

# Beiträge zur Theorie der Optimalsteuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin Valeriya Lykina  
geboren am 19.07.1979 in Dnipropetrovsk, Ukraine

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. S. Pickenhain  
Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Maurer  
Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. H. J. Oberle

Tag der mündlichen Prüfung: 11.Mai 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Benötigte Ergebnisse aus der Analysis und der Funktionalanalysis</b>	<b>5</b>
1.1 Gewichtete Lebesgue- und Sobolevräume . . . . .	5
1.1.1 Definitionen . . . . .	5
1.1.2 Einbettungseigenschaften . . . . .	7
1.2 Schwache Kompaktheit in reflexiven Banachräumen . . . . .	9
1.3 Vergleich der Integralbegriffe . . . . .	10
<b>2 Steuerungsaufgaben mit unendlichem Zeithorizont: Überblick</b>	<b>13</b>
2.1 Motivation und Anwendungen . . . . .	13
2.1.1 Optimales Kapitalwachstum . . . . .	13
2.1.2 Produktions-Lagerhaltungsmodell . . . . .	14
2.1.3 Schädlingsbekämpfung . . . . .	16
2.1.4 Regulatorproblem . . . . .	17
2.1.5 Globale Klimaänderung und nachhaltige Wirtschaft . . . . .	19
2.2 Aufgabenstellung . . . . .	20
2.3 Optimalitätskriterien . . . . .	22
2.3.1 Globale Optimalität . . . . .	22
2.3.2 Lokale Optimalität . . . . .	26
2.4 Lösungsmethoden . . . . .	27
2.4.1 Fortsetzung der Lösung von $(P_T)$ auf $\mathbb{R}^+$ . . . . .	27
2.4.2 Gleichgewichtslösung . . . . .	29
2.4.3 Direkte Methoden . . . . .	30
2.4.4 Indirekte Methoden . . . . .	30
2.4.5 Phasenportraitanalyse . . . . .	39
<b>3 Verschiedene Interpretationen des Integrals im Zielfunktional</b>	<b>41</b>
<b>4 Analytische Eigenschaften des Nemytskij Operators in gewichteten Lebesgueräumen</b>	<b>47</b>
4.1 Einige Ergebnisse aus der Maßtheorie . . . . .	47
4.2 Von der Stetigkeit des Nemytskij Operators . . . . .	49
4.2.1 Über den Nemytskij Operator auf dem Raum $L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ . . . . .	49
4.2.2 Über den Nemytskij Operator auf dem Raum der Vektorfunktionen . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Zu den analytischen Eigenschaften von Integralfunktionalen</b>	<b>61</b>
5.1	Die Probleme $(P_\infty^L)$ und $(P_\infty^R)$ . . . . .	62
5.2	Gegenbeispiel im Fall eines $(P_\infty^R)$ Problems . . . . .	62
5.3	Unterhalbstetigkeit der Funktionale mit $L$ - $f$ . . . . .	64
5.4	Gegenbeispiel im Fall eines $(P_\infty^L)$ Problems . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Aussagen über die Existenz optimaler Lösungen</b>	<b>83</b>
6.1	Ein Existenzresultat . . . . .	83
6.2	Vergleich mit bekannten Existenzsätzen . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Dualitätstheorie</b>	<b>95</b>
7.1	Allgemeine Idee der Dualität . . . . .	95
7.2	Konstruktionsschema für duale Aufgaben . . . . .	96
7.3	Dualität für Steuerungsprobleme . . . . .	97
7.3.1	Dualitätskonzept von Klötzler . . . . .	97
7.3.2	Zusammenhang mit der Fenchel-Rockafellarschen Dualität . . . . .	102
7.4	Dualitätstheorie in gewichteten Sobolevräumen . . . . .	104
<b>8</b>	<b>Hinreichende Optimalitätsbedingungen</b>	<b>113</b>
8.1	Hinreichende Bedingungen für globale Optimalität . . . . .	113
8.2	Hinreichende Bedingungen für lokale Optimalität . . . . .	117
8.2.1	Hinreichende Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme mit konkaver Hamiltonfunktion . . . . .	117
8.2.2	Hinreichende Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme mit nichtkonkaver Hamiltonfunktion . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung</b>	<b>125</b>
9.1	Probleme mit konkaver Hamiltonfunktion . . . . .	125
9.2	Probleme mit nicht konkaver Hamiltonfunktion . . . . .	127
9.3	Hinreichende Bedingungen in abgeschwächter Form . . . . .	136
9.4	Eine linear-quadratische Aufgabe . . . . .	143
9.5	Konkretes Beispiel . . . . .	154
<b>10</b>	<b>Optimale Erneuerung einer technischen Ressource</b>	<b>159</b>
10.1	Problemformulierung . . . . .	159
10.2	Existenz einer optimalen Lösung . . . . .	160
10.3	Lösung mittels hinreichender Bedingungen . . . . .	161
10.3.1	Fall I: Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind reell	163
10.3.2	Fall II: Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind komplex . . . . .	169
<b>11</b>	<b>Ein Ressourcen-Allokationsmodell</b>	<b>179</b>
11.1	Betrachtung auf einem endlichen Zeitintervall . . . . .	179
11.2	Das Modell mit unendlichem Zeithorizont . . . . .	182
11.3	Angepasstes Modell mit unendlichem Zeithorizont . . . . .	185

11.3.1	Existenz einer optimalen Lösung zum angepassten Ressourcen-Allokationsproblem . . . . .	185
11.3.2	Optimale Lösung mittels hinreichender Optimalitätsbedingungen . . . . .	186
<b>12</b>	<b>Das lineare Ramsey Modell</b>	<b>191</b>
12.1	Das Modell mit endlichem Zeithorizont . . . . .	191
12.2	Das Modell mit unendlichem Zeithorizont . . . . .	192
12.3	Das angepasste lineare Ramsey Modell . . . . .	194
12.3.1	Existenz einer optimalen Lösung zum angepassten linearen Ramsey Modell . . . . .	195
12.3.2	Optimale Lösung mittels hinreichender Optimalitätsbedingungen . . . . .	198
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>203</b>
	<b>A Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>207</b>
	<b>B Wichtige Sätze und Definitionen</b>	<b>211</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>214</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Überholung des Prozesses $(x, u)$ (rot) vom Prozess $(x^*, u^*)$ (schwarz). . .	24
2.2	Trichterförmige gewichtete Umgebung: $x^*(t) \equiv 0, \hat{v}(t) = e^{-0.5t}, \delta = 1$ . . .	28
2.3	Verschiedene gewichtete Umgebungen schematisch dargestellt; $x^*(t) \equiv 0$ . . .	28
2.4	Die Lösung des linearen Ramsey Modell auf $[0, T]$ : optimaler Zustand für $k_0 = T = 1, \rho = \delta = 0.2$ . . . . .	29
2.5	Die Lösung des linearen Ramsey Modell auf $[0, T]$ : optimale Steuerung für $k_0 = T = 1, \rho = \delta = 0.2$ . . . . .	29
2.6	“Turnpike“ Eigenschaft: optimaler Pfad $x^*(\cdot)$ (schwarz) und Gleichgewichtsniveau (rot). . . . .	30
9.1	Primal-duales Verhältnis zwischen dem Funktional $J_\infty^L$ (blau) und der dualen Funktion $\tilde{g}_\infty(S_i)$ bei einem unzulässigen dualen Ansatz $S_1$ (rot) und zulässigen Ansätzen $S_2, S_3$ (grün). Illustration eines Schnittes zum Zeitpunkt $t$ ; $x_i^*(\cdot)$ -Zustandstrajektorien, Kandidaten für Optimalität, $i = 1, 2$ . . . . .	143
9.2	Zustandstrajektorie $x_1^*(\cdot)$ . . . . .	155
9.3	Steuerung $u_1^*(\cdot)$ . . . . .	155
9.4	Zustandstrajektorie $x_2^*(\cdot)$ . . . . .	156
9.5	Steuerung $u_2^*(\cdot)$ . . . . .	156
9.6	Abhängigkeit des Funktionalwertes $J_\infty^L(\tilde{x}, \tilde{u})$ vom Schaltpunkt $\tilde{\tau}$ . . . .	156
9.7	Abhängigkeit des Funktionalwertes $J_\infty^L(\bar{x}, \bar{u})$ vom Schaltpunkt $\tilde{\tau}$ . . . .	156
10.1	Phasenportrait des Systems (10.31) für $k_i \in \mathbb{R}, k_1 \neq k_2, i = 1, 2$ . . . .	164
10.2	Phasenportrait des Systems (10.31) für $k_1 = k_2$ . . . . .	164
10.3	Zustandstrajektorien in Abhängigkeit von $C_2$ . . . . .	166
10.4	Erreichbarkeitsmenge $R$ . . . . .	166
10.5	Schnitte der Flächen $F_1$ (schwarz) und $F_2$ (rot) mit der $\tau C_2$ -Ebene. . .	167
10.6	Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall reeller Nullstellen: optimaler Zustand $x^*(\cdot)$ (schwarz), Zustandsbeschränkung (rot). . .	168
10.7	Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall reeller Nullstellen: optimale Steuerung $u^*(\cdot)$ . . . . .	168
10.8	Phasenportrait des Systems (10.31) im Fall komplexer Nullstellen der charakteristischen Gleichung. . . . .	170
10.9	Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall komplexer Nullstellen: optimale Phasentrajektorie $x^*(\cdot)$ . . . . .	173
10.10	Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall komplexer Nullstellen: optimale Steuerung $u^*(\cdot)$ . . . . .	173

10.11	Die Komponente $y(\cdot)$ des dualen Ansatzes $S^*$ . . . . .	175
10.12	Die Krümmungskomponente $Q(\cdot)$ des dualen Ansatzes $S^*$ . . . . .	175
10.13	Optimale Phasentrajektorie $x^*(\cdot)$ (schwarz) und natürliche Zustandsbeschränkungen (rot). . . . .	178
10.14	Optimales Zustands-Kozustandspaar $(x^*, ye^{\rho t})$ im Phasenportrait des Systems (10.99). . . . .	178
11.1	Das angepasste Ressourcen-Allokationsmodell: optimale Phasentrajektorie $x^*(\cdot)$ (schwarz) und die Funktion $Ce^{\hat{\alpha}t}$ (rot) für $C = 20$ , $\rho = 0.9$ , $x_0 = 10$ , $\hat{\alpha} = 0.5$ , $\tau = 1.38629$ . . . . .	190
11.2	Das angepasste Ressourcen-Allokationsmodell: optimale Steuerung $u^*(\cdot)$ für $C = 20$ , $\rho = 0.9$ , $x_0 = 10$ , $\hat{\alpha} = 0.5$ , $\tau = 1.38629$ . . . . .	190
12.1	Das angepasste lineare Ramsey Modell: optimale Zustandstrajektorie $x^*(\cdot)$ (schwarz) sowie Zustandsbeschränkung $Ce^{\alpha t}$ (rot) für $\rho = 0.9$ ; $\delta = 0.5$ ; $\alpha = 0.7$ ; $C = 4$ ; $x_0 = 2$ . . . . .	199
12.2	Das angepasste lineare Ramsey Modell: optimale Steuerung $u^*(\cdot)$ für $\rho = 0.9$ ; $\delta = 0.5$ ; $\alpha = 0.7$ ; $C = 4$ ; $x_0 = 2$ . . . . .	199

# Danksagung

Mein herzlichster Dank gilt der Frau Prof. Dr. Sabine Pickenhain für langjährige hervorragende Betreuung und Schaffen eines stark optimalen Arbeitsklimas am Lehrstuhl Optimierung. Ein großer Dank gilt ihr und Diana Wenzke für die sprachliche Korrektur meiner Arbeit.

Ich danke allen Mitgliedern der Fachklasse E “Modelle, Methoden und Werkzeuge zum Risikomanagement“ der Internationalen Graduiertenschule Cottbus für viele interessante Diskussionen und die Möglichkeit eigene Arbeit aus einer anderen Perspektive zu sehen.

Als nächstes möchte ich mich ganz herzlich bei all denjenigen bedanken, die mich während dieser Phase meines Lebens mit Rat und Tat unterstützt haben und die ganze Zeit an mich geglaubt haben, bei denen, die mir Fragen gestellt haben und auch bei der Suche nach Antworten behilflich waren, nämlich

**bei meinem Freund:** Ioan Ionescu, der den ganzen Entstehungsprozess aus nächster Nähe beobachtet und miterlebt hat und mich immer wieder motiviert hat.

**bei meiner Familie:** meinen Eltern Oleg und Taisiya Lykin, meiner Großmutter Vera Lykina und Tante Olga Lykina sowie bei meinen Kusinen Viktoria und Veronika Manzheleeva und ihren Eltern Nelli und Yuri Manzheleev;

**bei meinen Kollegen und Freunden:** Natasa Beltran \* Annika Bleckat \* Nadiya Bodrikova und Yevgen Shumeyko \* Yevgen Burkov \* Prof. Dr. Gustav Feichtinger \* Marina und Dr. Robby Fröhlich \* Prof. Dr. Michael Fröhner \* Nadiya Kosytsina und Dr. Andrey Pototskyy \* Svetlana Kovpak \* Dr. Yuliya Kyrychko und Dr. Kostyantyn Blyuss \* Tatjana Gerling \* Anna Golin’ko \* Prof. Dr. Helmut Maurer \* Dr. Nataliya Metla \* Gabriela Pacholz \* Ioanna Paloumpa \* Prof. Dr. F. Sauvigny \* Dr. Alina Shmakova und Dr. Alexej Tovchigrechko \* Elena Simutina \* Elena und Lev Solovyovy \* Dr. Inna Spivak \* Elena und Alexander Sviridovi \* Nico Tauchnitz \* Nataliya Togobytska und Yevgen Borokhovich \* Eleni Vasileiadaou und Christian Babick \* Dr. habil. Marcus Wagner \* Diana Wenzke \* Yevgeniya und Eberhard Willach.



*Моим родителям Таисии и Олегу*



# Einleitung

Ich liebe Mathematik nicht nur, weil sie auf die Technik anwendbar ist, sondern auch, weil sie schön ist, weil der Mensch seine spielerische Lust in sie hineingelegt hat und weil die Mathematik imstande ist, sogar das höchste Spiel zu treiben: Sie kann das Unendliche faßbar machen.

*Rószsa Péter*

Bei dieser Arbeit handelt es sich um einen Beitrag zur mathematischen Theorie der optimalen Steuerung, nämlich zu dem Teil, der die kontinuierlichen Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont umfasst. Die intensive Untersuchung dieser Aufgabenklasse begann in den frühen siebziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts, obwohl das erste Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont schon im Jahre 1928 von F. P. Ramsey in [84] formuliert wurde und ein Kapitalakkumulationsmodell beschrieb. Das Einführen eines unendlichen Planungsintervalls scheint auf den ersten Blick zu theoretisch und fragwürdig zu sein. Bei genauerer Überlegung jedoch tritt seine Plausibilität und Natürlichkeit zum Vorschein. M. Kurz und K. J. Arrow argumentierten die Wahl eines unendlichen Betrachtungsintervalls in ihrem Buch [5], S. xviii, wie folgt:

*“The infinite horizon is an idealization of the fundamental point that the consequences of investment are very long-lived; any short horizon requires some methods of evaluating end-of-period capital stocks, and the only proper evaluation is their value in use in the subsequent future“.*

Wählt man also einen festen Planungshorizont, so bleiben die Konsequenzen der aktuellen Entscheidungen in der Zeit “danach“ unberücksichtigt. Die Wahl eines variablen Planungsintervalls hat sich aus demselben Grund nicht bewährt. Bei der Betrachtung von dynamischen Systemen in der Ökonomie hat sich somit die systematische Wahl eines unendlichen Zeithorizontes durchgesetzt. Generell ist die Betrachtung eines unendlichen Planungsintervalls überall dort sinnvoll, wo heutige Entscheidungen sehr langlebige Konsequenzen haben können und für zukünftige Generationen wichtig sind. So ist dies beispielsweise der Fall, wenn man die Wechselwirkungen der globalen Klimaänderung und optimalen ökonomischen Wachstums in einem integrierten Bewertungsmodell erfassen will, vgl. HAURIE [43], S. 117. Die heute betriebene Emissionspolitik von Treibhausgasen betrifft offenbar mehrere Generationen und stellt somit ein ethisches Problem dar, verbunden mit dem Wohlbefinden der künftigen Generationen.

Die breite Anwendbarkeit solcher Aufgaben vor allem in der Ökonomie und Biologie hat vor etwa dreißig Jahren großes Interesse an der weiteren theoretischen Entwicklung geweckt und zu zahlreichen Veröffentlichungen zum Thema geführt. Inzwischen sind viele Ergebnisse über notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen, vgl. beispielsweise MAGILL [67], ASEEV&KRYAZHIMSKIY [7], SEIERSTAD [89], AUBIN&CLARKE [10], BLOT [17], BLOT&MICHEL [18] wie Existenzergebnisse, siehe BAUM [13], MAGILL [65], BALDER [12], DMITRUK&KUZ'KINA [31], CARLSON [19] bekannt. Ergebnisse zu Transversalitätsbedingungen im Fall eines unbeschränkten Planungsintervalls können u.a. MICHEL [72], KAMIHIGASHI [49], CARTIGNY&MICHEL [22], PICKENHAIN [77] entnommen werden. Ebenso ist das Buch von Carlson et al. erschienen, in dem die verschiedenen Problemenklassen sowohl der deterministischen als auch der stochastischen optimalen Steuerung mit unendlichem Zeithorizont betrachtet werden, vgl. CARLSON ET AL. [20]. Eine breite Palette von innovativen Anwendungen der Steuerungstheorie auf unendlichem Zeitintervall auf die aktuellen Probleme der Korruption, des wachsenden Drogenkonsums und der Terrorbekämpfung sind in dem neu erschienenen Buch von Dieter Grass et al. diskutiert worden, vgl. GRASS ET AL. [40], was die betrachtete Aufgabenklasse in einem ganz neuen Licht erscheinen läßt.

Bei der Formulierung eines Steuerungsproblems in Lagrange- oder Bolza-Form wird ein Integralfunktional minimiert oder maximiert. Meistens stellt ein solches Funktional die Gesamtkosten oder den Gesamtnutzen für die Gesellschaft bei der Planung eines Prozesses dar und wird auch Zielfunktional genannt. Trotz zahlreicher Publikationen über diese Klasse von Aufgaben läßt es sich erkennen, dass nur in wenigen Literaturquellen die verwendeten Integralbegriffe explizit benannt wurden, vgl. DMITRUK&KUZ'KINA [31], BLOT&MICHEL [18], BLOT&HAYEK [16]. Es hat sich jedoch gezeigt, dass bei Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont nicht nur die Unterscheidung zwischen verschiedenen Optimalitätsbegriffen von Nöten ist, sondern auch die Präzisierung des verwendeten Integralbegriffs im Zielfunktional, z.B. Lebesgue oder Riemann, erforderlich ist, vgl. LYKINA ET AL. [62].

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Herleitung von hinreichenden Optimalitätsbedingungen mit Hilfe der Dualitätsmethoden sowie das Gewinnen von Existenzaussagen für Probleme, die ein Zielfunktional mit einem Integral im Lebesgueschen Sinne enthalten. Der Schlüsselgedanke besteht darin, gewichtete Sobolev- bzw. gewichtete Lebesgueräume als Zustands- bzw. Steuerungsräume in die Formulierung der zu lösenden Aufgabe einzuführen. Die ersten Ansätze zur Verwendung gewichteter Räume im Kontext der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont befinden sich in AUBIN&CLARKE [10], S. 570 (jedoch mit fest vorgegebener Gewichtsfunktion) und MAGILL [67], S. 402 (jedoch nur für den Fall eines nicht reflexiven Raumes  $W_1^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ ). Ein einfaches Beispiel von den in dieser Arbeit betrachteten Gewichtsfunktionen ist durch die Funktion  $\nu(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu(t) = e^{-\rho t}$  gegeben, die je nach Modellhintergrund verschiedene Bedeutungen haben kann. So spielt sie die Rolle der Diskontierungsrate in den ökonomischen Aufgabenstellungen, während sie in den biologischen Modellen als Verteilungsdichtefunktion (mit einem Faktor  $\rho$ ) der Poisson-verteilten Zufallsgröße  $T$  interpretiert werden kann, die die Lebensdauer

er einer Population beschreibt, hierzu vgl. auch ASEEV&KRYAZHIMSKII [8], S. 8 ff. Das heisst,  $\rho$  erfüllt die Gleichung  $\rho = \frac{1}{E(T)}$ , wobei  $E(T)$  der Erwartungswert der Zufallsgröße  $T$  ist. Basierend auf den Eigenschaften der gewichteten Funktionenräume wird eine dazu entsprechende Dualitätstheorie entwickelt und die analytischen Eigenschaften der Integralfunktionale über einer Menge unendlichen Maßes, wie beispielsweise Unterhalbstetigkeit, werden untersucht. Die theoretischen Ergebnisse werden durch entsprechende Beispiele bestätigt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im Kapitel 1 sind alle wichtigsten Resultate aus der Analysis und der Funktionalanalysis zusammengetragen, die für die Herleitung der Hauptergebnisse notwendig sind. Das darauffolgende Kapitel gewährt einen kurzen Einblick in das Gebiet der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont und benennt die gängigsten Lösungsmethoden sowie die Besonderheiten der Probleme dieser Klasse. Dazu zählen unter anderem die Optimalitätsdefinitionen sowie die Transversalitätsbedingungen. Das Kapitel 3 ist der Diskussion der Unterschiede zwischen den Integralbegriffen von Lebesgue und Riemann gewidmet, ebenso wie den daraus folgenden Konsequenzen für die Lösungsmengen der zugeordneten Steuerungsprobleme und Zielfunktionalwerte. Die Funktion im Integranden des Zielfunctionals induziert einen nichtlinearen Einsetzungsoperator, der in der Fachliteratur als Nemytskij Operator bekannt ist. Die Glätteigenschaften dieses Operators auf dem gewichteten Lebesgueraum über  $\mathbb{R}^+$  sowie dafür notwendige und hinreichende Bedingungen werden im Kapitel 4 vorgestellt. Die Untersuchung der Unterhalbstetigkeitseigenschaften der Integralfunktionale wird im Kapitel 5 beschrieben. Aufbauend auf den Ergebnissen dieses Kapitels formulieren wir die Existenzaussagen für Steuerungsprobleme mit bezüglich der Steuerung konvexem Integranden und bezüglich der Steuerung linearer Dynamik, die in dem Kapitel 6 vorgestellt werden. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung der Dualitätstheorie im Sinne von Klötzler für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont, formuliert in den gewichteten Funktionenräumen, und der Konstruktion eines Ersatzproblems, auch Dualproblem genannt. Dieses Konstruktionsschema basiert auf der Hamilton-Jacobischen Theorie und einigen Eigenschaften der dualen Variable, deren Gültigkeit speziell in den gewichteten Räumen nachgewiesen werden konnte. Dank der Dualitätstheorie ist der Übergang von einer Steuerungsaufgabe mit unendlichem Zeithorizont zu einer parametrischen Optimierungsaufgabe auf einem unbeschränkten Intervall möglich. Nun können in Kapitel 8 die bekannten Ergebnisse aus der Optimierung ausgenutzt werden, um hinreichende Optimalitätsbedingungen zu formulieren. Diese Bedingungen gewährleisten lediglich die starke lokale Optimalität eines Prozesses in einer Umgebung mit der Breite  $\delta$ , die von der Zeit  $t$  abhängig sein kann. Die uniforme starke lokale Optimalität ist aber gesichert unter den Bedingungen, die in Kapitel 9 angegeben sind. Die auf diese Weise formulierten hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sichern die Striktheit der Minimalstelle ebenfalls. Die Illustration der Anwendbarkeit der hergeleiteten Sätze auf das Problem der optimalen Erneuerung einer technischen Ressource bildet den Inhalt des Kapitels 10. In den Kapiteln 11 und 12 werden zwei weitere akademische Beispiele diskutiert, die ebenfalls die Anwendung der bewiesenen Sätze veranschaulichen sollen. Hierbei kann der Übergang von einer Lösung des Problems auf endlichem Zeithorizont

zu einer Lösung des entsprechenden Problems mit unendlichem Zeithorizont und seine Problematik sehr gut geschildert werden. Ein Ressourcen-Allokationsmodell und das lineare Ramsey Modell werden an dieser Stelle vorgestellt und in Bezug auf die erwähnte Problematik ebenso wie auf die passende und natürliche Wahl der Funktionenräume diskutiert. Die Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse sowie die Analyse noch offener und während der Arbeit entstandener Fragen schliessen die Arbeit ab. Im Anhang A sind die wichtigsten Abkürzungen und eingeführte Bezeichnungen zusammengetragen, während der Anhang B einen Überblick über Definitionen und Sätze gibt.

# Kapitel 1

## Benötigte Ergebnisse aus der Analysis und der Funktionalanalysis

### 1.1 Gewichtete Lebesgue- und Sobolevräume

#### 1.1.1 Definitionen

Wir setzen in diesem Abschnitt  $\Omega = [0, \infty)$  und bezeichnen mit  $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  den Raum aller Lebesgue messbaren Funktionen, die auf der Menge  $\Omega$  definiert sind und Werte in  $\mathbb{R}^n$  haben.

**Definition 1. (a)** Wir nennen eine stetige Funktion  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  **Gewichtsfunktion**.

**(b)** Eine Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  wird **Dichtefunktion** genannt, falls sie zusätzlich über der Menge  $\Omega$  Lebesgue integrierbar ist:

$$\int_{\Omega} \nu(t) dt < \infty. \quad (1.1)$$

Als nächstes definieren wir den gewichteten Lebesgueraum  $L_p^n(\Omega, \nu)$ .

**Definition 2.** Mit einer Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  führen wir den Funktionenraum  $L_p^n(\Omega, \nu)$  für  $p \geq 1$  wie folgt ein:

$$L_p^n(\Omega, \nu) = \{x \in \mathcal{M}^n \mid \|x\|_p^p := \int_{\Omega} |x(t)|^p \nu(t) dt < \infty\}. \quad (1.2)$$

Für  $p = \infty$  wird der **gewichtete Lebesgueraum** entsprechend so aussehen:

$$L_{\infty}^n(\Omega, \nu) = \{x \in \mathcal{M}^n \mid \|x\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| \nu(t) < \infty\}, \quad (1.3)$$

vgl. KUFNER [56], S. 11 f.

**Definition 3.** We definieren den **gewichteten Sobolevraum**  $W_p^{1,n}(\Omega, \nu)$  als den Unterraum des gewichteten Lebesgueraumes  $L_p^n(\Omega, \nu)$  aller Vektorfunktionen  $x(\cdot)$ , die samt ihrer verallgemeinerten Ableitungen im  $L_p^n(\Omega, \nu)$  liegen, siehe KUFNER [56], S. 11 f. Daraus ergibt sich

$$W_p^{1,n}(\Omega, \nu) = \{x \in \mathcal{M}^n \mid x \in L_p^n(\Omega, \nu), \dot{x} \in L_p^n(\Omega, \nu)\}. \quad (1.4)$$

Zum Begriff der verallgemeinerten Ableitung verweisen wir auf das Buch YOSIDA [100], S. 49. Der so definierte Funktionenraum wird, versehen mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^{1,n}(\Omega, \nu)}^p = \int_{\Omega} \{|x(t)| + |\dot{x}(t)|\}^p \nu(t) dt, \quad (1.5)$$

zu einem Banachraum. Zusätzlich wird noch ein Vektorraum eingeführt, und zwar der

$$L_{\infty}^{n \times n}(\Omega, \nu^{-1}) = \left\{ Q \in \mathcal{M}^{n \times n} \mid \|Q\|_{\infty} := n \max_{i,j} \left( \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \frac{|Q_{i,j}(t)|}{\nu(t)} \right) < \infty \right\}. \quad (1.6)$$

Hierbei wird eine Verallgemeinerung der Matrix-Gesamtnorm  $\|\cdot\|_G$  mit  $\|A\|_G := n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$  verwendet, da diese mit der euklidischen Vektornorm  $\|\cdot\|_2$  verträglich (kompatibel) ist, d.h. für alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_G \cdot \|x\|_2$ . Die Gesamtnorm ist ebenfalls mit den  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_{\infty}$  Vektornormen kompatibel. Für  $L_{\infty}^{n \times n}(\Omega, \nu^{-1})$  kann der entsprechende gewichtete Sobolevraum definiert werden.

Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir den Dualraum zum gewichteten Raum  $L_p^n(\Omega, \nu)$  benötigen. Aus diesem Grunde zitieren wir ein Darstellungslemma, siehe ELSTRODT [34], welches zeigt, wie ein lineares stetiges Funktional auf dem Raum  $L_p^n(\Omega, \nu)$  für ein beliebiges  $\sigma$ -endliches<sup>1</sup> Maß  $\mu_{\nu}(\cdot)$  gegeben durch  $\mu_{\nu}(E) = \int_E \nu(t) dt$ , aussieht.

**Lemma 1.** Für jede Funktion  $g(\cdot) \in L_q(\Omega, \nu)$  kann das Funktional  $\phi : L_p(\Omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\phi_g(f) = \int_{\Omega} f(t)g(t)\nu(t)dt \quad (f(\cdot) \in L_p(\Omega, \nu)), \quad (1.7)$$

als eine lineare stetige Form auf  $L_p(\Omega, \nu)$  interpretiert werden. Desweiteren gilt für alle  $p : 1 \leq p < \infty$  die Gleichung  $\|\phi_g\| = \|g\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ , denn das von der Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  erzeugte Maß ist  $\sigma$ -endlich. (Für den Beweis siehe ELSTRODT [34], S. 287)  $\square$

Um die Existenzsätze zu beweisen, wird in den Abschätzungen sehr oft die Höldersche Ungleichung verwendet, vgl. WERNER [98], S. 20, Satz I.1.10:

**Satz 1** (Höldersche Ungleichung, allgemeine Version). Sei  $1 \leq p \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (mit der Konvention  $\frac{1}{\infty} = 0$ ).  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  sei ein Maßraum, und es seien  $f(\cdot) \in L_p(\Omega, \mu)$ ,  $g(\cdot) \in L_q(\Omega, \mu)$ . Dann ist  $(fg)(\cdot) \in L_1(\Omega, \mu)$ , und es gilt

$$\|fg\|_{L_1(\Omega, \mu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} \|g\|_{L_q(\Omega, \mu)}. \quad (1.8)$$

$\square$

---

<sup>1</sup>siehe Anhang B, Definition 28.

## 1.1.2 Einbettungseigenschaften

### Kompakte Einbettungen von Sobolevräumen

Wir zitieren die bekannten Sätze über stetige und kompakte Einbettungen der Sobolevräume, vgl. BLANCHARD&BRÜNING [15], S. 274 – 275, oder ADAMS [1], S. 144, Satz 6.2. Die Beweise entnehme man den angegebenen Literaturquellen.

**Definition 4. (a)** Wir definieren für  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  den **Sobolevraum**

$$W_p^m(\Omega) = \{x \in L_p^n(\Omega) \mid D^\alpha x \in L_p^{\alpha,n}(\Omega), 0 \leq \alpha \leq m\}, \quad (1.9)$$

wobei  $D^\alpha x$  die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet.

**(b)**  $\Omega$  besitzt die **Kegeleigenschaft**, falls es ein endlicher Kegel  $C$  existiert, so dass jeder Punkt  $x \in \Omega$  Spitze eines endlichen Kegels

$$C_x = B(x, r_1) \cap \{x + \lambda(y - x), y \in B(x, r_2), \lambda > 0\} \quad (1.10)$$

ist, der in  $\Omega$  enthalten und zu  $C$  kongruent ist.  $B(x, r)$  bezeichnet dabei die Kugel um Punkt  $x$  vom Radius  $r$ .

**Satz 2** (Sobolevscher Einbettungssatz). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  eine offene nicht notwendig beschränkte Menge und  $1 \leq p < \infty$ ,  $m = 0, 1, \dots$

**a)** Besitzt der Rand von  $\Omega$  die Kegeleigenschaft, so bestehen die folgenden Einbettungen und sie sind stetig:

$$i) \quad mp < n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega), \quad p \leq q \leq q_0 = \frac{np}{n - mp}; \quad (1.11)$$

$$ii) \quad mp = n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega), \quad p \leq q < \infty; \quad (1.12)$$

$$iii) \quad mp > n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega). \quad (1.13)$$

**b)** Für den Unterraum  $(W_p^m)^0(\Omega)$ , der den Abschluß der Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger darstellt, existieren die stetigen Einbettungen  $i) - iii)$  für beliebige offene Teilmengen  $\Omega$ .

**c)** Falls  $\Omega$  beschränkt ist, existieren die stetigen Einbettungen  $i)$  und  $ii)$  in a) und b) auch für die Indizes  $q$ ,  $1 \leq q < p$ .

□

Uns wird insbesondere der Fall  $n = m = 1$ ,  $p = q = 2$  interessieren, d.h. die stetige Einbettung  $W_2^1(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ . Ein wichtiger Satz über kompakte Einbettungen der Sobolevräume ist folgender

**Satz 3** (Rellich-Kondrachov). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ein Gebiet und  $\Omega_0 \subset \Omega$  ein beschränktes Teilgebiet. Ferner sei  $1 \leq p < \infty$  und  $m = 1, 2, \dots$

a)  $\Omega$  habe die Kegeleigenschaft. Dann sind die folgenden Einbettungen kompakt:

$$i) \quad mp < n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega_0), \quad p \leq q < q_0 = \frac{np}{n - mp}; \quad (1.14)$$

$$ii) \quad mp = n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega_0), \quad p \leq q < \infty; \quad (1.15)$$

$$iii) \quad mp > n : \quad W_p^m(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega). \quad (1.16)$$

b) Für den Unterraum  $(W_p^m)^0(\Omega)$  sind die Einbettungen  $i) - iii)$  für beliebige offene Mengen  $\Omega$  kompakt.

c) Falls  $\Omega$  beschränkt ist, können wir in a) und b) für die Einbettungen  $i)$  und  $ii)$   $\Omega_0 = \Omega$  setzen.

□

Hier werden noch weitere nützliche Einbettungseigenschaften für ungewichtete Sobolevräume über unbeschränktem Intervall formuliert. Das folgende Resultat wurde ADAMS [1] entnommen, vergleiche Beispiel 6.43, S. 167, zusammen mit Satz 6.47, S. 170 ff.

**Lemma 2.** Sei  $1 \leq p < \infty$ . Mit einer positiven, nichtwachsenden, stetig differenzierbaren Funktion  $\nu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  definieren wir eine offene Menge  $\Omega_\nu$  als

$$\Omega_\nu = \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 < \xi < \nu(t)\}. \quad (1.17)$$

Dann ist die Einbettung

$$W_p^1(\Omega_\nu) \rightarrow L_p(\Omega_\nu) \quad (1.18)$$

genau dann kompakt, wenn die Funktion  $\nu(\cdot)$  die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu(t + \epsilon)}{\nu(t)} = 0 \quad (1.19)$$

für alle  $\epsilon > 0$  erfüllt.

□

**Bemerkung 1.** Die Bedingung (1.19) wird “decay at infinity“-Bedingung genannt. Sie garantiert sehr schnelles Abfallen der Funktion  $\nu(\cdot)$  im Unendlichen. Wir merken noch an, dass die Exponentialfunktion  $e^{-\rho t}$  mit einem positiven Faktor  $\rho$  diese Bedingung nicht erfüllt. Erst eine Funktion mit einer höheren Abfallsgeschwindigkeit, wie beispielsweise  $e^{-\rho t^2}$ , genügt der Bedingung (1.19.), vgl. die oben angegebene Literaturquelle.

### Kompakte Einbettung der gewichteten Sobolevräume

Wir zitieren nun einen Satz über kompakte Einbettung der gewichteten Sobolevräume über einem unbeschränkten Gebiet, der in ANTOCI [3], Satz 4.3, S. 63, bewiesen wurde.

**Satz 4.** Gegeben sei eine Dichtefunktion  $\nu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  gemäß Definition 1, für die der Subgraph  $\Omega_\nu = \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 < \xi < \nu(t)\}$  betrachtet wird.

Ist die Einbettung

$$I_{\Omega_\nu} : W_p^1(\Omega_\nu) \rightarrow L_p(\Omega_\nu) \quad (1.20)$$

kompakt, so ist die Einbettung

$$I : W_p^1(\Omega, \nu) \rightarrow L_p(\Omega, \nu) \quad (1.21)$$

ebenfalls kompakt. Für den Beweis verweisen wir auf ANTOCI [3], Satz 4.3, S. 63.  $\square$

**Bemerkung 2.** Wir möchten hier anmerken, dass der formulierte Satz ein Spezialfall des in [3] bewiesenen Satzes ist. Der Originalsatz gilt sogar für eine größere Klasse von Gewichtsfunktionen und eine beliebige offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Einige Voraussetzungen wurden hier weggelassen, da sie für eine Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$ , definiert in Definition 1, erfüllt sind.

Der obige Satz führt also die Kompaktheit der Einbettung der gewichteten Sobolevräume über unbeschränktem Intervall auf die Kompaktheit der Einbettung gewöhnlicher Sobolevräume über einem Gebiet einer um eins höheren Dimension zurück.

## 1.2 Schwache Kompaktheit in reflexiven Banachräumen

**Definition 5.** Sei  $X$  ein Banachraum,  $X^*$  sein Dualraum und  $X^{**} := (X^*)^*$  dessen Dualraum, den man Bidualraum nennt. Ist  $x \in X$ , so kann auf kanonische Weise eine Abbildung  $i(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß  $(i(x))(x^*) = x^*(x)$  definiert werden. Offensichtlich wird dadurch eine Abbildung  $i_X : X \rightarrow X^{**}$  definiert, die auch als kanonisch bezeichnet wird. Der Banachraum  $X$  heisst **reflexiv**, wenn die kanonische Abbildung  $i_X$  surjektiv ist, vgl. WERNER [98], S. 105, Definition III.3.3.

Aus der Reflexivität des Raumes  $X$  resultiert die folgende nützliche Isomorphie  $X^{**} \cong X$ , von der wir später Gebrauch machen werden. Der nächste Satz gibt ein Kriterium für schwache Kompaktheit in einem reflexiven Banachraum an und kann in BLANCHARD&BRÜNING [15], S. 264 ff., gefunden werden.

**Satz 5.** Eine Teilmenge  $M$  eines reflexiven Banachraumes  $X$  ist schwach kompakt dann und nur dann, wenn  $M$  schwach abgeschlossen und beschränkt ist.  $\square$

Um den letzten Satz auf gewichtete Sobolevräume anwenden zu können, müssen wir deren Reflexivität nachweisen.

**Satz 6.** Der gewichtete Sobolevraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 < p < \infty$  ist ein separabler reflexiver Banachraum.

**Beweis:** Das Beweisschema ist dasselbe wie im Fall ungewichteter Räume, vgl. [15], S. 268 – 269 ff. Die Separabilität und Reflexivität dieses Funktionenraumes folgt

aus den entsprechenden Eigenschaften der gewichteten Lebesgueräume  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  und der Tatsache, dass ein abgeschlossener Unterraum eines separablen reflexiven Raumes ebenso separabel und reflexiv ist.

Die direkte Summe  $\bigoplus_{|\alpha| \leq 1} L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  der Banachräume, ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_1 = \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|v_\alpha\|_p^p \right)^{1/p}, \quad (1.22)$$

für  $v = (v_\alpha)_{|\alpha| \leq 1} \in \bigoplus_{|\alpha| \leq 1} L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  ist ein Banachraum. Ein Element  $u(\cdot)$  des gewichteten Sobolevraumes  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  kann mit einem Element

$$u = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1} \in \bigoplus_{|\alpha| \leq 1} L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu) \quad (1.23)$$

in Verbindung gebracht werden, wodurch der Sobolevraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  mit einem abgeschlossenen Unterraum von  $\bigoplus_{|\alpha| \leq 1} L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  identifiziert werden kann.

Aufgrund der Separabilität des Banachraumes  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  für  $1 \leq p < \infty$  schließen wir auf die Separabilität des gewichteten Sobolevraumes  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ , denn eine endliche direkte Summe separabler Räume ist wieder separabel.

Der Banachraum  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  ist reflexiv für  $1 < p < \infty$ , weswegen die endliche direkte Summe  $\left( \bigoplus_{|\alpha| \leq 1} L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu), \|\cdot\|_{1,p} \right)$  auch reflexiv ist. Folglich ist der gewichtete Sobolevraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 < p < \infty$  ebenfalls reflexiv. ■

### 1.3 Vergleich der Integralbegriffe

Bei der Formulierung eines Steuerungsproblems in Lagrange oder Bolza Form wird man mit der Frage der Wahl des passenden Integralbegriffs für das Zielfunktional konfrontiert. Obwohl mehrere Integralbegriffe bekannt sind, werden wir im aktuellen Abschnitt nur zwei von ihnen in Betracht ziehen und vergleichen, nämlich die von Lebesgue und Riemann. Aufgrund unterschiedlicher Integralsummenbildungen gibt es bekanntlich Unterschiede zwischen diesen beiden Begriffen. Die Bezeichnungen  $L$ - $\int$  und  $R$ - $\int$  stehen für Lebesgue- bzw. Riemannintegrale.

Ferner sei  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrierbar über jedem abgeschlossenen Intervall  $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ . Dann ist  $f(\cdot)$  genau dann Lebesgue integrierbar über  $\mathbb{R}^+$ , wenn  $|f|$  uneigentlich Riemann integrierbar über  $\mathbb{R}^+$  ist, und es gilt

$$R\text{-}\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} R\text{-}\int_0^T f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} L\text{-}\int_0^T f(t) dt, \quad (1.24)$$

vgl. ELSTRODT [34], S. 150 ff., Sätze 6.1 und 6.3. Ist also die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrierbar über jedem abgeschlossenen Intervall  $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$  und das Lebesguesche Integral  $L\text{-}\int_0^\infty f(t) dt$  hat einen endlichen Wert, so stimmen Lebesguesches und uneigentliches Riemannsches Integrale überein:

$$L\text{-}\int_0^\infty f(t) dt = R\text{-}\int_0^\infty f(t) dt. \quad (1.25)$$

In umgekehrter Richtung gilt der Schluss nicht. Es kann nämlich passieren, wie das berühmte Beispiel mit dem Integralsinus zeigt, dass das Lebesguesche Integral über der Menge  $\mathbb{R}^+$  gar nicht existiert, während das entsprechende uneigentliche Riemannsche Integral bedingt konvergent ist. So gilt für  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$L\text{-}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \infty, \quad R\text{-}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.26)$$

vgl. ELSTRODT [34], S. 152 ff. Offensichtlich kann die bekannte Implikation

$$\text{Riemann} - \text{Integrierbarkeit von } f \implies \text{Lebesgue} - \text{Integrierbarkeit von } f$$

nicht von  $[0, T]$  auf  $[0, \infty)$  übertragen werden. Zur weiteren Diskussion dieser Begriffe im Kontext der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont kehren wir im Kapitel 3 zurück. Ausser den zwei Integralbegriffen, die hier betrachtet wurden, sind viele weitere Integrationstheorien bekannt, beispielsweise die von Daniel, Riemann-Stieltjes, Henstock-Kurzweil, Perron and McShane, vgl. KURTZ&SWARTZ [58], auf die wir aber nicht eingehen werden.



# Kapitel 2

## Steuerungsaufgaben mit unendlichem Zeithorizont: Überblick

### 2.1 Motivation und Anwendungen

Aus den zahlreichen Anwendungen der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont in Wirtschaft, Ökologie, Biologie, Ingenieurwesen und Kontinuumsmechanik werden wir hier nur einige vorstellen. Man beachte, dass die aus der Liteatur zitierten Modelle in den Originalquellen keine Hinweise auf den verwendeten Integralbegriff im Zielfunktional enthalten und nur hier entweder explizit mit der Interpretation des Integrals versehen worden sind oder es wurde eine Empfehlung dazu ausgesprochen.

#### 2.1.1 Optimales Kapitalwachstum

Seit der Pionierarbeit von Ramsey wird das Problem des optimalen Kapitalwachstums auf unendlichem Zeitintervall betrachtet. Eine der vielen Verallgemeinerungen des von Ramsey formulierten Modells stammt von Cass und sieht wie folgt aus, vgl. CASS [23], CASS [24]:

$$J_{\infty}(k, z, c) = L \int_0^{\infty} U(c(t)) e^{-\rho t} dt \longrightarrow \max ! \quad (2.1)$$

$$f(k(t)) = z(t) + c(t); \quad (2.2)$$

$$\dot{k}(t) = z(t) - \delta k(t); \quad (2.3)$$

$$k(0) = k_0. \quad (2.4)$$

Hier sind die Funktionen  $f(\cdot)$  und  $U(\cdot)$ , die die Produktionsfunktion bzw. die Nutzenfunktion bezeichnen, gegeben, während die Investition  $z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , der Konsum  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  und der Kapitalstock  $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  die Optimierungsvariablen sind. Das Funktional (2.1) beschreibt den Gesamtnutzen für die Gesellschaft, wobei  $\rho > 0$  die Diskontrate ist. Die Aufgabe der Kapitalwirtschaft besteht darin, das Kapital so zu kontrollieren, dass der Nutzen maximal wird. Die Konstante  $\delta > 0$  bezeichnet die Abschreibungsrate des Kapitals. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Daten

der Aufgabe, unter anderem Konkavität der Produktions- und Nutzenfunktionen, kann gezeigt werden, dass es ein konstantes Kapitalstockniveau  $\bar{k}$  existiert, so dass „für alle nichtnegativen Werte von  $\rho$  die optimale Trajektorie über dem unendlichen Zeitintervall existiert und gegen das stationäre Niveau  $\bar{k}$  konvergiert, was für jeden Anfangskapitalstock  $k_0$  gilt.“, vgl. CARLSON ET AL. [20], S. 8. Die optimale Steuerung besitzt also einen stabilisierenden Effekt in dem Sinne, dass die optimale Zustandstrajektorie asymptotisch stabil ist, d.h. die Phasentrajektorie konvergiert im Phasenraum gegen den Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems (2.2) – (2.4). Aus dieser Eigenschaft wird klar, dass die Funktion  $k(\cdot)$  nicht in einem gewöhnlichen Sobolevraum  $W_p^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  enthalten sein kann, sondern zum Beispiel zu dem gewichteten Sobolevraum  $W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  gehört, da für jede Funktion  $f(\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}^+)$  die Bedingung  $\text{esslim}_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  gilt.

Nicht unwichtig ist die Frage der Existenz und Endlichkeit des Integrals in (2.1), die nicht ohne weiteres gegeben sind. Für welche Funktionen  $k(\cdot)$  (aus welchem Funktionenraum) ist das Integral endlich? Das Integral im Zielfunktional dieses Modells wird im Lebesgueschen Sinne interpretiert.

### 2.1.2 Produktions-Lagerhaltungsmodell

Viele produzierende Unternehmen benutzen Produktions-Lagerhaltungssysteme, um Änderungen der Nachfrage auf Produkte zu kontrollieren. Dieses System besteht aus einem Werk und einem Lager, in welchem die Produkte gelagert werden, die nicht sofort verkauft werden, vgl. SETHI&THOMPSON [91], S. 154 ff. Ab dem Moment, wenn ein Produkt in das Lager gelegt worden ist, verursacht es Kosten zweier Arten:

- (i) Kosten der physischen Lagerung des Produktes, seine Versicherung usw.;
- (ii) Kosten für die Investitionsmöglichkeiten, die bei einer Investition in unverkaufte Waren verloren gehen.

Das Vorhandensein der Produkte am Lager hat folgende Vorteile: erstens, sie sind sofort verfügbar, um einer Nachfrage entgegenzukommen; zweitens, die überflüssige Produktion wird in Perioden mit niedrigeren Nachfrageraten am Lager gelagert und damit für einen Verkauf während Perioden mit höheren Nachfrageraten bereitgestellt. Dies erlaubt üblicherweise das Nutzen eines kleineren Werkes als es andernfalls notwendig wäre und reduziert die Schwierigkeiten mit der Verwaltung des Systems. Die Optimierungsaufgabe ist es, den Profit von Produktion und die Kosten der Lagerhaltung in ein Gleichgewicht zu bringen.

Betrachtet wird eine Fabrik, die eine homogene Ware produziert und einen Lager für angefertigte Waren besitzt. Für den Modellaufbau benötigt man folgende Größen, vgl. SETHI&THOMPSON [91], S. 154 ff.:

- $b(t)$  – Lagerbestand zum Zeitpunkt  $t$ ;
- $p(t)$  – Produktionsrate zum Zeitpunkt  $t$ ;
- $v(t)$  – Verkaufsrate zum Zeitpunkt  $t$ ;
- $\hat{b}$  – Zielniveau des Lagerbestandes;
- $b_0$  – Lagerbestand am Anfang  $t = 0$ ;
- $\hat{p}$  – Zielniveau der Produktion;
- $h$  – Lagerhaltungskostenkoeffizient;  $h > 0$ ;
- $c$  – Produktionskostenkoeffizient;  $c \geq 0$ ;
- $\rho$  – konstante nichtnegative Diskontrate;  $\rho \geq 0$ .

Das erwünschte Lagerbestandsniveau  $\hat{b}$  kann als ein Sicherheitsbestand interpretiert werden, den die Firma immer zur Verfügung haben möchte.  $\hat{b}$  könnte zum Beispiel zwei durchschnittliche Monatsverkaufsraten oder auch 100 Einheiten der produzierten Ware sein. Ähnlich bedeutet das gesetzte Produktionsniveau  $\hat{p}$  das effizienteste Niveau, bei dem die Firma laufen soll. Die Funktionen  $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  stellen die Optimierungsvariablen dar, wobei  $b(\cdot)$  die Zustands- und  $p(\cdot)$  die Steuerungsfunktion sind, und  $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet die Verkaufsratenfunktion.

Mit den eingeführten Bezeichnungen können wir nun die Bedingungen des Modells formulieren. Die Differentialgleichung des Bestandes

$$\dot{b}(t) = p(t) - v(t), \quad b(0) = b_0, \quad (2.5)$$

besagt, daß das Inventar zur Zeit  $t$  durch die Produktionsrate  $p(t)$  steigt und sich durch die Verkaufsrate  $v(t)$  vermindert. Das Zielfunktional

$$J_\infty(b, p) = L \int_0^\infty \left( \frac{h}{2} (b(t) - \hat{b})^2 + \frac{c}{2} (p(t) - \hat{p})^2 \right) e^{-\rho t} dt \longrightarrow \min! \quad (2.6)$$

bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß man das Niveau des Lagerbestandes  $b(t)$  sowie die Produktionsrate  $p(t)$  so nahe wie möglich am gewünschten Niveau  $\hat{b}$  bzw.  $\hat{p}$  halten will. Die quadratischen Terme  $\frac{h}{2}(b(t) - \hat{b})^2$  und  $\frac{c}{2}(p(t) - \hat{p})^2$  bestrafen die Entfernung von den gesetzten Zielwerten. Wie im vorherigen Abschnitt liegt auch in diesem Problem die optimale Trajektorie nicht in dem ungewichteten, sondern in einem gewichteten Sobolevraum mit der Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$ , festgelegt durch  $\nu(t) = e^{-\rho t}$ , vgl. PICKENHAIN&LYKINA [78], S. 230 ff. Da das Funktional der Norm des gewichteten Raumes  $W_p^1(\mathbb{R}^+, \tilde{\nu})$ ,  $\tilde{\nu}(t) = e^{-\rho t}$  sehr ähnelt, scheint die Wahl dieser Norm sehr natürlich zu sein. Genauso wie im Problem des optimalen Kapitalwachstums wird das Integral im Zielfunktional als Lebesguesches Integral verstanden.

In dem folgenden Beispiel dagegen ist es nicht von vorn herein klar, welcher Integraltyp die zu modellierenden Verhältnisse am besten widerspiegelt.

### 2.1.3 Schädlingsbekämpfung

Seien  $x(\cdot)$  und  $y(\cdot)$  die Anzahl der Populationsmitglieder zweier aufeinander wirkender Arten, wobei  $x$  ein Schädling und  $y$  sein natürlicher Räuber ist. Die dynamische Entwicklung dieser Arten unterliegt einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem vom Lotka-Volterra Typ, vgl. CARLSON ET AL. [20], S. 4 ff., vgl. auch GOH ET AL. [39], S. 265 ff.:

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)), \quad x(0) = x_0; \quad (2.7)$$

$$\dot{y}(t) = y(t)(x(t) - 1), \quad y(0) = y_0. \quad (2.8)$$

Es ist bekannt, dass dieses System einen nichttrivialen Gleichgewichtspunkt besitzt, nämlich  $\hat{x} = \hat{y} = 1$ . Die Trajektorien werden aber von diesem stationären Punkt nicht angezogen, sondern kreisen um den Punkt in einer Art konservativer Bewegung. Angenommen, die Population  $x(\cdot)$  wird mit einer Rate  $0 \leq u \leq U_{\max}$  durch die Bespritzung mit einem Pestizid bekämpft. Gleichzeitig wird die Population des Räubers  $y(\cdot)$  mit einer Rate  $cu(\cdot)$  mitbeeinflusst, und die Dynamik des gesteuerten Systems nimmt folgende Gestalt an:

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t) - u(t)), \quad x(0) = x_0; \quad (2.9)$$

$$\dot{y}(t) = y(t)(x(t) - 1 - cu(t)), \quad y(0) = y_0. \quad (2.10)$$

Das Kostenfunktional in dem Zeitintervall  $[0, T]$ ,

$$J_T(x, y, u) = \int_0^T (x(t) + \alpha u(t)) dt \longrightarrow \min! \quad (2.11)$$

stellt eine Balance zwischen dem Schaden durch Schädlinge und den Kosten für ihre Bekämpfung durch die Steuerungsrate  $\alpha > 0$  her. Dennoch besteht kein natürlicher Grund für die Beschränkung des Zeitintervalls, in dem das System optimal gesteuert werden soll, CARLSON ET AL. [20], S. 5. Über dem unendlichen Intervall wird aber das Lebesguesche Integral

$$\int_0^{\infty} (x(t) + \alpha u(t)) dt \quad (2.12)$$

unendlich für jede zulässige Steuerung  $u(\cdot)$ . Die Normierung bezüglich  $x(\cdot)$  geschieht durch das Ersetzen des obigen Kostenfunktionals durch

$$\int_0^{\infty} ((x(t) - \hat{x}) + \alpha u(t)) dt, \quad (2.13)$$

da die Anzahl der Populationsmitglieder  $x(t)$  um das Niveau  $\hat{x}$  schwankt. Deshalb soll das Integral (2.13) im Riemannsches Sinne interpretiert werden, denn die absolute Konvergenz des Integrals und somit die Existenz des entsprechenden Integrals im Lebesgueschen Sinne kann nicht garantiert werden.

### 2.1.4 Regulatorproblem

Das sehr gut bekannte Regulatorproblem mit zahlreichen Anwendungen im Ingenieurwesen wird in diesem Abschnitt vorgestellt, entnommen CARLSON ET AL. [20], S. 1 ff. Man betrachte das lineare dynamische System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad (2.14)$$

$$y(t) = Cx(t); \quad (2.15)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.16)$$

mit  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  als Zustands-,  $u(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  als Steuerungs- und  $y(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  als Outputfunktion.  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien Matrizen der Dimensionen  $n \times n$ ,  $n \times m$  und  $p \times n$ .

Betrachtet man dieses dynamische System auf dem endlichen Intervall  $[0, T]$ , so kann für  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$  ein Zielfunktional

$$J_T(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt \longrightarrow \min ! \quad (2.17)$$

definiert werden, welches unter den Nebenbedingungen (2.14) – (2.16) minimiert werden soll. Dabei sind  $Q$  und  $R$  positiv definite konstante  $p \times p$  bzw.  $m \times m$  Matrizen. Unter den Voraussetzungen der Beobachtbarkeit<sup>1</sup> und Steuerbarkeit<sup>2</sup> des Systems (2.14) – (2.16), vgl. KALMAN [48], besitzt das Steuerungsproblem eine in  $x(\cdot)$  lineare Feedbacksteuerung

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TK(t)x^*(t) \quad (2.18)$$

als optimale Lösung, wobei die symmetrische und positiv definite  $n \times n$  Matrix  $K(t)$  als Lösung der Matrix Riccati Differentialgleichung

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A^TK(t) + K(t)BR^{-1}B^TK(t) - C^TQC \quad (2.19)$$

mit der Randbedingung

$$K(T) = 0 \quad (2.20)$$

bestimmt ist, vgl. CARLSON ET AL. [20], S. 2 oder ATHANS&FALB [9], wo man auch die Anwendungen des Modells nachschlagen kann. Die optimale Zustandsfunktion

---

<sup>1</sup>Das System ist **beobachtbar**, wenn bei bekannter Steuerungsfunktion  $u(\cdot)$  und bekannten Matrizen  $A$  und  $C$  aus dem Verlauf des Ausgangsvektors  $y(t)$  über ein endliches Zeitintervall  $0 \leq t \leq t_1$  der Anfangszustand  $x_0$  eindeutig bestimmt werden kann, vgl. KALMAN [48], S. 104 bzw. KALMAN [47].

<sup>2</sup>Vollständig **zustandssteuerbar** (teilweise auch erreichbar genannt) heisst ein lineares System, wenn es für jeden Anfangszustand  $x_0$  eine Steuerungsfunktion  $u(\cdot)$  gibt, die das System innerhalb einer beliebigen endlichen Zeitspanne  $0 \leq t \leq t_e$  in einen beliebigen Endzustand  $x_e$  überführt, vgl. KALMAN [48], S. 107.

Ein lineares autonomes System (2.14) – (2.16) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  den Rang  $n$  hat, vgl. KALMAN [48], S. 107 f.

$x^*(\cdot)$  ist als Lösung des folgenden Anfangswertproblems gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= (A - BR^{-1}B^TK(t))x^*(t); \\ x^*(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Der optimale Wert des Zielfunktional ist dabei

$$J_T(x_0, u^*) = \frac{1}{2}x_0^TK(0)x_0. \quad (2.22)$$

Da es vom Gesichtspunkt eines Ingenieurs aus sehr schwer ist eine zeitabhängige Funktion  $K(\cdot)$  zu realisieren, wurde nach Bedingungen gesucht, unter denen diese Funktion konstant ist. Dazu hat R. E. Kalman, vgl. [48], das asymptotische Verhalten der Lösung des Randwertproblems (2.19) – (2.20) untersucht und gezeigt, dass unter einer Steuerbarkeitsannahme für das System (2.14) – (2.16) der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \hat{K}$  existiert. Setzt man zusätzlich die Beobachtbarkeit des dynamischen Systems voraus, so existiert für das Steuerungsproblem der Minimierung des Zielfunktional

$$J_\infty(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt \longrightarrow \min! \quad (2.23)$$

im Zusammenhang mit dem System (2.14) – (2.16) eine eindeutig bestimmte optimale Feedbacksteuerung gegeben durch

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x^*(t) \quad (2.24)$$

mit einer konstanten Lösung  $\hat{K}$  der algebraischen Matrix Riccatischen Gleichung

$$-\hat{K}A - A^T\hat{K} + \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} - C^TQC = 0, \quad (2.25)$$

siehe auch CARLSON ET AL. [20], S. 3. Der optimale Funktionswert beträgt

$$J_\infty(x_0, u^*) = \frac{1}{2}x_0^T\hat{K}x_0. \quad (2.26)$$

Ausserdem hat R. E. Kalman gezeigt, dass die Eigenwerte der Matrix  $A - BR^{-1}B^T\hat{K}$  negative Realteile besitzen, was die asymptotische Stabilität des optimal gesteuerten dynamischen System gewährleistet. Es sei noch bemerkt, dass die Endbedingung (2.20) von der Lösung des Steuerungsproblems auf unendlichem Zeitintervall nicht erfüllt ist, selbst nicht asymptotisch bei  $T \rightarrow \infty$ . Hiermit wird klar, dass die Transversalitätsbedingung nicht von dem Problem auf dem Intervall  $[0, T]$  auf das Problem auf unendlichem Intervall  $[0, \infty)$  übertragen oder fortgesetzt werden kann, das ein Problem darstellt, welches allen Steuerungsaufgaben mit unendlichem Zeithorizont eigen ist. Durch die Steuerbarkeit des dynamischen Systems wird die Existenz und Endlichkeit der Integralwerte im Zielfunktional (2.23) erzwungen, woraus und aufgrund der asymptotischen Stabilität der Lösung auf die Lebesguesche Interpretation des Integrals geschlossen wird.

### 2.1.5 Globale Klimaänderung und nachhaltige Wirtschaft

Die Erkenntnisse über deterministische Probleme der optimalen Steuerung mit unendlichem Zeithorizont sind desweiteren wichtig, weil sie bei der Erforschung von so genannten stückweise deterministischen Steuerungsproblemen ausgenutzt werden können. Ein Beispiel solcher stückweise deterministischen Probleme stellt das Problem der integrierten Bewertung der globalen Klimaveränderung aus der Sicht der Optimierung über einem unbeschränkten Zeitintervall dar, aufgestellt von A. Haurie in [43], S. 125 ff. Hier werden die Wechselwirkungen des Kapitalwachstums und der  $CO_2$ -Emissionen und somit globaler Klimaveränderung durch ein Steuerungsproblem modelliert, in dem Schaltungen zwischen mehreren Dynamiken möglich sind, und diese geschehen zufallsabhängig. Die Zeitpunkte der Schaltungen bilden also einen Zufallspunktprozess, wobei sich die Optimierungsgrößen zwischen zwei Schaltungen deterministisch verhalten. Unter gewissen Annahmen besitzt das dynamische System auf jedem einzelnen Teilintervall sogar die "Turnpike"-Eigenschaft, zu der wir im Abschnitt 3.4 zurückkehren werden. Vereinfacht formuliert hat das beschriebene Steuerungsproblem folgende Gestalt:

$$J_\infty(x_0, N_0, \gamma) = E_\gamma \left[ \int_0^\infty L_{N(t)}(x(t), u(t)) e^{-\rho t} dt \mid N_0, x_0 \right] \longrightarrow \max ! \quad (2.27)$$

$$\dot{x}(t) = f_{N(t)}(t, x(t), u(t)); \quad (2.28)$$

$$u(t) \in U_{N(t)}; \quad (2.29)$$

$$q_{ij}(x, u)dt + o(dt) = P[N(t+dt) = j \mid N(t) = i, x(t) = x, u(t) = u], \quad (2.30)$$

wobei  $N(t)$  hier die diskrete Variable ist, die die Nummer des dynamischen Modus, der zum Zeitpunkt  $t$  aktiv ist, bezeichnet.  $P$  und  $E$  stehen standartgemäß für Wahrscheinlichkeit bzw. Erwartungswert. Hier wird die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Modus  $i$  in den Modus  $j$  angegeben, während mit  $\gamma$  Steuerungspolitik bezeichnet wird, die an die Geschichte des Prozesses  $(x(\cdot), N(\cdot))$  angepasst ist. Ein dynamischer Modus wird typisch mit bestimmten Mustern der Klima- und/oder Technologienentwicklung assoziiert. Die hybride Zustandsvariable  $x(\cdot)$  und die Steuervariable  $u(\cdot)$  bestehen u.a. aus folgenden Komponenten: produktiver Kapitalstock, Masse der  $CO_2$ -Emissionen, Lufttemperatur, Tiefozeantemperatur bzw. Investitionen und Koeffizient der Reduktion der Emissionen. Der technische Progress wird hier durch die Menge  $I$  der Modi und den Zufallsprozess  $\{N_i\}$  der Schaltungen zwischen Modi ausgedrückt. Die Lösung des obigen Problems kann auf die Lösung einer Familie deterministischer Probleme mit unendlichem Zeithorizont zurückgeführt werden, wobei die optimale Steuerung jedes einzelnen deterministischen Problems einen stabilisierenden Effekt hat und versucht das entsprechende dynamische System zum Gleichgewicht zu bringen. In diesem Modell ist daher die Lebesguesche Interpretation des Integrals adäquat.

Wir nehmen ein Stück der Diskussion des nächsten Kapitels vorweg und behaupten folgendes: Ist das dynamische System bei einer Aufgabe vom obigen Typ so beschaffen, dass der Integrand  $L$  sehr starken Schwankungen unterliegt, so kann

durchaus sinnvoll sein, das uneigentliche Riemannsche Integral in der Modellierung zu verwenden, um die Existenz endlicher Werte im Zielfunktional zu erzwingen.

## 2.2 Aufgabenstellung

Das grundlegende Optimalsteuerungsproblem, auf welches sich alle theoretischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit beziehen, besteht in der Minimierung des Integralfunktional

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (2.31)$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$  mit der vorgeschriebenen analytischen Güte

$$(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu), \quad (2.32)$$

deren dynamische Entwicklung der gegebenen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); \quad (2.33)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.34)$$

zu fast jedem Zeitpunkt  $t > 0$  unterliegt und die ausserdem die Beschränkungen

$$|x(t)| \leq \beta(t), \quad \text{mit } \beta(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (2.35)$$

$$u(t) \in U \subset \text{Comp}(\mathbb{R}^m) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.36)$$

erfüllen.  $U$  ist ein Kompaktum des  $\mathbb{R}^m$ , und  $\nu(\cdot)$ ,  $\tilde{\nu}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sind Gewichtsfunktionen gemäß Definition 1. Dabei nennt man die Funktionen  $x(\cdot)$  und  $u(\cdot)$  Zustands- bzw. Steuerungsfunktion. Die Funktionen  $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  werden als stetig in allen ihren Argumenten vorausgesetzt. Ausserdem sei  $r$  stetig differenzierbar im zweiten und dritten Argument. Die Steuerungsfunktion erlaubt es in den Prozess dynamisch einzugreifen, um seinen Verlauf so zu ändern, dass das Integralfunktional, auch Zielfunktional genannt, minimalen Wert erreicht.

**Definition 6. (zulässiger Prozess für  $(\mathbf{P}_\infty)$ )** Das Steuerungsproblem (2.31) – (2.36) werden wir mit  $(\mathbf{P}_\infty)$  bezeichnen. Ein Prozess  $(x, u)$  wird **zulässig** für das Steuerungsproblem  $(\mathbf{P}_\infty)$  genannt, falls er den Bedingungen (2.32) – (2.36) genügt und einen endlichen Wert des Zielfunktional (2.31) liefert.

Bislang hatten wir nicht präzisiert, in welchem Sinne das Integral in dem Zielfunktional gemeint ist. Dennoch ist dies erheblich für die Optimalität einer Lösung, wie das nächste Kapitel deutlich zeigen wird. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf zwei mögliche Interpretationen des Integrals, nämlich auf die Lebesguesche und auf die Riemannsche.

**Definition 7.** Das Problem  $(\mathbf{P}_\infty)$  mit einem Lebesgueschen oder einem uneigentlichen Riemannschen Integral im Zielfunktional wird mit  $(\mathbf{P}_\infty^L)$  bzw.  $(\mathbf{P}_\infty^R)$  bezeichnet.

Die Definition eines zulässigen Prozesses wird wie folgt konkretisiert:

**Definition 8. (zulässiger Prozess für  $(\mathbf{P}_\infty^L)$ )** Ein Prozess  $(x, u)$  wird **zulässig** für das Steuerungsproblem  $(\mathbf{P}_\infty^L)$  genannt, falls er den Bedingungen (2.32) – (2.36) genügt und das Lebesguesche Integral

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (2.37)$$

existiert und endlich ist.

**Definition 9. (zulässiger Prozess für  $(\mathbf{P}_\infty^R)$ )** Ein Prozess  $(x, u)$  wird **zulässig** für das Steuerungsproblem  $(\mathbf{P}_\infty^R)$  genannt, falls er den Bedingungen (2.32) – (2.36) genügt und das uneigentliche Riemannsche Integral

$$J_\infty^R(x, u) = R \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (2.38)$$

konvergent ist.

