

ARMIERTER BETON.

1919. DEZEMBER.

INHALT.

An unsere Leser. S. 293.

Berechnung eines zweigeschossigen Stockwerkrahmens über drei Felder. Von Ingenieur H. Paepflow, Hamburg. (Schluß von S. 278.) S. 294.

Untersuchung über die Lastverteilung von Querträgern bei einer Balkenbrücke aus Eisenbeton. Von Dipl.-Ing. F. Knorr. S. 299.

Direkte Ermittlung der Momenteneinflußlinien des eingespannten Bogens. Von Ing. Dr. techn. Josef Vinzenz, Prag — Deutsche Technik. S. 309.

Berechnung eines ovalen Sammelbehälters. Von Ing. Carl Ritter, Klotzsche-Königswald. S. 313.

Bestimmung der wirtschaftlich günstigen Armierung doppelt armierter Platten und Balken. Von Dr.-Ing. Lührs, Duisburg. S. 315.

Die Berechnung der kontinuierlichen und eingespannten Träger mit konstantem Trägheitsmoment. Zuschrift. Von Halfdan Pedersen, Berlin-Wilmersdorf. S. 317.

Zulässige Belastung spiralarmierter Säulen. Von Ing. H. Fuchs, Dresden. S. 318.

Bücherbesprechungen. S. 320.

An unsere Leser!

Wir haben uns entschlossen, mit Beendigung des 12. Jahrganges unter Beihilfe des Verlages Julius Springer unsere Spezialzeitschrift in eine allgemeine Zeitschrift für das gesamte Bauingenieurwesen zu erweitern, die unter dem Titel

„Der Bauingenieur“

Organ des Deutschen Eisenbau-Verbandes

Organ des Deutschen Beton-Vereines,

herausgegeben von

M. Foerster

Geh. Hofrat Professor Dr.-Ing. E. h.
Dresden, Technische Hochschule

W. Gehler

Professor Dr.-Ing.
Dresden, Technische Hochschule

E. Probst

Professor Dr.-Ing.
Karlsruhe, Technische Hochschule

H. Fischmann

Dr.-Ing.
Berlin W9, Linkstr. 16

W. Petry

Reg.-Baumeister Dr.-Ing.
Obercassel (Siegkreis)

erscheinen wird.

Was wir erstrebt haben, wird jedem unparteiischen Fachmann klar sein. Es war keine leichte Aufgabe, als vor 12 Jahren an dieser Stelle der Versuch unternommen wurde, vorurteilslose wissenschaftliche Arbeit im Eisenbetonbau zu fördern. Aber sie war notwendig und aus dieser Erkenntnis heraus haben wir die Arbeit gerne getan.

Wir haben es versucht, durch Veröffentlichungen wertvoller theoretischer Aufsätze, von praktischen Ausführungen aus dem von Jahr zu Jahr sich vermehrenden Aufgabenkreis des Eisenbetonbaues und durch unparteiische Kritik der in übergroßer Zahl erscheinenden Literaturerzeugnisse an einer gesunden Entwicklung des Eisenbetonbaues mitzuarbeiten. Das Urteil darüber, wie weit unser Streben erfolgreich war, überlassen wir unseren Fachgenossen.

Wenn wir jetzt unsere Aufgabe erweitern und auf eine allgemeine Grundlage stellen, so tun wir es, weil wir wissen, daß der Eisenbetonbau seinen Kinderschuhen entwachsen ist, und nicht, weil wir glauben, daß der Zweck der Gründung der Zeitschrift vollkommen erfüllt ist. Diesem Zweck werden wir auch im Rahmen der neuen Zeitschrift nach denselben Grundsätzen wie bisher zu dienen trachten und hoffen auf weitgehende Unterstützung der Fachkreise.

M. Foerster.

E. Probst.

BERECHNUNG EINES ZWEIFGESCHOSSIGEN STOCKWERKRAHMENS ÜBER DREI FELDER.

Von Ingenieur H. Paelow, Hamburg.

(Schluß von Seite 278.)

Verdrehungen am oberen Rahmen.

$$\varphi_{I I} = + \frac{M_{H A} l}{6} \sigma - \frac{1}{2} \sigma,$$

$$\varphi_{I I} = + \frac{M_{H B} l}{6} \sigma.$$

Der erste Index bezeichnet den Ort der Verdrehung, der zweite den des Momentes.

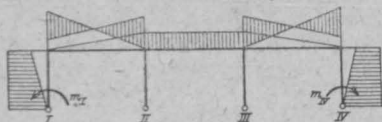


Fig. 24.

$$\varphi_{I I} = \varphi_{I I}'; \quad \varphi_{I I} = + \frac{M_{H B} l}{6} \sigma - \frac{1}{2} \sigma.$$

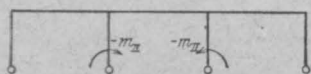


Fig. 25.

Verdrehungen am unteren Rahmen.

$$\varphi_{I' I'} = \frac{M_{H A} l}{3} \sigma; \quad \varphi_{I' I'} = \frac{M_{H B} l}{3} \sigma,$$

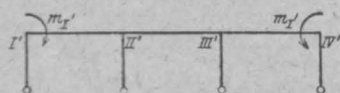


Fig. 26.

$$\varphi_{I' II'} = \varphi_{I' I'}'; \quad \varphi_{I' II'} = \frac{M_{H B} l}{3} \sigma.$$

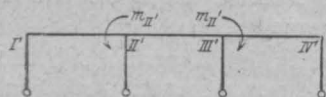


Fig. 27.

In diese Werte für φ sind die in der vorherigen Berechnung ermittelten M_H einzusetzen. Durch Zusammenziehen der Verdrehungen ergibt sich die Gesamtwinkeländerung an den Punkten I und II ebenso III und IV.

$$\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'} = \frac{1}{8} \frac{7 \kappa (1 - \kappa) + 15 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)}{\lambda} = \frac{1}{8} \cdot \frac{C_1}{\lambda},$$

worin
$$C_1 = 7 \kappa (1 - \kappa) + 15 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right),$$

$$\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'} = + \frac{1}{8} \frac{20 - \frac{15}{\kappa} - \kappa (3 + 2 \kappa)}{\lambda}$$

$$= + \frac{1}{8} \cdot \frac{C_2}{\lambda},$$

worin
$$C_2 = 20 - \frac{15}{\kappa} - \kappa (3 + 2 \kappa),$$

$$\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'} = + \frac{5}{8} \cdot \frac{\kappa (2 - \kappa) - 1}{\lambda} = + \frac{5}{8} \cdot \frac{C_3}{\lambda},$$

worin
$$C_3 = \kappa (2 - \kappa) - 1.$$

Mit den Winkeländerungen werden die Bedingungs-gleichungen zur Ermittlung der Momente m aufgestellt.

$$m_I (\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'}) + m_{II} (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'}) + \varphi_I = 0,$$

$$m_I (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'}) + m_{II} (\varphi_{I' II'} + \varphi_{I I}) + \varphi_{II} = 0,$$

$$m_I = \frac{D_1}{D}; \quad m_{II} = \frac{D_2}{D}.$$

Die Determinanten nehmen folgende Form an

Nennerdeterminante:

$$D = (\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'}) (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'}) - (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'})^2$$

$$= + \frac{l^3}{64} \cdot \frac{C_1 C_2 - 25 C_3^2}{\lambda^2} = \frac{l^2}{64} \cdot \frac{d}{\lambda^2},$$

worin
$$C_1 C_2 - 25 C_3^2 = d$$

eingeführt ist.

Zählerdeterminanten:

$$D_1 = -\varphi_I (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'}) + \varphi_{II} (\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'})$$

$$= -\varphi_I \frac{1}{8} \cdot \frac{C_2}{\lambda} + \varphi_{II} \frac{5 l}{8} \cdot \frac{C_3}{\lambda},$$

$$D_2 = -\varphi_{II} (\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'}) + \varphi_I (\varphi_{I I} + \varphi_{I' II'})$$

$$= -\varphi_{II} \frac{1}{8} \cdot \frac{C_1}{\lambda} + \varphi_I \frac{5 l}{8} \cdot \frac{C_3}{\lambda}.$$

Die vorstehenden Ausdrücke gelten nur bei symmetrischem Kraftangriff. Sie ändern sich bei verkehrt symmetrischer Belastung, weil dann eine Verschiebung der Stützenköpfe eintritt. Während beim unteren Rahmen die Verdrehungen an den Riegelenden ohne Rücksicht auf die Stützenkopfverschiebung einfach aus den Momenten des Balkens bestimmt werden können, muß beim oberen Rahmen, wo die Verdrehung an den Ständerfüßen zu bestimmen ist, die Stützenkopfverschiebung berücksichtigt werden. Die gesamte Verschie-

bung $Z_{ges.}$ ist aus der Verschiebung durch m und der durch Q zusammensetzen:

$$Z_{ges.} = Z_m + Z_Q.$$

Wie schon in der Einleitung dargelegt, wird aus Z die Verdrehung

$$\tau = \frac{Z}{h}.$$

Zusammengesetzt mit τ_s ergibt sich die endgültige Verdrehung zu

$$\varphi = \frac{Z}{h} + \frac{M_H l}{6} \sigma$$

oder

$$\varphi = \frac{Z}{h} + \frac{M_H l}{6} \sigma - \frac{1}{2} \sigma.$$

Das Vorzeichen für Z ergibt sich aus der Bestimmung, daß eine Verschiebung nach dem Rahmeninnern, wenn man das zwei-stielige Haupt-system betrachtet, vom äußeren Ständer aus als positiv eingeführt ist.

Hier seien die Gesamtwinkeländerungen angegeben.

Winkeländerungen an den Punkten I, II, III und IV durch die Momente $m_I = -m_{IV}$ und $m_{II} = -m_{III} = -1,0 \text{ tm.}$

$$\varphi_{I I} + \varphi_{I' I'} = + \frac{1}{72} \cdot \frac{(27 \kappa - 19)(\kappa - 5) + 40}{\kappa(\kappa - 2)}$$

$$= + \frac{1}{72} \cdot \frac{K_1}{\kappa(\kappa - 2)},$$

$$K_1 = (27 \kappa - 19)(\kappa - 5) + 40,$$

$$\varphi_{II II} + \varphi_{II' II'} = + \frac{1}{72} \cdot \frac{(13 \kappa - 3)(3 \kappa - 12) + 99 - \kappa}{\kappa(\kappa - 2)}$$

$$= + \frac{1}{72} \cdot \frac{K_2}{\kappa(\kappa - 2)},$$

$$K_2 = (13 \kappa - 3)(3 \kappa - 12) + 99 - \kappa$$

$$\varphi_{III III} + \varphi_{III' III'} = + \frac{1}{72} \cdot \frac{51 \kappa(2 - \kappa) + 22 \kappa - 81}{\kappa(\kappa - 2)}$$

$$= + \frac{1}{72} \cdot \frac{K_3}{\kappa(\kappa - 2)},$$

$$K_3 = 51 \kappa(2 - \kappa) + 22 \kappa - 81.$$

Die Determinanten bestimmen sich nach denselben Bedingungsgleichungen wie für symmetrische Lasten.

Nummerdeterminante:

$$D = \frac{l^2}{72 \cdot 72} \cdot \frac{K_1 K_2 - K_3^2}{[\kappa(\kappa - 2)]^2} = + \frac{l^2}{72 \cdot 72} \cdot \frac{\partial}{[\kappa(\kappa - 2)]^2}$$

worin

$$\partial = K_1 K_2 - K_3^2.$$

Zählerdeterminanten:

$$D_1 = -\Phi_I \frac{1}{72} \cdot \frac{K_2}{\kappa(\kappa - 2)} + \Phi_{II} \frac{1}{72} \cdot \frac{K_3}{\kappa(\kappa - 2)},$$

$$D_2 = -\Phi_{II} \frac{1}{72} \cdot \frac{K_1}{\kappa(\kappa - 2)} + \Phi_I \frac{1}{72} \cdot \frac{K_3}{\kappa(\kappa - 2)}.$$

Nunmehr können wir zur Ermittlung sämtlicher Unbekannten schreiten. Das soll hier beispielsweise für gleichmäßig verteilte Lasten in den Endfeldern durchgeführt werden.

Sind nun schließlich die m bekannt, so sind alle Unbekannten gegeben und die Hauptschwierigkeiten der Berechnung überwunden. Die Mehrarbeit, die sich aus der Einführung der symmetrischen und der verkehrt symmetrischen Belastungsumgruppierung ergibt, wird man angesichts der großen Vereinfachung in den Unbekannten gerne in den Kauf nehmen.

Gleichmäßig verteilte Belastung der Endfelder von 1,0 t/m.

Am Hauptsystem I.

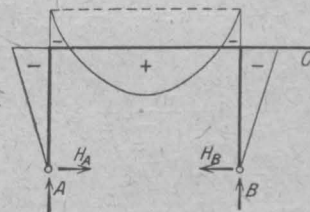


Fig. 29.

$$H_A = H_B = + \frac{\frac{h^3}{12}}{\frac{3}{3} s h^3 + 1 h^2} = + \frac{l^2}{h} \cdot \frac{\kappa}{12},$$

$$A = B = + \frac{1}{2}.$$

Durchbiegung in C:

$$\Delta_C = \frac{1}{2} \left(\frac{l^3}{24} - \frac{l^3}{24} \kappa \right) = + \frac{l^4}{48} (1 - \kappa).$$

Verdrehung in C:

$$T_C = + \frac{l^3}{24} (1 - \kappa).$$

Verschiebung des Stützenkopfes $Z = 0$.

Am Hauptsystem II.

a) Die Rahmen sind symmetrisch belastet.

Als Unbekannte erscheint M . N und Q werden gleich Null.

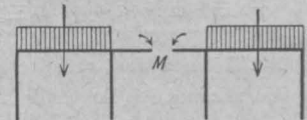


Fig. 30.

$$\tau_{MM} = + \frac{1}{12} (10 - 3 \kappa); \quad T_C = + \frac{l^3}{24} (1 - \kappa),$$

$$M = -\frac{l^2}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{10-3\alpha}$$

hieraus

$$M_H = -\frac{l^2}{h} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)}{4(10-3\alpha)}$$

Somit wird:

$$\begin{aligned} H_A \text{ ges.} = H_B \text{ ges.} &= +\frac{l^2}{h} \left[\frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4(10-3\alpha)} \right] \\ &= +\frac{l^2}{h} \cdot \frac{\alpha}{12} \cdot \frac{7\alpha}{10-3\alpha} \end{aligned}$$

und

$$M_H = -\frac{l^2}{12} \cdot \frac{7\alpha}{10-3\alpha}$$

Bei $\alpha = 1$, d. i. $J_s = \infty$ geht der Riegel in den eingespannten Balken über und M_H wird

$$M_H = -\frac{l^2}{12}$$

1. Die Endfelder im oberen Rahmen sind belastet.

Verdrehungen an den Ständerfüßen:

$$\phi_I = \phi_{II} = +\frac{M_H l}{6} \sigma = +l^3 \frac{7}{48} \cdot \frac{\alpha-1}{10-3\alpha}$$

Determinanten:

$$D_1 = +l^4 \frac{7}{8 \cdot 48} \cdot \frac{\alpha-1}{\lambda(10-3\alpha)} (5C_3 - C_2)$$

$$D_2 = +l^4 \frac{7}{8 \cdot 48} \cdot \frac{\alpha-1}{\lambda(10-3\alpha)} (5C_3 - C_1)$$

Hieraus ergeben sich endgültig:

$$m_I = m_{IV} = +l^2 \frac{7\lambda(\alpha-1)}{6d(10-3\alpha)} (5C_3 - C_2)$$

$$m_{II} = m_{III} = +l^2 \frac{7\lambda(\alpha-1)}{6d(10-3\alpha)} (5C_3 - C_1)$$

2. Die Endfelder im unteren Rahmen sind belastet.

Da die Kopfmomente unabhängig von der Höhe in beiden Rahmen gleich groß sind, ergeben sich die Verdrehungen an den Stützenköpfen bei Belastung im unteren Geschoß doppelt so groß als an den Ständerfüßen bei Belastung des oberen Geschosses. Daher werden auch die m doppelt so groß.

$$m_I = m_{IV} = +l^2 \frac{7\lambda(\alpha-1)}{3d(10-3\alpha)} (5C_3 - C_2)$$

$$m_{II} = m_{III} = +l^2 \frac{7\lambda(\alpha-1)}{3d(10-3\alpha)} (5C_3 - C_1)$$

b) Die Rahmen sind verkehrt symmetrisch belastet.

