematics*, November 2008, arXiv:0811.0517.
- [Rei80] Miles Reid. Canonical 3-folds. *Journées de géométrie algébrique, Angers/France 1979*, 273–310 (1980)., 1980.
- [RS09] John Rhodes and Benjamin Steinberg. *The  $\mathfrak{q}$ -theory of finite semigroups*. Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer. xxii, 2009.
- [SS10] Karl Schwede and Karen E. Smith. Globally  $F$ -regular and log Fano varieties. *Adv. Math.*, 224(3):863–894, 2010.
- [Sum74] Hideyasu Sumihiro. Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.*, 14:1–28, 1974.
- [Süß08] Hendrik Süß. Canonical divisors on T-varieties. *ArXiv e-prints*, November 2008, arXiv:0811.0626.
- [Tim97] Dmitrii A. Timashev. Classification of  $G$ -varieties of complexity 1. *Izv. Math.*, 61(2):363–397, 1997.
- [Tim00] Dmitrii A. Timashev. Cartier divisors and geometry of normal  $G$ -varieties. *Transform. Groups*, 5(2):181–204, 2000.

# Symbolverzeichnis

- $\square_h$  Gewichtspolyeder der Supportfunktion  $h$ , Seite 26
- $\Sigma^{(d)}$  Menge der  $d$ -dimensionalen Elemente von  $\Sigma$
- $\lfloor D \rfloor, \lceil D \rceil$  Koeffizientenweises Abrunden bzw. Aufrunden eines  $\mathbf{Q}$ -Divisor
- $\sigma(d)$  Menge der  $d$ -dimensionalen Seiten von  $\sigma$
- $\mathcal{A}(\mathfrak{D})$  Die zu  $\mathfrak{D}$  assoziierte Garbe von  $\mathcal{O}_{Y(\mathfrak{D})}$ -Algebren, Seite 4
- $A(\mathfrak{D})$  Die zu  $\mathfrak{D}$  assoziierte  $k$ -Algebra, d.h. die globalen von  $\mathcal{A}(\mathfrak{D})$ , Seite 4
- $\mathfrak{D}$  Ein polyedrischer Divisor, Seite 2
- $\text{Div}^T$   $T$ -invariante Weildivisoren auf  $X$
- $\widetilde{D}_v, \widetilde{D}_{Z,v}$  Vertikaler Primdivisor in  $\widetilde{X}(\mathcal{S})$  zu  $v \in \mathcal{S}_Z$ , Seite 22
- $D_h$  Cartier-Divisor auf  $X(\mathcal{S})$  zu  $h \in \text{SF}(\mathcal{S})$ , Seite 26
- $D_v, D_{Z,v}$  Vertikaler Primdivisor in  $X(\mathcal{S})$  zu  $v \in \mathcal{S}_Z$ , Seite 22
- $\widetilde{E}_\rho$  Horizontaler  $T$ -Primdivisor in  $\widetilde{X}(\mathcal{S})$  zu  $\rho$ , Seite 22
- $E_\rho$  Horizontaler  $T$ -Primdivisor in  $X(\mathcal{S})$  zu  $\rho \in (\text{tail}\mathcal{S})^{(1)}$ , Seite 22
- $\text{face}(\Delta, u)$  Seite des Polyeders  $\Delta$ , auf der  $\langle u, \cdot \rangle$  minimiert wird
- $\mathcal{H}(\mathcal{S})$  Menge aller extremalen Strahlen von  $\text{tail}\mathcal{S}$ , Seite 22
- $\mathcal{H}(X)$  Menge der horizontalen  $T$ -Primdivisoren von  $X$ , Seite 22
- $h^*$  Duale Funktion zu einer Supportfunktion  $h$ , Seite 26
- $k$  Grundkörper, Seite 1
- $K(X)$  Funktionenkörper der Varietät  $X$

- $K(X)^T$  Die  $T$ -invarianten Funktionen auf  $X$   
 $K(X)^{\text{hom}}$  semi-invariante Funktionen auf  $X$   
 $\text{lin } h$  Linearer Anteil der Supportfunktion  $h$ , Seite 25  
 $\mathcal{M}$  Markierungsmenge eines divisoriiellen Fächers auf einer Kurve, Seite 10  
 $\mathcal{M}_{0,s}$  Modulraum von  $r$  Punkten auf dem  $\mathbf{P}^1$ , Seite 17  
 $\mu(D)$  Ordnung des generischen Stabilisators auf einem vertikalen Primdivisor, Seite 22  
 $\mu(v)$  Kleinste natürliche Zahl, so dass  $\mu(v)v$  im Gitter liegt, Seite 23  
 $n_\rho$  primitives Gitterelement im Strahl  $\rho$ , Seite 5  
 $\text{NS}(Y)$  Neron-Severi-Gruppe von  $Y$   
 $\text{Pol}_\sigma^+$  Menge der Polyeder mit Schweifkegel  $\sigma$ , Seite 1  
 $\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$  Rationale Zahlen  $\geq 0$  bzw.  $\leq 0$ , Seite 5  
 $\mathcal{R}(X)$  Cox-Ring der Varietät  $X$ , Seite 31  
 $\text{relint } \sigma$  Die inneren Punkte von  $\sigma$ , aufgefasst als Teilmenge von  $\mathbf{Q} \cdot \sigma$   
 $\mathcal{S}$  Ein divisoriieller Fächer, Seite 6  
 $\text{SF}(\mathcal{S})$  Menge der Cartier Supportfunktionen auf  $\mathcal{S}$ , Seite 25  
 $\text{tail } \Delta$  Schweifkegel eines Polyeders  $\Delta$ , Kegel der unbeschränkten Richtungen, Seite 1  
 $\mathcal{V}(\mathcal{S})$  Menge aller extremalen Ecken in  $\mathcal{S}$ , Seite 23  
 $\mathcal{V}(X)$  Menge der vertikalen  $T$ -Primdivisoren von  $X$ , Seite 22  
 $\mathcal{V}_Z(\mathcal{S})$  Menge aller extremalen Ecken in  $\mathcal{S}_Z$ , Seite 23  
 $\mathcal{V}_Z(X)$  Menge der vertikalen  $T$ -Primdivisoren von  $X$  über  $Z$ , Seite 22  
 $\mathcal{V}^\times(X)$  Menge aller vertikalen exzeptionellen  $T$ -Primdivisoren von  $X$ , Seite 22  
 $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{S})$  Menge aller Ecken in  $\mathcal{S}$ , Seite 23  
 $\tilde{\mathcal{V}}_Z(\mathcal{S})$  Menge aller Ecken in  $\mathcal{S}_Z$ , Seite 23

- $\tilde{X}(\mathfrak{D})$  partielle Auflösung von  $X(\mathfrak{D})$ , relatives Spektrum von  $\mathcal{A}(\mathfrak{D})$ , Seite 4
- $X(\mathfrak{D})$  Die zu einem polyedrischen Divisor assoziierte affine T-Varietät, Spektrum von  $A(\mathfrak{D})$ , Seite 4
- $\mathcal{S}_y$   $y$ -Anteil des divisoriiellen Fächers, Seite 7
- $Y(\mathfrak{D})$  Definitionsbereich des polyedrischen Divisors (Bereich mit nichtleeren Koeffizienten), Seite 2
- $Y^\circ$   $Y$  ohne die Primdivisoren  $Z$  mit  $\mathcal{V}_Z = \emptyset$ , Seite 23