**Bemerkung 3.** Nimmt man die Formulierung einer  $(P_T)$  Aufgabe mit endlichem Zeithorizont  $[0, T]$  mit Funktionenräumen  $(x, u) \in W_p^{1,n}[0, T] \times L_p^m[0, T]$ ,  $p \in [1, \infty]$ , vgl. beispielsweise FELGENHAUER [37], S. 8; MALANOWSKI ET AL. [68], S. 596, und setzt diese auf  $\mathbb{R}^+$  fort, so erhält man anstelle der Bedingung (2.32) eine der folgenden Bedingungen:  $(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+) \times L_p^m(\mathbb{R}^+)$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $(x, u) \in W_\infty^{1,n}(\mathbb{R}^+) \times L_\infty^m(\mathbb{R}^+)$ . In der Fachliteratur wird sehr oft die Forderung der analytischen Güte  $(x, u) \in AC(\mathbb{R}^+) \times L_\infty^m(\mathbb{R}^+)$ , vgl. u.a. DMITRUK&KUZ'KINA [31], auferlegt oder sie wird gar weggelassen, vgl. z. B. GOH ET AL. [39], S. 277 ff. Die Beispiele aus dem vorherigen Abschnitt haben jedoch gezeigt, dass die Wahl eines passenden Funktionenraumes für die Zustandsfunktion  $x(\cdot)$  sehr sorgfältig überlegt sein muss. In vielen Fällen liegt die optimale Zustandsfunktion in keinem der gewöhnlichen, ungewichteten, Sobolevräume, sondern eher in einem gewichteten Sobolevraum mit einer gewissen Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$ , die in jedem konkreten Fall neu gewählt wird. Eine ähnliche Situation tritt für die Steuerungsfunktion  $u(\cdot)$  ein, da eine beispielsweise stückweise konstante, von Null verschiedene, Funktion in keinem der ungewichteten  $L_p^m(\mathbb{R}^+)$  – Räume über unendlichem Intervall liegt. Darüber hinaus muss der Zustandsraum so gewählt werden, dass die **Kozustandsfunktion**  $y(\cdot)$ , auch **adjungierte Funktion** genannt, seinem Dualraum angehört und die Menge aller  $(x, u)$ , die den Restriktionen (2.32) – (2.36) genügen, eine Menge mit nichtleerem Inneren bildet. Die mit einer Dichtefunktion gewichteten Funktionenräume sind einerseits “größer“, denn die Inklusionen  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \supset W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+)$ ,  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu) \supset L_p^m(\mathbb{R}^+)$  gelten. Das heisst, es ist eventuell möglich, den Optimalwert im Vergleich zur kleineren zulässigen Menge, gegeben durch ungewichtete Funktionenräume, zu verbessern. Andererseits, da ein  $x(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  im Fall einer integrierbaren Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  nicht unbedingt nach oben beschränkt sein muss, wird die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$  gezwungen, noch schneller gegen Null zu streben,

was auch sehr sinnvoll erscheint und mit bekannten Transversalitätsbedingungen korrespondiert. Diesen Überlegungen folgend besteht einer der Schlüsselpunkte unserer Theorie in der Wahl eines gewichteten Sobolevraumes  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und eines gewichteten Lebesgueraumes  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  als Zustands- bzw. Steuerungsraum.

**Bemerkung 4.** Die Zustandsbeschränkung (2.35) könnte zwar, wie jede andere Zustandsbeschränkung, bei der numerischen Lösung des Problems Schwierigkeiten bereiten, aber sie schränkt die Geschwindigkeit des Wachstums einer Zustandstrajektorie ein und garantiert damit die Existenz eines optimalen Prozesses. Dazu kommen wir noch später im Kapitel 6 bei der Untersuchung der Frage nach der Existenz der optimalen Lösungen.

**Bemerkung 5.** In der Aufgabenstellung kommen also drei Gewichtsfunktionen vor, nämlich  $\tilde{\nu}(\cdot)$  aus dem Zielfunktional,  $\nu(\cdot)$  für die Gewichtung des Prozesses und  $\beta(\cdot)$  zur Kontrolle des Wachstums der zulässigen Trajektorien. Diese Funktionen werden in jedem einzelnen Modell erneut festgelegt und an die Anwendung angepasst. In den Problemen der Kapitalwachstumstheorie eignet sich die Wahl  $\tilde{\nu}(t) = e^{-\rho t}$  und womöglich auch  $\nu \equiv \tilde{\nu}$ . Die Wahl der Funktion  $\beta(\cdot)$  richtet sich logischerweise nach der Wahl der Funktion  $\nu(\cdot)$ . Weitere Beispiele werden in den Kapiteln 11 und 12 betrachtet.

## 2.3 Optimalitätskriterien

### 2.3.1 Globale Optimalität

In Problemen mit unendlichem Zeithorizont ist die Existenz und Endlichkeit (im Fall eines Lebesgueschen Integrals) oder Konvergenz (im Fall eines Riemannschen uneigentlichen Integrals) des Integrals nicht a priori gegeben. Unter gewissen Voraussetzungen an ein lineares gesteuertes System, wie Steuerbarkeit, kann man die Existenz und Endlichkeit erzwingen. Für ein nichtlineares dynamisches System hat man diese Möglichkeit im Allgemeinen nicht. Um die Trajektorien im Fall eines bestimmt oder gar unbestimmt divergenten Integrals im Zielfunktional miteinander vergleichen zu können, wurden mehrere Optimalitätsdefinitionen, auch Optimalitätskriterien genannt, für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont eingeführt. Zuerst werden hier einige Kriterien aus der Literatur zitiert und nach anknüpfender Diskussion werden die Optimalitätskriterien definiert, die für diese Arbeit notwendig sind. Die nachfolgenden Definitionen können mit CARLSON ET AL. [20], S. 9 ff., und FEICHTINGER&HARTL [35], S. 186, verglichen werden. Für jeden Prozess  $(x, u)$ , der die Bedingungen (2.32) – (2.36) erfüllt, wird zuerst ohne Präzisierung des Integraltyps der Performanceindex

$$J_T(x, u) = \int_0^T r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (2.39)$$

eingeführt. Dann nennt man den Prozess  $(x^*, u^*)$

- (i) **überholungsoptimal** (“overtaking optimal“, von Weizsäcker, 1965), falls es ein  $T_0 > 0$  gibt, so dass für alle  $T > T_0$  und jeden Prozess  $(x, u)$ , der die Bedingungen (2.32) – (2.36) erfüllt, die Ungleichung

$$J_T(x^*, u^*) \geq J_T(x, u) \quad (2.40)$$

gültig ist.

- (ii) **stark optimal** für  $(P_\infty)$ , falls

$$J_\infty(x^*, u^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x^*, u^*) < \infty, \quad (2.41)$$

und für jeden Prozess  $(x, u)$ , der die Bedingungen (2.32) – (2.36) erfüllt,

$$J_\infty(x^*, u^*) \geq \limsup_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u) \quad (2.42)$$

gilt.

- (iii) **“catching up“ optimal** (Gale, 1967), falls für jeden Prozess  $(x, u)$ , der die Bedingungen (2.32) – (2.36) erfüllt, die Ungleichung

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x^*, u^*) - J_T(x, u)\} \geq 0 \quad (2.43)$$

erfüllt ist. Das heisst  $\forall \epsilon > 0 \exists T_0 > 0$ , so dass  $\forall T > T_0(\epsilon, (x, u))$  die Bedingung  $J_T(x^*, u^*) > J_T(x, u) - \epsilon$  gilt.

- (iv) **sporadisch “catching up“ optimal** (Halkin, 1974), falls für jeden Prozess  $(x, u)$ , der die Bedingungen (2.32) – (2.36) erfüllt, die Ungleichung

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x^*, u^*) - J_T(x, u)\} \geq 0 \quad (2.44)$$

gilt. Das heisst  $\forall \epsilon > 0 \forall T_0 > 0$  existiert ein  $T^* = T^*(\epsilon, T_0, (x, u)) > T_0$  so dass die Bedingung  $J_{T^*}(x^*, u^*) > J_{T^*}(x, u) - \epsilon$  gilt.

- (v) **endlich optimal**, falls  $\forall T > 0$  und für jeden auf  $[0, T]$  zulässigen Prozess  $(x, u)$  mit  $x^*(T) = x(T)$  die Ungleichung

$$J_T(x^*, u^*) \geq J_T(x, u) \quad (2.45)$$

gilt.

Für die oben eingeführten Kriterien der globalen Optimalität gilt folgende Implikationskette

$$\begin{aligned} \text{berholungsoptimal} &\implies \text{stark optimal} \implies \\ &\implies \text{“catching up“ optimal} \implies \\ &\implies \text{sporadisch “catching up“ optimal} \implies \\ &\implies \text{endlich optimal.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

**Bemerkung 6.** Wir weisen darauf hin, dass die angegebenen Optimalitätsdefinitionen sich auf das Problem der Maximierung des Zielfunktional (2.31) beziehen. Bei einer Minimierungsaufgabe müssen die Ungleichungen entsprechend angepasst werden.

Im Fall eines endlichen Zeitintervalls  $[0, T]$  fallen alle Definitionen zusammen, während sie auf dem Intervall  $[0, \infty)$  im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Existiert das Integral  $J_\infty(x^*, u^*) < \infty$ , so fallen die Definitionen der “catching up“ und “sporadischen catching up“ Optimalität zusammen. Die Optimalität im Sinne des Überholkriteriums von von Weizsäcker ist jedoch stärker als die erwähnten beiden Kriterien, und im Kapitel 11 präsentieren wir ein Beispiel, das diesen Sachverhalt illustriert. Der Name dieses Kriteriums ist selbsterklärend und deutet darauf hin, dass der Performanceindex  $J_T(x, u)$  jedes beliebigen zulässigen Prozesses  $(x, u)$  von dem optimalen Prozess  $(x^*, u^*)$  in endlicher Zeit eingeholt wird, siehe die schematische Abbildung 2.1. Ferner ist ein Prozess  $(x^*, u^*)$  optimal im Sinne des Überholungskriteriums, so ist für alle hinreichend großen  $T > \tau$  die Einschränkung  $(x^*|_{[0, T]}, u^*|_{[0, T]})$  optimal für die entsprechende Aufgabe  $(P_T)$ . Die einfachste Definition ist die ei-

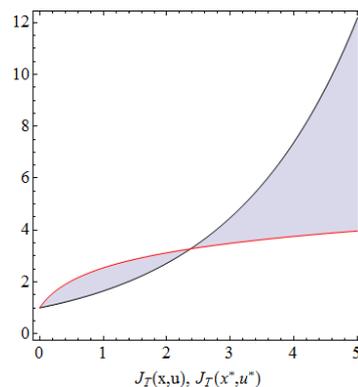


Abbildung 2.1: Überholung des Prozesses  $(x, u)$  (rot) vom Prozess  $(x^*, u^*)$  (schwarz).

nes stark optimalen Prozesses. Sie ergibt jedoch nur Sinn, wenn für alle zulässigen Prozesse der Performanceindex  $J_T(x, u)$  von oben beschränkt bleibt.

In dieser Arbeit beabsichtigen wir nur die Steuerungsprobleme zu betrachten, in denen das Integral im Zielfunktional existiert und einen endlichen Wert besitzt bzw. es werden a priori Bedingungen an die Daten der Aufgabe gestellt, die diese Existenz und Endlichkeit garantieren.<sup>3</sup> Daher werden alle in der Arbeit bewiesenen Aussagen die gewöhnliche Optimalität betreffen. Andere vorhandene Optimalitätsdefinitionen, wie beispielsweise die gleichmäßige Optimalität, verträgliche Optimalität o.ä., werden hier nicht diskutiert. Wir verweisen an dieser Stelle auf das Buch CARLSON ET AL. [20], S. 12 ff.

Da die wesentlichen theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit für Steuerungsprobleme mit Lebesguescher Interpretation des Integrals formuliert werden, setzen wir

<sup>3</sup>Man vergleiche auch die Definition eines zulässigen Prozesses.

ab sofort durchgehend voraus, dass das Integral in (2.31), wenn nichts anderes explizit erwähnt wird, im Lebesgueschen Sinne interpretiert wird und einen endlichen Wert hat. Für den Fall eines endlichen Zielfunktionswertes mit einem Integral im Lebesgueschen Sinne hat man dann zwischen folgenden Optimalitätsdefinitionen zu unterscheiden.

**Definition 10.** Für jeden für  $(P_\infty^L)$  zulässigen Prozess definieren wir

$$J_T^L(x, u) = L - \int_0^T r(t, x(t), u(t)) \tilde{v}(t) dt. \quad (2.47)$$

Dann heisst der Prozess  $(x^*, u^*)$

(i) **überholungsoptimal** oder **optimal im Sinne des Kriteriums L1**<sup>4</sup>, falls es ein  $T_0 > 0$  gibt, so dass für alle  $T > T_0$  und jeden in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Prozess die Ungleichung

$$J_T^L(x^*, u^*) \geq J_T^L(x, u) \quad (2.48)$$

gültig ist.

(ii) **stark optimal** für  $(P_\infty^L)$ , falls

$$J_\infty^L(x^*, u^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} J_T^L(x^*, u^*) < \infty, \quad (2.49)$$

und für jeden anderen zulässigen Prozess  $(x, u)$

$$J_\infty^L(x^*, u^*) \geq \limsup_{T \rightarrow \infty} J_T^L(x, u) \quad (2.50)$$

gilt.

(iii) **optimal im gewöhnlichen Sinne** oder **optimal im Sinne des Kriteriums L2**, falls für jeden in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Prozess  $(x, u)$  die Ungleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \{J_T^L(x^*, u^*) - J_T^L(x, u)\} \geq 0 \quad (2.51)$$

erfüllt ist.

(iv) **endlich optimal**, falls  $\forall T > 0$  und für jeden auf  $[0, T]$  zulässigen Prozess  $(x, u)$  mit  $x^*(T) = x(T)$  die Ungleichung

$$J_T^L(x^*, u^*) \geq J_T^L(x, u) \quad (2.52)$$

gilt.

Entsprechend gilt die Implikationskette

$$\begin{aligned} & \text{berholungsoptimal oder optimal im Sinne des Kriteriums L1} \implies \\ & \implies \text{stark optimal} \implies \text{optimal im Sinne des Kriteriums L2} \implies \\ & \implies \text{endlich optimal}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Für diese Arbeit sind nur die Optimalitätskriterien in (i) und (iii) relevant.

<sup>4</sup>Im Gegensatz zur Publikation PICKENHAIN&LYKINA [78] wird hier die Numeration L1 und L2 vertauscht verwendet.

### 2.3.2 Lokale Optimalität

In dieser Arbeit spielt der Begriff eines lokalen Extremums eine große Rolle, da wir Optimalitätsbedingungen für lokale Optimalität herleiten möchten. Die Untersuchung auf lokale Optimalität wird nur für Probleme  $(P_\infty^L)$  durchgeführt. Ist die Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  eine Dichtefunktion, so gehört bekanntlich jede Funktion aus dem Funktionenraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  auch zum Raum der absolut stetigen Vektorfunktionen, bezeichnet als  $AC^n(\mathbb{R}^+)$ , vgl. SCHWARTZ [88], S. 55, Satz III.(2). Aus diesem Grunde erlaubt uns die Einbettung  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \rightarrow AC^n(\mathbb{R}^+)$  den Begriff der lokalen Optimalität eines Prozesses wie folgt einzuführen:

**Definition 11.** Ein zulässiger Prozess  $(x^*, u^*)$  des Problems  $(P_\infty^L)$  ist **stark lokal optimal** im Sinne des Optimalitätskriteriums **L2**, falls eine Funktion  $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  existiert, so dass

$$J_\infty^L(x^*, u^*) \leq J_\infty^L(x, u) \quad (2.54)$$

für alle in  $(P_\infty)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit

$$|(x(t) - x^*(t))\hat{\nu}(t)| < \delta(t) \quad (2.55)$$

und alle  $t > 0$  erfüllt ist, wobei  $\hat{\nu}(\cdot)$  eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 1 ist. Dabei liefert das Paar  $(x^*, u^*)$  den globalen Minimalwert zum Problem  $(P_\infty^L)$  in der  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$ .

Wir beschränken uns auf die Untersuchung der starken lokalen Optimalität bezüglich des Kriteriums **L2**, wobei das Kriterium **L1** ohne große Beachtung bleibt. Für das Steuerungsproblem  $(P_\infty^L)$  kann jetzt die lokalisierte Version formuliert werden, die als  $(P_{\infty, \text{loc}}^L)$  bezeichnet wird. Dabei bleibt das Problem  $(P_\infty^L)$  unverändert bis auf die Nebenbedingung (2.32), die durch

$$(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu), \quad x(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)), \quad (2.56)$$

ersetzt wird, wobei

$$\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |(\xi - x^*(t))\hat{\nu}(t)| < \delta(t)\}. \quad (2.57)$$

**Bemerkung 7.** Im Gegensatz zur globalen Optimalitätsdefinition **(i)** aus dem vorherigen Abschnitt bezieht sich hier das Wort “stark“ nicht auf die Optimalität an sich, sondern auf die Art der lokalen Umgebung des Prozesses  $(x^*, u^*)$ , in der der Prozess optimal ist. Die starke lokale Optimalität bedeutet also, dass nur die Variationen des Zustandes bezüglich der gewichteten  $C^0(\mathbb{R}^+)$  – Norm berücksichtigt werden, wobei beliebige Variationen der Steuervariable  $u(\cdot)$  zugelassen sind. Mit der Optimalität im Sinne der Definition **(i)** hat es keine Verbindung.

**Bemerkung 8.** Ferner möchten wir deutlich machen, dass die Breite der lokalen Umgebung  $\delta(t)$  von der Zeitvariable  $t$  abhängig ist. Eine uniforme Umgebung, d.h. eine mit der von  $t$  unabhängigen Mindestbreite  $\delta > 0$ , muss nicht unbedingt existieren. Es kann also der Fall eintreten, dass die Umgebungsbreite mit der Zeit schmaler wird, d.h.  $\delta(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Aus diesem Grund führen wir den nächsten Begriff ein.

**Definition 12.** Ein zulässiger Prozess  $(x^*, u^*)$  des Problems  $(P_\infty^L)$  wird **uniform (oder gleichmäßig) stark lokal optimal** im Sinne des Optimalitätskriteriums **L2** genannt, falls es eine Zahl  $\delta > 0$  und eine von oben beschränkte Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  gibt, so dass für alle in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit

$$|(x(t) - x^*(t))\hat{\nu}(t)| < \delta \quad \forall t > 0 \quad (2.58)$$

die Ungleichung

$$J_\infty^L(x^*, u^*) \leq J_\infty^L(x, u) \quad (2.59)$$

gilt. Hier ist  $(x^*, u^*)$  die globale Minimallösung des Problems  $(P_\infty^L)$  in der mit der Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  gewichteten  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$ .

Außer einer Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  zur Gewichtung der Prozesse selbst werden wir also im weiteren Verlauf der Arbeit eine zusätzliche Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  für die Gewichtung der Umgebung von  $x^*(\cdot)$  benutzen. Darum definieren wir mit Hilfe der Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  die gewichtete Umgebung

$$U_\delta^{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})}(x^*) = \left\{ x \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \mid |x(t) - x^*(t)|\hat{\nu}(t) < \delta \quad \forall t > 0 \right\}. \quad (2.60)$$

Besitzt die Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  desweiteren die Eigenschaft  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ , so wird es möglich sein, hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung für starke lokale Optimalität zu beweisen, vgl. Kapitel 9. Als Beispiel zweier solcher Gewichtsfunktionen  $\nu(\cdot)$  und  $\hat{\nu}(\cdot)$  können durch  $\nu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\hat{\nu}(t) = e^{-\alpha t}$  erklärte Funktionen mit  $\alpha < \frac{\rho}{p}$  dienen.

**Bemerkung 9.** Der eingeführte Begriff der gewichteten Umgebung verallgemeinert den Begriff der gewöhnlichen  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+)$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$ , den man erhält, indem  $\hat{\nu}(t) \equiv 1$  gesetzt wird, anschaulich dargestellt durch den Streifen auf der Abbildung 2.3. Eine solche gewichtete Umgebung kann eine trichterförmige Gestalt haben, wie zum Beispiel auf der Abbildung 2.2. Diese Umgebungsgestalt scheint sehr natürlich zu sein, denn sie spiegelt die fundamentale Tatsache wider, dass das Verhalten der zulässigen Trajektorien im Unendlichen für die Auffindung der optimalen Politik meistens nicht entscheidend ist. Sie kann aber auch eine Schlauchform besitzen, wobei die Breite des Schlauches immer kleiner wird, vgl. den dunkel gefüllten Bereich mit rotem Rand auf der Abbildung 2.3. Gelingt es zu zeigen, dass die Optimalität eines Prozesses höchstens in einer schmaler werdender Umgebung gegeben ist, so ist das Verhalten der zulässigen Trajektorien im Unendlichen wesentlich für die Optimalität.

## 2.4 Lösungsmethoden

### 2.4.1 Fortsetzung der Lösung von $(P_T)$ auf $\mathbb{R}^+$

Der Gedanke der Fortsetzung der Lösung erscheint zunächst natürlich. Aus der Diskussion der Optimalitätskriterien aus dem vorangegangenen Abschnitt folgt jedoch

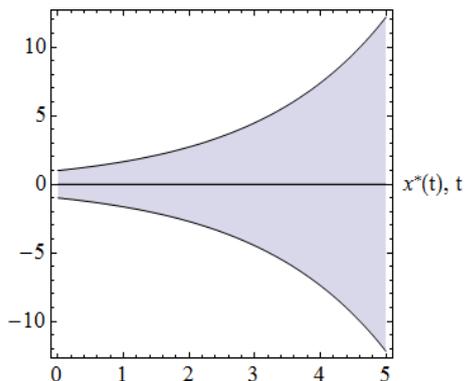


Abbildung 2.2: Trichterförmige gewichtete Umgebung:  $x^*(t) \equiv 0$ ,  $\hat{v}(t) = e^{-0.5t}$ ,  $\delta = 1$ .

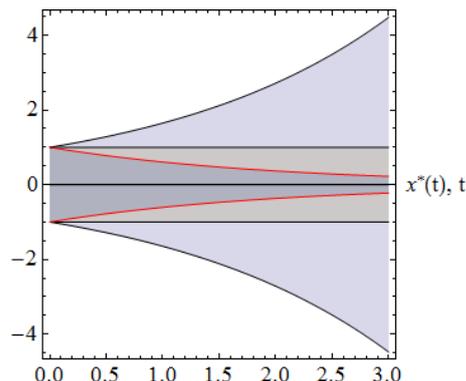


Abbildung 2.3: Verschiedene gewichtete Umgebungen schematisch dargestellt;  $x^*(t) \equiv 0$ .

der Schluss, dass eine Fortsetzung der Lösung des Problems  $(P_T)$  auf den unendlichen Zeithorizont  $[0, \infty)$  im Allgemeinen nicht möglich ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 1.** Wir betrachten das lineare Ramsey Modell, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35], S. 201 ff. Es ist ein Spezialfall des bekannten Ramsey Modells, nämlich mit der Nutzenfunktion  $U(c(t)) = c(t)$  und einer linearen Produktionsfunktion  $f(k(t)) = \pi k(t)$ . Man will also den diskontierten Gesamtnutzen für die Gesellschaft

$$J_T(k, c) = L \int_0^T c(t) e^{-\rho t} dt \tag{2.61}$$

maximieren, wobei die Änderung des Kapitalstocks folgender Differentialgleichung genügt

$$\dot{k}(t) = (\pi - \delta)k(t) - c(t), \quad k(0) = k_0. \tag{2.62}$$

Da man nicht mehr Waren konsumieren kann, als produziert wurden, fügt man noch die zustandsabhängige Steuerbeschränkung hinzu

$$0 \leq c(t) \leq \pi k(t). \tag{2.63}$$

Unter der Voraussetzung  $\pi > \delta + \rho$  ist die optimale Lösung des obigen Steuerungsproblems auf dem Intervall  $[0, T]$  durch

$$k_T^*(t) = \begin{cases} k_0 e^{(\pi-\delta)t} & , \quad 0 \leq t < \tau \\ k_0 e^{\pi\tau-\delta t} & , \quad \tau \leq t \leq T \end{cases} \quad , \quad c_T^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < \tau \\ \pi k^*(t) & , \quad \tau \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.64}$$

mit dem Schalterpunkt  $\tau = T - \frac{1}{\rho+\delta} \ln \frac{\pi}{\pi-(\rho+\delta)}$  gegeben, vgl. [35] und die Abbildungen 2.4, 2.5. Untersucht man nun das Steuerungsproblem  $(P_\infty)$  der Maximierung des

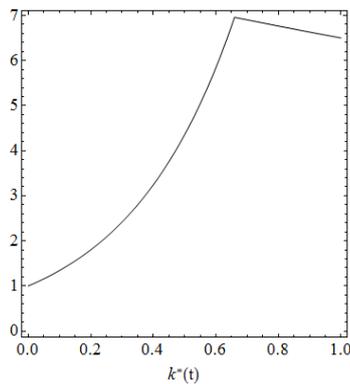


Abbildung 2.4: Die Lösung des linearen Ramsey Modell auf  $[0, T]$ : optimaler Zustand für  $k_0 = T = 1$ ,  $\rho = \delta = 0.2$ .

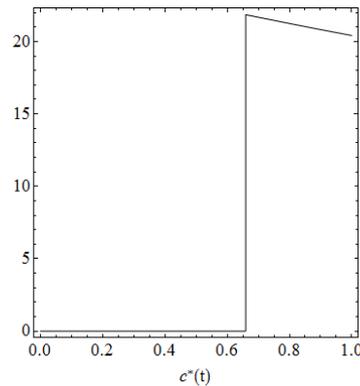


Abbildung 2.5: Die Lösung des linearen Ramsey Modell auf  $[0, T]$ : optimale Steuerung für  $k_0 = T = 1$ ,  $\rho = \delta = 0.2$ .

Zielfunktional

$$J_\infty(k, c) = L - \int_0^\infty c(t) e^{-\rho t} dt \quad (2.65)$$

und lässt in der Lösung  $(k_T^*(t), c_T^*(t))$   $T$  gegen unendlich laufen, so verschiebt sich der Schaltpunkt  $\tau$  ins Unendliche und man erhält

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k_T^*(t) = k_0 e^{(\pi - \delta)t}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} c_T^*(t) \equiv 0. \quad (2.66)$$

Ein solcher Prozess ist offensichtlich nicht optimal zur Aufgabe (2.62), (2.63), (2.65), da der gelieferte Funktionswert  $J_\infty(\lim_{T \rightarrow \infty} k_T^*(\cdot), \lim_{T \rightarrow \infty} c_T^*(\cdot)) = 0$  ist. Dies macht ersichtlich, dass ein punktweiser Grenzwertübergang in der Lösung des Problems  $(P_T)$  irreführend sein kann. Zur Untersuchung des Ramsey Modells auf dem unendlichen Zeitintervall kehren wir im Kapitel 12 zurück.

## 2.4.2 Gleichgewichtslösung

Bei der Steuerung vieler autonomer Systeme konvergiert die optimale Lösung  $(x^*(t), u^*(t))$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen ein stationäres Niveau  $(\hat{x}, \hat{u})$ , was die asymptotische Stabilität der Lösung bedeutet. Schränkt man das Betrachtungsintervall auf ein hinreichend großes Intervall  $[0, T]$  ein, so befindet sich der optimale Pfad die meiste Zeit in der Nähe des Gleichgewichtes  $(\hat{x}, \hat{u})$  und nur ganz am Ende des Intervalls verlässt er diese Nähe. Diese Eigenschaft ist in der Literatur als “Turnpike“-Eigenschaft bekannt, vgl. CARLSON ET AL. [20], S. 8 ff. und die Abbildung 2.6. Das Gleichgewicht  $(\hat{x}, \hat{u})$  zusammen mit dem Kozustand  $\hat{y}$  wird aus der Bedingung der Ruhelage des Systems  $(x, u, y)$  bestimmt, also durch das Setzen  $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$ . Eine ausführliche Analyse der “Turnpike“-Eigenschaft findet der Leser in ZASLAVSKI [102]. Allerdings besitzt eine optimale Lösung die “Turnpike“-Eigenschaft nicht zwingend, wie es von

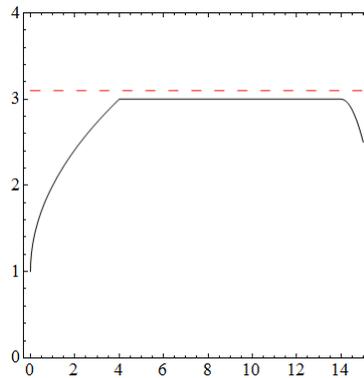


Abbildung 2.6: “Turnpike“ Eigenschaft: optimaler Pfad  $x^*(\cdot)$  (schwarz) und Gleichgewichtsniveau (rot).

A. Rapaport und P. Cartigny für ein in der Geschwindigkeit lineares Variationsproblem gezeigt wurde, vgl. RAPAPORT&CARTIGNY [85], S. 11 ff.

### 2.4.3 Direkte Methoden

Die so genannten direkten Lösungsmethoden, die auf den konstruktiven Aufbau einer Minimalfolge abzielen und auf diese Weise eine Grundlage für die Entwicklung numerischer Methoden zur Behandlung von Optimalsteuerungsproblemen bilden, werden in der vorliegenden Arbeit nicht angewendet und nicht weiterentwickelt. Deshalb wird deren Diskussion hier weggelassen, wobei wir z.B. auf ITO&KUNISCH [46], KUNKEL&VON DEM HAGEN [57], SIEVEKING&SEMMLER [92], GRÜNE&RANTZER [41] verweisen.

### 2.4.4 Indirekte Methoden

Indirekte Lösungsmethoden bestehen im Auffinden optimaler Lösungen mittels notwendiger und hinreichender Optimalitätsbedingungen. Für den aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen berechneten Lösungskandidaten werden die hinreichenden Optimalitätsbedingungen verifiziert, um die Optimalität nachzuweisen. Im Fall eines Problems mit dem endlichen Zeithorizont dient das berühmte Pontrjaginsche Maximumprinzip als notwendige Optimalitätsbedingung, PONTRJAGIN ET AL. [83], Satz 6, S. 77 ff. Betrachtet man das Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont, so kann dieser Satz nicht direkt übertragen werden. Ausserdem wurde die Setzung eines Steuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont in gewichteten Räumen bisher nicht untersucht, und in der einschlägigen Literatur gibt es noch keinen Satz über die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die gewählte Grundaufgabe. Aus diesem Grund betrachten wir in diesem Abschnitt eine vereinfachte Version des Problems ( $P_\infty$ ) und das entsprechende Problem auf dem endlichen Intervall.

**Ein vereinfachtes Steuerungsproblem ( $P_T$ )**

Die im nachfolgenden zitierten Ergebnisse beziehen sich auf das Problem der Minimierung des Funktionals

$$J_T(x, u) = \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.67)$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$ , die folgende Nebenbedingungen erfüllen:

$$(x, u) \in D_1^n[0, T] \times D_0^m[0, T]; \quad (2.68)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0; \quad (2.69)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\forall) t \in [0, T] \quad (2.70)$$

mit einer kompakten Steuermenge  $U$ . Dabei sind  $x(\cdot)$  und  $u(\cdot)$  Zustands- bzw. Steuerungsfunktionen. Die Funktionen  $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind als stetig in allen ihren Argumenten vorausgesetzt. Ausserdem seien  $r$  und  $f$  stetig differenzierbar im zweiten Argument. Für das Problem (2.67) – (2.70) zitieren wir nun das Pontrjaginsche Maximumprinzip, vgl. IOFFE&TICHOMIROV [45], Satz 1, S. 127, ohne Beweis.<sup>5</sup>

**Satz 7 (Pontrjaginsches Maximumprinzip).** Die Pontrjaginsche Funktion sei als

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) + \eta^T f(t, \xi, v) \quad (2.71)$$

definiert. Ist der Prozess  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  optimal für das Problem (2.67) – (2.70), so existieren eine Zahl  $\lambda_{0T} \geq 0$  und eine absolut stetige Vektorfunktion  $y_T(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die nicht sämtlich verschwinden, so dass zusammen mit der Pontrjaginschen Funktion die unten angegebenen Bedingungen gelten:

$$H(t, x_T^*(t), u_T^*(t), y_T(t), \lambda_{0T}) = \max_{v \in U} H(t, x_T^*(t), v, y_T(t), \lambda_{0T}) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (2.72)$$

$$\dot{y}_T(t) = -\nabla_{\xi} H(t, x_T^*(t), u_T^*(t), y_T(t), \lambda_{0T}) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (2.73)$$

$$y_T(T) = 0. \quad (2.74)$$

□

Die Bedingungen (2.72) – (2.74) stellen entsprechend die Maximumbedingung, die kanonische Gleichung und die Transversalitätsbedingung dar.

<sup>5</sup>Das zitierte Pontrjaginsche Maximumprinzip gilt auch für die Setzung des Steuerungsproblems in den Räumen  $(x, u) \in W_1^{1,n}[0, T] \times L_{\infty}^m[0, T]$  statt  $(x, u) \in D_1^n[0, T] \times D_0^m[0, T]$ . Lediglich der Beweis wird komplizierter, vgl. die angegebene Quelle. Um die Zitierung der Sätze aus verschiedenen Literaturquellen zu ermöglichen, bleiben wir in diesem Kapitel bei der einfachen Wahl der Funktionenräume, getroffen in (2.68).

**Das fortgesetzte Steuerungsproblem** ( $P_\infty$ )

Die Fortsetzung des Problems (2.67) – (2.70) auf  $\mathbb{R}^+$  ergibt das Steuerungsproblem

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min! \quad (2.75)$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$ , die folgende Beschränkungen erfüllen:

$$(x, u) \in D_1^n(\mathbb{R}^+) \times D_0^m(\mathbb{R}^+); \quad (2.76)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0; \quad (2.77)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.78)$$

Hier wird keine Bedingung an das Verhalten im Unendlichen gestellt. Bei dem Übergang zum Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont können nicht alle Bedingungen einfach übernommen und auf jedem Intervall  $[0, T]$  verifiziert werden. H. Halkin hat 1974 als erster erkannt, dass die Transversalitätsbedingungen im Fall eines unendlichen Zeitintervalls nicht mehr notwendig sein müssen. Man könnte erwarten, dass anstelle der Transversalitätsbedingung  $y_T(T) = 0$  im Problem mit freiem Endpunkt  $x(\infty)$  die Bedingung  $\lim_{T \rightarrow \infty} y_\infty(T) = 0$  für das entsprechende Problem auf  $\mathbb{R}^+$  gilt. In HALKIN [42], S. 271, liefert er das folgende Gegenbeispiel.<sup>6</sup>

**Beispiel 2.** Zu maximieren ist das Funktional

$$J_\infty^L(x, u) = L - \int_0^\infty (1 - x(t))u(t) dt \quad (2.79)$$

über alle Paare  $(x, u)$ , die folgende Beschränkungen erfüllen:

$$(x, u) \in D_1^1(\mathbb{R}^+) \times D_0^1(\mathbb{R}^+); \quad (2.80)$$

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))u(t), \quad x(0) = 0; \quad (2.81)$$

$$u(t) \in [0, 1] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.82)$$

Die optimale Steuerung ist durch

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 < t < \infty \end{cases} \quad (2.83)$$

gegeben und liefert den optimalen Prozess  $(x^*, u^*)$ , wobei

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - e^{1-t} & , \quad 1 < t < \infty \end{cases} . \quad (2.84)$$

<sup>6</sup>Das Originalbeispiel wurde hier mit der Lebesgueschen Interpretation des Integrals ausgestattet.

Für die einzigen möglichen Multiplikatoren  $(\lambda_0, y(t))$ , die die restlichen Bedingungen des Maximumprinzips erfüllen, gilt  $y_\infty(t) \equiv -\lambda_0$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Dies aber widerspricht der vermuteten Transversalitätsbedingung  $\lim_{T \rightarrow \infty} y_\infty(T) = 0$  im Fall eines freien Zustandes  $x(\infty)$ , vgl. HALKIN [42], S. 271. Dieses Beispiel wird in den nachfolgenden Kapiteln in Bezug auf die analytischen Eigenschaften des Zielfunktional weiter untersucht.

Die zweite intuitive Vermutung wäre, dass der Multiplikator  $\lambda_0$  assoziiert mit dem Integranden positiv sein muss. Dazu gab H. Halkin folgendes Gegenbeispiel, [42], S. 272.<sup>7</sup>

### Beispiel 3.

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty (u(t) - x(t)) dt \longrightarrow \max! \quad (2.85)$$

über alle Paare  $(x, u)$ , die folgende Beschränkungen erfüllen:

$$(x, u) \in D_1^1(\mathbb{R}^+) \times D_0^1(\mathbb{R}^+); \quad (2.86)$$

$$\dot{x}(t) = u^2(t) + x(t), \quad x(0) = 0; \quad (2.87)$$

$$u(t) \in [0, 1] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.88)$$

Hier erweist sich die Steuerung  $u^*(t) \equiv 0, t \in [0, \infty)$  mit

$$\int_0^T (u(t) - x(t)) dt = 0 \quad \forall T \in \mathbb{R}^+ \quad (2.89)$$

als optimal, denn jede stückweise konstante und von Null verschiedene Funktion  $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  liefert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (u(t) - x(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left( u(t) - \int_0^t u^2(s) e^{t-s} ds \right) dt = -\infty, \quad (2.90)$$

vgl. HALKIN [42], S. 272 und CARLSON ET AL. [20], S. 26 ff. Folglich ergibt sich unter Berücksichtigung des Maximumprinzips mit der Pontrjaginschen Funktion

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = \lambda_0(v - \xi) + \eta(v^2 + \xi) \quad (2.91)$$

und der kanonischen Gleichung

$$\dot{y}(t) = \lambda_0 - y(t) \quad (2.92)$$

die Lösung

$$y(t) = (y(0) - \lambda_0)e^{-t} + \lambda_0, \quad (2.93)$$

wobei  $u^*(t) \equiv 0$  die Pontrjaginsche Funktion nicht maximieren kann, wenn  $\lambda_0 > 0$  gilt. Damit gilt  $\lambda_0 = 0$  und die Vermutung ist widerlegt.

<sup>7</sup>Das Originalbeispiel wurde hier mit der Lebesgueschen Interpretation des Integrals ausgestattet.

Nun wird der Satz über die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Problem (2.75) – (2.78), folgend H. Halkin, vgl. [42], S. 269 ff, vorgestellt.

**Satz 8 (Maximumprinzip für das Problem (2.75) – (2.78)).** Ist der Prozess  $(x^*, u^*)$  zur Aufgabe (2.75) – (2.78) global optimal im Sinne des Kriteriums L2, so existieren eine nichtnegative Zahl  $\lambda_0$  sowie eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion  $y(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\|(\lambda_0, y(0))\| = 1; \quad (2.94)$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (2.95)$$

$$\dot{y}(t) = -\nabla_{\xi} H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.96)$$

□

**Bemerkung 10.** Der Leser beachte, dass der vorangehende Satz gegenüber dem klassischen “Pontrjaginschen Maximumprinzip“ keine Transversalitätsbedingungen beinhaltet.

Zurückkehrend zur Berechnung des stationären Niveaus ist Folgendes aus dem Maximumprinzip zu schlussfolgern. Das Gleichgewichtsniveau  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y})$  eines autonomen Problems ist durch die Bedingungen

$$f(\hat{x}, \hat{u}) = 0; \quad (2.97)$$

$$-H_{\xi}(t, \hat{x}, \hat{u}, \hat{y}) \tilde{v}(t) = 0; \quad (2.98)$$

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}) \geq H(\hat{x}, v, \hat{y}) \quad \forall v \in U \quad (2.99)$$

bestimmt, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35], S. 39.

**Bemerkung 11.** Wie man sieht, sind die Transversalitätsbedingungen im Fall eines unendlichen Zeitintervalls nicht mehr notwendig und somit ist das kanonische System (2.77), (2.96) nicht eindeutig lösbar. Unter gewissen Voraussetzungen kann sogar gezeigt werden, dass die Bedingungen des Maximumprinzips zusammen mit der Transversalitätsbedingung eine hinreichende Bedingung für die Optimalität darstellen, siehe unten. Zu den adäquaten Transversalitätsbedingungen im Falle eines Steuerungsproblems, formuliert in gewichteten Funktionenräumen, siehe z.B. PICKENHAIN [77].

Als Ergänzung zur Diskussion der notwendigen Bedingungen möchten wir an dieser Stelle ein Resultat aus AUBIN&CLARKE [10] zitieren, das unter der Annahme der dominierenden Diskontrate für ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont und mit einer in der Steuerung linearen Dynamik die Notwendigkeit von Transversalitätsbedingungen nachweist. Diese Bedingungen charakterisieren die Ko-zustandsfunktion  $y(\cdot)$  aus der Sicht der Funktionalanalysis, nämlich durch die Existenz eines Integrals über dem unbeschränkten Intervall  $[0, \infty)$ . Dieses Ergebnis wird im Nachhinein, im Kapitel 9 verwendet.

**Satz 9.** Die Funktionen  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  seien durch

$$r(t, x(t), u(t)) = r_1(x(t), u(t)) e^{-\rho t}; \quad (2.100)$$

$$f(t, x(t), u(t)) = Fx(t) + u(t), \quad u(t) \in U \quad (2.101)$$

erklärt mit einer konstanten  $n \times n$  Matrix  $F$  und einem nichtleeren kompakten Steuerbereich  $U$ . Ferner existieren Konstanten  $r > 0$ ,  $k > 0$ , mit denen die Wachstumsbedingung

$$\left| \frac{\partial r(t, \xi, v)}{\partial \xi} \right| \leq k(1 + |(\xi, v)|^r) \quad (2.102)$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in U$  erfüllt ist. Gilt ausserdem die Ungleichung

$$\rho > (r + 1)\lambda_F \quad (2.103)$$

mit  $\lambda_F = \max_{i=1, \dots, n} \{Re \{\lambda_i\} \mid \lambda_i \text{ ist Eigenwert von } F\}$ , so existieren die Integrale

$$\int_0^\infty |y(t)|^q e^{(q-1)\rho t} dt < \infty; \quad (2.104)$$

$$\int_0^\infty |\dot{y}(t)|^q e^{(q-1)\rho t} dt < \infty, \quad (2.105)$$

wobei  $q > 1$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{(r+1)} = 1$ . Ist die Konstante  $r = 0$ , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|^q e^{(q-1)\rho t} = 0. \quad (2.106)$$

□

**Bemerkung 12. (a)** In AUBIN&CLARKE [10] wurde der Satz sogar für in  $\xi$  lokal Lipschitzstetige Integranden  $r_1$  bewiesen. Die Bedingung (2.103) ist äquivalent zur Bedingung der dominierenden Diskontrate, formuliert in ASEEV&KRYAZHIMSKIY [8], S. 101. Die Wachstumsbedingung kann auch in schwächerer Form formuliert werden, da hier  $r_1(\xi, v)$  als stetig differenzierbar in  $\xi$  vorausgesetzt wurde:

$$\left| \frac{\partial r(t, \xi, v)}{\partial \xi} \right| \leq k(1 + |\xi|^r) \quad \forall (t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U. \quad (2.107)$$

**(b)** Setzt man  $\nu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $p = r + 1$ , so bedeutet die Endlichkeit der Integrale (2.104), (2.105), dass  $y(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  notwendigerweise gelten muss.

**(c)** Die Konvergenz des Integrals in (2.104) impliziert ausserdem die Transversalitätsbedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

- (d) In der zitierten Arbeit wurde ebenso gezeigt, dass der anormale Fall  $\lambda_0 = 0$  nicht eintreten kann, vorausgesetzt, die Diskontrate  $\rho > 0$  ist groß genug.
- (e) In der Originalquelle wurde mit der Voraussetzung  $(x, u) \in AC^n(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{M}^m(\mathbb{R}^+)$  gearbeitet, weswegen der Satz auch für die zulässigen Paare mit  $D_1^n(\mathbb{R}^+) \times D_0^m(\mathbb{R}^+)$  selbstverständlich gültig bleibt.

Das Ergebnis des Satzes 9 wurde in ASEEV&KRYAZHIMSKIY [8], Satz 12.1, S. 101, und Korollar 12.1, S. 106, für den Fall  $r_1(\cdot, v) \in C^1(\mathbb{R}^+)$  noch verschärft, und das asymptotische Verhalten von  $y(\cdot)$  wurde durch eine punktweise Abschätzung charakterisiert, aus der die Behauptung des Satzes folgt.

**Voraussetzung 1.** Es existiert eine Konstante  $C \geq 0$ , mit der die Wachstumsbedingung

$$\langle \xi, f(\xi, v) \rangle \leq C(1 + |\xi|^2), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad v \in U \quad (2.108)$$

gilt.

**Voraussetzung 2.** Für alle  $\xi = x(t) \in \mathbb{R}^n$  ist die Menge

$$Q(\xi) = \left\{ (z_0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z_0 \leq r_1(\xi, v), z = f(\xi, v), v \in U \right\} \quad (2.109)$$

konvex.

**Voraussetzung 3.** Es existieren positive Funktionen  $\mu(t) \rightarrow 0 + 0$ ,  $\omega(t) \rightarrow 0 + 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so dass für jedes zum Problem (2.75) – (2.78) zulässige Paar  $(x, u)$  die Ungleichungen

$$e^{-\rho t} \max_{v \in U} |r_1(x(t), u(t))| \leq \mu(t), \quad t \geq 0; \quad (2.110)$$

$$\int_T^\infty |r_1(x(t), u(t))| e^{-\rho t} \leq \omega(T), \quad T \geq 0. \quad (2.111)$$

gültig sind.

**Voraussetzung 4.** Es existieren Konstanten  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ ,  $C_i \geq 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), so dass für jedes zum Problem (2.75) – (2.78) zulässige Paar  $(x, u)$  die Ungleichungen

$$|x(t)| \leq C_1 + C_2 e^{\lambda t}; \quad (2.112)$$

$$|y_{x,u}(t)| \leq C_3 e^{\lambda t} \quad (2.113)$$

gültig sind, wobei  $y_{x,u}(\cdot)$  die Fundamentalmatrix des zugehörigen kanonischen Systems ist.

**Satz 10.** Sei die Funktion  $r(\cdot, \cdot, \cdot)$  durch (2.100) mit  $r_1(\cdot, v) \in C^1(\mathbb{R}^+)$  gegeben,  $(x^*, u^*)$  sei ein optimaler Prozess des Problems (2.75) – (2.78). Darüber hinaus seien

die Voraussetzungen 1, 2, 4 sowie die Bedingungen (2.103), (2.107) erfüllt.  $\lambda$  erfülle  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ , wobei  $\bar{\lambda}$  die Ljapunovsche Charakteristik ist, erklärt durch

$$\bar{\lambda} = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |y_i(t)|}{t} \right\} \quad (2.114)$$

mit  $y_i, i = 1, \dots, n$  als Fundamentalsystem des kanonischen Systems (2.77), (2.96). Ist das System

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t))}{\partial \xi} y(t) \quad (2.115)$$

regulär, d.h. es gilt für die Summe  $\sigma = \sum_{i=1}^l n_i \lambda_i$  aller Ljapunovschen Charakteristiken  $\lambda_i = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |y_i(t)|}{t}$ , gezählt mit Berücksichtigung der Vielfachheiten  $n_i$ , die folgende Gleichheit:

$$\sigma = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr} \left( \frac{\partial f(x^*(s), u^*(s))}{\partial \xi} \right) ds, \quad (2.116)$$

wobei mit  $\text{tr}[\cdot]$  die Spur der Matrix bezeichnet wird. So existiert für jede Zahl  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $k_2 > 0$ , so dass für die adjungierte Variable  $y(\cdot)$ , definiert durch die kanonische Gleichung (2.96), die punktweise Abschätzung

$$|y(t)| \leq k_2 (e^{-\rho t + \epsilon t} + e^{-(\rho - r\lambda)t + \epsilon t}), \quad t \geq 0 \quad (2.117)$$

gilt. □

**Bemerkung 13. (a)** Setzt man  $f(t, \xi, v)$  wie in (2.101), so folgt die Behauptung des Satzes 9 aus dem Satz 10.

**(b)** Da  $\xi$  ein Element der konvexen Menge  $\mathbb{R}^n$  ist, liefert die Voraussetzung 4 zusammen mit den Bedingungen (2.107), (2.103) die Gültigkeit der Ungleichung (2.110) und sogar der gesamten Voraussetzung 3, vgl. ASEEV&KRYAZHIMSKIY [8], S. 101. Die Ungleichung (2.111) sichert die absolute Konvergenz des Integrals im Zielfunktional für alle Prozesse, die den Nebenbedingungen genügen. Daher gibt es unter diesen Umständen keine Notwendigkeit, zwischen verschiedenen Interpretationen des Integrals zu unterscheiden. Die Voraussetzungen 1 – 3 wurden von E. Balder in [12] benutzt, um die Existenz einer optimalen Lösung zu erzwingen.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 10 und für  $\rho > 0$  genügt die Kozustandfunktion  $y(\cdot)$  den Transversalitätsbedingungen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0; \quad (2.118)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^*(t), y(t) \rangle = 0. \quad (2.119)$$

Es gibt zahlreiche Publikationen, in denen die Transversalitätsbedingungen behandelt werden, vgl. unter anderen MICHEL [72], SMIRNOV [93], KAMIHIGASHI [49], HALKIN [42] usw. Nun wenden wir uns den Bedingungen zu, die die Optimalität eines Kandidaten sichern, nämlich den bekannten hinreichenden Optimalitätsbedingungen. K. J. Arrow und M. Kurz hatten in ihrer Arbeit [5] leicht überprüfbare hinreichende Bedingungen aufgestellt.

**Satz 11.** Seien folgende Annahmen erfüllt:

(i) Der Steuerbereich  $U$  ist kompakt und es gibt eine kompakte Menge  $G$ , so dass jede zulässige Trajektorie mit Startpunkt  $x_0$  über den gesamten Zeitraum ihre Werte im Inneren dieser Menge hat, d.h.  $\forall t > 0$  gilt  $x(t) \in \text{int}(G)$  für jede zulässige Zustandstrajektorie  $x(\cdot)$ .

(ii) Die punktweise maximierte Potrjaginsche Funktion, auch Hamiltonfunktion genannt, gegeben durch

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta, \lambda_0) = \max_{v \in U} H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = \max_{v \in U} \{-\lambda_0 r(t, \xi, v) + \eta^T f(t, \xi, v)\}, \quad (2.120)$$

ist wohldefiniert und konkav in der Platzhaltervariable  $\xi$ , die für  $x(t)$  steht, für jedes  $(t, \eta, \lambda_0)$ .

(iii) Es existiert ein Prozess  $(x^*, u^*)$ , der die notwendigen Bedingungen des Satzes 8 mit  $\lambda_0 > 0$  erfüllt.

(iv) Die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$  genügt der Transversalitätsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Dann ist der Prozess  $(x^*, u^*)$  optimal im Sinne des Kriteriums L2 in der Aufgabe (2.75) – (2.78) mit freier Endbedingung.  $\square$

Die Voraussetzungen des Satzes wurden z.B. von C. D. Feinstein und D. G. Luenberger in [36] in folgender Weise abgeschwächt, vgl. CARLSON ET AL. [20], S. 28 f.

**Satz 12.** Sei  $(x^*, u^*)$  ein bezüglich (2.75) – (2.78) zulässiger Prozess und  $y(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion. Sind mit der Pontrjaginschen Funktion  $H(t, \xi, v, \eta, 1)$  die Bedingungen

(i) Für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times G \times U$  gilt die Ungleichung

$$H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), 1) + \dot{y}^T(t)x^*(t) \geq H(t, \xi, v, y(t), 1) + \dot{y}^T(t)\xi. \quad (2.121)$$

(ii) Es existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} y^T(t)x^*(t)$  und die Relation

$$-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} y^T(t)x^*(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} y^T(t)x(t) \quad (2.122)$$

ist erfüllt für jede zulässige Trajektorie  $x(\cdot)$ .

erfüllt, so ist der Prozess  $(x^*, u^*)$  optimal im Sinne des Kriteriums L2, also optimal im gewöhnlichen Sinne.  $\square$

**Bemerkung 14.** Die Annahme (2.122) kann im Fall eines konvergenten Integrals im Zielfunktional durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^T(t) (x(t) - x^*(t)) \geq 0 \quad (2.123)$$

für alle zulässige Trajektorien  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ersetzt werden, vgl. SEIERSTAD& SYDSAETER [90], S. 384 ff. Die Voraussetzung in dieser Form wird sehr oft angewendet.

Die Diskussion weiterer hinreichender Optimalitätsbedingungen, insbesondere für die von uns gewählte Problemstellung, wird in den Kapiteln 8 und 9 fortgesetzt.

### 2.4.5 Phasenportraitanalyse

Eine gut geeignete und oft angewendete Illustrationsmethode bei der graphischen Darstellung der Lösungen von Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont ist die Phasenportrait- oder Phasendiagrammanalyse. Sie erlaubt eine qualitative Analyse des dynamischen Systems (2.77), (2.96) im Fall  $n = 1$ , d.h. für eindimensionale Zustände  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , durchzuführen, die Gleichgewichte anzuzeichnen und sie auf Stabilität zu untersuchen. Gleichzeitig lässt sie erkennen, wie die Zustands- und Kozustandstrajektorien von einander abhängen, ob der optimaler Pfad gegen das Gleichgewicht strebt, d.h. ob es asymptotisch stabil ist. Im Kapitel 10 wird davon teilweise Gebrauch gemacht.



# Kapitel 3

## Verschiedene Interpretationen des Integrals im Zielfunktional

Die Unterschiede zwischen den Integralbegriffen, dem Lebesgueschen Integral über einer Menge unendlichen Maßes und einem uneigentlichen Riemannsches Integral erster Art, beschrieben im Abschnitt 1.3, ziehen große Konsequenzen im Hinblick auf Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont nach sich. Infolge unterschiedlicher Integralsummenbildungen können diese zwei Integrale von demselben Integranden verschiedene Werte besitzen, vgl. (1.26). Für die Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont bedeutet das, dass die Extremalwerte des Zielfunktional unterschiedlich ausfallen in Abhängigkeit von dem gewählten Integraltyp. Da wir bei einem zulässigen Prozess  $(x, u)$  die Existenz und Endlichkeit des Integrals  $L\text{-}\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t))\tilde{\nu}(t)dt$  bzw. die Konvergenz des Integrals  $R\text{-}\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t))\tilde{\nu}(t)dt$  vorausgesetzt haben, heisst es, dass ein Problem  $(P_{\infty})$  in Abhängigkeit vom verwendeten Integralbegriff verschiedene zulässige Mengen und somit unterschiedliche optimale Lösungen besitzen kann. Wir bringen folgendes einfaches Beispiel, in dem die Notwendigkeit der Wahl der gewichteten Räume für den Zustand und die Steuerung ersichtlich ist, vgl. PICKENHAIN ET AL. [79], S. 464.

**Beispiel 4.** Sei die Funktion  $r(t, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$r(t, v) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} \cdot v & , \quad 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi \\ 2 \frac{\sin t}{t} \cdot v & , \quad (2k+1)\pi \leq t \leq (2k+2)\pi . \end{cases} \quad (3.1)$$

Betrachten wir zuerst folgendes Steuerungsproblem ohne Präzisierung des Integralbegriffs. Minimiere das Zielfunktional

$$J_{\infty}(x, u) = - \int_0^{\infty} r(t, u(t))dt \quad (3.2)$$

bezüglich aller Prozesse

$$(x, u) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (3.3)$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.4)$$

$$u(t) \in U = [0.5, 1] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.5)$$

$$x(0) = 0. \quad (3.6)$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{A}$  die Menge aller Paare  $(x, u)$ , die (3.3) – (3.6) erfüllen, mit  $\mathcal{A}_L$  die Teilmenge der Paare  $(x, u) \in \mathcal{A}$ , für die das Lebesguesche Integral  $L\text{-}\int_0^\infty (-r(t, u(t))) dt$  existiert und endlich ist, und mit  $\mathcal{A}_R$  die Teilmenge aller Paare  $(x, u) \in \mathcal{A}$ , für die das uneigentliche Riemannsches Integral  $R\text{-}\int_0^\infty (-r(t, u(t))) dt$  bedingt konvergent ist, d.h. die entsprechende unendliche Reihe konvergiert nicht absolut. Das Zielfunktional dieses Problems ist vom Typ (1.26) und aufgrund dessen ist offensichtlich, dass

$$\mathcal{A}_L = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_R \neq \emptyset \quad (3.7)$$

gilt. Die optimale Steuerung des Problems  $(P_\infty^R)$  ist gegeben durch

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi \\ \frac{1}{2} & , \quad (2k+1)\pi \leq t \leq (2k+2)\pi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Mit den Funktionen  $\tilde{\nu}(\cdot)$  und  $\nu(\cdot)$ , definiert als

$$\tilde{\nu}(t) \equiv 1, \quad \nu(t) = e^{-\rho t}, \quad (3.9)$$

mit  $\rho > 0$  erkennt man, dass

$$x^*(\cdot) \notin W_p^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{aber} \quad x^*(\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \quad (3.10)$$

für alle  $1 < p < \infty$ , was die Setzung des gewichteten Sobolevraumes als Zustandsraum rechtfertigt.

Wie wir an diesem Beispiel sehen, sind die zulässigen Mengen  $\mathcal{A}_L$  und  $\mathcal{A}_R$  im Allgemeinen nicht vergleichbar. Verwendet man das Lebesguesche Integral, so schliesst man aus der Menge  $\mathcal{A}$  alle Trajektorien aus, die das uneigentliche Riemannsches Integral nicht absolut (bedingt) konvergieren lassen. Andererseits, durch die Wahl des uneigentlichen Riemannsches Integrals in dem Zielfunktional gehen alle Trajektorien aus  $\mathcal{A}$  verloren, die Lebesgue integrierbar aber nicht Riemann integrierbar sind, sogar auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^+$ . Aus diesem Grund ist es sehr wichtig das Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont mit dem richtigen Integralbegriff zu formulieren, der den zu modellierenden Sachverhalt getreu widerspiegelt. Man erkennt aus dem folgenden Beispiel, dass Steuerungsprobleme mit verschiedenen Interpretationen des Integrals in dem Zielfunktional nach komplett unterschiedlicher mathematischer Behandlung verlangen. In LYKINA ET AL. [62], S. 499, wurde ein Steuerungsproblem mit nichtleeren zulässigen Mengen  $\mathcal{A}_L$  und  $\mathcal{A}_R$  konstruiert, wobei der Extremalwert des Problems  $(P_\infty^R)$  strikt größer als der des Problems  $(P_\infty^L)$  ist. Dieses wird nun zitiert.

**Beispiel 5.** Sei  $1 < p < \infty$ . Zu untersuchen ist eine folgende Steuerungsaufgabe  $(P_\infty)$  mit Zustandsbeschränkungen:

$$J_\infty(x, y, u) = \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \rightarrow \sup! \quad (3.11)$$

$$(x, u, y) \in W_{p,loc}^1(\mathbb{R}^+) \times L_{p,loc}(\mathbb{R}^+) \times W_{p,loc}^1(\mathbb{R}^+); \quad (3.12)$$

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.13)$$

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.14)$$

$$x(0) = 2; \quad (3.15)$$

$$0 \leq x(t) \leq g_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.16)$$

$$g_2(t) \cdot x(t) + g_3(t) \leq y(t) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.17)$$

$$0 \leq u(t) \leq 5 \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.18)$$

mit stetigen Funktionen  $g_1(\cdot), g_2(\cdot), g_3(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß

$$g_1(t) = \begin{cases} 2-t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t & , \quad 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (3.19)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} -t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ -1/t & , \quad 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (3.20)$$

$$g_3(t) = \begin{cases} 4(t-1) & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (3.21)$$

Für eine exakte Formulierung von  $(P_\infty)$  fehlt noch die Interpretation des Integrals in (3.11). Man bemerke ebenfalls, dass die Setzung der Räume noch ungewichtet ist. Mit  $W_{p,loc}^1(\mathbb{R}^+)$  und  $L_{p,loc}(\mathbb{R}^+)$  werden die Mengen aller solcher Funktionen  $f$  bezeichnet, deren Einschränkungen  $f|_{[a,b]}$  auf ein beliebiges kompaktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$  zu den Funktionenräumen  $W_p^1[a, b]$  bzw.  $L_p[a, b]$  gehören. Für die Probleme  $(P_\infty^L)$  und  $(P_\infty^R)$  konnten folgende Aussagen, die einen Zusammenhang zwischen den Extremalwerten herstellen, bewiesen werden, vgl. LYKINA ET AL [62], Satz 1.2, S. 500 ff.

**Satz 13.** Es gelten folgende Aussagen:

- (i) Die Extremalwerte  $\mu_L$  und  $\mu_R$  des Zielfunktional in den Aufgaben  $(P_\infty^L)$  und  $(P_\infty^R)$  genügen der Ungleichung

$$0 < \mu_L < \mu_R < \infty, \quad (3.22)$$

wobei  $\mu_L = 0.072839 \dots$ ,  $\mu_R = 1.242940 \dots$

- (ii) Es existiert eine globale Maximallösung des Steuerungsproblems  $(P_\infty^L)$ .  
 (iii) Es existiert ebenfalls eine globale Maximallösung des Steuerungsproblems  $(P_\infty^R)$ .

- (iv) Kein globaler Maximierer von  $(P_\infty^L)$  kann ein solcher von  $(P_\infty^R)$  sein und umgekehrt.

Zum Beweis wird auf LYKINA ET AL. [62] verwiesen.  $\square$

Spielte man mit dem Gedanken die Lösung von  $(P_\infty^L)$  oder  $(P_\infty^R)$  durch die Approximation mit den Lösungen der entsprechenden Probleme  $(P_T)$  zu gewinnen, so wäre dies im Fall eines Zielfunktional mit dem Lebesgueschen Integral nicht möglich, wie der folgende Satz bestätigt.

**Satz 14.** Für das Steuerungsproblem, das durch die Einschränkung des Problems  $(P_\infty)$  auf das Intervall  $[0, T]$  zustande kommt, also gegeben durch

$$(P_T) : \quad J(x, y, u) = \int_0^T \sin t \cdot x(t) dt \rightarrow \sup! \quad (3.23)$$

$$(x, u, y) \in W_p^1[0, T] \times L_p[0, T] \times W_p^1[0, T]; \quad (3.24)$$

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (3.25)$$

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (3.26)$$

$$x(0) = 2; \quad (3.27)$$

$$0 \leq x(t) \leq g_1(t) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.28)$$

$$g_2(t) \cdot x(t) + g_3(t) \leq y(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.29)$$

$$0 \leq u(t) \leq 5 \quad (\forall) t \in [0, T], \quad (3.30)$$

mit entsprechenden Einschränkungen der Funktionen  $g_i(\cdot)$  auf das Intervall  $[0, T]$ , gilt folgende Aussage. Vorausgesetzt  $1 < p < \infty$  und  $1 < T < \infty$ , so gelten die Behauptungen:

- (i) Die Maximalwerte  $\mu_L$  und  $\mu_T$  der Probleme  $(P_\infty^L)$  oder  $(P_T)$  gehorchen der Ungleichung

$$0 < \mu_L < \mu_T < \infty. \quad (3.31)$$

- (ii) Das Problem  $(P_T)$  besitzt einen globalen Maximierer in  $W_p^1[0, T] \times L_\infty[0, T] \times W_p^1[0, T]$ .

- (iii) Kein globaler Maximierer der Aufgabe  $(P_T)$  kann zu einem zulässigen Prozess in der Aufgabe  $(P_\infty^L)$  fortgesetzt werden.

Zum Beweis vgl. LYKINA ET AL. [62].  $\square$

Dies verdeutlicht nochmal die Notwendigkeit des sorgfältigen Umgangs mit eingesetzten Integralbegriffen. In der Literatur jedoch wurde der Frage nach der Interpretation des Integrals bislang nur wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Lediglich in wenigen Literaturquellen wurde der verwendeter Integraltyp explizit benannt, wie beispielsweise in den Arbeiten von J. Blot in Zusammenarbeit mit N. Hayek oder

P. Michel, vgl. [18], [16] und [17], wo das Riemannsches uneigentliche Integral eingesetzt wird, oder von A. V. Dmitruk und N. V. Kuz’kina, [31], wo es mit dem Lebesgueschen Integral gearbeitet wird und man dessen bewusst ist. In den meisten Publikationen dagegen, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35] und CARLSON ET AL. [20], wird es nicht deutlich gemacht, in welchem Sinne das Integral zu verstehen ist. So wird in FEICHTINGER&HARTL [35], S. 39, vorausgesetzt, dass “das uneigentliche Integral . . . für jede zulässige Lösung konvergiert“. Es lässt vermuten, dass es sich um ein Integral im Riemannschen Sinne handelt, was aber nicht ausdrücklich erwähnt worden ist. In CARLSON ET AL. [20], Def. 1.2, S. 10, wird ein stark optimaler Prozess auf folgende Weise definiert: ein zulässiger Prozess  $(x^*, u^*)$  ist stark optimal, falls für alle anderen zulässigen Prozesse  $(x, u)$  die Bedingung

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T r(t, x^*(t), u^*(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} r(t, x^*(t), u^*(t)) dt < \infty \end{aligned} \quad (3.32)$$

erfüllt ist. Die letztere Ungleichung bedeutet, dass das Integral  $\int_0^{\infty} r(t, x^*(t), u^*(t)) dt$  als ein (mindestens bedingt) konvergentes uneigentliches Riemannsches Integral zu interpretieren ist, während für die Prozesse  $(x, u)$  das Integral  $\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) dt$  konvergieren oder auch bestimmt mit Wert  $-\infty$  oder unbestimmt divergieren kann. Bei der Formulierung des entsprechenden Existenzsatzes, CARLSON ET AL. [20], Satz 7.17, S. 187, wird jedoch die Existenz des Integrals  $\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) dt$  im Lebesgueschen Sinne durch die Bedingung (iii) vorausgesetzt, womit die Menge der zulässigen Prozesse auf die Menge aller  $(x, u)$  eingeschränkt worden ist, die die absolute Konvergenz des oben erwähnten Integrals liefern. Somit sind möglicherweise die Lösungen ausgeschlossen worden, die das Integral  $\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) dt$  nur bedingt konvergent machen.

Generell ist in der Literatur folgende Inkonsistenz im Umgang mit Integralbegriffen zu beobachten. Um einen Existenzsatz zu beweisen, setzt man die Konvergenz des Integrals  $\int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) dt$  im Sinne von Lebesgue als Annahme voraus, vgl. BAUM [13], Satz 6.1, S. 99 (dieser Satz wurde auch in CARLSON ET AL. [20], Satz 7.17 zitiert). Will man jedoch notwendige Optimalitätsbedingungen ableiten, so benutzt man oft den Grenzübergang bei  $T \rightarrow \infty$  in dem Integral  $\int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt$ , was auf die Konvergenz des uneigentlichen Integrals im Riemannschen Sinne schliessen lässt, siehe FEICHTINGER&HARTL [35], Satz 7.5, S. 187 ff., und CARLSON ET AL. [20], Satz 2.3, S. 24 f. So kann der Existenzsatz 7.17 aus [20] nicht auf das Beispiel 4 angewendet werden, da das Integral im Lebesgueschen Sinne für keinen zulässigen

Prozess endlich ist. Um die Existenz einer optimalen Lösung im Fall der Riemannschen Interpretation des Zielfunktional zu belegen, bräuchte man selbstverständlich einen anderen Existenzsatz, der von dieser Interpretation ausgeht.

Der Grund für diese Diskrepanz mag in der Tatsache verborgen sein, dass die Lebesguesche Integrationstheorie viel mächtiger ist als die Riemannsches. Hier stehen uns mehrere Konvergenzsätze zur Verfügung, während die Menge aller im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen auf einem kompakten Intervall nicht einmal einen Vektorraum bildet. Der Übergang zu einem unbeschränkten Intervall erleichtert die Lage nicht. Folglich muss zur Entwicklung der Existenzsätze für Steuerungsprobleme mit uneigentlichem Riemannschen Integral eine neue Gedankenstrategie herangezogen werden. Umgekehrt, zum Beweis der notwendigen Optimalitätsbedingungen eignet sich die Methode der Approximation der Lösung von  $(P_\infty)$  durch eine Folge  $(x_T^*, u_T^*)$  von Lösungen von Hilfsaufgaben  $(P_T)$  bei  $T \rightarrow \infty$  sehr gut, vgl. ASEEV&KRYAZHIMSKIY [6]. Hier werden jedoch Voraussetzungen getroffen, die die absolute Konvergenz des Integrals in dem Zielfunktional erzwingen und somit die Unterscheidung zwischen den Problemen  $(P_\infty^L)$  und  $(P_\infty^R)$  überflüssig machen.