Unbekannt ist Q . M und N werden Null.

$$\delta Q Q = \frac{l^3}{16} (\alpha-2); \quad \mathcal{A} C = +\frac{l^4}{48} (1-\alpha),$$

$$Q = -\frac{l}{3} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha-2}$$

hieraus

$$H_Q = +\frac{l^2}{h} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)}{12(\alpha-2)}; \quad Z_Q = -\frac{h l^3}{72} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha-2}$$

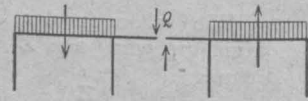


Fig. 31.

$$\begin{aligned} H_A \text{ ges.} = H_B \text{ ges.} &= +\frac{l^2}{h} \cdot \frac{\alpha}{12} \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha-2} \right) \\ &= \frac{l^2}{h} \cdot \frac{\alpha}{12(\alpha-2)} \end{aligned}$$

und

$$M_H = +l^2 \frac{\alpha}{12(\alpha-2)}; \quad M_Q = +\frac{l^2}{6} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha-2}$$

3. Die Endfelder im oberen Rahmen sind belastet.

Verdrehungen an den Ständerfüßen:

$$\phi_I = \frac{M_H l}{6} \sigma + \frac{Z}{h} = +l^3 \frac{\alpha}{144} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-2)}$$

$$\phi_{II} = \frac{M_H l}{6} \sigma - \frac{Z}{h} = +l^3 \frac{\alpha}{144} \cdot \frac{5(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-2)}$$

$$D_1 = \frac{l^4}{72 \cdot 72} \cdot \frac{1}{[\alpha(\alpha-2)]^2} \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} (5K_3 - K_2) \right]$$

$$D_2 = \frac{l^4}{72 \cdot 72} \cdot \frac{1}{[\alpha(\alpha-2)]^2} \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} (K_3 - 5K_1) \right]$$

$$m_I = -m_{IV} = +l^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\partial} (5K_3 - K_2)$$

$$m_{II} = -m_{III} = +l^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\partial} (K_3 - 5K_1)$$

4. Die Endfelder im unteren Rahmen sind belastet.

Die Verdrehung an den Riegelenden wird:

$$\phi_I = -\left(\frac{\mathcal{M} l}{3} + \frac{M_H l}{2} + \frac{M_Q l}{6} \right) = -l^3 \frac{4\alpha(\alpha-1)}{72\alpha(\alpha-2)}$$

$$\phi_{II} = -\left(\frac{\mathcal{M} l}{3} + \frac{M_H l}{2} + \frac{M_Q l}{3} \right) = -l^3 \frac{2\alpha(\alpha-1)}{72\alpha(\alpha-2)}$$

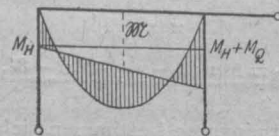


Fig. 32.

Nach Einsetzen in die Determinanten folgt:

$$m_I = -m_{IV} = -l^2 \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\partial} (K_3 - 2K_2)$$

$$m_{II} = -m_{III} = -l^2 \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\partial} (2K_3 - K_1)$$

Wie man sieht, werden die Momente unter 4 nicht doppelt so groß wie unter 3, was daraus zu erklären ist, daß Stützenkopfverschiebungen in Betracht zu ziehen sind.

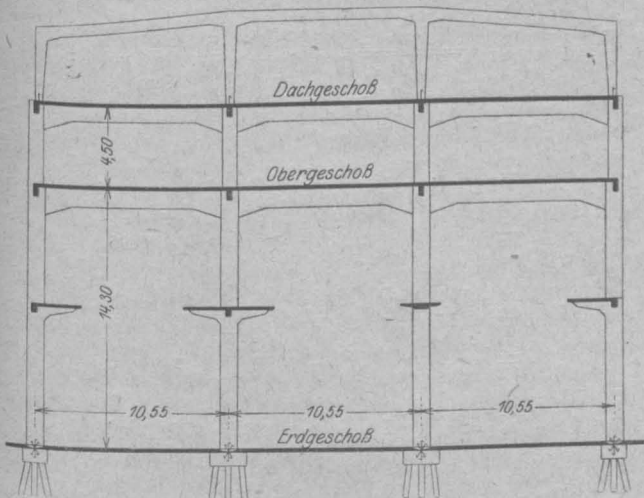
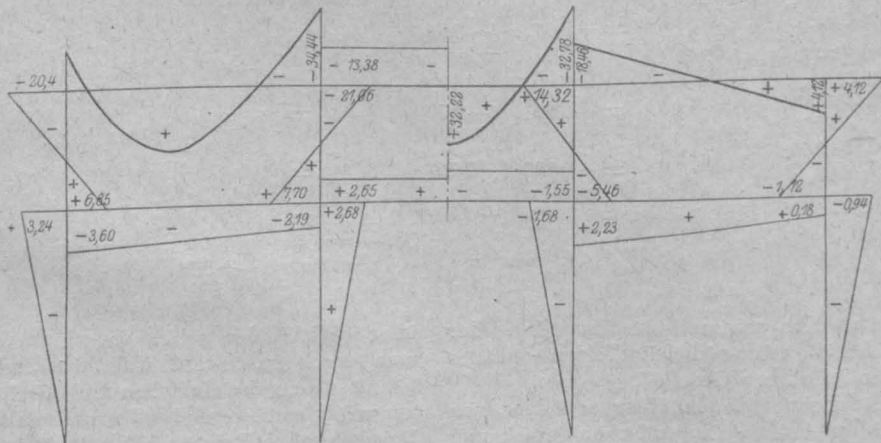


Fig. 33.

Die Formeln sollen jetzt für den in Fig. 33 gezeichneten Binder angewendet werden.

Belastung:

Eigengew. der Decke	$0,51 \cdot 4,17$	$= 2,15$ t/m
des Balkens	$1,0 \cdot 0,35 \cdot 2,400$	$= 0,85$ "
	$g =$	$3,00$ t/m
Nutzlast:	$1,0 \cdot 4,17 + 0,50$	$= p = 4,70$ "
	$q =$	$7,70$ t/m



Belastung der Endfelder. Fall I.

Belastung im oberen Geschoß mit 4,7 t/m.

Belastung des Mittel-feldes. Fall V.

Fig. 34. Schematische Darstellung der Momente aus der Nutzlast.

Bestimmung der Konstanten.
Trägheitsmomente.

Riegel:

$$J_R = \frac{0,35 \cdot 1,22^3}{12} = \frac{0,645}{12}$$

Stütze im unteren Geschoß:

$$J_s = \frac{0,70 \cdot 0,95^3}{12} = \frac{0,600}{12}$$

$$\sigma = \frac{J_R}{J_s} \cdot \frac{h}{l} = \frac{0,645}{0,600} \cdot \frac{13,7}{10,5} = 1,4$$

Daher Stütze im oberen Geschoß:

$$J_s = \frac{0,645 \cdot 4,5}{1,4 \cdot 10,5} = \frac{0,200}{12} = \frac{0,5 \cdot 0,75^3}{12}$$

Mit $\sigma = 1,4$ wird

$$\alpha = \frac{3}{3 + 2 \cdot 1,4} = 0,52$$

$$\lambda = \alpha(\alpha - 5) + 5 = +0,52(0,52 - 5) + 5 = +2,67$$

Konstanten für symmetrische Belastung des Rahmens.

$C_1 =$	$7 \cdot 0,52 \cdot 0,48 + 15 \cdot (-0,92)$	$= -12,06$
$C_2 =$	$20 - 23,8 - 0,52 \cdot 4,04$	$= -10,90$
$C_3 =$	$0,52 \cdot 1,48 - 1,0$	$= -0,23$
$d =$	$+12,06 \cdot 10,9 - 25 \cdot 0,23^2$	$= +130,0$

Konstanten für verkehrt symmetrische Belastung.

$K_1 =$	$(27 \cdot 0,52 - 19) \cdot (0,52 - 5,0) + 40$	$= +62,40$
$K_2 =$	$(13 \cdot 0,52 - 3) \cdot (3 \cdot 0,52 - 12) + 99 - 0,52$	$= +59,25$
$K_3 =$	$51 \cdot 0,52 \cdot 1,48 + 22 \cdot 0,52 - 81$	$= -30,30$
$\delta =$	$62,4 \cdot 59,25 - 30,30^2$	$= 2770,0$

Fall I, Gleichmäßig verteilte Belastung der Endfelder im oberen Geschoß mit 4,7 t/m.

Symmetrische Belastung.

$$m_I = m_{IV} = +10,5^2 \frac{7 \cdot 2,67}{6 \cdot 130 \cdot 8,44} (-0,48)(-5 \cdot 0,23 + 10,9)$$

$$= -1,46 \cdot 4,7 = -6,85 \text{ tm.}$$

$$m_{II} = m_{III} = +10,5^2 \frac{7 \cdot 2,67}{6 \cdot 130 \cdot 8,44} (-0,48)(-5 \cdot 0,23 + 12,06)$$

$$= -1,64 \cdot 4,7 = -7,70 \text{ tm.}$$

Das Minuszeichen gilt für die Momente am

unteren Rahmen, da diese mit dem Pluszeichen in die Gleichungen eingeführt sind. Für den oberen Rahmen ist es umzukehren.

auch nichts Neues mehr. Mit diesem Auszug aus der Berechnung des vierzehnfach statisch unbestimmten zweigeschossigen Stockwerksrahmens

Am oberen Rahmen entstehen folgende M und M_H :

$$\text{aus } m_I = m_{IV} = +6,85 \text{ tm}$$

$$M_{HA} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,52(5 \cdot 0,52 - 18) + 15}{2,67} = -1,31 \cdot 6,85 = -9,00$$

$$M_{HB} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-0,52 \cdot 0,48}{2,67} = +0,0468 \cdot 6,85 = +0,32$$

$$M = +\frac{1}{2} \cdot \frac{0,48^2}{2,67} = +0,0431 \cdot 6,85 = +0,296$$

$$\text{aus } m_{II} = m_{III} = +7,70 \text{ tm}$$

$$M_{HA} = +0,0468 \cdot 7,70 = +0,36$$

$$M_{HB} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-0,52 \cdot 14,9 + 15}{2,67} = -1,360 \cdot 7,70 = -10,48$$

$$M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,52 \cdot 2,48 - 2}{2,67} = +0,133 \cdot 7,70 = +1,025$$

aus der äußeren Belastung von $q = 4,7 \text{ t/m}$

$$M_{HA} = M_{HB} = -10,5^2 \cdot \frac{7 \cdot 0,52}{12 \cdot 8,44} = -3,96 \cdot 4,70 = -18,60$$

$$M = -\frac{10,5^2}{2} \cdot \frac{1 - 0,52}{10 - 3 \cdot 0,52} = -3,13 \cdot 4,70 = -14,700$$

Am unteren Rahmen:

$$\text{aus } m_I = m_{IV} = -6,85 \text{ tm}$$

$$M_{HA} = -\frac{0,52 \cdot 1,96}{2,67} = -0,382 \cdot (-6,85) = +2,52$$

$$M_{HB} = -\frac{0,52 \cdot 0,48}{2,67} = -0,0934 \cdot (-6,85) = +0,64$$

$$M = +2 \cdot 0,0431 = -0,0862 \cdot (-6,85) = +0,600$$

$$\text{aus } m_{II} = m_{III} = -7,70 \text{ tm}$$

$$M_{HA} = -\frac{0,52 \cdot 0,48}{2,67} = -0,0934 \cdot (-7,70) = +0,72$$

$$M_{HB} = -\frac{0,52 \cdot 1,48}{2,67} = -0,288 \cdot (-7,70) = +2,22$$

$$M = -0,133 \cdot 2 = -0,266 \cdot (-7,70) = +2,050$$

	M_{HA}	M_{HB}	M
	tm	tm	tm
	- 9,00	+ 0,32	+ 0,296
	+ 0,36	- 10,48	+ 1,025
	- 18,60	- 18,60	- 14,700
Gesamt	- 27,24	- 28,76	- 13,38
	+ 2,52	+ 0,64	+ 0,600
	+ 0,72	+ 2,22	+ 2,050
Gesamt	+ 3,24	+ 2,86	+ 2,650

Fig. 34 ist eine schematische Darstellung der Momente bei Belastung der Endfelder und des Mittelfeldes im oberen Geschoß.

Mit Rücksicht auf den Platz soll hier von weiteren Beispielen aus der statischen Berechnung abgesehen werden. Die Berechnung der Momente aus der verkehrt symmetrischen Belastung und die Zusammensetzung mit der symmetrischen zu ganz unsymmetrischen Laststellungen bietet ja

über drei Felder sollte dargelegt werden, wie man durch geschickte Wahl der Steifigkeitsverhältnisse zu ganz einfachen und die Rechenarbeit nur wenig erschwerenden Formeln gelangen kann. Bei den hohen Rahmen hätte die Behandlung des Tragwerkes als Balken auf Pendelstützen nur ganz rohe und den tatsächlich vorhandenen Wirkungen und Beanspruchungen nicht gerecht werdende Ergebnisse zeitigt.

		Durchsenkung des Quertägers				Durchsenkung der Längsträger
Fall 1	Durchsenkung am Punkt 1	$\delta_{11} P - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12} - X_3 \delta_{13} - X_4 \delta_{14} + \delta_{1w} =$				$X_1 \delta_m$
	" " " 2	$\delta_{21} P - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22} - X_3 \delta_{23} - X_4 \delta_{24} + \delta_{2w} =$				$X_2 \delta_m$
	" " " 3	$\delta_{31} P - X_1 \delta_{31} - X_2 \delta_{32} - X_3 \delta_{33} - X_4 \delta_{34} + \delta_{3w} =$				$X_3 \delta_m$
	" " " 4	$\delta_{41} P - X_1 \delta_{41} - X_2 \delta_{42} - X_3 \delta_{43} - X_4 \delta_{44} + \delta_{4w} =$				$X_4 \delta_m$
Fall 2	Durchsenkung am Punkt 1	$\delta_{12} P - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12} - X_3 \delta_{13} - X_4 \delta_{14} + \delta_{1w} =$				$X_1 \delta_m$
	" " " 2	$\delta_{22} P - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22} - X_3 \delta_{23} - X_4 \delta_{24} + \delta_{2w} =$				$X_2 \delta_m$
	" " " 3	$\delta_{32} P - X_1 \delta_{31} - X_2 \delta_{32} - X_3 \delta_{33} - X_4 \delta_{34} + \delta_{3w} =$				$X_3 \delta_m$
	" " " 4	$\delta_{42} P - X_1 \delta_{41} - X_2 \delta_{42} - X_3 \delta_{43} - X_4 \delta_{44} + \delta_{4w} =$				$X_4 \delta_m$

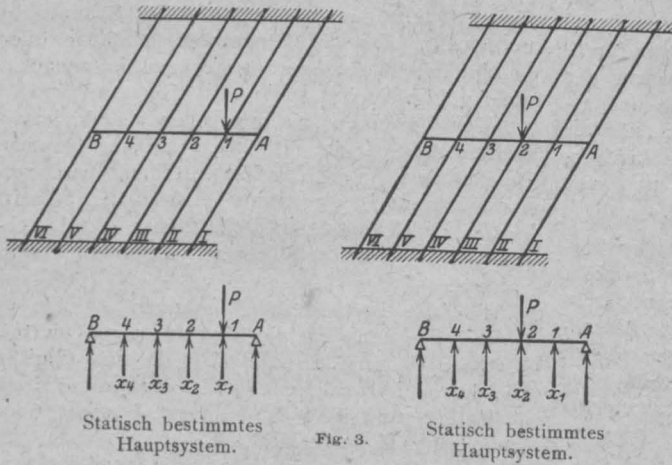


Fig. 3.

$$B'' = \frac{1}{5} P.$$

Fall 2:

Auflagerdrücke infolge der Unbekannten:

A' = wie bei Fall 1,

B' = wie bei Fall 1;

Auflagerdrücke infolge der Last P:

$$A'' \approx \frac{3}{5} P,$$

$$B'' = \frac{2}{5} P.$$

Verschiebungen infolge Bewegung der Auflager:

Darin bedeutet:
 δ_{11} = Verschiebung am Punkt 1 infolge von $X_1 = -1$
 δ_{12} = " " " 1 " " $X_2 = -1$,
 δ_{1w} = " " " 1 infolge Verschiebung der Stützpunkte A und B des statisch bestimmten Hauptsystems,
 δ_m = Verschiebung des Mittelpunktes irgend eines Längsträgers infolge einer in der Mitte des Längsträgers senkrecht nach unten wirkenden Kraft $P = 1$.

Bestimmung von $\delta_{1w}, \delta_{2w}, \delta_{3w}, \delta_{4w}$
 (d. s. die Verschiebungen der Punkte 1 bis 4 infolge Verschiebung der Stützpunkte A u. B des statisch bestimmten Hauptsystems).

Fall 1:

Auflagerdrücke infolge der Unbekannten:

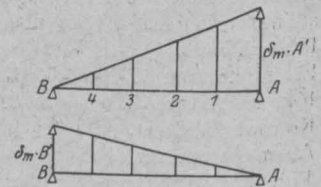
$$A' = - \left(\frac{4}{5} X_1 + \frac{3}{5} X_2 + \frac{2}{5} X_3 + \frac{1}{5} X_4 \right),$$

$$B' = - \left(\frac{1}{5} X_1 + \frac{2}{5} X_2 + \frac{3}{5} X_3 + \frac{4}{5} X_4 \right);$$

Auflagerdrücke infolge der Last P:

$$A'' = \frac{4}{5} P,$$

durch die Unbekannten:



durch die Last P:

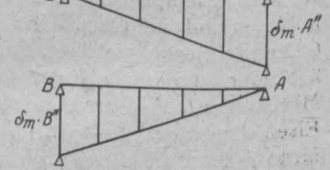


Fig. 4.

(δ_m = Verschiebung des Mittelpunktes eines Längsträgers infolge einer Last $P = +1$ in der Mitte des Längsträgers).

Fall 1:

$$\delta_{1w} = \frac{4}{5} \delta_m A' + \frac{1}{5} \delta_m B' + \frac{4}{5} \delta_m A'' + \frac{1}{5} \delta_m B''$$

$$= \frac{\delta_m}{25} (-16 X_1 - 12 X_2 - 8 X_3 - 4 X_4 - X_1 - 2 X_2 - 3 X_3 - 4 X_4) + \frac{\delta_m}{25} (16 P + P)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta_m}{25} (-17 X_1 - 14 X_2 - 11 X_3 - 8 X_4) + \frac{\delta_m}{25} (17 P); \\ \delta_{2w} &= \frac{3}{5} \delta_m A' + \frac{2}{5} \delta_m B' + \frac{3}{5} \delta_m A'' + \frac{2}{5} \delta_m B'' \\ &= \frac{\delta_m}{25} (-14 X_1 - 13 X_2 - 12 X_3 - 11 X_4) + \frac{\delta_m}{25} (14 P); \\ \delta_{3w} &= \frac{2}{5} \delta_m A' + \frac{3}{5} \delta_m B' + \frac{2}{5} \delta_m A'' + \frac{3}{5} \delta_m B'' \\ &= \frac{\delta_m}{25} (-11 X_1 - 12 X_2 - 13 X_3 - 14 X_4) + \frac{\delta_m}{25} (11 P); \\ \delta_{4w} &= \frac{1}{5} \delta_m A' + \frac{4}{5} \delta_m B' + \frac{1}{5} \delta_m A'' + \frac{4}{5} \delta_m B'' \\ &= \frac{\delta_m}{25} (-8 X_1 - 11 X_2 - 14 X_3 - 17 X_4) + \frac{\delta_m}{25} (8 P). \end{aligned}$$

Fall 2:

Die allgemeinen Ausdrücke für δ_{1w} bis δ_{4w} sind dieselben wie im Fall 1. Ferner sind die Beiträge von A' und B' dieselben. Nur die Beiträge von A'' und B'' sind anders.