Die globalen Optimalitätskriterien von von Weizsäcker, Gale und Halkin, zitiert im Abschnitt 2.3.1, beruhen also auf dem Riemannschen Integralbegriff. H. Halkin unterstreicht jedoch in HALKIN [42], S. 269, dass weder  $\lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)$  noch

$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T r(t, x^*(t), u^*(t)) dt$  existieren und endlich sein müssen. Daher werden dieselben Kriterien vermutlich auch für Probleme mit der Lebesgueschen Interpretation des Integrals benutzt, vorausgesetzt die Funktion im Integranden auf jedem Kompaktum Riemann integrierbar ist, vgl. z.B. [42], S. 269.

Angesichts der geschilderten Unstimmigkeiten zwischen den Problemformulierungen samt der Präzisierung des verwendeten Integralbegriffs und dem Prozess der Entwicklung der Existenztheorie oder der notwendigen Optimalitätsbedingungen kann es durchaus möglich sein, dass ein anderer Integralbegriff, verschieden vom Lebesgueschen oder Riemannschen Integral, diese Diskrepanzen beheben kann, siehe Kapitel Zusammenfassung und Ausblick.

# Kapitel 4

## Analytische Eigenschaften des Nemytskij Operators in gewichteten Lebesgueräumen

Einige analytische Eigenschaften des Einsetzungsoperators, auch Nemytskij Operator genannt, wie zum Beispiel Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, liefern ein wichtiges Mittel zum Beweis der Unterhalbstetigkeit von Integralfunktionalen. Dies ist unentbehrlich für das Gewinnen der Existenzresultate in der Steuerungstheorie, deren Beweistechnik auf dem verallgemeinerten Weierstraßschen Satz basiert. Aus diesem Grund beabsichtigen wir die Stetigkeit des Nemytskij Operators, definiert und wirkend in gewichteten Lebesgueräumen, nachzuweisen. Die Stetigkeit der Nemytskij Operatoren in Lebesgueräumen, also in  $L_p[a, b]$  mit eventuell unbeschränktem Intervall  $[a, b]$ , wurde von Krasnoselskii bewiesen. Der Beweis kann in VAINBERG [96], S. 154 – 162, nachgeschlagen werden.

### 4.1 Einige Ergebnisse aus der Maßtheorie

Alle Sätze und Definitionen dieses Abschnittes samt allen Beweisen können VAINBERG [96], S. 148 – 153, entnommen werden.

**Definition 13.** Sei  $E$  eine messbare Menge eines endlichdimensionalen Euklidischen Raumes. Eine fast überall auf  $E$  finite Funktion  $\phi(\cdot)$  besitzt die **S-Eigenschaft**, falls für jedes noch so kleines  $\epsilon > 0$  eine abgeschlossene Teilmenge  $F \subset E$  existiert, so dass  $\mu(E \setminus F) \leq \epsilon^1$  und die Einschränkung  $\phi|_F$  stetig ist.

**Satz 15.** Sei  $E$  eine messbare Menge eines  $s$ -dimensionalen Euklidischen Raumes. Eine fast überall auf der Menge  $E$  endliche Funktion  $\phi(\cdot)$  ist genau dann messbar, wenn sie die  $S$ -Eigenschaft auf  $E$  besitzt.

Sei  $\mathbb{B}$  eine messbare Menge des  $s$ -dimensionalen Euklidischen Raumes. Ferner sei eine Funktion  $g = g(t, \xi_1, \dots, \xi_n) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Werten  $g = g(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$  gegeben.

---

<sup>1</sup> $\mu(\cdot)$  bezeichnet das Lebesguesche Maß.

**Definition 14.** Wir nennen Funktion  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten  $g(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$  **Carathéodory Funktion**, wenn sie stetig bezüglich  $\xi \in \mathbb{R}^n$  für fast alle  $t \in \mathbb{B}$  und messbar auf  $\mathbb{B}$  bezüglich  $t$  für jedes fixierte  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  ist. Die Ausnahmemenge des Maßes Null, die eventuell auch leer sein kann, bezeichnen wir mit  $O$ .

**Definition 15.** Eine Funktion  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer messbaren Teilmenge  $\mathbb{B}$  eines  $s$ -dimensionalen Euklidischen Raumes besitzt die **starke S-Eigenschaft**, falls es für jedes  $\eta > 0$  eine abgeschlossene Teilmenge  $F \subset \mathbb{B}$  gibt, so dass  $\mu(\mathbb{B} \setminus F) \leq \eta$  und  $g(\cdot, \cdot)$  dabei stetig bezüglich  $(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$  auf  $F \times \mathbb{R}^n$  ist.

**Satz 16.** Die Funktion  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann und nur dann eine Carathéodory Funktion, wenn sie die starke S-Eigenschaft besitzt.

**Satz 17.** Seien die Funktionen  $v_i(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , messbar und fast überall endlich. Ist  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion, so ist die Funktion  $g(\cdot, v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot)) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

**Satz 18.** Ist  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion, so ist für jeden Würfel  $d = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi_i| \leq a, i = 1, \dots, n\}$  die Funktion  $f_a : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f_a(t) = \max_d g(t, \xi_1, \dots, \xi_n), \quad t \in \mathbb{B} \setminus O, \quad (4.1)$$

messbar auf  $\mathbb{B} \setminus O$ .

**Satz 19.** Gegeben sei ein Würfel  $d$ , wie oben eingeführt. Falls  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion ist, dann existieren messbare Funktionen  $\phi_i(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass die Gleichung

$$g(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)) = f_a(t) \quad (4.2)$$

für alle  $t \in \mathbb{B} \setminus O$  gilt.

**Bemerkung 15.** Der Satz 17 zeigt, dass der Nemytskij Operator

$$Nv(t) = g(t, v_1(t), \dots, v_n(t)) \quad (4.3)$$

mit einer Carathéodory Funktion  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jedes System  $v_i(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $n$  messbaren Funktionen in eine ebenso messbare Funktion  $Nv$  transformiert.

Das folgende Resultat über die asymptotische Stetigkeit gilt ebenfalls.

**Satz 20.** Sei  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$  und  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion. Dann ist der Nemytskij Operator

$$Nx(t) = g(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (4.4)$$

asymptotisch stetig (stetig dem Maße nach), d.h. aus der Konvergenz dem Maße nach der Folgen  $\{x_1^N(t)\}, \dots, \{x_n^N(t)\}$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) von fast überall endlichen messbaren Funktionen gegen ebenso fast überall endliche messbare Funktionen  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  folgt, dass die Folge  $\{g(t, x_1^N(t), \dots, x_n^N(t))\}$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) der verketteten Funktionen dem Maße nach gegen  $g(t, v_1(t), \dots, v_n(t))$  konvergiert.

## 4.2 Von der Stetigkeit des Nemytskij Operators

Der folgende Satz wird ebenso ohne Beweis zitiert, vgl. VAINBERG [96], Satz 19.2, S. 162, zusammen mit dem Satz 19.1, S. 154 f.

**Satz 21.** Sei  $g(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion. Dann ist der Nemytskij Operator  $N$  assoziiert mit  $g(\cdot, \cdot)$ , d.h.

$$Nx(t) = g(t, x(t)) = g(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (4.5)$$

ein beschränkter und stetiger Operator wirkend vom Raum  $L_p^n(\mathbb{R}^+)$  in den Raum  $L_{p'}(\mathbb{R}^+)^2$  mit  $1 \leq p < \infty$  und  $1 \leq p' < \infty$  genau dann, wenn die Funktion  $g(\cdot, \cdot)$  die Wachstumsbedingung

$$|g(t, \xi)| \leq A(t) + B \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/p'} \quad \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

mit einer Funktion  $A(\cdot) \in L_{p'}(\mathbb{R}^+)$  und einer Konstanten  $B > 0$  erfüllt.  $\square$

Wir wollen nun dieses Ergebnis auf die Nemytskij Operatoren übertragen, die in gewichteten Lebesgueräumen wirken.

### 4.2.1 Über den Nemytskij Operator auf dem Raum $L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$

**Satz 22.** Seien  $\nu(\cdot)$  eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 1,  $p > 0$ ,  $q > 0$  und  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen für den Nemytskij Operator

$$Nx(t) = g(t, x(t)) : \quad (4.7)$$

- (1) Bildet der Operator  $N$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  ab, so ist  $N$  ein stetiger Operator von  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$ , also  $N : L_p(\mathbb{B}, \nu) \rightarrow L_q(\mathbb{B}, \nu)$ , und es existiert eine Funktion  $A(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu)$  und eine Konstante  $C > 0$ , so dass die Wachstumsbedingung

$$|g(t, \xi)| \leq A(t) + C|\xi|^{p/q} \quad (4.8)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^1$  erfüllt ist.

- (2) Ist die Wachstumsbedingung (4.8) erfüllt, so bildet  $N$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  in den Raum  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  ab und ist somit ein stetiger und beschränkter Operator von  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$ .

**Beweis:** Das Beweisschema ist das des Satzes 19.4, S. 154, VAINBERG [96], mit entsprechenden Änderungen, hervorgerufen durch die Verwendung der gewichteten

---

<sup>2</sup>Der obere Index 1 in den  $L_p$ -Räumen wird in diesem Kapitel unterdrückt.

Lebesgueräume. Dennoch wird jeder Beweisschritt explizit ausgeführt und vorgeführt, um Fehlschlüsse auszuschliessen.

Für eine Funktion  $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  erhält man die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{B}} |A(t) + C|x(t)|^{p/q}|^q \nu(t) dt \leq \int_{\mathbb{B}} |A(t)|^q \nu(t) dt + \int_{\mathbb{B}} C^q |x(t)|^p \nu(t) dt, \quad (4.9)$$

die wiederum bedeutet, dass die Funktion  $A(\cdot) + C|x(\cdot)|^{p/q}$  dem gewichteten Lebesgueräum  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  angehört. Dies hat zur Folge, dass die Behauptung (2) des Satzes eine unmittelbare Folgerung der Behauptung (1) ist.

Um die Behauptung (1) zu beweisen, zeigen wir zuerst die Stetigkeit von  $N$ , gefolgt vom Beweis der Beschränktheit von  $N$ . Anschliessend wird die Wachstumsbedingung (4.8) verifiziert.

### Schritt 1: Beweis der Stetigkeit von $N$ .

**Fall 1:**  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$ .

Der Stetigkeitsbeweis für  $N$  wird zunächst unter den Annahmen  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$  und  $N\theta = \theta$  durchgeführt. Folgend dem Schema eines indirekten Beweises nehmen wir an, dass  $N$  an der Stelle  $\theta \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  unstetig ist. Hierbei bezeichnet  $\theta$  die Nullfunktion. Dann existiert eine Funktionenfolge  $\{\phi_n(\cdot)\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit  $\phi_n(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$ , die in  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$ -Norm gegen  $\theta$  konvergiert, und eine Zahl  $a > 0$ , so dass die Ungleichung

$$\|N\phi_n\|_{L_q(\mathbb{B}, \nu)}^q = \int_{\mathbb{B}} |N\phi_n(t)|^q \nu(t) dt > a, \quad (4.10)$$

gültig ist. Diese bedeutet, dass die Folge der Bilder, nämlich  $\{N\phi_n\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) nicht gegen die Nullfunktion  $\theta$  konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{B}} |\phi_n(t)|^p \nu(t) dt < \infty \quad (4.11)$$

annehmen, denn wir sind in der Lage die Funktionen  $\phi_n(\cdot)$  so zu wählen, dass die gliedweise Abschätzung  $\|\phi_n\|_{L_p(\mathbb{B}, \nu)}^p \leq \frac{1}{n^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  gilt, was folgende Kette nach sich zieht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{B}} |\phi_n(t)|^p \nu(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty. \quad (4.12)$$

Es ist offensichtlich, dass die Konvergenz der Folge  $\phi_n(\cdot) \rightarrow \theta$  in  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$ -Norm zu der Konvergenz der Folge  $\{\phi_n(\cdot)\nu^{1/p}(\cdot)\}$  gegen  $\theta$  in  $L_p(\mathbb{B})$ -Norm äquivalent ist. Dies liefert die Konvergenz der Folge  $\{\phi_n(\cdot)\nu^{1/p}(\cdot)\}$  dem Maße nach gegen die Funktion  $\theta$ . Gemäß KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 332, existiert eine Teilfolge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  der Folge  $\{\phi_n(\cdot)\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), so dass  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\nu^{1/p}(\cdot)\}$  fast überall auf  $\mathbb{B}$  gegen  $\theta$

konvergiert. Unter der Berücksichtigung der Positivität der Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  ziehen wir den Schluss, dass die Folge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  ebenso fast überall auf  $\mathbb{B}$  gegen  $\theta$  konvergiert. Wendet man das Schema aus ELSTRODT [34], S. 255, an, das die Beziehungen zwischen verschiedenen Konvergenzarten darstellt, so erkennt man, dass dieselbe Folge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  auch dem Maße nach gegen die Funktion  $\theta$  konvergiert, was aufgrund der Bedingung  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$  gerechtfertigt ist. Diese Teilfolge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  wird wieder mit  $\{\phi_n(\cdot)\}$  bezeichnet und wir arbeiten im folgenden mit dieser Folge.

Als nächstes konstruieren wir eine Zahlenfolge  $\{\epsilon_k\}$  mit  $\epsilon_k > 0$ , eine Funktionenfolge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  und eine Mengenfolge  $\{B_k\}$  mit  $B_k \subset \mathbb{B}$  ( $k=1,2,\dots$ ), so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(a) \quad \epsilon_{k+1} < \frac{\epsilon_k}{2}; \quad (4.13)$$

$$(b) \quad \mu(B_k) \leq \epsilon_k; \quad (4.14)$$

$$(c) \quad \int_{B_k} |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt > \frac{2}{3}a; \quad (4.15)$$

$$(d) \quad \text{Gilt } \mu(D) \leq 2\epsilon_{k+1} \text{ (für eine beliebige Menge } D \subset \mathbb{B}\text{),} \quad (4.16)$$

$$\text{so gilt auch } \int_D |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt < \frac{a}{3}.$$

Die Folgen  $\{\epsilon_k\}$ ,  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  und  $\{B_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) werden induktiv konstruiert. Sei  $\epsilon_1 := \mu(\mathbb{B})$ ,  $\phi_{n_1}(t) := \phi_1(t)$ ,  $B_1 := \mathbb{B}$ . Sind die  $\epsilon_k$ ,  $\phi_{n_k}(\cdot)$  und  $B_k$  schon konstruiert, so nehmen wir als  $\epsilon_{k+1}$  eine beliebige positive Zahl, die die Bedingung (d) erfüllt, was aufgrund der absoluten Stetigkeit der Funktion  $I : \mathcal{P}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ , bestimmt durch die Regel

$$I(D) = \int_D |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt, \quad (4.17)$$

wobei  $\mathcal{P}(\mathbb{B})$  die Menge aller messbaren Teilmengen von  $\mathbb{B}$  bezeichnet, möglich ist. Dann ist die Bedingung (a) automatisch erfüllt, denn die Funktion  $\phi_{n_k}(\cdot)$  genügt der Bedingung (c). Infolge des Satzes 20 konvergiert die Folge  $\{N\phi_{n_k}(\cdot)\}$  dem Maße nach gegen  $\theta$ , das heisst

$$\forall \sigma > 0 \quad \mu \{t : |N\phi_{n_k}(t) - N\theta| \geq \sigma\} \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $\sigma = \left(\frac{a}{3\mu_\nu(\mathbb{B})}\right)^{1/q}$  mit  $\mu_\nu(\mathbb{B}) = \int_{\mathbb{B}} \nu(t) dt$  erhalten wir, dass es für ein  $\epsilon = \epsilon_{k+1}$  eine Zahl  $n_{k+1}$  und eine Menge  $\mathbb{F}_{k+1} \subset \mathbb{B}$  gibt, mit denen für  $t \in \mathbb{F}_{k+1}$  die Ungleichungen

$$|N\phi_{n_{k+1}}(t) - N\theta| = |N\phi_{n_{k+1}}(t)| < \left(\frac{a}{3\mu_\nu(\mathbb{B})}\right)^{1/q} \quad (4.19)$$

und

$$\mu(\mathbb{B}) - \mu(\mathbb{F}_{k+1}) < \epsilon_{k+1} \quad (4.20)$$

gelten. Sei  $B_{k+1} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{F}_{k+1}$ . Dann folgt aus (4.20), dass die Menge  $B_{k+1}$  der Bedingung (b) genügt. Die Gültigkeit von (c) folgt aus (4.10) und (4.19):

$$\begin{aligned}
\int_{B_{k+1}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt &= \int_{\mathbb{B}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt - \int_{\mathbb{F}_{k+1}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt \\
&> a - \int_{\mathbb{F}_{k+1}} \left( \frac{a}{3\mu_\nu(\mathbb{B})} \right)^{(1/q) \cdot q} \nu(t) dt \\
&= a - \frac{a}{3\mu_\nu(\mathbb{B})} \int_{\mathbb{F}_{k+1}} \nu(t) dt > \frac{2}{3}a.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Wir setzen  $D_k = B_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). In Anbetracht der Bedingungen (a) und (b) haben wir

$$\begin{aligned}
\mu \left( \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i \right) &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon_i < \epsilon_{k+1} + \frac{1}{2}\epsilon_{k+1} + \dots + \frac{1}{2^i}\epsilon_{k+1} + \dots \\
&= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) \epsilon_{k+1} = 2\epsilon_{k+1}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Funktion  $\psi(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$  sei wie folgt definiert:

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi_{n_k}(t) & , \quad t \in D_k, \\ 0 & , \quad t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i. \end{cases} \tag{4.23}$$

Die Bedingungen (c), (d) und (4.22), (4.23) liefern für  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\int_{D_k} |N\psi(t)|^q \nu(t) dt &= \int_{D_k} |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt \\
&\geq \int_{B_k} |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt - \int_{B_k \setminus D_k} |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt \\
&> \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Aufgrund der Abschätzung (4.11) gilt  $\psi(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$ . Weil  $N$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  abbildet, erhalten wir  $N\psi(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu)$ . Andererseits folgt aus (4.24) gerade das Gegenteil, nämlich  $N\psi(\cdot) \notin L_q(\mathbb{B}, \nu)$ , denn die  $D_i$  sind disjunkt und folglich

$$\int_{\mathbb{B}} |N\psi(t)|^q \nu(t) dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} |N\psi(t)|^q \nu(t) dt > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{3} = \infty. \tag{4.25}$$

Dieser Widerspruch beweist die Stetigkeit des Nemytskij Operators  $N$  an der Stelle  $\theta$  unter der Annahme  $N\theta = \theta$ . Zum Beweis der Stetigkeit von  $N$  in einem beliebigen "Punkt"  $x_0(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$ , und ohne Annahme  $N\theta = \theta$ , betrachten wir den Nemytskij Operator  $f$  induziert durch die Funktion  $f(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t, \xi) = g(t, x_0(t) + \xi) - g(t, x_0(t)). \quad (4.26)$$

Dann gilt

$$f(t, \theta(t)) = g(t, x_0(t) + \theta(t)) - g(t, x_0(t)) = 0 \quad (4.27)$$

für alle  $t$ , was die Gleichung

$$f(\theta) = \theta \quad (4.28)$$

impliziert. Ferner, dank der schon bewiesenen Behauptung, ist der Nemytskij Operator  $f x(t)$  stetig an der Stelle  $\theta$ , da  $f$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  abbildet. Die Stetigkeit von  $f$  im "Punkt"  $\theta$  ergibt folgendes:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \left( \|x - \theta\|_{L_p(\mathbb{B}, \nu)} < \delta \implies \|f(x) - f(\theta)\|_{L_q(\mathbb{B}, \nu)} < \epsilon \right). \quad (4.29)$$

In Hinsicht auf (4.28) kann die Eigenschaft (4.29) auf folgende Weise umschrieben werden:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \left( \|x\|_{L_p(\mathbb{B}, \nu)} < \delta \implies \|g(t, x_0(t) + x(t)) - g(t, x_0(t))\|_{L_q(\mathbb{B}, \nu)} < \epsilon \right), \quad (4.30)$$

was einfach die Stetigkeit von  $g$  im Punkt  $x_0(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  bedeutet. Somit ist die Stetigkeit von  $N$  bewiesen, allerdings unter der Voraussetzung  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$ .

**Fall 2:**  $\mu(\mathbb{B}) = \infty$ .

Erneut sei  $\{\phi_n(\cdot)\} \subset L_p(\mathbb{B}, \nu)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) eine Funktionenfolge, für die die Ungleichung (4.10) gültig ist. Wir konstruieren eine Funktionenteilfolge  $\{\phi_{n_k}(\cdot)\}$  sowie eine Mengenfolge  $\{D_k\}$ ,  $D_k \subset \mathbb{B}$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) mit den Eigenschaften

$$(a) \quad \mu(D_k) < \infty, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (4.31)$$

$$(b) \quad \int_{D_k} |N\phi_{n_k}(t)|^q \nu(t) dt > \frac{a}{2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.32)$$

Wir verfahren wieder mittels Induktion. Wir setzen  $\phi_{n_1}(t) := \phi_1(t)$  für alle  $t \in \mathbb{B}$ , dann kann kraft der Abschätzung (4.10) eine Menge  $D_1$  gefunden werden, die sowohl (a) als auch (b) erfüllt. Angenommen, wir haben schon  $k$  Mengen und Funktionen konstruiert, die beide Eigenschaften (a) und (b) besitzen. Die Menge

$$\bigcup_{i=1}^k D_i \quad (4.33)$$

ist von endlichem Lebesgueschen Maß, und da die Stetigkeit von  $N$  schon für den Fall  $\mu(\mathbb{B}) < \infty$  nachgewiesen wurde, existiert ein Index  $n_{k+1}$  mit

$$\int_{\bigcup_{i=1}^k D_i} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt < \frac{a}{2}. \quad (4.34)$$

Aufgrund von (4.10) kann eine Teilmenge  $G_{k+1} \subset \mathbb{B}$  von endlichem Lebesgueschen Maß gefunden werden, so dass die Ungleichung

$$\int_{G_{k+1}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt > a \quad (4.35)$$

gilt. Sei  $D_{k+1} = G_{k+1} - \bigcup_{i=1}^k D_i$ . Die Gültigkeit der Bedingung (a) ist offensichtlich, wobei (b) unmittelbar aus (4.34) und (4.35) zu schlussfolgern ist:

$$\begin{aligned} \int_{D_{k+1}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt &= \int_{G_{k+1}} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt - \int_{\bigcup_{i=1}^k D_i} |N\phi_{n_{k+1}}(t)|^q \nu(t) dt \\ &> a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Definiert man eine Funktion  $\psi(\cdot)$  gemäß (4.23), so zeigt (4.11), dass  $\psi(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$ , während aus (b)  $N\psi(\cdot) \notin L_q(\mathbb{B}, \nu)$  folgt. Der Widerspruch beweist, dass  $N$  stetig in  $\theta \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  ist, vorausgesetzt  $\mu(\mathbb{B}) = \infty$  und  $N\theta = \theta$ . Der Beweis der Stetigkeit von  $N$  in jedem beliebigen Punkt  $x_0(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  ohne die Annahme  $N\theta = \theta$  verläuft analog.

**Schritt 2: Beschränktheit des Operators N.** Wir widmen uns nun dem Beweis der Beschränktheit des Operators  $N$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, dass  $N\theta = \theta$  gilt. Da der Operator  $N$  stetig in  $\theta$  ist, gibt es eine Zahl  $r > 0$ , so dass die Ungleichung

$$\int_{\mathbb{B}} |N\phi(t)|^q \nu(t) dt \leq 1 \quad (4.37)$$

für  $\phi(\cdot)$  mit

$$\int_{\mathbb{B}} |\phi(t)|^p \nu(t) dt \leq r^p \quad (4.38)$$

gilt. Mit anderen Worten heisst das, dass es eine Kugel mit dem Radius  $r$  im Raum  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  gibt, die komplett in die Einheitskugel des Funktionenraumes  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  abgebildet wird.

Sei  $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  und  $nr^p \leq \|x\|^p \leq (n+1)r^p$  mit einer natürlichen Zahl  $n$ . Nun

können wir die Menge  $\mathbb{B}$  in disjunkte Teilmengen  $G_1, G_2, \dots, G_{n+1}$  so zerlegen, dass für alle  $i = 1, \dots, n+1$  die Ungleichung

$$\int_{G_i} |x(t)|^p \nu(t) dt \leq r^p \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (4.39)$$

erfüllt ist. Angesichts der Bedingung (4.37) erhalten wir

$$\int_{\mathbb{B}} |Nx(t)|^q \nu(t) dt \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \int_{G_i} |Nx(t)|^q \nu(t) dt}_{\leq 1} \leq n+1, \quad (4.40)$$

woraus die Ungleichung

$$\|Nx(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{B}, \nu)} = \left\{ \int_{\mathbb{B}} |Nx(t)|^q \nu(t) dt \right\}^{1/q} \leq \left\{ \left( \frac{\|x\|}{r} \right)^p + 1 \right\}^{1/q} \quad (4.41)$$

folgt. Somit ist der Operator  $N$  beschränkt.

**Schritt 3: Gültigkeit der Bedingung (4.8).** Anschliessend zeigen wir, dass die Wachstumsbedingung (4.8) erfüllt ist. Infolge der Beschränktheit von  $N$  kann eine Konstante  $C > 0$  gefunden werden, mit der die Ungleichung

$$\int_{\mathbb{B}} |g(t, x(t))|^q \nu(t) dt \leq C^q \quad (4.42)$$

gilt, falls

$$\int_{\mathbb{B}} |x(t)|^p \nu(t) dt \leq 1, \quad (4.43)$$

d.h. die Einheitskugel von  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$  wird in die Kugel mit dem Radius  $C$  vom Raum  $L_q(\mathbb{B}, \nu)$  abgebildet. Wir definieren eine Hilfsfunktion  $\phi(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\phi(t, \xi) = \max \{ |g(t, \xi)| - C|\xi|^{p/q}, 0 \}. \quad (4.44)$$

Im nächsten Schritt wird folgende elementare Ungleichung angewendet, die für alle  $a > b > 0$  und  $q \geq 1$  gilt:

$$(a - b)^q \leq a^q - b^q. \quad (4.45)$$

Dieser Ungleichung zufolge gilt: wenn  $\phi(t, \xi) \neq 0$ , dann muss auch

$$|\phi(t, \xi)|^q \leq |g(t, \xi)|^q - C^q |\xi|^p \quad (4.46)$$

erfüllt sein. Sei  $x(\cdot)$  eine fest gewählte Funktion in  $L_p(\mathbb{B}, \nu)$ . Mit  $D$  bezeichnen wir die Menge aller Punkte  $t \in \mathbb{B}$ , für die  $\phi(t, \xi) > 0$  gilt.

Angenommen,

$$\int_D |x(t)|^p \nu(t) dt = n + \epsilon \quad (4.47)$$

mit einer natürlichen Zahl  $n$  und  $0 \leq \epsilon < 1$ . Dann kann die Menge  $D$  in  $n + 1$  disjunkte Teilmengen  $D_1, \dots, D_{n+1}$  so zerlegt werden, dass für alle  $i = 1, \dots, n + 1$  die Ungleichung

$$\int_{D_i} |x(t)|^p \nu(t) dt < 1 \quad (i = 1, \dots, n + 1) \quad (4.48)$$

gilt. Weiterhin gilt wegen (4.42)

$$\int_D |g(t, x(t))|^q \nu(t) dt = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{D_i} |g(t, x(t))|^q \nu(t) dt \leq (n + 1) C^q \quad (4.49)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} |\phi(t, x(t))|^q \nu(t) dt &= \int_D |\phi(t, x(t))|^q \nu(t) dt \leq \\ &\leq \int_D |g(t, x(t))|^q \nu(t) dt - C^q \int_D |x(t)|^q \nu(t) dt \quad (4.50) \\ &\leq (n + 1) C^q - C^q (n + \epsilon) \leq C^q. \end{aligned}$$

Sei  $G_1 \subset G_2 \subset \dots$  eine monoton wachsende Mengenfolge in  $\mathbb{B}$ , die die Gesamtmenge ausschöpft, d.h. das System  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  besitzt die Eigenschaft

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \mathbb{B}, \quad (4.51)$$

wobei  $\mu(G_i) < \infty$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Nach Satz 19 existiert es eine messbare Funktion  $x_k(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , die ausserhalb der Menge  $G_k$  verschwindet und auf der Menge  $G_k$  selbst den folgenden Bedingungen genügt:

$$\phi(t, x_k(t)) = \max_{-k < \xi < k} \phi(t, \xi) \quad \forall t \in G_k; \quad (4.52)$$

$$|x_k(t)| \leq k \quad \forall t \in G_k. \quad (4.53)$$

Offenbar gilt  $x_k(\cdot) \in L_p(\mathbb{B}, \nu)$  und

$$\sup_{-\infty < \xi < \infty} \phi(t, \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t, x_k(t)) \quad (4.54)$$

für alle  $t \in \mathbb{B}$ . Wir setzen

$$A(t) := \sup_{-\infty < \xi < \infty} \phi(t, \xi), \quad (4.55)$$

womit sich nach dem Anwenden des Fatouschen Lemmas, vgl. ELSTRODT [34], S. 143, und (4.50) folgendes aufschreiben lässt:

$$\begin{aligned} \|A\|_{L_q(\mathbb{B}, \nu)}^q &= \int_{\mathbb{B}} |A(t)|^q \nu(t) dt = \int_{\mathbb{B}} \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t, x_k(t)) \right|^q \nu(t) dt \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}} |\phi(t, x_k(t))|^q \nu(t) dt \\ &\leq \sup_k \int_{\mathbb{B}} |\phi(t, x_k(t))|^q \nu(t) dt \leq C^q. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Somit gilt  $A(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu)$ . Anschliessend, aufgrund der Ungleichung

$$A(t) = \sup_{-\infty < \xi < \infty} \phi(t, \xi) \geq \sup_{-\infty < \xi < \infty} \{ |g(t, \xi)| - C|\xi|^{p/q} \}, \quad (4.57)$$

ist die Wachstumsbedingung

$$|g(t, \xi)| \leq A(t) + C|\xi|^{p/q}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.58)$$

erfüllt, welche genau die Bedingung (4.8) des Satzes darstellt. Der Satz ist somit bewiesen.  $\blacksquare$

**Bemerkung 16.** (a) Die Zahlen  $p$  und  $q$  sind nicht unbedingt durch die Gleichung  $1/p + 1/q = 1$  verbunden, wie man vermuten könnte.

(b) In dem bewiesenen Satz sind zwei gewichtete Lebesgueräume mit der gleichen Gewichtsfunktion im Spiel. Man kann aber den Nemytskij Operator  $N : L_p(\mathbb{B}, \nu_1) \rightarrow L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$  mit zwei unterschiedlichen Gewichtsfunktionen  $\nu_1(\cdot)$  und  $\nu_2(\cdot)$  im Hinblick auf Stetigkeit untersuchen. Eine modifizierte Wachstumsbedingung, vorgeschlagen in LEONARDI [60], S. 41, für beschränkte Gebiete und  $p, q \geq 1$ , jedoch ohne die Stetigkeitsannahme für  $\nu_i(\cdot)$ , ( $i = 1, 2$ ), lässt auf die Stetigkeit des Nemytskij Operators  $N$  auch in Räumen über unbeschränkten Intervallen schliessen, wie der nächste Satz zeigt.

**Satz 23.** Seien  $\nu_1(\cdot)$ ,  $\nu_2(\cdot)$  zwei nicht unbedingt identische Gewichtsfunktionen gemäß Definition 1,  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  und  $g(t, \xi) : \mathbb{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen für den Nemytskij Operator

$$Nx(t) = g(t, x(t)) : \quad (4.59)$$

(1) Bildet der Operator  $N$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu_1)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$  ab, so ist  $N$  ein stetiger Operator von  $L_p(\mathbb{B}, \nu_1)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$ , also  $N : L_p(\mathbb{B}, \nu_1) \rightarrow$

$L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$ , und es existiert eine Funktion  $A(\cdot) \in L_q(\mathbb{B})$  und eine Konstante  $C > 0$ , so dass die Wachstumsbedingung

$$|g(t, \xi)| \leq A(t) \left( \frac{1}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} + C|\xi|^{p/q} \left( \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} \quad (4.60)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^1$  erfüllt ist.

- (2) Ist die Wachstumsbedingung (4.60) erfüllt, so bildet  $N$  alle Funktionen aus  $L_p(\mathbb{B}, \nu_1)$  in den Raum  $L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$  ab und ist somit ein stetiger und beschränkter Operator von  $L_p(\mathbb{B}, \nu_1)$  nach  $L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$ .

**Bemerkung 17.** (a) Es ist möglich, die Wachstumsbedingung (4.60) wie folgt in Einklang mit Satz 22 zu bringen: Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , sowie eine Funktion  $A(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$ , so dass die Ungleichung

$$|g(t, \xi)| \leq A(t) + C|\xi|^{p/q} \left( \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} \quad (4.61)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^1$  erfüllt ist.

- (b) Gilt  $\nu_1(t) \equiv \nu_2(t)$ , so folgt die Wachstumsbedingung (4.60) aus (4.8), da letztere für beliebige positive Zahlen  $p, q$  gilt.

**Beweis:** Das Beweisschema bleibt identisch zu dem des Satzes 22 oder vgl. LEONARDI [60], S. 41.  $\square$

## 4.2.2 Über den Nemytskij Operator auf dem Raum der Vektorfunktionen

Wir betrachten nun den Nemytskij Operator auf dem gewichteten Lebesgueraum  $L_p^n(\mathbb{B}, \nu)$  der Vektorfunktionen. Seien  $g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n) : \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Carathéodory Funktionen. Jede Funktion  $g_i(\cdot, \cdot)$  erzeugt einen Nemytskij Operator  $N_i$ , definiert auf einer Familie von reellen Vektorfunktionen  $x(\cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  gemäß

$$N_i x(t) = g_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (4.62)$$

Laut Satz 17 überträgt dieser Operator  $N_i$  jede messbare Vektorfunktion in eine messbare skalare Funktion. Der bewiesene Satz 22 ist anwendbar auf den Operator  $N_i$ , der den Raum  $L_p^n(\mathbb{B}, \nu)$  in den Raum  $L_q^1(\mathbb{B}, \nu)$  abbildet. In diesem Fall wird die Wachstumsbedingung (4.8) ersetzt durch

$$|g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_i(t) + C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \quad (4.63)$$

für alle  $(t, \xi) = (t, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n$ , wobei  $A_i(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu)$ ,  $C > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir setzen einen Operator  $N$  aus den einzelnen Operatoren  $N_1, \dots, N_n$  zusammen:

$$N = (N_1, \dots, N_n). \quad (4.64)$$

Für diesen zusammengesetzten Operator  $N$  ist der folgende Satz gültig:

**Satz 24.** Damit der Nemytskij Operator  $N = (N_1, \dots, N_n)$  den Raum  $L_p^n(\mathbb{B}, \nu)$  in den Raum  $L_q^n(\mathbb{B}, \nu)$  abbildet, ist notwendig und hinreichend, dass die Carathéodory Funktionen  $g_1, \dots, g_n$  die Wachstumsbedingungen (4.63) erfüllen, wobei

$$A_i(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu), \quad C > 0, \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (4.65)$$

□

**Bemerkung 18.** Ähnlich dem Satz 22 sowie anschliessender Bemerkung, können auch hier die Wachstumsbedingungen (4.63) im Fall  $p, q > 0$  durch eine äquivalente Formulierung ersetzt werden: Es existieren Funktionen  $A_i(\cdot) \in L_q(\mathbb{B})$ ,  $i = 1, \dots, n$  und eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n$  die Ungleichungen

$$|g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_i(t)\nu(t)^{-1/q} + C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \quad (4.66)$$

gelten.

Im Fall eines Nemytskij Operators, der in gewichteten Lebesgueräumen mit unterschiedlichen Gewichtsfunktionen wirkt, ergibt sich in Analogie zum vorherigen Satz folgender Satz.

**Satz 25.** Seien  $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot)$  zwei nicht unbedingt identische Gewichtsfunktionen gemäß Definition 1,  $p \geq 1, q \geq 1$ . Weiter seien die Operatoren  $N_i$  wie vorher definiert. Damit der zusammengesetzte Nemytskij Operator  $N = (N_1, \dots, N_n)$  den Raum  $L_p^n(\mathbb{B}, \nu_1)$  in den Raum  $L_q^n(\mathbb{B}, \nu_2)$  abbildet, ist es notwendig und hinreichend, dass die Carathéodory Funktionen  $g_1, \dots, g_n$  den Wachstumsbedingungen

$$|g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_i(t) \left( \frac{1}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} + C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \left( \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} \quad (4.67)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n$  mit  $C > 0, A_i(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}), i = 1, 2, \dots, n$  genügen. □

**Bemerkung 19. (a)** Analog zum skalaren Fall können die Wachstumsbedingungen (4.67) durch äquivalente ersetzt werden. Es existiert eine Konstante  $C > 0$  sowie Funktionen  $A_i(\cdot) \in L_q(\mathbb{B}, \nu_2)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), so dass die Ungleichungen

$$|g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_i(t) + C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \left( \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \right)^{1/q} \quad (4.68)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{R}^n$  erfüllt sind.

(b) Gilt darüber hinaus  $\nu_1(t) \equiv \nu_2(t)$ , so ist die formulierte Wachstumsbedingung im Fall  $p, q \geq 1$  mit (4.63) gleichwertig.

(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde hier die gleiche Anzahl von Funktionen  $g_i(\cdot, \cdot)$  sowie Komponenten  $x_i(\cdot)$  der Vektorfunktion  $x(\cdot)$  betrachtet.



# Kapitel 5

## Zu den analytischen Eigenschaften von Integralfunktionalen

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Funktionale im Kontext der Theorie der optimalen Steuerung ist die Stetigkeit bzw. die Halbstetigkeit. Will man einen Existenzsatz für eine Klasse von Steuerungsproblemen mit Hilfe des verallgemeinerten Weierstraßschen Satzes, vgl. Satz 40, beweisen, so muss man die Unterhalbstetigkeit (im Fall eines Minimierungsproblems) bzw. die Oberhalbstetigkeit (im Fall eines Maximierungsproblems) eines Funktionals nachweisen. Die Unterhalbstetigkeitseigenschaft der Integralfunktionale über einem kompakten Intervall wurde schon von vielen Autoren untersucht, zum Beispiel von A. D. Ioffe in [44], R. Lucchetti und F. Patrone in [64]. R. Lucchetti und F. Patrone beschreiben in ihrer Arbeit darüber hinaus die Anwendung der Eigenschaften der Nemytskij Operatoren zur Untersuchung der Unterhalbstetigkeit der Funktionale.

Da wir bis jetzt zwei Steuerungsprobleme mit unterschiedlichen Integralbegriffen gegenübergestellt haben, setzen wir damit auch in diesem Kapitel fort und vergleichen die Unterhalbstetigkeitseigenschaften der Integralfunktionale mit einem uneigentlichen Riemannsches und einem Lebesgueschen Integral. Das Hauptresultat dieses Kapitels wird im Satz 27 formuliert, in dem unter gewissen Voraussetzungen an den Integranden  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und die Gewichtsfunktionen  $\nu(\cdot)$ ,  $\tilde{\nu}(\cdot)$  die Unterhalbstetigkeit des Integralfunktionals mit der Lebesgueschen Interpretation in der schwachen Topologie bewiesen wird. Sind die Voraussetzungen des Satzes verletzt, so kann auch das Integralfunktional mit einem Lebesgueschen Integral durchaus nicht unterhalbstetig sein, was durch ein Beispiel bestätigt wird. Da Integralfunktionale, die ein uneigentliches Riemannsches Integral enthalten, im Allgemeinen nicht unterhalbstetig sind, ist es folglich nicht möglich, die Existenztheorie für Steuerungsprobleme mit Riemannscher Interpretation des Integrals mittels des Weierstraßschen Satzes ohne zusätzliche Forderungen aufzubauen. Eine Alternative würde der duale Zugang darstellen, beispielsweise über die Dualitätstheorie im Sinne von Klötzler, vgl. KLÖTZLER [52], auf die im Kapitel 7 eingegangen wird.

## 5.1 Die Probleme $(P_\infty^L)$ und $(P_\infty^R)$

Ähnlich wie im Kapitel 2 betrachten wir folgende Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont. Sie bestehen in der Minimierung eines der Funktionale

$$J_\infty^R(x, u) = R \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \longrightarrow \min! \quad (5.1)$$

oder

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \longrightarrow \min! \quad (5.2)$$

in Bezug auf alle Prozesse  $(x, u)$ , die den bereits vorgestellten Nebenbedingungen

$$(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (5.3)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+; \quad (5.4)$$

$$x(0) = x_0; \quad (5.5)$$

$$|x(t)| \leq \beta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \beta(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (5.6)$$

$$u(t) \in U \subset \text{Comp}(\mathbb{R}^m) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+ \quad (5.7)$$

genügen. Die Funktionen  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien stetig in allen ihren Argumenten und  $r(t, \xi, v)$  sei stetig differenzierbar in den zweiten und dritten Argumenten. Die Probleme (5.1), (5.3) – (5.7) und (5.2), (5.3) – (5.7) werden entsprechend mit  $(P_\infty^R)$  und  $(P_\infty^L)$  bezeichnet. Zunächst geben wir ein Beispiel eines  $(P_\infty^R)$  Steuerungsproblems an, wo das Ziel-funktional nicht unterhalbstetig ist.

## 5.2 Gegenbeispiel im Fall eines $(P_\infty^R)$ Problems

**Beispiel 6.** Zu betrachten ist zuerst die Aufgabe

$$J_\infty(x, u) = - \int_0^\infty \sin(x_1(t)) dt \longrightarrow \min! \quad (5.8)$$

$$(x, u) \in W_p^{1,2}(\mathbb{R}^+, \nu) \times (L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \cap C^0(\mathbb{R}^+)); \quad (5.9)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1(0) = 0; \quad (5.10)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad x_2(0) = 0; \quad (5.11)$$

$$u(t) \in U = [0, 1] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.12)$$

vgl. PICKENHAIN ET AL. [79], S. 465. Die Zustandsbeschränkung (5.6) wird hier weggelassen. Die Gewichtsfunktionen  $\tilde{\nu}(\cdot)$ ,  $\nu(\cdot)$  seien wie folgt gewählt:

$$\nu(t) = e^{-\rho t}, \quad \tilde{\nu}(t) \equiv 1. \quad (5.13)$$

Wie im Beispiel 4, bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}$  die Menge aller Paare  $(x, u)$ , die den Nebenbedingungen (5.9) – (5.12) genügen, mit  $\mathcal{A}_L$  die Teilmenge  $(x, u) \in \mathcal{A}$ , für die

das Integral  $L\text{-}\int_0^\infty (-\sin(x_1(t))) dt$  existiert und endlich ist, und mit  $\mathcal{A}_R$  die Teilmenge aller Paare  $(x, u) \in \mathcal{A}$ , die das Integral  $R\text{-}\int_0^\infty (-\sin(x_1(t))) dt$  konvergieren lassen. In dieser Aufgabe erhalten wir, dass die zulässigen Mengen für beide Aufgaben nichtleer sind, also  $\mathcal{A}_L \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A}_R \neq \emptyset$ , denn  $(x_0, u_0) \equiv ((0), 0) \in (\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}_R)$ . Betrachten wir eine Folge

$$u^N(t) = \frac{2}{N} \quad (5.14)$$

zulässiger Steuerungen in  $(P_\infty^R)$ . Dann sind die Funktionen  $x_1^N(\cdot)$  und  $x_2^N(\cdot)$  Elemente des gewichteten Sobolevraumes  $W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  für alle  $1 < p < \infty$ , und es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x^N - x_0\|_{W_p^{1,2}(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0 \quad (5.15)$$

sowie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u_0\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0. \quad (5.16)$$

Jedoch ist die Unterhalbstetigkeit des Integralfunktional (5.8) verletzt entlang der stark, und somit auch schwach, konvergenten Folge  $\{(x^N, u^N)\} \rightarrow (x_0, u_0)$ ,  $(x_0, u_0) \in W_p^{1,2}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Wir berechnen, vgl. FICHTENHOLZ [38], S. 554, Nr. 491, Beispiele 3 und 4,

$$\begin{aligned} R\text{-}\int_0^\infty \sin(x_1^N(t)) dt &= R\text{-}\int_0^\infty \sin\left(\frac{t^2}{N}\right) dt = \frac{\sqrt{N}}{2} \cdot R\text{-}\int_0^\infty \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds \\ &= \frac{\sqrt{N}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

In Anbetracht der Tatsache, dass

$$J_\infty^R(x_0, u_0) = 0 \quad (5.18)$$

gilt, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\neq \lim_{N \rightarrow \infty} J_\infty^R(x^N, u^N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} R\text{-}\int_0^\infty \left(-\sin(x_1^N(t))\right) dt = -\infty, \end{aligned} \quad (5.19)$$

womit die Verletzung der schwachen, und somit auch der starken, Unterhalbstetigkeit des Funktional (5.8) nachgewiesen ist.

### 5.3 Über die Unterhalbstetigkeit der Integralfunktionale, die ein Lebesguesches Integral beinhalten

Wir formulieren nun einen Unterhalbstetigkeitssatz für Integralfunktionale der Gestalt

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (5.20)$$

auf  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ , vgl. PICKENHAIN ET AL. [79], Satz 3.1, S. 458.<sup>1</sup> Zu diesem Zweck werden mehrere Voraussetzungen getroffen.

**Voraussetzung 5.** Die Funktion  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in allen ihren Argumenten, stetig differenzierbar und konvex in  $v$ . Dabei sind  $\xi$  und  $v$  die Platzhaltervariablen, die für  $x(t)$  bzw.  $u(t)$  stehen.

**Voraussetzung 6.** Die Funktion  $r(\cdot, \cdot, \cdot)$  erfüllt folgende Wachstumsbedingung im zweiten sowie im dritten Argument. Es existiert eine Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  sowie eine Konstante  $B_1 > 0$ , so dass für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und  $1 < p < \infty$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \cdot \tilde{\nu}(t) \right| \\ & \leq A_1(t) + B_1 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p + B_1 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^p \end{aligned} \quad (5.21)$$

gilt.

**Voraussetzung 7.** Der Gradient  $\nabla_v r(t, \xi, v)$  genügt der folgenden Wachstumsbedingung bezüglich des zweiten und des dritten Argumentes. Es existiert eine Funktion  $A_2(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^+)$  und eine Konstante  $B_2 > 0$ , mit denen für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und  $p, q : 1/p + 1/q = 1$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \nabla_v r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)^{1/p}} \right| \\ & \leq A_2(t) + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^{p/q} \end{aligned} \quad (5.22)$$

gültig ist.

**Voraussetzung 8.** Die Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  erfüllt die so genannte “decay at infinity“-Bedingung, vgl. ADAMS [1], S. 160, 167:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu(t + \epsilon)}{\nu(t)} = 0 \quad (5.23)$$

für jedes  $\epsilon > 0$ .

<sup>1</sup>Die Wachstumsbedingungen, vorausgesetzt in der Literaturquelle, werden hier leicht geändert.

**Satz 26.** Seien  $1 < p < \infty$ , eine positive Funktion  $\tilde{\nu}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  und eine stetig differenzierbare Dichtefunktion  $\nu(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit beschränkter Ableitung, die darüber hinaus monoton fallend gegen Null strebt, gegeben. Ferner seien die Voraussetzungen (5) – (8) von einem positiven Integranden  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$  und der Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$  erfüllt. Wir betrachten zwei beliebige schwach konvergente Funktionenfolgen  $\{x_N\} \subset W_p^{1,n}(\mathbb{R}, \nu)$ ,  $\{u_N\} \subset L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) mit  $x_N \rightharpoonup x_0 \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $u_N \rightharpoonup u_0 \in L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Dann ist das Funktional  $J_\infty^L$  in (5.20) schwach unterhalbstetig, d.h. es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} J_\infty^L(x_0, u_0) &= L \int_0^\infty r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} L \int_0^\infty r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) dt = \liminf_{N \rightarrow \infty} J_\infty^L(x_N, u_N). \end{aligned} \quad (5.24)$$

**Beweis:**

**Schritt 1: Kompaktheit der Einbettung  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$ .** Dank der Voraussetzung 8 kann das Lemma 2 angewendet werden, um die Kompaktheit der Einbettung  $W_p^{1,n}(\Omega_\nu) \rightarrow L_p^n(\Omega_\nu)$  ungewichteter Räume mit  $\Omega_\nu \subset \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\Omega_\nu = \{ (t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t, 0 < \xi < \nu(t) \}, \quad (5.25)$$

sicherzustellen. Anschliessend wird die Kompaktheit der Einbettung  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  der gewichteten Räume nach dem Satz 4 geschlussfolgert. Die Kompaktheit dieser Einbettung besagt, dass der Einbettungsoperator  $E : W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  vollstetig ist, d.h. er überführt jede schwach konvergente Folge des Raumes  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  in eine stark konvergente Folge des Raumes  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Mit anderen Worten kann eine schwach konvergente Folge  $\{x_N\}$  im Raum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  als eine bezüglich der  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  – Norm konvergente Folge angesehen werden.

**Schritt 2: Eine Abschätzung für die Funktionswerte  $J_\infty^L(x_N, u_N)$ .** Die Konvexität des Integranden im dritten Argument und seine Differenzierbarkeit nach  $v$  liefern die Ungleichung

$$r(t, x_N(t), u_N(t)) \geq r(t, x_N(t), u_0(t)) + \nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) (u_N(t) - u_0(t)), \quad (5.26)$$

die wie folgt erweitert werden kann:

$$\begin{aligned} r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) &\geq r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) \\ &+ \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) \\ &+ \left( \nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \right)^T \\ &\quad \cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Integration der obigen Ungleichung über  $\mathbb{R}^+$  führt zur Ungleichung

$$\begin{aligned} L \int_0^\infty r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) dt &\geq J_1(x_N, u_0) + J_2(x_0, u_N, u_0) \\ &+ J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit den Bezeichnungen

$$J_1(x_N, u_0) := L \int_0^\infty r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt; \quad (5.29)$$

$$J_2(x_0, u_N, u_0) := L \int_0^\infty \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t))^T (u^N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt; \quad (5.30)$$

$$J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) := L \int_0^\infty (\nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)))^T \cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \quad (5.31)$$

Die Existenz und Endlichkeit der Integrale  $J_1(x_N, u_0)$ ,  $J_2(x_0, u_N, u_0)$  und  $J_3(x_N, x_0, u_N, u_0)$  in der rechten Seite der Ungleichung (5.28) wird im Schritt 4 nachgewiesen.

### Schritt 3: Folgerungen aus den Wachstumsbedingungen.

**Lemma 3.** Der Nemytskij Operator  $N(\cdot, \cdot)$ , definiert gemäß

$$N(x_N, u_0)(t) = r(t, x_N(t), u_0(t)), \quad (5.32)$$

bildet den Raum  $L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  stetig in den Raum  $L_1(\mathbb{R}^+, \tilde{\nu})$  ab.

**Beweis:** Aufgrund der Beziehungen

$$(x_N, u_0) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff (x_N \nu^{1/p}, u_0 \nu^{1/p}) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+); \quad (5.33)$$

$$\left( \frac{x_N}{\nu^{1/p}}, \frac{u_0}{\nu^{1/p}} \right) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff (x_N, u_0) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+) \quad (5.34)$$

und

$$r(\cdot, x_N(\cdot), u_0(\cdot)) \in L_1(\mathbb{R}^+, \tilde{\nu}) \iff r(\cdot, x_N(\cdot), u_0(\cdot)) \tilde{\nu}(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad (5.35)$$

können die Wachstumsbedingungen aus dem Satz 21 auf folgende Weise interpretiert werden:

$$\begin{aligned} & \left| r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \cdot \tilde{\nu}(t) \right| \\ & \leq A_1(t) + B_1 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p + B_1 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^p \\ & \forall (t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.36)$$

mit einer Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  und einer Konstante  $B_1 > 0$ . Da gerade diese Wachstumsbedingung in dem zu beweisenden Satz vorausgesetzt wurde, ist der Nemytskij Operator (5.32) ein stetiger Operator aus  $L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  nach  $L_1(\mathbb{R}^+, \tilde{\nu})$ . ■

**Lemma 4.** Der Nemytskij Operator  $N(\cdot, \cdot)$ , definiert gemäß

$$N(x_0, u_0)(t) = \left| \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)}, \quad (5.37)$$

bildet den gewichteten Lebesgueraum  $L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  stetig in den gewichteten Lebesgueraum  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  ab.

**Beweis:** Ähnlich wie im vorherigen Lemma liefern die Beziehungen

$$(x_0, u_0) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff (x_0 \nu^{1/p}, u_0 \nu^{1/p}) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+); \quad (5.38)$$

$$\left( \frac{x_0}{\nu^{1/p}}, \frac{u_0}{\nu^{1/p}} \right) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff (x_0, u_0) \in L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+) \quad (5.39)$$

und

$$\begin{aligned} \left| \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \right| \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} &\in L_q(\mathbb{R}^+, \nu) \\ \iff \left| \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \right| \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)^{1/p}} &\in L_q(\mathbb{R}^+), \end{aligned} \quad (5.40)$$

dass die Wachstumsbedingung aus Satz 21 als

$$\begin{aligned} &\left| \nabla_v r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)^{1/p}} \right| \\ &\leq A_2(t) + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^{p/q} \\ &\forall (t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.41)$$

mit einer Funktion  $A_2(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^+)$  und einer Konstanten  $B_2 > 0$  interpretiert werden kann. Da diese im Satz vorausgesetzt wurde, bildet der Nemytskij Operator (5.37) den Raum  $L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  stetig in den Raum  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  ab. ■

**Lemma 5.** Der Nemytskij Operator  $N(\cdot, \cdot, \cdot)$  mit

$$N(x_N, x_0, u_0)(t) = \left| \left( \nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \right) \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \quad (5.42)$$

ist ein stetiger Operator zwischen den gewichteten Lebesgueräumen  $L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ .

**Beweis:** Es gelten folgende logische Beziehungen:

$$(x_N, x_0, u_0) \in L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff \quad (5.43)$$

$$(x_N \nu^{1/p}, x_0 \nu^{1/p}, u_0 \nu^{1/p}) \in L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+);$$

$$\left( \frac{x_N}{\nu^{1/p}}, \frac{x_0}{\nu^{1/p}}, \frac{u_0}{\nu^{1/p}} \right) \in L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+, \nu) \iff \quad (5.44)$$

$$(x_N, x_0, u_0) \in L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+)$$

und

$$\begin{aligned}
& \left| (\nabla_v r(\cdot, x_N(\cdot), u_0(\cdot)) - \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot))) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} \right| \in L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu) \\
& \iff \\
& \left| (\nabla_v r(\cdot, x_N(\cdot), u_0(\cdot)) - \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot))) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)^{1/p}} \right| \in L_q^1(\mathbb{R}^+).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Aus der Voraussetzung 7 leiten wir folgende Wachstumsbedingung ab:

$$\begin{aligned}
& \left| \nabla_v r\left(t, \frac{\tilde{\xi}_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \right. \\
& \quad \left. - \nabla_v r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \right| \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)^{1/p}} \\
& \leq \left| \nabla_v r\left(t, \frac{\tilde{\xi}_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \right| \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)^{1/p}} \\
& \quad + \left| \nabla_v r\left(t, \frac{\xi_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{\xi_n}{\nu(t)^{1/p}}, \frac{v_1}{\nu(t)^{1/p}}, \dots, \frac{v_m}{\nu(t)^{1/p}}\right) \right| \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)^{1/p}} \\
& \leq 2A_2(t) + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |\tilde{\xi}_i|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q} + 2B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^{p/q} \\
& \quad \forall (t, \tilde{\xi}, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,
\end{aligned} \tag{5.46}$$

wobei  $A_2(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^+)$  und  $B_2 > 0$ . Folglich bildet der Nemytskij Operator (5.42) den gewichteten Lebesgueraum  $L_p^{n+n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  stetig in den gewichteten Lebesgueraum  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  ab. ■

#### Schritt 4: Die Integrale $J_1(x_N, u_0)$ , $J_2(x_0, u_N, u_0)$ und $J_3(x_N, x_0, u_N, u_0)$ .

Aus Lemma 3 folgt, dass die Integrale  $J_1(x_N, u_0)$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  endlich sind. Weiterhin können wir zusammen mit Schritt 1 die Gleichung

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} J_1(x_N, u_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_1(x_N, u_0) = L \int_0^\infty r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \tag{5.47}$$

herleiten, und das letztere Integral besitzt ebenso einen endlichen Wert. Als nächstes werden die Integrale  $J_2(x_0, u_N, u_0)$  mittels der Hölderschen Ungleichung abgeschätzt,

siehe Satz 1 oder ELSTRODT [34], Satz 1.5, S. 222:

$$\begin{aligned}
|J_2(x_0, u_N, u_0)| &= \left| L-\int_0^\infty \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t))^T (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \right| \\
&\leq L-\int_0^\infty \left| \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \cdot |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \\
&\leq \left( L-\int_0^\infty \left| \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right|^q \nu(t) dt \right)^{1/q} \\
&\quad \cdot \left( L-\int_0^\infty |u_N(t) - u_0(t)|^p \nu(t) dt \right)^{1/p} \\
&= \left\| \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^+, \nu)} \cdot \|u_N - u_0\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)}. \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Das Lemma 4 hat zur Folge, dass die erste Norm in (5.48) endlich ist, und somit kann  $J_2(x_0, u_N, u_0)$  als ein lineares stetiges Funktional, angewendet auf die Differenz  $(u_N - u_0) \in L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ , angesehen werden. Dann liefert die schwache Konvergenz  $\{u_N\} \rightharpoonup u_0$  im  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  die Grenzwerte

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} J_2(x_0, u_N, u_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_2(x_0, u_N, u_0) = 0. \tag{5.49}$$

Zur Abschätzung von  $J_3(x_N, x_0, u_N, u_0)$  wird erneut die Höldersche Ungleichung herangezogen:

$$\begin{aligned}
&|J_3(x_N, x_0, u_N, u_0)| \\
&= \left| L-\int_0^\infty (\nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)))^T (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \right| \\
&\leq L-\int_0^\infty \left| (\nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t))) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \\
&\quad \cdot |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \\
&\leq \left( L-\int_0^\infty \left| (\nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t))) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right|^q \nu(t) dt \right)^{1/q} \\
&\quad \cdot \left( L-\int_0^\infty |u_N(t) - u_0(t)|^p \nu(t) dt \right)^{1/p} \\
&= \left\| (\nabla_v r(\cdot, x_N(\cdot), u_0(\cdot)) - \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot))) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^+, \nu)} \\
&\quad \cdot \|u_N - u_0\|_{L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)}. \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Da die schwach konvergente Folge  $\{u_N\}$  beschränkt ist, ist die Normdifferenz  $\|u_N - u_0\|_{L^p_{\nu}(\mathbb{R}^+, \nu)}$  in (5.50) ebenfalls beschränkt. Aus Schritt 1 und Lemma 5 lässt sich schlussfolgern, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left( \nabla_v r(\cdot, x^N(\cdot), u_0(\cdot)) - \nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \right) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0 \quad (5.51)$$

gilt. Folglich erhält man

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) = 0. \quad (5.52)$$

**Schritt 5: Unterhalbstetigkeit von  $J_{\infty}^L$ .** Aus den Abschätzungen (5.28), (5.47), (5.49) und (5.52) erhalten wir infolge des Überganges zum Limes inferior und der Ungleichung<sup>2</sup>

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} (a_N + b_N + c_N) \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} (a_N) + \liminf_{N \rightarrow \infty} (b_N) + \liminf_{N \rightarrow \infty} (c_N) \quad (5.53)$$

schliesslich

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} J_{\infty}^L(x_N, u_N) &\geq \liminf_{N \rightarrow \infty} J_1(x_N, u_0) + \liminf_{N \rightarrow \infty} J_2(x_0, u_N, u_0) \\ &\quad + \liminf_{N \rightarrow \infty} J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} J_1(x_N, u_0) + \lim_{N \rightarrow \infty} J_2(x_0, u_N, u_0) \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} J_3(x_N, x_0, u_N, u_0) \\ &= L \int_0^{\infty} r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt = J_{\infty}^L(x_0, u_0), \end{aligned} \quad (5.54)$$

und der Beweis des Satzes 26 ist abgeschlossen. ■

**Bemerkung 20. (a)** Die Annahme  $1 \leq p < \infty$  wurde benötigt wegen Lemma 2, das im Laufe des Beweises verwendet wurde.

**(b)** Die Voraussetzung 8 scheint eine relativ einschränkende Forderung an die Gewichtsfunktion zu sein, da beispielsweise genügt die Diskontrate  $\nu(t) = e^{-\rho t}$  dieser Voraussetzung nicht. Diese sich in den ökonomischen Wachstumsmodellen so natürlich anbietende Gewichtsfunktion fällt nicht schnell genug ab, wodurch die "decay at infinity"-Bedingung verletzt ist.

**(c)** Die Wachstumsbedingungen, die in den Voraussetzungen 6 und 7 vorkommen, können mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 4 in einer leichter überprüfbar Form postuliert werden.

Mit den angedeuteten Verbesserungsmöglichkeiten wird nun eine neue Version eines Unterhalbstetigkeitssatzes für die Funktionale der Art (5.20) vorgestellt. Dafür werden die unten stehenden Voraussetzungen benötigt.

---

<sup>2</sup> $\{a_N\}$ ,  $\{b_N\}$  und  $\{c_N\}$  sind beliebige Zahlenfolgen.

**Voraussetzung 9.** Die Funktion  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  die folgende Wachstumsbedingung

$$\begin{aligned} & \left| r(t, \xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m) \right| \leq \\ & \leq \frac{A_1(t)}{\tilde{\nu}(t)} + B_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i|^p}{\tilde{\nu}(t)} \cdot \nu(t) + B_1 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{|v_k|^p}{\tilde{\nu}(t)} \cdot \nu(t) \end{aligned} \quad (5.55)$$

mit einer Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  und einer Konstanten  $B_1 > 0$ .

**Voraussetzung 10.** Der Gradient  $\nabla_v r(t, \xi, v)$  genügt der folgenden Wachstumsbedingung. Es existieren eine Funktion  $A_2(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^+)$  und Konstanten  $B_2 > 0$ ,  $K > 0$ , so dass für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und  $p, q : 1/p + 1/q = 1$ ,  $1 < p < \infty$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \nabla_v r(t, \xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m) \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \leq \\ & \leq A_2(t) \nu(t)^{-1/q} + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |v_k|^{p/q} \end{aligned} \quad (5.56)$$

gültig ist. Für  $p = 1$  wird die Wachstumsbedingung

$$\left| \nabla_v r(t, \xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m) \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \leq K \quad (5.57)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und eine Konstante  $K > 0$  verlangt.

**Bemerkung 21.** Die Wachstumsbedingungen (5.55) und (5.56) gehen in die Wachstumsbedingungen der Voraussetzungen 6 bzw. 7 über, wenn man  $\tilde{\xi}_i := \xi_i \cdot \nu^{1/p}(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bzw.  $\tilde{v}_k := v_k \cdot \nu^{1/p}(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) einführt.

**Satz 27.** Seien  $1 \leq p < \infty$ , eine Dichtefunktion  $\nu(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  und eine positive Funktion  $\tilde{\nu}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Desweiteren möge der Integrand  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  zusammen mit den Funktionen  $\nu(\cdot)$ ,  $\tilde{\nu}(\cdot)$  die Voraussetzungen 5, 9 und 10 erfüllen. Für eine beliebige Funktionenfolge  $\{x_N\} \subset W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 < p < \infty$  existiere eine Funktion  $\beta(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ , so dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$|x_N(t)| \leq \beta(t) \quad (5.58)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  erfüllt ist. Gilt für alle Funktionen  $u_N(\cdot)$ ,  $N \in \mathbb{N}$  die Inklusion

$$u_N(t) \in U \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.59)$$

mit einer kompakten nichtleeren Menge  $U$ , so ist das Integralfunktional (5.20) unterhalbstetig in der schwachen Topologie, d.h. für beliebige schwach konvergente Funktionenfolgen

$$\{x_N\} \rightharpoonup^{W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)} x_0, \quad \{u_N\} \rightharpoonup^{L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)} u_0, \quad (5.60)$$

ist die Ungleichung

$$\begin{aligned}
J_\infty^L(x_0, u_0) &= L \int_0^\infty r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\
&\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} L \int_0^\infty r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\
&= \liminf_{N \rightarrow \infty} J_\infty^L(x_N, u_N)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

erfüllt. Hierbei bedeutet  $\rightharpoonup$  die schwache Konvergenz der entsprechenden Folge.

**Bemerkung 22.** (a) Im Fall  $p = 1$  wird die Bedingung (5.58) nicht vorausgesetzt.

(b) Da wir bei einem Steuerungsproblem die Unterhalbstetigkeit in irgendeiner Topologie nur auf dem zulässigen Bereich brauchen, ist die Bedingung (5.58) kraft der Zustandsrestriktion (5.6) für jede Folge der zulässigen Zustandstrajektorien erfüllt. Ebenfalls ist die Inklusion (5.59) durch die Formulierung des Steuerungsproblems gegeben.

**Beweis:** Aus der Wachstumsbedingung (5.55), der Beschränkung (5.58) und der Kompaktheit der Menge  $U$  folgt die Existenz einer Funktion  $\alpha(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+, \tilde{\nu})$ , so dass für alle Funktionenpaare  $(x_N, u_N)$  die Ungleichung

$$r(t, x_N(t), u_N(t)) \geq \alpha(t) \quad \forall t > 0 \tag{5.62}$$

gilt. Daher kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass die Funktion  $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  nichtnegative Werte besitzt. Andernfalls würde man eine neue nichtnegative Funktion  $\tilde{r} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit

$$\tilde{r}(t, x(t), u(t)) := r(t, x(t), u(t)) - \alpha(t) \geq 0, \quad \forall t > 0 \tag{5.63}$$

betrachten, die lediglich den Funktionswert ändert.

Die Konvexität von  $r(t, \xi, \cdot)$  liefert die Ungleichung

$$\begin{aligned}
r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) &\geq r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) \\
&\quad + \nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) (u_N - u_0)(t) \tilde{\nu}(t)
\end{aligned} \tag{5.64}$$

für alle Folgen  $\{x_N, u_N\}$  mit  $x_N \rightharpoonup x_0$  in  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $u_N \rightharpoonup u_0$  in  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Die obige Ungleichung wird nun wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) &\geq r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) \\
&\quad + \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) \\
&\quad + [\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \cdot \\
&\quad \cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t)
\end{aligned} \tag{5.65}$$

und über die Halbachse  $\mathbb{R}^+$  integriert. Nach der Integration bleibt folgende Ungleichung gültig:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) dt &\geq \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &+ \int_0^{\infty} \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &+ \int_0^{\infty} [\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \\ &\cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nun muss man natürlich sicherstellen, dass alle drei uneigentliche Integrale auf der rechten Seite der letzten Ungleichung existieren und endlich sind. Das erste existiert und ist endlich dank der Voraussetzung 9, das zweite und das dritte infolge der Voraussetzung 10. Durch den Übergang zum Limes inferior auf beiden Seiten der Ungleichung (5.66) und unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} (a_N + b_N + c_N) \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} (a_N) + \liminf_{N \rightarrow \infty} (b_N) + \liminf_{N \rightarrow \infty} (c_N) \quad (5.67)$$

kommen wir auf

$$l := \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_N(t)) \tilde{\nu}(t) dt \geq l_1 + l_2 + l_3 \quad (5.68)$$

mit den Bezeichnungen

$$l_1 := \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt, \quad (5.69)$$

$$l_2 := \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt, \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} l_3 := \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} &[\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \cdot \\ &\cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Unser Ziel ist jetzt, für die Integrale  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  die passenden Abschätzungen nach unten zu finden.

**Abschätzung für  $l_1$ :** Da wir nur positive Funktionen im Integranden betrachten, darf das Lemma von Fatou, siehe DUNFORD&SCHWARTZ [32], Satz 19, S. 152 ff.,

angewendet werden. Laut dessen kann der untere Limes unter das Integralzeichen gezogen werden:

$$\begin{aligned} l_1 &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Ferner wählen wir eine Teilfolge  $\{x_m\} \subset \{x_N\}$  aus, die den unteren Limes  $\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt$  realisiert, d.h. es gilt für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  die Gleichheit

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_m(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \quad (5.73)$$

Die Einschränkungen der Funktionen  $x_m(\cdot)$  auf das Intervall  $[0, 1]$  sind Elemente des gewichteten Sobolevraumes  $W_p^{1,n}([0, 1], \nu|_{[0,1]})$ . Dann schliessen wir laut Einbettungssatzes von Rellich-Kondrachev, vgl. Satz 3 oder ADAMS [1], Satz 6.2, S. 144, auf die Existenz der stetigen Repräsentanten der Funktionenfolge  $\{x_m\}$ , d.h. es existieren eine Teilfolge  $\{x_{N^1}\} \subset \{x_m\}$  und eine Funktion  $\hat{x}_1(\cdot) \in (W_p^{1,n}([0, 1], \nu|_{[0,1]}) \cap C^0[0, 1])$ , so dass die Teilfolge  $\{x_{N^1}\}$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen die Funktion  $\hat{x}_1(\cdot)$  konvergiert:

$$x_{N^1} \rightharpoonup \hat{x}_1 \quad \text{im } W_p^{1,n}([0, 1], \nu|_{[0,1]}), \quad (5.74)$$

$$\lim_{N^1 \rightarrow \infty} \|x_{N^1} - \hat{x}_1\|_{C^0[0,1]} = 0. \quad (5.75)$$

Analog nehmen wir Teilfolgen  $\{x_{N^k}\} \subset \{x_{N^{k-1}}\}$ , ( $k = 2, 3, \dots$ ) heraus, die der Bedingung

$$x_{N^k} \rightharpoonup \hat{x}_k \quad \text{im } W_p^{1,n}([0, k], \nu|_{[0,k]}), \quad (5.76)$$

$$\lim_{N^k \rightarrow \infty} \|x_{N^k} - \hat{x}_k\|_{C^0[0,k]} = 0 \quad (5.77)$$

genügen. Aufgrund des Konstruktionsschemas besteht die Übereinstimmung  $\hat{x}_k(t) = \hat{x}_{k-1}(t)$ , die zu einer Grenzfunktion  $\hat{x}(\cdot) \in (W_{p,loc}^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \cap C^0(\mathbb{R}^+))$  führt, wobei die Einschränkung derer auf das Intervall  $[0, k]$  mit  $\hat{x}_k(\cdot)$  zusammenfällt. Die Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes liefert  $\hat{x}(t) = x_0(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Wir bilden nun eine Diagonalfolge mit folgenden Eigenschaften: Aus der ersten Teilfolge  $\{x_{N^1}\}$  nehmen wir das erste Element  $x_{N_1^1}(\cdot)$  heraus, das der Ungleichung

$$\|x_{N_1^1} - \hat{x}_1\|_{C^0[0,1]} \leq 1/2 \quad (5.78)$$

genügt, der Folge  $\{x_{N^2}\}$  entnehmen wir das erste Element  $x_{N_2^2}(\cdot)$  mit  $N_2^2 > N_1^1$  und

$$\|x_{N_2^2} - \hat{x}_2\|_{C^0[0,2]} \leq 1/4. \quad (5.79)$$

Allgemein setzen wir mit der Auswahl des ersten Elementes  $x_{N^k}(\cdot)$  aus der Teilfolge  $\{x_{N^k}\}$  fort, für welches  $N^k > N_{k-1}^{k-1}$  und

$$\|x_{N^k} - \hat{x}_k\|_{C^0[0,k]} \leq 1/2^k \quad (5.80)$$

erfüllt sind. Die Diagonalfolge  $\{x_{N^k}\}$  konvergiert punktweise überall auf  $[0, \infty)$  gegen die Grenzfunktion  $\hat{x}(\cdot)$ . Zusammen mit der Abschätzung (5.72) und der Gleichung (5.73) erhalten wir aufgrund der Stetigkeit der Funktion  $r(t, \cdot, v)$  für alle  $(t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$  folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} l_1 &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} r(t, x_N(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} r(t, x_m(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{N^k \rightarrow \infty} r(t, x_{N^k}(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= L \cdot \int_0^{\infty} r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Hieraus folgt nun, dass

$$l_1 \geq L \cdot \int_0^{\infty} r(t, x_0(t), u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt = J_{\infty}^L(x_0, u_0) \quad (5.82)$$

gilt.

**Abschätzung für  $l_2$ :** Wir wählen eine Teilfolge  $\{u_s\} \subset \{u_N\}$  aus, die den unteren Limes in dem Integral  $l_2$  realisiert, d.h. es gilt

$$l_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) (u_s(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \quad (5.83)$$

Im Hinblick auf die Wachstumsbedingung (5.56), formuliert in der Voraussetzung 10, und dank dem Satz 25 bildet der Nemytskij Operator  $N(\cdot, \cdot)$ , definiert durch

$$N(x_s, u_0)(t) = \left| \nabla_v r(t, x_s(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)}, \quad (5.84)$$

alle Funktionen aus dem Raum  $L_p^{n+m}(\mathbb{R}^+, \nu)$  in den Raum  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  ab. Wir erhalten insbesondere

$$\nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)} \in L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu). \quad (5.85)$$

Da die Folge  $\{u_s\}$  im Raum  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  schwach konvergent gegen die Funktion  $u_0(\cdot)$  ist, leiten wir nach Lemma 1, Kapitel 1 und Definition der schwachen Konvergenz, vgl. Definition 31 im Anhang B oder Definition 5.7 aus ELSTRODT [34], S. 261 f., folgendes ab:

$$l_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} (u_s(t) - u_0(t)) \nu(t) dt = 0. \quad (5.86)$$

Die Funktion  $\nabla_v r(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \frac{\tilde{\nu}(\cdot)}{\nu(\cdot)}$  haben wir also als erzeugendes Element eines linearen stetigen Funktional auf dem Raum  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  interpretiert, um dann per Definition der schwachen Konvergenz die Gleichung (5.86) herzuleiten.

**Abschätzung für  $l_3$ :** Wie in der vorherigen Abschätzung gehen wir auch hier zu einer Teilfolge  $\{x_q, u_q\} \subset \{x_N, u_N\}$  über, die den Limes inferior in  $l_3$  realisiert, d.h. es gilt:

$$l_3 = \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty [\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (5.87)$$

$$= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty [\nabla_v^T r(t, x_q(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \cdot (u_q(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \quad (5.88)$$

Die Teilfolge  $\{x_q, u_q\}$  wird wieder mit dem Index  $N \in \mathbb{N}$  durchnummeriert. Da es im Fall  $1 < p < \infty$  eine uniforme Majorante  $\beta(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$  für die Elemente der schwach konvergenten Funktionenfolge  $\{x_N\}$  gibt, d.h. diese Kurvenschar besitzt die Eigenschaft

$$|x_N(t)| \leq \beta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.89)$$

können wir nun die Wachstumsbedingung (5.56) anwenden, um eine uniforme Majorante  $M(\cdot)$  für die Funktionen  $[\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  zu konstruieren. So gilt für jedes beliebige  $N \in \mathbb{N}$  und für  $p \in (1, \infty)$  die Abschät-

zung

$$\begin{aligned}
& \left| (\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \\
& \leq \left| \nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| + \left| \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \quad (5.90) \\
& \leq A_2(t) \nu(t)^{-1/q} + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |x_N^i(t)|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |u_0^k(t)|^{p/q} \\
& \quad + A_2(t) \nu(t)^{-1/q} + B_2 \cdot \sum_{i=1}^n |x_0^i(t)|^{p/q} + B_2 \cdot \sum_{k=1}^m |u_0^k(t)|^{p/q}
\end{aligned}$$

mit  $A_2 \in L_q(\mathbb{R}^+)$ ,  $B_2 > 0$ . Die letzte Abschätzung kann wie folgt fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
& \left| (\nabla_v r(t, x_N(t), u_0(t))^T - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t))^T) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \\
& \leq 2 A_2(t) \nu(t)^{-1/q} + 2n B_2 \beta(t)^{p/q} + 2m B_2 |u_0(t)|^{p/q} =: M(t). \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Die Zugehörigkeit der Funktion  $M(\cdot)$  zum gewichteten Lebesgueraum  $L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  wird offensichtlich, wenn man mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung die unten stehende Ungleichung aufschreibt:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_0^\infty \left| 2 A_2(t) \nu(t)^{-1/q} + 2n B_2 \beta(t)^{p/q} + 2m B_2 |u_0(t)|^{p/q} \right|^q \nu(t) dt \right\}^{1/q} \\
& \leq \left\{ \int_0^\infty |2 A_2(t)|^q dt \right\}^{1/q} + \left\{ \int_0^\infty |2n B_2 \beta(t)^{p/q}|^q \nu(t) dt \right\}^{1/q} \quad (5.92) \\
& \quad + \left\{ \int_0^\infty |2m B_2 |u_0(t)|^{p/q}|^q \nu(t) dt \right\}^{1/q} \\
& = 2 \|A_2(t)\|_{L_q(\mathbb{R}^+)} + 2n B_2 \|\beta\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)}^{p/q} + 2m B_2 \|u_0\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)}^{p/q} < \infty.
\end{aligned}$$

Im Fall  $p = 1$  liefert die Wachstumsbedingung (5.57) automatisch die Existenz einer gleichmäßigen Majorante  $M(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu)$ , nämlich  $M(t) \equiv K$ .

Die Folge  $\{u_N\}$  ist normbeschränkt mit einer Konstante  $C$  aufgrund ihrer schwachen Konvergenz, d.h. es existiert eine Zahl  $C > 0$  mit

$$\|u_N - u_0\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq C, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.93)$$

Andererseits sind die Elemente der Folge  $\{u_N\}$  auch punktweise beschränkt, da die Werte dieser Funktionen in einer kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  liegen. Also gibt es eine Zahl  $K > 0$  mit

$$|u_N(t)| \leq K \quad (5.94)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  und alle natürlichen Zahlen  $N \in \mathbb{N}$ . Als nächstes bilden wir durch ein Diagonalauswahlverfahren, ähnlich wie in der Abschätzung für  $l_1$ , eine Teilfolge  $\{x_{N_k}\} \subset \{x_N\}$ , die überall auf  $[0, \infty)$  punktweise gegen  $x_0(\cdot)$  konvergiert. Da das Integral

$$\|M\|_{L_q(X, \nu)}^q = \int_X |M(t)|^q \nu(t) dt \quad (5.95)$$

absolut stetig in  $X$  ist, gibt es zu beliebigem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon) > 0$ , so dass für alle Mengen  $X$  mit  $\mu_\nu(X) < \delta$  die Ungleichung<sup>3</sup>

$$\|M\|_{L_q(X, \nu)} < \frac{\epsilon}{2C} \quad (5.96)$$

gilt. Man setze nun

$$\epsilon_1 := \min\{\delta(\epsilon), \epsilon\}. \quad (5.97)$$

Die Anwendung des Jegorowschen Satzes, vgl. Anhang B oder ELSTRODT [34], Satz 3.5, S. 250, auf die Folge  $\{x_{N_k}\}$  liefert zu dem gewählten  $\epsilon$  die Existenz einer solchen Menge  $M_\epsilon$  mit  $\mu_\nu(\mathbb{R}^+ \setminus M_\epsilon) < \epsilon_1$ , auf der die Folge  $\{x_{N_k}\}$  gleichmäßig gegen  $x_0(\cdot)$  konvergiert. Da die Funktion  $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  als stetig differenzierbar in  $v$  vorausgesetzt wurde, besitzt die Folge  $\{\nabla_v r(x_{N_k})\}$  dieselbe Eigenschaft. Somit ist man in der Lage, zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $N_0 \in \mathbb{N}$  zu finden, so dass für alle  $N \geq N_0$  und alle  $t \in M_\epsilon$  die Ungleichung

$$\left| \nabla_v r(t, x_{N_k}(t), u_0(t)) - \nabla_v r(t, x_0(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} < \frac{\epsilon}{2KV} \quad (5.98)$$

mit  $V = \int_0^\infty \nu(t) dt$  gilt. Die Folge  $\{x_{N_k}\}$  wird erneut mit dem Index  $N \in \mathbb{N}$  durchnummeriert und für  $p \in [1, \infty)$  schätzen wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung sowie den Ungleichungen (5.91), (5.93), (5.94), (5.96), (5.98) ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty [\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt \right| \\ & \leq \int_0^\infty \left| \nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \\ & = \int_{M_\epsilon} \left| \nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \end{aligned}$$

<sup>3</sup> $\mu_\nu(\cdot)$  bezeichnet das Maß, das von der Gewichtsfunktion  $\nu(\cdot)$  induziert wird.

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^+ \setminus M_\epsilon} \left| \nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \\
& \leq \int_{M_\epsilon} \frac{\epsilon}{2KV} \cdot K \nu(t) dt + \int_{\mathbb{R}^+ \setminus M_\epsilon} |M(t)| |u_N(t) - u_0(t)| \nu(t) dt \\
& \leq \frac{\epsilon}{2KV} \cdot K \int_0^\infty \nu(t) dt + \|M\|_{L_q(\mathbb{R}^+ \setminus M_\epsilon, \nu)} \cdot \|u_N - u_0\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)} \\
& \leq \frac{\epsilon}{2KV} \cdot KV + \frac{\epsilon}{2C} \cdot C = \epsilon. \tag{5.99}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich der folgende Algorithmus zur Abschätzung des Integrals in  $l_3$ :

**Schritt 1:** Wähle ein beliebiges  $\epsilon > 0$ ;

**Schritt 2:** Bestimme eine Zahl  $\delta = \delta(\epsilon)$  mit (5.96);

**Schritt 3:** Setze  $\epsilon_1 := \min\{\epsilon, \delta(\epsilon)\}$ ;

**Schritt 4:** Wähle nach dem Jegorowschen Satz eine kompakte Menge  $M_\epsilon \subset \mathbb{R}^+$  mit  $\mu_\nu(\mathbb{R}^+ \setminus M_\epsilon) < \epsilon_1$ , auf der die Folge  $\{x_N\}$  gleichmäßig gegen  $x_0(\cdot)$  konvergiert, d.h. die Abschätzung (5.98) gilt;

**Schritt 5:** Abschätzung des gesamten Integrals laut (5.99).

Folglich erhält man

$$\begin{aligned}
l_3 & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty [\nabla_v^T r(t, x_N(t), u_0(t)) - \nabla_v^T r(t, x_0(t), u_0(t))] \cdot \\
& \quad \cdot (u_N(t) - u_0(t)) \tilde{\nu}(t) dt = 0. \tag{5.100}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir infolge der Abschätzungen (5.68), (5.82), (5.86), (5.100) die Ungleichung

$$l = \liminf_{N \rightarrow \infty} J_\infty^L(x_N, u_N) \geq l_1 + l_2 + l_3 \geq J_\infty^L(x_0, u_0), \tag{5.101}$$

die die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktional  $J_\infty^L$  aus (5.20) beweist. ■

**Bemerkung 23. (a)** Die Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$  spielt nur in den Wachstumsbedingungen der Voraussetzungen 9 und 10 eine Rolle. Die stärkere “decay at infinity“-Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu(t + \epsilon)}{\nu(t)} = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \tag{5.102}$$

vorausgesetzt im Satz 26, um die Kompaktheit der Einbettung  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  zu erzwingen, konnte hier vermieden werden. Stattdessen wurde von der schwächeren Bedingung (5.58) Gebrauch gemacht. Im Satz 27 wurde de facto die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktional  $J_\infty^L$  auf dem zulässigen Bereich der Grundaufgabe ( $P_\infty^L$ ) gezeigt.

- (b) Interessant bleibt die Frage nach der Wahl der Funktion  $\beta(\cdot)$ , die in dem Steuerungsproblem selbst festgelegt werden kann.
- (c) In den beiden hier bewiesenen Unterhalbstetigkeitssätzen wurde von der stetigen Differenzierbarkeit der Funktion  $r(t, \cdot, v)$ , vorausgesetzt in der Formulierung des Problems  $(P_\infty^L)$ , kein Gebrauch gemacht. Will man nur die Unterhalbstetigkeit eines Integralfunktionalbeweisen, so kann die genannte Voraussetzung ausser Acht gelassen werden.

## 5.4 Gegenbeispiel im Fall eines $(P_\infty^L)$ Problems

**Beispiel 7.** Wir betrachten noch einmal das Halkinsche Beispiel, vorgestellt im Abschnitt 2.4.4, untersucht in PICKENHAIN ET AL. [79], S. 466:

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty (-(1-x(t))u(t)) dt \longrightarrow \min! \quad (5.103)$$

$$(x, u) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (5.104)$$

$$\dot{x}(t) = (1-x(t))u(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad x(0) = 0; \quad (5.105)$$

$$u(t) \in U = [0, 1] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+. \quad (5.106)$$

Seien die Funktionen  $\tilde{\nu}(\cdot)$  und  $\nu(\cdot)$  durch

$$\nu(t) = e^{-\rho t}, \quad \tilde{\nu}(t) \equiv 1 \quad (5.107)$$

gegeben. Erneut bezeichnen wir mit

- $\mathcal{A}$  die Menge aller  $(x, u)$ , die den Restriktionen (5.104) – (5.106) genügen,
- $\mathcal{A}_L$  die Teilmenge aller Paare  $(x, u) \in \mathcal{A}$ , für die das Lebesguesche Integral  $L \int_0^\infty (1-x(t))u(t) dt$  existiert und endlich ist.

Die Integration der Differentialgleichung mit getrennten Variablen (5.105) mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  führt zur Zustandsfunktion  $x(t) = 1 - e^{-F(t)}$  mit  $F(t) = \int_0^t u(s) ds$ . Wir studieren nun die Folge der zulässigen Prozesse  $(x_N, u_N) \in \mathcal{A}_L$ , definiert wie folgt :

$$u_N(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < N \\ \frac{1}{N} & , \quad N \leq t < \infty \end{cases} \quad (5.108)$$

und

$$x_N(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < N \\ 1 - e^{1-t/N} & , \quad N \leq t < \infty. \end{cases} \quad (5.109)$$

Im Hinblick auf die Zugehörigkeit der Funktionen  $(x_N, u_N)$  zu den gewöhnlichen Sobolev- bzw. Lebesgueräumen merken wir an, dass

$$u_N(\cdot) \notin L_p(\mathbb{R}^+) \quad \text{aber} \quad u_N(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, \nu) \quad (5.110)$$

sowie

$$x_N(\cdot) \notin W_p^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{aber} \quad x_N(\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \quad (5.111)$$

für alle  $1 \leq p < \infty$ , was die Wahl eines gewichteten Sobolev- als auch eines gewichteten Lebesgueräum für die Rollen des Zustands- bzw. des Steuerraumes rechtfertigt. Die Funktionenfolge  $\{(x_N, u_N)\}$  konvergiert gegen  $(x_0, u_0) \equiv (0, 0)$  bezüglich der  $W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ -Norm, denn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x_N\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0; \quad (5.112)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\dot{x}_N\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0; \quad (5.113)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N\|_{L_p(\mathbb{R}^+, \nu)} = 0 \quad (5.114)$$

für alle  $1 \leq p < \infty$ . Anschliessend haben wir

$$J_\infty^L(x_N, u_N) = L \int_0^\infty (-(1 - x_N(t)) u_N) dt \quad (5.115)$$

$$= L \int_N^\infty (-(1 - x_N(t)) u_N) dt = -1, \quad (5.116)$$

wobei das Einsetzen von  $(x_0, u_0) \equiv (0, 0)$  in das Funktional

$$J_\infty^L(x_0, u_0) = L \int_0^\infty 0 dt = 0 \quad (5.117)$$

ergibt. Somit erhalten wir die Ungleichung

$$J_\infty^L(x_0, u_0) = 0 > \lim_{N \rightarrow \infty} J_\infty^L(x_N, u_N) = -1, \quad (5.118)$$

die besagt, dass das Funktional  $J_\infty^L$  weder schwach noch stark unterhalbstetig im Raum  $W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  ist. Für dieses Beispiel sind jedoch die Wachstumsbedingungen (5.55) und (5.56) des Satzes 27 nicht erfüllt, wodurch der Satz nicht anwendbar ist. In der Tat, laut Wachstumsbedingung (5.55) müsste für das betrachtete Problem die Ungleichung

$$|(1 - \xi)v| \leq A_1(t) + B_1|\xi|^p e^{-\rho t} + B_1|v|^p e^{-\rho t} \quad (5.119)$$

mit einer Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ ,  $p \in [1, \infty)$  für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gelten. Setzt man aber  $\xi = 0$ ,  $v = 1$ , so erhält man

$$1 \leq A_1(t) + e^{-\rho t} \quad (5.120)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ . Diese Ungleichung liefert  $A_1(\cdot) \notin L_1(\mathbb{R}^+)$ , was der Voraussetzung 9 widerspricht. Ähnlich kann gezeigt werden, dass die Wachstumsbedingung (5.56) verletzt ist. Gemäß dieser Bedingung muss die Ungleichung

$$\left| (1 - \xi) \right| \frac{1}{e^{-\rho t}} \leq A_2(t)(e^{-\rho t})^{-1/q} + B_2|\xi|^{p/q} + B_2|v|^{p/q} \quad (5.121)$$

mit einer Funktion  $A_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^+)$ ,  $p \geq 1$ ,  $q > 0$  :  $1/p + 1/q = 1$  für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gelten. Wir setzen  $\xi = 0$  und erhalten dabei

$$e^{\rho t} \leq A_2(t)e^{(\rho/q)t} \quad \forall t > 0. \quad (5.122)$$

Nun besagt aber die Ungleichung

$$A_2(t) \geq e^{\rho(1-1/q)t} \quad \forall t > 0, \quad (5.123)$$

dass  $A_2(\cdot) \notin L_2(\mathbb{R}^+)$ , womit die zweite vorausgesetzte Wachstumsbedingung nicht erfüllt ist.

**Bemerkung 24.** Wir möchten an dieser Stelle bemerken, dass das Ersetzen des Steuerbereiches  $U = [0, 1]$  durch ein Intervall  $[\alpha, 1]$  mit  $0 < \alpha < 1$  zu einem Steuerungsproblem führt, in dem das Funktional auf dem gesamten zulässigen Bereich konstant ist. Aus diesem Grund ist das Funktional natürlich in jeder Topologie auf der zulässigen Menge stetig.

# Kapitel 6

## Aussagen über die Existenz optimaler Lösungen

### 6.1 Ein Existenzresultat

Wir untersuchen die Grundaufgabe ( $P_\infty$ ) mit der Lebesgueschen Interpretation des Integrals, also das Problem ( $P_\infty^L$ ). Wie im vorherigen Kapitel seien  $1 < p < \infty$  und ein Integrand

$$r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.1)$$

sowie die Funktionen

$$\tilde{\nu}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \quad (6.2)$$

$$\nu(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad (6.3)$$

gegeben, wobei die Funktion  $\nu(\cdot)$  eine Dichtefunktion im Sinne der Definition 1 ist. Bezüglich der Dynamik werden folgende Voraussetzungen getroffen:

**Voraussetzung 11.** Die Funktion  $f(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus (5.4) mit folgender Gestalt

$$f(t, x(t), u(t)) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) \quad (6.4)$$

sei gegeben, wobei die Elemente der Matrix  $B(\cdot, x(\cdot))$  den Wachstumsbedingungen

$$|B_{ij}(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_{3ij}(t)(\nu(t))^{-1/q} + B_{3ij} \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \quad (6.5)$$

für alle  $(i, j) : i \in \{1, \dots, n\}; j \in \{1, \dots, m\}$  genügen und  $p, q : 1/p + 1/q = 1, 1 < p < \infty$ . Hier gelten die Inklusionen  $A_{3ij}(\cdot) \in L_q^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $B_{3ij} > 0$ . Ausserdem sei die Existenz nichtnegativer Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  vorausgesetzt, so dass die Ungleichung

$$|A(t, \xi) + B(t, \xi)v| \leq C_1 + C_2|\xi| + C_3|\xi| \cdot |v| + C_4|v| \quad (6.6)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  erfüllt ist.

**Bemerkung 25.** Sowohl die Bedingung (6.5) als auch die Wachstumsbedingungen aus der Voraussetzung 10 können anders formuliert werden, beispielsweise als

$$|B_{ij}(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_{3ij}(t) + B_{3ij} \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{p/q} \quad (6.7)$$

für alle  $(i, j) : i \in \{1, \dots, n\}; j \in \{1, \dots, m\}$ . Dabei gelten die Inklusionen  $A_{3ij}(\cdot) \in L_q^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $B_{3ij} > 0$ .

**Satz 28.** Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen 5, 9, 10 und 11 erfüllt sind. Weiterhin sei der zulässiger Bereich des Problems  $(P_\infty^L)$  nicht leer. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass die Funktionen  $A$  und  $B$  aus (6.4) Lipschitz stetig in  $\xi = x(t)$  sind und der Steuerbereich  $U$  konvex ist. Dann existiert eine optimale Lösung des Steuerungsproblems  $(P_\infty^L)$ .

**Beweis:** Um diesen Satz zu beweisen, beabsichtigen wir, den verallgemeinerten Weierstraßschen Satz, vgl. Satz 40, anzuwenden, welcher besagt, dass ein schwach unterhalbstetiges Funktional  $J = J(x, u)$ , definiert auf einer schwach kompakten Menge  $\mathbb{Z}$ , seinen kleinsten Wert annimmt, d.h. es existiert ein Paar  $(x^*, u^*) \in \mathbb{Z}$  mit

$$J(x^*, u^*) = \inf_{(x, u) \in \mathbb{Z}} J(x, u). \quad (6.8)$$

Dank der Voraussetzungen 5, 9 und 10 kann Satz 27 angewendet werden, um die schwache Unterhalbstetigkeit des Integralfunktionals (5.2) zu zeigen. Es fehlt also noch der Beweis der schwachen Kompaktheit der zulässigen Menge

$$\mathbb{Z} = \{(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu) \mid (5.4) - (5.7) \text{ sind erfüllt}\}, \quad (6.9)$$

was mittels des Satzes 5 erreicht werden kann. Der Beweis wird in zwei Schritte unterteilt.

**Schritt 1:** Wir beweisen die Abgeschlossenheit der Menge  $\mathbb{Z}$  bezüglich der schwachen Konvergenz. Zu diesem Zweck benötigen wir vier Lemmata.

**Lemma 6.** Sei eine Funktionenfolge  $\{u_N\}$  mit Elementen aus dem Funktionenraum  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  schwach konvergent gegen die Funktion  $u_0(\cdot)$  bezüglich des Raumes  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Weiter, sei die Inklusion

$$u_N(t) \in U \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+ \quad (6.10)$$

erfüllt für jede Zahl  $N \in \mathbb{N}$ . Dabei bezeichnet  $U$  eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Dann gilt die Inklusion

$$u_0(t) \in U \quad (6.11)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ .

**Beweis:** Wir bezeichnen mit  $\mathbb{Z}_u$  die Menge

$$\mathbb{Z}_u = \{u \in L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu) \mid u(t) \in U \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+\} \quad (6.12)$$

und beweisen die Konvexität und Abgeschlossenheit dieser Menge. Dafür betrachten wir eine Funktionenfolge  $\{\tilde{u}_N\} \subset \mathbb{Z}_u$ , die in der  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  – Norm gegen eine Funktion  $\tilde{u}_0(\cdot)$  konvergiert. Das Anwenden des Schemas, das die Beziehungen zwischen verschiedenen Konvergenztypen illustriert, vgl. Anhang B oder KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 446 f., und die Tatsache, dass

$$\mu_\nu(\mathbb{R}^+) := \int_0^\infty d\mu = \int_0^\infty \nu(t) dt < \infty \quad (6.13)$$

gilt, führt uns zum folgenden Schluss.<sup>1</sup> Wir sind in der Lage aus der Funktionenfolge  $\{\tilde{u}_N\}$  eine solche Teilfolge  $\{\tilde{u}_{N_k}\}$  auszuwählen, die fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  gegen die Funktion  $\tilde{u}_0(\cdot)$  konvergiert, d.h. für alle  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}$  gilt die punktweise Konvergenz

$$\tilde{u}_{N_k}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t), \quad (6.14)$$

wobei mit  $\mathcal{N}$  eine gewisse Lebesguesche Nullmenge bezeichnet wird. Ferner definieren wir die Menge

$$\mathcal{B} := \bigcup_{N_k=1}^\infty \{t : \tilde{u}_{N_k}(t) \notin U\}, \quad (6.15)$$

die aufgrund der Sigma-Additivität des Lebesgueschen Maßes ebenso eine Lebesguesche Nullmenge ist. Dies bedeutet, dass die Menge  $\mathcal{N} \cup \mathcal{B}$  ebenfalls vom Lebesgueschen Maß Null ist und für alle  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup \mathcal{B})$  die Konvergenz

$$\tilde{u}_{N_k}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t) \quad (6.16)$$

bestehen bleibt. Da für alle  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup \mathcal{B})$  und für alle Zahlen  $N_k$  die Inklusion  $\tilde{u}_{N_k}(t) \in U$  gilt, erhalten wir durch die Kompaktheit der Menge  $U$  und die Konvergenz (6.16) folgende Bedingung:

$$\tilde{u}_0(t) \in U \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup \mathcal{B}), \quad (6.17)$$

welche äquivalent zu (6.11) ist. Somit ist die Abgeschlossenheit von  $\mathbb{Z}_u$  bewiesen. Zum Beweis der Konvexität der Menge  $\mathbb{Z}_u$  betrachtet man eine Konvexkombination

$$\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (6.18)$$

der Funktionen  $u_1(\cdot) \in \mathbb{Z}_u$ ,  $u_2(\cdot) \in \mathbb{Z}_u$  und zeigt, dass diese ebenso ein Element der Menge  $\mathbb{Z}_u$  ist. Es gilt

$$\lambda u_1(\cdot) + (1 - \lambda)u_2(\cdot) \in L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu), \quad (6.19)$$

da  $L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  ein Vektorraum ist und  $\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathcal{N}_{u_1} \cup \mathcal{N}_{u_2}\}$  gilt

$$\lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t) \in U, \quad (6.20)$$

---

<sup>1</sup> $\mu_\nu(\cdot)$  bezeichnet das Maß, das von der Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$  induziert wird.

wobei  $\mathcal{N}_{u_1} \cup \mathcal{N}_{u_2}$  eine Lebesguesche Nullmenge ist. Somit ist die Konvexität der Menge  $\mathbb{Z}_u$  bestätigt. Wir können nun den Satz III.3.8 aus WERNER [98], S. 108 ff., anwenden, welcher besagt, dass der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge  $\{u_N\}$  mit Elementen aus einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge  $V$  eines normierten Raumes  $X$  in derselben Teilmenge  $V$  liegt. Die Rolle von  $V$  spielt hier die Menge  $\mathbb{Z}_u$ . Dies schliesst den Beweis des Lemmas ab. ■

**Lemma 7.** Sei eine Funktionenfolge  $\{x_N\}$  mit Elementen aus dem Funktionenraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  gegeben, die in diesem Raum schwach gegen die Funktion  $x_0(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 < p < \infty$  konvergiert. Weiter setzen wir voraus, dass

$$x_N(0) = x_0 \quad (6.21)$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$  gilt. Dann gilt die Gleichung

$$x_0(0) = x_0 \quad (6.22)$$

ebenso.

**Beweis:** Wir wählen ein beliebiges Intervall  $[0, \tau]$  und wenden auf diesem abgeschlossenen Intervall den Satz von Rellich-Kondrachov an, vgl. Satz 3 oder ADAMS [1], S. 144. Dieser impliziert die Existenz einer Teilfolge  $\{x_{N_k}\} \subset \{x_N\}$ , die gleichmäßig auf  $[0, \tau]$  gegen  $x_0(\cdot)$  konvergiert. Dies zieht die Konvergenz der Funktionenfolge im Punkt  $t = 0$  nach sich, welche bedeutet:

$$x_0 = \lim_{N_k \rightarrow \infty} x_0 = \lim_{N_k \rightarrow \infty} x_{N_k}(0) = x_0(0), \quad (6.23)$$

und das Lemma ist bewiesen. ■

**Lemma 8.** Seien Funktionenfolgen  $\{x_N\} \subset W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $\{u_N\} \subset L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$  gegeben, die entsprechend schwach gegen  $x_0(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  bzw.  $u_0(\cdot) \in L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,  $1 < p < \infty$  konvergieren. Ausserdem gelte für alle  $N \in \mathbb{N}$  die Differentialgleichung

$$\dot{x}_N(t) = A(t, x_N(t)) + B(t, x_N(t))u_N(t) \quad (6.24)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ . Ferner seien die Funktionen  $A(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $B(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  als stetig in der ersten Variable und als Lipschitzstetig in der zweiten Variable vorausgesetzt. Dann erfüllt das Paar  $(x_0, u_0)$  die Differentialgleichung

$$\dot{x}_0(t) = A(t, x_0(t)) + B(t, x_0(t))u_0(t) \quad (6.25)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ .

**Beweis:** Wir bemerken, dass die Funktionenfolge  $\{u_N\}$  als eine Folge der zulässigen Steuerungen beschränkt in der Norm des Vektorraumes  $L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu)$  ist und dank Satz 3, S. 234 aus KOLMOGOROV&FOMIN [54], sowie der Separabilität des Vektorraumes  $L_1(\mathbb{R}^+, \nu)$  eine Teilfolge von  $\{u_N\}$  existiert, die schwach\* konvergent im Raum  $L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu)$  ist.<sup>2</sup> Diese Teilfolge wird wieder mit  $\{u_N\}$  bezeichnet.

<sup>2</sup>Zur Definition der schwach\* Konvergenz vergleiche die Definition 32 im Anhang B.

Ausserdem sind die Einschränkungen der Funktionen  $x_N(\cdot)$  auf das Intervall  $[0, 1]$  Elemente des  $W_p^{1,n}([0, 1], \nu)$ . Folglich schliessen wir nach dem Einbettungssatz von Rellich-Kondrachev, vgl. ADAMS [1], Satz 6.2, S. 144 oder auch dem Satz 3, Kapitel 1.1.2, auf die Existenz der stetigen Repräsentanten der Folge  $\{x_N\}$ , d.h. auf die Existenz der Teilfolgen  $\{x_{N^1}, u_{N^1}\} \subset \{x_N, u_N\}$  sowie Funktionen  $\hat{x}_1(\cdot) \in (W_p^{1,n}([0, 1], \nu) \cap C^0[0, 1])$ ,  $\hat{u}_1(\cdot) \in L_\infty^m([0, 1], \nu)$ , mit denen gilt:

$$x_{N^1} \rightharpoonup^{W_p^{1,n}([0,1],\nu)} \hat{x}_1, \quad u_{N^1} \rightharpoonup^* L_\infty^m([0,1],\nu) \hat{u}_1; \quad (6.26)$$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A(t, \hat{x}_1(t)) + B(t, \hat{x}_1(t))\hat{u}_1(t) \quad (\forall) t \in [0, 1]; \quad (6.27)$$

$$\lim_{N^1 \rightarrow \infty} \|x_{N^1} - \hat{x}_1\|_{C^0[0,1]} = 0. \quad (6.28)$$

Sukzessive konstruieren wir für alle  $k \in \mathbb{N}$  Teilfolgen  $\{x_{N^k}, u_{N^k}\} \subset \{x_{N^{k-1}}, u_{N^{k-1}}\}$  sowie Funktionen  $\hat{x}_k(\cdot) \in (W_p^{1,n}([0, k], \nu) \cap C^0[0, k])$ ,  $\hat{u}_k(\cdot) \in L_\infty^m([0, k], \nu)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$x_{N^k} \rightharpoonup^{W_p^{1,n}([0,k],\nu)} \hat{x}_k, \quad u_{N^k} \rightharpoonup^* L_\infty^m([0,k],\nu) \hat{u}_k; \quad (6.29)$$

$$\dot{\hat{x}}_k(t) = A(t, \hat{x}_k(t)) + B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t) \quad (\forall) t \in [0, k]; \quad (6.30)$$

$$\lim_{N^k \rightarrow \infty} \|x_{N^k} - \hat{x}_k\|_{C^0[0,k]} = 0. \quad (6.31)$$

Aufgrund des Konstruktionsschemas beobachten wir folgende Übereinstimmungen:  $\hat{x}_k(t) = \hat{x}_{k-1}(t)$  und  $\hat{u}_k(t) = \hat{u}_{k-1}(t)$  für fast alle  $t \in [0, k-1]$ . Diese führen zu Grenzfunktionen  $\hat{x}(\cdot) \in (W_{p,loc}^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \cap C^0(\mathbb{R}^+))$ ,  $\hat{u}(\cdot) \in L_{\infty,loc}^m(\mathbb{R}^+, \nu)$ , deren Einschränkungen auf  $[0, k]$  mit  $\hat{x}_k(\cdot)$  und  $\hat{u}_k(\cdot)$  übereinstimmen. Die Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes liefert  $\hat{x}(t) = x_0(t)$ ,  $\hat{u}(t) = u_0(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Wir haben noch die Gleichung (6.30) für alle  $k \in \mathbb{N}$  zu zeigen. Ähnlich wie in PICKENHAIN&WAGNER [81], Lemma 2.3, S. 223, kann man die Gleichung (6.24) mit einer beliebigen Testfunktion  $\phi(\cdot) \in C^{0,\infty}[0, k]$  durchmultiplizieren, um die Gleichung

$$\int_0^k \phi(t) [\dot{x}_{N^k}(t) - A(t, x_{N^k}(t)) - B(t, x_{N^k}(t))u_{N^k}(t)] dt = 0 \quad (6.32)$$

zu erhalten. Durch partielle Integration der linken Seite der obigen Gleichung erhalten wir für jede beliebige Testfunktion<sup>3</sup>  $\phi(\cdot) \in C^{0,\infty}[0, k]$ , d.h. eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger,

$$\phi(t)x_{N^k}(t) \Big|_0^k - \int_0^k \dot{\phi}(t)x_{N^k}(t) dt = \int_0^k \phi(t)(A(t, x_{N^k}(t)) + B(t, x_{N^k}(t))u_{N^k}(t)) dt \quad (6.33)$$

bzw.

$$\int_0^k \dot{\phi}(t)x_{N^k}(t) dt + \int_0^k \phi(t)(A(t, x_{N^k}(t)) + B(t, x_{N^k}(t))u_{N^k}(t)) dt = 0. \quad (6.34)$$

<sup>3</sup>Zur Definition einer Testfunktion siehe Definition 26.

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $\{x_{N^k}\}$  auf dem Intervall  $[0, k]$  liefert

$$\lim_{N^k \rightarrow \infty} \int_0^k \dot{\phi}(t) x_{N^k}(t) dt = \int_0^k \dot{\phi}(t) \hat{x}_k(t) dt. \quad (6.35)$$

Als nächstes betrachten wir

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^k \phi(t) A(t, x_{N^k}(t)) dt - \int_0^k \phi(t) A(t, \hat{x}_k(t)) dt \right| \\ & \leq \int_0^k |\phi(t)| \cdot \left| A(t, x_{N^k}(t)) - A(t, \hat{x}_k(t)) \right| dt \end{aligned} \quad (6.36)$$

und die Lipschitzstetigkeit der Funktion  $A(t, \cdot)$  erlaubt es, die vorherige Abschätzung weiterzuführen:

$$\begin{aligned} & \int_0^k |\phi(t)| \cdot \left| A(t, x_{N^k}(t)) - A(t, \hat{x}_k(t)) \right| dt \\ & \leq L_1 \|\phi\|_{C^0(\mathbb{R}^+)} \cdot \int_0^k |x_{N^k}(t) - \hat{x}_k(t)| dt \rightarrow 0, \quad N^k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.37)$$

was dank der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $\{x_{N^k}\}$  gegen die Funktion  $\hat{x}_k(\cdot)$  gilt. Im nächsten Schritt schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^k \phi(t) B(t, x_{N^k}(t)) u_{N^k}(t) dt - \int_0^k \phi(t) B(t, \hat{x}_k(t)) \hat{u}_k(t) dt \right| \\ & \leq \int_0^k |\phi(t)| \cdot \left| B(t, x_{N^k}(t)) - B(t, \hat{x}_k(t)) \right| |u_{N^k}(t)| dt \\ & \quad + \left| \int_0^k \phi(t) B(t, \hat{x}_k(t)) (u_{N^k}(t) - \hat{u}_k(t)) dt \right| \\ & \leq L_2 \cdot K \|\phi\|_{C^0(\mathbb{R}^+)} \cdot \int_0^k |x_{N^k}(t) - \hat{x}_k(t)| dt \\ & \quad + \left| \int_0^k \phi(t) B(t, \hat{x}_k(t)) (u_{N^k}(t) - \hat{u}_k(t)) dt \right|. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Unter Berücksichtigung der Schwach\*-Konvergenz der Funktionenfolge  $u_{N^k} \rightharpoonup^* \hat{u}_k$

im Raum  $L_\infty^m([0, k], \nu)$  erhält man für alle  $\phi(\cdot)B(\cdot) \in L_1^{n \times m}[0, k]$  die komponentenweise Konvergenz

$$\int_0^k \phi(t)B(t)u_{N^k}(t)dt \rightarrow \int_0^k \phi(t)B(t)\hat{u}_k(t)dt, \quad N^k \rightarrow \infty \quad (6.39)$$

und, insbesondere,

$$\int_0^k \phi(t)B(t, \hat{x}_k(t))u_{N^k}(t)dt \rightarrow \int_0^k \phi(t)B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t)dt, \quad N^k \rightarrow \infty, \quad (6.40)$$

da wegen (6.5) und der Eigenschaften der Testfunktion  $\phi(\cdot)$  die Inklusion

$$B(\cdot, \hat{x}_k(\cdot)) \in L_q^{n \times m}(\mathbb{R}^+, \nu) \subset L_1^{n \times m}(\mathbb{R}^+, \nu) \subset L_1^{n \times m}[0, k] \quad (6.41)$$

gilt. Wir machen von der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge  $\{x_{N^k}\}$ , der Abschätzung (6.38) sowie von der Konvergenz (6.40) Gebrauch und erhalten dabei bei fixierter oberer Grenze  $k > 0$ :

$$\lim_{N^k \rightarrow \infty} \int_0^k \phi(t)B(t, x_{N^k}(t))u_{N^k}(t)dt = \int_0^k \phi(t)B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t)dt, \quad (6.42)$$

wobei die Vektorfunktion im Integranden komponentenweise integriert wird. Mittels (6.35), (6.37) und (6.42) gehen wir zum Grenzwert bei  $N^k \rightarrow \infty$  in der Gleichung (6.34) über, d.h. es gilt

$$\int_0^k \dot{\phi}(t)\hat{x}_k(t)dt + \int_0^k \phi(t)A(t, \hat{x}_k(t))dt + \int_0^k \phi(t)B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t)dt = 0 \quad (6.43)$$

für alle Testfunktionen  $\phi(\cdot) \in C^{0, \infty}[0, k]$ . Die partielle Integration im ersten Summanden führt zu:

$$\int_0^k \phi(t) \left\{ \dot{\hat{x}}_k(t) - A(t, \hat{x}_k(t)) - B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t) \right\} dt = 0 \quad \forall \phi(\cdot) \in C^{0, \infty}[0, k]. \quad (6.44)$$

Folglich ist die Gleichung

$$\dot{\hat{x}}_k(t) = A(t, \hat{x}_k(t)) + B(t, \hat{x}_k(t))\hat{u}_k(t) \quad (6.45)$$

fast überall auf  $[0, k]$  erfüllt, und somit ist die Gleichung (6.30) bewiesen.

Wir konstruieren nun die Diagonalfolge mit folgenden Eigenschaften: Aus der ersten Teilfolge  $\{x_{N^1}, u_{N^1}\}$  nehmen wir das erste Paar  $(x_{N_1^1}, u_{N_1^1})$  heraus, das der Ungleichung

$$\|x_{N_1^1} - \hat{x}_1\|_{C^0[0,1]} \leq 1/2, \quad (6.46)$$

genügt, der Teilfolge  $\{x_{N^2}, u_{N^2}\}$  entnehmen wir das erste Paar  $(x_{N^2}, u_{N^2})$  mit  $N^2 > N_1^1$  und

$$\|x_{N^2} - \hat{x}_2\|_{C^0[0,2]} \leq 1/4, \quad (6.47)$$

und allgemein entnehmen wir der Teilfolge  $\{x_{N^k}, u_{N^k}\}$  das erste Paar  $\{x_{N^k}, u_{N^k}\}$  mit  $N^k > N_{k-1}^{k-1}$  und

$$\|x_{N^k} - \hat{x}_k\|_{C^0[0,k]} \leq 1/2^k. \quad (6.48)$$

Die gewonnene Diagonalfolge  $\{x_{N^k}\}$  konvergiert auf der ganzen Halbachse  $[0, \infty)$  punktweise gegen die Grenzfunktion  $\hat{x}(\cdot)$  im Gegensatz zur Diagonalfolge  $\{u_{N^k}\}$ , die nur fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  gegen die Funktion  $\hat{u}(\cdot)$  konvergiert. Hieraus schlussfolgern wir ebenso das Ergebnis des Lemmas 7, nämlich die Gültigkeit der Bedingung  $x_0(0) = x_0$ . ■

Die Zustandsbeschränkung (5.6) bleibt ebenfalls gültig für die Grenzfunktion  $x_0(\cdot)$ , wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 9.** Sei  $\{x_N\}$  eine Folge, die im gewichteten Sobolevraum  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  schwach gegen die Funktion  $x_0(\cdot)$  konvergiert. Ferner erfüllen alle Glieder dieser Folge die Ungleichung

$$|x_N(t)| \leq \beta(t) \quad (6.49)$$

für fast alle  $t \in \mathbb{R}^+$ . Dann genügt die Grenzfunktion  $x_0(\cdot)$  derselben Ungleichung, nämlich

$$|x_0(t)| \leq \beta(t), \quad (6.50)$$

ebenso fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ .

**Beweis:** Angenommen, die Ungleichung (6.50) ist verletzt, das heisst es existiert eine Menge  $F \subset \mathbb{R}^+$  des positiven Lebesgueschen Maßes  $\mu(F) > 0$ , so dass für alle  $t \in F$  die konträre Ungleichung

$$|x_0(t)| - \beta(t) \geq K_3 > 0 \quad (6.51)$$

gilt. Weiter gibt es ein Intervall  $[0, T]$  mit  $\mu(F \cap [0, T]) > 0$ . Den Schnitt  $F \cap [0, T]$  bezeichnen wir mit  $F_1$ . Da auf dem Intervall  $[0, T]$  die Kompaktheit der Einbettung  $W_p^{1,n}([0, T], \nu) \rightarrow L_p^n([0, T], \nu)$  gegeben ist, vgl. mit dem Einbettungssatz von Rellich-Kondrachov, Satz 3, Unterkapitel 1.1.2, kann die im gewichteten Sobolevraum  $W_p^{1,n}([0, T], \nu)$  schwach konvergente Folge  $\left\{x_N \Big|_{[0, T]}\right\}$  als eine stark konvergente Folge des gewichteten Lebesgueraumes  $L_p^n([0, T], \nu)$  angesehen werden. Der Folge  $\left\{x_N \Big|_{[0, T]}\right\}$  entnehmen wir eine fast überall auf  $[0, T]$ , und somit auch auf der Menge  $F_1$ , gegen  $x_0 \Big|_{[0, T]}$  konvergente Teilfolge  $\left\{x_{N_k} \Big|_{[0, T]}\right\}$ . Dies ist möglich gemäß

dem Schema, gegeben in KOLMOGOROV [54], S. 446, vgl. Anhang B. Weiterhin schätzen wir für hinreichend große Zahlen  $N_k \in \mathbb{N}$  und fast alle  $t \in F_1$  ab:

$$\begin{aligned} |x_{N_k}(t) - \beta(t)| &= |x_{N_k}(t) - |x_0(t)| + |x_0(t) - \beta(t)| \\ &\geq |x_{N_k}(t) - |x_0(t)|| + K_3 \geq K_3 - \epsilon = K_4 > 0, \end{aligned} \quad (6.52)$$

was der Ungleichung (6.49) widerspricht. Die letzte Abschätzung ist gültig aufgrund der Stetigkeit der euklidischen Betragsfunktion  $|\cdot|$  und der Inklusion  $F_1 \subset [0, T]$ , die die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge  $\left\{ x_{N_k} \Big|_{F_1} \right\}$  auf  $F_1$ , mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge, sichert. ■

Dieses Ergebnis zusammen mit den drei zuvor bewiesenen Lemmata schliesst den Beweis der schwachen Abgeschlossenheit des zulässigen Bereiches  $\mathbb{Z}$  ab. Nun ist die Beschränktheit desselben zu beweisen.

**Schritt 2.** Die Menge aller zulässigen Steuerungen ist beschränkt, da fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  die Inklusion  $u(t) \in U$  gilt, wobei  $U$  eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  ist. Daher existiert eine Konstante  $K > 0$ , mit der die Ungleichung

$$|u(t)| \leq K \quad (6.53)$$

für fast alle  $t \in [0, \infty)$  gültig bleibt. Dies impliziert

$$\|u\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p = \int_0^\infty |u(t)|^p \nu(t) dt \leq K^p V = \text{const}, \quad (6.54)$$

wobei

$$V = \int_0^\infty \nu(t) dt < \infty. \quad (6.55)$$

Die Anwendung der Wachstumsbedingung (6.6) sowie der Ungleichung (6.53) führt zur folgenden Abschätzung für die Ableitung einer zulässigen Zustandstrajektorie  $x(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p &= \int_0^\infty |\dot{x}(t)|^p \nu(t) dt = \int_0^\infty |f(t, x(t), u(t))|^p \nu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty (C_1 + C_2|x(t)| + C_3|x(t)||u(t)| + C_4|u(t)|)^p \nu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty (C_1 + (C_2 + C_3K)|x(t)| + C_4K)^p \nu(t) dt \\ &\leq 2^p(C_1 + C_4K)^p \int_0^\infty \nu(t) dt + 2^p(C_2 + C_3K)^p \int_0^\infty |\beta(t)|^p \nu(t) dt \\ &\leq 2^p(C_1 + C_4K)^p V + 2^p(C_2 + C_3K)^p \|\beta\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p = \text{const}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Die Abschätzung (6.56) erhält man, indem man die elementare Ungleichung

$$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p), \quad a, b > 0, \quad p \geq 1 \quad (6.57)$$

anwendet, die wegen

$$(a + b)^p \leq (2 \max\{a, b\})^p = 2^p(\max\{a, b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p) \quad (6.58)$$

gültig ist. Dank der Zustandsbeschränkung (5.6) gilt

$$\|x\|_{L_p^p(\mathbb{R}^+, \nu)}^p = \int_0^\infty |x(t)|^p \nu(t) dt \leq \int_0^\infty |\beta(t)|^p \nu(t) dt = \|\beta\|_{L_p^p(\mathbb{R}^+, \nu)}^p = \text{const.} \quad (6.59)$$

Auf diese Weise ist die Beschränktheit der zulässigen Menge  $\mathbb{Z}$ , und folglich auch ihre schwache Kompaktheit, bewiesen. Der Beweis des Satzes ist somit ebenfalls abgeschlossen.  $\blacksquare$

**Bemerkung 26. (a)** Die Zustandsrestriktion (5.6) ist wesentlich für den Nachweis der Existenz einer optimalen Lösung, denn sie gewährleistet zusammen mit anderen Voraussetzungen sowohl die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals (5.1) als auch die Beschränktheit des zulässigen Bereiches, die sonst nicht unbedingt gegeben ist, wie es am Beispiel des Ressourcen-Allokationsmodells später ersichtlich sein wird. Deshalb kann sie nicht ohne weiteres weggelassen werden.

**(b)** In dem bewiesenen Existenzsatz ist der Fall  $p = \infty$ , der auf den ersten Blick am wichtigsten erscheint, nicht behandelt worden. Doch schauen wir uns die Situation genauer an. Die Dichtefunktion  $\nu(\cdot)$  erzeugt ein endliches Maß auf  $\mathbb{R}^+$ , aufgrund dessen die Inklusion  $L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu) \subseteq L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$  für ein  $1 \leq p < \infty$  gültig ist, und bei der Lösung des Problems  $(P_\infty^L)$  für  $1 \leq p < \infty$  durchläuft man auch automatisch alle zulässigen Steuerungen aus dem Raum  $L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Das heisst, selbst wenn keine optimale Lösung  $u(\cdot)$  aus  $L_\infty(\mathbb{R}^+, \nu)$  existiert, wird eine Lösung aus der größeren Menge  $L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$  gefunden, wodurch die Notwendigkeit eines Exrabeweises für  $p = \infty$  entfällt. Würde man dagegen das Steuerungsproblem in ungewichteten Räumen formulieren, so ist die Inklusion  $L_\infty(\mathbb{R}^+) \subseteq L_p(\mathbb{R}^+)$  verletzt<sup>4</sup> und die Betrachtung des Falles  $p = \infty$  wäre relevant.

**(c)** In der Formulierung des Problems  $(P_\infty^L)$  wurde die Funktion  $r(t, \cdot, v)$  zwar als eine  $C^1(\mathbb{R}^n)$  Funktion vorausgesetzt, aber zur Sicherung der Existenz einer für Problem  $(P_\infty^L)$  optimalen Lösung wurde diese Annahme nicht benötigt. Will man also das genannte Steuerungsproblem nur in Bezug auf die Existenz einer optimalen Lösung untersuchen, so kann die Forderung  $r(t, \cdot, v) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  abgeschwächt werden.

---

<sup>4</sup>Es gilt für  $1 < p \leq q \leq r \leq \infty$  lediglich die "Höldersche Interpolation"  $L_q(\mathbb{R}^+) \supseteq L_p(\mathbb{R}^+) \cap L_r(\mathbb{R}^+)$ .

## 6.2 Vergleich mit bekannten Existenzsätzen

Seit den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde relativ viel Aufmerksamkeit der Existenztheorie gewidmet, so dass verschiedene Existenzsätze für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont zustande gekommen sind. Darunter sind unter anderem MCSHANE [71], BAUM [13], BALDER [12], DMITRUK&KUZ'KINA [31], VON WEIZSÄCKER [97], MAGILL [65], CARLSON [19], TAKEKUMA [94], CESARI [25], TONELLI [95]. Hier werden wir uns aber nur auf drei der erwähnten Existenzsätze konzentrieren, nämlich auf die in [13], [12] und [31] bewiesenen Sätze.

In [13] arbeitet R. F. Baum mit messbaren Steuerungsfunktionen  $u(\cdot)$  und Zustandstrajektorien  $x(\cdot)$ , die auf jedem beschränkten Intervall absolut stetig sind.

Der Vektorraum der Kozustandsfunktionen soll laut bekannter Heuristik, vgl. ARADA&RAYMOND [4], als Dualraum eines solchen Raumes gewählt werden, in dem die zulässige Menge ein nichtleeres Inneres besitzt. Diese wichtige Korrespondenz zwischen der Zustands- und Kozustandstrajektorie geht jedoch verloren, wenn man den Raum der absolut stetigen Funktionen  $AC^n[0, T]$  als einen Zustandsraum nimmt. Aus diesem Grund wurden in der vorliegenden Arbeit die gewichteten Sobolevräume  $W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  als Zustands- bzw. Kozustandsräume gewählt.

Des weiteren wird in BAUM [13] die so genannte kompakte offene Topologie benutzt, die die gleichmäßige Konvergenz der zulässigen Zustandstrajektorien auf kompakten Mengen bedeutet. In dem hier bewiesenen Existenzsatz wird dagegen die allgemeinere schwache Topologie benutzt, womit die Menge der zulässigen Folgen viel größer ist. Aus einer schwach konvergenten Folge im gewichteten Sobolevraum kann man zwar mit Hilfe des Diagonalverfahrens eine Teilfolge entnehmen, die auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert. Die gleichmäßige Konvergenz der Folge selbst ist im Allgemeinen jedoch nicht gegeben. In den Existenzsätzen, die nach dem Weierstraßschen Schema bewiesen werden, wird die Existenz einer Minimalfolge zwar postuliert, aber es ist sinnvoll die Topologie, und somit die Menge aller konvergenten Folgen, so allgemein wie möglich zu halten.

Allerdings wird in dem erwähnten Artikel weder die Konvexität des Integrandes noch die Linearität der dynamischen Gleichung in der Steuerung vorausgesetzt. Der in diesem Kapitel bewiesene Satz könnte mit den bekannten Relaxationsmethoden auch auf Probleme mit nicht konvexen Integranden erweitert werden. Um die Übertragung der Schlüsse von endlichen Intervallen auf unendliche zu vermeiden, haben wir bewusst die Konvergenz der Minimalfolgen auf der gesamten Halbachse betrachtet.

Die Ergebnisse aus BAUM [13] und TAKEKUMA [94] wurden in BALDER [12], Satz 3.6, S. 204, verallgemeinert. Der Autor verfolgt ebenso wie wir das verallgemeinerte Weierstraßsche Prinzip, um die Existenz einer optimalen Lösung zu beweisen. Hier wird mit der allgemeineren schwachen Topologie und den lokal absolut stetigen Zustandsfunktionen gearbeitet, weshalb der direkte Vergleich der Existenzsätze eigentlich nicht möglich ist, da schon die Problemstellungen sehr unterschiedlich sind. Nichts desto trotz wird in dem Artikel von E. J. Balder eine sehr allgemeine Klasse von Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont behandelt, was durch die

Anwendung des Apparates der mengenwertigen Abbildungen und der Auswahltheoreme ermöglicht wurde.

Der Existenzsatz, bewiesen von A. V. Dmitruk und N. V. Kuz'kina in [31], Satz 1, S. 469 ff., behandelt Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont und einer in der Steuerung linearen Dynamik, vgl. (6.4). Hierbei wird zwar unendliche Divergenz des Integrals im Zielfunktional erlaubt und die starke gleichmäßige Integrierbarkeit der Funktionen

$$\left\{ r^-(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot) \Big| (x, u) \in \mathbb{Z}_\alpha \right\}, \quad r^-(t) = \min\{r(t), 0\} \quad (6.60)$$

mit

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{(x, u) \in \mathbb{Z} \mid J(x, u) \leq \alpha\}, \quad (6.61)$$

vorausgesetzt in [12], Satz 3.6, S. 205 f., durch die Forderung der Existenz einer Funktion  $\alpha(T) \rightarrow 0+$ ,  $T \rightarrow \infty$  und einer Zahl  $T_0$  mit

$$\int_{T'}^{T''} r(t, x(t), u(t))\tilde{\nu}(t)dt \geq -\alpha(T) \quad (6.62)$$

für alle  $T > T_0$ , alle  $T'' > T' \geq T$  und alle zulässigen Paare  $(x, u)$ , abgeschwächt. Aber die Setzung des Raumes  $AC_{loc}^n[0, \infty)$  aller auf den endlichen Teilintervallen absolut stetigen Funktionen als Zustandsraum sowie die Wahl der einschränkenden Topologie, nämlich der gleichmäßigen Konvergenz der Zustandsfunktionen  $x(\cdot)$  auf jedem kompakten Intervall  $[0, T]$  sowie der Schwach\*-Konvergenz der Steuerungen  $u(\cdot)$  in  $L_{\infty, loc}(\mathbb{R}^+)$  macht die betrachteten Steuerungsaufgaben von Grund auf verschieden, was zu der Notwendigkeit des Beweises eines Existenzsatzes für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont, betrachtet in gewichteten Sobolev- bzw. Lebesgueräumen, geführt hatte.

# Kapitel 7

## Dualitätstheorie

### 7.1 Allgemeine Idee der Dualität

Gegeben seien zwei reelle Funktionale  $f, g$ ;  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ,  
 $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  mit beliebigen Definitionsmengen  $X$  und  $Y$ . Weiterhin  
sei eine so genannte primale Aufgabe (P)

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}) \quad & f(x) \rightarrow \inf! \text{ bzgl. aller } x \in X, \\ & (\text{Für } X = \emptyset \text{ sei } \inf f(x) = +\infty) \end{aligned} \tag{7.1}$$

sowie eine folgende Aufgabe (D) gegeben:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}) \quad & g(y) \rightarrow \sup! \text{ bzgl. aller } y \in Y, \\ & (\text{Für } Y = \emptyset \text{ sei } \sup g(y) = -\infty). \end{aligned} \tag{7.2}$$

**Definition 16.** (D) ist genau dann ein **duales Problem** zu dem Problem (P),  
wenn die Ungleichung

$$\inf (\mathbf{P}) = \inf_{x \in X} f(x) \geq \sup_{y \in Y} g(y) = \sup (\mathbf{D}) \tag{7.3}$$

gilt, vgl. PICKENHAIN [74], S. 1.

**Definition 17.** Existieren solche  $\hat{x} \in X$  und  $\hat{y} \in Y$ , dass die letzte Ungleichung zur  
Gleichung wird, d.h.

$$\inf (\mathbf{P}) = \inf_{x \in X} f(x) = f(\hat{x}) = g(\hat{y}) = \sup_{y \in Y} g(y) = \sup (\mathbf{D}), \tag{7.4}$$

so gilt die **starke Dualität** zwischen den Aufgaben (P) und (D), vgl. PICKENHAIN  
[74], S. 1 ff.

Die zwei wichtigsten Vorteile, die die Dualitätstheorie mit sich bringt, sind die  
folgenden:

**Gewinn von hinreichenden Optimalitätsbedingungen.** Gilt für ein  $\hat{x} \in X$   
die Gleichung  $\sup(D) = f(\hat{x})$ , so ist  $\hat{x}$  eine globale Minimalstelle von (P).

**Abschätzungen der Optimalwerte.**

$$\exists \hat{x} \in X, \hat{y} \in Y : g(\hat{y}) \leq \inf_{x \in X} f(x) \leq f(\hat{x}). \quad (7.5)$$

Als nächstes wird die Frage des Aufstellens dualer Aufgaben untersucht.

**7.2 Konstruktionsschema für duale Aufgaben**

Das nachfolgende Konstruktionsschema, das generell für Steuerungsprobleme mit Differentialgleichungen erster Ordnung anwendbar ist, und die Dualitätsbegriffe wurden PICKENHAIN [74] entnommen. Der Algorithmus der Aufstellung einer dualen Aufgabe erfolgt in drei Schritten, die nun ausführlicher beschrieben werden.

**Schritt 1:** Man gebe eine geeignete Darstellung des zulässigen Bereiches  $X$  von **(P)** an:  $X = X_0 \cap X_1$ . Die Vorgabe von  $X_0$  und  $X_1$  wird oft durch die Optimierungsaufgabe vorgeprägt.

**Schritt 2:** Man definiere eine Menge  $Y$  und ein reelles Funktional  $\Phi(\cdot, \cdot) : X_0 \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit folgender Eigenschaft, die Äquivalenzrelation genannt wird:

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X_0} [\sup_{y \in Y} \Phi(x, y)]. \quad (7.6)$$

Es ist offensichtlich, daß

$$\inf_{x \in X_0} \sup_{y \in Y} \Phi(x, y) \geq \sup_{y \in Y} [\inf_{x \in X_0} \Phi(x, y)] \quad (7.7)$$

gilt.

**Schritt 3:** Man setze für ein fixiertes  $y$

$$g(y) := \inf_{x \in X_0} \Phi(x, y). \quad (7.8)$$

Somit gilt laut dieser Konstruktion folgende Abschätzungskette:

$$\inf_{x \in X} f(x) \stackrel{(7.6)}{=} \inf_{x \in X_0} [\sup_{y \in Y} \Phi(x, y)] \stackrel{(7.7)}{\geq} \sup_{y \in Y} [\inf_{x \in X_0} \Phi(x, y)] \stackrel{(7.8)}{=} \sup_{y \in Y} g(y), \quad (7.9)$$

woraus man schließt, dass jede Aufgabe vom Typ

$$\text{(D)} : \tilde{g}(y) \rightarrow \text{sup!} \text{ bzgl. } y \in Y_0 \subset Y \text{ mit } \tilde{g}(s) \leq g(s) \quad \forall s \in Y_0 \quad (7.10)$$

dual zur Aufgabe **(P)** ist.

**Bemerkung 27. (a)** Das Aufstellen der dualen Aufgabe erfordert das Lösen einer Optimierungsaufgabe. Die Menge  $Y$  und das Funktional  $\Phi(x, y)$  sind so zu wählen, das dies einfacher als das Lösen der Ausgangsaufgabe ist.

**(b)** In der Auswahl der Mengen  $X_0, X_1, Y$  und des Funktionals  $\Phi$  hat man viele Freiheitsgrade. Deshalb sind mehrere Dualitätstheorien entstanden.

## 7.3 Dualität für Steuerungsprobleme

Betrachtet wird zunächst das folgende Steuerungsproblem  $(P_T)$  mit endlichem Zeitintervall: Minimiere das Funktional

$$J_T(x, u) = \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt \quad (7.11)$$

über alle Paare

$$(x, u) \in W_p^{1,n}[0, T] \times L_p^m[0, T], \quad p \geq 1, \quad (7.12)$$

die die Bedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (7.13)$$

$$x(t) \in Z(t) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (7.14)$$

$$x(0) = x_0; \quad (7.15)$$

$$u(t) \in U(t) \subseteq \mathcal{U} - \text{kompakt} \quad (7.16)$$

erfüllen. Die Funktionen  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  werden als stetig in  $t$  und  $v$  sowie stetig differenzierbar in  $\xi$  vorausgesetzt.

### 7.3.1 Dualitätskonzept von Klötzler

Der Grundgedanke dieses Dualitätskonzeptes geht auf die Weylsche Feldtheorie zurück. Zu einem zu minimierenden Funktional wird in einer Umgebung des Kandidatenprozesses im  $(t, \xi)$  – Raum ein nur von den Randbedingungen an  $x(\cdot)$  abhängendes “invariantes Integral“ konstruiert, deren Werte unter gewissen Nebenbedingungen an den Integranden unter den Zielfunktionswerten liegen, vgl. KLÖTZLER [51], S. 158 ff. Das Konzept selbst entstand vor allem aus Mangel an einem systematischen analytischen Zugang zur Behandlung von Aufgaben mit Ungleichungsrestriktionen, darunter vielen geometrischen Optimierungsaufgaben, und Notwendigkeit des Auffindens von globalen optimalen Lösungen zu diesen, was selbst im eindimensionalen Fall mit dem Pontrjaginschen Maximumprinzip noch recht schwierig und meistens nur lokal möglich war. Für mehrdimensionale Steuerungsprobleme wurde das Pontrjaginsche Maximumprinzip zu dem Zeitpunkt noch gar nicht bewiesen, vgl. KLÖTZLER [53], S. 451. Die erste Auffassung des Konzeptes findet sich in KLÖTZLER [52] und wird für Steuerungsprobleme mit mehrfachem Integral formuliert. In einer späteren Arbeit [53] vom selben Autor ist eine reifere Variante des Konzeptes vorzufinden, woraus hier zitiert wird. Entsprechende Änderungen für den Fall eines einfachen Integrals werden dabei mitberücksichtigt. Bei der Einführung des Dualitätskonzeptes für das Steuerungsproblem  $(P_T)$  folgen wir wiederum dem Konstruktionsschema aus dem Unterkapitel 7.1 und verwenden den Satz 1, S. 453, aus KLÖTZLER [53].