Also:

$$\begin{aligned} \delta_{1w} &= \frac{\delta_m}{25} (-17 X_1 - 14 X_2 - 11 X_3 - 8 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 14 P \\ \delta_{2w} &= \frac{\delta_m}{25} (-14 X_1 - 13 X_2 - 12 X_3 - 11 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 13 P \\ \delta_{3w} &= \frac{\delta_m}{25} (-11 X_1 - 12 X_2 - 13 X_3 - 14 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 12 P \\ \delta_{4w} &= \frac{\delta_m}{25} (-8 X_1 - 11 X_2 - 14 X_3 - 17 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 11 P \end{aligned}$$

Bestimmung der Verschiebungen δ_{11} bis δ_{44}
Nach Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre IV. Aufl. Seite 211 ist:

$$\delta_{pq} = \int \frac{M_p M_q dx}{E J};$$

dabei bedeutet:

- δ_{pq} = Verschiebung an der Stelle p infolge der Last (-1) an der Stelle q,
- M_p = Moment infolge der Last (-1) an der Stelle p,
- M_q = Moment infolge der Last (-1) an der Stelle q.

Zur schnellen Bestimmung der Integrale

$\int M_p M_q dx$ finden sich in Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen II. Band Abt. 2, Seite 100 Formeln für bestimmte Formen der Momentenflächen. Zum Beispiel: (Fig. 5.)

$$\int M_p M_q dx = \frac{1}{6} [y_1(2y_1' + y_2') + y_2(2y_2' + y_1')]$$

$$\int M_p^2 dx = \frac{1}{3} [y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2] \quad (\text{Fig. 6.})$$

$$\int M_p M_q dx = \frac{1}{3} [y_1 y_1']$$

$$\int M_p^2 dx = \frac{1}{3} [y_1^2]$$

Zur Bestimmung der Momentenflächen für X_1 bis $X_4 = -1$ ist es nun notwendig, sich auf bestimmte Maße festzulegen. Wir nehmen die Maße aus Fig. 1 für die Abstände der Längsträger.

Momentenflächen für X_1 bis $X_4 = -1$. (Fig. 7.)

Da wir für den Querträger konstantes Trägheitsmoment J und konstanten Elastizitätsmodul E haben, so bekommen wir nach obigen Formeln:

$$E J \delta_{11} = E J \delta_{44} = \frac{4,2}{3} \cdot 0,84^2 + \frac{1,05}{3} \cdot 0,84^2 = 1,232$$

$$\begin{aligned} E J \delta_{12} &= E J \delta_{21} = E J \delta_{34} \\ &= \frac{3,15}{3} (0,63 \cdot 1,26) + \frac{1,05}{6} [0,63 (2 \cdot 1,26 + 0,63) \\ &\quad + 0,84 [2 \cdot 0,63 + 1,26]] + \frac{1,05}{3} (0,84 \cdot 0,63) \\ &= 1,737 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E J \delta_{13} &= E J \delta_{31} = E J \delta_{24} \\ &= 1,544 \\ E J \delta_{14} &= E J \delta_{41} = 0,8884 \\ E J \delta_{22} &= E J \delta_{33} = 2,78 \\ E J \delta_{23} &= E J \delta_{32} = 2,623 \end{aligned}$$

Bestimmung der Verschiebung δ_m
(δ_m = Verschiebung des Mittelpunktes eines Längsträgers infolge einer in seiner Mitte angreifenden, senkrecht nach unten wirkenden Kraft P = 1).

Da wir die lastverteilende Wirkung des Querträgers der in Fig. 1 und 2 dargestellten Brücke untersuchen wollen, so haben wir als Längsträger kontinuierliche Träger über 3 Stützen. (Fig. 8.)

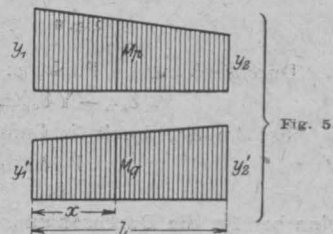


Fig. 5.

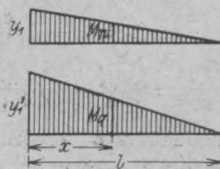


Fig. 6.

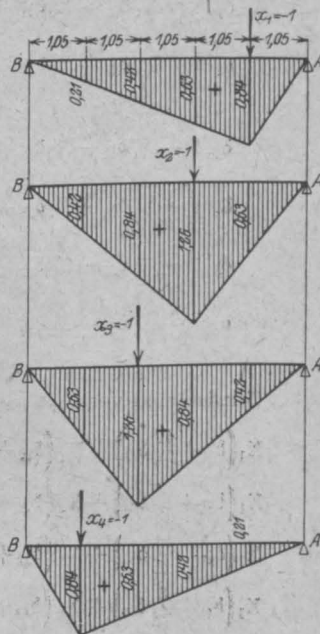


Fig. 7.

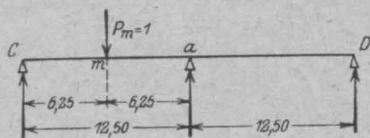


Fig. 8.

Durchsenkung im Punkt a :

$$P_m \delta_{am} - Y \delta_{aa} = 0,$$

also Auflagerdruck im Punkt a :

$$Y = \frac{P_m \delta_{am}}{\delta_{aa}}.$$

Nun beträgt die Durchsenkung am Punkt m :

$$\begin{aligned} \delta_m &= P_m \delta_{mm} - Y \delta_{ma} \\ &= P_m \delta_{mm} - P_m \frac{\delta_{am} \delta_{ma}}{\delta_{aa}} \\ &= P_m \left(\delta_{mm} - \frac{\delta_{am}^2}{\delta_{aa}} \right). \end{aligned}$$

Die Verschiebungen δ werden nun ebenso bestimmt, wie oben angegeben wurde (nach der Formel von Müller-Breslau).

Auswertung der Elastizitätsgleichungen.

In die allgemeinen Elastizitätsgleichungen werden nun die Werte für die verschiedenen δ eingesetzt:

Fall 1 :

$$\begin{aligned} \delta_{11} P - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12} - X_3 \delta_{13} - X_4 \delta_{14} + \frac{\delta_m}{25} (-17 X_1 - 14 X_2 - 11 X_3 - 8 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 17 P &= X_1 \delta_m, \\ \delta_{21} P - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22} - X_3 \delta_{23} - X_4 \delta_{24} + \frac{\delta_m}{25} (-14 X_1 - 13 X_2 - 12 X_3 - 11 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 14 P &= X_2 \delta_m, \\ \delta_{31} P - X_1 \delta_{31} - X_2 \delta_{32} - X_3 \delta_{33} - X_4 \delta_{34} + \frac{\delta_m}{25} (-11 X_1 - 12 X_2 - 13 X_3 - 14 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 11 P &= X_3 \delta_m, \\ \delta_{41} P - X_1 \delta_{41} - X_2 \delta_{42} - X_3 \delta_{43} - X_4 \delta_{44} + \frac{\delta_m}{25} (-8 X_1 - 11 X_2 - 14 X_3 - 17 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 8 P &= X_4 \delta_m. \end{aligned}$$

Fall 2 :

$$\begin{aligned} \delta_{12} P - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12} - X_3 \delta_{13} - X_4 \delta_{14} + \frac{\delta_m}{25} (-17 X_1 - 14 X_2 - 11 X_3 - 8 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 14 P &= X_1 \delta_m, \\ \delta_{22} P - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22} - X_3 \delta_{23} - X_4 \delta_{24} + \frac{\delta_m}{25} (-14 X_1 - 13 X_2 - 12 X_3 - 11 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 13 P &= X_2 \delta_m, \\ \delta_{32} P - X_1 \delta_{31} - X_2 \delta_{32} - X_3 \delta_{33} - X_4 \delta_{34} + \frac{\delta_m}{25} (-11 X_1 - 12 X_2 - 13 X_3 - 14 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 12 P &= X_3 \delta_m, \\ \delta_{42} P - X_1 \delta_{41} - X_2 \delta_{42} - X_3 \delta_{43} - X_4 \delta_{44} + \frac{\delta_m}{25} (-8 X_1 - 11 X_2 - 14 X_3 - 17 X_4) + \frac{\delta_m}{25} \cdot 11 P &= X_4 \delta_m. \end{aligned}$$

Die Glieder mit X sind also in beiden Fällen dieselben. Nur die von der Last P abhängigen Glieder sind verschieden und werden jeweils auf die rechte Seite gebracht.

$$\begin{aligned} X_1 \left(\delta_{11} + \frac{42}{25} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{12} + \frac{14}{25} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_{13} + \frac{11}{25} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{14} + \frac{8}{25} \delta_m \right) &= P \left(\delta_{11} + \frac{17}{25} \delta_m \right) = P \left(\delta_{12} + \frac{14}{25} \delta_m \right) \\ X_1 \left(\delta_{21} + \frac{14}{25} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{22} + \frac{38}{25} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_{23} + \frac{12}{25} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{24} + \frac{11}{25} \delta_m \right) &= P \left(\delta_{21} + \frac{14}{25} \delta_m \right) = P \left(\delta_{22} + \frac{13}{25} \delta_m \right) \\ X_1 \left(\delta_{31} + \frac{11}{25} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{32} + \frac{12}{25} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_{33} + \frac{38}{25} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{34} + \frac{14}{25} \delta_m \right) &= P \left(\delta_{31} + \frac{11}{25} \delta_m \right) = P \left(\delta_{32} + \frac{12}{25} \delta_m \right) \\ X_1 \left(\delta_{41} + \frac{8}{25} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{42} + \frac{11}{25} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_{43} + \frac{14}{25} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{44} + \frac{42}{25} \delta_m \right) &= P \left(\delta_{41} + \frac{8}{25} \delta_m \right) = P \left(\delta_{42} + \frac{11}{25} \delta_m \right) \end{aligned}$$

Fall 1

Fall 2

Momentenflächen für $P_m = 1$ und $Y = -1$. (Fig. 9.)

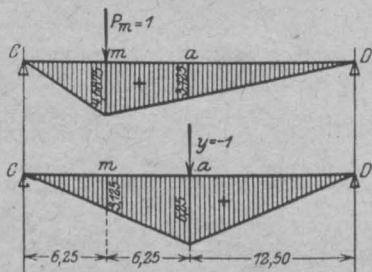


Fig. 9.

Trägheitsmoment J und Elastizitätsmodul E seien für die Längsträger konstant. Also :

$$\begin{aligned} E J \delta_{mm} &= 183 \\ E J \delta_{aa} &= 325,5 \\ E J \delta_{am} &= 223,6 \\ E J \delta_m &= \left(183 - \frac{223,6^2}{325,5} \right) \\ &= 29,6 \end{aligned}$$

Mit den gefundenen Zahlenwerten und nach Multiplikation mit E J werden die Gleichungen zu:

$$\begin{array}{l}
 X_1 \left(1,232 + \frac{42}{25} 29,6 \right) + X_2 \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) + X_3 \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right) \\
 \qquad \qquad \qquad + X_4 \left(0,8884 + \frac{8}{25} 29,6 \right) = P \left(1,232 + \frac{17}{25} 29,6 \right) = P \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) \\
 X_1 \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) + X_2 \left(2,78 + \frac{38}{25} 29,6 \right) + X_3 \left(2,623 + \frac{12}{25} 29,6 \right) \\
 \qquad \qquad \qquad + X_4 \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right) = P \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) = P \left(2,78 + \frac{13}{25} 29,6 \right) \\
 X_1 \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right) + X_2 \left(2,623 + \frac{12}{25} 29,6 \right) + X_3 \left(2,78 + \frac{33}{25} 29,6 \right) \\
 \qquad \qquad \qquad + X_4 \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) = P \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right) = P \left(2,623 + \frac{12}{25} 29,6 \right) \\
 X_1 \left(0,8884 + \frac{8}{25} 29,6 \right) + X_2 \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right) + X_3 \left(1,737 + \frac{14}{25} 29,6 \right) \\
 \qquad \qquad \qquad + X_4 \left(1,232 + \frac{42}{25} 29,6 \right) = P \left(0,8884 + \frac{8}{25} 29,6 \right) = P \left(1,544 + \frac{11}{25} 29,6 \right)
 \end{array}$$

Fall 1
Fall 2

$$\begin{array}{l}
 50,982 X_1 + 18,307 X_2 + 14,574 X_3 \\
 \qquad \qquad \qquad + 10,363 X_4 = 21,352 P = 18,307 P \\
 18,307 X_1 + 47,780 X_2 + 16,823 X_3 \\
 \qquad \qquad \qquad + 14,574 X_4 = 18,307 P = 18,160 P \\
 14,574 X_1 + 16,823 X_2 + 47,780 X_3 \\
 \qquad \qquad \qquad + 18,307 X_4 = 14,574 P = 16,823 P \\
 10,363 X_1 + 14,574 X_2 + 18,307 X_3 \\
 \qquad \qquad \qquad + 50,982 X_4 = 10,363 P = 14,574 P
 \end{array}$$

Fall 1
Fall 2

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{4}{5} X_1 - \frac{3}{5} X_2 - \frac{2}{5} X_3 - \frac{1}{5} X_4 + \frac{3}{5} P \\
 &= 0,216 P,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{1}{5} X_1 - \frac{2}{5} X_2 - \frac{3}{5} X_3 - \frac{4}{5} X_4 + \frac{2}{5} P \\
 &= 0,077 P.
 \end{aligned}$$

(Siehe oben unter Bestimmung von $\delta_{1w}, \delta_{2w}, \delta_{3w}, \delta_{4w}$)

Probe: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + A + B = P$.

b) Fall 3 (die Last P stehe über Längsträger I). (Fig. 10.)

Daraus berechnet sich:

Für Fall 1:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 0,2993 P, \\
 X_2 &= 0,2134 P, \\
 X_3 &= 0,124 P, \\
 X_4 &= 0,037 P.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{4}{5} X_1 - \frac{3}{5} X_2 - \frac{2}{5} X_3 - \frac{1}{5} X_4 + \frac{4}{5} P \\
 &= +0,3755 P,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{1}{5} X_1 - \frac{2}{5} X_2 - \frac{3}{5} X_3 - \frac{4}{5} X_4 + \frac{1}{5} P \\
 &= -0,0492 P.
 \end{aligned}$$

(Siehe oben unter Bestimmung von $\delta_{1w}, \delta_{3w}, \delta_{3w}, \delta_{4w}$)

Für Fall 2:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 0,214 P, \\
 X_2 &= 0,201 P, \\
 X_3 &= 0,168 P, \\
 X_4 &= 0,1244 P.
 \end{aligned}$$

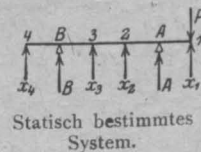
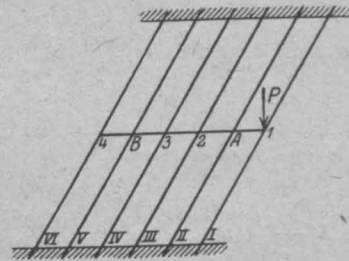


Fig. 10.

Die allgemeinen Elastizitätsgleichungen lauten nun wie bei Fall 1:

	Durchsenkung des Querträgers	Durchsenkung der Längsträger
Durchsenkung am Punkt 1	$\delta_{11} P - \delta_{11} X_1 - \delta_{12} X_2 - \delta_{13} X_3 - \delta_{14} X_4 + \delta_{1w} = \dots$	$\delta_m X_1$
" " " 2	$\delta_{21} P - \delta_{21} X_1 - \delta_{22} X_2 - \delta_{23} X_3 - \delta_{24} X_4 + \delta_{2w} = \dots$	$\delta_m X_2$
" " " 3	$\delta_{31} P - \delta_{31} X_1 - \delta_{32} X_2 - \delta_{33} X_3 - \delta_{34} X_4 + \delta_{3w} = \dots$	$\delta_m X_3$
" " " 4	$\delta_{41} P - \delta_{41} X_1 - \delta_{42} X_2 - \delta_{43} X_3 - \delta_{44} X_4 + \delta_{4w} = \dots$	$\delta_m X_4$

Bestimmung von $\delta_{1w}, \delta_{2w}, \delta_{3w}, \delta_{4w}$.
 (δ_{1w} bis δ_{4w} sind die Verschiebungen der Punkte 1 bis 4 infolge Verschiebung der Stützpunkte A und B des statisch bestimmten Systems.)

Auflagerdrücke infolge der Unbekannten:

$$A' = -\left(\frac{4}{3} X_1 + \frac{2}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3 - \frac{1}{3} X_4\right)$$

$$= -\frac{4}{3} X_1 - \frac{2}{3} X_2 - \frac{1}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4,$$

$$B' = -\left(-\frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{2}{3} X_3 + \frac{4}{3} X_4\right)$$

$$= +\frac{1}{3} X_1 - \frac{1}{3} X_2 - \frac{2}{3} X_3 - \frac{4}{3} X_4.$$

Auflagerdrücke infolge der Last P:

$$A'' = \frac{4}{3} P,$$

$$B'' = -\frac{1}{3} P.$$

Verschiebungen infolge Bewegung der Auflager: (Fig. 11.)