**Schritt 1:** Folgend dem ersten Schritt des Schemas ist der zulässige Bereich  $X$  zu

dem Problem  $(P_T)$  als Durchschnitt zweier Mengen  $X_0$  und  $X_1$  darzustellen. In die Menge  $X_0$  werden alle Paare  $(x, u)$  aufgenommen, die allen Nebenbedingungen des Problems  $(P_T)$  genügen, bis auf die Zustandsgleichung (7.13). In der Menge  $X_1$  werden alle Paare  $(x, u)$  enthalten sein, die in der Regularitätsklasse (7.12) sind und die Zustandsgleichung erfüllen. Insgesamt gilt also

$$X_0 = \left\{ (x, u) \left| \begin{array}{l} x \in W_p^{1,n}[0, T], \quad x(t) \in Z(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \\ u \in L_p^m[0, T], \quad u(t) \in U(t) \quad (\forall) t \in [0, T] \end{array} \right. \right\} \quad (7.17)$$

sowie

$$X_1 = \left\{ (x, u) \left| \begin{array}{l} x \in W_p^{1,n}[0, T], \quad \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)) = 0 \\ u \in L_p^m[0, T], \quad (\forall) t \in [0, T] \end{array} \right. \right\}. \quad (7.18)$$

**Schritt 2:** In diesem Schritt sind nun die Menge  $Y$  und das Funktional  $\Phi$  festzulegen. Nach dem Dualitätskonzept von Klötzler ist  $Y$  die Menge der Funktionen  $S$ , die im folgenden Sinne stückweise stetig differenzierbar sind: es existiert eine Zerlegung des Zeitintervalls  $[0, T]$  in endlich viele Teilintervalle  $[0, t_1], \dots, [t_{i-1}, t_i], \dots, [t_{k-1}, t_k]$  mit  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_k = T$ , so daß  $S \in C^1[Z_i] \cap C^0[\bar{Z}_i]$  gilt, wobei  $Z_i = \{(t, \xi) \mid \xi \in Z(t), t \in (t_{i-1}, t_i)\}$  gilt, vgl. KLÖTZLER [53], S. 453. Als Funktional  $\Phi$  wählt man das erweiterte Lagrangesche Funktional, das, wie wir gleich zeigen werden, der Äquivalenzforderung genügt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir das Paar  $(x, u)$  mit einer neuen Variablen  $\varsigma$  und betrachten das Lagrangesche Funktional  $\Phi(\varsigma, S)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\varsigma, S) &= J_T(\varsigma) + \langle \partial_\xi S, \dot{x} - f \rangle_{L_2[0, T]} = \\ &= \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt + \int_0^T \partial_\xi S(t, x(t))^T [\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t))] dt. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Hier wurde zu dem zu minimierenden Funktional  $J_T$  ein auf dem zulässigen Bereich invariantes Funktional addiert, das den Wert 0 hat. Dies ist der bekannte Königsweg von Carathéodory.

Wir prüfen nun, ob das so eingeführte Funktional die Äquivalenzforderung

$$\inf_{\varsigma \in X} J_T(\varsigma) = \inf_{\varsigma \in X_0} \sup_{S \in Y} \Phi(\varsigma, S) \quad (7.20)$$

erfüllt. Zunächst behaupten wir, daß

$$\sup_{S \in Y} \Phi(\varsigma, S) = \begin{cases} J_T(\varsigma) & , \quad \varsigma \in X_1 \\ \infty & , \quad \varsigma \notin X_1. \end{cases} \quad (7.21)$$

und beweisen dies. Gilt  $\langle \partial_\xi S, \dot{x} - f \rangle_{L_2[0, T]} = \alpha \neq 0$  für ein  $S \in Y$ , dann folgt  $k \cdot S \in Y$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und somit  $\langle \partial_\xi(k \cdot S), \dot{x} - f \rangle_{L_2[0, T]} = k \cdot \alpha$ . Es ergibt sich also

$$\sup_{S \in Y} \langle \partial_\xi S, \dot{x} - f \rangle_{L_2[0, T]} = +\infty. \quad (7.22)$$

Ist  $\langle \partial_\xi S, \dot{x} - f \rangle_{L_2[0,T]} = 0$  für alle  $S \in Y$ , so hat man mit  $S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t))$ ,  $S \in Y$  die Gleichung

$$\langle y, \dot{x} - f \rangle_{L_2[0,T]} = 0 \quad (7.23)$$

für alle  $y \in C^1[0, T]$ . Damit gilt

$$\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)) = 0 \quad (7.24)$$

fast überall auf  $[0, T]$ , bzw.  $\varsigma \in X_1$ . Dies liefert  $\sup_{S \in Y} \Phi(\varsigma, S) = J_T(\varsigma)$  genau dann, wenn  $\varsigma \in X_1$ . Die Gleichheit (7.21) ist somit bewiesen. Die Gültigkeit der Äquivalenzforderung

$$\inf_{\varsigma \in X_0} [\sup_{S \in Y} \Phi(\varsigma, S)] = \inf_{X_0 \cap X_1} J_T(\varsigma) = \inf_{\varsigma \in X} J_T(\varsigma) \quad (7.25)$$

folgt unmittelbar aus der bewiesenen Gleichheit (7.21).

**Schritt 3:** Wir betrachten die Funktion  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} g(S) &= \inf_{\varsigma \in X_0} \Phi(\varsigma, S) = \inf_{\varsigma \in X_0} \left\{ \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt \right. \\ &\quad + \int_0^T \partial_\xi S(t, x(t))^T \dot{x}(t) dt \\ &\quad \left. - \int_0^T \partial_\xi S(t, x(t))^T f(t, x(t), u(t)) dt \right\}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Unter Verwendung der Pontrjaginschen Funktion

$$H(t, \xi, v, \eta, 1) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) + \eta^T f(t, \xi, v) \quad (7.27)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} g(S) &= \inf_{\varsigma \in X_0} \left\{ - \int_0^T (H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \partial_t S(t, x(t))) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T [\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t))^T \dot{x}(t)] dt \right\} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{\zeta \in X_0} \left\{ - \int_0^T (H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \partial_t S(t, x(t))) dt \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{k-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t))^T \dot{x}(t)] dt \right) \right\} \\
&= \inf_{\zeta \in X_0} \left\{ - \int_0^T (H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \partial_t S(t, x(t))) dt \right. \\
&\quad \left. + S(T, x(T)) - S(0, x(0)) + \sum_{i=1}^{k-1} (S(t_i - 0, x(t_i)) - S(t_i + 0, x(t_i))) \right\}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun statt  $g(S)$  eine untere Schranke  $\tilde{g}(S)$ , das heisst es gilt

$$\tilde{g}(S) \leq g(S), \quad \forall S \in Y. \quad (7.29)$$

Dazu wird die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \sup_{v \in U(t)} H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0 = 1). \quad (7.30)$$

herangezogen. Wir schränken nun die Menge  $S \in Y$  auf die Menge  $S \in \tilde{Y} \subset Y$  ein, wobei die Menge  $\tilde{Y}$  folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$S \in \tilde{Y} \iff \left\{ \begin{array}{l} \Lambda(t, \xi) = \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in Z_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}. \quad (7.31)$$

Mit  $\Lambda(t, \xi)$  wird hier der Defekt der Hamilton-Jacobischen Gleichung bezeichnet und somit gehört ein  $S \in Y$  genau dann der Menge  $\tilde{Y}$  an, wenn der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  auf allen  $Z_i$  nichtpositiv ist, also wenn die so genannte Hamilton-Jacobische Ungleichung (rechte Seite von (7.31)) erfüllt ist. Jetzt kann man die Funktion  $g(S)$  für alle  $S \in \tilde{Y}$  nach unten abschätzen, vgl. KLÖTZLER [53], S. 454:

$$\begin{aligned}
g(S) &\geq \inf_{\zeta \in X_0} \left\{ 0 + S(T, x(T)) - S(0, x(0)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (S(t_i - 0, x(t_i)) - S(t_i + 0, x(t_i))) \right\} =: \tilde{g}(S). \quad (7.32)
\end{aligned}$$

Da die Komponente  $u$  von  $\zeta$  in der Bestimmung des Infimums keine Rolle spielt und zu jedem  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{nk}$  eine Funktion  $\zeta(\cdot) \in W_p^{1,n}[0, T]$  mit

$$\zeta(0) = x_0, \quad \zeta(t_i) = \beta_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (7.33)$$

existiert, führen wir die Menge

$$Q = \left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_T) \in \mathbb{R}^{nk} \mid \begin{array}{l} \beta_i \in Z(t_i), \quad i = 1, \dots, k-1 \\ \beta_T \in Z(T) \end{array} \right\} \quad (7.34)$$

ein und schreiben die in (7.32) definierte Funktion  $\tilde{g}(S)$  wie folgt um:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(S) &= \inf_{\beta \in Q} \{S(T, \beta_T) - S(0, x_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} (S(t_i - 0, \beta_i) - S(t_i + 0, \beta_i))\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Laut Konstruktionsschema ist die Aufgabe  $(\mathbf{D}_T^K)$  der Gestalt

$$(\mathbf{D}_T^K) : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}(S) \rightarrow \max! \text{ bzgl. } S \in \tilde{Y}, \text{ wobei} \\ S \in \tilde{Y} \iff \left\{ \begin{array}{l} \Lambda(t, \xi) = \partial_t S(t, \xi(t)) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi(t))) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in Z_i \end{array} \right\} \\ \tilde{g}(S) = \inf_{\beta \in Q} \{S(T, \beta_T) - S(0, x_0) + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} (S(t_i - 0, \beta_i) - S(t_i + 0, \beta_i))\} \end{array} \right\} \quad (7.36)$$

dual zum Problem  $(P_T)$ . Anhand der vorgestellten dualen Aufgabe lässt sich folgender Satz ableiten, der hinreichende Bedingungen für die Optimalität eines Prozesses liefert, vgl. KLÖTZLER [53], S. 454.

**Satz 29.** Ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  ist ein globales Minimum von  $(P_T)$ , falls ein  $S^* \in \tilde{Y}$  existiert, mit dem folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(\mathbf{M}) \quad \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t))) = H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t)), 1); \quad (7.37)$$

$$(\mathbf{HJ}) \quad \partial_t S^*(t, x^*(t)) + \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t))) = 0; \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(S^*) &= S^*(T, x^*(T)) - S^*(0, x^*(0)) + \\ (\mathbf{R}) \quad &+ \sum_{i=1}^{k-1} (S^*(t_i - 0, x^*(t_i)) - S^*(t_i + 0, x^*(t_i))). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Unter **(HJ)** versteht man die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung, die zusammen mit der Maximumbedingung **(M)** fast überall auf  $[0, T]$  erfüllt sein soll.

**Beweis:** Unter den gemachten Voraussetzungen kann für  $(x^*, u^*)$  und  $S^* \in \tilde{Y}$  mit Hilfe der Definitionen der Pontrjaginschen- und Hamiltonfunktion aus (7.27), (7.30)

folgende Gleichungskette hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(S^*) &\stackrel{(R)}{=} S^*(T, x^*(T)) - S^*(0, x^*(0)) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} (S^*(t_i - 0, x^*(t_i)) - S^*(t_i + 0, x^*(t_i))) \\
&= \int_0^T (\partial_t S^*(t, x^*(t)) + \partial_\xi S^*(t, x^*(t))^T f(t, x^*(t), u^*(t))) dt \\
&\stackrel{(M), (HJ)}{=} \int_0^T (\partial_t S^*(t, x^*(t)) + \partial_\xi S^*(t, x^*(t))^T f(t, x^*(t), u^*(t))) dt - \\
&- \int_0^T (\partial_t S^*(t, x^*(t)) + H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t)))) dt \\
&= \int_0^T r(t, x^*(t), u^*(t)) dt = J_T(x^*, u^*).
\end{aligned}$$

Die Bedingungen **(M)**, **(HJ)** und **(R)** liefern also die starke Dualität  $J_T(x^*, u^*) = \tilde{g}(S^*)$ . Somit ist das Paar  $(x^*, u^*)$  das globale Minimum von  $(P_T)$ . ■

Der letzte Satz und die bewiesene Dualitätsrelation zwischen den Problemen  $(P_T)$  und  $(D_T^K)$  bilden die technische Grundlage einer häufig erfolgreichen Heuristik zur Ermittlung von optimalen Lösungen zu  $(P_T)$ , vgl. KLÖTZLER [53], S. 454. Man wählt dazu Ansätze für die duale Variable  $S$ , also für die Funktion  $S(t, \xi)$ . In vielen Fällen reicht es schon aus, eine in  $\xi$  lineare oder quadratische Funktion zu nehmen.

**Bemerkung 28.** Das Klötzlersche Konzept der Dualität erlaubt eine Charakterisierung der Lösung der primalen Aufgabe  $(P_T)$  in Termen der Lösungen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung bzw. – ungleichung, die nicht zwingend existieren müssen. Infolge dessen wurden zahlreiche Techniken zur Auffindung der verallgemeinerten Lösungen der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung entwickelt, beispielsweise in CLARKE&VINTER [29], LIONS [61] und VINTER&WOLENSKI [99].

### 7.3.2 Zusammenhang mit der Fenchel-Rockafellarschen Dualität

Hier folgen wir nicht den Originalarbeiten von T. Rockafellar, sondern der Arbeit PICKENHAIN [74], in der die Zusammenhänge zwischen den beiden Dualitätskonzepten untersucht worden sind. Unter speziellen Voraussetzungen an die untersuchte Aufgabenklasse und den Ansatz  $S$  aus dem Dualitätskonzept von Klötzler konnte in der genannten Arbeit die Äquivalenz der dualen Aufgaben bewiesen werden.

Bevor wir das Konstruktionsschema anwenden, um die duale Aufgabe nach Fenchel-Rockafellar aufzubauen, wird das Problem  $(P_T)$  in ein Variationsproblem (V) transformiert, vgl. [74], S. 2:

$$L_T(x, u) = \int_0^T l(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min! \quad (7.40)$$

über alle  $x \in \mathcal{X} = \{x \in W_p^{1,n}[0, T] \mid x(0) = x_0\}$ . Dabei ist der Integrand  $l: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  durch

$$l(t, \xi, w) := \begin{cases} \inf\{r(t, \xi, v) \mid v \in U \text{ mit } w = f(t, \xi, v)\} & , \quad (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{Z(t)} \\ \infty & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (7.41)$$

definiert. Der Aufbau eines dualen Problems erfolgt in ROCKAFELLAR [87] für das Problem (V). Ist das Problem (V) konvex im Sinne von EKELAND&TEMAM [33], S. 113, so sind die Probleme  $(P_T)$  und (V) äquivalent im Sinne der Gleichheit von Infima, vgl. [87] und [73]. Das Konstruktionsschema wird aus diesem Grund auf  $(P_T)$  wie folgt angewendet.

**Schritt 1:** Die Setzung der Mengen  $X_0$  und  $X_1$  ist identisch mit dem Fall der Klötzlerschen Dualität, also

$$X_0 = \left\{ (x, u) \mid \begin{array}{l} x \in W_p^{1,n}[0, T], \quad x(t) \in Z(t), \forall t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \\ u \in L_p^m[0, T], \quad u(t) \in U(t), \quad (\forall) t \in [0, T] \end{array} \right\} \quad (7.42)$$

sowie

$$X_1 = \left\{ (x, u) \mid \begin{array}{l} x \in W_p^{1,n}[0, T], \quad \dot{x}_i(t) - f_i(t, x(t), u(t)) = 0 \\ u \in L_p^m[0, T], \quad (\forall) t \in [0, T] \end{array} \right\}. \quad (7.43)$$

**Schritt 2:** Die Rolle des Funktionals  $\Phi$  spielt hier das klassische Lagrange Funktional

$$\Phi(x, u, S) = J_T(x, u) + \sum_{i=1}^n \langle \dot{x}_i(\cdot) - f_i(\cdot, x, u), \partial_{\xi_i} S(\cdot, x(\cdot)) \rangle, \quad (7.44)$$

wobei  $S(\cdot) \in L_q^n[0, T]$ ,  $1/p + 1/q = 1$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die bilineare kanonische Verknüpfung über  $L_p[0, T] \times [L_p[0, T]]^*$  bezeichnet.

**Schritt 3:** Die duale Aufgabe ( $D_T^{Roc}$ ) kann mit Hilfe der Pontrjaginschen Funktion  $H(t, \xi, v, \eta, 1): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit

$$H(t, \xi, v, \eta) = -r(t, \xi, v) + \sum_{i=1}^n \eta_i^T f_i(t, \xi, v) \quad (7.45)$$

sowie der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(t, \xi, \eta): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \sup_{v \in U} H(t, \xi, v, \eta) \quad (7.46)$$

folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}_T^{\text{Roc}}) : \quad & - \int_0^T \left( \sup_{\xi \in Z(t)} \{ \mathcal{H}(t, \xi, -y(t)) - y_0(t)^T \xi \} \right) dt \\
 & - \sup_{\zeta \in \mathcal{X}} \left\{ \int_0^T \left( y_0(t)^T \zeta(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \zeta_i(t) \right) dt \right\} \longrightarrow \text{sup!} \quad (7.47)
 \end{aligned}$$

bezüglich aller  $(y_0, y) \in L_q^{n+1}[0, T]$ , vgl. PICKENHAIN [74], S. 2.

**Bemerkung 29.** Liegt ein konvexes Steuerungsproblem  $(P_T)$  vor und wird noch eine zusätzliche Regularitätsforderung  $y(\cdot) \in W_\infty^{1,n}[0, T]$  gestellt, so stimmen die dualen Aufgaben  $(D_T^{\text{Roc}})$  und  $(D_T^K)$  überein, wenn man einen linearen dualen Ansatz  $S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T \xi$  macht, vgl. PICKENHAIN [75], S. 282.

In dem nächsten Abschnitt wird die Dualitätstheorie im Sinne von Klötzler für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont unter Berücksichtigung der Wahl der gewichteten Räume in der Problemstellung entwickelt.

## 7.4 Dualitätstheorie in gewichteten Sobolevräumen

Nun kehren wir zu Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont zurück und entsinnen uns, dass die allgemeine zu betrachtende Aufgabe von folgender Gestalt war: Minimiere das Funktional

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \quad (7.48)$$

bezüglich aller Paare  $(x, u)$ , die den Nebenbedingungen

$$(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (7.49)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (\forall) t > 0; \quad (7.50)$$

$$u(t) \in U \subset \text{Comp}(\mathbb{R}^m) \quad (\forall) t > 0; \quad (7.51)$$

$$|x(t)| \leq \beta(t), \quad \forall t > 0, \quad \text{mit } \beta(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu); \quad (7.52)$$

$$x(0) = x_0 \quad (7.53)$$

genügen. Dabei wurden die Funktionen  $r(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t, \xi, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  als stetig in allen ihren Argumenten vorausgesetzt. Ausserdem wurde  $r(t, \xi, v)$  im zweiten und dritten Argument als stetig differenzierbar angenommen. Hier interpretieren wir das Integral im Zielfunktional im Lebesgueschen Sinne und setzen deshalb  $(\mathbf{P}_\infty^L) = (\mathbf{P}_\infty)$ . Zur Diskussion der Problemstellung siehe auch Unterkapitel 2.2.

Da während des Aufstellens eines dualen Problems zum Ursprungsfunktional ein invariantes Funktional in Form eines Skalarproduktes im  $L_2(\mathbb{R}^+)$  addiert wurde,

benennen wir an dieser Stelle einige Zusammenhänge zwischen den Skalarprodukten in verschiedenen Räumen. Für  $x(\cdot) \in L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $y(\cdot) \in L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  mit  $1/p + 1/q = 1$  definiert das Skalarprodukt  $\ll x, y \gg$  im  $L_2^n(\mathbb{R}^+)$  eine stetige Bilinearform, denn es gilt

$$\begin{aligned} |\ll x, y \gg| &\leq \int_0^\infty |x(t)|\nu^{1/p}(t)|y(t)|\nu^{-1+1/q}(t)dt \\ &\leq \|x\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}\|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Insbesondere für  $p = 2$  hat man  $[L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)]^* = L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  dank dem Rieszschen Darstellungssatz, vgl. ELSTRODT [34], S. 279. Die Skalarprodukte in  $L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  und  $L_2^n(\mathbb{R}^+)$  stehen also in folgender Relation zueinander. Für ein  $x(\cdot) \in L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  und ein  $y(\cdot) \in L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu^{-1})$  existiert es ein  $\hat{y}(\cdot) \in L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  mit

$$\langle x, \hat{y} \rangle_{L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)} = \ll x, y \gg_{L_2^n(\mathbb{R}^+)} \tag{7.55}$$

und

$$\hat{y}(t) = \frac{y(t)}{\nu(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{7.56}$$

**Bemerkung 30.** Bekanntlich gilt die Inklusion  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu) \subseteq L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  für alle  $p \geq q$ , vgl. ELSTRODT [34], Satz 2.10, S. 232, d.h. es gibt eine Konstante  $C > 0$ <sup>1</sup> mit

$$\|x\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq C \|x\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}. \tag{7.57}$$

Bevor wir mit der Konstruktion der dualen Aufgabe beginnen, beweisen wir das folgende

**Lemma 10.**<sup>2</sup> Sei  $(x^*, u^*)$  ein zulässiges Paar zu  $(P_\infty)$  und  $S(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine in  $\xi$  quadratische Funktion der Gestalt

$$S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t)) + 1/2(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t)), \tag{7.58}$$

mit  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+) \cap PC^1(\mathbb{R}^+)$ ;  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q}) \cap PC^1(\mathbb{R}^+)$  und einer symmetrischen Matrixfunktion  $Q(\cdot) \in W_\infty^{1,n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1}) \cap PC^1(\mathbb{R}^+)$ . Weiterhin gelte  $p \geq q$ .

Dann sind für alle  $x(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  mit  $x(0) = x_0$  die Bedingungen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S(T, x(T)) = 0; \tag{7.59}$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt = -S(0, x_0) \tag{7.60}$$

<sup>1</sup>Es gilt  $C = (\mu_\nu(\mathbb{R}^+))^{1/q-1/p}$ .

<sup>2</sup>Vgl. PICKENHAIN&LYKINA [78], Lemma 1, S. 221.

erfüllt.

**Beweis:** Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |S(t, x(t))| dt &\leq \int_0^\infty |a(t)| dt + \int_0^\infty |y(t)^T(x(t) - x^*(t))| dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty |(x(t) - x^*(t))^T Q(t)(x(t) - x^*(t))| dt. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Die Anwendung der Hölderschen Ungleichung in den letzten zwei Summanden führt zu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |S(t, x(t))| dt &\leq \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} \\ &\quad + \left( \int_0^\infty |y(t)|^q \nu^{1-q}(t) dt \right)^{1/q} \cdot \left( \int_0^\infty |x(t) - x^*(t)|^p \nu(t) dt \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty |(x(t) - x^*(t))|^p \nu(t) dt \right)^{1/p} \\ &\quad \cdot \left( \int_0^\infty |Q(t)(x(t) - x^*(t))|^q \nu^{1-q}(t) dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Zusätzlich schätzen wir folgendes ab:

$$\begin{aligned} \|Q(x - x^*)\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q &= \int_0^\infty |Q(t)(x - x^*)(t)|^q \nu^{1-q}(t) dt \\ &\leq 2^q \int_0^\infty \left( n \max_{i,j} \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \frac{|Q_{i,j}(t)|}{\nu(t)} \right)^q |(x - x^*)(t)|^q \nu(t) dt \\ &\leq 2^q \|Q\|_{L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1})}^q \cdot \|x - x^*\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^q \\ &\leq \left( 2C \|Q\|_{L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1})} \cdot \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \right)^q, \end{aligned} \quad (7.63)$$

welches durch Beachtung der Abschätzung für  $\|x - x^*\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu)}$  aus (7.57) hervor-  
geht. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |S(t, x(t))| dt &\leq \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \cdot \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \cdot \|Q(x - x^*)\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \\ &\leq \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \cdot \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \\ &\quad + C \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2 \cdot \|Q\|_{L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1})} < \infty. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Aus der Existenz und Endlichkeit des Integrals  $\int_0^\infty |S(t, x(t))| dt$  folgt (7.59), denn

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T S(t, x(t)) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \int_0^{T-1} S(t, x(t)) dt + \int_{T-1}^T S(t, x(t)) dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T S(t, x(t)) dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} S(\tau, x(\tau)), \end{aligned} \quad (7.65)$$

wobei  $\tau$  eine reelle Zahl aus  $[T-1, T]$  ist. Auf ähnliche Weise kann die Existenz und Endlichkeit des Integrals  $\int_0^\infty \left| \frac{dS(t, x(t))}{dt} \right| dt$  gezeigt werden. Die Bedingung (7.60) läßt sich dann mittels (7.59) ableiten. ■

Lässt man auch Unstetigkeiten der Komponenten des dualen Ansatzes  $S$  zu, so kann das folgende Lemma bewiesen werden.

**Lemma 11.** Sei  $(x^*, u^*)$  ein zulässiges Paar zum Problem  $(\mathbf{P}_\infty)$ ,

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_0 := 0, \quad \tau_{r+1} := \infty \quad (7.66)$$

eine Zerlegung des unendlichen Intervalls  $[0, \infty)$  und  $S(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion der Gestalt

$$S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T (\xi - x^*(t)) + (\xi - x^*(t))^T Q(t) (\xi - x^*(t)) \quad (7.67)$$

mit  $a(\cdot) \in W_1^1[\tau_r, \infty)$ ;  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$  und einer symmetrischen Matrixfunktion  $Q(\cdot) \in W_\infty^{1,n \times n}([\tau_r, \infty), \nu^{-1})$ , so dass darüber hinaus  $y(\cdot), Q(\cdot) \in C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$  für alle  $i = 0, \dots, r$  gilt.<sup>3</sup> Ferner sei  $p \geq q$ . Dann gelten für alle Funktionen  $x(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu)$  mit  $x(0) = x_0$  die Bedingungen:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S(T, x(T)) = 0; \quad (7.68)$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt = -S(0, x_0) + \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x(\tau))). \quad (7.69)$$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt analog zu dem vorangegangenen Lemma 10. ■

Wir erinnern uns an die Definition der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \sup_{v \in U} H(t, \xi, v, \eta) \quad (7.70)$$

<sup>3</sup>Es ist gemeint, dass jede Komponente der Matrixfunktion  $Q(\cdot)$  dieser Bedingung genügt. Auf dem Intervall  $[\tau_r, \infty)$  kann die Forderung  $y(\cdot), Q(\cdot) \in C^0[\tau_r, \infty)$  weggelassen werden, da sie aufgrund der Eigenschaften von Sobolevräumen erfüllt ist. Für jede Funktion  $u(\cdot) \in W_p^1[a, b]$  kann man stets einen stetigen Repräsentanten aus derselben Äquivalenzklasse finden, vgl. DACOROGNA [30], Lemma 1.38, S.32.

sowie der Pontrjaginschen Funktion<sup>4</sup>

$$H(t, \xi, v, \eta) = -r(t, \xi, v) + \frac{1}{\bar{\nu}(t)} \langle \eta, f(t, \xi, v) \rangle. \quad (7.71)$$

Ferner definiere man die Mengen

$$G(t) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq \beta(t) \}, \quad (7.72)$$

$$R(t) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \exists (x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu) \text{ mit} \\ \xi = x(t), \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), u(t) \in U, x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (7.73)$$

und

$$Y_\infty = \left\{ S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T (\xi - x^*(t)) \\ \quad + \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T Q(t) (\xi - x^*(t)) \\ \\ a \in W_1^1(\mathbb{R}^+) \cap PC^1(\mathbb{R}^+) \\ y \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q}) \cap PC^1(\mathbb{R}^+) \\ Q \in W_\infty^{1,n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1}) \cap PC^1(\mathbb{R}^+) \\ \quad Q - \text{symmetrisch} \\ \\ \frac{1}{\bar{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (G(t) \cap R(t)) \end{array} \right\}. \quad (7.74)$$

Wir wenden das in Unterkapitel 7.3.1 beschriebene Schema für die Konstruktion dualer Aufgaben an, um das Dualproblem ( $D_\infty$ ) aufzustellen, und anhand dieses beweisen wir die schwache Dualitätsrelation zwischen ( $P_\infty$ ) und ( $D_\infty$ ).

**Satz 30 (Schwacher Dualitätssatz).** Sei ein Steuerungsproblem vom Typ ( $P_\infty$ ) gegeben. Dann gilt für das Steuerungsproblem ( $D_\infty$ ):

$$g_\infty(S) := -S(0, x_0) \rightarrow \sup! \text{ bzgl. aller } S \in Y_\infty \quad (7.75)$$

die schwache Dualitätsungleichung

$$\inf(P_\infty) \geq \sup(D_\infty). \quad (7.76)$$

**Definition 18.** Ein in  $\xi$  quadratischer Ansatz  $S$  heisst **zulässig in der Aufgabe ( $D_\infty$ )**, falls  $S \in Y_\infty$  gilt.

**Beweis:** Seien  $(x, u)$  und  $S$  zulässig in ( $P_\infty$ ) bzw. ( $D_\infty$ ), d.h.  $S \in Y_\infty$ . Die folgende

<sup>4</sup>Hier wird die Pontrjaginsche Funktion  $H(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  mit  $H(\lambda_0, t, \xi, v, \eta) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) + \frac{1}{\bar{\nu}(t)} \langle \eta, f(t, \xi, v) \rangle$  im Normalfall, d.h.  $\lambda_0 = 1$ , betrachtet. In den nachfolgenden Kapiteln wird das Eintreten des anormalen Falls  $\lambda_0 = 0$  durch eine Regularitätsbedingung ausgeschlossen.

Kette von Abschätzungen liefert die Behauptung des Satzes:

$$\begin{aligned}
J(x, u) &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt = \\
&= \int_0^\infty (-H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t)))) \tilde{\nu}(t) dt \\
&+ \int_0^\infty \left( \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x(t), u(t)) \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&= \int_0^\infty \left( -H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) - \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&+ \int_0^\infty \left( \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} + \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \dot{x}(t) \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&\geq - \int_0^\infty \left( \mathcal{H}(t, x(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&+ \int_0^\infty (\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\
&\geq - \int_0^\infty \sup_{\xi \in G(t) \cap R(t)} \left\{ \left( \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) + \frac{\partial_t S(t, \xi)}{\tilde{\nu}(t)} \right) \right\} \tilde{\nu}(t) dt \quad (7.77) \\
&+ \int_0^\infty (\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\
&\geq \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} S(T, x(T)) - S(0, x(0)) = -S(0, x_0).
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung 31.** (a) In der Abschätzung (7.77) wurde die Zulässigkeit des Paares  $(x, u)$  ausgenutzt, um die daraus resultierende Tatsache  $x(t) \in (G(t) \cap R(t))$  für alle  $t > 0$  abzuleiten, wobei  $R(t)$  die Erreichbarkeitsmenge zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet.

(b) Offenbar kann jedem Ansatz  $S(t, \xi)$  für die duale Variable ein Triple  $(a, y, Q)$  zugeordnet werden, das die eigentliche Entscheidungsvariable des Dualproblems  $(D_\infty)$  darstellt, aber der Einfachheit halber benutzen wir die Bezeichnung  $S \in Y_\infty$ .

Für den Fall unstetiger Komponenten des Ansatzes  $S$  betrachten wir eine Zerlegung des Intervalls  $[0, \infty)$  :

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_0 := 0, \quad \tau_{r+1} := \infty \quad (7.78)$$

und definieren die Menge der Funktionale

$$Y_\infty^G = \left\{ \begin{array}{l} S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ \quad \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t)) \\ \quad + \frac{1}{2}(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t)) \\ \\ a \in W_1^1([\tau_r, \infty)) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ y \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ Q \in W_\infty^{1,n \times n}([\tau_r, \infty), \nu^{-1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ \quad Q \text{ - symmetrisch, } i = 0, \dots, r \\ \\ \frac{1}{\nu(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_r\}) \times (G(t) \cap R(t)) \end{array} \right. \right\}.$$

Analog zum Problem  $(D_\infty)$  kann nun das duale Problem  $(D_\infty^G)$  konstruiert werden und wir beweisen den

**Satz 31 (Schwacher Dualitätssatz, allgemein).** Gegeben sei ein Steuerungsproblem des Typs  $(\mathbf{P}_\infty)$ . Dann gilt für das Problem  $(\mathbf{D}_\infty^G)$  der Maximierung der Funktion

$$g_\infty^G(S) := -S(0, x_0) + \inf_{\beta \in \Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, \beta_i) - S(\tau_i + 0, \beta_i)) \right\}; \quad (7.79)$$

$$\Gamma = \{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{rn} \mid \beta_i \in G(\tau_i) \cap R(\tau_i) \} \quad (7.80)$$

bezüglich aller Funktionale  $S \in Y_\infty^G$  die schwache Dualitätsrelation

$$\inf(\mathbf{P}_\infty) \geq \sup(\mathbf{D}_\infty^G). \quad (7.81)$$

**Definition 19.** Ein in  $\xi$  quadratischer Ansatz  $S$  heisst **zulässig in der Aufgabe**  $(\mathbf{D}_\infty^G)$ , falls  $S \in Y_\infty^G$  gilt.

**Beweis:** Sei  $(x, u)$  ein für  $(\mathbf{P}_\infty)$  zulässiges Paar und  $S$  sei zulässig in der Aufgabe  $(\mathbf{D}_\infty^G)$ , d.h.  $S \in Y_\infty^G$ . Dann liefert die unten stehende Kette von Abschätzungen die Behauptung des Satzes:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty (-H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t)))) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \left( \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x(t), u(t)) \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left( -H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) - \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \left( \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} + \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \dot{x}(t) \right) \tilde{\nu}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq - \int_0^\infty \left( \mathcal{H}(t, x(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&+ \int_0^\infty (\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\
&\geq - \int_0^\infty \sup_{\xi \in G(t) \cap R(t)} \left\{ \left( \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) + \frac{\partial_t S(t, \xi)}{\tilde{\nu}(t)} \right) \right\} \tilde{\nu}(t) dt \quad (7.82) \\
&+ \int_0^\infty (\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\
&\geq \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} S(T, x(T)) - S(0, x(0)) + \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x(\tau_i))) \\
&\geq -S(0, x_0) + \inf_{\beta \in \Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, \beta_i) - S(\tau_i + 0, \beta_i)) \right\}.
\end{aligned}$$

■

Beim Übergang von einem primalen Steuerungsproblem ( $P_\infty$ ) zu einem dualen Problem ( $D_\infty$ ) bzw. ( $D_\infty^G$ ) erhält man offenbar ein Ersatzproblem, das von der Struktur her ein unendlich-dimensionales Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen ist.

**Bemerkung 32.** In der Abschätzung (7.82) wird das Supremum unter Berücksichtigung der Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  gebildet, um das Entstehen einer Dualitätslücke zu vermeiden. Diese könnte entstehen, denn wegen der logischen Beziehung

$$G(t) \supseteq (G(t) \cap R(t)) \implies - \sup_{\xi \in G(t) \cap R(t)} f(\xi) \geq - \sup_{\xi \in G(t)} f(\xi) \quad (7.83)$$

würde man in der Dualitätsabschätzung eventuell “zu weit nach unten“ gehen.

Da es im Allgemeinen sehr schwer ist, die starke Dualitätsrelation global zu gewährleisten, kann es von Vorteil sein, das primale Problem zuerst zu lokalisieren und danach von der dualen Seite anzugehen. Das Problem ( $P_\infty$ ) wird lokalisiert, indem die Forderung der analytischen Güte (7.49) durch

$$(x, u) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \times L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu), \quad x(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \quad (7.84)$$

ersetzt wird, wobei

$$\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |(\xi - x^*(t)) \hat{\nu}(t)| < \delta(t) \} \quad (7.85)$$

mit den Funktionen  $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $\hat{\nu} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ ,<sup>5</sup> vgl. auch das Unterkapitel 2.3.2. Die lokalisierte Version des Problems ( $P_\infty$ ) bezeichnen wir mit ( $P_{\infty, \text{loc}}$ ) und definieren die Mengen

$$Y_{\infty, \text{loc}} = \left\{ S \in Y_\infty \left| \begin{array}{l} \Lambda(t, \xi) = \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap G(t) \cap R(t)) \end{array} \right. \right\}, \quad (7.86)$$

<sup>5</sup>Diese Eigenschaft sichert die Stetigkeit der Einbettung  $C^0(\mathbb{R}, \hat{\nu}) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}, \nu)$ .

beziehungsweise

$$Y_{\infty, \text{loc}}^G = \left\{ S \in Y_{\infty}^G \left| \begin{array}{l} \Lambda(t, \xi) = \frac{1}{\nu(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_{\xi} S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_r\}) \times \\ \times (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap G(t) \cap R(t)) \end{array} \right. \right\}. \quad (7.87)$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen formulieren wir nun die dualen Probleme  $(D_{\infty, \text{loc}})$ ,  $(D_{\infty, \text{loc}}^G)$  sowie Äquivalente der Sätze 30 und 31, d.h. die schwache Dualitätsrelationen für den lokalisierten Fall.

**Satz 32 (Schwacher Dualitätssatz, lokaler Fall).** Wir betrachten das Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$ . Dann gilt für das Problem  $(D_{\infty, \text{loc}})$ :

$$g_{\infty}(S) := -S(0, x_0) \rightarrow \text{sup! bzgl. aller } S \in Y_{\infty, \text{loc}} \quad (7.88)$$

die schwache Dualitätsrelation

$$\inf(P_{\infty, \text{loc}}) \geq \text{sup}(D_{\infty, \text{loc}}). \quad (7.89)$$

**Beweis:** erfolgt analog zum Satz 30.  $\square$

**Satz 33 (Allgemeiner schwacher Dualitätssatz, lokaler Fall).** Wir betrachten das Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$ . Dann gilt für das Problem  $(D_{\infty, \text{loc}}^G)$ :

$$g_{\infty}^G(S) := -S(0, x_0) + \inf_{\beta \in \Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, \beta_i) - S(\tau_i + 0, \beta_i)) \right\} \rightarrow \text{sup!} \quad (7.90)$$

$$\Gamma = \{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{rn} \mid \beta_i \in (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap G(\tau_i) \cap R(\tau_i)) \} \quad (7.91)$$

bzgl. aller  $S \in Y_{\infty, \text{loc}}^G$

die schwache Dualitätsrelation

$$\inf(P_{\infty, \text{loc}}) \geq \text{sup}(D_{\infty, \text{loc}}^G). \quad (7.92)$$

**Beweis:** erfolgt analog zum Satz 31.  $\square$

**Definition 20.** Ein in  $\xi$  quadratischer Ansatz  $S$  heisst **zulässig in der Aufgabe**  $(\mathbf{D}_{\infty, \text{loc}})$  (bzw.  $(\mathbf{D}_{\infty, \text{loc}}^G)$ ), falls  $S \in \mathbf{Y}_{\infty, \text{loc}}$  (bzw.  $S \in \mathbf{Y}_{\infty, \text{loc}}^G$ ) gilt.

# Kapitel 8

## Hinreichende Optimalitätsbedingungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Herleitung hinreichender Bedingungen für globale sowie starke lokale Optimalität für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont, die auf der im vorherigen Kapitel entwickelten Dualitätstheorie in gewichteten Sobolev- und Lebesgueräumen basieren. Die Optimalität wird im Sinne der Definitionen 10 und 11 verstanden.

### 8.1 Hinreichende Bedingungen für globale Optimalität

Die nächsten zwei Korollare liefern hinreichende Bedingungen für globale Optimalität im Sinne der Kriterien L1 und L2, vgl. PICKENHAIN&LYKINA [78], Korollare 1 und 2, S. 224 f.<sup>1</sup>

**Korollar 1 (Das verallgemeinerte Maximumprinzip, Kriterium L2).** Ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  ist ein globaler Minimierer zum Problem  $(P_\infty)$  im Sinne des Kriteriums L2, falls ein  $S^*$ , zulässig in  $(D_\infty)$ , existiert, so dass folgende Bedingungen für fast alle  $t > 0$  erfüllt sind:

$$(M) \quad \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t))) = H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t))); \quad (8.1)$$

$$(HJ) \quad \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S^*(t, x^*(t)) + \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S(t, x^*(t))) = 0. \quad (8.2)$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus der schwachen Dualitätsrelation (7.76) und der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (8.2) sowie der Maximumbedingung (8.1). ■

---

<sup>1</sup>Der Leser beachte, dass die Kriterien L1, L2 in der zitierten Literaturquelle umgekehrt nummeriert sind.

**Bemerkung 33.** Die Randwertbedingung

$$(\mathbf{R}) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} S^*(T, x^*(T)) = 0 \quad (8.3)$$

ist aufgrund des Lemmas 10 automatisch erfüllt.

**Korollar 2 (Das verallgemeinerte Maximumprinzip, Kriterium L1).** Ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  ist ein globaler Minimierer zum Problem  $(P_\infty)$  im Sinne des Kriteriums L1, falls für ein hinreichend großes  $\tau > 0$  eine Familie  $\{S_T^*\}_{T \geq \tau} \subset Y_\infty$  existiert, so dass die folgenden Bedingungen für fast alle  $t \in (0, T)$  erfüllt sind:

$$(\mathbf{M}_T) \quad \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S_T^*(t, x^*(t))) = H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S_T^*(t, x^*(t))); \quad (8.4)$$

$$(\mathbf{HJ}_T) \quad \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S_T^*(t, x^*(t)) + \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S_T^*(t, x^*(t))) = 0; \quad (8.5)$$

$$(\mathbf{R}_T) \quad \inf_{\xi \in G(T) \cap R(T)} S_T^*(T, \xi) = S_T^*(T, x^*(T)). \quad (8.6)$$

**Beweis:** Gemäß des Kriteriums L1 lassen sich für ein zulässiges Paar  $(x, u)$  und  $S_T^* \in Y_\infty$  folgende Abschätzungen für alle  $T \geq \tau$  herleiten:

$$\begin{aligned} J_T(x, u) &= \int_0^T r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^T \left( -H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S_T^*(t, x(t))) - \frac{\partial_t S_T^*(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + \int_0^T \left( \frac{\partial_t S_T^*(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} + \frac{\partial_\xi S_T^*(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \dot{x}(t) \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\geq - \int_0^T \left( \mathcal{H}(t, x(t), \partial_\xi S_T^*(t, x(t))) + \frac{\partial_t S_T^*(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + \int_0^T (\partial_t S_T^*(t, x(t)) + \partial_\xi S_T^*(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\ &\geq - \int_0^T \sup_{\xi \in G(t) \cap R(t)} \left\{ \left( \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S_T^*(t, \xi)) + \frac{\partial_t S_T^*(t, \xi)}{\tilde{\nu}(t)} \right) \right\} \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + S_T^*(T, x(T)) - S_T^*(0, x(0)) \\ &\geq \inf_{\xi \in G(T) \cap R(T)} S_T^*(T, \xi) - S_T^*(0, x_0). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Alle Ungleichungen in (8.7) werden zu Gleichungen, wenn die Bedingungen  $(\mathbf{M}_T)$ ,  $(\mathbf{HJ}_T)$  und  $(\mathbf{R}_T)$  mit einem Prozess  $(x^*, u^*)$  erfüllt sind. Dies deutet auf die starke Dualitätsrelation für entsprechende Probleme mit endlichem Zeithorizont für alle  $T \geq \tau$  hin, siehe Unterkapitel 7.3.1 oder KLÖTZLER [52], das heisst es gilt

$$J_T(x^*, u^*) = \inf_{\xi \in G(T) \cap R(T)} \{S_T^*(T, \xi) - S_T^*(0, x_0)\}. \quad (8.9)$$

Mit Definition 10.(ii) ist leicht zu erkennen, dass das Paar  $(x^*, u^*)$  eine globale optimale Lösung zum Problem  $(P_\infty)$  im Sinne des Kriteriums L1 liefert.  $\blacksquare$

**Bemerkung 34.** (a) Würde man in der Abschätzung (8.8) das Infimum über  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ausrechnen, so könnte es zur Ungleichung

$$\inf_{\xi \in G(T) \cap R(T)} \{S_T^*(T, \xi) - S_T^*(0, x_0)\} > \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{S_T^*(T, \xi) - S_T^*(0, x_0)\} \quad (8.10)$$

und entsprechend zu einer Dualitätslücke kommen, da das Infimum ausserhalb der zulässigen Erreichbarkeitsmenge  $G(T) \cap R(T)$  angenommen werden würde, was die Gewährleistung der starken Dualität unmöglich macht.

(b) Aus (8.6) folgt, dass die Transversalitätsbedingung  $y_T(T) = 0$  für alle  $T \geq \tau$  gelten muss.

(c) Das verallgemeinerte Maximumprinzip ist eine Art Pseudomaximumprinzip, denn es liefert keine Existenzaussagen über die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$ .

Entscheidet man sich anhand der primalen Aufgabe in die Funktionalsmenge für die dualen Variablen  $S$  auch unstetige, aber stückweise stetig differenzierbare, Funktionale  $S \in Y_{\infty, \text{loc}}^G$  aufzunehmen, so kann auch für diesen Fall das verallgemeinerte Maximumprinzip formuliert werden.

**Korollar 3. (Das verallgemeinerte Maximumprinzip, allgemein, Kriterium L2)** Ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  ist ein globaler Minimierer zum Steuerungsproblem  $(\mathbf{P}_\infty)$  im Sinne des Kriteriums L2, falls ein Funktional  $S^* \in Y_\infty^G$  existiert, so dass die folgenden Voraussetzungen für fast alle  $t > 0$  erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \text{(M)} \quad \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t)), 1) \\ = H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t)), 1); \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\text{(HJE)} \quad \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S^*(t, x^*(t)) + \mathcal{H}(t, x^*(t), \partial_\xi S^*(t, x^*(t))) = 0; \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \inf_{\beta \in \Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^r (S^*(\tau_i - 0, \beta_i) - S^*(\tau_i + 0, \beta_i)) \right\} \\ = \sum_{i=1}^r (S^*(\tau_i - 0, x^*(\tau_i)) - S^*(\tau_i + 0, x^*(\tau_i))). \end{aligned} \quad (8.13)$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 31 und Lemma 11. ■

**Bemerkung 35.** Gelingt es, die starke Dualität ohne Berücksichtigung der Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  in der Definition von  $Y_\infty^G$  nachzuweisen, so gilt der Schluss über die starke Optimalität des Prozesses  $(x^*, u^*)$  selbstverständlich immer noch, denn die Einführung der Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  dient lediglich der Vermeidung einer

Dualitätslücke. Die Untersuchung der Menge

$$Y_{\infty,2}^G = \left\{ \begin{array}{l} S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ \quad \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t)) \\ \quad + \frac{1}{2}(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t)) \\ \\ a \in W_1^1([\tau_r, \infty)) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ y \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ Q \in W_{\infty}^{1,n \times n}([\tau_r, \infty), \nu^{-1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \\ \quad Q - \text{symmetrisch, } i = 0, \dots, r \\ \\ \frac{1}{\nu(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_{\xi} S(t, \xi)) \leq 0 \\ \forall (t, \xi) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_r\}) \times G(t) \end{array} \right. \right\}$$

statt  $Y_{\infty}^G$ , wobei  $Y_{\infty,2}^G \subseteq Y_{\infty}^G$ , kann sogar vorteilhaft sein<sup>2</sup>, weil die Miterücksichtigung der Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  mit dem Hinzufügen von so genannten “natürlichen“ Zustandsbeschränkungen zum Steuerungsproblem verbunden ist. Diese dienen zur Beschreibung der Erreichbarkeitsmenge und werden beim Herleiten der hinreichenden Optimalitätsbedingungen explizit in die Grundaufgabe aufgenommen, vgl. das nachfolgende Kapitel. Die “natürlichen“ Zustandsbeschränkungen sind nicht immer leicht zu bestimmen, aber infolge der beschriebenen Überlegungen ist es nicht immer notwendig. Dieselbe Überlegung gilt entsprechend für die Mengen  $Y_{\infty, \text{loc}}^G$ ,  $Y_{\infty, \text{loc}}^G$  bei der Untersuchung eines Prozesses auf lokale Optimalität.

**Bemerkung 36.** Damit ein Ansatz  $S$  zulässig in der dualen Aufgabe ist, muss die Hamilton-Jacobische Ungleichung zwar nur fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  erfüllt sein, z.B. überall ausser in den Schaltpunkten einer bang-bang Steuerung. Aber um die Gültigkeit der Hamilton-Jacobischen Ungleichung in einem Schlauch um die Trajektorie  $x^*(\cdot)$  mit Methoden der Differentialrechnung nachweisen zu können, müsste zumindest  $\mathcal{H}_{\xi}(t, \cdot, \eta) \in C^0$  für alle  $(t, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{H}_{\eta}(t, \xi, \cdot) \in C^0$  für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times G(t)$  im Fall einer in  $\xi$  nicht konvexen Hamiltonfunktion gelten.<sup>3</sup> Sonst ist der Vergleich der Zielfunktionswerte, die von den Steuerungen mit unterschiedlicher Schaltstruktur geliefert werden, im Rahmen der hier entwickelten Dualitätstheorie, insbesondere in der Dualitätsabschätzung (7.82), nicht möglich.

**Satz 34.** Die Äquivalente der Korrolare 1, 2 und 3 können ebenso für die lokal formulierte Steuerungsaufgabe  $(P_{\infty, \text{loc}})$  formuliert werden, falls  $S$  als lokal zulässig in dem dualen Problem  $(D_{\infty, \text{loc}})$  bzw.  $(D_{\infty, \text{loc}}^G)$  vorausgesetzt wird.  $\square$

<sup>2</sup>Dasselbe gilt auch für die Menge  $Y_{\infty}$ .

<sup>3</sup>Mit dem Ziel der Maximierung des Defektes  $\Lambda(t, \xi)$  bildet man  $\partial_{\xi} \Lambda(t, \xi)$  und geht davon aus, dass  $\partial_{\xi} \Lambda(t, \cdot) \in C^0$  in einer Umgebung von  $x^*(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  gilt.

## 8.2 Hinreichende Bedingungen für lokale Optimalität

Sei die Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  so beschaffen, dass sie mithilfe folgender "natürlicher" Zustandsbeschränkungen beschrieben werden kann:

$$\vartheta_i(t, x(t)) \leq 0, \quad i \in I, \quad (8.14)$$

wobei alle Funktionen  $\vartheta_i(t, \xi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in beiden Argumenten und zwei mal stetig differenzierbar im zweiten Argument sind. Hierbei ist  $I$  eine endliche Indexmenge. Bei einem zustandsbeschränkten Steuerungsproblem ( $P_\infty$ ) entsteht durch den dualen Zugang eine restringierte Optimierungsaufgabe der Maximierung des Defektes  $\Lambda(t, \xi)$  der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung. Daher werden wir bei der Herleitung der hinreichenden Optimalitätsbedingungen die Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \xi, \lambda) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\text{card}(I)} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \vartheta_i(t, \xi) \quad (8.15)$$

benötigen.<sup>4</sup>

**Voraussetzung 12 (Linear Independence Constraint Qualification (LICQ)).** Die Menge der Vektoren

$$\mathcal{B}(t) = [\partial_\xi(\vartheta_i(t, x^*(t)))_{i \in I^*(t)}], \quad I^*(t) = \{i \in I \mid \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0\} \quad (8.16)$$

sei linear unabhängig.

### 8.2.1 Hinreichende Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme mit konkaver Hamiltonfunktion

Es ist wichtig herauszufinden, unter welchen Bedingungen die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$  zum gewichteten Sobolevraum  $W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  gehört, denn dies ist notwendig, um die aufgestellte duale Aufgabe nutzen zu können. Zu diesem Zweck beweisen wir das

**Lemma 12.** Wir betrachten ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  des Problems ( $P_\infty$ ). Gelten mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}^+$  die Bedingungen

$$|\partial_\xi f(t, x^*(t), u^*(t))| \leq C(\|x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} + \|u^*\|_{L_p^m(\mathbb{R}^+, \nu)}); \quad (8.17)$$

$$(\partial_\xi r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(\cdot) \partial_\xi \vartheta_i(\cdot, x^*(\cdot))) \tilde{\nu}(\cdot) \in L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q}); \quad (8.18)$$

$$t \rightarrow \Phi(t) = \int_0^t \omega(t, s) \left( \partial_\xi r(s, x^*(s), u^*(s)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(s) \partial_\xi \vartheta_i(s, x^*(s)) \right) \tilde{\nu}(s) ds \in L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q}); \quad (8.19)$$

$$\omega(\cdot, 0) \in L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q}); \quad (8.20)$$

<sup>4</sup> $\text{card}(I)$  gibt die Anzahl der Elemente der Menge  $I$  an.

wobei  $\omega(t, s)$  die Greensche Matrix bezeichnet, die für  $t \geq s$  als eine Lösung des Systems

$$\begin{cases} \frac{d\omega(t, s)}{dt} = -\partial_\xi f(t, x^*(t), u^*(t))\omega(t, s) \\ \omega(s, s) = I. \end{cases} \quad (8.21)$$

definiert wird, so ist die Lösung  $y(\cdot)$  der kanonischen Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t)^T \partial_\xi f(t, x^*(t), u^*(t)) \\ &+ (\partial_\xi r(t, x^*(t), u^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))) \tilde{\nu}(t) \end{aligned} \quad (8.22)$$

ein Element des gewichteten Sobolevraumes  $W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$ .

**Bemerkung 37.** Die Funktionen  $\lambda_i(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $i \in I$ ) sind die Lagrangesche Multiplikatoren, mit denen die Zustandsbeschränkungen belegt sind. Es ist erkennbar, dass um die Inklusion  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  zu sichern, implizit auch eine Annahme über die Regularität der Lagrangeschen Multiplikatorfunktionen  $\lambda_i(\cdot)$  gemacht wird.<sup>5</sup>

**Beweis:** Die Lösung der Gleichung (8.22) kann als

$$y(t) = \omega(t, 0)y(0) + \Phi(t), \quad (8.23)$$

mit einer Lösung  $\omega(t, s)$  des Systems (8.21) umgeschrieben werden. Unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$\|y\|_{W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \leq C \left( \|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} + \|\dot{y}\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \right) \quad (8.24)$$

wird zuerst die Funktion  $y(\cdot)$  selbst

$$\begin{aligned} \|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q &= \int_0^\infty |\omega(t, 0)y(0) + \Phi(t)|^q \nu^{1-q}(t) dt \\ &\leq 2^q \int_0^\infty |\omega(t, 0)y(0)|^q \nu^{1-q}(t) dt + 2^q \int_0^\infty |\Phi(t)|^q \nu^{1-q}(t) dt \quad (8.25) \\ &= 2^q \|\omega(t, 0)y(0)\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q + 2^q \|\Phi\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Für Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont sind solche Aussagen unter anderem in PICKENHAIN [76], Assertion 5, S. 565 zu finden. Diese basieren auf den Ergebnissen aus der parametrischen Optimierung, siehe ROBINSON [86], Theorem 2.3.

und anschliessend ihre schwache Ableitung

$$\begin{aligned}
 & \|\dot{y}\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q = \\
 &= \int_0^\infty \left| -y(t)^T \partial_\xi f(t, x^*(t), u^*(t)) \right. \\
 & \quad \left. + (\partial_\xi r(t, x^*(t), u^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))) \tilde{\nu}(t) \right|^q \nu^{1-q} dt \\
 & \leq (2C)^q \left( \|x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} + \|u^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \right)^q \int_0^\infty |y(t)|^q \nu^{1-q}(t) dt \quad (8.26) \\
 & + 2^q \int_0^\infty \left| (\partial_\xi r(t, x^*(t), u^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))) \tilde{\nu}(t) \right|^q \nu^{1-q}(t) dt \\
 & = \left( 2\tilde{C} \|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})} \right)^q + 2^q \left\| (\partial_\xi r + \sum_{i \in I} \lambda_i \vartheta_i) \tilde{\nu} \right\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q \\
 & \leq \left( 4\tilde{C} \right)^q \left( \|\omega(t, 0)y(0)\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q + \|\Phi\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q \right) \\
 & + 2^q \left\| (\partial_\xi r + \sum_{i \in I} \lambda_i \vartheta_i) \tilde{\nu} \right\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q
 \end{aligned}$$

abgeschätzt. Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas ist sowohl  $\|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}$  als auch  $\|\dot{y}\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}$  endlich, womit wir auf die Inklusion  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  schliessen können. ■

**Bemerkung 38.** Die Inklusion  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$ , also die Zugehörigkeit der adjungierten Funktion zu einem gewichteten Sobolevraum, stellt für Steuerungsprobleme mit linearer Zustandsgleichung eine notwendige Bedingung für die Optimalität des Paares  $(x^*, u^*)$  dar, vergleiche den im Unterkapitel 2.4.4 zitierten Satz 9. In der entsprechenden Literaturquelle werden die gewichteten Sobolevräume nicht explizit benannt. Dort wird lediglich die Konvergenz der in  $\|y\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q$  und  $\|\dot{y}\|_{L_q^n(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})}^q$  auftretenden Integrale für  $\nu(t) = e^{-\rho t}$  explizit nachgewiesen.

Nun wird ein Resultat über hinreichende Bedingungen für starke lokale (nicht unbedingt starke lokale gleichmäßige) Optimalität eines Paares  $(x^*, u^*)$  formuliert. Beim Aufbau eines dualen Steuerungsproblems in Lemma 32 wurde eine in  $\xi$  quadratische Funktion  $S(t, \xi)$  für die duale Variable angesetzt. Setzt man die Komponente  $Q(\cdot)$  im dualen Ansatz gleich Null, so arbeitet man mit einem linearen Ansatz für  $S(t, \xi)$ . Der nachfolgende Satz liefert hinreichende Bedingungen für Steuerungsprobleme mit einer in  $\xi$  konkaven Hamiltonfunktion. In solchen Steuerungsproblemen ist ein linearer Ansatz in der dualen Variable  $S$  ausreichend.

**Satz 35.** Seien die Voraussetzungen des Lemmas 12 und die Voraussetzung 12 für ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  des Problems  $(P_{\infty, \text{loc}})$  und Lagrangesche Multiplikator-

funktionen  $\lambda_i(\cdot) \in PC(\mathbb{R}^+)$ ,  $i \in I$  mit

$$\lambda_i(t)\vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0 \quad (8.27)$$

erfüllt, und die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot)$  besitze eine über  $\mathbb{R}^+$  integrierbare Stammfunktion. Genügt die Funktion  $y(\cdot) \in PC^1(\mathbb{R}^+)$  der Differentialgleichung (8.22), als Komponente eines dualen Ansatzes  $S$  der Bedingung (8.13) und ausserdem den Bedingungen

$$\partial_{vv}^2 H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)) \prec 0, \quad (8.28)$$

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)), \quad (8.29)$$

$$-\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, x^*(t)) \succ 0 \quad (8.30)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ , so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  eine starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$  im Sinne des Optimalitätskriteriums L2.

**Bemerkung 39. (a)** Die Zeichen  $\prec$  und  $\succ$  stehen für die negative bzw. positive Definitheit der entsprechenden Matrizen.

**(b)** In der Bedingung (8.13) handelt es sich um die kleinst möglichen Sprünge der Ansatzfunktion  $S$  entlang der Trajektorie  $x^*(\cdot)$ , die ein Lösungskandidat ist. Die  $a(\cdot)$  – Komponente kann immer und wird immer stetig gewählt, da  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$  gelten muss.<sup>6</sup> Deshalb hängt es im Fall eines linearen Ansatzes nur von der  $y(\cdot)$  – Komponente ab, ob diese Bedingung eingehalten wird.

**Beweis:** Das erste Ziel ist es, eine duale Funktion  $S$ , definiert in (7.58), so zu konstruieren, dass sie zulässig in der dualen Aufgabe  $(D_{\infty, \text{loc}})$  ist. Dafür schreiben wir den Defekt der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung explizit auf:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \\ &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t)) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Die Komponente  $a(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S$  wird aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\Lambda(t, x^*(t)) = 0 \quad (8.32)$$

bestimmt, womit sich die Gleichung

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t))\tilde{\nu}(t) \quad (8.33)$$

<sup>6</sup>Zu jedem Element  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$  kann man immer einen stetigen Repräsentanten  $\tilde{a}(\cdot)$  derselben Äquivalenzklasse wählen, so dass  $a(t) = \tilde{a}(t)$  fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  gilt, vgl. DACOROGNA [30], Lemma 1.38, S. 32.

ergibt. Durch das Einsetzen des Ausdruckes in der rechten Seite von (8.33) in den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  erhalten wir

$$\Lambda(t, \xi) = \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)). \quad (8.34)$$

Es kann leicht nachgewiesen werden, dass  $S$  der Menge  $Y_{\infty, \text{loc}}$  angehört, falls  $x^*(t)$  den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  in einer  $\hat{\nu}$ -gewichteten  $\delta(t)$ -Umgebung von  $x^*(t)$  geschnitten mit der Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  und der zulässigen Menge  $G(t)$  für alle  $t > 0$  maximiert. Aus diesem Grund betrachten wir die parametrische Optimierungsaufgabe

$$(P_t) : \text{maximiere } \Lambda(t, \xi) \text{ bezglich aller } \xi \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t) \quad (8.35)$$

für  $t > 0$ . Die notwendige Bedingung erster Ordnung für ein lokales Extremum, dargestellt durch die Gültigkeit der Gleichung

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0 \quad (8.36)$$

zusammen mit der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung für endlichdimensionale Optimierungsprobleme, gegeben durch (8.30), garantiert, dass  $x^*(t)$  das Problem  $(P_t)$  für alle  $t > 0$  löst. Dank der Legendre-Bedingung, vorausgesetzt in (8.28), enthält die Menge  $\text{Argmax} := \{v \mid v = \text{argmax}_{v \in U} H(t, x^*(t), \cdot, y(t))\}$  einen einzigen Punkt. So besteht der Subgradient

$$\partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = \text{conv} \{ \nabla_\xi H(t, x^*(t), v, y(t)) \mid v \in \text{Argmax} \} \quad (8.37)$$

ebenfalls aus einem einzigen Punkt<sup>7</sup>, aufgrund dessen die Differentialgleichung (8.36) in der Form (8.22) aufgeschrieben werden kann. Da die Voraussetzungen des Lemmas 12 erfüllt sind, erhalten wir die Inklusion  $y(\cdot) \in W_q^{1, n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$ . Das bedeutet, dass  $S$  mit Komponenten  $a(\cdot)$  und  $y(\cdot)$  von der Gestalt (7.58) mit  $Q(t) \equiv 0$  ist, und das Lemma 10 kann angewendet werden, um die Bedingung (8.3) zu erfüllen. Die punktweise Maximumbedingung, vorausgesetzt in (8.29), sowie zwei andere Bedingungen des Korollars 3 sind nun erfüllt, was uns erlaubt zu schliessen, dass das Paar  $(x^*, u^*)$  eine starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$  im Sinne des Optimalitätskriteriums L2 ist. ■

Ein Spezialfall des bewiesenen Satzes für Steuerungsprobleme ohne Zustandsbeschränkungen wurde in PICKENHAIN&LYKINA [78], Satz 3, S. 228, bewiesen und auf das Produktions-Lagerhaltungsmodell angewendet.

## 8.2.2 Hinreichende Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme mit nichtkonkaver Hamiltonfunktion

**Satz 36.** Seien die Voraussetzungen des Lemma 12 und die Voraussetzung 12 für ein zulässiges Paar  $(x^*, u^*)$  des Problems  $(P_{\infty, \text{loc}})$  und Lagrangesche Multiplikatorfunktionen  $\lambda_i(\cdot) \in PC(\mathbb{R}^+)$ ,  $i \in I$  mit

$$\lambda_i(t) \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0 \quad (8.38)$$

<sup>7</sup>Zur Darstellung des Subgradienten durch die konvexe Hülle vgl. Danskin's Theorem aus [28], S. 99, oder die Sätze 2.8.2, 2.8.6 sowie Bemerkung 2.8.5 aus CLARKE [27], S. 86, 92 f.

erfüllt, und die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot)$  besitze eine über  $\mathbb{R}^+$  integrierbare Stammfunktion. Genügt die Funktion  $y(\cdot) \in PC^1(\mathbb{R}^+)$  der Differentialgleichung (8.22) und ausserdem zusammen mit einer gewissen Funktion  $Q(\cdot) \in W_\infty^{1,n \times n}(\mathbb{R}^+, \nu^{-1}) \cap PC^1(\mathbb{R}^+)$  als Komponenten eines dualen Ansatzes  $S$  der Bedingung (8.13) und den Bedingungen

$$\partial_{vv}^2 H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)) \prec 0; \quad (8.39)$$

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)); \quad (8.40)$$

$$-\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, x^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, x^*(t)) \succ 0, \quad (8.41)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ , wobei  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  der Operator folgender Gestalt ist

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{Q}(t) + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ \partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t) \\ &+ Q(t) \partial_{\eta\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ Q(t)^T \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t), \end{aligned} \quad (8.42)$$

so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  eine starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$  im Sinne des Optimalitätskriteriums L2.

**Bemerkung 40.** Die Zeichen  $\prec$  und  $\succ$  bedeuten wiederum die negative bzw. positive Definitheit der entsprechenden Matrizen.

**Beweis:** Wir verfahren wie im vorherigen Satz über hinreichende Optimalitätsbedingungen im Fall einer in  $\xi$  konkaven Hamiltonfunktion. Führen wir zur Konstruktion und Überprüfung der lokalen Zulässigkeit eines quadratischen dualen Ansatzes  $S$  aus (7.58) den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \\ &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t) - (\xi - x^*(t))^T Q(t) \dot{x}^*(t) \\ &+ \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T \dot{Q}(t) (\xi - x^*(t))) + \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Wiederum wird die Komponente  $a(\cdot)$  des Ansatzes  $S$  aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\Lambda(t, x^*(t)) = 0 \quad (8.44)$$

bestimmt, womit sich die Bestimmungsgleichung

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) \quad (8.45)$$

ergibt. Durch das Einsetzen des Ausdruckes (8.45) in den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - (\xi - x^*(t))^T Q(t) \dot{x}^*(t)) \\ &+ \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T \dot{Q}(t) (\xi - x^*(t)) \\ &+ \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)).\end{aligned}\quad (8.46)$$

Maximiert der Wert  $x^*(t)$  den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  in einer  $\hat{\nu}$ -gewichteten  $\delta(t)$ -Umgebung von  $x^*(t)$  geschnitten mit  $(G(t) \cap R(t))$  für alle  $t > 0$ , so ist  $S \in Y_{\infty, \text{loc}}$ . Daher betrachten wir die restringierte parametrische Optimierungsaufgabe

$$(P_t) : \text{maximiere } \Lambda(t, \xi) \text{ bezglich aller } \xi \in \mathcal{K}_{\delta(t), \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t) \quad (8.47)$$

für alle  $t > 0$ . Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung, dargestellt durch die Gültigkeit der folgenden äquivalenten Gleichungen,

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} \mathcal{L}(t, x^*(t)) &= -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t) - Q(t) \dot{x}^*(t)) \\ &- \partial_{\xi} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) - Q(t) \partial_{\eta} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \\ &+ \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi} \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0\end{aligned}\quad (8.48)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} \mathcal{L}(t, x^*(t)) &= -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t) + \partial_{\xi} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t)) \\ &+ \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} Q(t) \underbrace{(\dot{x}^*(t) - \partial_{\eta} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t))}_{=0} \\ &+ \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi} \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0\end{aligned}\quad (8.49)$$

zusammen mit der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für endlich-dimensionale Optimierungsprobleme, gegeben durch (8.41), gewährleistet, dass  $x^*(t)$  das Problem  $(P_t)$  für alle  $t > 0$  löst. Hierbei gilt

$$\dot{x}^*(t) - \partial_{\eta} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) = 0, \quad (8.50)$$

da die Menge  $\text{Argmax} := \{v \mid v = \text{argmax}_{v \in U} H(t, x^*(t), \cdot, y(t))\}$  einpunktig ist und  $\partial_{\eta} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t))$  mit  $\nabla_{\eta} H(t, x^*(t), u^*(t), y(t))$  übereinstimmt. Die Legendre-Bedingung (8.39) liefert die Einpunktigkeit des Subgradienten  $\partial_{\xi} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t))$ <sup>8</sup>, aufgrund dessen die Differentialgleichung

$$-\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t) + \partial_{\xi} \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi} \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0 \quad (8.51)$$

in der Form (8.22) aufgeschrieben werden kann. Da die Voraussetzungen des Lemma 12 erfüllt sind, erhalten wir die Inklusion  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$ . Das bedeutet, dass

<sup>8</sup>Vgl. den Beweis des vorherigen Satzes.