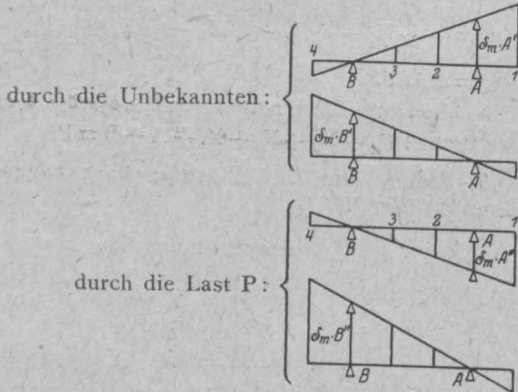


Fig. 11.

$$\delta_{1w} = \frac{4}{3} \delta_m A' - \frac{1}{3} \delta_m B' + \frac{4}{3} \delta_m A'' - \frac{1}{3} \delta_m B''$$

$$= \frac{\delta_m}{9} (-16 X_1 - 8 X_2 - 4 X_3 + 4 X_4 - X_1 + X_2$$

$$+ 2 X_3 + 4 X_4) + \frac{\delta_m}{9} (16 P + P)$$

$$= \frac{\delta_m}{9} (-17 X_1 - 7 X_2 - 2 X_3 + 8 X_4) + \frac{\delta_m}{9} 17 P,$$

$$\delta_{2w} = \frac{2}{3} \delta_m A' + \frac{1}{3} \delta_m B' + \frac{2}{3} \delta_m A'' + \frac{1}{3} \delta_m B''$$

$$= \frac{\delta_m}{9} (-7 X_1 - 5 X_2 - 4 X_3 - 2 X_4) + \frac{\delta_m}{9} \cdot 7 P,$$

$$\delta_{3w} = \frac{1}{3} \delta_m A' + \frac{2}{3} \delta_m B' + \frac{1}{3} \delta_m A'' + \frac{2}{3} \delta_m B''$$

$$= \frac{\delta_m}{9} (-2 X_1 - 4 X_2 - 5 X_3 - 7 X_4) + \frac{\delta_m}{9} \cdot 2 P,$$

$$\delta_{4w} = -\frac{1}{3} \delta_m A' + \frac{4}{3} \delta_m B' - \frac{1}{3} \delta_m A'' + \frac{4}{3} \delta_m B''$$

$$= \frac{\delta_m}{9} (8 X_1 - 2 X_2 - 7 X_3 - 17 X_4) + \frac{\delta_m}{9} \cdot (-8 P).$$

Bestimmung der Verschiebungen δ_{11} bis δ_{44}
 (Vergleiche dasselbe unter Fall 1 und Fall 2.)

Momentenflächen für X_1 bis $X_4 = -1$. (Fig. 12.)

$$E J \delta_{11} = E J \delta_{44} = +1,544$$

$$E J \delta_{12} = E J \delta_{21} = E J \delta_{34} = -0,643$$

$$E J \delta_{13} = E J \delta_{31} = E J \delta_{24} = -0,514$$

$$E J \delta_{14} = E J \delta_{41} = +0,579$$

$$E J \delta_{22} = E J \delta_{33} = +0,515$$

$$E J \delta_{23} = E J \delta_{32} = +0,4504$$

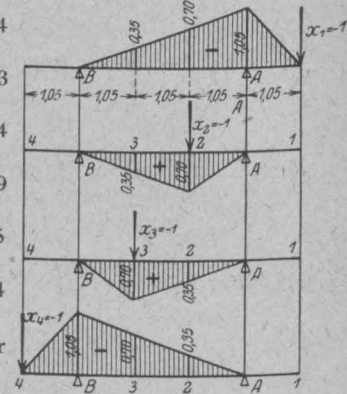


Fig. 12.

Auswertung der Elastizitätsgleichungen.

In die allgemeinen Elastizitätsgleichungen werden nun die Werte für die verschiedenen δ eingesetzt. Sie lauten dann:

$$\delta_{11} P_1 - \delta_{11} X_1 - \delta_{12} X_2 - \delta_{13} X_3 - \delta_{14} X_4$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} (-17 X_1 - 7 X_2 - 2 X_3 + 8 X_4)$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} \cdot 17 P = \delta_m X_1,$$

$$\delta_{21} P - \delta_{21} X_1 - \delta_{22} X_2 - \delta_{23} X_3 - \delta_{24} X_4$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} (-7 X_1 - 5 X_2 - 4 X_3 - 2 X_4)$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} \cdot 7 P = \delta_m X_2,$$

$$\delta_{31} P - \delta_{31} X_1 - \delta_{32} X_2 - \delta_{33} X_3 - \delta_{34} X_4$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} (-2 X_1 - 4 X_2 - 5 X_3 - 7 X_4)$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} \cdot 2 P = \delta_m X_3,$$

$$\delta_{41} P - \delta_{41} X_1 - \delta_{42} X_2 - \delta_{43} X_3 - \delta_{44} X_4$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} (+8 X_1 - 2 X_2 - 7 X_3 - 17 X_4)$$

$$+ \frac{\delta_m}{9} (-8 P) = \delta_m X_4.$$

$$X_1 \left(\delta_m + \delta_{11} + \frac{17}{9} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{12} + \frac{7}{9} \delta_m \right)$$

$$+ X_3 \left(\delta_{13} + \frac{2}{9} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{14} - \frac{8}{9} \delta_m \right)$$

$$= P \left(\delta_{11} + \frac{17}{9} \delta_m \right),$$

$$X_1 \left(\delta_{21} + \frac{7}{9} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_m + \delta_{22} + \frac{5}{9} \delta_m \right)$$

$$+ X_3 \left(\delta_{23} + \frac{4}{9} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{24} + \frac{2}{9} \delta_m \right)$$

$$= P \left(\delta_{21} + \frac{7}{9} \delta_m \right),$$

$$X_1 \left(\delta_{31} + \frac{2}{9} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{32} + \frac{4}{9} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_m + \delta_{33} + \frac{5}{9} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_{34} + \frac{7}{9} \delta_m \right) = P \left(\delta_{31} + \frac{2}{9} \delta_m \right),$$

$$X_1 \left(\delta_{41} - \frac{8}{9} \delta_m \right) + X_2 \left(\delta_{42} + \frac{2}{9} \delta_m \right) + X_3 \left(\delta_{43} + \frac{7}{9} \delta_m \right) + X_4 \left(\delta_m + \delta_{44} + \frac{17}{9} \delta_m \right) = P \left(\delta_{41} - \frac{8}{9} \delta_m \right).$$

E J δ_m = demselben Wert wie bei Fall 1 und 2 also = 29,6.

Nach Einsetzen der Zahlenwerte und Multiplikation mit E J ergibt sich:

$$X_1 \left(1,544 + \frac{26}{9} 29,6 \right) + X_2 \left(-0,643 + \frac{7}{9} 29,6 \right) + X_3 \left(-0,514 + \frac{2}{9} 29,6 \right) + X_4 \left(0,579 - \frac{8}{9} 29,6 \right) = P \left(1,544 + \frac{17}{9} 29,6 \right),$$

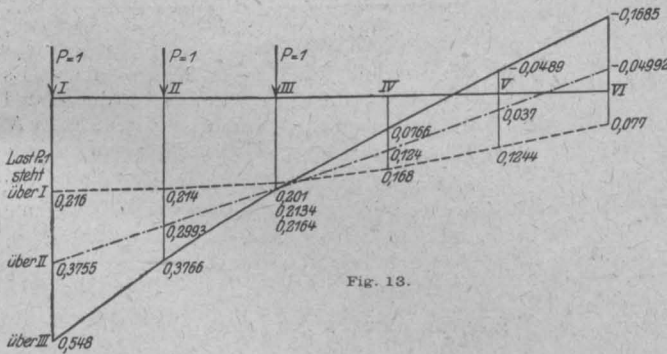


Fig. 13.

$$X_1 \left(-0,643 + \frac{7}{9} 29,6 \right) + X_2 \left(0,515 + \frac{14}{9} 29,6 \right) + X_3 \left(0,4504 + \frac{4}{9} 29,6 \right) + X_4 \left(-0,514 + \frac{2}{9} 29,6 \right) = P \left(-0,643 + \frac{7}{9} 29,6 \right),$$

$$X_1 \left(-0,514 + \frac{2}{9} 29,6 \right) + X_2 \left(0,4504 + \frac{4}{9} 29,6 \right) + X_3 \left(0,515 + \frac{14}{9} 29,6 \right) + X_4 \left(-0,643 + \frac{7}{9} 29,6 \right) = P \left(-0,514 + \frac{2}{9} 29,6 \right),$$

$$X_1 \left(0,579 - \frac{8}{9} 29,6 \right) + X_2 \left(-0,514 + \frac{2}{9} 29,6 \right) + X_3 \left(-0,643 + \frac{7}{9} 29,6 \right) + X_4 \left(1,544 + \frac{26}{9} 29,6 \right) = P \left(0,579 - \frac{8}{9} 29,6 \right).$$

$$\begin{aligned} &+ 87,044 X_1 + 22,357 X_2 + 6,066 X_3 - 25,721 X_4 = 57,444 P, \\ &+ 22,357 X_1 + 46,615 X_2 + 13,600 X_3 + 6,066 X_4 = 22,357 P, \\ &+ 6,066 X_1 + 13,600 X_2 + 46,615 X_3 + 22,357 X_4 = 6,066 P, \\ &- 25,721 X_1 + 6,066 X_2 + 22,357 X_3 + 87,044 X_4 = -25,721 P. \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich:

$$\begin{aligned} X_1 &= +0,548 P \\ X_2 &= +0,2164 P \\ X_3 &= +0,0766 P \\ X_4 &= -0,1685 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(-\frac{4}{3} \cdot 0,548 - \frac{2}{3} \cdot 0,2164 - \frac{1}{3} \cdot 0,0766 - \frac{1}{3} \cdot 0,1685 + \frac{4}{3} \right) P = +0,3766 P, \\ B &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0,548 - \frac{1}{3} \cdot 0,2164 - \frac{2}{3} \cdot 0,0766 + \frac{4}{3} \cdot 0,1685 - \frac{1}{3} \right) P = -0,0489 P. \end{aligned}$$

Probe: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + A + B = P.$

Lastverteilung des Querträgers, je nachdem die Last $P=1$ auf dem Querträger über Längsträger I, II oder III steht. (Fig. 13.)

Da alle Längsträger gleiches Trägheitsmoment haben, so stellt das Diagramm gleichzeitig dar das Bild der Durchbiegungen in der Mitte der Längsträger, je nachdem die Last $P=1$ auf dem Querträger über Längsträger I, II oder III steht.

B. Das Trägheitsmoment der beiden äußeren Längsträger sei doppelt so groß als das der inneren Längsträger. — Trägheitsmoment der Querträger sei gleich dem der inneren Längsträger.

Es gelten auch hier die Bemerkungen, die am Eingang von A. gemacht wurden.

a) Fall 1 und Fall 2 (die Last P steht auf dem Querträger über Längsträger II bzw. III).

Da die äußeren Längsträger ein doppelt so großes Trägheitsmoment haben als die inneren Längsträger, so ist für erstere die Durchsenkung δ_m des Mittelpunktes infolge einer dort angreifenden Last $P=1$ nur halb so groß als der für δ_m früher gefundene Wert. Es ist jetzt:

für die äußeren Längsträger

$$\delta_m = \frac{29,6}{2 E J} = \frac{14,8}{E J}$$

für die inneren Längsträger

$$\delta_m = \frac{29,6}{E J}.$$

J = Trägheitsmoment der inneren Längsträger.

Es sind also gegenüber dem früheren Fall 1 bzw. 2 bei der Auswertung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen nur jene δ_m abzuändern, die in den Werten von δ_{1w} bis δ_{4w} enthalten sind.

Die Gleichungen lauten daher (Siehe unter A, a) Fall 1 und 2, Auswertung der Elastizitätsgleichungen):

$$\begin{aligned}
 &X_1 \left(1,232 + 29,6 + \frac{17}{25} 14,8 \right) + X_2 \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) + X_3 \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right) \\
 &\quad + X_4 \left(0,8884 + \frac{8}{25} 14,8 \right) = P \left(1,232 + \frac{17}{25} 14,8 \right) = P \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) \\
 &X_1 \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) + X_2 \left(2,78 + 29,6 + \frac{13}{25} 14,8 \right) \\
 &\quad + X_3 \left(2,623 + \frac{12}{25} 14,8 \right) + X_4 \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right) = P \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) = P \left(2,78 + \frac{13}{25} 14,8 \right) \\
 &X_1 \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right) + X_2 \left(2,623 + \frac{12}{25} 14,8 \right) \\
 &\quad + X_3 \left(2,78 + 29,6 + \frac{13}{25} 14,8 \right) + X_4 \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) = P \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right) = P \left(2,623 + \frac{11}{25} 14,8 \right) \\
 &X_1 \left(0,8884 + \frac{8}{25} 14,8 \right) + X_2 \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right) \\
 &\quad + X_3 \left(1,737 + \frac{14}{25} 14,8 \right) + X_4 \left(1,232 + 29,6 + \frac{17}{25} 14,8 \right) = P \left(0,8884 + \frac{8}{25} 14,8 \right) = P \left(1,544 + \frac{11}{25} 14,8 \right)
 \end{aligned}$$

Fall 1
Fall 2

$$\begin{aligned}
 40,892 X_1 + 10,022 X_2 + 8,059 X_3 + 5,626 X_4 &= 11,292 P \\
 10,022 X_1 + 40,080 X_2 + 9,723 X_3 + 8,059 X_4 &= 10,022 P \\
 8,059 X_1 + 9,723 X_2 + 40,080 X_3 + 10,022 X_4 &= 8,059 P \\
 5,626 X_1 + 8,059 X_2 + 10,022 X_3 + 40,892 X_4 &= 5,626 P
 \end{aligned}$$

Fall 1
Fall 2

Daraus berechnet sich:

Für Fall 1:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 0,207 P \\
 X_2 &= 0,162 P \\
 X_3 &= 0,108 P \\
 X_4 &= 0,051 P \\
 A &= 0,4838 P \\
 B &= -0,0118 P
 \end{aligned}$$

Für Fall 2:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 0,162 P \\
 X_2 &= 0,165 P \\
 X_3 &= 0,143 P \\
 X_4 &= 0,107 P \\
 A &= 0,2928 P \\
 B &= 0,1302 P
 \end{aligned}$$

b) Fall 3 (die Last P steht auf dem Querträger über Längsträger I).

Für die äußeren Längsträger ist wie bei Fall 1 und 2:

$$\delta_m = \frac{14,8}{EJ}$$

für die inneren Längsträger ist wie bei Fall 1 und 2:

$$\delta_m = \frac{29,6}{EJ}$$

wobei J = Trägheitsmoment der inneren Längsträger.

Es sind also gegenüber dem früheren Fall 3 bei der Auswertung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen nur jene δ_m abzuändern (statt 29,6 -

14,8), die auf die Randträger Bezug haben. Es sind dies die δ_m auf der rechten Seite der 1. und 4. Gleichung im ersten Gleichungssystem unter A, b) Fall 3, Auswertung der Elastizitätsgleichungen.

Der Koeffizient von X_1 in der 1. Gleichung und der Koeffizient von X_4 in der 4. Gleichung heißt nun:

$$\left(1,544 + 14,8 + \frac{17}{9} \cdot 29,6 \right) = 72,244.$$

Unsere Gleichungen lauten also:

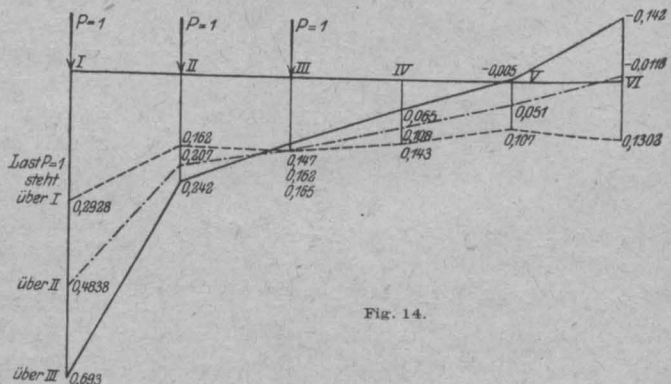


Fig. 14.

$$\begin{aligned}
 &+ 72,244 X_1 + 22,357 X_2 + 6,066 X_3 - 25,721 X_4 = 57,444 P \\
 &+ 22,357 X_1 + 46,615 X_2 + 13,600 X_3 + 6,066 X_4 = 22,357 P \\
 &+ 6,066 X_1 + 13,600 X_2 + 46,615 X_3 + 22,357 X_4 = 6,066 P \\
 &- 25,721 X_1 + 6,066 X_2 + 22,357 X_3 + 72,244 X_4 = -25,721 P.
 \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich:

$$\begin{aligned} X_1 &= +0,693 P \\ X_2 &= +0,147 P \\ X_3 &= +0,065 P \\ X_4 &= -0,142 P \\ A &= +0,242 P \\ B &= -0,005 P \end{aligned}$$

der Stelle stehen, wo die Durchbiegungen gemessen wurden.

Berechnet man die Anteile der Last auf die Unterzüge II, III und IV nach dem Hebelgesetz unter der Voraussetzung freier Auflagerung der die Unterzüge verbindenden Platten, so erhält man (nach Frank, Eisenbetonbau):

Belastung von	Belastung durch Hinterräder	Belastung durch Vorderräder	Gesamtbelastung
Träger II	$5 t \cdot \frac{0,8}{1,05} = 3,8 t$	$2,5 t \cdot \frac{0,32}{1,05} = 0,76 t$	4,56 t
Träger III	$2 \cdot 2,5 t \cdot \frac{0,25}{1,05} = 2,4 t$	$2 \cdot 2,5 t \cdot \frac{0,73}{1,05} = 3,48 t$	5,88 t
Träger IV	$5 t \cdot \frac{0,8}{1,05} = 3,8 t$	$2,5 t \cdot \frac{0,32}{1,05} = 0,76 t$	4,56 t
	10,0 t	5,0 t	15,00 t

Lastverteilung des Querträgers, je nachdem die Last $P=1$ auf dem Querträger über Längsträger I, II oder III steht. (Fig. 14.)

Die Durchbiegungen der einzelnen Längsträger sind proportional ihren Lasten, soweit sie gleiches Trägheitsmoment haben. Die Durchbiegungen der Randträger aber entsprechen nur ihrer halben Last, da sie doppelt so großes Trägheitsmoment gegenüber den inneren Längsträgern haben. Also:

Bild der Durchbiegungen, je nachdem Last $P=1$ über Längsträger I, II oder III steht. (Fig. 15.)

II. Vergleich der Berechnung mit der Belastungsprobe.

Die Belastung der in Fig. 1 und 2 gezeichneten Brücke erfolgte durch eine 15 t Dampfwalze, deren Ausmaße und Stellung ebenfalls in Fig. 1 und 2 angegeben sind.

Die Durchbiegung der Unterzüge werden im Abstand 4,80 m vom Auflager gemessen.

Dabei ergab sich (s. Frank Eisenbetonbau II. Aufl. Seite 164):

Träger	I	II	III	IV	V	VI
Durchbiegung (mm)	0,30	0,42	0,41	0,41	0,31	0,21
Belastung (t)	2,2	3,0	3,0	3,0	2,3	1,5

Infolge der ausgleichenden Wirkung der Querträger und auch der Fahrbahnplatte kann das Gesamtgewicht der Dampfwalze von 15 t proportional den Durchbiegungen auf die einzelnen Träger verteilt werden, obwohl die Vorderräder nicht an

Mit diesen Lasten sollen nun, mittelst der durch unsere vorhergehende Berechnung gefundenen Koeffizienten, die Lastanteile berechnet werden, die auf jeden Längsträger infolge Lastverteilung durch den Querträger kommen. Dabei wird in vereinfachender Weise angenommen, daß die Lasten über dem Querträger selbst stehen, so daß sich die in Fig. 16 dargestellte Belastung ergibt.

Die auf jeden Träger kommende Last erscheint in der letzten Spalte der beiden auf Seite 308 folgenden Tabellen.

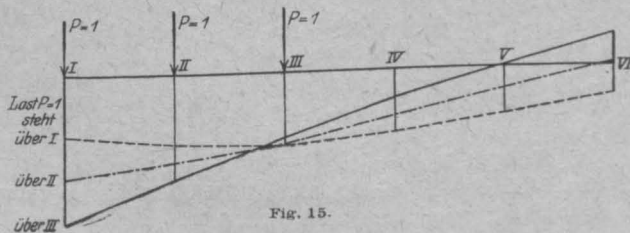


Fig. 15.

In dem in Fig. 1 gezeichneten Querschnitt haben infolge der Anordnung eines besonderen Randsteines für den Bürgersteig alle Längsträger etwa gleiches Trägheitsmoment, und für diesen Fall zeigt Fig. 16 eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung zwischen Lastverteilung infolge Probebelastung und infolge Rechnung. Die Unstimmigkeiten rühren u. a. her von der Unsicherheit der Rechnung. Denn in Wirklichkeit wirkt auch die Platte nach der Quere der Brücke lastverteilend; die Platte bewirkt, daß verteilte und keine Einzellasten auftreten; die Balken sind über den Auflagern nicht frei drehbar; die Straßendecke verursacht auch eine Lastverteilung.

Alle Längsträger haben gleiches Trägheitsmoment (Vergl. Fig. 13).

Es kommt auf Träger	infolge Last 4,56 t über II	infolge Last 5,88 t über III	infolge Last 4,56 t über IV	zusammen
I	$0,3755 \cdot 4,56 = 1,71$ t	$0,216 \cdot 5,88 = 1,27$ t	$0,077 \cdot 4,56 = 0,35$ t	3,33 t
II	$0,2993 \cdot 4,56 = 1,37$ t	$0,214 \cdot 5,88 = 1,26$ t	$0,124 \cdot 4,56 = 0,57$ t	3,20 t
III	$0,2134 \cdot 4,56 = 0,97$ t	$0,201 \cdot 5,88 = 1,18$ t	$0,168 \cdot 4,56 = 0,77$ t	2,92 t
IV	$0,124 \cdot 4,56 = 0,57$ t	$0,168 \cdot 5,88 = 0,99$ t	$0,201 \cdot 4,56 = 0,92$ t	2,48 t
V	$0,037 \cdot 4,56 = 0,17$ t	$0,124 \cdot 5,88 = 0,73$ t	$0,214 \cdot 4,56 = 0,97$ t	1,87 t
VI	$-0,04992 \cdot 4,56 = -0,23$ t	$0,077 \cdot 5,88 = 0,45$ t	$0,216 \cdot 4,56 = 0,98$ t	1,20 t
	4,56 t	5,88 t	4,56 t	15,00 t

Die äußeren Längsträger haben doppelt so großes Trägheitsmoment als die inneren. (Vergl. Fig. 14.)

Es kommt auf Träger	infolge Last 4,56 t über II	infolge Last 5,88 t über III	infolge Last 4,56 t über IV	zusammen
I	$0,4838 \cdot 4,56 = 2,21$ t	$0,2928 \cdot 5,88 = 1,72$ t	$0,1302 \cdot 4,56 = 0,59$ t	4,52 t
II	$0,207 \cdot 4,56 = 0,94$ t	$0,162 \cdot 5,88 = 0,95$ t	$0,107 \cdot 4,56 = 0,49$ t	2,38 t
III	$0,162 \cdot 4,56 = 0,74$ t	$0,165 \cdot 5,88 = 0,97$ t	$0,143 \cdot 4,56 = 0,65$ t	2,36 t
IV	$0,108 \cdot 4,56 = 0,49$ t	$0,143 \cdot 5,88 = 0,84$ t	$0,165 \cdot 4,56 = 0,75$ t	2,08 t
V	$0,051 \cdot 4,56 = 0,23$ t	$0,107 \cdot 5,88 = 0,63$ t	$0,162 \cdot 4,56 = 0,74$ t	1,60 t
VI	$-0,0118 \cdot 4,56 = -0,054$ t	$0,1302 \cdot 5,88 = 0,77$ t	$0,2928 \cdot 4,56 = 1,34$ t	2,06 t
	4,56 t	5,88 t	4,56 t	15,00 t

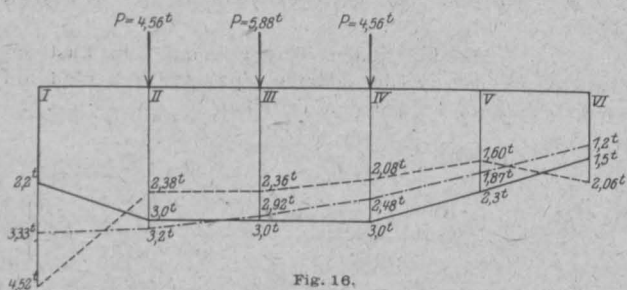


Fig. 16.

— Lastverteilung, ermittelt durch Probebelastung.

- - - Lastverteilung, ermittelt durch Berechnung (Trägheitsmoment aller Träger konstant).

- - - Lastverteilung, ermittelt durch Berechnung (die äußeren Träger haben doppeltes Trägheitsmoment).

Jedenfalls steht fest, daß die Belastung der Träger II, III und IV um 30, 50 und 35 % durch die Querträger vermindert wird.

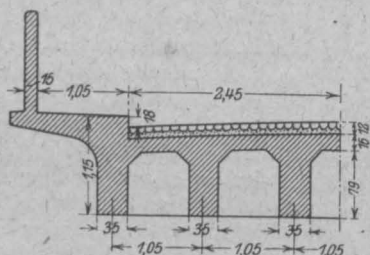


Fig. 17.

wenn man Randträger mit doppeltem Trägheitsmoment anordnet. Die Randträger erhalten dann einen höheren Lastanteil als bei gleichem Trägheitsmoment. In dem Querschnitt von Fig 1 hätten also Randträger von insgesamt 1,15 m Höhe angeordnet werden können, was durch Weglassen des besonderen Randsteines und etwas schmalere, Fahrbahn wohl zu erreichen ist (siehe Fig. 17).

Mittlerer Querschnitt der inneren Träger: 35/92
Trägheitsmoment der inneren Träger:

$$I_m = \frac{35 \cdot 92^3}{12}$$

Trägheitsmoment der Randträger: $I_r = \frac{35 \cdot 115^3}{12}$

also:

$$\frac{I_r}{I_m} = \frac{115^3}{92^3} \approx 2$$

Wie aus Fig. 16 ferner zu ersehen ist, können die mittleren Träger noch mehr entlastet werden,

DIREKTE ERMITTLUNG DER MOMENTENEINFLUSSLINIEN DES EINGESPANNTEN BOGENS.

Von Ing. Dr. techn. Josef Vinzenz, Prag, Deutsche Technik.

Bekanntlich ist nach der üblichen Methode eine Momenten-Einflusslinie des eingespannten Bogens aus einem \mathfrak{M} -Dreieck und den drei Kurven der statisch unbestimmten Größen etwa gemäß der Formel

$$H = \mathfrak{M} - H y - X_1 x - X_2$$

zusammensetzen.

Im Folgenden soll ein Verfahren gezeigt werden, nach welchem sich dieselbe Aufgabe durch Zeichnen eines einzigen Seilpolygons zu entsprechenden „elastischen Gewichten“ erledigen läßt. Die Fehlerquellen der gewöhnlichen graphischen Methode werden daher bei diesem Verfahren erheblich vermindert. Der Arbeitsaufwand wird hier ebenfalls ein geringerer sein.

Es wird ein zur Mitte symmetrischer Bogen vorausgesetzt, um die Untersuchung zu vereinfachen, es ist dies aber für die Anwendung des Verfahrens keine einschränkende Voraussetzung,

wie dem Leser am Schlusse des Aufsatzes klar sein wird. (Fig. 1.)

Steht eine wandernde Last „1“ in einem Punkte m des Trägers, so ist das

Biegemoment M in einem Querschnitt P ausgedrückt durch

$$M = - \frac{\delta_{mP}}{\delta_{PP}}$$

darin bedeutet δ_{mP} die lotrechte Verschiebung des Punktes m infolge eines Momentes $M=1$ in P und δ_{PP} die gegenseitige Verdrehung der unendlich nahe links und rechts von P gelegenen Querschnitte. Beide Formänderungen sind dabei zu bestimmen an dem statisch unbestimmten Grundfall des eingespannten Bogens mit einem Zwischengelenk in P. Die Einflußlinie für das Moment M ist demnach durch die lotrechte Biegelinie des Trägers infolge eines Momentes $M=1$ in P dargestellt. Der Maßstab der Einflußlinie ist durch die Größe von δ_{PP} gegeben. Es handelt sich zunächst um die Ermittlung der Momentenverteilung infolge $M=1$ in P. (Fig. 2.)

Durch diese Belastung entsteht in P ein Gelenkdruck R, dessen Komponenten X und Y als statisch überzählige Größen gewählt werden. Zu ihrer Berechnung dient der Satz vom Minimum

der Deformationsarbeit, der die zwei Bestimmungsgleichungen liefert:

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int (X y + Y x + 1) \frac{y ds}{J} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = \int (X y + Y x + 1) \frac{x ds}{J} = 0$$

damaus folgt:

$$X = \frac{\int x y y ds \cdot \int x ds - \int x^2 ds \cdot \int y ds}{\int y^2 ds \cdot \int x^2 ds - \left[\int x y ds \right]^2}$$

und

$$Y = \frac{\int x y x ds \cdot \int y ds - \int y^2 ds \cdot \int x ds}{\int y^2 ds \cdot \int x^2 ds - \left[\int x y ds \right]^2}$$

Vom Einfluß der Achsialkräfte ist dabei Abstand genommen.

Denkt man sich der Bogenachse das lfd. Gewicht $\frac{1}{J}$ erteilt, bezeichnet man demnach das ganze Gewicht des Bogens mit

$$F = \int \frac{ds}{J}$$

und die Trägheitsmomente des Bogens in bezug auf die beiden durch den Schwerpunkt O des Bogens gehenden Hauptachsen mit

$$J_1 = \int y'^2 \frac{ds}{J}$$

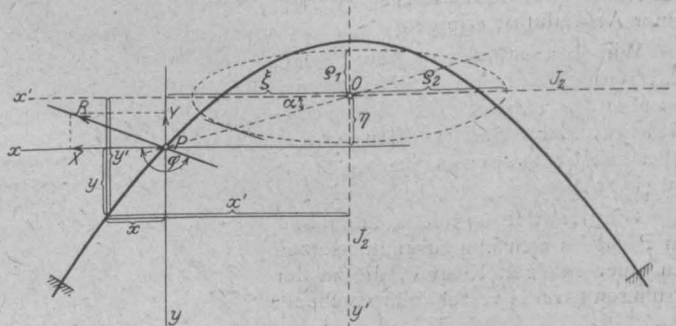


Fig. 2.

und

$$J_2 = \int x'^2 \frac{ds}{J},$$

so lassen sich sämtliche Integrale in obigen For-

meln für X und Y durch die Größen F, J₁ und J₂ ausdrücken.

Nach dem Steinerschen Satz ist:

$$\int y^2 \frac{ds}{J} = J_1 + F \eta^2; \quad \int x^2 \frac{ds}{J} = J_2 + F \xi^2;$$

$$\int x y \frac{ds}{J} = F \xi \eta.$$

Ferner ist

$$\int x \frac{ds}{J} = \int \frac{ds}{J} (x' - \xi) = -\xi \int \frac{ds}{J} = -\xi F,$$

weil $\int x' \frac{ds}{J} = 0$

und $\int y \frac{ds}{J} = \int \frac{ds}{J} (y' - \eta) = -\eta F$

weil $\int y' \frac{ds}{J} = 0.$

Damit ergibt sich:

$$X = \frac{\eta F J_2}{J_1 J_2 + J_2 \cdot F \cdot \eta^2 + J_1 \cdot F \cdot \xi^2}$$

und $Y = \frac{\xi \cdot F \cdot J_1}{J_1 J_2 + J_2 \cdot F \cdot \eta^2 + J_1 \cdot F \cdot \xi^2}$

Die Richtung des Gelenksdruckes R ist nun gegeben durch

$$\frac{Y}{X} = \frac{\xi}{\eta} = \frac{J_1}{J_2} \dots \dots \dots (1)$$

Führt man hier noch die Trägheitsradien $q_1^2 = \frac{J_1}{F}$

und $q_2^2 = \frac{J_2}{F}$ ein und setzt

$$\frac{\eta}{\xi} = \text{tg } \alpha \text{ und } \frac{Y}{X} = -\text{tg } \varphi,$$

so lautet diese Beziehung

$$\text{tg } \varphi \text{ tg } \alpha = -\frac{q_1^2}{q_2^2}$$

ein Ergebnis, das an die Bestimmung der Nulllinie für exzentrischen Angriff einer Achskraft erinnert.

Wir können also sagen: Die Richtung der Kraft R ist zur Verbindungslinie OP hinsichtlich der „Elastizitätseellipse“ mit den Halbmessern q₁ und q₂ konjugiert.

Die Kraft R und das Moment 1 in P lassen sich nun zusammensetzen zu einer einzigen Kraft R, die zu der früheren parallel verschoben erscheint, und zwar um den Betrag $v = \frac{1}{X}$ in

vertikaler und um $w = \frac{1}{Y}$ in horizontaler Richtung. (Fig. 3.)

Führt man in die Formeln für X und Y die Trägheitsradien q₁ und q₂ ein, so erhält man:

$$X = \eta \frac{1}{q_1^2 + \eta^2 + \frac{q_1^2}{q_2^2} \xi^2}$$

$$Y = \xi \frac{1}{q_2^2 + \xi^2 + \frac{q_2^2}{q_1^2} \eta^2}$$

und daher wird

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{q_1^2 + \eta^2 + \frac{q_1^2}{q_2^2} \xi^2}{\eta} \\ w &= \frac{q_2^2 + \xi^2 + \frac{q_2^2}{q_1^2} \eta^2}{\xi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Das sind aber die Abschnitte der Antipolaren des Punktes P auf der x- und y-Achse hinsichtlich der „Elastizitätseellipse“.

Die Gleichung der Antipolaren in bezug auf das Koordinatensystem x', y' lautet nämlich:

$$\xi \frac{x'}{q_2^2} + \eta \frac{y'}{q_1^2} = -1.$$

Für x' = ξ folgt

$$|y'| = \left[\xi^2 \frac{q_1^2}{q_2^2} + q_1^2 \right] \frac{1}{\eta}$$

Fügt man η hinzu, so erhält man

$$|y' + \eta| = \frac{q_1^2 + \eta^2 + \frac{q_1^2}{q_2^2} \xi^2}{\eta} = v$$

analog erhält man für y' = η

$$|x' + \xi| = \frac{q_2^2 + \xi^2 + \frac{q_2^2}{q_1^2} \eta^2}{\xi} = w.$$

Die Lage der Kraft R stimmt also mit der Antipolaren des Punktes P überein.