$S$  mit den Komponenten  $(a, y, Q)$  insgesamt von der Gestalt (7.58) ist<sup>9</sup>, und das Lemma 10 kann somit angewendet werden, um die Bedingung (8.3) zu erfüllen. Die punktweise Maximumbedingung sowie die zwei anderen Bedingungen des Korollars 3 sind nun dank der Voraussetzung (8.40) des Satzes und der geeigneten Wahl der Komponenten  $a(\cdot)$  und  $Q(\cdot)$  erfüllt, woraus wir auf die starke lokale Optimalität des Paares  $(x^*, u^*)$  zum Problem  $(P_{\infty, \text{loc}})$  im Sinne des Optimalitätskriteriums L2 schliessen können. ■

---

<sup>9</sup>Man beachte dabei, dass die Komponente  $a(\cdot)$  durch Konstruktion ein Element des Raumes  $W_{1, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^+)$  ist. Aus der Gleichung (8.45) und der Maximumbedingung (8.40) folgt  $\dot{a}(t) = r(t, x^*(t), u^*(t))\tilde{\nu}(t)$  und aus der Endlichkeit des Integrals  $L \cdot \int_0^{\infty} r(t, x^*(t), u^*(t))\tilde{\nu}(t)dt$  folgt  $\dot{a}(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ , was auch  $a(\cdot) \in W_{1, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^+)$  impliziert. Um die Inklusion  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$  zu erhalten, benötigen wir zusätzlich die Integrierbarkeit von  $a(\cdot)$  über dem gesamten Intervall  $[0, \infty)$ , die in die Voraussetzungen des Satzes aufgenommen wurde. Dass die erwähnte Inklusion ohne weiteres nicht folgt, zeigt das folgende Beispiel:  $a(t) := 1/t, t \in \mathbb{R}^+$ .

# Kapitel 9

## Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Die in diesem Kapitel vorgestellten hinreichenden Bedingungen beziehen sich auf die starke bzw. uniforme starke lokale Optimalität eines Paares  $(x^*, u^*)$  im Sinne der Definition 11 bzw. 12. Wie schon im vorherigen Kapitel schreiben wir alle auftretenden Zustandsbeschränkungen, sowohl die explizit gestellten als auch die “natürlichen“ in der Form

$$\vartheta_i(t, x(t)) \leq 0, \quad i \in I \quad (9.1)$$

um, wobei alle Funktionen  $\vartheta_i(t, \cdot)$  als zwei mal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden und  $I$  eine endliche Indexmenge ist.

### 9.1 Hinreichende Bedingungen für uniforme starke lokale Optimalität für Probleme mit konkaver Hamiltonfunktion

Wir formulieren zunächst einen Satz, der hinreichende Bedingungen für starke lokale Optimalität eines Paares  $(x^*, u^*)$  liefert, die auf der Verwendung eines linearen Ansatzes in der dualen Variablen  $S$  basieren. Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes aus dem nächsten Unterkapitel, weswegen an dieser Stelle noch kein Beweis vorgeführt wird.

**Satz 37.** Sei  $(x^*, u^*)$  ein zulässiges Paar des Problems  $(P_\infty^L)$ , und die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot)$  besitze nur endlich viele Unstetigkeiten<sup>1</sup> sowie eine über  $\mathbb{R}^+$  integrierbare Stammfunktion. Angenommen,  $1 < p < \infty$  und es existiert eine Vektorfunktion  $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $y(\cdot) \in C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})^2$  für

<sup>1</sup>Hiermit werden “chattering controls“ ausgeschlossen.

<sup>2</sup>Die Inklusionen  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  und  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$  wurden unter den Voraussetzungen des Lemmas 12 nachgewiesen.

eine geeignete Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = \cup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_r = \infty$ ,  $i = 0, \dots, r$ . Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) zusammen mit Lagrange Multiplikatorfunktionen  $\lambda_i(\cdot) \in C^0[\tau_r, \infty)$ <sup>3</sup>,  $i \in I$  und der durch

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \vartheta_i(t, \xi) \quad (9.2)$$

definierten Lagrange Funktion erfülle  $y(\cdot)$  für alle  $t > 0$  die Bedingungen

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0; \quad (9.3)$$

$$\lambda_i(t) \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0; \quad (9.4)$$

- (ii) die Voraussetzung 12 sei erfüllt, das heisst die Gradientenvektoren der aktiven Zustandsrestriktionen seien linear unabhängig;  
 (iii) die Komponente  $y(\cdot)$  erfülle die Maximumbedingung

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)) \quad (9.5)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ ;

- (iv) die Randbedingung (8.13) des verallgemeinerten Maximumprinzips, Korollar 3, sei erfüllt, und  
 (v) es gelte für eine gewisse Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  mit  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  und für alle  $h := x(t) - x^*(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(0)$  für alle  $t > 0$  die punktweise Definitheitsbedingung der Gestalt

$$h^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) h \tilde{\nu}(t) \geq c |h|^{\min\{2, p\}} \nu(t) \quad (9.6)$$

mit einer positiven Konstanten  $c$ , die unabhängig von  $t$  ist, sowie dem Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ , definiert durch die Regel

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = -\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, \xi). \quad (9.7)$$

Existieren darüber hinaus von  $t$  unabhängige positive Konstanten  $k$  und  $\alpha$  mit  $2 + \alpha - \min\{2, p\} > 0$ , so dass die Bedingung

$$\left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \leq k |\xi - x^*(t)|^\alpha \hat{\nu}^{2+\alpha-\min\{2, p\}}(t) \quad (9.8)$$

$$\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t))$$

<sup>3</sup>Die Stetigkeit der Multiplikatoren auf den Intervallen  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  folgt aus der Regularitätsvoraussetzung, getroffen in (ii).

erfüllt ist, so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  eine strikte starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_\infty^L)$ , d.h. es existiert eine von  $t$  unabhängige Zahl  $\delta^* > 0$ , so dass für alle in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit  $\|x - x^*\|_{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})} < \delta^*$  auch die Ungleichung

$$J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) \geq \tilde{c} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2, p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2, \quad \tilde{c} > 0 \quad (9.9)$$

gilt. ■

**Bemerkung 41.** (a) Um die Striktheit der Minimallösung zu sichern wird in der Ungleichung (9.9) die schwächere  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$ -Norm anstatt der gewichteten  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$ -Norm verwendet. Diese Tatsache bestätigt die so genannte zwei-Normen Diskrepanz, die beispielsweise in MAURER&ZOWE [69], IOFFE [44] diskutiert wurde.

- (b) Ob die Wachstumsbedingung (9.8) erfüllt ist oder nicht, hängt in gewissem Maße von der Wahl einer geeigneten Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  ab.
- (c) Selbst wenn die Bedingung (9.6) für alle  $h \neq 0$  erfüllt ist, ist es nicht zwingend, dass der Prozess  $(x^*, u^*)$  global optimal zum Problem  $(P_\infty^L)$  ist.
- (d) Uniforme strikte starke lokale Optimalität des Prozesses  $(x^*, u^*)$  ist gegeben, wenn die Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  von oben beschränkt ist.

## 9.2 Hinreichende Bedingungen für uniforme starke lokale Optimalität für Probleme mit nicht konkaver Hamiltonfunktion

Zur Herleitung hinreichender Bedingungen für Steuerungsprobleme mit nicht konkaver Hamiltonfunktion reicht die Verwendung einer in  $\xi$  linearen dualen Variable  $S(t, \xi)$  nicht mehr aus. Aus diesem Grund betrachten wir Funktionen  $S(t, \xi)$ , die quadratisch in  $\xi$  sind. In diesem Unterkapitel werden hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung formuliert, die auf der punktweisen Forderung der positiven Definitheit der Hesseschen Matrix der Lagrange Funktion basieren und zunächst die aktiven Zustandsrestriktionen nicht berücksichtigen und von daher relativ einschränkend sind. Der folgende Satz realisiert die beschriebenen Überlegungen.

**Satz 38.** Sei  $(x^*, u^*)$  ein zulässiges Paar des Problems  $(P_\infty^L)$ , und die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot)$  besitze nur endlich viele Unstetigkeiten sowie eine über  $\mathbb{R}^+$  integrierbare Stammfunktion. Angenommen,  $1 < p < \infty$  und es existiert eine Funktion  $S_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $S_1(t, \xi) = y(t)^T(\xi - x^*(t)) + \frac{1}{2}(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t))$  mit einer Vektorfunktion  $y(\cdot) \in W_q^{1, n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$ <sup>4</sup>, einer Matrixfunktion  $Q(\cdot) \in W_\infty^{1, n \times n}([\tau_r, \infty), \nu^{-1})$  und  $y(\cdot), Q(\cdot) \in C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$  für eine geeignete Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = \cup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\tau_0 = 0, \tau_r = \infty, i = 0, \dots, r$ . Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

<sup>4</sup>Die Inklusionen  $y(\cdot) \in W_q^{1, n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  und  $y(\cdot) \in W_q^{1, n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$  wurden unter den Voraussetzungen des Lemmas 12 nachgewiesen.

- (i) zusammen mit den Lagrangeschen Multiplikatorfunktionen  $\lambda_i(\cdot) \in C^0[\tau_r, \infty)$ <sup>5</sup>,  $i \in I$  und der durch

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \vartheta_i(t, \xi) \quad (9.10)$$

definierten Lagrange Funktion erfülle  $y(\cdot)$  für alle  $t > 0$  die Bedingungen

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0; \quad (9.11)$$

$$\lambda_i(t) \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0; \quad (9.12)$$

- (ii) die Voraussetzung 12 sei erfüllt, das heisst die Gradientenvektoren der aktiven Zustandsrestriktionen seien linear unabhängig;

- (iii) die Funktion  $y(\cdot)$  erfülle die Maximumbedingung

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)) \quad (9.13)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ ;

- (iv) die Randbedingung (8.13) des verallgemeinerten Maximumprinzips, Korollar 3 sei erfüllt, und

- (v) es gelte für eine gewisse Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  mit  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  und für alle  $h := x(t) - x^*(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(0)$  für alle  $t > 0$  die punktweise Definitheitsbedingung der Gestalt

$$h^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) h \tilde{\nu}(t) \geq c |h|^{\min\{2, p\}} \nu(t) \quad (9.14)$$

mit einer positiven Konstanten  $c$ , die unabhängig von  $t$  ist, sowie dem Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ , definiert durch die Regel

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = -\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, \xi); \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{Q}(t) + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ \partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t) \\ &+ Q(t) \partial_{\eta\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ Q(t)^T \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Existieren darüber hinaus von  $t$  unabhängige positive Konstanten  $k$  und  $\alpha$  mit  $2 + \alpha - \min\{2, p\} > 0$ , so dass die Bedingung

$$\left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \leq k |\xi - x^*(t)|^\alpha \hat{\nu}^{2+\alpha-\min\{2, p\}}(t) \quad (9.17)$$

$$\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t)),$$

<sup>5</sup>Die Stetigkeit der Multiplikatoren auf den Intervallen  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  folgt aus der Regularitätsvoraussetzung, getroffen in (ii).

erfüllt ist, so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  eine strikte starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_\infty^L)$ , d.h. es existiert eine von  $t$  unabhängige Zahl  $\delta^* > 0$ , so dass für alle in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit  $\|x - x^*\|_{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})} < \delta^*$  auch die Ungleichung

$$J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) \geq \tilde{c} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2, p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2, \quad \tilde{c} > 0 \quad (9.18)$$

gilt.

**Bemerkung 42. (a)** Die lokale Zulässigkeit des dualen Ansatzes  $S(t, \xi)$  in der Aufgabe  $(D_\infty^G)$  wird unter anderem durch die Forderung der Gültigkeit der Hamilton-Jacobischen Ungleichung  $\Lambda(t, \xi) \leq 0$  für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (R(t) \cap G(t) \cap \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)))$  erzielt, wobei wie schon vorher eingeführt

$$\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi - x^*(t)| \hat{\nu}(t) \leq \delta \right\} \quad (9.19)$$

gilt. Dies könnte beispielsweise durch die negative Definitheit der Matrix  $\Lambda_{\xi\xi}^2(t, \xi)$  für  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t))$  gesichert werden. Ausschlaggebend ist hier die zeitliche Unabhängigkeit der Umgebungsbreite  $\delta$ .

- (b) Die Forderung (9.17) stellt eine Art Hölderstetigkeitsannahme für die zweite Ableitung der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \cdot)$  dar.
- (c) Die uniforme strikte starke lokale Optimalität liegt vor, wenn die Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  von oben beschränkt ist.
- (d) Sind die Hamiltonfunktion konkav in der Platzhaltervariable  $\xi$  und die Funktionen  $\vartheta_i(\cdot)$  konvex in  $\xi$ , d.h. die Matrizen  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, x^*, y(t))$  und  $\lambda_i(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, x^*(t))$  sind entsprechend negativ bzw. positiv definit,  $i \in I$ . Setzt man nun  $Q(t) \equiv 0$ , so erhält man

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, x^*(t)) \succ 0, \quad (9.20)$$

was es uns ermöglicht, nur mit einem linearen Ansatz für  $S$  zu arbeiten.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

**Schritt 1. Stetigkeit der Einbettung  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu}) \subset L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$ .** Hier wird die Stetigkeit der Einbettung  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu}) \subset L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  nachgewiesen. Zunächst gilt für alle  $x(\cdot) \in W_p^{1, n}(\mathbb{R}^+, \nu)$ , die für alle  $t > 0$  der Ungleichung  $|x(t) - x^*(t)| \hat{\nu}(t) < \delta$  genügen, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p &= \int_0^\infty |x(t) - x^*(t)|^p \nu(t) dt \\ &\leq \delta^p \int_0^\infty \hat{\nu}^{-p}(t) \nu(t) dt = \delta^p \cdot \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)}^p. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dies bedeutet, dass die  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$ -Umgebung

$$U_\delta^{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})}(x^*) = \left\{ x \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \mid \max_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t) - x^*(t)| \hat{\nu}(t) \leq \delta \right\} \quad (9.22)$$

der Funktion  $x^*(\cdot)$  komplett in der  $L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$ -Umgebung der Funktion  $x^*(\cdot)$  des Radius  $\delta \cdot \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)}$  enthalten ist, denn wir beobachten, dass

$$\|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} = \left\{ \int_0^\infty |x(t) - x^*(t)|^p \nu(t) dt \right\}^{1/p} \leq \delta \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)}. \quad (9.23)$$

Mit anderen Worten, wir haben gezeigt, dass eine Konstante  $C = \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)}$  existiert, so dass für alle  $x(\cdot) \in W_p^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu) \cap C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  die Ungleichung

$$\|x\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq C \cdot \|x\|_{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})}, \quad C = \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)} \quad (9.24)$$

erfüllt ist, was die Beschränktheit des linearen Einbettungsoperators  $I : C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu}) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)$  impliziert. Folglich ist die Stetigkeit von  $I$  bewiesen.

**Schritt 2. Konstruktion einer restringierten parametrischen Optimierungsaufgabe.** Zur Konstruktion eines quadratischen dualen Ansatzes  $S(t, \xi)$  mit Komponenten  $(a, y, Q)$  und Überprüfung dessen lokaler Zulässigkeit in der Aufgabe  $(D_\infty^G)^6$  wird zunächst der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung betrachtet, vergleiche mit dem Abschnitt 8.2.2:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \\ &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \left( \dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t) - (\xi - x^*(t))^T Q(t) \dot{x}^*(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T \dot{Q}(t) (\xi - x^*(t)) \right) + \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Wie vorher wird die Komponente  $a(\cdot)$  aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\Lambda(t, x^*(t)) = 0 \quad (9.26)$$

bestimmt, womit sich die Bestimmungsdifferentialgleichung

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) \quad (9.27)$$

ergibt. Aus der Konstruktion von  $a(\cdot)$  und den Voraussetzungen an die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  folgt  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$ , vgl. die Diskussion des letzten Kapitels. Dabei gilt dank der stückweisen Stetigkeit von  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  die Inklusion  $a(\cdot) \in$

<sup>6</sup>Zu überprüfen ist also die Inklusion  $S \in Y_{\infty, loc}^G$ .

$C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$  für alle  $i = 1, \dots, r$  ebenfalls. Durch das Einsetzen des Ausdrucks in der rechten Seite von (9.27) in den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - (\xi - x^*(t))^T Q(t) \dot{x}^*(t)) \\ &+ \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T \dot{Q}(t) (\xi - x^*(t)) \\ &+ \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)).\end{aligned}\quad (9.28)$$

Maximiert  $x^*(t)$  den Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  in einer  $\mathcal{K}_{\delta, \tilde{\nu}}(x^*(t))$ -Umgebung für alle  $t > 0$ , so ist die Hamilton-Jacobische Ungleichung erfüllt. Dazu betrachten wir die parametrische Optimierungsaufgabe

$$(P_t) : \text{maximiere } \Lambda(t, \xi) \text{ bezglich aller } \xi \in \mathcal{K}_{\delta, \tilde{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t) \quad (9.29)$$

für alle  $t > 0$  und kommen zum

**Schritt 3. Einführung der Lagrange Funktion.** Für die Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  mit

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \vartheta_i(t, \xi) \quad (9.30)$$

gilt unter Berücksichtigung der Zustandsbeschränkungen und der Nichtnegativität der Multiplikatoren die Abschätzung

$$-\Lambda(t, \xi) \geq \mathcal{L}(t, \xi) \quad (9.31)$$

für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times (R(t) \cap G(t))$ . Aus diesem Grund widmen wir uns im nächsten Schritt der Abschätzung von  $\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt$  statt  $\int_0^\infty -\Lambda(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt$ .

**Schritt 4. Vorbereitende Abschätzungen und lokale Zulässigkeit des Ansatzes S.** Für jedes  $t > 0$  entwickeln wir die Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \xi)$  in eine Taylorreihe mit der Entwicklungsstelle  $\xi = x^*(t)$  und einem Restglied in Lagrange Form, multiplizieren die gewonnene Gleichung mit der Funktion  $\tilde{\nu}(\cdot)$  und integrieren sie anschliessend über dem Intervall  $\mathbb{R}^+$ , was zur Gleichung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt &= \int_0^\infty \mathcal{L}(t, x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &+ \int_0^\infty \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &+ 1/2 \int_0^\infty (x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt\end{aligned}\quad (9.32)$$

führt, wobei die Ungleichung  $0 \leq |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \leq |x(t) - x^*(t)|$  für alle  $t > 0$  richtig ist. Man merke an, dass für die Trajektorie  $x^*(\cdot)$  dank der Komplementaritätsbedingung (9.12) die Gleichung

$$\mathcal{L}(t, x^*(t)) = 0 \quad (9.33)$$

gilt. Berücksichtigt man noch die Gleichung (9.11), so kann (9.32) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt = 1/2 \int_0^{\infty} (x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt. \quad (9.34)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\infty} (x(t) - x^*(t))^T (\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t))) \right. \\ &\quad \cdot (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} (x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) (x(t) - x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt \right). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Das Integral auf der linken Seite der letzten Abschätzung existiert und hat einen endlichen Wert, denn die Ungleichung  $\mathcal{L}(t, \xi) \leq -\Lambda(t, \xi)$ , die Zulässigkeit des Paares  $(x, u)$  und die Endlichkeit des Integrals  $L - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt$  liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt &\leq \int_0^{\infty} -\Lambda(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt \\ &\leq \int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Die punktweise Definitheitsbedingung (9.14), vorausgesetzt in diesem Satz, impliziert die schwächere Definitheitsbedingung in integrierter Form:

$$\int_0^{\infty} h(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) h(t) \tilde{\nu}(t) dt \geq c \|h\|_{L_{\min\{2,p\}}^{\min\{2,p\}}(\mathbb{R}^+, \nu)}, \quad (9.37)$$

die für alle  $h(\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu) \cap U_{\delta}^{C^0(\mathbb{R}^+, \nu)}(x^*)$  mit einer von  $t$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$  erfüllt ist. Im Fall  $p > 2$  existiert die Norm auf der rechten Seite aufgrund der Einbettung  $L_p(\mathbb{R}^+, \nu) \subset L_2(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Die nächste Abschätzung resultiert aus der

letzten Variationsungleichung und der Voraussetzung (9.17):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt &\geq \frac{1}{2} \left( - \int_0^\infty |x(t) - x^*(t)|^2 \left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \nu(t) dt + c \cdot \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^{\min\{2,p\}} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left( - \int_0^\infty k |x(t) - x^*(t)|^{2+\alpha} \hat{\nu}^{2+\alpha-\min\{2,p\}}(t) \nu(t) dt \quad (9.38) \right. \\
&\quad \left. + c \cdot \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^{\min\{2,p\}} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left( -k \delta^{2+\alpha-\min\{2,p\}} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^{\min\{2,p\}} \right. \\
&\quad \left. + c \cdot \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^{\min\{2,p\}} \right).
\end{aligned}$$

Für  $p \geq 2$  erhält man

$$\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt \geq (-k \delta^\alpha + c) \|x - x^*\|_{L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2, \quad (9.39)$$

und durch die Wahl einer hinreichend kleinen Zahl  $\delta^* < (\frac{c}{k})^{\frac{1}{\alpha}}$ , gewinnt man mit  $\alpha > 0$  die Abschätzung

$$\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt \geq \hat{c} \cdot \|x - x^*\|_{L_2^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2 \quad (9.40)$$

mit einer gewissen Konstanten  $\hat{c} > 0$ . Wir bilden nun einen quadratischen dualen Ansatz  $S(t, \xi) := a(t) + S_1(t, \xi)$ . Aufgrund der für alle  $x(t) \in \mathcal{K}_{\delta^*, \hat{\nu}}(x^*(t))$  und einem hinreichend kleinen  $\delta^* > 0$  geltenden Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
-\Lambda(t, x(t)) &\geq \mathcal{L}(t, x(t)) = \frac{1}{2} (x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) (x(t) - x^*(t)) \\
&\geq \hat{c} \cdot |x(t) - x^*(t)|^2 \frac{\nu(t)}{\tilde{\nu}(t)} > 0 \quad (9.41)
\end{aligned}$$

und der Eigenschaften einzelner Komponenten  $a(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  und  $Q(\cdot)$  ist der definierte Ansatz  $S$  lokal zulässig in der dualen Aufgabe ( $D_\infty^G$ ), das heisst  $S \in Y_{\infty, loc}^G$ . Insbesondere bedeutet das, dass die Hamilton-Jacobische Ungleichung für alle Funktionen  $x(\cdot) \in U_{\delta^*}^{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})}(x^*)$  gilt.

Ist  $p \in (1, 2)$ , so erhält man statt der Abschätzung (9.40) die folgende:

$$\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt \geq \hat{c} \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p, \quad (9.42)$$

die für alle Funktionen  $x(\cdot) : \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq 1$  wie folgt fortgesetzt werden kann:

$$\int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt \geq \hat{c} \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^p \geq \hat{c} \|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2. \quad (9.43)$$

Um sicherzustellen, dass  $\|x - x^*\|_{L_p^n(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq 1$  gilt, ist es infolge von (9.23) ausreichend, die Zahl  $\delta^*$  gemäß der Bedingung

$$\delta^* < \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)}^{-1} = \left( \int_0^\infty |\hat{\nu}^{-1}(t)|^p \nu(t) dt \right)^{-1/p} \quad (9.44)$$

zu wählen. Zusammenfassend formulieren wir für  $p \in (1, 2)$  beide Forderungen an den Radius  $\delta^*$  der Umgebung, in der das Paar  $(x^*, u^*)$  stark lokal optimal sein soll, wie folgt:

$$\delta^* < \min \left\{ \left( \frac{c}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha+2-p}}, \left( \int_0^\infty |\hat{\nu}^{-1}(t)|^p \nu(t) dt \right)^{-1/p} \right\} \quad (9.45)$$

Aus dieser Ungleichung schliesst man, dass wir die Optimalität eines Prozesses nur lokal und nicht global garantieren können. Die lokale Zulässigkeit des Ansatzes  $S$  im Fall  $1 < p < 2$  wird genauso nachgewiesen wie vorher für  $p \geq 2$ .

**Schritt 5. Abschätzung der Funktionalwerte.** Durch direkte Abschätzungen möchten wir nun die Ungleichung (9.18) beweisen. Nach Definition der Pontrjaginischen Funktion haben wir

$$\begin{aligned} J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) &= \int_0^\infty (r(t, x(t), u(t)) - r(t, x^*(t), u^*(t))) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left( -H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) + \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x(t), u(t)) \right. \\ &\quad \left. + H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S(t, x^*(t))) - \frac{\partial_\xi S(t, x^*(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x^*(t), u^*(t)) \right) \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ -H(t, x(t), u(t), \partial_\xi S(t, x(t))) - \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} + \frac{\partial_\xi S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x(t), u(t)) \right\} \tilde{\nu}(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \left\{ H(t, x^*(t), u^*(t), \partial_\xi S(t, x^*(t))) + \frac{\partial_t S(t, x^*(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial_t S(t, x^*(t))}{\tilde{\nu}(t)} - \frac{\partial_\xi S(t, x^*(t))}{\tilde{\nu}(t)} f(t, x^*(t), u^*(t)) \right\} \tilde{\nu}(t) dt. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Durch den Übergang zur Hamiltonfunktion und Anwendung der Voraussetzung (9.13) sind wir in der Lage wie folgt fortzufahren:

$$\begin{aligned}
J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) &\geq \int_0^\infty \left( -\mathcal{H}(t, x(t), \partial_\xi S(t, x(t))) - \frac{\partial_t S(t, x(t))}{\tilde{\nu}(t)} \right) \tilde{\nu}(t) dt \\
&\quad + \int_0^\infty (\partial_t S(t, x(t)) + \partial_\xi S(t, x(t)) \dot{x}(t)) dt \\
&\quad + \int_0^\infty \Lambda(t, x^*(t)) \tilde{\nu}(t) dt - \int_0^\infty (\partial_t S(t, x^*(t)) + \partial_\xi S(t, x^*(t)) \dot{x}^*(t)) dt \quad (9.47) \\
&= - \int_0^\infty \Lambda(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt + \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x^*(t)) dt \\
&\geq \int_0^\infty \mathcal{L}(t, x(t)) \tilde{\nu}(t) dt + \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x(t)) dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt} S(t, x^*(t)) dt.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichungen (9.40) bzw. (9.43) sowie des Lemmas 10 nimmt die Abschätzung der Differenz  $J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*)$  folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) &\geq \hat{c} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2 \quad (9.48) \\
&\quad - S(0, x_0) + \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x(\tau_i))) \\
&\quad + S(0, x_0) - \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x^*(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x^*(\tau_i))).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch die Randbedingung (8.13), so folgt, dass die Differenz

$$\sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x(\tau_i))) - \sum_{i=1}^r (S(\tau_i - 0, x^*(\tau_i)) - S(\tau_i + 0, x^*(\tau_i)))$$

nichtnegativ ist, womit sich die Ungleichung

$$J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) \geq \hat{c} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2 \quad (9.49)$$

ergibt. Dies schliesst den Beweis ab.  $\blacksquare$

**Bemerkung 43. (a)** Bei der Bildung des Operators  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  wird implizit die Existenz der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Hamiltonfunktion in einer gewichteten Umgebung des Kandidaten  $x^*(\cdot)$  gefordert. Dies ist nur möglich, wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_\xi \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$  und  $\partial_\eta \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$  stetig in

derselben Umgebung sind. Da die Zerlegung von  $\mathbb{R}^+$  in Teilintervalle  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  die zulässigen Ansätze  $S$  bestimmt und im Grunde nicht fest vorgegeben ist, reicht die stückweise stetige partielle Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion bzgl.  $\xi$  und  $\eta$  nicht aus. Dies hat insofern Konsequenzen, dass der bewiesene Satz nur eingeschränkt auf die in der Steuerung linearen Probleme mit in  $\xi$  nichtkonkaver Hamiltonfunktion angewendet werden kann. In Unterkapitel 9.4 wird ein illustrierendes Beispiel vorgestellt. Zur Behandlung von Problemen mit bang-bang Lösungsstruktur wird beispielsweise eine zusätzliche Forderung an die Schaltfunktion gestellt, die garantiert, dass diese den Sprung in der Steuerung kompensiert, vgl. MAURER&OSMOLOVSKII [70], S. 560.

- (b) Die stetige Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion hat auch einen impliziten Einfluss auf die Umgebungsbreite  $\delta^* > 0$  und muss daher bei der Schätzung von  $\delta^*$  berücksichtigt werden.

### 9.3 Hinreichende Bedingungen für uniforme starke lokale Optimalität für Probleme mit nicht konkaver Hamiltonfunktion unter Berücksichtigung aktiver Zustandsrestriktionen

Aus der endlich-dimensionalen Optimierung unter Nebenbedingungen ist bekannt, dass die Forderung der positiven Definitheit der Hesse-Matrix der Lagrange Funktion auf dem gesamten Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  sehr stark ist und schon bei einfachen Optimierungsaufgaben oft nicht erfüllt ist. Man weiss auch, dass es ausreicht, die positive Definitheit auf dem geeigneten Tangentialunterraum vorauszusetzen, um die Optimalität eines kritischen Punktes zu erzielen. Von dieser Überlegung ausgehend werden in diesem Abschnitt hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung formuliert, die die aktiven Zustandsrestriktionen berücksichtigen und daher nicht so einschränkend sind. Hierbei wird die Idee der Projektion auf den Tangentialunterraum der Menge der aktiven Zustandsrestriktionen mit positiven Multiplikatoren benutzt, die in MALANOWSKI ET AL. [68] schon für Steuerungsprobleme mit endlichem Zeitintervall verwendet wurde. Dazu erinnern wir uns, dass alle auftretenden Zustandsbeschränkungen, sowohl die explizit gestellten als auch die “natürlichen“ in der Form

$$\vartheta_i(t, x(t)) \leq 0, \quad i \in I \tag{9.50}$$

umgeschrieben werden können. Ferner bezeichne  $P(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Projektionsabbildung auf den  $i(t)$ -dimensionalen Unterraum  $\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}(t)^T \theta = 0\}$ , wobei

$$\mathcal{B}_+(t) = [\partial_\xi(\vartheta_i(t, x^*(t)))_{i \in I_+^*(t)}]; \tag{9.51}$$

$$I_+^*(t) = \{i \in I \mid \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \lambda_i(t) > 0\}. \tag{9.52}$$

Wir werden noch folgende Definition benötigen, vgl. ALT [2], S. 14 und 68.

**Definition 21. (1):** Eine Richtung  $\theta \in \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $f(\xi + t\theta) < f(\xi)$  (bzw.  $f(\xi + t\theta) > f(\xi)$ ) für alle  $t \in [0, s]$  und einem  $s > 0$  heisst **Abstiegsrichtung** (bzw. **Aufstiegsrichtung**) der Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $\xi$ .

**(2):** Ist die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\xi$ , so kann die obige Definition wie folgt modifiziert werden. Ein Vektor  $\theta \in \mathbb{R}^n$  heisst **Abstiegsrichtung** (bzw. **Aufstiegsrichtung**) von  $f$  im Punkt  $\xi$ , wenn  $\nabla f(\xi)^T \theta < 0$  (bzw.  $\nabla f(\xi)^T \theta > 0$ ) gilt.

Die erwähnte abgeschwächte Version des Satzes über die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung wird nun vorgestellt.

**Satz 39.** Sei  $(x^*, u^*)$  ein zulässiges Paar des Problems  $(P_\infty^L)$  erfüllt, und die Funktion  $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\tilde{\nu}(\cdot)$  besitze nur endlich viele Unstetigkeiten sowie eine über  $\mathbb{R}^+$  integrierbare Stammfunktion. Angenommen,  $1 < p < \infty$  und es existiert eine Funktion  $S_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$S_1(t, \xi) = y(t)^T(\xi - x^*(t)) + \frac{1}{2}(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t))$  mit einer Vektorfunktion  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$ <sup>7</sup>, einer Matrixfunktion  $Q(\cdot) \in W_\infty^{1,n \times n}([\tau_r, \infty), \nu^{-1})$  und  $y(\cdot), Q(\cdot) \in C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$  für eine geeignete Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = \cup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\tau_0 = 0, \tau_r = \infty, i = 0, \dots, r$ . Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

**(i)** zusammen mit Lagrange Multiplikatoren  $\lambda_i(\cdot) \in C^0[\tau_r, \infty)$ <sup>8</sup>,  $i \in I$  und der durch

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \vartheta_i(t, \xi) \quad (9.53)$$

definierten Lagrange Funktion erfülle  $y(\cdot)$  die Bedingungen

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0; \quad (9.54)$$

$$\lambda_i(t) \vartheta_i(t, x^*(t)) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0; \quad (9.55)$$

**(ii)** die Voraussetzung 12 (LICQ) sei erfüllt, das heisst die Gradienten der aktiven Zustandsrestriktionen seien linear unabhängig; ausserdem seien die Zustandsrestriktionen so beschaffen, dass zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  der Schnitt  $\tilde{G}(t)$  der zulässigen Menge  $G(t)$  und der erreichbaren Menge  $R(t)$  konvex ist;

**(iii)** die Funktion  $y(\cdot)$  erfülle die Maximumbedingung

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) = H(t, x^*(t), u^*(t), y(t)) \quad (9.56)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ ;

<sup>7</sup>Die Inklusionen  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}(\mathbb{R}^+, \nu^{1-q})$  und  $y(\cdot) \in W_q^{1,n}([\tau_r, \infty), \nu^{1-q})$  wurden unter den Voraussetzungen des Lemmas 12 nachgewiesen.

<sup>8</sup>Die Stetigkeit der Multiplikatoren auf den Intervallen  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  folgt aus der Regularitätsvoraussetzung, getroffen in (ii).

(iv) die Randbedingung (8.13) des verallgemeinerten Maximumprinzips, Korollar 3, gilt;

(v) es gelte für eine gewisse Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  mit  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L^1_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ , für alle  $h := x(t) - x^*(t) \in \mathcal{K}_{\delta^*, \hat{\nu}}(0)$  und für alle  $t > 0$  die punktweise Definitheitsbedingung der Gestalt

$$h^T P(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) P(t) h \tilde{\nu}(t) \geq c |P(t)h|^{\min\{2,p\}} \nu(t), \quad (9.57)$$

mit einer positiven Konstanten  $c$ , die unabhängig von  $t$  ist, sowie dem Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ , definiert durch die Regel

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = -\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \partial_{\xi\xi}^2 \vartheta_i(t, \xi); \quad (9.58)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{Q}(t) + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ \partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t) \\ &+ Q(t) \partial_{\eta\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) \\ &+ Q(t)^T \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))) Q(t). \end{aligned} \quad (9.59)$$

Existieren darüber hinaus von  $t$  unabhängige positive Konstanten  $k$  und  $\alpha$  mit  $2 + \alpha - \min\{2, p\} > 0$ , so dass die Bedingung

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} &\leq k |\xi - x^*(t)|^{\alpha} \hat{\nu}^{2+\alpha-\min\{2,p\}}(t) \\ \forall (t, \xi) &\in \mathbb{R}^+ \times (\mathcal{K}_{\delta^*, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap R(t) \cap G(t)), \end{aligned} \quad (9.60)$$

erfüllt ist, so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  eine starke lokale Minimalstelle zum Problem  $(P_\infty^L)$ , d.h. es existiert eine von  $t$  unabhängige Zahl  $\delta^* > 0$ , so dass für alle in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit  $\|x - x^*\|_{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})} < \delta^*$  auch die Ungleichung

$$J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) \geq 0 \quad (9.61)$$

gilt.

**Bemerkung 44.** (a) Die Voraussetzung über die Regularität der Lagrange Multiplikatoren  $\lambda_i(\cdot)$ , deren Existenz und Eindeutigkeit durch die Regularitätsvoraussetzung (ii) gegeben ist, wird lediglich für das unendliche Intervall  $[\tau_r, \infty)$  getroffen.

(b) Da die Hamiltonfunktion nicht unbedingt dem Raum  $C^2(\mathbb{R}^+)$  angehören muss, wäre grundsätzlich eine Möglichkeit der Verallgemeinerung des Satzes auf Probleme mit  $C^{1,1}$  Daten, also auf solche mit lokal Lipschitz stetiger Hamiltonfunktion, vorhanden. Ansätze dazu finden sich z.B. in PICKENHAIN&TAMMER [80].

(c) Uniforme starke lokale Optimalität des Prozesses  $(x^*, u^*)$  ist gegeben, wenn die Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  von oben beschränkt ist.

**Beweis:** Die Beweisstruktur ist dieselbe wie die des Satzes 38. Daher werden hier nur die wesentlichen Beweisschritte ausgeführt.

**Schritt 1. Einführung der Lagrange Funktion.** Dieser Schritt ist identisch zum Schritt 3 des Satzes 38, wobei wir nochmals an die Abschätzung

$$-\Lambda(t, \xi) \geq \mathcal{L}(t, \xi) \quad \forall (t, \xi) \tag{9.62}$$

erinnern.

**Schritt 2. Diskussion über den Kegel der zulässigen Richtungen.**<sup>9</sup> Die Regularitätsbedingung *LICQ* impliziert die allgemeine Regularitätsbedingung

$$T(\tilde{G}(t), x^*(t)) = L(\tilde{G}(t), x^*(t)), \tag{9.63}$$

die besagt, dass der Tangentialkegel

$$T(\tilde{G}(t), x^*(t)) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \exists \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow x^*(t), \{t_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow 0 (t_k > 0) : \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k - x^*(t)}{t_k} = \theta \end{array} \right\} \tag{9.64}$$

mit dem Linearisierungskegel

$$L(\tilde{G}(t), x^*(t)) = \{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))^T \theta \leq 0, \quad i \in I^*(t) \} \tag{9.65}$$

übereinstimmt, vgl. ALT [2], Definition 7.2.18, S. 270 und Korollar 7.2.30, S. 280. Desweiteren gilt aufgrund der Konvexität der Menge  $\tilde{G}(t) = R(t) \cap G(t)$  für alle  $t > 0$  für den Kegel  $K(\tilde{G}(t), x^*(t))$  aller zulässigen Richtungen die Gleichungskette

$$clK(\tilde{G}(t), x^*(t)) = T(\tilde{G}(t), x^*(t)) = L(\tilde{G}(t), x^*(t)), \tag{9.66}$$

vgl. [2], S. 268. Bei der Untersuchung der restringierten parametrischen Optimierungsaufgabe

$$(P_t) \quad \Lambda(t, \xi) \rightarrow \max! \quad \text{bzgl.} \quad \xi \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t)) \cap \tilde{G}(t) \tag{9.67}$$

für  $t > 0$  wollen wir erreichen, dass  $x^*(t)$  für jeden Zeitpunkt  $t > 0$  ein lokaler Maximierer ist. Eine hinreichende Bedingung dafür ist ausser der notwendigen Bedingung noch die positive Definitheit der Hesseschen Matrix der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \cdot)$  für alle Richtungen  $\theta(t) \in L(\tilde{G}(t), x^*(t))$ , für die  $\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t))^T \theta = 0$  gilt. Um die zeitliche Abhängigkeit der Umgebungsbreite  $\delta$  deutlich zu erkennen, werden wir die Abschätzungen des Defektes  $\Lambda(t, x(t))$  zuerst in punktwieser Form durchführen. Da  $\tilde{G}(t)$  für alle  $t > 0$  eine konvexe Menge ist, ist die Richtung  $\theta(t) = x(t) - x^*(t)$  an der Stelle  $x^*(t)$  tangential zu  $\tilde{G}(t)$ , d.h.  $\theta(t) \in T(\tilde{G}(t), x^*(t))$ . Wir unterscheiden

<sup>9</sup>Siehe ALT [2], Definition 5.2.14, S. 182.

zwischen zwei Fällen.

**Fall 1:**  $\theta(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$  ist eine Aufstiegsrichtung von  $\Lambda(t, \xi)$ . Ist die Richtung  $\theta(t) = x(t) - x^*(t)$  eine Aufstiegsrichtung von  $\Lambda(t, \xi)$ , d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt  $\Lambda(t, x^*(t) + s\theta(t)) \geq \Lambda(t, x^*(t))$  für alle  $s \in (0, 1]$ , so müsste  $\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t))^T \theta(t) \geq 0$  sein, siehe Definition 21.(2). Andererseits folgt aus den Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, vorausgesetzt in diesem Satz,  $\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t))^T \theta(t) \leq 0$ , womit man  $\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t))^T \theta(t) = 0$  erhält. Folglich gilt

$$\theta(t) \in L'(\tilde{G}(t), x^*(t)) := L(\tilde{G}(t), x^*(t)) \cap \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \partial_\xi \Lambda(t, x^*(t))^T \theta = 0\}. \quad (9.68)$$

Ferner gilt

$$L'(\tilde{G}(t), x^*(t)) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))^T \theta \leq 0, \quad i \in I^*(x^*(t)) \setminus I_+^*(x^*(t)), \\ \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))^T \theta = 0, \quad i \in I_+^*(x^*(t)) \end{array} \right\}, \quad (9.69)$$

was genauso wie in [2], S. 282, bewiesen werden kann. Offenbar gilt auch die Inklusion

$$L'(\tilde{G}(t), x^*(t)) \subset L^+(\tilde{G}(t), x^*(t)) \quad (9.70)$$

mit

$$L^+(\tilde{G}(t), x^*(t)) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \partial_\xi \vartheta_i(t, x^*(t))^T \theta = 0, \quad i \in I_+^*(x^*(t)) \right\}, \quad (9.71)$$

die uns erlaubt mit  $\theta(t)$  als einem Element von  $L^+(\tilde{G}(t), x^*(t))$  zu arbeiten. Die Menge  $L^+(\tilde{G}(t), x^*(t))$  bildet einen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und man kann jede zulässige Richtung  $\theta(t) \in L'(\tilde{G}(t), x^*(t))$  nun als die Projektion eines gewissen Vektors  $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  auf den Unterraum  $L^+(\tilde{G}(t), x^*(t))$  interpretieren. Deshalb ist jede Richtung  $\theta(t) \in K(\tilde{G}(t), x^*(t)) \cap L'(\tilde{G}(t), x^*(t))$  wie folgt darstellbar:  $\theta(t) = P(t)\bar{\theta}(t)$ ,  $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Für jedes  $t > 0$  entwickeln wir nun die Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \xi)$  in eine Taylorreihe mit der Entwicklungsstelle  $\xi = x^*(t)$  und einem Restglied in Lagrange Form und multiplizieren die gewonnene Gleichung mit der Funktion  $\tilde{\nu}(\cdot)$ , was zur Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x(t))\tilde{\nu}(t) &= \mathcal{L}(t, x^*(t))\tilde{\nu}(t) + \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t))^T (x(t) - x^*(t))\tilde{\nu}(t) \\ &+ \frac{1}{2}(x(t) - x^*(t))^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t))(x(t) - x^*(t))\tilde{\nu}(t) \end{aligned} \quad (9.72)$$

führt, wobei die Ungleichung  $|\tilde{x}(t) - x^*(t)| \leq |x(t) - x^*(t)|$  für alle  $t > 0$  richtig ist. Da die ersten zwei Terme der rechten Seite der letzten Gleichung identisch Null sind, erhält man unter Berücksichtigung von  $\theta(t) = P(t)\bar{\theta}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x(t))\tilde{\nu}(t) &= \frac{1}{2}\bar{\theta}(t)^T P(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) P(t)\bar{\theta}(t)\tilde{\nu}(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}(t)^T P(t)^T (\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t))) \right. \\ &\quad \cdot P(t)\bar{\theta}(t)\tilde{\nu}(t) \\ &+ \left. \bar{\theta}^T P(t)^T \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) P(t)\bar{\theta}\tilde{\nu}(t)\right). \end{aligned} \quad (9.73)$$

Die punktweise Definitheitsbedingung (9.57) und die Bedingung (9.60) implizieren die Gültigkeit der nachfolgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t, x(t))\tilde{\nu}(t) &\geq \frac{1}{2} \left( -|P(t)\bar{\theta}(t)|^2 \left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \nu(t) + c \cdot |P(t)\bar{\theta}(t)|^{\min\{2,p\}} \nu(t) \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( -k|P(t)\bar{\theta}(t)|^{2+\alpha} \hat{\nu}^{2+\alpha-\min\{2,p\}}(t) \nu(t) + c \cdot |P(t)\bar{\theta}|^{\min\{2,p\}} \nu(t) \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( -k\delta^{2+\alpha-\min\{2,p\}} |P(t)\bar{\theta}(t)|^{\min\{2,p\}} \nu(t) + c \cdot |P(t)\bar{\theta}|^{\min\{2,p\}} \nu(t) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (-k\delta^{2+\alpha-\min\{2,p\}} + c) \cdot |P(t)\bar{\theta}|^{\min\{2,p\}} \nu(t)
 \end{aligned} \tag{9.74}$$

wobei  $\theta(t) = x(t) - x^*(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(0)$  und die Konstante  $c > 0$  nicht von  $t$  abhängt. Wählt man  $\delta < \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{1}{2+\alpha-\min\{2,p\}}}$ , so gilt für alle  $\theta(t) = x(t) - x^*(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(0)$  die Ungleichung

$$-\Lambda(t, x(t))\tilde{\nu}(t) \geq \mathcal{L}(t, x(t))\tilde{\nu}(t) \geq \hat{c}|P(t)\bar{\theta}|^{\min\{2,p\}}\nu(t), \quad \hat{c} > 0. \tag{9.75}$$

De facto werden die Aufstiegsrichtungen der Funktion  $\Lambda(t, \xi)$  an der Stelle  $\xi = x^*(t)$  dank der Voraussetzung **(v)** für alle  $t > 0$  ausgeschlossen.

**Fall 2:**  $\theta(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$  ist eine Abstiegsrichtung von  $\Lambda(t, \xi)$ . Gilt dagegen  $\Lambda(t, x^*(t) + s\theta(t)) < \Lambda(t, x^*(t))$  für alle  $s \in (0, 1]$ , so ist die Ungleichung  $\mathcal{L}(t, x^*(t)) < \mathcal{L}(t, x(t))$  nicht zwingend erfüllt. Man verfügt lediglich über die oben genannte Relation für  $\Lambda(t, x(t))$ . Aus dieser für  $s = 1$  und aus der Stetigkeit des Defektes  $\Lambda(t, \xi)$  in dem zweiten Argument folgt für alle  $t > 0$  und alle  $x(t) \in \mathcal{K}_{\delta, \hat{\nu}}(x^*(t))$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 (-\Lambda(t, x(t)) + \Lambda(t, x^*(t)))\tilde{\nu}(t) &\geq \frac{c(t)\hat{\nu}^{\min\{2,p\}}(t)\tilde{\nu}(t)}{\delta^{\min\{2,p\}}\nu(t)} |x(t) - x^*(t)|^{\min\{2,p\}} \nu(t) \\
 &= \tilde{c}(t) |x(t) - x^*(t)|^{\min\{2,p\}} \nu(t)
 \end{aligned} \tag{9.76}$$

mit einer von der Zeit abhängigen Konstanten  $\tilde{c}(t) := \frac{c(t)\hat{\nu}^{\min\{2,p\}}(t)\tilde{\nu}(t)}{\delta^{\min\{2,p\}}\nu(t)} > 0$ . Zusammenfassend für beide Fälle erhält man folgende Abschätzung in integrierter Form:

$$\int_0^\infty -\Lambda(t, x(t))\tilde{\nu}(t) dt \geq \min\{\hat{c}, \tilde{c}\} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^{\min\{2,p\}} \tag{9.77}$$

mit  $\tilde{c} := \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \tilde{c}(t)$ . Analog zu Satz 38 kann das Integral  $\int_0^\infty -\Lambda(t, x(t))\tilde{\nu}(t) dt$  durch die Einschränkung  $\delta^* < \|\hat{\nu}^{-1}\|^{-1}$  der Umgebungsbreite  $\delta^*$  nach unten mit  $\min\{\hat{c}, \tilde{c}\} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2$  abgeschätzt werden.

**Schritt 3. Zulässigkeit des dualen Ansatzes.** Wir konstruieren analog zum Satz 38 eine Funktion  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$ , die ausserdem der Klasse  $C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$

für eine gewisse Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = \cup_{i=1}^{r_1} [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, r_1$  angehört. Anschliessend definieren wir einen quadratischen dualen Ansatz  $S$  durch  $S(t, \xi) = a(t) + S_1(t, \xi)$ . Die Zulässigkeit dieses Ansatzes ist gegeben in der Umgebung  $U_{\delta^*}^{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})}(x^*)$  dank den analytischen Eigenschaften der Komponenten  $a(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$ ,  $Q(\cdot)$  und den Ungleichungen (9.75) und (9.76), deren rechte Seiten positiv sind. Alle diese Eigenschaften sichern die Inklusion  $S \in Y_{\infty, loc}^G$ .

**Schritt 4. Abschätzung von  $\int_0^\infty -\Lambda(t, x(t))\tilde{\nu}(t)dt$ .** Diese ist durch (9.77) gegeben.

**Schritt 5. Abschätzung der Funktionswerte.** Dieser Schritt ist identisch zu Schritt 5 des Satzes 38, wobei hierzu die Abschätzung (9.77) herangezogen wird. Wir bemerken, dass es immer möglich ist, eine stetige Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  so festzulegen, dass das Infimum  $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \tilde{c}(t)$  mit

$$\tilde{c}(t) = \frac{c(t)\hat{\nu}^{\min\{2,p\}}(t)\tilde{\nu}(t)}{\delta^{\min\{2,p\}}\nu(t)} \quad (9.78)$$

existiert und positiv ist. Gilt für die gewählte Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  gleichzeitig die Voraussetzung **(v)**, so ist das Paar  $(x^*, u^*)$  sogar eine strikte starke lokale Minimallösung zum Problem  $(P_\infty^L)$ , d.h. es existiert eine von  $t$  unabhängige Zahl  $\delta^* > 0$ , so dass für alle in  $(P_\infty^L)$  zulässigen Paare  $(x, u)$  mit  $\|x - x^*\|_{C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})} < \delta^*$  auch die Ungleichung

$$J_\infty^L(x, u) - J_\infty^L(x^*, u^*) \geq \min\{\tilde{c}, \hat{c}\} \|x - x^*\|_{L_{\min\{2,p\}}^n(\mathbb{R}^+, \nu)}^2 \quad (9.79)$$

gilt. Ist dies nicht gegeben, d.h. es gibt keine Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$ , mit der gleichzeitig die Voraussetzung **(v)** gilt und  $\tilde{c}$  positiv ist, so gilt  $\tilde{c} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \tilde{c}(t) = 0$  und die Ungleichung (9.61) gilt dennoch. ■

**Bemerkung 45.** Zusammenfassend notieren wir:

- (a) Will man  $\tilde{c} > 0$  erreichen, so ist der Spielraum in der Wahl einer geeigneten Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  zur Gewichtung der  $C^0$ -Umgebung von  $x^*(\cdot)$  verborgen. Strebt  $c(t)$  gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$ , so ist eine Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  zu wählen, damit  $\hat{\nu}^{\min\{2,p\}}(t)\tilde{\nu}(t)/\nu(t)$  dies abgleicht. Ist nur die Wahl einer wachsenden und nach oben unbeschränkten Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  möglich, so heisst das, dass  $|x(t) - x^*(t)| \leq \delta\hat{\nu}^{-1}(t)$  für alle  $t > 0$  und die Umgebung wird mit zunehmender Zeit schmaler.
- (b) Sind die Zustandsbeschränkungen insgesamt nur innerhalb eines beschränkten Intervalls aktiv, so existiert  $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \tilde{c}(t) = \tilde{c} > 0$  aufgrund der Kompaktheit des Intervalls und der Stetigkeit von  $c(\cdot)$ . Dabei geht die Striktheit der Minimalstelle nicht verloren, da die Ungleichung (9.79) erhalten bleibt. Der Beweis von  $\tilde{c} > 0$  ist analog zu PICKENHAIN&TAMMER [80] durchzuführen.
- (c) Die Breite  $\delta^*$  der Umgebung, in welcher der Prozess  $(x^*, u^*)$  stark lokal optimal ist, hängt von der Definitheitskonstante  $c > 0$  ab, die durch die Wahl der

Krümmung  $Q(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S$  beeinflusst werden kann. Dabei muss die Krümmung  $Q(\cdot)$  so gewählt werden, dass der gesamte Ansatz  $S(t, \xi)$  in der dualen Aufgabe  $(D_\infty^G)$  lokal zulässig bleibt. Unter anderem heisst das, dass die duale Funktion  $\tilde{g}_\infty(S)$  die primale  $J_\infty^L(x, u)$  nicht übersteigen darf. Zur Veranschaulichung vergleiche die schematische Abbildung 9.1. Ändert man die Krümmung des Ansatzes betragsmäßig, so ändert sich die Umgebung  $U(x^*)$ , in der der Ansatz  $S(t, \xi)$  zulässig für  $(D_\infty^G)$  ist.

- (d) Unter  $\left| \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, x^*(t)) \right|$  versteht man die Gesamtmatrixnorm der  $n \times n$ -Matrix  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, x^*(t))$  oder eine beliebige Matrixnorm, die mit der euklidischen Vektornorm verträglich ist.

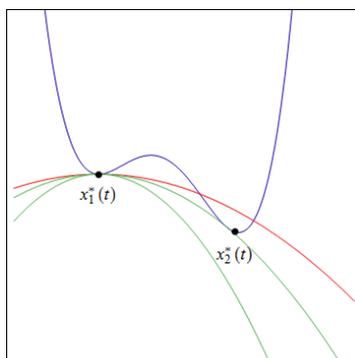


Abbildung 9.1: Primal-duales Verhältnis zwischen dem Funktional  $J_\infty^L$  (blau) und der dualen Funktion  $\tilde{g}_\infty(S_i)$  bei einem unzulässigen dualen Ansatz  $S_1$  (rot) und zulässigen Ansätzen  $S_2, S_3$  (grün). Illustration eines Schnittes zum Zeitpunkt  $t$ ;  $x_i^*(\cdot)$ -Zustandstrajektorien, Kandidaten für Optimalität,  $i = 1, 2$ .

## 9.4 Eine linear-quadratische Aufgabe

Wir betrachten ein Steuerungsproblem, welches ein akademisches Beispiel darstellt. Dieses wird wie folgt formuliert. Minimiere das gegebene Funktional

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty (-x(t)^2 + u(t)) e^{-\rho t} dt \tag{9.80}$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$ , deren Dynamik von der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \tag{9.81}$$

beschrieben wird, und die ausserdem den Nebenbedingungen

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, -\rho t) \times L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}); \tag{9.82}$$

$$|x(t)| \leq \hat{C} e^{\alpha t}, \quad \hat{C} \geq x_0; \tag{9.83}$$

$$u(t) \in [0, 1] \tag{9.84}$$

genügen sollen. Über die Konstanten  $\delta$  und  $\rho$  wird vorausgesetzt, dass  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Dieses Problem ist linear in der Steuerung und quadratisch in  $\xi = x(t)$ . Daher erhält man als Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi, v, \eta, 1) = \xi^2 - v + \eta e^{\rho t}(v - \delta \xi) \quad (9.85)$$

und als Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \begin{cases} \xi^2 - \delta e^{\rho t} \xi \eta + e^{\rho t} \eta - 1 & , \quad e^{\rho t} \eta - 1 > 0 \\ \xi^2 - \delta e^{\rho t} \xi \eta & , \quad e^{\rho t} \eta - 1 \leq 0, \end{cases} \quad (9.86)$$

die offensichtlich nicht konkav in der Variable  $\xi$  ist, was bedeutet, dass ein linearer Ansatz in der dualen Aufgabe nicht ausreichend wäre. Bei der Bestimmung der Hamiltonfunktion haben wir die optimale Steuerung

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad y(t) > e^{-\rho t} \\ v \in [0, 1] & , \quad y(t) = e^{-\rho t} \\ 0 & , \quad y(t) < e^{-\rho t}, \end{cases} \quad (9.87)$$

in die Pontrjaginsche Funktion eingesetzt. Bemerkt sei auch, dass die Hamiltonfunktion in dem Schaltpunkt  $t = \tau$  keine partielle Ableitung nach  $\eta$  besitzt. Daher existiert keine  $C^0(\mathbb{R}^+)$ -Umgebung des entsprechenden Kandidaten  $x^*(\cdot)$ , in der  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  definiert ist. Dies ist aber eine wesentliche Voraussetzung des Satzes über die hinreichenden Optimalitätsbedingungen, die nicht ohne weiteres weggelassen werden kann, wie wir später zeigen werden.

Aus der Dynamik (9.81) und der Steuerbeschränkung (9.84) resultieren die so genannten natürlichen Zustandsbeschränkungen, die wir explizit zum Modell hinzufügen:

$$x_0 e^{-\delta t} \leq x(t) \leq \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}. \quad (9.88)$$

Wir wollen nun das Problem (9.80) – (9.84), (9.88) von der dualen Seite untersuchen. Dafür werden wir die in dem Kapitel 7 entwickelte Dualitätstheorie verwenden. Zu diesem Zweck ziehen wir die restringierte parametrische Optimierungsaufgabe

$$\Lambda(t, \xi) = \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \rightarrow \max! \quad (9.89)$$

$$\text{bzgl. } \left\{ \xi \in \mathbb{R} \mid x_0 e^{-\delta t} \leq \xi \leq \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}; \quad -\hat{C} e^{\alpha t} \leq \xi \leq \hat{C} e^{\alpha t} \right\}$$

zur Betrachtung heran. Diese stellt die Maximierung des Defektes der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung dar. Für die zu lösende Aufgabe sieht der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \left( \dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t) \right. \\ &\quad \left. - (\xi - x^*(t))^T Q(t) \dot{x}^*(t) + \frac{1}{2} (\xi - x^*(t))^T \dot{Q}(t) (\xi - x^*(t)) \right) \\ &\quad + \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t))), \end{aligned} \quad (9.90)$$

wobei wir von der quadratischen Gestalt des dualen Ansatzes  $S$  ausgingen. Die zugehörige Lagrange Funktion ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, \xi) = & -\Lambda(t, \xi) + \lambda_1(t)(\xi - \hat{C}e^{\alpha t}) + \lambda_2(t)(-\xi - \hat{C}e^{\alpha t}) \\ & + \lambda_3(t)(x_0e^{-\delta t} - \xi) + \lambda_4(t) \left( \xi - (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} - \frac{1}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (9.91)$$

und die Auswertung der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen<sup>10</sup> ergibt

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t)) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0; \quad (9.92)$$

$$\lambda_1(t)(x^*(t) - \hat{C}e^{\alpha t}) = 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0; \quad (9.93)$$

$$\lambda_2(t)(-x^*(t) - \hat{C}e^{\alpha t}) = 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0; \quad (9.94)$$

$$\lambda_3(t)(x_0e^{-\delta t} - x^*(t)) = 0, \quad \lambda_3(t) \geq 0; \quad (9.95)$$

$$\lambda_4(t) \left( x^*(t) - (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} - \frac{1}{\delta} \right) = 0, \quad \lambda_4(t) \geq 0. \quad (9.96)$$

Die Bedingung (9.92) kann nach dem Ableiten von (9.90) zu folgender Gleichung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}(t, \xi) = & -\left[ \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t) - Q(t)^T \dot{x}^*(t)) \right. \\ & + \dot{Q}(t)^T (\xi - x^*(t)) + \partial_\xi \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \\ & + \partial_\eta \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) Q(t) \left. \right] + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \\ & - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0; \end{aligned} \quad (9.97)$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = & -\left[ \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{y}(t) - Q(t)^T \dot{x}^*(t)) + \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \right. \\ & + \partial_\eta \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) Q(t) \left. \right] + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \\ & - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0, \end{aligned} \quad (9.98)$$

wobei sich die letzte Gleichung wie folgt weiter umformen lässt:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = & -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) \\ & + \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} Q(t) [\dot{x}^*(t) - \partial_\eta \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Unter der Berücksichtigung der Zustandsgleichung (9.81) reduziert sich die obige Gleichung auf

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = & -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \\ & - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Wir zeigen nun, zu welchen Trugschlüssen die Vernachlässigung der zweimal stetigen Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion im Satz 38 führen kann und "beweisen" als nächstes die

<sup>10</sup>Vgl. Satz 43 im Anhang B.

**Schlussfolgerung 1.** Seien die Daten des Steuerungsproblems so gegeben, dass  $x_0 > \frac{1}{\delta}$ , dann ist der Prozess

$$x^*(t) = \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}, \quad u^*(t) \equiv 1 \quad (9.101)$$

stark lokal optimal für das betrachtete Problem. Die Optimalität ist im gleichmäßigen Sinne gemeint, denn wir setzen  $\hat{v}(t) \equiv 1$ .

**Beweis:** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = 1 - \delta x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (9.102)$$

ist durch

$$x^*(t) = \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} \quad (9.103)$$

gegeben. Daraus wird der Schluss gezogen, dass die Zustandsbeschränkungen (9.83) für alle  $t > 0$  erfüllt sind und dabei inaktiv bleiben, denn die Phasentrajektorie ist monoton fallend und besitzt zu jedem Zeitpunkt Werte im Intervall  $(1/\delta, x_0]$ . Die Komplementaritätsbedingungen (9.93), (9.94), (9.95) und (9.96) liefern

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) \equiv 0 \quad (9.104)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lambda_4(t) \left(x^*(t) - \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} - \frac{1}{\delta}\right) = 0, \quad \lambda_4(t) \geq 0, \quad (9.105)$$

und das Einsetzen dieser Werte in (9.100) ergibt die Differentialgleichung für den Kozustand  $y(\cdot)$  und die unbekannt Multiplikatorfunktion  $\lambda_4(\cdot)$

$$\dot{y}(t) = (-\partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \lambda_4(t)) \tilde{v}(t), \quad (9.106)$$

die in den Daten der Aufgabe so umgeschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (-2x^*(t) + y(t)\delta e^{\rho t} + \lambda_4(t))e^{-\rho t} \\ &= (-2x^*(t) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} + \delta y(t); \end{aligned} \quad (9.107)$$

$$\dot{y}(t) = y(t)\delta + \left(-2\left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right)e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}\right) + \lambda_4(t) e^{-\rho t}. \quad (9.108)$$

Die Lösung  $y(\cdot)$  der kanonischen Differentialgleichung (9.108) kann mit geeigneten Ansätzen für die Multiplikatorfunktion  $\lambda_4(t) \geq 0$  mittels der Variation der Konstanten ermittelt werden.<sup>11</sup> Setzt man beispielsweise  $\lambda_4(t) \equiv k = \text{const} > 0$ , so sieht die Lösung wie folgt aus:

$$y(t) = Ce^{\delta t} + \frac{2}{\rho + 2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\delta+\rho)t} + \frac{2}{\rho + \delta} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{k}{2}\right) e^{-\rho t}. \quad (9.109)$$

<sup>11</sup>Das vorliegende Steuerungsproblem ist linear in der Steuerungsvariable, wodurch die Eindeutigkeit der Lagrangeschen Multiplikatoren nicht gegeben ist.

Nun wenden wir uns der Überprüfung der Bedingung

$$y(t) > e^{-\rho t} \quad (9.110)$$

zu, die erfüllt sein muss, damit  $u^*(t)$  als 1 gesetzt werden kann, vergleiche (9.87). Aus dieser Ungleichung wird auch eine passende Multiplikatorfunktion berechnet. Mit folgenden Überlegungen setzen wir fort. Unabhängig davon, ob die Integrationskonstante  $C$  positiv, negativ oder gleich Null ist, muss die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$  notwendigerweise in dem gewichteten Lebesgueraum  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$  enthalten sein, was aus Satz 10 oder ASEEV&KRYAZHIMSKII [8], Korollar 12.1, S. 106, folgt. Das bedeutet die Existenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} |y(t)|^2 e^{\rho t} dt < \infty, \quad (9.111)$$

was nur dann möglich ist, wenn  $C = 0$  gilt. Somit sieht die zu überprüfende Bedingung nun so aus:

$$\frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-(\delta+\rho)t} + \frac{2}{\rho + \delta} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{k}{2} \right) e^{-\rho t} > e^{-\rho t} \quad \forall t > 0. \quad (9.112)$$

Unter Berücksichtigung von  $x_0 > 1/\delta$  ist die letzte Ungleichung erfüllt, wenn man eine Konstante  $k$  mit

$$\frac{2}{\rho + \delta} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{k}{2} \right) - 1 > 0 \quad (9.113)$$

wählt. Somit erfüllen alle Multiplikatorfunktionen  $\lambda_4(\cdot) : \lambda_4(t) \equiv k$  mit

$$0 < k < \frac{2}{\delta} - (\rho + \delta) \quad (9.114)$$

das KKT-System. Die Schaltbedingung

$$y(t) = e^{-\rho t} \quad (9.115)$$

ist folglich für keinen Zeitpunkt  $t > 0$  erfüllt und die Steuerung bleibt identisch gleich 1. Im nächsten Beweisschritt soll geprüft werden, ob die Nebenbedingung (9.82) für den Prozess  $(x^*, u^*)$  erfüllt ist. Es ist offensichtlich, dass die Integrale

$$\int_0^{\infty} |x^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} \left| \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} \right|^2 e^{-\rho t} dt, \quad (9.116)$$

$$\int_0^{\infty} |u^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} dt \quad (9.117)$$

sowie das Integral

$$\int_0^{\infty} |\dot{x}^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} |1 - \delta x^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt \quad (9.118)$$

existieren und endlich sind. Daher ist die Nebenbedingung (9.82) erfüllt. Nun wird mit Hilfe der hinreichenden Bedingungen für die lokale Optimalität bewiesen, dass der Prozess  $(x^*, u^*)$  in einer  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+)$  – Umgebung der Funktion  $x^*(\cdot)$  stark lokal optimal ist. Dafür untersuchen wir die Elemente des Ansatzes der dualen Variable  $S(t, \xi) = a(t) + y(t)(\xi - x^*(t)) + \frac{1}{2}(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t))$ , also das Triple  $\{a(\cdot), y(\cdot), Q(\cdot)\}$ , auf die Angehörigkeit zu den Sobolevräumen, so dass die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung, bewiesen in Unterkapitel 9.2, auf das betrachtete Problem angewendet werden können. Als erstes wird die Funktion  $a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  so definiert, dass die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für alle  $t > 0$  erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= y(t)^T \dot{x}(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) = r(t, x^*(t), u^*(t)) \tilde{\nu}(t) \\ &= (-(x^*(t))^2 + u^*(t)) e^{-\rho t} \\ &= \left( - \left( \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} \right)^2 + 1 \right) e^{-\rho t}, \end{aligned} \quad (9.119)$$

woraus man  $a(\cdot) \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$  erkennen kann. Wie schon vorher festgestellt, genügt die Komponente  $y(\cdot)$  der Inklusion  $y(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$ , denn

$$\begin{aligned} \|y\|_{L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})}^2 &= \int_0^\infty |y(t)|^2 e^{\rho t} dt \\ &= \int_0^\infty \left| \frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-(\delta+\rho)t} + \frac{2}{\rho + \delta} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{k}{2} \right) e^{-\rho t} \right|^2 e^{\rho t} dt < \infty. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Man kann aber mehr behaupten, nämlich  $y(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$ , da auch das Integral

$$\begin{aligned} \|\dot{y}\|_{L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})}^2 &= \int_0^\infty |\dot{y}(t)|^2 e^{\rho t} dt \\ &= \int_0^\infty \left| \left( -2 \left( \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} \right) + k \right) e^{-\rho t} \right|^2 e^{\rho t} dt \end{aligned} \quad (9.121)$$

existiert und endlich ist. Zum Beweis der lokalen Optimalität des Paares  $(x^*, u^*)$  wollen wir den Satz 38 anwenden. Zunächst wird die Gültigkeit der Definitheitsbedingung (9.14) nachgewiesen. Zu diesem Zwecke führen wir die Matrix

$$\nabla^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) & \partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) \\ \partial_{\eta\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) & \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi & -\delta e^{\rho t} \\ -\delta e^{\rho t} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.122)$$

ein und identifizieren die Gewichtsfunktionen  $\nu(\cdot)$ ,  $\tilde{\nu}(\cdot)$  durch

$$\nu(t) = \tilde{\nu}(t) = e^{-\rho t}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (9.123)$$

Mit festgelegten Gewichtsfunktionen (9.123) verifizieren wir nun die punktweise Definitheitsbedingung (9.14), indem wir nach den passenden Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{Q}(t)}{\tilde{\nu}(t)} + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \\ & \partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t))Q(t) + Q(t)^T \partial_{\eta\xi}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \\ & Q(t)^T \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t))Q(t) + c \leq 0 \end{aligned} \quad (9.124)$$

auf dem unendlichen Intervall  $\mathbb{R}^+$  suchen. Mit den Einträgen der Matrix  $\nabla^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$ , eingesetzt in die obige Ungleichung, erhalten wir

$$\frac{\dot{Q}(t)}{e^{-\rho t}} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) \leq -c, \quad (9.125)$$

was äquivalent zu der Ungleichung

$$\dot{Q}(t) - 2\delta Q(t) + (2 + c)e^{-\rho t} \leq 0 \quad (9.126)$$

ist. Im Allgemeinen würde hier eine Differentialungleichung vom Riccati Typ stehen, die in diesem konkreten Fall zu einer linearen Differentialgleichung entartet, denn  $\partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$  verschwindet überall auf  $\mathbb{R}^+$ . Als Lösung der entsprechenden linearen Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) - 2\delta Q(t) + (2 + c)e^{-\rho t} = 0 \quad (9.127)$$

ergibt sich

$$Q(t) = Ce^{2\delta t} + \frac{2 + c}{\rho + 2\delta} e^{-\rho t}, \quad (9.128)$$

wobei man aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \|Q\|_{L_\infty^{1 \times 1}(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})} &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |Q(t)| e^{\rho t} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \left| Ce^{2\delta t} + \frac{2 + c}{\rho + 2\delta} e^{-\rho t} \right| e^{\rho t} < \infty; \end{aligned} \quad (9.129)$$

$$\begin{aligned} \|\dot{Q}\|_{L_\infty^{1 \times 1}(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})} &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |\dot{Q}(t)| e^{\rho t} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \left| 2C\delta e^{2\delta t} - \rho \cdot \frac{2 + c}{\rho + 2\delta} e^{-\rho t} \right| e^{\rho t} < \infty \end{aligned} \quad (9.130)$$

schlussfolgern kann, dass  $C = 0$  gelten muss. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Funktion  $Q(\cdot)$ , als Element des Triples  $\{a(\cdot), y(\cdot), Q(\cdot)\}$ , laut den Voraussetzungen des Satzes 38 in dem gewichteten Sobolevraum  $W_\infty^{1,1 \times 1}(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$  liegen soll. Dies ist gewährleistet aufgrund (9.129) und (9.130). Somit ist die Gültigkeit der Definitheitsbedingung (9.14) nachgewiesen.