Die Lage und Richtung von R sind demnach genau so zu ermitteln, wie die Nulllinie eines von

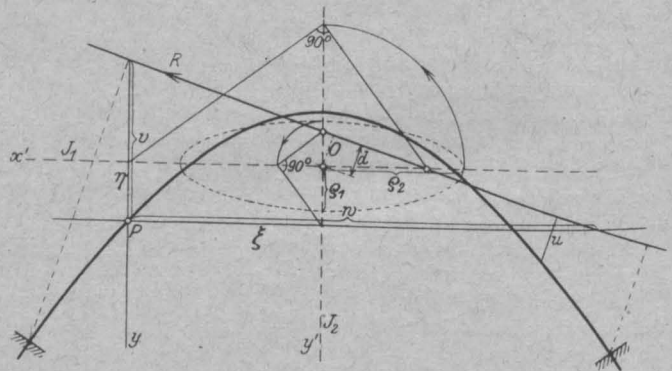


Fig. 3.

einer Achskraft exzentrisch beanspruchten Querschnittes. (Denkt man sich in P eine Achskraft und den Bogen als von ihr beanspruchte Fläche, so stimmt die Lage von R mit der Nulllinie überein.) Sie kann also durch die bekannte gra-

phische Konstruktion ermittelt werden. Es empfiehlt sich aber, die Abschnitte v und w rechnerisch zu bestimmen.

In Fällen, wo v bzw. w sehr groß wird, wird man nur w bzw. v berechnen und dazu aber noch die Richtung nach Formel (1) bestimmen.

Die genaue Einzeichnung der Richtung und Lage der Kraft R ist wichtig, denn durch diese ist ja auch schon die Momentenverteilung des Bogens infolge $M = 1$ in P gegeben.

Die Bogenordinaten in bezug auf R mit R multipliziert geben bereits die Momente und die Werte $R \frac{uds}{J}$ bilden nach Mohr die Belastung zur Zeichnung der verlangten lotrechten Biegelinie als Seillinie.

Weil R eine konstante Größe ist, wird man besser die Werte $\frac{uds}{J}$ als „elastische Gewichte“ benutzen. Es gilt dann aber als Maßstab unserer Einflußlinie die Größe $\frac{1}{R} \delta_{PP}$.

Es erübrigt noch, diesen Maßstab zu berechnen. Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist

$$\delta_{PP} = \int (Ru)^2 \frac{ds}{J} = R^2 \int \frac{u^2 ds}{J}$$

und $\frac{1}{R} \cdot \delta_{PP} = \int \frac{u^2 ds}{J}$

Durch Anwendung des Steiner'schen Satzes ist

$$\int \frac{u^2 ds}{J} = J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi + F d^2$$

$$= F (q_1^2 \cos^2 \varphi + q_2^2 \sin^2 \varphi + d^2).$$

Darin bedeutet d den Abstand der Kraft R vom Schwerpunkt O des Bogens. Setzt man

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\xi^2}{\eta^2} \cdot \frac{q_1^4}{q_2^4}} = \frac{\eta^2 q_2^4}{\eta^2 q_2^4 + \xi^2 q_1^4},$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\xi^2 q_1^4}{\eta^2 q_2^4 + \xi^2 q_1^4}.$$

und berechnet aus der Gleichung der Antipolaren

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{q_2^4} + \frac{\eta^2}{q_1^4}}} = \frac{q_1^2 q_2^2}{\sqrt{\xi^2 q_1^4 + \eta^2 q_2^4}},$$

so wird

$$\int \frac{u^2 ds}{J} = F \frac{q_1^2 q_2^4 \eta^2 + q_2^2 q_1^4 \xi^2 + q_1^4 q_2^4}{\xi^2 q_1^4 + \eta^2 q_2^4}.$$

Nachdem

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{\xi^2 q_1^4 + \eta^2 q_2^4}}{q_1^2 q_2^2 + q_1^2 \xi^2 + q_2^2 \eta^2},$$

so erhält man

$$\frac{1}{R} \delta_{PP} = R \int \frac{u^2 ds}{J} = F \frac{q_1^2 q_2^2}{\sqrt{\xi^2 q_1^4 + \eta^2 q_2^4}} = F d.$$

Der Maßstab unserer Einflußlinie ist demnach durch das Produkt Fd gegeben. Es ist aber auch

$$Fd = d \int \frac{uds}{J} = \int \frac{uds}{J}$$

und damit ist der Maßstab der Einflußlinie nichts anderes als die „algebraische“ Summe der elastischen Gewichte $\frac{uds}{J}$. Um die Einflußlinie als Seil-

linie zu den elastischen Gewichten $\frac{uds}{J}$ vollständig zeichnen zu können, hat man im Gelenk P selbst die dort verursachte relative Winkeländerung als Gewicht anzubringen. Es ist dieses Gewicht aber wieder

$$Fd = \int \frac{uds}{J}.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Daß das Verfahren auch für unsymmetrische Bogenform anwendbar ist, erhellt von selbst aus den hier abgeleiteten allgemeinen Ergebnissen.

Für die praktische Anwendung des Verfahrens sei hier noch kurz der Arbeitsvorgang beschrieben:

Man teilt die Bogenachse in eine Anzahl gleicher Teile von der Länge s und bestimmt zuerst wie bei der gewöhnlichen Methode die Lage der Hauptachsen und die Werte F , J_1 und J_2 (Siehe Melan, Der Brückenbau II. Bd.) Sodann bestimmt man nach den obigen Formeln (1) und (2) die Lage der Antipolaren des Punktes P . In den Teilungspunkten mißt man die Ordinaten u aus der Zeichnung oder ermittelt sie rechnerisch und berechnet die Werte

$$w = \frac{u \cdot s}{J}.$$

Um die stetig verteilten Gewichte $\frac{uds}{J}$ in ihrer Wirkung durch Einzelkräfte zu ersetzen, hat man genau wie bei der Berechnung von F , J_1 und J_2 die elastischen Gewichte der Teilungspunkte aus drei aufeinanderfolgenden Werten nach der Formel

$$w_r = \frac{1}{6} (w_{r-1} + 4 w_r + w_{r+1})$$

zu bestimmen.

Im Punkte P selbst, für den man die Momenteneinflußlinie zeichnen will, läßt man das Gewicht $\sum w$ im entgegengesetzten Sinne der benachbarten Gewichte wirken.

Zu den lotrechten Gewichten zeichnet man dann mit der Polweite $\sum w$ ein Seilpolygon, um damit

* W. Kitter gibt im 4. Teil seines Werkes ein ähnliches Verfahren für die Einflußlinien der Stabkräfte eines eingespannten Fachwerkbogens an, das sich auf die Theorie der „Elastizitätsellipse“ gründet.

die Momenteneinflusslinie des Querschnittes P im Längenmaßstab der Zeichnung zu erhalten. Die Ecken des Polygons sind natürlich durch Kurven zu verbinden.

Selbstredend kann hier auch nach „Schönhöfer“ mit „konstanten Bogengrößen“ gerechnet werden.

Das Verfahren kann mit Vorteil bei unsymmetrischen eingespannten Bogen und Rahmen verwendet werden.

Es soll hier als Beispiel ein doppelt unsymmetrischer Rahmen behandelt werden.

Die Trägheitsmomente des linken Ständers und des Riegels seien $2J$, das Trägheitsmoment des rechten Ständers J . Zuerst wird die Lage des elastischen

$$J_x = \frac{12}{2J} \cdot 2,25^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{8^3}{J} + \frac{4^3}{2J} \right) + \frac{8}{J} \cdot 1,75^2 + \frac{4}{2J} \cdot 0,25^2 = 106,46 \frac{1}{J},$$

$$J_y = \frac{4}{2J} \cdot 8,25^2 + \frac{8}{J} \cdot 3,75^2 + \frac{1}{12} \frac{12^3}{2J} + \frac{12}{2J} \cdot 2,25^2 = 379,13 \frac{1}{J}.$$

Momenteneinflusslinie für den Querschnitt A

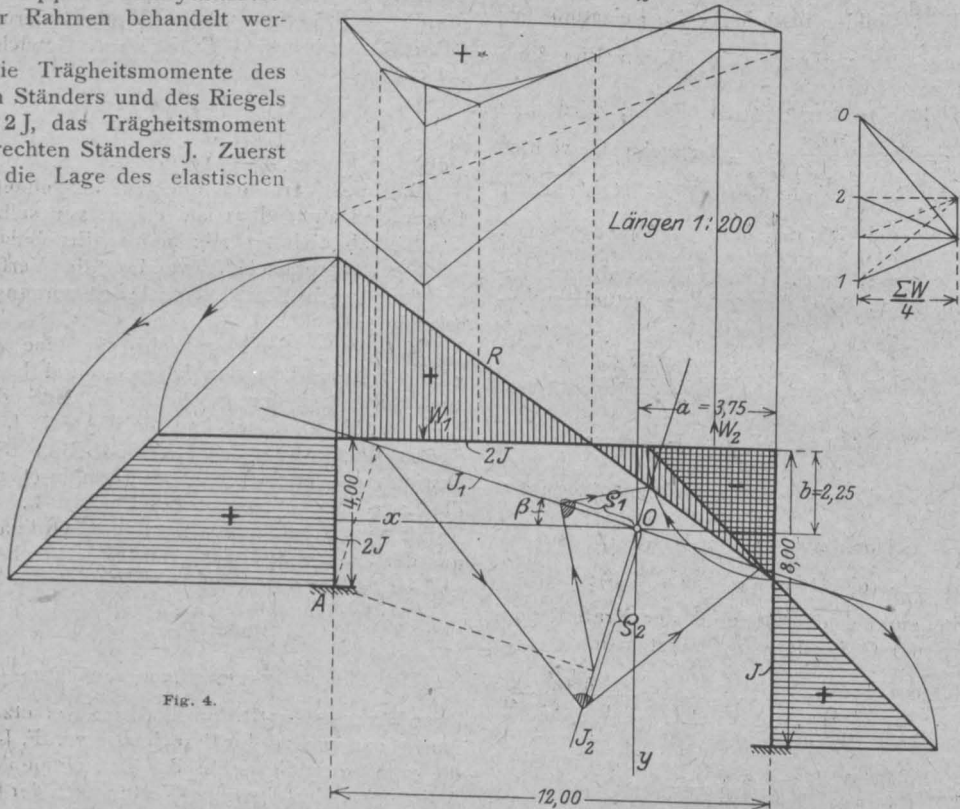


Fig. 4.

Schwerpunktes O des Rahmens berechnet aus den zwei Momentengleichungen:

$$a \left[\frac{8}{J} + \frac{4}{2J} + \frac{12}{2J} \right] = \frac{12}{2J} \cdot 6 + \frac{4}{2J} \cdot 12,$$

$$b \left[\frac{8}{J} + \frac{4}{2J} + \frac{12}{2J} \right] = \frac{8}{J} \cdot 4 + \frac{4}{2J} \cdot 2,$$

daraus:

$$a = \frac{60}{16} = 3,75 \text{ m}; \quad b = \frac{36}{16} = 2,25 \text{ m. (Fig. 4.)}$$

Die Trägheitsmomente des mit $\frac{1}{J}$ belasteten Rahmens in bezug auf die wagrechte bzw. lotrechte Schwerachse x bzw. y berechnen sich mit

Ferner ist

$$F = \frac{8}{J} + \frac{4}{2J} + \frac{12}{2J} = 16 \frac{1}{J}.$$

Das Zentrifugalmoment des Rahmens auf diese Achsen berechnet sich mit

$$C_{xy} = -\frac{8}{J} \cdot 3,75 \cdot 1,75 - \frac{12}{2J} \cdot 2,25 \cdot 2,25 - \frac{4}{2J} \cdot 8,25 \cdot 0,25 = -87,00 \frac{1}{J}.$$

Die Neigung der Hauptachse gegen die x-Achse folgt dann aus:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2C_{xy}}{J_y - J_x} = -0,638,$$

$$\operatorname{tg} \beta = -0,292.$$

Die auf diese Achsen bezogenen Hauptträgheitsmomente berechnen sich aus

$$J_2 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 C_{xy}^2}$$

$$= |242,80 \pm 166,70| \frac{1}{J}$$

mit $J_2 = 409,5 \frac{1}{J} \text{ m}^4$,

$J_1 = 76,1 \frac{1}{J} \text{ m}^4$.

Die Trägheitshalbmesser sind daher

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = \sqrt{\frac{409,5}{16}} = 5,061 \text{ m.}$$

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = \sqrt{\frac{76,1}{16}} = 2,182 \text{ m.}$$

Die Größen $\text{tg } \beta$, J_1 und J_2 kann man auch nach R. Land durch Zeichnung des Trägheitskreises graphisch ermitteln. Nach Kenntnis der Lage der Hauptachsen und der Hauptträgheitshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 kann man sich für irgendwelchen Querschnitt die Momenteneinflusslinie bestimmen.

Es soll z. B. die Einflusslinie für das Fußmoment des linken Ständers gezeichnet werden:

Es wird mit Hilfe der eingangs erwähnten Konstruktion die Antipolare (R) für den Fußpunkt A des Ständers bestimmt.

Statt der normal zu R gemessenen Ordinaten u der Bogenachse kann man auch die in vertikaler Richtung gemessenen Abstände zur Berechnung

der elast. Gewichte benutzen. In der Zeichnung sind diese jeweils normal zur Rahmenachse aufgetragen. Die dadurch sich ergebenden (in der Zeichnung schraffierten) Flächen stellen, durch die Querschnittsträgheitsmomente dividiert, die Gewichte dar, mit denen die Rahmenachse lotrecht zu belasten ist, um die verlangte Einflusslinie als Seillinie zu erhalten. Die Summe der genannten Flächeninhalte bildet den Maßstab der Einflusslinie.

Man erhält aus der Zeichnung:

$$w_0 = \frac{1}{2} (4,90 + 8,80) \cdot 4,0 \frac{1}{2J} = 9,72 \frac{1}{J}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} 4,90 \cdot 7,0 \frac{1}{2J} = 8,56 \frac{1}{J}$$

$$w_2 = -\frac{1}{2} 3,54 \cdot 5,0 \frac{1}{2J} = -4,44 \frac{1}{J}$$

$$w_3 = -\frac{1}{2} 3,54^2 \frac{1}{J} = -6,28 \frac{1}{J}$$

$$w_4 = \frac{1}{2} 4,46 \frac{1}{J} = 9,92 \frac{1}{J}$$

$$\sum w = 21,48 \frac{1}{J}$$

Zur Zeichnung der Seillinie zu den lotrechten Gewichten w kommt nur w_1 und w_2 in Betracht. Als Polweite wird gewählt $\sum \frac{w}{4}$. Die Einflusslinie ist demnach im 4fachen Längenmaßstab gezeichnet.

BERECHNUNG EINES OVALEN SAMMELBEHÄLTERS.

Von Ing. Carl Ritter, Klotzsche-Königswald.

Für eine große Anlage war in einem Pumpenhaus ein Sammelbehälter von nebenstehender Form einzubauen. In der einschlägigen Literatur waren keine fertigen Formeln zur Berechnung eines derartigen geschlossenen Rahmens zu finden, so daß ich mich veranlaßt sah, selbige selbst abzuleiten. Zur Vervollständigung der Literatur gebe ich selbige

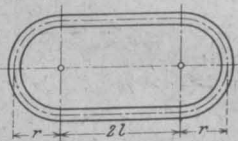


Fig. 1.

nachstehend bekannt.

Die Beanspruchung erfolgt durch einen nach allen Seiten gerichteten gleichmäßigen Wasserdruck von der Größe p . Die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen erfolgt nach Castigliano unter Voraussetzung eines konstanten Trägheitsmomentes, was wohl in den meisten Fällen zutreffen dürfte.

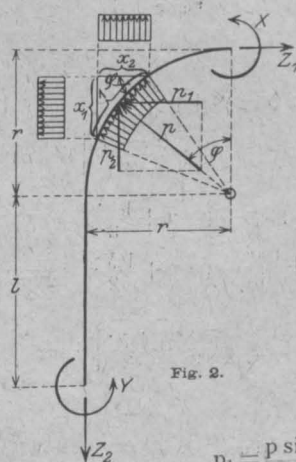


Fig. 2.

Da das System symmetrisch ist, schneiden wir aus dem geschlossenen Stabgebilde ein Viertel heraus und bringen an den Schnittstellen die dort wirkenden Kräfte bzw. Momente an. Die stets normal zum Kreisbogen wirkenden gleich großen Kräfte p zerlegen wir parallel und rechtwinklig zur Seite 1, dann ist

$$p_1 = \frac{p \sin \varphi}{x_1}; \quad p_2 = \frac{p \cos \varphi}{x_2}$$

und ferner unter der Annahme, daß der herausgeschnittene Teilbogen sehr klein, also einer Geraden entspricht:

$$x_1 = 1 \sin \varphi; \quad x_2 = 1 \cos \varphi;$$

somit wird

$$p_1 = p; \quad p_2 = p.$$

Die Kräfte bleiben also, trotz der Zerlegung, für die Einheit so groß wie vordem. Die Momente, welche an der Innenseite Zugspannungen erzeugen werden als positiv, die Druckspannungen erzeugen werden als negativ in die Rechnung eingeführt.

1. Für den gebogenen Stab \bar{ab} wird das Moment in einem beliebigen Punkt:

$$M_x = X - Z_1(r-y) + p \frac{x^2}{2} + p \frac{(r-y)^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = +1,$$

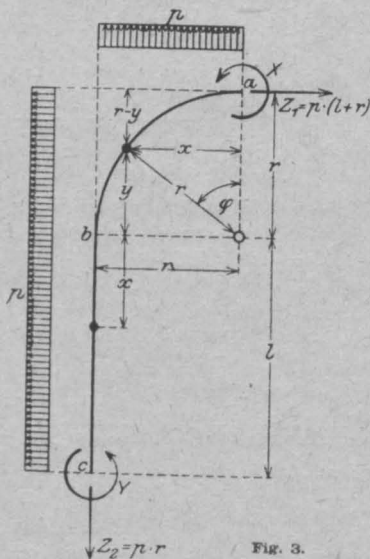


Fig. 3.