Als nächstes wird die lokale Zulässigkeit des gewählten Ansatzes  $S$  überprüft. Um

die Gültigkeit der Hamilton-Jacobischen Differentialungleichung  $\Lambda(t, \xi) \leq 0$  zu bestätigen, reicht es zu zeigen, dass

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) \geq 0 \quad \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}_{\delta^*, \hat{\nu}}(x^*(t)) \quad (9.131)$$

gilt. Aus diesem Grund betrachten wir den Operator

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = -\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) = -\left( \frac{\dot{Q}(t)}{e^{-\rho t}} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) \right) = c > 0, \quad (9.132)$$

woraus sich ergibt, dass die Bedingung (9.131) für alle

$$\xi : |\xi - x^*(t)| \leq \delta \quad (9.133)$$

und ein beliebiges  $\delta$  erfüllt ist. Wir erzielen somit die globale Zulässigkeit des Ansatzes. Anschliessend prüfen wir, ob die Wachstumsbedingung (9.17) des Satzes 38 erfüllt ist. Wir betrachten hierzu

$$\left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} = \left| -\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} = \left| -\left( \frac{\dot{Q}(t)}{e^{-\rho t}} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) \right) \right|, \quad (9.134)$$

worin die Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  für die Gewichtung der  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$ -Umgebung der Funktion  $x^*(\cdot)$  verwendet wird. Wir werden zuerst eine gleichmäßige Umgebung in Betracht ziehen und deshalb setzen wir  $\hat{\nu}(t) \equiv 1$ . Dies führt zur Übereinstimmung der gewichteten  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$ -Umgebung, die beispielsweise als trichterförmig vorzustellen ist, mit der gewöhnlichen  $C^0(\mathbb{R}^+)$ -Umgebung von  $x^*(\cdot)$ . Für das betrachtete Problem ergibt sich

$$\left| \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) \right| \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} = 0 \leq 1 \cdot \left| \xi - x^*(t) \right| \quad (9.135)$$

und wir setzen  $k = 1$ ,  $\alpha = 1$ , womit die Bedingung (9.17) sogar global erfüllt ist. Dies bedeutet, dass die zuletzt geprüfte Bedingung zu keiner zusätzlichen Einschränkung der Umgebungsbreite  $\delta$  führt. Insgesamt haben wir nun alle Voraussetzungen des Satzes 38 bis auf die implizit vorausgesetzte Inklusion  $\mathcal{H} \in C^2$  überprüft und könnten unter Abschwächung dieser schlussfolgern, dass die konstante Steuerung  $u^*(t) \equiv 1$  und die dazugehörige Zustandstrajektorie  $x^*(t)$ , gegeben durch (9.138), unter den gemachten Voraussetzungen an die Parameter der Aufgabe lokal und sogar global optimal sind. Somit wäre der Beweis der Schlussfolgerung abgeschlossen. ■

**Bemerkung 46.** Bei dem Übergang zur Hamiltonfunktion wurde hier nur eine ihrer Gestalten berücksichtigt, nämlich der durch die Steuerung  $u^* \equiv 1$  erzeugte Zweig von  $\mathcal{H}$ . Entsprechend wurde bei der Bildung des Operators  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  nur derjenige in Betracht gezogen. Lässt man einen Sprung in der Steuerung zu, so ist die Hamiltonfunktion im Schaltpunkt  $t = \tau$  nicht differenzierbar nach  $\eta$  und somit kann der Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  gar nicht gebildet werden. Insgesamt kann der Satz also nicht angewendet werden.

Ebenfalls unter Vernachlässigung der zweimal stetigen Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion könnte die nächste Schlussfolgerung, die jedoch ein Trugschluss ist, gezeigt werden.

**Schlussfolgerung 2.** Seien die Daten des Steuerungsproblems so gegeben, dass  $x_0 > \frac{1}{\delta}$ , dann ist der Prozess

$$x^*(t) = \begin{cases} (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} & , \quad t < \tau \\ (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta(t-\tau)} & , \quad t \geq \tau \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t < \tau \\ 0 & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.136)$$

stark lokal optimal für das betrachtete Problem. Dabei gilt  $\tau = \frac{1}{\delta} \ln \frac{2(x_0\delta-1)}{\delta(\rho+2\delta)-2}$ . Die lokale Optimalität ist im gleichmäßigen starken lokalen Sinne gemeint, mit  $\hat{v}(t) \equiv 1$ .

**Beweis:** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (9.137)$$

unter der Annahme einer bang-bang Struktur aus (9.136) für die Steuerung  $u^*(\cdot)$  ist durch

$$x^*(t) = \begin{cases} (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} & , \quad t < \tau \\ (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta(t-\tau)} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.138)$$

gegeben. Die kanonische Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (-\partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t)) \tilde{v}(t) \\ &= (-2x^*(t) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} + \delta y(t), \end{aligned} \quad (9.139)$$

kann in den Daten der Aufgabe wie folgt umgeschrieben werden

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} y(t)\delta - 2((x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta})e^{-\rho t} & , \quad t < \tau \\ +(\lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} & \\ y(t)\delta - 2((x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta(t-\tau)})e^{-\rho t} & , \quad t \geq \tau \\ +(\lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} & \end{cases} \quad (9.140)$$

Da sowohl die ‘‘natürlichen‘‘ Zustandsbeschränkungen als auch die Zustandsbeschränkungen (9.83) auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  inaktiv sind, erhält man  $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t) \equiv 0$ . Auf dem Intervall  $(0, \tau)$  ist jedoch die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq (x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}$  aktiv. Daher vereinfacht sich die kanonische Gleichung gemäß:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} y(t)\delta + (-2((x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} & , \quad t < \tau \\ y(t)\delta + (-2((x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta(t-\tau)}) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.141)$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung unter der Annahme einer konstanten Multiplikatorfunktion  $\lambda_4(t) \equiv k \geq 0$  ist gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{\delta t} + \frac{2}{\rho+2\delta}(x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-(\rho+\delta)t} + \left(\frac{2}{\delta(\rho+\delta)} - \frac{k}{\rho+\delta}\right)e^{-\rho t} & , \quad t < \tau \\ C_2 e^{\delta t} + \frac{2}{\rho+2\delta}(x_0 - \frac{1}{\delta})e^{-(\rho+\delta)t} + \frac{2}{\delta(\rho+2\delta)}e^{-(\rho+\delta)t}e^{\delta\tau} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.142)$$

mit den Integrationskonstanten  $C_1, C_2$ . Die Überprüfung der Bedingungen der dominierenden Diskontrate, vgl. (2.103) oder siehe ASEEV&KRYAZHIMSKIY [8], S. 101, zeigt, dass alle Bedingungen des Satzes 9 für das zu lösende Problem erfüllt sind und das Integral

$$\int_0^{\infty} |y(t)|^2 e^{\rho t} dt \quad (9.143)$$

existieren und endlich sein muss. Die Existenz dieses Integrals ist äquivalent zur Inklusion  $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$ . Hieraus schliessen wir, dass  $C_2 = 0$  gelten muss, das heisst

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{\delta t} + \frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)t} + \left(\frac{2}{\delta(\rho+\delta)} - \frac{k}{\rho+\delta}\right) e^{-\rho t} & , \quad t < \tau \\ \frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)t} + \frac{2}{\delta(\rho+2\delta)} e^{-(\rho+\delta)t} e^{\delta\tau} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.144)$$

Da nur eine natürliche Zustandsbeschränkung auf dem ersten Intervall aktiv wird, versuchen wir jetzt eine in dem Zeitpunkt  $t = \tau$  stetige Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  zu finden:

$$\begin{aligned} & C_1 e^{\delta\tau} + \frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)\tau} + \left(\frac{2}{\delta(\rho+\delta)} - \frac{k}{\rho+\delta}\right) e^{-\rho\tau} \\ &= \frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)\tau} + \frac{2}{\delta(\rho+2\delta)} e^{-\rho\tau}. \end{aligned} \quad (9.145)$$

Andererseits erhält man aus der Schaltbedingung

$$C_1 e^{\delta\tau} + \frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)\tau} + \left(\frac{2}{\delta(\rho+\delta)} - \frac{k}{\rho+\delta}\right) e^{-\rho\tau} = e^{-\rho\tau} \quad (9.146)$$

eine Bestimmungsgleichung für den Umschaltpunkt  $\tau$ :

$$\frac{2}{\rho+2\delta} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-(\rho+\delta)\tau} + \frac{2}{\delta(\rho+2\delta)} e^{-\rho\tau} = e^{-\rho\tau}. \quad (9.147)$$

Der Schaltpunkt  $\tau$ , definiert durch

$$\tau = \frac{1}{\delta} \ln \frac{x_0 - 1/\delta}{\frac{\rho+2\delta}{2} - \frac{1}{\delta}} = \frac{1}{\delta} \ln \frac{2(x_0\delta - 1)}{\delta(\rho+2\delta) - 2}, \quad (9.148)$$

muss positiv sein, damit es überhaupt einen Umschaltpunkt gibt, es muss also gelten

$$\frac{2(x_0\delta - 1)}{\delta(\rho+2\delta) - 2} > 1. \quad (9.149)$$

Diese Ungleichung liefert zwei Parameterbereiche

$$P_1 : \begin{cases} 2(x_0\delta - 1) > \delta(\rho+2\delta) - 2 \\ \delta(\rho+2\delta) > 2 \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} 2(x_0\delta - 1) < \delta(\rho+2\delta) - 2 \\ \delta(\rho+2\delta) < 2 \end{cases}, \quad (9.150)$$

die sich wie folgt äquivalent umschreiben lassen:

$$P_1 = \left\{ (x_0, \rho, \delta) \in \mathbb{R} \times [0, 1]^2 \mid x_0 > \frac{\rho}{2} + \delta > 1/\delta \right\} \quad (9.151)$$

und

$$P_2 = \left\{ (x_0, \rho, \delta) \in \mathbb{R} \times [0, 1]^2 \mid x_0 < \frac{\rho}{2} + \delta < 1/\delta \right\}. \quad (9.152)$$

Da wir  $x_0 > 1/\delta$  vorausgesetzt haben, fällt der Parameterbereich  $P_2$  aus der Betrachtung heraus. Sind also die Parameter  $x_0, \rho$  und  $\delta$  der Aufgabe in dem Parameterbereich  $P_1$  enthalten, so gibt es einen Umschaltzeitpunkt  $\tau > 0$ .

Wir verifizieren nun die Ungleichung

$$y(t) \leq e^{-\rho t}, \quad t \geq \tau, \quad (9.153)$$

die nach dem Einsetzen der Adjungierten die folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-(\rho+\delta)t} + \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} e^{-(\rho+\delta)t} e^{\delta\tau} \leq e^{-\rho t}, \quad t \geq \tau; \quad (9.154)$$

$$\iff \frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} e^{\delta\tau} \right) e^{-\delta t} \leq 1, \quad t \geq \tau. \quad (9.155)$$

Die linke Seite der Ungleichung (9.155) ist für  $t \geq \tau$  positiv und stellt eine in  $t$  fallende Funktion dar. Aus diesem Grund reicht es aus, die Gültigkeit der Ungleichung an der Stelle  $t = \tau$  nachzuweisen:

$$\frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta\tau} + \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} \leq 1 \quad (9.156)$$

$$\iff \frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) \cdot \frac{\delta(\rho + 2\delta) - 2}{2\delta(x_0 - 1/\delta)} + \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} \leq 1 \quad (9.157)$$

$$\iff \delta - \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} + \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} < 1. \quad (9.158)$$

Daher ist die Ungleichung (9.155) gültig. Somit ist die Gültigkeit der Ungleichung (9.153) nachgewiesen. Wir widmen uns nun der Überprüfung der Ungleichung

$$y(t) \geq e^{-\rho t}, \quad t \leq \tau. \quad (9.159)$$

Dafür wird zuerst die Integrationskonstante  $C_1$  aus der Schaltbedingung (9.146) bestimmt

$$C_1 = \left( \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} + \frac{k}{\rho + \delta} - \frac{2}{\delta(\rho + \delta)} \right) e^{-(\rho+\delta)\tau}$$

und anschliessend wird die Ungleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= \left\{ \left( \frac{2}{\delta(\rho + 2\delta)} + \frac{k}{\rho + \delta} - \frac{2}{\delta(\rho + \delta)} \right) e^{-(\rho+\delta)\tau} \right\} e^{\delta t} \\ &+ \frac{2}{\rho + 2\delta} \left( x_0 - \frac{1}{\delta} \right) e^{-(\rho+\delta)t} + \left( \frac{2}{\delta(\rho + \delta)} - \frac{k}{\rho + \delta} \right) e^{-\rho t} \geq e^{-\rho t} \end{aligned} \quad (9.160)$$

für  $t \leq \tau$  verifiziert. Die letztere gilt für alle  $t \leq \tau$ , falls die Multiplikatorfunktion  $\lambda_4(t) \equiv k = \text{konst} > 0$  wie folgt gewählt wird:

$$\frac{2}{\rho + 2\delta} < k < \frac{2}{\delta} - (\rho + \delta). \quad (9.161)$$

Also schliesst man, dass für alle  $x_0 : x_0 > \frac{1}{\delta}$  die Ungleichung (9.159) gilt. Somit ist gezeigt, dass der Lösungskandidat (9.136) der Maximumbedingung (9.13) genügt. Um die lokale Optimalität des Paares  $(x^*, u^*)$  aus (9.136) nachzuweisen, wird der Satz 38 verwendet.

Offenbar gehört die Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  aus (9.144) dem Funktionenraum

$W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  an, denn die Adjungierte ist stetig auf  $\mathbb{R}^+$  und die Integrale

$\int_0^\infty |y(t)|^2 e^{\rho t} dt$  und  $\int_0^\infty |\dot{y}(t)|^2 e^{\rho t} dt$  existieren und sind endlich. Somit gilt dasselbe für

$\int_0^\tau |y(t)|^2 e^{\rho t} dt$  und  $\int_0^\tau |\dot{y}(t)|^2 e^{\rho t} dt$ . Analog kann bewiesen werden, dass

$(x^*, u^*) \in W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \times L_2(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$ , denn die Integrale  $\int_0^\infty |x^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt$ ,

$\int_0^\infty |\dot{x}^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt$  und  $\int_0^\infty |u^*(t)|^2 e^{-\rho t} dt$  existieren und sind endlich. Der Nachweis der

Gültigkeit der Voraussetzung (v) des Satzes 38 mit in (9.123) festgelegten Funktionen verläuft analog zu dem entsprechenden Nachweis in der Schlussfolgerung 1, da der Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$  nicht von der Trajektorie  $x^*(\cdot)$  abhängt. Die Zulässigkeit des konstruierten Ansatzes in der dualen Aufgabe ist global gültig und der ist auf der ganzen Halbachse  $\mathbb{R}^+$  stetig.<sup>12</sup> Die Voraussetzung 12 ist ebenso erfüllt.

Nun sind alle Voraussetzungen des Satzes 38 über hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung erfüllt bis auf die Existenz der ersten partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion, die hier, wie auch in der vorherigen Schlussfolgerung, im Schaltpunkt  $t = \tau$  nicht existieren. Folglich gibt es keine  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+)$  – Umgebung des Kandidaten  $x^*(\cdot)$ , in der alle partiellen Ableitungen von  $\mathcal{H}$  und damit auch  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi)$  definiert ist. Somit ist der Satz 38 auf dieses Problem nicht anwendbar. ■

Die stetige Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion in einer  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  – Umgebung des Kandidaten  $x^*(\cdot)$  hat sich also als eine wesentliche Voraussetzung des Satzes erwiesen und kann somit nicht ohne weiteres weggelassen oder durch die stückweise stetige Differenzierbarkeit ersetzt werden. An einer konkreten Belegung der Konstanten des betrachteten Modells demonstrieren wir den Sachverhalt noch einmal.

## 9.5 Konkretes Beispiel

Um die Lösung des Problems graphisch darstellen zu können, legen wir die Werte der Parameter  $\rho, \delta$  und  $x_0$  fest, nämlich auf  $x_0 = 2, \rho = 0.5$  und  $\delta = 0.9$ . Dabei ist die Bedingung  $x_0 > 1/\delta$  erfüllt. Folglich gibt es laut Schlussfolgerungen 1 und 2 zwei

<sup>12</sup>Somit ist die Randbedingung (8.13) automatisch erfüllt.

lokale Minimallösungen:

$$x_1^*(t) := \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} = \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9}, \quad u_1^*(t) \equiv 1 \quad (9.162)$$

und

$$x_2^*(t) := \begin{cases} \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} & , \quad t < \tau \\ \left(x_0 - \frac{1}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} e^{-\delta(t-\tau)} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \\ = \begin{cases} \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9} & , \quad t < \tau \\ \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9} e^{-0.9(t-\tau)} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.163)$$

$$u_2^*(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t < \tau \\ 0 & , \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (9.164)$$

mit Schaltpunkt

$$\tau = \frac{1}{\delta} \ln \frac{2(x_0\delta - 1)}{\delta(\rho + 2\delta) - 2} = 3.47696, \quad (9.165)$$

siehe die Abbildungen 9.2, 9.3 und 9.4, 9.5.

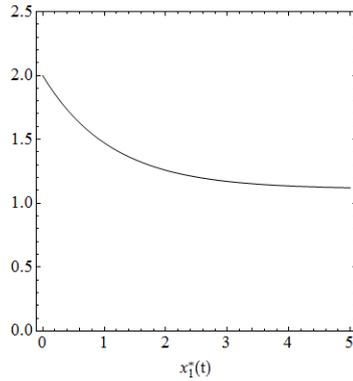


Abbildung 9.2: Zustandstrajektorie  $x_1^*(\cdot)$ .

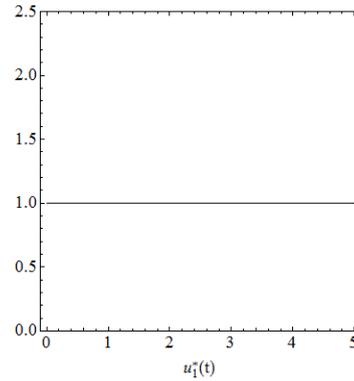


Abbildung 9.3: Steuerung  $u_1^*(\cdot)$ .

Der Funktionalwert  $J_\infty^L(x_1^*, u_1^*)$  berechnet aus der Lösung (9.162) beträgt -2.2236, da

$$J_\infty^L(x_1^*, u_1^*) = \int_0^\infty \left( - \left( \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9} \right)^2 + 1 \right) e^{-0.5t} dt = -2.2236. \quad (9.166)$$

Der Funktionalwert  $J_\infty^L(x_2^*, u_2^*)$  ergibt den Wert -2.23125. Lässt man den Schaltpunkt  $\tilde{\tau}$  beliebig und positiv, so kann man die Funktionalwerte  $J_\infty^L(\tilde{x}, \tilde{u})$  für

$$\tilde{x}(t) := \begin{cases} \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9} & , \quad t < \tilde{\tau} \\ \left(2 - \frac{10}{9}\right) e^{-0.9t} + \frac{10}{9} e^{-0.9(t-\tilde{\tau})} & , \quad t \geq \tilde{\tau} \end{cases} \\ \tilde{u}(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t < \tilde{\tau} \\ 0 & , \quad t \geq \tilde{\tau} \end{cases} \quad (9.167)$$

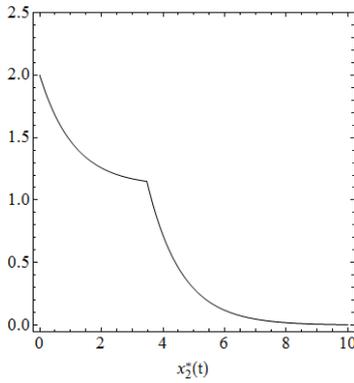


Abbildung 9.4: Zustandstrajektorie  $x_2^*(\cdot)$ .

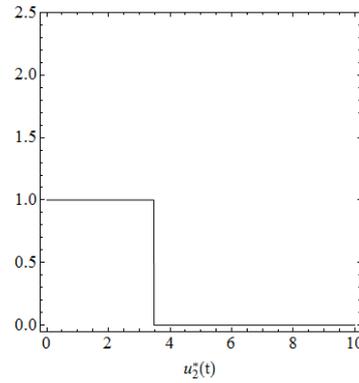


Abbildung 9.5: Steuerung  $u_2^*(\cdot)$ .

in Abhängigkeit vom Schaltpunkt  $\tilde{\tau}$  berechnen und graphisch darstellen, vgl. Abbildung 9.6. Dabei entstehen Variationen  $\|x_2^* - \tilde{x}\|_C < \epsilon(\tilde{\tau})$ ,  $\|u_2^* - \tilde{u}\|_C = 1$ . Anhand der Skizze erkennt man, dass der Prozess  $(x_2^*, u_2^*)$  bessere Funktionalwerte liefert im Vergleich zu sowohl allen Prozessen mit bang-bang Steuerung  $\tilde{u}(t) := \begin{cases} 1 & , t < \tilde{\tau} \\ 0 & , t \geq \tilde{\tau} \end{cases}$  als auch im Vergleich zu Prozess  $(x_1^*, u_1^*)$ , der als punktwiser Grenzwert dieser bang-bang Struktur betrachtet werden kann. Die rote und die schwarze Linie zeigen die Funktionalwerte  $J_\infty^L(x_1^*, u_1^*)$  bzw.  $J_\infty^L(\tilde{x}, \tilde{u})$  an. Die Funktion  $J_\infty^L(\tilde{x}, \tilde{u})$  nimmt an der Stelle  $\tilde{\tau} = \tau = 3.47696$  ihr globales Minimum an.

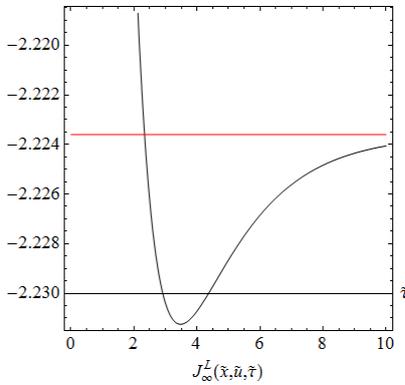


Abbildung 9.6: Abhängigkeit des Funktionalwertes  $J_\infty^L(\tilde{x}, \tilde{u})$  vom Schaltpunkt  $\tilde{\tau}$ .

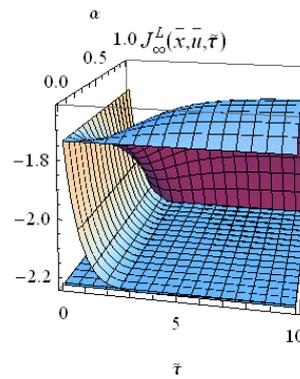


Abbildung 9.7: Abhängigkeit des Funktionalwertes  $J_\infty^L(\bar{x}, \bar{u})$  vom Schaltpunkt  $\tilde{\tau}$ .

Als nächstes nehmen wir uns folgende Variation der Steuerung

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} \alpha & , t < \tilde{\tau} \\ 0 & , t \geq \tilde{\tau} \end{cases} \quad (9.168)$$

und entsprechend der Zustandstrajektorie

$$\bar{x}(t) := \begin{cases} (2 - \frac{\alpha}{0.9})e^{-0.9t} + \frac{\alpha}{0.9} & , t < \tilde{\tau} \\ (2 - \frac{\alpha}{0.9})e^{-0.9t} + \frac{\alpha}{0.9}e^{-0.9(t-\tilde{\tau})} & , t \geq \tilde{\tau} \end{cases} \quad (9.169)$$

vor, mit  $\alpha \in [0, 1]$  und  $\tilde{\tau} \in [0, \infty)$ . Die 3D-Skizze auf der Abbildung 9.7 illustriert das Verhalten der Funktionswerte bei dieser Variation für  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\tilde{\tau} \in [0, 10]$ . Wiederum erkennt man an der graphischen Darstellung der Fläche, dass der Prozess  $(x_2^*, u_2^*)$  einen minimalen Wert des Zielfunktional  $J_\infty^L$  liefert. Die Ebene  $J_\infty^L(x, u) \equiv -2.23125$  auf der Abbildung 9.7 gibt den Funktionswert  $J_\infty^L(x_2^*, u_2^*)$  zum Vergleich an. Vom Beweis der Optimalität des Prozesses  $(x_2^*, u_2^*)$  bezüglich eines Prozesses  $(\bar{x}, \bar{u})$  mit einer Funktion  $\bar{x}(\cdot)$  aus der  $\epsilon$ -Umgebung von  $x_2^*(\cdot)$  und einer Steuerungsfunktion  $\bar{u}(\cdot)$ , die ihre Werte in  $[0, 1]$  hat und endlich viele Sprünge besitzt, wird hier jedoch abgesehen.

Der Prozess  $(x_1^*, u_1^*)$  liefert aber ein lokales Minimum des Zielfunktional  $J_\infty^L$ . Dies kann überprüft werden, indem man die Steuerungen

$$u(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t < \tilde{\tau} \\ \alpha & , \quad t \geq \tilde{\tau} \end{cases} \quad (9.170)$$

mit  $\alpha$ , das hinreichend nah an eins liegt, betrachtet. Berücksichtigt man die stetige Differenzierbarkeit der Hamiltonfunktion nicht, so müssten beide Prozesse  $(x_i^*, u_i^*)$ , ( $i = 1, 2$ ) laut dem Satz 38 sogar global optimal sein, was nicht sein kann, da die Werte des Zielfunktional für diese Paare unterschiedlich sind.



# Kapitel 10

## Optimale Erneuerung einer technischen Ressource

Das in diesem Kapitel untersuchte akademische Beispiel dient sowohl zur Illustration der Anwendbarkeit des Existenzsatzes und der Sätze über die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung aus dem vorherigen Kapitel als auch zur Demonstration dessen, wie eine künstlich eingeführte Zustandsbeschränkung die optimale Lösung beeinflussen kann.

### 10.1 Problemformulierung

Sei  $x(t) \in \mathbb{R}$  der Wert einer Maschine oder einer technischen Ressource zum Zeitpunkt  $t$ , welcher hier die Rolle eines Zustandes übernimmt. Die zeitliche Änderungsrate dieses Wertes nimmt mit einer, hier als konstant vorausgesetzten, Abschreibungsrate  $\delta \in (0, 1)$  ab und kann durch zusätzliche Investitionen  $u(t) \in \mathbb{R}$  in Erneuerungsmaßnahmen in positiver Richtung beeinflusst werden. Die Funktion  $u(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  übernimmt daher die Rolle der Steuerungsfunktion. Ausserdem seien die Investitionsmaßnahmen  $u(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  durch  $0 \leq u(t) \leq u_{max}$  beschränkt und die konstante Diskonrate  $\rho \in (0, 1)$  sei vorgegeben.

Weiterhin nehmen wir an, dass der Profit der Firma, die im Besitz dieser technischen Ressource ist, in großem Maße von dem Maschinenwert  $x(t)$  abhängt. Dies soll hier durch die quadratische Abhängigkeit des Profits von  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ausgedrückt werden.

Das Ziel der Firma ist den diskontierten Gesamtprofit über dem Intervall  $\mathbb{R}^+$  zu maximieren, wobei die Investitionskosten diesen naturgemäß verringern. Der Investitionskostenkoeffizient wird dabei gleich eins gesetzt. Als Zielfunktional wird das Funktional aus der linear-quadratischen Aufgabe aus dem Unterkapitel 9.4 betrachtet, jedoch mit einem in der Steuerung quadratischen Strafterm  $\epsilon u^2(t)e^{-\rho t}$ , der die schon betrachtete Aufgabe streng konvex in der Steuerung macht.

Um die Existenz einer optimalen Lösung zu erzwingen, wird dem Modell eine Zustandsbeschränkung der Gestalt  $|x(t)| \leq \beta(t) = e^{\alpha^* t}$ ,  $-\delta < \alpha^*$  beigefügt.

Um zusammenzufassen: Wir betrachten ein nichtlineares Steuerungsproblem, das

wie folgt formuliert wird. Minimiere das gegebene Funktional

$$J_{\infty}^L(x, u) = L \int_0^{\infty} (-x(t)^2 + u(t)) e^{-\rho t} dt + \epsilon L \int_0^{\infty} u^2(t) e^{-\rho t} dt \quad (10.1)$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$ , deren Dynamik der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \quad (10.2)$$

gehört und die außerdem den Nebenbedingungen

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, -\rho t) \times L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}); \quad (10.3)$$

$$0 \leq x(t) \leq \hat{C} e^{\alpha^* t}, \quad \hat{C} > x_0, \quad \alpha^* > -\delta; \quad (10.4)$$

$$u(t) \in [0, u_{max}] \quad (10.5)$$

genügen sollen. Über die Konstanten  $\delta$  und  $\rho$  wird vorausgesetzt, dass  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < \rho < 1$  gilt.  $x_0$  bezeichnet dabei den Startwert der Ressource.

**Bemerkung 47.** Der Strafterm  $\epsilon L \int_0^{\infty} u^2(t) e^{-\rho t} dt$  kann für kleine Werte des Parameters  $\epsilon > 0$  auch als ein Regularisierungsterm interpretiert werden. Hier wird jedoch nicht analysiert, ob und inwieweit diese Regularisierung vorteilhaft ist.

## 10.2 Existenz einer optimalen Lösung

Wir beabsichtigen nun die Voraussetzungen des Existenzsatzes 28 für das Steuerungsproblem (10.1) – (10.5) zu überprüfen und setzen die Gewichtsfunktionen erst einmal wie folgt:

$$\nu(t) := e^{\alpha t}, \quad \tilde{\nu}(t) = e^{-\rho t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (10.6)$$

Für die Funktionenräume wählen wir  $p = 2$ .

- (1) Die Konvexität des Integrandes  $r(t, \xi, v) = -\xi^2 + v + \epsilon v^2$  in  $v$  sowie die stetige Differenzierbarkeit in  $v$  sind gegeben. Somit gilt die Voraussetzung 5.
- (2) Laut der Voraussetzung 9 muss es eine Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  sowie eine positive Konstante  $B_1$  geben, so dass für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $p = 2$  die Wachstumsbedingung

$$|-\xi^2 + v + \epsilon v^2| \leq A_1(t) e^{\rho t} + B_1(|\xi|^2 + |v|^2) e^{(\rho + \alpha)t} \quad (10.7)$$

gilt. Für  $\alpha = -\rho$  ist dies mit  $A_1(t) = e^{-\rho t}$  und  $B_1 = 1 + \epsilon$  aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} |-\xi^2 + v + \epsilon v^2| &\leq |\xi|^2 + 1 + |v|^2 + \epsilon |v|^2 \leq 1 + (1 + \epsilon)(|\xi|^2 + |v|^2) \\ &\leq e^{-\rho t} e^{\rho t} + (1 + \epsilon)(|\xi|^2 + |v|^2) e^{(\rho - \rho)t} \end{aligned} \quad (10.8)$$

erfüllt.

- (3) Laut Voraussetzung 10 soll der Gradient  $\nabla_v r(t, \xi, v) = 1 + 2\epsilon v$  für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  der Wachstumsbedingung

$$|1 + 2\epsilon v| \frac{e^{-\rho t}}{e^{\alpha t}} \leq A_2(t) e^{-\frac{\alpha}{2} t} + B_2(|\xi|^1 + |v|^1) \quad (10.9)$$

mit einer Funktion  $A_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^+)$  und einer positiven Konstanten  $B_2$  genügen. Diese Bedingung ist erfüllt für  $\alpha \geq -\rho$  mit  $A_2(t) = e^{-(\rho + \frac{\alpha}{2})t}$ ,  $B_2 = 2\epsilon$  für  $p = q = 2$ , denn es gilt die Ungleichung

$$|1 + 2\epsilon v| \leq 1 + 2\epsilon|v| = e^{-(\rho + \frac{\alpha}{2})t} \cdot e^{(\rho + \frac{\alpha}{2})t} + 2\epsilon(|\xi| + |v|)e^{(\alpha + \rho)t} \quad (10.10)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , die zu der verlangten Wachstumsbedingung äquivalent ist.

- (4) Als nächstes wird die Gültigkeit der Voraussetzung 11 untersucht. Wir setzen  $A(t, x(t)) = -\delta x(t)$ ,  $B(t, x(t)) \equiv 1$  und überprüfen, ob die Wachstumsbedingungen (6.5) und (6.6) erfüllt sind. Die erste ist erfüllt mit  $p = q = 2$ ,  $B_{11}(t, \xi) \equiv 1$ , der Funktion  $A_{311}(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+)$ , definiert durch  $A_{311}(t) = e^{\frac{\alpha}{2}t}$ ,  $\alpha < 0$ , und einer Konstanten  $B_{311} = 1$ , d.h. es gilt die Ungleichung

$$|B(t, \xi)| \equiv 1 = e^{\frac{\alpha}{2}t} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \leq A_{311}(t) e^{-\frac{\alpha}{2}t} + B_{311}|\xi|, \quad (10.11)$$

insbesondere auch für  $\alpha = -\rho$ . Die Wachstumsbedingung (6.6) ist gültig mit den Konstanten  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \delta$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 1$ .

- (5) Der zulässige Bereich ist nicht leer, denn beispielsweise ist  $(x, u) = (x_0 e^{-\delta t}, 0)$  ein zulässiger Prozess.
- (6) Die Lipschitzstetigkeit der Funktion  $B(t, \xi)$  in  $\xi$  sowie die Konvexität und Abgeschlossenheit des Steuerbereiches  $U = [0, u_{max}]$  liegen vor.

Somit sind alle Voraussetzungen des Existenzsatzes 28 erfüllt, was die Existenz einer optimalen Lösung  $(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \times L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  zum Problem (10.1) – (10.5) im Sinne der Definition 10.(iii) impliziert.

## 10.3 Lösung mittels hinreichender Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Dieses Problem ist nichtlinear in der Steuerung und quadratisch in  $\xi = x(t)$ . Als Pontrjaginsche Funktion erhält man

$$H(t, \xi, v, \eta, 1) = (\xi^2 - v - \epsilon v^2) + \eta e^{\rho t} (v - \delta \xi), \quad (10.12)$$

und die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \begin{cases} \xi^2 - \delta \xi \eta e^{\rho t} + (\eta e^{\rho t} - 1) u_{max} & , \quad \frac{1}{2\epsilon} (e^{\rho t} \eta - 1) = u_{max} \\ -\epsilon u_{max}^2 & \\ \xi^2 - \delta \xi \eta e^{\rho t} + \frac{1}{4\epsilon} (\eta e^{\rho t} - 1)^2 & , \quad \frac{1}{2\epsilon} (e^{\rho t} \eta - 1) \in [0, u_{max}] \\ \xi^2 - \delta \xi \eta e^{\rho t} & , \quad \frac{1}{2\epsilon} (e^{\rho t} \eta - 1) = 0 \end{cases} , \quad (10.13)$$

wobei sie offensichtlich nicht konkav in der Platzhaltervariable  $\xi$  ist, was bedeutet, dass ein linearer Ansatz in der dualen Aufgabe nicht ausreichend wäre. Bei der Bestimmung der Hamiltonfunktion wurde die optimale Steuerung

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{max} & , \quad \frac{1}{2\epsilon}(e^{\rho t}y(t) - 1) \geq u_{max} \\ \frac{1}{2\epsilon}(e^{\rho t}y(t) - 1) & , \quad \frac{1}{2\epsilon}(e^{\rho t}y(t) - 1) \in [0, u_{max}] \\ 0 & , \quad \frac{1}{2\epsilon}(e^{\rho t}y(t) - 1) \leq 0, \end{cases} \quad (10.14)$$

in die Pontrjaginsche Funktion eingesetzt. Ähnlich wie im Unterkapitel 9.4 schreiben wir für die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, \xi) &= -\Lambda(t, \xi) + \lambda_1(t)(-\xi) + \lambda_2(t)(\xi - \hat{C}e^{\alpha^*t}) \\ &+ \lambda_3(t)(x_0e^{-\delta t} - \xi) + \lambda_4(t) \left( \xi - \left( x_0 - \frac{u_{max}}{\delta} \right) e^{-\delta t} - \frac{u_{max}}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (10.15)$$

die Bedingungen

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -\partial_\xi \Lambda(t, x^*(t)) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0; \quad (10.16)$$

$$\lambda_1(t)(-x^*(t)) = 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0; \quad (10.17)$$

$$\lambda_2(t)(x^*(t) - \hat{C}e^{\alpha^*t}) = 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0; \quad (10.18)$$

$$\lambda_3(t)(x_0e^{-\delta t} - x^*(t)) = 0, \quad \lambda_3(t) \geq 0; \quad (10.19)$$

$$\lambda_4(t) \left( x^*(t) - \left( x_0 - \frac{u_{max}}{\delta} \right) e^{-\delta t} - \frac{u_{max}}{\delta} \right) = 0, \quad \lambda_4(t) \geq 0 \quad (10.20)$$

auf, die die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die endlichdimensionale restringierte Optimierungsaufgabe

$$(P_t) \quad \Lambda(t, \xi) \rightarrow \max! \quad (10.21)$$

$$\text{bzgl. } 0 \leq \xi \leq \hat{C}e^{\alpha^*t} \quad (10.22)$$

$$x_0e^{-\delta t} \leq \xi \leq \left( x_0 - \frac{u_{max}}{\delta} \right) e^{-\delta t} + \frac{u_{max}}{\delta} \quad (10.23)$$

für  $t > 0$  darstellen. Die Bedingung (10.16) reduziert sich zu

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) &= -\frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \\ &- \lambda_3(t) + \lambda_4(t) = 0, \end{aligned} \quad (10.24)$$

was konkret

$$\dot{y}(t) = -2x^*(t)e^{-\rho t} + \delta y(t) + (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + \lambda_4(t))e^{-\rho t} \quad (10.25)$$

heisst. Befindet sich die Steuerung  $u(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Inneren des Steuerbereiches, so sind drei der vier Zustandsbeschränkungen für alle  $t \in [0, \tau_1)$  inaktiv, woraus  $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t) = 0$  folgt, und es gilt

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) &= \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) - \delta x^*(t), & x^*(0) = x_0 \\ \dot{y}(t) &= -2x^*(t)e^{-\rho t} + \delta y(t) + \lambda_2(t)e^{-\rho t} \end{cases} \quad (10.26)$$

Da ausserdem  $\hat{C} > x_0$  gilt, ist die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq \hat{C}e^{\alpha^*t}$  ebenso auf einem gewissen Intervall  $[0, \tau_2)$  inaktiv, was  $\lambda_2(t) = 0$  für alle  $t \in [0, \tau_2)$  impliziert. Überführt man das Gleichungssystem auf dem Intervall  $[0, \min\{\tau_1, \tau_2\}]$  in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y} + \left(\frac{1}{\epsilon} - \rho\delta - \delta^2\right)y = \frac{1}{\epsilon}e^{-\rho t}, \quad (10.27)$$

so erhält man als Nullstellen ihrer charakteristischen Gleichung

$$k_1 = \frac{1}{2}(-\rho - \sqrt{(\rho + 2\delta)^2 - 4/\epsilon}); \quad (10.28)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}(-\rho + \sqrt{(\rho + 2\delta)^2 - 4/\epsilon}). \quad (10.29)$$

### 10.3.1 Fall I: Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind reell

Dieser Fall tritt ein, wenn  $(\rho + 2\delta)^2 \geq 4/\epsilon$  gilt und folglich  $k_1 \leq k_2$ ,  $k_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Lässt man, bei gegebenen  $\rho$  und  $\delta$ ,  $\epsilon$  gegen Null laufen, so wird dieser Fall in den Fall II übergehen, wo beide Nullstellen der charakteristischen Gleichung komplex sind. Dieser wird später analysiert. Wir beschränken uns auf den Fall  $k_1 \neq k_2$ .

**Bemerkung 48.** Überführt man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) &= \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) - \delta x^*(t) \\ \dot{y}(t) &= -2x^*(t)e^{-\rho t} + \delta y(t) \end{cases} \quad (10.30)$$

mittels der Substitution  $\tilde{y} = ye^{\rho t}$  in das autonome Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) &= \frac{1}{2\epsilon}(\tilde{y}(t) - 1) - \delta x^*(t) \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= (\rho + \delta)\tilde{y}(t) - 2x^*(t) \end{cases}, \quad (10.31)$$

so hat das neue System den Sattelpunkt

$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))}, \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)}\right)$  als Gleichgewichtspunkt im Phasenportrait, vgl. Abbildung 10.1, der bei zwei gleichen reellen Nullstellen  $k_1 = k_2$  in einen instabilen Knoten übergeht, vgl. Abbildung 10.2. Das bedeutet, dass es keine Lösungen des kanonischen Systems (10.31) gibt, die gegen das Gleichgewicht konvergieren. Wären dabei keine Zustandsbeschränkungen zu erfüllen, so würden sich die Phasentrajektorien mit wachsender Zeit immer weiter vom Gleichgewichtspunkt entfernen.

**Lösung des Systems (10.30) auf dem Intervall  $[0, \tau]$ ,  $\tau := \min\{\tau_1, \tau_2\}$ .**

Die allgemeine Lösung von (10.30) ist

$$y(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} + \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)}e^{-\rho t}, \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} x^*(t) &= -\frac{1}{2}(C_1(k_1 - \delta)e^{(k_1 + \rho)t} + C_2(k_2 - \delta)e^{(k_2 + \rho)t}) \\ &+ \frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} \end{aligned} \quad (10.33)$$

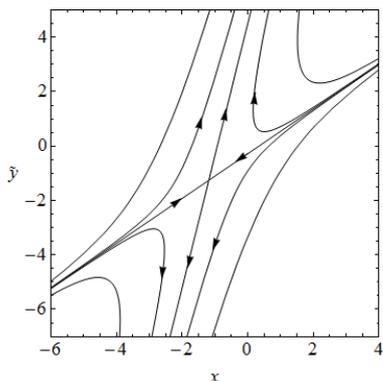


Abbildung 10.1: Phasenportrait des Systems (10.31) für  $k_i \in \mathbb{R}$ ,  $k_1 \neq k_2$ ,  $i = 1, 2$ .

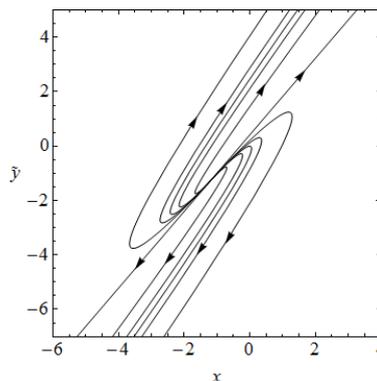


Abbildung 10.2: Phasenportrait des Systems (10.31) für  $k_1 = k_2$ .

mit Integrationskonstanten  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , wobei  $C_1$  als Funktion von  $C_2$  dargestellt werden kann:

$$C_1 = \frac{1}{k_1 - \delta} \left( \frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} - 2x_0 - C_2(k_2 - \delta) \right). \quad (10.34)$$

Die zugehörige Steuerungsfunktion auf dem Intervall  $[0, \min\{\tau_1, \tau_2\}]$  ist durch

$$u^*(t) = \frac{1}{2\epsilon} \left( C_1 e^{(k_1 + \rho)t} + C_2 e^{(k_2 + \rho)t} + \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} - 1 \right) \quad (10.35)$$

gegeben. Die fehlende zweite Randbedingung erschwert die Ermittlung der Lösung, da es im Allgemeinen nicht möglich ist, die optimale Trajektorie im Phasenportrait zu identifizieren. Diese Schwierigkeit wollen wir dadurch umgehen, dass für einen konkreten Lösungskandidaten alle hinreichenden Bedingungen gesichert werden. Dies impliziert zumindestens die lokale Optimalität des involvierten Prozesses.

**Der Operator**  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ . Mit der Hesseschen Matrix

$$\nabla^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} 2 & -\delta e^{\rho t} \\ -\delta e^{\rho t} & \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} \end{pmatrix} \quad (10.36)$$

und ihren Einträgen bilden wir den Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ , für den

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = -\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) \quad (10.37)$$

gilt, denn die Zustandsbeschränkungen hängen nur linear von der Variable  $\xi$  ab:

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) &= - \left( \dot{Q} e^{\rho t} + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) + 2\partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t)))Q(t) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t)))Q^2(t) \right) \\ &= - \left( \dot{Q} e^{\rho t} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} Q^2(t) \right). \end{aligned} \quad (10.38)$$

Zu einer gegebenen Zahl  $c > 0$  versuchen wir mit dem Ansatz

$$Q(t) = Q_0 e^{-\rho t} \quad (10.39)$$

in Hinsicht auf die Bedingung (9.14) der Ungleichung

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = - \left( \dot{Q} e^{\rho t} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} Q^2(t) \right) \geq c \quad (10.40)$$

für alle  $t > 0$  zu genügen und auf diese Weise eine Krümmungskomponente  $Q(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$  eines dualen Ansatzes  $S$  anzugeben. Dabei ergibt sich für die Konstante  $Q_0$  die quadratische Ungleichung

$$\frac{Q_0^2}{2\epsilon} - (\rho + 2\delta)Q_0 + (2 + c) \leq 0, \quad (10.41)$$

deren Lösung  $Q_0$  der Inklusion

$$Q_0 \in \left[ \frac{\rho + 2\delta - \sqrt{(\rho + 2\delta)^2 - \frac{2(2+c)}{\epsilon}}}{4\epsilon}, \frac{\rho + 2\delta + \sqrt{(\rho + 2\delta)^2 - \frac{2(2+c)}{\epsilon}}}{4\epsilon} \right] \quad (10.42)$$

genügt. Das obige Intervall ist nur im Fall  $(\rho + 2\delta)^2 \geq 4/\epsilon + 2c/\epsilon$  nichtleer.

Offenbar gelingt es also mit einem solchen Ansatz eine passende, und sogar stetige, Funktion  $Q(\cdot)$  ausfindig zu machen, wenn die charakteristische Gleichung zum System (10.31) zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen besitzt. In der Tat, sei  $(\rho + 2\delta)^2 > 4/\epsilon$ , dann gibt es eine reelle Zahl  $a > 0$  mit  $(\rho + 2\delta)^2 = 4/\epsilon + a$ . Setzt man  $c = \frac{a\epsilon}{2}$ , so erfüllt beispielsweise  $Q_0 := \frac{\rho + 2\delta}{4\epsilon}$  die Gleichung in (10.41).

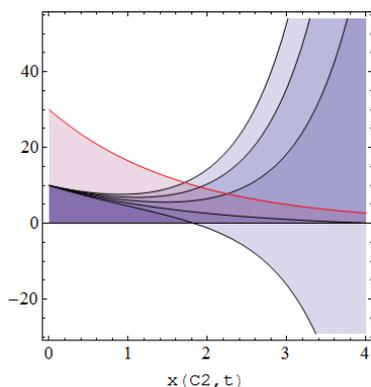
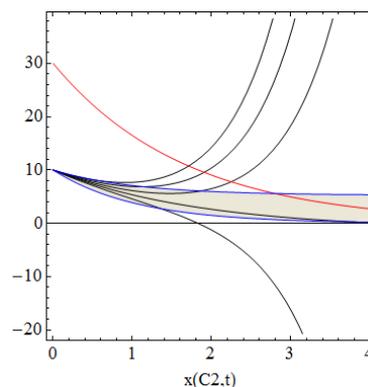
Ein allgemeinerer Ansatz  $Q(t) = f(t)e^{-\rho t}$  mit einer wesentlich beschränkten Funktion  $f(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  führt zu ähnlichem Ergebnis.

Der Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$  hängt nicht von der Zustandstrajektorie ab, womit die Bedingung (9.17) automatisch global erfüllt ist.

### Überprüfung der Voraussetzungen des Satzes 38 für konkrete Daten:

$x_0 = 10$ ,  $\rho = 0.94$ ,  $\delta = 0.95$ ,  $\alpha^* = -0.6$ ,  $\hat{C} = 30$ ,  $u_{max} = 5$ ,  $\epsilon = 1$ .

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind  $k_1 = -1.47817$ ,  $k_2 = 0.538167$ . Durch Variation der noch freien Integrationskonstante  $C_2$  erhält man die Familie der zulässigen Zustandstrajektorien, wenn man von den Zustandsrestriktionen absieht, vgl. Abbildung 10.3. Hier bezeichnet die rote Kurve die Funktion  $\beta(t) = \hat{C}e^{\alpha^* t}$ , der rot gefüllte Bereich die Menge  $\{(t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^+, \xi \in G(t)\}$ , erzeugt durch die explizit gestellten Zustandsbeschränkungen, und der sandfarbig gefüllte Bereich auf der Abbildung 10.4 entsprechend die Erreichbarkeitsmenge  $R := \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^+, \xi \in R(t)\}$ , erzeugt durch die "natürlichen" Zustandsbeschränkungen. Wie entscheidet man nun, welche Trajektorie aus dieser Kurvenschar optimal sein soll? Zu diesem Zweck steht uns der Satz 38 zur Verfügung, der trotz fehlender zweiter Randbedingung im kanonischen System anhand des Verhaltens der Adjungierten  $y(\cdot)$  über die starke lokale Optimalität eines Prozesses entscheiden lässt.


 Abbildung 10.3: Zustandstrajektorien in Abhängigkeit von  $C_2$ .

 Abbildung 10.4: Erreichbarkeitsmenge  $R$ .

Die nächste Frage, die entsteht, ist, ob und wann die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq \hat{C}e^{\alpha^*t}$  aktiv wird. Wird sie aktiv in einem Zeitpunkt  $\tau_1$ , so sieht die Kozustandsfunktion auf dem Intervall  $[0, \tau_2]$ ,  $\tau_2 > \tau_1$ , wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 y(C_2, t) &= \begin{cases} y_1(C_2, t) & , \quad t \leq \tau_1 \\ y_2(t) & , \quad \tau_1 < t < \tau_2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left\{ \frac{1}{k_1 - \delta} \left( \frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} - 2x_0 - C_2(k_2 - \delta) \right) \right\} e^{k_1 t} \\ \quad + C_2 e^{k_2 t} + \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} e^{-\rho t} & , \quad t \leq \tau_1 \\ 2\hat{C}(\alpha^* + \delta)e^{(\alpha^* - \rho)t} + e^{-\rho t} & , \quad \tau_1 < t < \tau_2 \end{cases} \quad (10.43)
 \end{aligned}$$

Durch Variation des Schaltpunktes  $\tau$  und der Konstante  $C_2$  unter der Berücksichtigung der Stetigkeit der Zustandsfunktion  $x^*(\cdot)$  wird untersucht, wann die Adjungierte  $y(\cdot)$  im Zeitpunkt  $t = \tau$  einen Sprung nach oben hat bzw. gemäß der Randbedingung (8.13) stetig ist. Dafür werden folgende Flächen

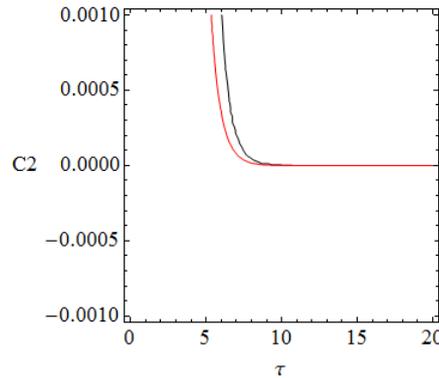
$$F_1(\tau, C_2) := x^*(\tau, C_2) - \hat{C}e^{\alpha^*\tau}; \quad (10.44)$$

$$F_2(\tau, C_2) := y_1(\tau, C_2) - y_2(\tau) \quad (10.45)$$

betrachtet, um festzustellen, wann, möglicherweise gleichzeitig, diese beiden Flächen die  $\tau C_2$ -Ebene schneiden, vgl. die Abbildung 10.5. Aus dieser Abbildung und aus der Analyse des Gleichungssystems

$$F_1(\tau, C_2) = 0, \quad F_2(\tau, C_2) = 0 \quad (10.46)$$

wird klar, dass  $C_2 = 0$  und  $\tau = \infty$  gesetzt werden müssen, um der Bedingung (8.13) zu genügen, denn jeder frühere Schaltpunkt würde einen Sprung der Kozustandsfunktion nach unten erzwingen, was der Bedingung (8.13) widersprechen würde. Somit wird die betrachtete Zustandsbeschränkung nie aktiv. Die Randbedingung (8.13) ist zwar keine notwendige Optimalitätsbedingung, aber unser Ziel ist es, die Gültigkeit aller Voraussetzungen des Satzes 38 für ein bestimmtes zulässiges Paar nachzuweisen, um dessen starke lokale Optimalität zu beweisen. Die Setzung  $C_2 = 0$

Abbildung 10.5: Schnitte der Flächen  $F_1$  (schwarz) und  $F_2$  (rot) mit der  $\tau C_2$ -Ebene.

liegt ausserdem nahe, wenn man in der allgemeinen Lösung (10.32), (10.33) die Terme, die dem positiven Eigenwert entsprechen, eliminiert, damit in der Phasenebene  $(x, y)$  die Trajektorien gegen das Gleichgewicht konvergieren.

Die Zustandsbeschränkung  $-x^*(t) \leq 0$  wird ebenfalls nicht aktiv, da der Zeitpunkt  $t_u : u^*(t_u) = 0$  eher eintritt und sich der Wert der Maschine  $x^*(t)$  ab diesem Zeitpunkt ungesteuert entwickelt und somit für den Rest der Zeit positiv bleibt. Mit  $t_u = 2.61402$  erhält man

$$x^*(t) = \begin{cases} \left( -\frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))} + x_0 \right) e^{(k_1+\rho)t} + \frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))} & , \quad t \leq t_u \\ \left( \left( -\frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))} + x_0 \right) e^{(k_1+\rho)t_u} + \frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))} \right) e^{-\delta(t-t_u)} & , \quad t > t_u \end{cases} \quad (10.47)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{1}{k_1-\delta} \left( \frac{\rho+\delta}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} - 2x_0 \right) e^{(k_1+\rho)t} + \frac{1}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} - 1 \right) & , \quad t \leq t_u \\ 0 & , \quad t > t_u \end{cases} \quad (10.48)$$

vergleiche auch Abbildungen 10.6, 10.7. Die Steuerung im Startzeitpunkt befindet sich im Inneren des Steuerbereiches,  $u^*(0) = 3.47903 \in (0, 5)$ . Die Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  ist somit stetig und definiert durch

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_1-\delta} \left( \frac{\rho+\delta}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} - 2x_0 \right) e^{k_1 t} + \frac{1}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} e^{-\rho t} & , \quad t \leq t_u \\ e^{-\rho t} & , \quad t > t_u \end{cases} \quad (10.49)$$

wodurch offensichtlich die im Satz 38 verwendete Inklusion<sup>1</sup>  $y(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$  erfüllt ist. Die übrig gebliebene Komponente  $a(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S$  wird aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\Lambda(t, x^*(t)) = 0, \quad (10.50)$$

berechnet. Die Voraussetzung (i) des Satzes 38 ist mit den Lagrange Multiplikatoren  $\lambda_i(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  gegeben. Folglich erhält man die letzte Gleichung in der

<sup>1</sup>Ihre Gültigkeit folgt aus dem Lemma 12.

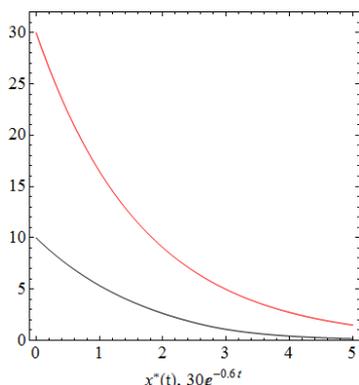


Abbildung 10.6: Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall reeller Nullstellen: optimaler Zustand  $x^*(\cdot)$  (schwarz), Zustandsbeschränkung (rot).

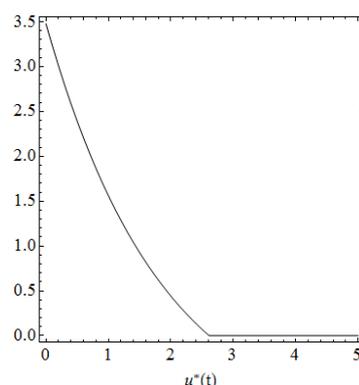


Abbildung 10.7: Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall reeller Nullstellen: optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$ .

Gestalt

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{v}(t). \quad (10.51)$$

Mit den Konstanten

$$A := \frac{1}{4} \left( 2x_0 - \frac{\rho + \delta}{1 - \delta(\rho + \delta)} \right)^2 \left( \frac{1}{(k_1 - \delta)^2} - 1 \right), \quad (10.52)$$

$$B := \left( \frac{\rho + \delta}{1 - \delta(\rho + \delta)} - 2x_0 \right) \frac{1 + (k_1 - 3\delta)(\rho + \delta)}{2(k_1 - \delta)(1 - \delta(\rho + \delta))}, \quad (10.53)$$

$$C := -\frac{1}{4} \frac{(\rho + \delta)^2 (1 + \delta)^2}{(1 - \delta(\rho + \delta))^2} - \frac{\delta(\rho + \delta)}{2(1 - \delta(\rho + \delta))}, \quad (10.54)$$

$$D := e^{2\delta t_u} \left( \frac{\rho + \delta}{2(1 - \delta(\rho + \delta))} - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho + \delta}{1 - \delta(\rho + \delta)} - 2x_0 \right) e^{(k_1 + \rho)t_u} \right)^2 \quad (10.55)$$

hat die Differentialgleichung

$$\dot{a}(t) = \begin{cases} Ae^{(2k_1 + \rho)t} + Be^{k_1 t} + Ce^{-\rho t} & , \quad t \leq t_u \\ De^{-(\rho + 2\delta)t} & , \quad t > t_u \end{cases} \quad (10.56)$$

die Lösung

$$a(t) = \begin{cases} \frac{A}{2k_1 + \rho} e^{(2k_1 + \rho)t} + \frac{B}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{C}{-\rho} e^{-\rho t} + K & , \quad t \leq t_u \\ \frac{D}{-(\rho + 2\delta)} e^{-(\rho + 2\delta)t} & , \quad t > t_u \end{cases}, \quad (10.57)$$

wobei sich die Konstante  $K$  aus der Stetigkeit von  $a(\cdot)$  in  $t = t_u$  ergibt:

$$K := -\frac{D}{(\rho + 2\delta)} e^{-(\rho + 2\delta)t_u} - \frac{A}{2k_1 + \rho} e^{(2k_1 + \rho)t_u} - \frac{B}{k_1} e^{k_1 t_u} + \frac{C}{\rho} e^{-\rho t_u}. \quad (10.58)$$

Die in (10.57) definierte Funktion ist ein Element von  $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ , so dass nun für  $S^* := a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t)) + 1/2(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t))$  mit den Komponenten aus (10.57), (10.49) bzw. (10.39) alle Voraussetzungen des Satzes 38 für das Paar  $(x^*, u^*)$  aus (10.47), (10.48) erfüllt sind.

**Interpretation der optimalen Lösung.** Für die gewählten Parameter der Aufgabe ist es optimal, nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_u$  Mittel in Erneuerungsmaßnahmen zu investieren. Für  $t > t_u$  lohnt es sich nicht mehr, um die Erhaltung des Wertes der betrachteten Ressource zu kämpfen, da die Kosten dafür den erzielten Effekt übersteigen würden. Die ermittelte Lösung ist stark lokal optimal in einer gleichmäßigen Umgebung von  $x^*(\cdot)$ , mindestens von der Breite  $\delta^* = \|\hat{\nu}^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})}^{-1} = \|1\|_{L_2(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})}^{-1} = \sqrt{\rho}$ , hierbei ist  $\hat{\nu}(t) \equiv 1$ .

Die optimale Steuerung fällt monoton ab, wobei sie bei einem Wert  $u^*(0) = \bar{u} = 3.47903$  für hinreichend große  $u_{max}$  startet. Mehr sogar, für alle  $u_{max} \geq \bar{u}$  ist dasselbe Paar  $(x^*, u^*)$  stark lokal optimal. Würde man im Fall  $u_{max} > \bar{u}$  mit einer größeren Investition starten, so würde die entsprechende Zustandstrajektorie auf die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq \hat{C}e^{\alpha^* t}$  nicht tangential auftreffen, was einen Sprung der Komponente  $y(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$  nach unten<sup>2</sup> erzwingen würde.

Ist  $u_{max} < \bar{u}$ , so ist die Konstante  $C_2 < 0$  aus der Bedingung  $u(0) = u_{max}$  zu bestimmen. In diesem Fall wird der Zeitpunkt  $t_u : u(t_u) = 0$ , wenn alle zur Verfügung stehenden Mittel erschöpft sind, schneller erreicht. Alle Zustandsbeschränkungen bleiben inaktiv, auch  $-\xi \leq 0$ , denn  $t_u < t_x = \min\{t \mid x^*(t) = 0\}$ .

Aufgrund der Gleichmäßigkeit der Umgebung der Funktion  $x^*(\cdot)$ , wo der Prozess  $(x^*, u^*)$  optimal ist, lässt sich behaupten, dass das Verhalten der zulässigen Trajektorien im Unendlichen höchstens genauso wichtig ist, wie am Anfang des Planungsintervalls. Gelingt es nachzuweisen, dass die starke Optimalität des Paares in einer im Unendlichen breiter werdenden Umgebung gegeben ist, so ist das Verhalten der Trajektorien für  $T \rightarrow \infty$  in Hinsicht auf die Optimalität nicht entscheidend.

### 10.3.2 Fall II: Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind komplex

Dieser Fall tritt ein, wenn  $(\rho + 2\delta)^2 < 4/\epsilon$  gilt. Das autonome System (10.31) hätte in diesem Fall einen instabilen Strudelpunkt<sup>3</sup>  $(\hat{x}, \hat{y}) = (\frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))}, \frac{1}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)})$  als Gleichgewicht, vgl. die Abbildung 10.8.

**Lösung des dynamischen Systems (10.30) auf dem Intervall  $[0, \tau_1]$ .** Jede zulässige Zustandstrajektorie  $x(\cdot)$  startet im Inneren der zulässigen Menge  $G(0)$  und daher ist die Lösung des entsprechenden kanonischen Systems auf einem gewissen

<sup>2</sup>statt einem höchstens nach oben erlaubten Sprung.

<sup>3</sup>Ein instabiler Strudelpunkt bezeichnet den Gleichgewichtspunkt eines dynamischen Systems, der durch komplex konjugierte Nullstellen der charakteristischen Gleichung mit positiven Realteilen charakterisiert ist, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35], S. 104 f.

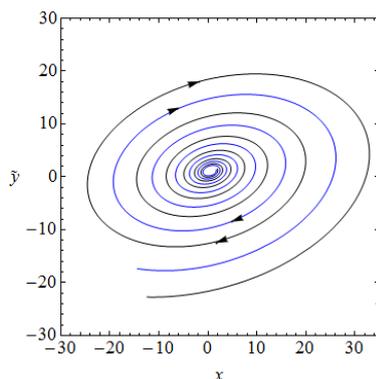


Abbildung 10.8: Phasenportrait des Systems (10.31) im Fall komplexer Nullstellen der charakteristischen Gleichung.

Intervall  $[0, \tau_1]$  durch folgende Funktionen<sup>4</sup>

$$x^*(t) = \frac{\rho + 2\delta}{4} C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho + 2\delta}{4} C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{\beta}{2} C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t - \frac{\beta}{2} C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))}, \quad (10.59)$$

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} e^{-\rho t} \quad (10.60)$$

mit  $\beta := \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - \frac{(\rho+2\delta)^2}{4}}$  gegeben, wobei eine der Integrationskonstanten mittels der Anfangsbedingung eliminiert werden kann:

$$C_2 = \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_1 + \frac{\rho + \delta}{2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} - x_0 \right) \frac{2}{\beta}. \quad (10.61)$$

Die optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$  auf dem Intervall  $[0, \tau_1]$  ist gemäß (10.14) durch

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{max} & , \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) > u_{max} \\ \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) & , \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) \in [0, u_{max}] \\ 0 & , \frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) < 0 \end{cases} \quad (10.62)$$

mit

$$\frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) = \frac{1}{2\epsilon} \left( C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{1}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} - 1 \right) \quad (10.63)$$

<sup>4</sup>Die "natürlichen" Zustandsbeschränkungen sind nur im Startzeitpunkt aktiv. Würde die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq (x_0 - \frac{u_{max}}{\delta}) e^{-\delta t} + \frac{u_{max}}{\delta}$  auch für  $t > 0$  aktiv sein, so würde dies einen nicht tangentialen Aufsprung auf die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq \hat{C}e^{\alpha t}$  und somit einen Sprung der adjungierten Komponente  $y(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S$  in die "falsche" Richtung verursachen, wie wir später sehen werden. Die Zustandsbeschränkung  $x_0 e^{-\delta t} \leq x(t)$  kann ebenso nicht aktiv bleiben, da das der Steuerung Null entsprechen würde, was nicht plausibel ist. Für die später vorgestellte Lösung  $(x^*, u^*)$  sind die natürlichen Zustandsrestriktionen tatsächlich überall inaktiv, siehe Abbildung 10.13.

gegeben. Aus dem oszillierenden Verhalten der Funktion  $x^*(\cdot)$  wird klar, dass in einem bestimmten Zeitpunkt  $\tau_1 > 0$  eine der Zustandsbeschränkungen aktiv wird.