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X} = \int_0^{\pi/2} \left[X - p(l+r)(r-y) + p \frac{x^2}{2} + p \frac{(r-y)^2}{2} \right] ds = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[X - plr - pr^2 + ply + pry + \frac{px^2}{2} + \frac{pr^2}{2} - pry + \frac{py^2}{2} \right] ds = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[X - plr - \frac{pr^2}{2} + ply + \frac{px^2}{2} + \frac{py^2}{2} \right] ds = 0.$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} ds &= r d\varphi, \\ x &= r \sin \varphi, \\ y &= r \cos \varphi, \end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X} = pr \int_0^{\pi/2} \left[\frac{X}{p} - lr - \frac{r^2}{2} + lr \cos \varphi + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2} \right] d\varphi = 0,$$

$$pr \left[\frac{X}{p} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{lr\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{4} + lr \sin \frac{\pi}{2} + \frac{r^2}{4} \left(-\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{r^2}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0,$$

$$pr \left[\frac{X\pi}{2p} - \frac{lr\pi}{2} + lr \right] = 0,$$

$$\frac{Xr\pi}{2} = plr^2\pi - plr^2.$$

2. Für den geraden Stab \bar{bc} wird das Moment in einem beliebigen Punkt:

$$M_x = X - Z_1(r+x) + p \frac{r^2}{2} + p \frac{(r+x)^2}{2},$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = +1,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X} = \int_0^l \left[X - p(l+r)(r+x) + \frac{pr^2}{2} + \frac{p(r+x)^2}{2} \right] ds = 0$$

$$ds = dx$$

$$\int_0^l \left[X - plr - plx - pr^2 - prx + \frac{pr^2}{2} + \frac{pr^2}{2} + prx + \frac{px^2}{2} \right] dx = 0,$$

$$Xl - pl^2r - \frac{pl^3}{2} + \frac{pl^3}{6} = 0,$$

$$Xl - pl^2r - \frac{pl^3}{3} = 0,$$

$$Xl = pl^2r + \frac{pl^3}{3},$$

$$\frac{Xr\pi}{2} + Xl = \frac{plr^2\pi}{2} - plr^2 + pl^2r + \frac{pl^3}{3},$$

$$X = p \frac{lr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left(r + \frac{1}{3} \right)}{r \frac{\pi}{2} + 1},$$

$$X = p \frac{3lr^2(\pi - 2) + 2l^2(3r + 1)}{3(r\pi + 2)},$$

$$Y = X - Z_1(l+r) + \frac{pr^2}{2} + \frac{p(l+r)^2}{2},$$

$$= p \frac{lr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left(r + \frac{1}{3} \right)}{r \frac{\pi}{2} + 1} - p(l+r)^2 + \frac{pr^2}{2} + \frac{p(l+r)^2}{2}$$

$$= p \frac{lr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left(r + \frac{1}{3} \right)}{r \frac{\pi}{2} + 1} - \frac{p(l+r)^2}{2} + \frac{pr^2}{2}$$

$$= p \frac{lr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left(r + \frac{1}{3} \right)}{r \frac{\pi}{2} + 1} - \frac{pl^2}{2} - plr - \frac{pr^2}{2} + \frac{pr^2}{2}$$

$$= \frac{p}{r \frac{\pi}{2} + 1} \left[1r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left(r + \frac{1}{3} \right) - \frac{r l^2 \pi}{2} - \frac{1r^2 \pi}{2} - \frac{l^3}{2} - l^2 r \right]$$

$$= \frac{p}{r \frac{\pi}{2} + 1} \left[\frac{1r^2 \pi}{2} - 1r^2 + l^2 r + \frac{l^3}{3} - \frac{l^2 r \pi}{4} - \frac{1r^2 \pi}{2} - \frac{l^3}{2} - l^2 r \right]$$

$$= \frac{p}{r \frac{\pi}{2} + 1} \left(-1r^2 - \frac{l^3}{6} - \frac{l^2 r \pi}{4} \right)$$

$$= -p \frac{1r^2 + \frac{l^3}{6} + \frac{l^2 r \pi}{4}}{r \frac{\pi}{2} + 1}$$

$$Y = -p \frac{l^2 (2l + 3r\pi) + 12lr^2}{6(r\pi + 2l)}$$

Setzen wir nun noch $\alpha = \frac{l}{r}$,

dann ist $l = \alpha r$,
so daß eingesetzt wird

$$X = p \frac{3\alpha r^3 (\pi - 2) + 2\alpha^2 r^2 (3r + \alpha r)}{3(r\pi + 2\alpha r)}$$

$$X = p \frac{\alpha r^2 [3(\pi - 2) + 2\alpha(3 + \alpha)]}{3(\pi + 2\alpha)}$$

und

$$Y = -p \frac{\alpha^2 r^2 (2\alpha r + 3r\pi) + 12\alpha r^3}{6(r\pi + 2\alpha r)}$$

$$Y = -p \frac{\alpha r^2 [\alpha(2\alpha + 3\pi) + 12]}{6(\pi + 2\alpha)}$$

Nebenstehend ist der Momentenverlauf für einen Behälter mit $p = 1, r = 1, l = 1$ dargestellt. Die Momentenflächen sind auf der Seite aufgetragen, auf welcher der Stab gedrückt wird.

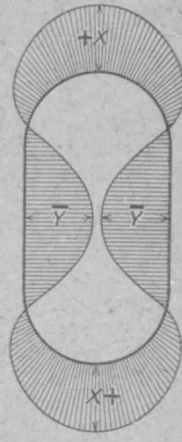


Fig. 4.

BESTIMMUNG DER WIRTSCHAFTLICH GÜNSTIGSTEN ARMIERUNG DOPPELT ARMIRTER PLATTEN UND BALKEN.

Von Dr.-Ing. Lührs, Duisburg.

Werden beim Dimensionieren doppelt armierter Platten und Balken die bekannten Geyerschen Tabellen (Armierter Beton 1913) benutzt, so wird es leicht als Mangel empfunden, daß die Tabellen nicht sofort einen Überblick darüber gewähren, wie im einzelnen Falle die günstigste Armierung zu wählen ist. Da die Tabellen zudem nur für die beiden Eisenspannungen von 1000 und 1200 kg/qcm berechnet sind, ist die Auswahl ziemlich beschränkt, wenn man nicht zu zeitraubenden Nebenrechnungen greifen will. Daß bei gegebener Konstruktionshöhe das Minimum an Eisenquerschnitt durchaus nicht immer mit voller Ausnutzung der zulässigen Eisenspannung eintritt, ist eine bekannte Tatsache; besonders ist oft darauf hingewiesen, daß an Stelle einer doppelten Armierung unter Ausnutzung der Eisengrenzspannung häufig eine einfache Armierung bei Herabsetzung der Eisenspannung ebenso wirtschaftlich ist, ein Verfahren, das sich um so mehr empfiehlt,

oder auch

$$f_e + f_e' = (1 + \alpha) \cdot f_e = \frac{(1 + \alpha) \sigma_b \cdot \varphi}{2(\sigma_e - 10 \alpha \cdot \sigma_b)} \cdot b \cdot (h - a) \quad (1a)$$

$$h - a = \sqrt{\frac{2(\sigma_e - 10 \alpha \cdot \sigma_b)}{\sigma_e \cdot \sigma_b (1 - \frac{\varphi}{3})}} \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} = \mu \sqrt{\frac{M}{b}} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{2 \frac{\sigma_e}{\sigma_b} - \mu^2 \cdot \sigma_b \left(1 - \frac{\varphi}{3}\right) \frac{\sigma_e}{\sigma_b}}{20} \quad (2a)$$

Setzt man den Wert α aus Gl. (2a) in Gl. (1a) ein, und rührt zugleich die Bezeichnungen ein:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = z, \quad \sigma_b \cdot \mu^2 = k$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$f_e + f_e' = \frac{z^2 + (30 - 7,5 k) z + 225}{10 k z^2 + 150 k z}$$

Die Bildung des Differentialquotienten ergibt:

$$\frac{d(f_e + f_e')}{dz} = \frac{10 k (z^2 + 15 z) (2 z + 30 - 7,5 k) - [z^2 + (30 - 7,5 k) z + 225] (20 k z + 150 k)}{(10 k z^2 + 150 k z)^2}$$

als damit gleichzeitig der Sicherheitsgrad gesteigert wird. Im Verfolg dieser Erwägungen sei daher hier angegeben, wie die günstigste Armierung zu bestimmen ist.

Nach Geyer gelten die Gleichungen:

$$f_e = \frac{\sigma_b \cdot \varphi}{2(\sigma_e - 10 \alpha \cdot \sigma_b)} b (h - a) \quad (1)$$

Soll also $(f_e + f_e')$ ein Minimum sein, so muß der Zähler des Differentialquotienten zu Null werden; daraus ergibt sich schließlich:

$$z = 15 \frac{2 + \sqrt{2k}}{k - 2} \quad (3)$$

Ist demnach für einen bestimmten Fall die Spannung σ_b vorgeschrieben, und hat man eine

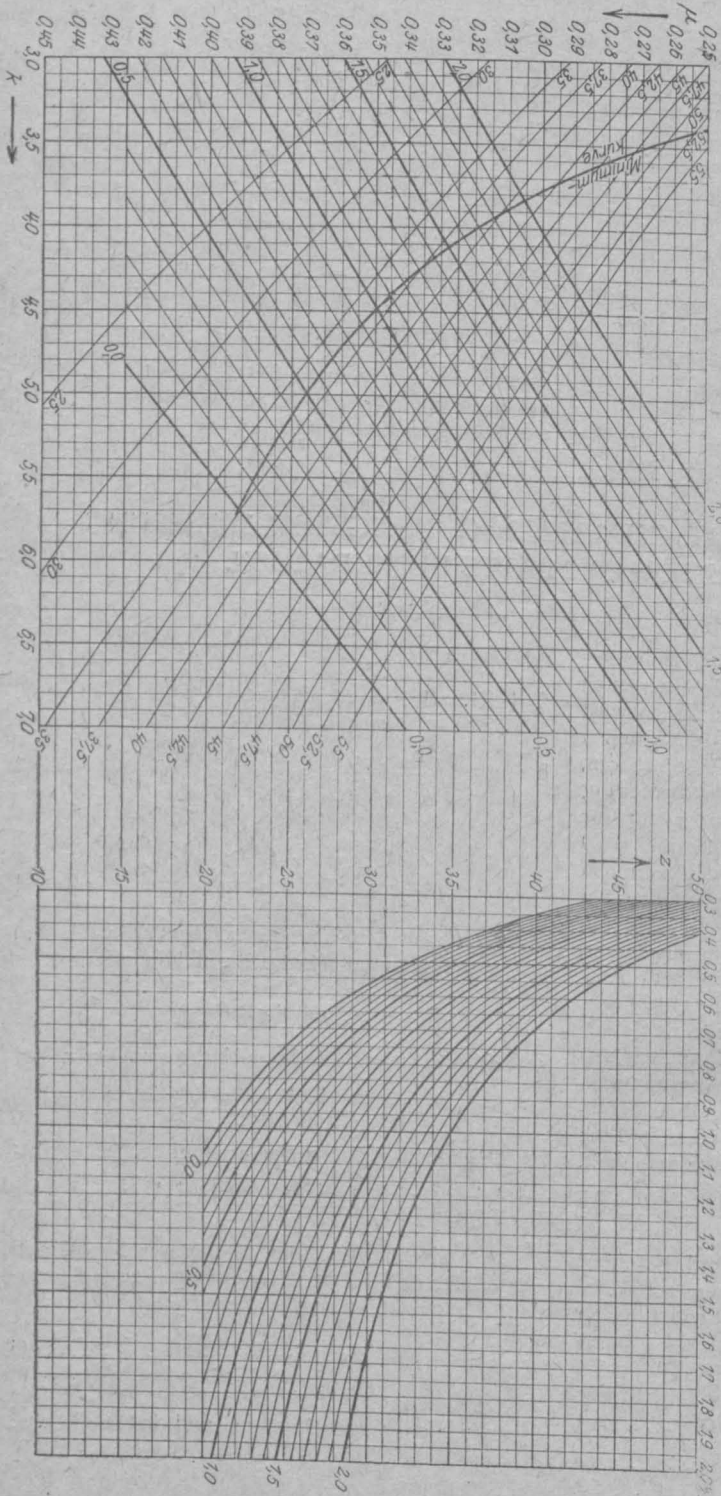
bestimmte Höhe h gewählt, so liegt auch der Koeffizient μ fest und damit auch $k = \mu^2 \cdot \sigma_b$. Dann errechnet man aus Gl. (3) den Wert z und

aus Gl. (2a) unter Einsetzung von $\varphi = \frac{15}{15+z}$ den zugehörigen Wert von α :

$$\alpha = z \frac{3 - k \left(1 - \frac{\varphi}{3}\right) \cdot \varphi}{20}$$

Der Wert z aus Gl. (3) ist naturgemäß nur brauchbar, solange $\alpha > 0$ bleibt. Wird $\alpha < 0$, so ist $\alpha = 0$ zu wählen und der zugehörige Wert von z aus Gl. (2a) zu ermitteln. Ebenso kann, wenn aus konstruktiven Gründen α größer gewählt werden soll, als sich aus Gl. (3) ergibt, der zugehörige Wert z bei gegebenem α aus Gl. (2a) bestimmt werden. Als zweite Bedingung für z gilt selbstverständlich, daß die zulässige Eisenspannung nicht überschritten wird.

Die Auswertung der Gleichungen (2a) und (3) ist nun zweifellos rechnerisch viel zu umständlich für die Praxis. Die in der beigegebenen Tafel dargebotene graphische Lösung bietet indes die Möglichkeit, in einfacher und schneller Weise die erforderliche Armierung zu entnehmen. Einige Beispiele mögen den Gebrauch der Tafel erläutern. Man suche am linken Rande der Tafel den Faktor μ auf, z. B. 0,33. Dann suche man den Schnittpunkt der zugehörigen Horizontalen mit der der zulässigen Betondruckspannung entsprechenden Kurve. Der Schnittpunkt z. B. mit der zu $\sigma_b = 40$ gehörigen Kurve liefert den zugehörigen Wert $k = 0,33^2 \cdot 40 = 4,36$. Die Ablesung dieses Zahlenwertes ist indes überflüssig; man gehe dann auf der Vertikalen bis zur Minimumkurve, um die günstigste Eisenspannung festzustellen. An der rechten Seite des linken Tafelteles wird der entsprechende Faktor z gefunden, im Beispiel $z = 31,5$. Da in diesem Falle $31,5 \cdot 40 > 1200$ ist, muß die Grenzspannung des Eisens mit 1200 kg/qcm ausgenutzt werden. Der Schnittpunkt der Vertikalen $k = 4,36$ und der Horizontalen $z = 30$ liegt zwischen den Kurven für das Armierungsverhältnis von $\alpha = 1,0$ und $\alpha = 1,1$ bei 1,05. Auf der Horizontalen für $z = 30$ gehe man dann über zum rechten Teil der Tafel und entnehme zwischen den entsprechen-



den α -Kurven den Prozentsatz p der Zugarmierung, im Beispiel $p = 0,86\%$.

In einem zweiten Beispiel handle es sich um eine Platte, die bei 26 cm Stärke ein Biegemoment von 4200 kg aufnehmen soll. Man findet mit $h - a = 24$ cm $\mu = \frac{24}{\sqrt{4200}} = 0,37$. Bei einer

Betonspannung von 40 kg/qcm ergibt sich der Reihe nach: $k = 5,48$; $z = 23$ ($\sigma_c = 920$ kg/qcm); $\alpha = 0,15$; Zugarmierung: $p = 0,82\%$; Druckarmierung: $p = 0,15 \cdot 0,82 = 0,12\%$. Wollte man in diesem Falle die Eisenspannung mit 1200 kg/qcm ausnutzen, so

findet man bei $z = 30$ den Wert $\alpha = 0,57$ und erhält eine Zugarmierung: von $p = 0,68\%$ und eine Druckarmierung von $0,57 \cdot 0,68 = 0,39\%$; die Gesamtarmierung ist nun $1,07\%$ gegen $0,94\%$ bei der niedrigeren Eisenspannung, was einen Mehrverbrauch an Eisen von 14% bedeutet.

Dies letztere Beispiel läßt zugleich erkennen, daß die richtige Wahl der Eisenspannung denn doch ein sehr wesentlicher Gesichtspunkt für die Wirtschaftlichkeit der Eisenbetonbauten ist, der heute mehr als je Beachtung verdient.

DIE BERECHNUNG DER KONTINUIERLICHEN UND EINGESPANNTEN TRÄGER MIT KONSTANTEM TRÄGHEITSMOMENT.

Zuschrift.

In „Beton und Eisen“ 1919, Heft 11 wiederholt Herr Dr. techn. Arthur Lederer, Prag anlässlich meines Aufsatzes in „Arm. Bet.“ 1918, Heft 11 seine früheren Bemängelungen der Fuchsschen Tabellen (Arm. Bet. 1915, Heft 8) und wirft mir vor, die von ihm angeführten „Mängel“ übersehen zu haben.

Was die Momente betrifft, so kann ich Herrn Lederer bestätigen, daß er gewiß recht hat und durchaus nichts Neues bringt mit seiner Behauptung, daß es theoretisch nicht richtig sei, zwei aus verschiedenen Belastungen ermittelte Momente, die nicht mathematisch genau in demselben Querschnitt auftreten, zu addieren. Herr Lederer scheint jedoch zu übersehen, daß — abgesehen von den Annäherungen in der Ermittlung der inneren Kräfte — auch die von ihm berechneten Momente der äußeren Kräfte unter Vernachlässigung des Anwachsens der Trägheitsmomente nach den Auflagen hin, ferner unter Nichtbeachtung der Stützensenkungen und der von den elastischen Stützen aufgenommenen Momente usw. entstanden sind. Seine Tabellenwerte dürften deswegen ebenso weit von den tatsächlich auftretenden Momenten entfernt sein wie diejenigen der von Herrn Fuchs aufgestellten Tabellen.

Außerdem ist Herrn Lederer der Unterschied zwischen den Fuchsschen und meinen Tabellen gänzlich entgangen. Ich habe niemandem nahe gelegt, die Momente verschiedener Querschnitte zu addieren. Gerade um die Momente der verschiedenen Belastungsfälle für denselben Querschnitt ermitteln zu können, habe ich für sämtliche Belastungsfälle die Stützenmomente angegeben, sodaß die Momente jedes beliebigen Querschnitts schnell und mühelos berechnet werden können, da bei Kenntnis der Stützenmomente diese Berechnung bekanntlich ebenso einfach ist wie für den frei aufliegenden Balken auf

2 Stützen. Hierauf hatte ich in meinem Aufsatz ausdrücklich hingewiesen.

Sodann irre ich mich, behauptet Herr Lederer, wenn ich meine, daß die Querkkräfte bei Kenntnis der Stützmomente leicht zu ermitteln sind. Wollte man die von Herrn Lederer aufgestellten Forderungen befolgen, so wäre die Rechnung allerdings bedeutend umständlicher. Seine persönlichen Forderungen können aber für mich nicht maßgebend sein. Denn es ist zur Genüge bekannt daß bei ruhenden Lasten die Querkkräftefläche nicht aus den Maximal-Querkkräften gebildet wird — selbst beim einfachen Balken nicht, geschweige denn bei den durchgehenden Balkenzügen. Ich brauche nur auf die in diesem Jahr erschienenen Musterbeispiele zu den amtlichen preußischen Bestimmungen vom 13. Januar 1916 für Ausführung von Bauten aus Eisenbeton zu verweisen. Die Querkkräftefläche wird in einfachster Weise für volle Belastung ermittelt und der Schubbewehrung zugrundegelegt.

Abweichend hiervon fordert Herr Lederer aber, daß die Querkkräftefläche aus den in jedem Querschnitt auftretenden Maximal-Querkkräften gebildet werden soll. Zur Erzeugung der Maximal-Querkkräfte ist bekanntlich für jeden einzelnen Querschnitt eine andere Belastung (Streckenlast vom Auflager bis zum betreffenden Querschnitt) erforderlich. Die Forderung des Herrn Lederer ist also in erhöhtem Maße derselbe Fehler, gegen den er sich bezüglich der Momente in den Fuchsschen Tabellen in Verkennung der Belanglosigkeit der Annäherung zum zweiten Mal wendet. Während in den genannten Tabellen zur Vereinfachung die Momente zweier naheliegender Querschnitte addiert werden, fordert Herr Lederer aber als Ergebnis einer ganz bedeutenden Rechnungserschwerung die Zusammenzählung von Werten aus einer Reihe von verschiedenen Belastungsfällen, die unwahrscheinlich, ja gar unmöglich sind, und von denen niemals zwei

geschweige denn alle zu gleicher Zeit auftreten können.

Es muß das Bestreben sein, die Rechnung möglichst zu vereinfachen — selbst auf Kosten einer peinlichen Genauigkeit, die in Anbetracht der vielen sonstigen Annäherungen und Annahmen doch wohl nur geeignet ist, über den tatsächlichen Genauigkeitsgrad der Endwerte zu täuschen. Mit Rechnerschwernissen ohne entsprechende Vorteile ist dem Konstrukteur wenig gedient.

Weshalb schließlich Herr Lederer meint, mir zeigen zu müssen, daß die zugegebene Umständlichkeit seiner Berechnungen, gegen die ich sonst nichts eingewendet hatte, „nicht am Wesen der Einflußlinien selbst lag“, ist mir nicht recht verständlich. Ich habe sie gewiß nicht dort gesucht.

Berlin-Wilmersdorf, den 5. August 1919.

Halfdan Pederssen.

ZULÄSSIGE BELASTUNG SPIRALARMIRTER SÄULEN.

Von Ing. H. Fuchs, Dresden.

Nach § 17, Abs. 7 der „Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton“ ist die zulässige Belastung einer spiralarmierten Säule

$$P = \sigma_b (F_k + 15 F_e + 45 F_s) \dots \dots (1) \\ = \sigma_b F_i.$$

Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten:

$$F_e \geq \frac{F_s}{3}; \quad F_i \leq 2 F_b; \quad s \leq \frac{D}{5}; \quad s \leq 8 \text{ cm};$$

$$F_e = \frac{0,8 F_b}{100} \text{ bis } \frac{3 F_b}{100}.$$

Hierin bedeuten:

F_e = Querschnitt der Längseisen,

F_s = Querschnitt der Umschnürungseisen auf 1 m Säulenhöhe, verwandelt gedacht in einen

senkrechten Eisenstab = $\frac{f \pi D}{s}$,

D = Kerndurchmesser, gemessen von Mitte zu Mitte Umschnürungseisen,

D_b = äußerer Durchmesser des Achteckes,

F_k = Kernquerschnitt = $\frac{\pi D^2}{4}$,

F_b = Querschnitt des vollen Achteckes = $0,83 D_b^2$.

Es wird dann die zulässige Belastung

$$P \leq \sigma_b 2 F_b \geq \sigma_b (F_k + 15 F_e + 45 F_s).$$

Hieraus

$$F_s = \frac{2 F_b - F_k - 15 F_e}{45}.$$

„Gehler, Erläuterungsbeispiele“ gibt an, daß 1 kg Eisen in den Umschnürungsringsen die Tragfähigkeit einer Säule in stärkerem Maße erhöht, als wenn es als Längseisen verwendet würde.

Für die größte Belastung ist demnach das kleinste F_e und größte F_s einzusetzen. Da aber $F_e \geq \frac{F_s}{3}$ sein soll, so wird

$$F_s = 3 F_e \dots \dots \dots (2)$$

dann ist

$$\frac{2 F_b - F_k - 15 F_e}{45} = 3 F_e,$$

hieraus

$$F_e = \frac{2 F_b - F_k}{150} \dots \dots \dots (3)$$

Da nun

$$F_s = \frac{f \pi D}{s} = \alpha D,$$

so wird

$$\alpha = \frac{F_s}{D} = \frac{3 F_e}{D} \dots \dots \dots (4)$$

Mit den Gleichungen (1)—(4) wurden die Werte der beigefügten Tabelle ermittelt, aus welcher die zulässigen Belastungen für verschiedene Betonbeanspruchungen abgelesen werden können.

1. Beispiel: Gegeben $P = 105 \text{ t}$,

für eine gewählte Betondruckspannung $\sigma_b = 30 \text{ kg/cm}^2$ ist abzulesen:

$$D_b = 46 \text{ cm}; \quad F_e = 15 \text{ cm}^2;$$

$$D = 40 \text{ cm}; \quad F_s = 45 \text{ cm}^2;$$

$\alpha = 1,13 = 12 \text{ mm}$ Umschnürungseisen in einer Entfernung $s = 3 \text{ cm}$.

Ist für eine Säule außer der Belastung noch der Querschnitt gegeben, so gilt folgendes:

Für eine einfache Säule ohne Umschnürung ist die zulässige Belastung:

$$P_1 = \sigma_b (F_k + 15 F_e).$$

Für eine spiralarmierte Säule:

$$P = P_1 + 45 F_s \sigma_b.$$

Daraus

$$F_s = \frac{P - P_1}{\sigma_b \cdot 45} = \frac{1}{45} \left[\frac{P}{\sigma_b} - (F_k + 15 F_e) \right] \quad (5)$$

für eine gewählte Betondruckspannung $\sigma_b = 25 \text{ kg/cm}^2$ ist aus der Tabelle abzulesen:

$$F_e = 32,6 \text{ cm}^2; \quad F_k = 3217 \text{ cm}^2;$$

dann wird

$$F_s = \frac{1}{45} \left[\frac{180000}{25} - (3217 + 15 \cdot 32,6) \right] = 78 \text{ cm}^2.$$

2. Beispiel: Gegeben $P = 180 \text{ t}$ und

$D_b = 70 \text{ cm}$,

D _b cm	D cm	F _e cm ²	F _s cm ²	F _k cm ²	F _b cm ²	α	P in t bei σ _b =				
							25	30	35	40	50
20	14	3,4	10,2	154	331	0,73	16,5	19,8	23,1	26,4	33,0
22	16	4,0	12,0	201	401	0,75	20,0	24,0	28,0	32,0	40,0
24	18	4,7	14,1	255	477	0,79	24,0	28,6	33,4	38,2	47,7
26	20	5,4	16,2	314	560	0,81	28,0	33,6	39,2	44,8	56,0
28	22	6,1	18,3	380	649	0,83	32,4	38,9	45,4	51,8	64,8
30	24	6,9	20,7	452	745	0,87	37,3	44,7	52,2	59,6	74,5
32	26	7,8	23,4	531	848	0,90	42,5	51,0	59,5	68,0	85,0
34	28	8,6	25,8	616	957	0,92	47,8	57,3	66,9	76,4	95,5
36	30	9,6	28,8	707	1073	0,96	53,8	64,5	75,3	86,0	107,3
38	32	10,6	31,8	804	1196	1,00	59,8	71,7	83,7	95,6	120
40	34	11,6	34,8	908	1325	1,03	66,3	79,5	92,8	106	133
42	36	12,7	38,1	1018	1461	1,06	73,0	87,6	102	117	146
44	38	13,8	41,4	1134	1603	1,09	80,0	96,0	112	128	160
46	40	15,0	45,0	1257	1752	1,13	87,5	105	123	140	175
48	42	16,1	48,3	1385	1908	1,15	95,0	114	133	152	190
50	44	17,5	52,5	1521	2070	1,19	104	124	145	166	207
52	46	18,7	56,1	1662	2239	1,22	112	134	156	178	223
54	48	20,1	60,3	1810	2414	1,26	121	145	169	193	241
56	50	21,4	64,2	1964	2597	1,29	130	155	181	207	259
58	52	23,0	69,0	2124	2785	1,33	139	167	195	222	278
60	54	24,5	73,5	2290	2980	1,36	149	179	209	238	298
62	56	26,0	78,0	2463	3183	1,39	159	191	223	254	318
64	58	27,6	82,8	2642	3391	1,43	170	203	237	271	339
66	60	29,3	87,9	2827	3607	1,47	181	217	253	289	361
68	62	30,8	92,4	3019	3829	1,49	191	229	267	306	382
70	64	32,6	97,8	3217	4057	1,53	203	243	284	324	405
72	66	34,3	103	3421	4292	1,56	214	257	300	342	428
74	68	36,3	109	3631	4534	1,60	227	272	317	362	453
76	70	38,0	114	3849	4783	1,63	239	287	335	382	478
78	72	40,0	120	4072	5038	1,67	252	302	353	403	504
80	74	42,0	126	4301	5299	1,70	265	318	371	424	530
82	76	44,5	131	4537	5567	1,73	278	333	389	444	555
84	78	46,8	138	4778	5842	1,77	293	351	410	468	585
86	80	48,8	143	5027	6124	1,80	305	366	427	488	610
88	82	51,2	150	5281	6412	1,83	320	384	448	512	640
90	84	53,6	157	5542	6707	1,88	335	402	469	536	670
92	86	56,0	164	5809	7008	1,90	350	420	490	560	700
94	88	58,4	170	6082	7316	1,94	365	438	511	584	730
96	90	61,0	177	6362	7631	1,97	381	457	533	610	762
98	92	63,6	185	6648	7952	2,0	398	477	557	636	795
100	94	66,2	192	6940	8280	2,04	414	497	580	662	824

Werte für α :

Entfernung s	Durchmesser der Umschnürungseisen								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	0,83	0,99	1,18	1,39	1,61	1,85	2,10	2,37	2,66
4		0,75	0,89	1,04	1,21	1,39	1,58	1,78	1,99
5			0,71	0,84	0,97	1,11	1,26	1,43	1,60
6				0,69	0,80	0,92	1,05	1,18	1,32
7					0,69	0,79	0,90	1,02	1,14
8						0,69	0,79	0,89	1,00

BÜCHERBESPRECHUNGEN.

Rahmenformeln, gebrauchsfertige Formeln für einhäufige, zweistielige, dreieckförmige und geschlossene Rahmen aus Eisen- oder Eisenbetonkonstruktionen nebst Anhang mit Sonderfällen teilweise und ganz eingespannter Träger von Prof. Dr.-Ing. A. Kleinogel, Privatdozent an der Technischen Hochschule Darmstadt. 227 Rahmenfälle mit 415 Abbildungen, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage. Preis geb. 20 M., geb. 25 M.

Der Titel besagt den Zweck der Veröffentlichung. Daß der Inhalt den Bedürfnissen der in den Ingenieurbüros des Eisenbetonbaues arbeitenden Fachleute entspricht, denen das umständliche Nachschlagen in den verschiedenen Büchern auf dem Gebiete der Statik erspart wird, geht daraus hervor, daß das Buch in 2. Auflage erscheint. Erwähnt sei noch der Hinweis des Verfassers, daß die Annahme einer gleichbleibenden Elastizitätszahl nur so lange vertreten werden könne, als nicht durch Versuche zuverlässige Grundlagen geschaffen werden. Diese Grundlagen zu erforschen sollte eine der wichtigsten Aufgaben der Bauingenieurwissenschaft sein, um so mehr, als ihnen bei der ausgedehnten Anwendung der Rahmenkonstruktionen im Eisenbetonbau eine erhöhte wirtschaftliche Bedeutung zukommt. E. P.

Der Eisenbeton-Schiffbau von M. Rüdiger, Ingenieur, Verlag von Julius Springer, Berlin 1919, Preis 10 M.

Nach dem Werk des Holländers Boon über die Praxis des Eisenbetonschiffbaues in Holland und im anderen Ausland erscheint das vorliegende Buch des Verfassers. Der Unterzeichnete hat in einer kurzen Veröffentlichung im März 1919 in der Zeitschrift „Armiertes Beton“ dasjenige zusammengestellt, was bisher vom Eisenbetonschiffbau bekannt war und darauf hingewiesen, daß noch eine Reihe grundlegender Fragen der Klärung bedürfen, wenn nicht Rückschläge eintreten sollen. Was seither vom Ausland über die Erfahrungen mit dem Eisenbetonschiffbau bekannt geworden ist, ist wenig ermunternd und zeigt, daß es nicht richtig ist, Erfahrungen an fertiggestellten Schiffen abzuwarten. Derartige Versuche sind zu kostspielig. Gewiß gibt es auch Erfahrungen, die nur an ausgeführten Beispielen gesammelt werden können, aber die Fragen, die vorher durch wissenschaftliche Untersuchungen

geklärt werden können und müssen, sollten nicht auch an großen Objekten der Praxis studiert werden. In dieser Beziehung bringt das Buch Rüdigers herzlich wenig. Über den Leichtbeton, der von Rüdiger in Hamburg angewendet worden sein soll, ist in dem Buch außer einigen nichtsagenden Allgemeinheiten nichts enthalten, ebensowenig über gute und schlechte Erfahrungen. Was in dem Buch über den Schiffbau gesagt ist, kann ich nicht beurteilen, aber ich hoffe, daß dort nicht ebensovielen wissenschaftlichen Irrtümern enthalten sind wie in dem Kapitel über Eisenbetonbau. Rüdiger hat den richtigen Weg betreten, als er sich um die Herstellung eines Betons mit kleinem spezifischen Gewicht bemühte, der im Eisenbetonschiffbau zur Anwendung kommen müßte, und es wäre sehr zu begrüßen, wenn diese Bemühungen zum Ziele führen würden. E. Probst.

Der Sand. Von B. Krieger. Berlin 1919. Des Zieglers Feierabende, 6. Heft. Verlag Tonindustrie-Zeitung. 36 Seiten, Preis geb. 3,35 M., einschließlich Inlandporto und Teuerungszuschlag.

Das Buch wendet sich an alle, die Sand und Kies gewinnen oder verarbeiten. Sie alle können aus dem Buche entnehmen, daß in jedem Sande Eigenschaften schlummern, die ihn für die verschiedensten Zwecke brauchbar machen. Man muß nur verstehen, die physikalischen Eigenschaften des Sandes zu wecken. Sie beruhen auf gesetzmäßigen Beziehungen zwischen Korngrößen, Gewicht und Hohlräumen. Einen guten Einblick in diese Verhältnisse gewährt das Buch, dessen erster Abschnitt besonders den Sand für Kalksandsteine behandelt, während der zweite Abschnitt ganz allgemein dem trockenen und feuchten Sande gewidmet ist.

Kalksandstein-Betriebserfahrungen. Von B. Krieger. Des Zieglers Feierabende, 7. Heft. Verlag der „Tonindustrie-Zeitung“ G. m. b. H. Berlin NW 21, Dreyesstraße 4. Preis geb. 4,50 M. einschließlich Porto und Teuerungszuschlag.

In der vorliegenden Schrift werden wichtige Betriebsrichtungen und Betriebsvorgänge in kurzen Abschnitten behandelt. Der Verfasser stellt das Zusammenwirken von Kalk und Sand bei ihrer Aufbereitung in gemeinverständlicher Weise dar und beleuchtet die Beschaffenheit eines sachgemäß hergestellten Kalksandsteines.

Den Verfassern größerer Originalbeiträge stehen je nach deren Umfang bis zu 5 Exemplaren des betr. vollständigen Heftes kostenfrei zur Verfügung, wenn bei Einsendung des Manuskriptes ein entsprechender Wunsch mitgeteilt wird. Sonderabdrücke werden nur bei rechtzeitiger Bestellung und gegen Erstattung der Kosten geliefert.

Für die Schriftleitung verantwortlich: E. Probst, Karlsruhe i. B. — Verlag von Julius Springer in Berlin W.