**Der Operator  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi)$ .** Analog zu Fall I erhält man die Hessesche Matrix der Lagrange Funktion, nämlich

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) &= - \left( \dot{Q}e^{\rho t} + \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{H}(t, \xi, \eta) + 2\partial_{\xi\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t)))Q(t) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\eta\eta}^2 \mathcal{H}(t, \xi, y(t) + Q(t)(\xi - x^*(t)))Q^2(t) \right) \\ &= - \left( \dot{Q}e^{\rho t} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} Q^2(t) \right) \end{aligned} \quad (10.64)$$

und versucht zu einer festen Zahl  $c > 0$  eine solche Funktion

$$Q(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}([\tau_r, \infty), e^{\rho t}) \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}] \quad (10.65)$$

für eine geeignete Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = \cup_{i=0}^r [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{r+1} = \infty$  ausfindig zu machen, dass die Definitheitsbedingung (9.14) für alle  $t \in [0, \tau_1]$  erfüllt ist. Da dies mit dem Ansatz  $Q(t) = Q_0 e^{-\rho t}$  im Fall  $(\rho + 2\delta)^2 < 4/\epsilon$  nicht möglich ist, suchen wir direkt nach einer Lösung der folgenden Differentialungleichung vom Riccati Typ:

$$\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \xi) = - \left( \dot{Q}(t)e^{\rho t} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} Q^2(t) \right) \geq c. \quad (10.66)$$

Betrachtet man statt der Differentialungleichung die entsprechende Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) - 2\delta Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} Q^2(t)e^{\rho t} + (2 + c)e^{-\rho t} = 0, \quad (10.67)$$

so hat ihre Lösung unendlich viele Polstellen, wobei die Funktion  $Q(\cdot)$  auf jedem Teilintervall ihres Definitionsbereiches monoton fallend ist. Die ‘‘Sprünge in Polstellen‘‘ erfolgen also von unten nach oben. Um die Randbedingung (8.13) zu erfüllen, müssten die Sprünge jedoch von oben nach unten stattfinden.<sup>5</sup> Ausserdem ist  $Q(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}([\tau_r, \infty), e^{\rho t})$  für kein  $\tau_r \in \mathbb{R}^+$  erfüllt, wenn  $Q(\cdot)$  unendlich viele Polstellen besitzt. Dies bedeutet, dass es auf diese Weise nicht möglich ist, gleichzeitig den Voraussetzungen **(iv)** und **(v)**, konkret der Definitheitsbedingung (9.14) des Satzes 38 für alle  $t > 0$  mit einer Funktion  $Q(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}([\tau_r, \infty), e^{\rho t}) \cap C^1(\tau_i, \tau_{i+1}) \cap C^0[\tau_i, \tau_{i+1}]$  zu genügen, was uns veranlasst die hinreichenden Optimalitätsbedingungen in schwächerer Form zu testen, die der Satz 39 liefert. Die Absicht dabei ist herauszufinden, ob die Zustandsbeschränkungen aktiv werden, aktiv bleiben, und ob die Berücksichtigung der aktiven Phasenrestriktionen gemäß Satz 39 bei dem Nachweis der Gültigkeit der hinreichenden Bedingungen hilfreich sein kann.

<sup>5</sup>Die Summe der Sprünge der dualen Variable  $S^*$  in der Randbedingung (8.13) wird entlang des Lösungskandidaten  $x^*(\cdot)$  minimal, falls alle Sprünge der adjungierten Komponente  $y(\cdot)$  höchstens nach oben und die von der Krümmungskomponente  $Q(\cdot)$  höchstens nach unten erfolgen, vorausgesetzt  $x^*(\tau_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Bei stetigen Komponenten  $y(\cdot)$  und  $Q(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$  ist die Bedingung selbstverständlich erfüllt.

**Überprüfung der Voraussetzungen des Satzes 39 für konkrete Daten:**

$x_0 = 10$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha^* = 0$ ,  $\hat{C} = 20$ ,  $u_{max} = 55$ ,  $\epsilon = 0.1$ .

Wir führen folgende Vorbetrachtungen durch. Angenommen, im Zeitpunkt  $\tau_1$  wird die Zustandsbeschränkung  $x(\tau_1) \leq \hat{C}$  aktiv. Berechnen wir den Lagrange Multiplikator  $\lambda_2(\cdot)$  auf einem gewissen Intervall  $[\tau_1, \tau_2]$  als Lösung der Gleichung (10.25), der sich mit  $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t) \equiv 0$  als

$$\lambda_2(t) = (\dot{y}(t) + 2x^*(t)e^{-\rho t} - \delta y(t)) e^{\rho t} \quad (10.68)$$

ausdrücken lässt. Wir prüfen, ob die betrachtete Zustandsbeschränkung aktiv bleiben könnte. Es ergibt sich

$$x^*(t) \equiv \hat{C}, \quad u^*(t) \equiv \delta \hat{C}, \quad y(t) = (2\epsilon \delta \hat{C} + 1)e^{-\rho t}, \quad t > \tau_1, \quad (10.69)$$

womit der Lagrange Multiplikator

$$\lambda_2(t) \equiv (\rho + \delta)(-1 - 2\epsilon \delta \hat{C}) + 2\hat{C} = 37 \quad (10.70)$$

für alle  $t > \tau_1$  positiv bleibt, erleidet aber einen Sprung in  $t = \tau_1$ . Der Zeitpunkt  $\tau_1$  des Auftreffens auf die Zustandsbeschränkung hängt noch von der Integrationskonstanten  $C_1$  ab, wobei  $x^*(\tau_1) = \hat{C}$  gelten muss. Diese ist so zu wählen, dass der Sprung  $y(\tau_1 + 0) - y(\tau_1 - 0)$  der Kozustandsfunktion

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{1}{1-\epsilon \delta(\rho+\delta)} e^{-\rho t} & , \quad t \leq \tau_1 \\ (2\epsilon \delta \hat{C} + 1)e^{-\rho t} & , \quad t > \tau_1 \end{cases}, \quad (10.71)$$

vgl. Abbildung 10.11, nichtnegativ ist, d.h. entweder von unten nach oben oder stetig in  $t = \tau_1$ . Eine stetige Komponente  $y(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$  zu finden ist möglich, wenn die Zustandstrajektorie  $x^*(\cdot)$  tangential auf die Zustandsbeschränkung auftrifft, was durch

$$x^*(\tau_1) = \hat{C}, \quad \dot{x}^*(\tau_1) = 0 \quad (10.72)$$

charakterisiert wird. Dies impliziert die Stetigkeit der Steuerungsfunktion  $u^*(\cdot)$  an der Stelle  $t = \tau_1$ , denn

$$u^*(\tau_1 + 0) - u^*(\tau_1 - 0) = \delta x^*(\tau_1 + 0) - \dot{x}^*(\tau_1 - 0) - \delta x^*(\tau_1 - 0) = 0, \quad (10.73)$$

und somit auch die Stetigkeit der Komponente  $y(\cdot)$  dank (10.14).

Wir zeigen nun konsequent, dass für das Paar  $(x^*, u^*)$ , vgl. Abbildungen 10.9 und 10.10, definiert durch

$$x^*(t) = \begin{cases} \frac{\rho+2\delta}{4} C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho+2\delta}{4} C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t & , \quad t < \tau_1 \\ + \frac{\beta}{2} C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t - \frac{\beta}{2} C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon \delta(\rho+\delta))} & \\ \hat{C} & , \quad t \geq \tau_1 \end{cases} \quad (10.74)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} \left( C_1 e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{1}{1-\epsilon \delta(\rho+\delta)} - 1 \right) & , \quad t < \tau_1 \\ \delta \hat{C} & , \quad t \geq \tau_1 \end{cases} \quad (10.75)$$

mit den Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ , bestimmt durch (10.72)<sup>6</sup> bzw. (10.61), alle Voraussetzungen des Satzes 39 für die gewählten Daten der Aufgabe und die Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = [0, \tau_1) \cup [\tau_1, \infty)$  erfüllt sind. Hierbei gilt  $\tau_1 = 0.355914971$ ,  $C_1 = 10.734057$ ,  $C_2 = -3.54708$ . Die Steuerung  $u^*(\cdot)$  hat auf dem Intervall  $[0, \tau_1]$  diese Darstellung, da für die festgelegten Parameterwerte  $\frac{1}{2\epsilon}(y(t)e^{\rho t} - 1) \in [0, u_{max}]$  für alle  $t \in [0, \tau_1]$  gilt.

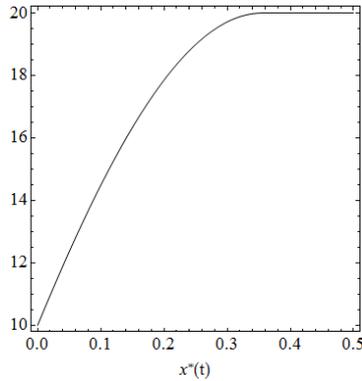


Abbildung 10.9: Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall komplexer Nullstellen: optimale Phasentrajektorie  $x^*(\cdot)$ .

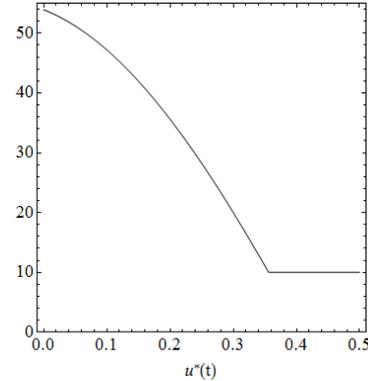


Abbildung 10.10: Optimale Erneuerung einer technischen Ressource, Fall komplexer Nullstellen: optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$ .

**zu der Voraussetzung (i)** Aus den Vorbetrachtungen geht hervor, dass diese Voraussetzung mit

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \tau_1 \\ 37 & , \quad t \geq \tau_1 \end{cases} \quad (10.76)$$

und  $y(\cdot)$  aus (10.71) erfüllt ist.

**zu der Voraussetzung (ii)** Zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Menge

$$\tilde{G}(t) = (G(t) \cap R(t)) = \begin{cases} [0, \hat{C}] \cap R(t) & , \quad t < \tau_1 \\ [x_0 e^{-\delta t}, \hat{C}] & , \quad t \geq \tau_1 \end{cases} \quad (10.77)$$

konvex und die Menge der Gradienten der aktiven Restriktionen ist nur auf  $[\tau_1, \infty)$  nichtleer, wobei sie aus einem eindimensionalen Vektor  $\nabla_{\xi} \vartheta(t, x^*(t)) = \nabla_{\xi}(\xi - \hat{C}) \Big|_{\xi=x^*(t)} = 1$  besteht. Die ‘‘constraint qualification‘‘ ist somit erfüllt.

**zu der Voraussetzung (iii)** Die optimale Steuerung wurde durch die punktweise Maximierung der Pontrjaginschen Funktion bezüglich  $v = u(t)$  ermittelt, wodurch diese Voraussetzung ebenfalls erfüllt ist.

<sup>6</sup>Der Zeitpunkt  $\tau_1$  ist der früheste Zeitpunkt, in dem die Phasentrajektorie tangential auf die betrachtete Beschränkung auftrifft und wird ebenfalls aus der Bedingung (10.72) ermittelt.

zu den Voraussetzungen **(iv)** und **(v)** Das Ziel ist, einen quadratischen dualen Ansatz  $S^*(t, \xi) = a(t) + S_1(t, \xi)$  zu finden, mit dessen Komponenten  $(a, y, Q)$  die Voraussetzungen **(iv)** und **(v)** erfüllt sind. Die  $y(\cdot)$ -Komponente ist schon ermittelt worden, es verbleibt also noch, eine passende Krümmungskomponente  $Q(\cdot)$  ausfindig zu machen.

Auf dem Intervall  $[0, \tau_1]$  gibt es keine aktiven Phasenrestriktionen, daher müsste die Definitheitsbedingung (9.57) für alle Richtungen  $\theta(t) = x(t) - x^*(t)$  erfüllt sein. Dies ist mit der Funktion

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= (0.2e^{-0.5t}(4.4088 \cdot 2.71828^{0.75t} \cos 4.4088t \\ &+ 0.75 \cdot 2.71828^{0.75t} \sin 4.4088t \\ &+ C(0.75 \cdot 2.71828^{0.75t} \cos 4.4088t - 4.4088 \cdot 2.71828^{0.75t} \sin 4.4088t)) \\ &\cdot ((2.71828^{0.75t}C \cos 4.4088t + 2.71828^{0.75t} \sin 4.4088t))^{-1} \end{aligned} \quad (10.78)$$

als Lösung der Riccatischen Differentialgleichung (10.67) für  $c = 2$  gewährleistet. Die Wahl der Integrationskonstanten  $C$  ist durch die Inklusion (10.65) bedingt, d.h. die Lösung  $Q_1(\cdot)$  darf im Intervall  $[0, \tau_1]$  keine Polstellen besitzen.

Auf dem Intervall  $[\tau_1, \infty)$  soll der Raum  $\mathbb{R}^1$  auf den Unterraum  $\{\theta(t) \in \mathbb{R}^1 \mid \nabla_{\xi} \vartheta(t, x^*(t))^T \theta(t) = 0, \lambda_2(t) > 0\} = \{0\}$  projiziert werden. Somit ist die Definitheitsbedingung (9.57) auf dem Intervall  $[\tau_1, \infty)$  automatisch erfüllt, beispielsweise mit der Funktion  $Q(t) = Q_0 e^{-\rho t}$ ,  $Q_0 = \text{const}$  und  $c = 1$ .<sup>7</sup>

Insgesamt wird die Gültigkeit der Definitheitsbedingung (9.57) mit der Funktion  $\hat{\nu}(\cdot)$ , festgelegt durch  $\hat{\nu}(t) \equiv 1$ , und der Krümmungskomponenten

$$Q(t) = \begin{cases} Q_1(t) & , t < \tau_1 \\ Q_0 e^{-\rho t} & , t \geq \tau_1 \end{cases} = \begin{cases} Q_1(t) & , t < \tau_1 \\ 0.0632836 e^{-\rho t} & , t \geq \tau_1 \end{cases} . \quad (10.79)$$

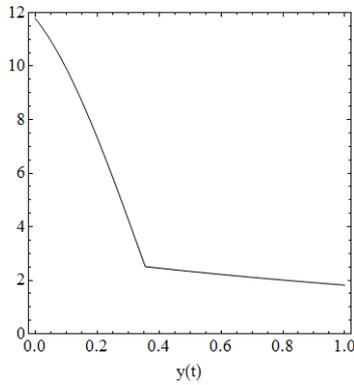
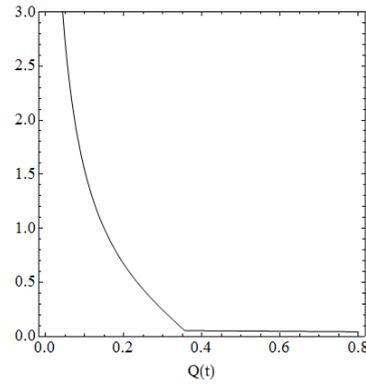
für alle  $t > 0$  erreicht. Die Freiheitsgrade, gegeben durch die Integrationskonstante  $C$  in (10.78) und die Konstante  $Q_0$ , wurden ausgenutzt, um erstens eine auf  $[0, \tau_1]$  stetige Lösung  $Q_1(\cdot)$  der Differentialgleichung (10.67) zu bekommen und zweitens die Stetigkeit der Funktion  $Q(\cdot)$  in  $t = \tau_1$  zu erzwingen.<sup>8</sup> Dafür setze man  $C = 0.1$  und erhalte

$$\begin{aligned} Q(\tau_1 - 0) - Q(\tau_1 + 0) &= Q_1(\tau_1) - Q_0 e^{-\rho \tau_1} \\ &= 0.0529669 - Q_0 e^{-\rho \tau_1} = 0, \end{aligned} \quad (10.80)$$

woraus  $Q_0 = 0.0632836$  folgt. Die resultierende Funktion  $Q(\cdot)$  ist auf der Abbildung 10.12 anschaulich dargestellt. Hierbei ist  $t = 0$  keine Polstelle von  $Q(\cdot)$ , sondern es gilt  $Q(0) = 8.9676$ . Da die Komponente  $y(\cdot)$  ebenfalls stetig ist, ist die Voraussetzung **(iv)** erfüllt. Die Wachstumsbedingung (9.60) ist dank  $\partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, x^*(t)) - \partial_{\xi\xi}^2 \mathcal{L}(t, \tilde{x}(t)) = 0$  mit den Konstanten  $k = 1$ ,  $\alpha = 1$  erfüllt, womit die Gültigkeit der Voraussetzung **(v)** komplett gezeigt ist.

<sup>7</sup>Beachte, dass  $Q(\cdot) \in W_{\infty}^{1,1}([\tau_r, \infty), e^{\rho t})$  gelten muss.

<sup>8</sup>Es wäre auch ausreichend eine passende Funktion  $Q(\cdot)$  anzugeben, die zwar unstetig in  $t = \tau_1$  ist, aber den Sprung von oben nach unten hat.

Abbildung 10.11: Die Komponente  $y(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$ .Abbildung 10.12: Die Krümmungskomponente  $Q(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$ .

Die bisher nicht berechnete Komponente  $a(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S^*$  wird nun wie im Fall reeller Nulstellen der charakteristischen Gleichung aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\Lambda(t, x^*(t)) = 0 \quad (10.81)$$

berechnet, die unter Berücksichtigung eines quadratischen Ansatzes  $S^*$  mit Komponenten  $(a, y, Q)$  folgende Gestalt besitzt

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) = r(t, x^*(t), u^*(t)) \tilde{\nu}(t). \quad (10.82)$$

Mit den Konstanten

$$A := \frac{1}{4\epsilon} C_1^2 - \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_1 - \frac{\beta}{2} C_2 \right)^2, \quad (10.83)$$

$$B := \frac{1}{4\epsilon} C_2^2 - \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_2 + \frac{\beta}{2} C_1 \right)^2, \quad (10.84)$$

$$C := \frac{C_1 C_2}{2\epsilon} - 2 \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_1 - \frac{\beta}{2} C_2 \right) \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_2 + \frac{\beta}{2} C_1 \right), \quad (10.85)$$

$$D := \frac{2 - 2(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)) - \epsilon(\rho + \delta)^2 - \epsilon^2\delta^2(\rho + \delta)^2}{4\epsilon(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))^2}, \quad (10.86)$$

$$E := \frac{C_2(2 - \epsilon\delta(\rho + \delta))}{2\epsilon(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} - \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_2 + \frac{\beta}{2} C_1 \right) \frac{\rho + \delta}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} - \frac{C_2}{2\epsilon}, \quad (10.87)$$

$$F := \frac{C_1(2 - \epsilon\delta(\rho + \delta))}{2\epsilon(1 - \epsilon\delta(\rho + \delta))} - \left( \frac{\rho + 2\delta}{4} C_1 - \frac{\beta}{2} C_2 \right) \frac{\rho + \delta}{1 - \epsilon\delta(\rho + \delta)} - \frac{C_1}{2\epsilon}, \quad (10.88)$$

$$G := \epsilon\delta^2\hat{C}^2 + 2\delta^2\hat{C} - \hat{C}^2 \quad (10.89)$$

hat die Differentialgleichung

$$\dot{a}(t) = \begin{cases} A \cos^2 \beta t + B \sin^2 \beta t + \frac{C}{2} \sin 2\beta t \\ \quad + D e^{-\rho t} + E e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + F e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t & , \quad t \leq \tau_1 \\ G e^{-\rho t} & , \quad t > \tau_1 \end{cases} \quad (10.90)$$

die Lösung

$$a(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}(t + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta t) + \frac{B}{2}(t - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta t) - \frac{C}{4\beta} \cos 2\beta t & , t \leq \tau_1 \\ -\frac{D}{\rho} e^{-\rho t} - \frac{2E}{4\beta^2 + \rho^2} (2\beta \cos \beta t + \rho \sin \beta t) e^{-\frac{\rho}{2}t} \\ + \frac{F}{4\beta^2 + \rho^2} (-2\rho \cos \beta t + 4 \sin \beta t) e^{-\frac{\rho}{2}t} + K_1 & \\ -\frac{G}{\rho} e^{-\rho t} & , t > \tau_1 \end{cases} \quad , \quad (10.91)$$

wobei sich die Konstante  $K_1$  aus der Stetigkeit von  $a(\cdot)$  in  $t = \tau_1$  ergibt:

$$\begin{aligned} K_1 &:= -\frac{A}{2}(\tau_1 + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta\tau_1) - \frac{B}{2}(\tau_1 - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta\tau_1) + \frac{C}{4\beta} \cos 2\beta\tau_1 \\ &+ \frac{D}{\rho} e^{-\rho\tau_1} + \frac{2E}{4\beta^2 + \rho^2} (2\beta \cos \beta\tau_1 + \rho \sin \beta\tau_1) e^{-\frac{\rho}{2}\tau_1} \\ &- \frac{F}{4\beta^2 + \rho^2} (-2\rho \cos \beta\tau_1 + 4 \sin \beta\tau_1) e^{-\frac{\rho}{2}\tau_1} - \frac{G}{\rho} e^{-\rho\tau_1}. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Die in (10.91) definierte Funktion ist ein Element des  $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ , so dass nun für  $S^* := a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t)) + 1/2(\xi - x^*(t))^T Q(t)(\xi - x^*(t))$  mit den Komponenten aus (10.91), (10.71) bzw. (10.79) alle Voraussetzungen des Satzes 39 für das Paar  $(x^*, u^*)$  aus (10.74), (10.75) erfüllt sind. Somit liefert der Prozess  $(x^*, u^*)$  nach Satz 39 eine starke, nicht unbedingt strikte, lokale Minimallösung zum Problem  $(P_\infty^L)$  im Fall der komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung.

Wir prüfen nun, ob mittels desselben Satzes auch die Striktheit der Minimalösung nachgewiesen werden kann. Vergewissern wir uns, dass  $\partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) \geq c(t) \equiv \text{const} > 0$  für alle  $t \in [\tau_1, \infty)$  gilt, indem wir mit Hilfe von (10.79) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \xi) &= \dot{Q}(t)e^{\rho t} + 2 - 2\delta e^{\rho t} Q(t) + \frac{1}{2\epsilon} e^{2\rho t} Q^2(t) \\ &= \frac{Q_0^2}{2\epsilon} - (\rho + 2\delta)Q_0 + 2 = 1.9251 > 0 \end{aligned} \quad (10.93)$$

berechnen. Für eine Aufstiegsrichtung  $\theta(t) = x^*(t) - x(t)$  der Funktion  $\Lambda(t, \xi)$  an der Stelle  $\xi = x(t)$  gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x^*(t)) - \Lambda(t, x(t)) &= \underbrace{\partial_\xi \Lambda(t, x(t))}_{\geq 0} (x^*(t) - x(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \tilde{x}(t)) (x^*(t) - x(t))^2 \geq 0 + \frac{1}{2} \partial_{\xi\xi}^2 \Lambda(t, \tilde{x}(t)) (x(t) - x^*(t))^2 \\ &= \frac{1.9251}{2} (x(t) - x^*(t))^2 =: c(t) (x(t) - x^*(t))^2, \end{aligned} \quad (10.94)$$

womit sich

$$\tilde{c}(t) := \frac{c(t) \hat{\nu}^2(t) \tilde{\nu}(t)}{\delta^2 \nu(t)} = \frac{0.962549}{\delta^2} > 0 \quad (10.95)$$

ableiten lässt. Da  $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \tilde{c}(t) = \frac{0.962549}{\delta^2} > 0$ , ist das Kandidatenpaar strikt stark lokal optimal für das Problem der Erneuerung einer technischen Ressource in einer

$C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{v})$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$  mit  $\delta > 0$ ,  $\hat{v}(t) \equiv 1$  infolge des Satzes 39.

**Interpretation der optimalen Lösung.** Die letzte Aussage bedeutet die globale Optimalität des Paares  $(x^*, u^*)$  für alle Probleme mit  $u_{max} \geq \bar{u} = u^*(0) = 53.9334$ .<sup>9</sup> Ist  $u_{max} < \bar{u}$ , so wird die obere Zustandsrestriktion nicht erreicht, sondern die Steuerung  $u(\cdot)$  wird zuerst die  $t$  – Achse schneiden. Somit lässt sich der optimale Prozess für  $u_{max} < \bar{u}$  bei festgewählten restlichen Parametern wie folgt formulieren:

$$x_2^*(t) = \begin{cases} \frac{\rho+2\delta}{4}C_1e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho+2\delta}{4}C_2e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t & , \quad t < \tau_2 \\ +\frac{\beta}{2}C_1e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t - \frac{\beta}{2}C_2e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + \frac{\rho+\delta}{2(1-\epsilon\delta(\rho+\delta))} & ; \quad (10.96) \\ x_1(\tau_2)e^{-\delta(t-\tau_2)} & , \quad t \geq \tau_2 \end{cases}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} \left( C_1e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{1}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} - 1 \right) & , \quad t < \tau_2 \\ 0 & , \quad t \geq \tau_2 \end{cases} , \quad (10.97)$$

auf den wir aber hier nicht näher eingehen möchten. Hierbei bezeichnet  $x_1(t)$  die Einschränkung der Funktion  $x_2^*(\cdot)$  auf das Intervall  $[0, \tau_2]$ . Der Zeitpunkt  $\tau_2$  wird durch

$$\tau_2 := \min \left\{ t > 0 \mid \frac{1}{2\epsilon} \left( C_1e^{\frac{\rho}{2}t} \cos \beta t + C_2e^{\frac{\rho}{2}t} \sin \beta t + \frac{\epsilon\delta(\rho+\delta)}{1-\epsilon\delta(\rho+\delta)} \right) = 0 \right\} \quad (10.98)$$

definiert.

Betrachtet man zu dem Zustands-Kozustandspaar  $(x^*, y)$  das Paar  $(x^*, ye^{\rho t})$ , so ergibt sich im Phasenraum des durch die Substitution  $\tilde{y} = ye^{\rho t}$  autonomisierten dynamischen Systems (10.26), also für das System

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) &= \frac{1}{2\epsilon}(\tilde{y}(t) - 1) - \delta x^*(t), \quad x^*(0) = x_0 \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= -2x^*(t) + \lambda_2(t) + (\rho + \delta)\tilde{y}(t), \end{cases} \quad (10.99)$$

das folgende Bild, siehe Abbildung 10.14. Man beachte, dass der Punkt  $(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{C}, (2\epsilon\delta\hat{C} + 1))$  ein Gleichgewicht des Systems (10.99) mit  $\lambda_2(\cdot)$  aus (10.76) ist, und die optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$  den optimalen Pfad  $x^*(\cdot)$  in diesen Punkt zum Zeitpunkt  $t = \tau_1$  überführt. Dieses Gleichgewicht ist zwar instabil, aber nach dem einmaligen Erreichen dessen bleibt die Zustandstrajektorie in diesem Punkt ruhen. Es erweist sich also als optimal, so viel in der Anfangsperiode  $[0, \tau_1]$  zu investieren, um das konstante Niveau  $x^*(t) = \hat{C}$  zu erreichen, und anschliessend ist es am vorteilhaftesten mit konstanter Rate  $u^*(t) = \delta\hat{C}$  Erneuerungsmaßnahmen zu ergreifen, um den Wert  $x^*(t)$  der technischen Ressource auf dem gleichen Stand zu halten. Der Funktionalwert  $J_\infty^L(x^*, u^*)$  beträgt für die gewählten Daten  $J_\infty^L(x^*, u^*) = -678.905$ .

<sup>9</sup>Je größer  $u_{max}$ , desto früher schneidet  $x^*(\cdot)$  die Gerade  $x(t) \equiv \hat{C}$ .

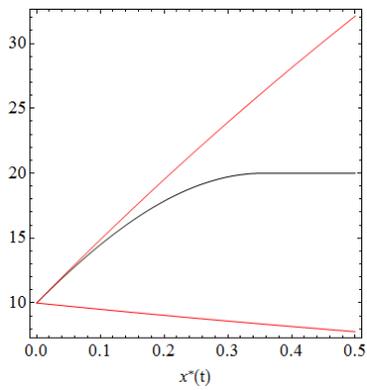


Abbildung 10.13: Optimale Phasentrajektorie  $x^*(\cdot)$  (schwarz) und natürliche Zustandsbeschränkungen (rot).

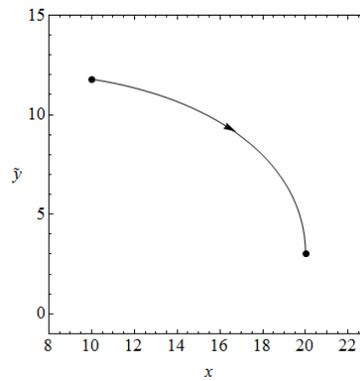


Abbildung 10.14: Optimales Zustands-Kozustandspaar  $(x^*, ye^{pt})$  im Phasenportrait des Systems (10.99).

# Kapitel 11

## Ein Ressourcen-Allokationsmodell

In dem vorliegenden Unterkapitel wird ein Ressourcen-Allokationsmodell mit unendlichem Zeithorizont betrachtet, dessen Formulierung auf endlichem Zeitintervall sich in der Arbeit von Osmolovskii und Maurer, MAURER&OSMOLOVSKII [70], S. 567, befindet. Dieses Modell ist sehr einfach, eignet sich aber sehr gut zur Illustration der Beziehungen zwischen den Steuerungsproblemen  $(P_T)$  und  $(P_\infty)$ . Die Lösung des ersten Problems kann nicht zu einer Lösung des zweiten fortgesetzt werden, denn die letztere existiert nicht. Desweiteren gehört keine der zum Problem  $(P_\infty)$  zulässigen Trajektorien zu einem ungewichteten Sobolevraum, was den Zugang über die Einführung der gewichteten Funktionenräume rechtfertigt. Zuerst wird die Lösung zum Problem auf einem endlichen Zeitintervall ermittelt, anschliessend gehen wir zu einem Ressourcen-Allokationsmodell auf dem unendlichen Intervall über und zeigen aber, dass dieses keine optimale Lösung besitzt. Unser Ziel ist, die Modellierung so anzupassen, dass das angepasste Steuerungsproblem lösbar wird. Durch die Einführung einer zusätzlichen reinen Zustandsbeschränkung kommen wir zu einem Problem, dessen Lösung eine bang-singuläre Struktur hat, was über die entwickelte Dualitätstheorie und hinreichende Optimalitätsbedingungen gezeigt werden kann, vgl. LYKINA ET AL. [63].

### 11.1 Ein Ressourcen-Allokationsproblem mit endlichem Zeithorizont und seine Lösung durch das Maximumprinzip

Untersucht wird zunächst ein Modell der Ressourcen-Allokation auf einem fixierten endlichen Zeitintervall  $[0, T]$ , welches wie folgt formuliert wird:

$$J_T(x, u) = \int_0^T e^{-\rho t} x(t)(1 - u(t)) \longrightarrow \max! \quad (11.1)$$

bzgl. aller Paare

$$(x, u) \in W_2^{1,n}[0, T] \times L_2^m[0, T], \quad (11.2)$$

die den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t); \quad (11.3)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (11.4)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (11.5)$$

genügen. In dieser Formulierung ist die Änderungsrate des Kapitalstockes  $x(t)$  direkt proportional zu dem Investitionsanteil  $u(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ , welcher hier die Rolle einer Steuervariable übernimmt. Das Problem (11.1) – (11.5) wird mit  $(P_T)$  bezeichnet.

Wir werten die notwendigen Optimalitätsbedingungen auf dem Intervall  $[0, T]$  aus, die durch das Pontrjaginsches Maximumprinzip gegeben sind, und anschliessend entscheiden, ob auf diese Weise errechneter Lösungskandidat bis zu einer Lösung des Ressourcen-Allokationsmodells mit unendlichem Zeithorizont fortgesetzt werden kann.

Liegt der Normalfall  $\lambda_0 = 1$  vor, so ist die Pontrjaginsche Funktion durch

$$\begin{aligned} H(t, \xi, v, \eta) &= \xi(1 - v) + e^{\rho t} \eta \xi v \\ &= \xi + v \xi (\eta e^{\rho t} - 1) \end{aligned} \quad (11.6)$$

gegeben. Ihre Maximierung in der Variable  $v$  ergibt die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \max_{v \in U} H(t, \xi, v, \eta) = \begin{cases} \eta \xi e^{\rho t} & , \quad \xi (\eta e^{\rho t} - 1) > 0 \\ \xi & , \quad \xi (\eta e^{\rho t} - 1) = 0 \\ \xi & , \quad \xi (\eta e^{\rho t} - 1) < 0 \end{cases} \quad (11.7)$$

mit entsprechender bang-singular-bang Struktur der optimalen Steuerung  $u^*(t)$ :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1) > 0 \\ \alpha \in [0, 1] & , \quad x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1) = 0 \\ 0 & , \quad x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1) < 0, \end{cases} \quad (11.8)$$

wobei  $\alpha$  ein beliebiges Element aus  $[0, 1]$  ist. Infolge der Konkavität der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(t, \cdot, y(t))$  für alle  $t \in [0, T]$  sind die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus dem Maximumprinzip gleichzeitig auch hinreichend, vgl. beispielsweise FEICHTINGER&HARTL [35], Satz 2.2., S. 36. Aus diesen Überlegungen und um die Bedingungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips, Theorem 1, IOFFE& TICHOMIROV [45], S. 127 ff., zu verifizieren, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Aus der Zustandsgleichung (11.3) und der Anfangsbedingung (11.4) kann man auf die Positivität des Zustandes, also auf  $x^*(t) > 0$  für alle  $t \in [0, T]$  schliessen. Aus diesem Grund wird die Funktion  $y(\cdot)e^{\rho \cdot} - 1$  statt der Schaltfunktion  $Sc(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $Sc(t) = x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1)$  untersucht. Wir unterscheiden 3 Fälle.

**Fall 1:**

$$y(t) > e^{-\rho t} \quad (11.9)$$

In diesem Fall besitzt das kanonische System

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) &= x^*(t) \\ \dot{y}(t) &= -\mathcal{H}_\xi(t)e^{-\rho t} = -y(t) \end{cases} \quad (11.10)$$

die Lösung

$$x^*(t) = Ce^t, \quad y(t) = De^{-t}, \quad (11.11)$$

mit reellen Konstanten  $C$  und  $D$ .

**Fall 2:**

$$y(t) = e^{-\rho t} \quad (11.12)$$

Ist diese Bedingung auf einem Intervall erfüllt, so erhält man einerseits die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -((1 - u^*(t))e^{-\rho t} + y(t)u^*(t)) \quad (11.13)$$

für die Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  und andererseits ist  $y(t) = e^{-\rho t}$ , was zu der Gleichung

$$-\rho e^{-\rho t} = -e^{-\rho t} \quad (11.14)$$

und somit zu  $\rho = 1$  führt. Dieser Widerspruch zu der Voraussetzung  $0 < \rho < 1$  deutet darauf hin, dass das vorliegende Problem keine singuläre Lösungstücke besitzt.

**Fall 3:**

$$y(t) < e^{-\rho t} \quad (11.15)$$

Das kanonische System hat die Gestalt

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -e^{-\rho t} \end{cases}, \quad (11.16)$$

und seine Lösung ist durch

$$x^*(t) = E, \quad y(t) = \frac{1}{\rho}e^{-\rho t} + F \quad (11.17)$$

gegeben, wobei die Konstante  $F$  aus der Transversalitätsbedingung

$$y(T) = 0 \quad (11.18)$$

bestimmt werden kann.

Zusammenfassend schlussfolgern wir, dass der Prozess  $(x^*, u^*, y)$ , definiert als

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in (0, \tau) \\ 0 & , \quad t \in [\tau, T]; \end{cases} \quad (11.19)$$

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t & , \quad t \in (0, \tau) \\ x_0 e^\tau & , \quad t \in [\tau, T]; \end{cases} \quad (11.20)$$

$$y(t) = \begin{cases} De^{-t} & , \quad t \in (0, \tau) \\ \frac{1}{\rho}(e^{-\rho t} - e^{-\rho T}) & , \quad t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (11.21)$$

mit  $D = e^{(1-\rho)\tau}$  für Aufgaben mit einem hinreichend großen Endzeitpunkt  $T$  global optimal ist. Die Konstante  $D$  wurde dabei aus der Schaltbedingung  $x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1) = 0$  berechnet. Der Schaltpunkt  $\tau$  sollte so gewählt werden, dass die adjungierte Funktion  $y(\cdot)$  in diesem Punkt stetig bleibt. Dadurch gelangt man zu der Bedingung

$$e^{(1-\rho)\tau} e^{-\tau} = \frac{1}{\rho}(e^{-\rho\tau} - e^{-\rho T}), \quad (11.22)$$

welche für hinreichend große  $T > 0$  den Schaltpunkt

$$\tau = T + \frac{\ln(1-\rho)}{\rho} > 0 \quad (11.23)$$

liefert.

## 11.2 Das Ressourcen-Allokationsmodell mit unendlichem Zeithorizont

Die Fortsetzung des bisher betrachteten Problems ( $P_T$ ) der Ressourcen-Allokation auf ein unbeschränktes Intervall  $[0, \infty)$  liefert das folgende Problem der optimalen Steuerung:

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty e^{-\rho t} x(t)(1 - u(t)) dt \longrightarrow \max! \quad (11.24)$$

bezüglich alle Paare

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+) \times L_2^1(\mathbb{R}^+), \quad (11.25)$$

die die Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = x(t) \cdot u(t); \quad (11.26)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (11.27)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (11.28)$$

erfüllen. Hierbei genügt die Diskontrate  $\rho$  der Ungleichung  $0 < \rho < 1$ . Das Problem (11.24) – (11.28) wird in diesem Kapitel mit ( $P_\infty$ ) bezeichnet. Die Notation  $L$ - $\int$  deutet auf die Interpretation des Integrals im Lebesgueschen Sinne hin.

### Diskussion des Steuerungsproblems ( $P_\infty$ )

Die Hauptfrage, die in diesem Unterkapitel untersucht wird, ist, was geschieht, wenn man den Zeithorizont  $T$  gegen unendlich laufen lässt.

**Zustands- und Steuerungsraum.** Die erste Frage betrifft die Setzung der Funktionenräume für die zulässigen Paare. Repräsentiert die Forderung der analytischen Güte (11.25) eine gut geeignete Wahl der Räume, insbesondere des Zustandsraumes?

Da wegen der Steuerbeschränkung (11.28) und der Anfangsbedingung (11.27) für jede zulässige Zustandsfunktion  $x(\cdot)$  die Ungleichung  $x(t) \geq x_0 > 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$  gilt, bemerken wir ebenso, dass für jedes  $p \neq \infty$  die Aussage  $x(\cdot) \notin W_p^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  zutrifft. Dies bedeutet, dass der zulässige Bereich des Problems ( $\mathbf{P}_\infty$ ) leer ist. Dennoch, bringt man eine Gewichtsfunktion  $\nu(t) = e^{-\rho t}$  in die Definitionen der Funktionenräume ein, so ist es möglich, den Zustandsraum  $W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  zu einem gewichteten Sobolevraum  $W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  und den Funktionenraum  $L_2^1(\mathbb{R}^+)$  der Steuerungsfunktionen zu einem gewichteten Lebesgueraum  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  zu erweitern, wodurch ein nichtleerer zulässiger Bereich erzeugt wird, da mindestens das Paar  $(x(t), u(t)) \equiv (x_0, 0)$  zulässig wird.

**Existenz optimaler Lösungen.** Unser nächstes Anliegen ist die Untersuchung der Frage nach der Existenz optimaler Lösungen zum Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont (11.24), (11.26) – (11.28) zusammen mit der Nebenbedingung

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \times L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}). \quad (11.29)$$

Zu diesem Zweck sei eine Folge  $\{u_\alpha\}$  der Steuerungsfunktionen mit

$$u_\alpha(t) = \alpha = \text{const} \in (0, \rho), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (11.30)$$

definiert. Mit den entsprechenden Zustandstrajektorien, welche durch

$$x_\alpha(t) = x_0 e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (11.31)$$

gegeben sind, berechnen wir die Funktionalwerte  $J_\infty^L(x_\alpha, u_\alpha)$ :

$$\begin{aligned} J_\infty^L(x_\alpha, u_\alpha) &= L \int_0^\infty x_0 e^{\alpha t} (1 - \alpha) e^{-\rho t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha)x_0}{\alpha - \rho} e^{(\alpha - \rho)t} \Big|_0^T = \frac{1 - \alpha}{\rho - \alpha} x_0. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Die Folge der Funktionalwerte  $J_\infty^L(x_\alpha, u_\alpha)$  strebt offenbar gegen unendlich, wenn  $\alpha \rightarrow \rho$ . Diese Tatsache beweist, dass zum Problem (11.24), (11.26) – (11.29) keine optimale Lösung im Sinne der Definition 10.(iii) existiert.

**Unbeschränktheit des zulässigen Bereiches.** Die Menge aller zulässigen Paare zu diesem Problem ist nicht beschränkt und folglich ist diese weder kompakt noch schwach kompakt. In der Tat, betrachtet man eine Folge

$$x_\alpha(t) = x_0 e^{\alpha t}, \quad \alpha \in [0, \rho/p] \quad (11.33)$$

und läßt  $\alpha$  gegen  $\frac{\rho}{p}$  laufen, so erhält man

$$\|x\|_{L^p_p(\mathbb{R}^+, \nu)}^p = \int_0^\infty x_0^p e^{(\alpha p - \rho)t} dt = \frac{x_0^p}{\rho - \alpha p} \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow \rho/p - 0. \quad (11.34)$$

Es sei auch bemerkt, dass es keine uniforme Majorante  $\beta(\cdot) \in L^1_p(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  für die Zustandstrajektorien des Ressourcen-Allokationsmodells gibt, d.h. die Bedingung

$$|x(t)| \leq \beta(t), \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \quad (11.35)$$

die zur Sicherung der schwachen Unterhalbstetigkeit der Funktionale sowie in dem Existenzsatz zum Einsatz kam, nicht für alle Zustandstrajektorien gleichzeitig erfüllt ist.

**Mögliche Erweiterungen des Modells.** Im letzten Punkt der gegenwärtigen Diskussion befassen wir uns mit den Verbesserungs- bzw. Anpassungsmöglichkeiten des Modells. Wie kann also das Ressourcen-Allokationsmodell modifiziert werden, damit das neue Modell eine optimale Lösung auf dem unendlichen Intervall besitzt? Mögliche Erweiterungen in der Modellierung wären die folgenden:

- (a) Einführung einer zusätzlichen reinen Zustandsbeschränkung, die mittels einer Gewichtsfunktion das Wachstum des Kapitals beschränkt. Dies würde gleichzeitig die Beschränktheit des zulässigen Bereiches in der Norm – Topologie erzwingen sowie zur Gewährleistung der schwachen Unterhalbstetigkeit des Zielfunktionals auf diesem Bereich beitragen. Das erhaltene Modell ist auch ökonomisch sinnvoll.
- (b) Betrachtung einer nichtlinearen Nutzenfunktion im Zielfunktional, beispielsweise  $N(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $N(u(t)) = \ln(u(t))$  oder ähnliches, vgl. KORN&KORN [55], S. 238 ff.
- (c) Erweist sich der gewählte Zustandsraum als zu groß, so kann dieses Problem durch die Wahl eines einschränkenden Zustandsraumes gelöst werden.
- (d) Modifizierung der Zustandsgleichung durch das Einbringen eines quadratischen Terms, d.h. zu lösen wäre die logistische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t) - \beta x^2(t) \quad (11.36)$$

mit einer vorgegebenen Konstanten  $\beta > 0$ .

- (e) Einführung einer von der Zeit  $t$  abhängigen Diskontrate  $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$ .

## 11.3 Ein angepasstes Ressourcen-Allokationsmodell mit unendlichem Zeithorizont

Wir verfolgen die unter Punkt (a) erwähnte Modellanpassungsvariante und modifizieren das Problem  $(P_\infty)$ , indem wir eine zusätzliche Zustandsbeschränkung hinzufügen und einen gewichteten Sobolev- sowie gewichteten Lebesgueraum als den Zustands- bzw. den Steuerungsraum wählen. Dabei wird ein Minimierungsproblem statt einem Maximierungsproblem betrachtet:

$$L - \int_0^\infty e^{-\rho t} x(t)(u(t) - 1) dt \longrightarrow \min! \quad (11.37)$$

bezüglich aller Paare

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{-\alpha^* t}) \times L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\alpha^* t}), \quad (11.38)$$

die die Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = x(t) \cdot u(t); \quad (11.39)$$

$$x(t) \leq C e^{\hat{\alpha} t}, \quad \forall t > 0, \quad C \geq x_0, \quad 0 < \hat{\alpha} < \alpha^* < \rho; \quad (11.40)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (11.41)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (11.42)$$

erfüllen. Das angepasste Steuerungsproblem (11.37) – (11.42) bezeichnen wir mit  $(P_\infty^A)$ . Das so formulierte Steuerungsproblem ist ein Problem der Klasse  $(P_\infty^L)$ , das im Unterkapitel 2.2 formuliert wurde und in dieser Arbeit durchgehend betrachtet wird. Dies wird deutlich, wenn man die Funktion  $\beta(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß  $\beta(t) := e^{\hat{\alpha} t}$  mit  $\hat{\alpha} < \alpha^* < \rho$  definiert, denn es gilt  $\beta(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\alpha^* t})$ .

### 11.3.1 Existenz einer optimalen Lösung zum angepassten Ressourcen-Allokationsproblem

Wir verifizieren sukzessive alle Voraussetzungen des Existenzsatzes 28 für das angepasste Ressourcen-Allokationsmodell.

- (1) Die Voraussetzung 5 ist erfüllt, denn die Funktion  $r(t, \xi, v) = \xi(v - 1)$  im Integranden ist linear in  $v$  und stetig in allen Argumenten.
- (2) Laut Voraussetzung 9 muss es eine Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  sowie eine positive Konstante  $B_1$  geben, so dass für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U$  und  $p = 2$  die Wachstumsbedingung

$$|\xi(v - 1)| \leq A_1(t) e^{\rho t} + B_1(|\xi|^2 + |v|^2) e^{(\rho - \alpha^*) t} \quad (11.43)$$

gilt. Dies ist erfüllt mit  $A_1(t) = e^{-\rho t}$  und  $B_1 = 2$  aufgrund der Abschätzung

$$|\xi(v - 1)| \leq 2|\xi| \leq 2(1 + |\xi|^2) \leq 2e^{-\rho t} e^{\rho t} + 2(|\xi|^2 + |v|^2) e^{(\rho - \alpha^*) t} \quad (11.44)$$

und unter Berücksichtigung der Steuerungsbeschränkung (11.42).

- (3) Die Voraussetzung 10 ist erfüllt mit  $A_2(t) \equiv 0$ ,  $B_2 = 1$  für  $p = q = 2$ , denn es gilt die Ungleichung

$$|\xi| \leq 0 \cdot e^{\frac{\alpha^*}{2}t} e^{(\rho - \alpha^*)t} + 1 \cdot (|\xi| + |v|) e^{(\rho - \alpha^*)t} \quad (11.45)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U$ .

- (4) Wir nehmen uns nun die Voraussetzung 11 vor. Wir setzen  $A(t, x(t)) \equiv 0$ ,  $B(t, x(t)) = x(t)$  und überprüfen, ob die Wachstumsbedingungen (6.5) und (6.6) erfüllt sind. Die erste ist erfüllt mit  $p = q = 2$ ,  $B_{11}(t, \xi) = \xi$ , der Funktion  $A_{311}(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+)$ , definiert durch  $A_{311}(t) \equiv 0$ , und einer Konstanten  $B_{311} := 1$ , d.h. es gilt die Ungleichung

$$|\xi| \leq 0 \cdot e^{\frac{\alpha^*}{2}t} + 1 \cdot |\xi|. \quad (11.46)$$

Die Wachstumsbedingung (6.6) ist ebenso richtig, wenn man die Konstanten  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ; wie folgt setzt  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 0$ .

- (5) Der zulässige Bereich ist nicht leer, denn beispielsweise ist  $(x, u) = (x_0 e^{\alpha t}, \alpha)$  mit  $\alpha \in [0, \rho)$  ein zulässiges Paar.
- (6) Die Lipschitzstetigkeit der Funktion  $B(t, \cdot)$  sowie die Konvexität und Abgeschlossenheit des Steuerbereiches  $U = [0, 1]$  liegen vor.

Somit sind alle Voraussetzungen des Existenzsatzes 28 erfüllt, was die Existenz einer im Sinne der Definition 10.(iii) optimalen Lösung zum Problem  $(P_\infty^A)$  erzwingt.

### 11.3.2 Optimale Lösung mittels hinreichender Optimalitätsbedingungen

Für das Steuerungsproblem  $(P_\infty^A)$  zeigen wir, dass die Steuerung

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \leq \tau \\ \hat{\alpha} & , \quad t > \tau \end{cases} \quad (11.47)$$

mit einem noch nicht bekannten Schaltpunkt  $\tau > 0$  global optimal im Sinne der Definition 10.(iii) ist. Die entsprechende Zustandsfunktion  $x^*(\cdot)$  ist durch

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t & , \quad t \leq \tau \\ x_0 e^{(1-\hat{\alpha})\tau} e^{\hat{\alpha}t} & , \quad t > \tau \end{cases} \quad (11.48)$$

gegeben. Diese Funktion genügt der reinen Zustandsbeschränkung (11.40), falls im Schaltpunkt  $\tau$  die Gleichung  $x_0 e^\tau = C e^{\hat{\alpha}\tau}$  gilt, was  $\tau = \frac{1}{1-\hat{\alpha}} \ln\left(\frac{C}{x_0}\right) \geq 0$  liefert. Aufgrund der Linearität des Problems in der Platzhaltervariablen  $\xi = x(t)$  wird nach einem linearen dualen Ansatz  $S^*(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t))$  mit  $S \in Y_{\infty,2}^G$ , der zulässig in der dualen Aufgabe  $(D_\infty^G)$  für die Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = [0, \tau) \cup [\tau, \infty)$  ist und darüber hinaus die Bedingungen (8.11), (8.12) und (8.13) des verallgemeinerten Maximumprinzips, vgl. Korollar 3, für das Paar  $(x^*, u^*)$  erfüllt. Dies würde die globale

Optimalität des Prozesses  $(x^*, u^*)$  im Sinne des Kriteriums L2 sichern.  
Die Hamiltonfunktion für das Problem  $(P_\infty^A)$  bestimmt man als

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \max_{v \in U} H(t, \xi, v, \eta) = \begin{cases} \eta \xi e^{\rho t} & , \quad \xi(\eta e^{\rho t} - 1) > 0 \\ \xi & , \quad \xi(\eta e^{\rho t} - 1) = 0 \\ \xi & , \quad \xi(\eta e^{\rho t} - 1) < 0. \end{cases} \quad (11.49)$$

Wir betrachten für  $t \in (\mathbb{R}^+ \setminus \tau)$  die parametrische Optimierungsaufgabe der Maximierung des Defektes der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (8.12):

$$(P_t) : \quad \Lambda(t, \xi) := \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \rightarrow \max! \quad (11.50)$$

bzgl.  $\xi \in \{\xi \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq \xi \leq C e^{\hat{\alpha} t}\}$

und versuchen einen linearen dualen Ansatz  $S$  zu finden, der die starke Dualität der Aufgaben  $(P_\infty^A)$  und  $(D_\infty^G)$  liefert, ohne die Erreichbarkeitsmenge  $R(t)$  explizit zu berücksichtigen, vgl. die Bemerkung 35. Der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  aus der letzten Formel kann in der Form

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t)) \\ &\quad + \mathcal{H}(t, \xi, y(t)) \end{aligned} \quad (11.51)$$

aufgeschrieben werden, wobei die Komponente  $a(\cdot)$  des dualen Ansatzes  $S(t, \xi)$  aus der Hamilton-Jacobischen Gleichung  $\Lambda(t, x^*(t)) = 0$  bestimmt wird. Auf diese Weise erhalten wir die Differentialgleichung zur Bestimmung von  $a(\cdot)$ :

$$\dot{a}(t) = y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t). \quad (11.52)$$

Nach der Einführung der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(t, \xi)$  mit

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \lambda_1(t)(x_0 - \xi) + \lambda_2(t)(\xi - C e^{\hat{\alpha} t}) \quad (11.53)$$

werten wir die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen<sup>1</sup> für das Optimierungsproblem (11.50) aus:

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -e^{\rho t} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t), 1) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 0; \quad (11.54)$$

$$\lambda_1(t)(x_0 - x^*(t)) = 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0; \quad (11.55)$$

$$\lambda_2(t)(x^*(t) - C e^{\hat{\alpha} t}) = 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0. \quad (11.56)$$

Da  $u^*(t) = 1$  für alle  $t \in (0, \tau)$  gilt, gelten ebenfalls die strikten Ungleichungen  $x_0 < x^*(t) < C e^{\hat{\alpha} t}$  auf dem ganzen Intervall  $(0, \tau)$ , was zusammen mit den Komplementaritätsbedingungen (11.55), (11.56) zum Schluss führt, dass die beiden Lagrange Multiplikatoren  $\lambda_1(\cdot)$  und  $\lambda_2(\cdot)$  Null sein müssen. Also erhalten wir  $\lambda_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$  auf  $(0, \tau)$ . Die Bedingung (11.54) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\dot{y}(t) = -y(t), \quad t \in (0, \tau) \quad (11.57)$$

<sup>1</sup>Vgl. Satz 43 in Anhang B.

und, folglich ist  $y(t) = De^{-t}$  mit einer Konstanten  $D \in \mathbb{R}$ . Aus der Maximumbedingung des Pontrjaginschen Maximumprinzips, nämlich aus der Ungleichung  $y(t) = De^{-t} > e^{-\rho t} \forall t \in (0, \tau)$  wird eine passende Konstante  $D$  gewählt:

$$D := e^{(1-\rho)\tau}. \quad (11.58)$$

Die singuläre Steuerung  $u^*(t) \equiv \hat{\alpha} \in (0, 1)$  auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  verleiht der Hamiltonfunktion die Gestalt  $\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \xi$  und für die Multiplikatorfunktion  $\lambda_1(\cdot)$  gilt  $\lambda_1(t) = 0$ ,  $t \in (\tau, \infty)$ , denn die entsprechende Zustandsbeschränkung  $x_0 \leq x(t)$  bleibt auf diesem Intervall inaktiv. Für alle  $t \in (\tau, \infty)$  schreiben wir die Bedingung (11.54) in der Form

$$\dot{y}(t) = -e^{-\rho t} + \lambda_2(t)e^{-\rho t} \quad (11.59)$$

um. Berücksichtigt man die Positivität von  $x^*(t)$  und den Fakt, dass die Schaltfunktion  $Sc(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $Sc(t) = x^*(t)(y(t)e^{\rho t} - 1)$  auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  identisch Null sein müsste, so gelangt man zu einer Gleichung bezüglich der Multiplikatorfunktion  $\lambda_2(\cdot)$ , nämlich zu

$$-\rho e^{-\rho t} = -e^{-\rho t} + \lambda_2(t)e^{-\rho t}, \quad (11.60)$$

deren Lösung  $\lambda_2(t) = (1 - \rho)$  strikt positiv ist. Die Stetigkeit der adjungierten Funktion  $y(\cdot)$  mit

$$y(t) = \begin{cases} e^{(1-\rho)\tau}e^{-t} & , \quad t \leq \tau \\ e^{-\rho t} & , \quad t > \tau \end{cases} \quad (11.61)$$

im Punkt  $t = \tau$  deutet darauf hin, dass die Randbedingung (8.13) des verallgemeinerten Maximumprinzips, also

$$\inf_{\beta \in \Gamma} \{S^*(\tau - 0, \beta) - S^*(\tau + 0, \beta)\} = S^*(\tau - 0, x^*(\tau)) - S^*(\tau + 0, x^*(\tau)); \quad (11.62)$$

$$\Gamma = \{\beta \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq \beta \leq Ce^{\hat{\alpha}\tau}\}$$

durch das Triple  $(x^*(t), u^*(t), S^*(t, x^*(t)))$  erfüllt wird, denn die beiden Seiten der Gleichung sind in diesem Fall gleich Null. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Erreichbarkeitsmenge  $R(\tau)$  mit der Menge  $G(\tau) = \Gamma$  übereinstimmt. Zur vollständigen Angabe des linearen Ansatzes  $S^*$  berechnen wir noch die Funktion  $a(\cdot)$  aus der Differentialgleichung (11.52) und überprüfen, ob diese zu dem Sobolevraum  $W_1^1[\tau, \infty)$  gehört und ob sie von der Klasse  $C^0[0, \tau] \cap C^0[\tau, \infty) \cap C^1(0, \tau) \cap C^1(\tau, \infty)$  ist. In der Tat, die Funktion  $a(\cdot)$ , gegeben durch

$$a(t) = \begin{cases} x_0 \frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\alpha}-\rho} e^{(1-\rho)\tau} & , \quad t < \tau \\ x_0 \frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\alpha}-\rho} e^{(1-\hat{\alpha})\tau} e^{(\hat{\alpha}-\rho)t} & , \quad t > \tau \end{cases} \quad (11.63)$$

ist offensichtlich ein Element des Funktionenraumes  $W_1^1[\tau, \infty)$  und besitzt die gewünschte Glätte. Schliesslich gilt es noch zu überprüfen, ob die Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  in dem gewichteten Sobolevraum  $W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{\alpha^* t})$  liegt. Dies kann positiv

beantwortet werden, denn

$$\begin{aligned} \|y\|_{L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\alpha^* t})}^2 &= \int_0^\infty |y(t)|^2 e^{\alpha^* t} dt \\ &= e^{2(1-\rho)\tau} \int_0^\tau e^{-(2-\alpha^*)t} dt + \int_\tau^\infty e^{-(2\rho-\alpha^*)t} dt < \infty. \end{aligned} \quad (11.64)$$

Analog erfolgt der Nachweis der Ungleichung  $\|\dot{y}\|_{L_2(\mathbb{R}^+, e^{\alpha^* t})}^2 < \infty$ , was zusammen mit der vorherigen Abschätzung die Behauptung liefert.

Für den berechneten linearen dualen Ansatz  $S^*$  zeigen wir nun seine Zulässigkeit in der dualen Aufgabe, nämlich die Gültigkeit der Hamilton-Jacobischen Ungleichung  $\Lambda(t, \xi) \leq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  und  $\xi \in [x_0, Ce^{\hat{\alpha}t}]$ . Der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  ist offenbar eine in  $\xi$  lineare Funktion und nimmt seine Extremwerte am Rande des Definitionsbereiches an. Daher untersuchen wir für feste  $t$  die Ableitung  $\partial_\xi \Lambda(t, \xi)$ . Sei zunächst  $t \in [0, \tau]$ , dann gilt

$$\partial_\xi \Lambda(t, \xi) = (\dot{y}(t) + y(t))e^{\rho t} = (-e^{(1-\rho)\tau} e^{-t} + e^{(1-\rho)\tau} e^{-t})e^{\rho t} = 0, \quad (11.65)$$

woraus die Identität  $\Lambda(t, \xi) \equiv 0$  für alle  $(t, \xi) \in [0, \tau] \times [x_0, Ce^{\hat{\alpha}t}]$  folgt. Gilt dagegen  $t \in (\tau, \infty)$ , so erhält man

$$\partial_\xi \Lambda(t, \xi) = \dot{y}(t)e^{\rho t} + 1 = -\rho e^{-\rho t} e^{\rho t} + 1 = 1 - \rho > 0, \quad (11.66)$$

woraus die Gültigkeit der Ungleichung  $\Lambda(t, \xi) \leq 0$  auch für  $t \in (\tau, \infty)$  folgt, denn man beachte  $x^*(t) = Ce^{\hat{\alpha}t}$  und  $\Lambda(t, x^*(t)) = 0$ . Insgesamt ist die Zulässigkeit des errechneten  $S^*$  gezeigt.<sup>2</sup>

Auf diese Weise wurde die Gültigkeit aller Bedingungen des Korollars 3 nachgewiesen, woraus wir schliessen können, dass der Prozess  $(x^*, u^*)$  ein globaler Minimierer zum Steuerungsproblem  $(P_\infty^A)$  im Sinne des Optimalitätskriteriums L2 ist. Der Beweis der Optimalität ist somit vollständig. Auf den Abbildungen 11.1 und 11.2 ist die optimale Lösung dargestellt.

Um die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenzufassen, behaupten wir durch das Verwenden der gewichteten Räume und das Hinzufügen einer zusätzlichen Phasenbeschränkung zur Kontrolle des Zustandswachstums in der Modellanpassung insofern erfolgreich zu sein, dass die neu entstandene Steuerungsaufgabe lösbar wurde im Gegensatz zu der Ausgangsaufgabe. Ferner hat das Dualitätskonzept von Klötzler es ermöglicht, über die hinreichenden Optimalitätsbedingungen sogar die globale Optimalität des Prozesses  $(x^*, u^*)$  mit der Steuerung (11.47) nachzuweisen. Aussagen über die Eindeutigkeit dieser optimalen Steuerung sowie die Striktheit des Minimums und Isoliertheit der Extremaltrajektorie wurden hier jedoch nicht getroffen. Die Optimalität der ermittelten Lösung im Sinne des Optimalitätskriteriums L1,

<sup>2</sup>Die Zulässigkeit des Ansatzes  $S^*$  folgt sofort, wenn man bedenkt, dass die betrachtete parametrische Optimierungsaufgabe linear in  $\xi$  ist und die notwendige Optimalitätsbedingung, gegeben durch die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, somit auch hinreichend ist.

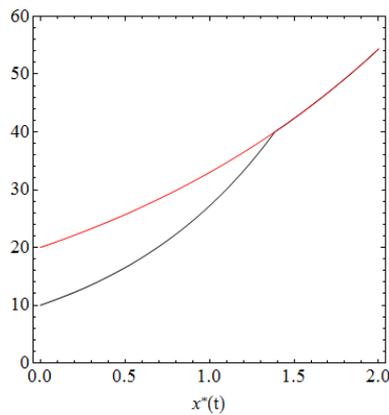


Abbildung 11.1: Das angepasste Ressourcen-Allokationsmodell: optimale Phasentrajektorie  $x^*(\cdot)$  (schwarz) und die Funktion  $Ce^{\hat{\alpha}t}$  (rot) für  $C = 20$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $x_0 = 10$ ,  $\hat{\alpha} = 0.5$ ,  $\tau = 1.38629$ .

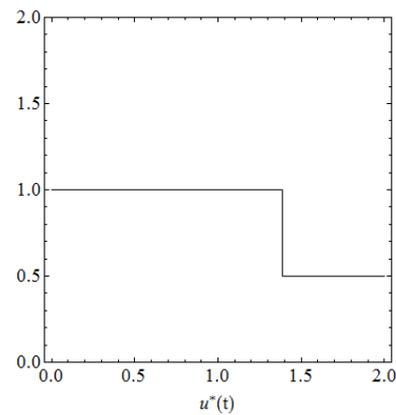


Abbildung 11.2: Das angepasste Ressourcen-Allokationsmodell: optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$  für  $C = 20$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $x_0 = 10$ ,  $\hat{\alpha} = 0.5$ ,  $\tau = 1.38629$ .

also die Überholungsoptimalität, ist nicht gegeben, wie in KIRCHEIS [50] bestätigt wurde. Wie man sieht, beeinflusst die Wahl der künstlich auferlegten Zustandsbeschränkung die optimale Lösung in großem Maße. Daher sollte diese sehr sorgfältig abgewogen sein und den Bedürfnissen des zu modellierenden Prozesses entsprechen.

# Kapitel 12

## Das lineare Ramsey Modell

### 12.1 Das lineare Ramsey Modell mit endlichem Zeithorizont

Wir betrachten das gut bekannte lineare Ramsey Modell, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35], S. 201 ff., mit einem endlichen fixierten Horizont  $T < \infty$ , das schon im Unterkapitel 2.3.1 vorgestellt wurde und wie folgt formuliert wird

$$J_T(x, u) = \int_0^T e^{-\rho t} u(t) dt \longrightarrow \max! \quad (12.1)$$

bezüglich aller Paare

$$(x, u) \in W_2^{1,n}[0, T] \times L_2^m[0, T], \quad (12.2)$$

die den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = (\pi - \delta)x(t) - u(t); \quad (12.3)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (12.4)$$

$$0 \leq u(t) \leq \pi x(t) \quad (12.5)$$

genügen. Ausserdem soll  $\pi > \rho + \delta$  gelten. Die Funktionen  $k(\cdot)$  und  $c(\cdot)$  aus dem Unterkapitel 2.3.1 wurden hier der Vereinheitlichung halber in  $x(\cdot)$  bzw.  $u(\cdot)$  umbenannt. In dieser Formulierung bezeichnet  $u(t)$  den Konsum zum Zeitpunkt  $t$ , der als Steuerungsvariable betrachtet wird. Dieses Modell ist ein typisches Beispiel für ein Steuerungsproblem mit zustandsabhängigen Steuerungsbeschränkungen. Die Aufgabe (12.1) – (12.5) wird mit  $(P_T)$  bezeichnet.

Ähnlich wie in dem Ressourcen-Allokationsmodell werten wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips auf dem Intervall  $[0, T]$  aus und anschliessend entscheiden wir, ob ein auf diese Weise berechneter Lösungskandidat zu einer optimalen Lösung des Problems mit unendlichem Zeithorizont

fortgesetzt werden kann. Wir definieren die Pontrjaginsche Funktion für den Normalfall als

$$\begin{aligned} H(t, \xi, v, \eta) &= v + \eta((\pi - \delta)\xi - v)e^{\rho t} \\ &= v(e^{-\rho t} - \eta)e^{\rho t} + \eta(\pi - \delta)\xi e^{\rho t} \end{aligned} \quad (12.6)$$

und maximieren sie bezüglich  $v$ , um die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \max_{0 \leq v \leq \pi \xi} H(t, \xi, v, \eta) = \begin{cases} \pi \xi - \delta \xi \eta e^{\rho t} & , e^{-\rho t} - \eta > 0 \\ \eta(\pi - \delta)\xi e^{\rho t} & , e^{-\rho t} - \eta = 0 \\ \eta(\pi - \delta)\xi e^{\rho t} & , e^{-\rho t} - \eta < 0 \end{cases} \quad (12.7)$$

mit der entsprechenden Steuerungsfunktion  $u^*(\cdot)$  gemäß

$$u^*(t) = \begin{cases} \pi x(t) & , e^{-\rho t} - y(t) > 0 \\ \alpha \in [0, \pi x(t)] & , e^{-\rho t} - y(t) = 0 \\ 0 & , e^{-\rho t} - y(t) < 0 \end{cases} \quad (12.8)$$

zu erhalten, wo  $\alpha$  ein beliebiges Element aus  $[0, \pi x(t)]$  ist. Wegen der Konkavität von  $\mathcal{H}(t, \cdot, y(t))$  für alle  $t \in [0, T]$  liefert das Maximumprinzip gleichzeitig die hinreichenden Optimalitätsbedingungen, vgl. FEICHTINGER&HARTL [35], Satz 2.2., S. 36. Deshalb finden wir durch das Verifizieren der Bedingungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips, Satz 1, IOFFE&TICHOMIROV [45], S. 127 ff., heraus, dass der Prozess  $(x^*, u^*, y)$ , definiert durch

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , t \in (0, \tau) \\ x_0 \pi e^{\pi \tau - \delta t} & , t \in [\tau, T]; \end{cases} \quad (12.9)$$

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{(\pi - \delta)t} & , t \in (0, \tau) \\ x_0 e^{\pi \tau - \delta t} & , t \in [\tau, T]; \end{cases} \quad (12.10)$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{(\rho + \delta - \pi)(t - \tau)} & , t \in (0, \tau) \\ \frac{\pi}{\rho + \delta} (1 - e^{-(\rho + \delta)(T - t)}) & , t \in [\tau, T] \end{cases} \quad (12.11)$$

mit  $\tau = T - \theta$  und  $\theta = \frac{1}{\rho + \delta} \ln \frac{\pi}{\pi - (\rho + \delta)}$  optimal für hinreichend große  $T$  ist.

## 12.2 Das lineare Ramsey Modell mit unendlichem Zeithorizont

Die Ausdehnung des Problems  $(P_T)$  auf den unendlichen Zeithorizont ergibt das folgende Steuerungsproblem:

$$J_\infty^L(x, u) = L \int_0^\infty e^{-\rho t} u(t) dt \longrightarrow \max! \quad (12.12)$$

bezüglich aller Paare

$$(x, u) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+) \times L_1^1(\mathbb{R}^+) \quad (12.13)$$

die die Restriktionen

$$\dot{x}(t) = (\pi - \delta)x(t) - u(t); \quad (12.14)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (12.15)$$

$$0 \leq u(t) \leq \pi x(t) \quad (12.16)$$

erfüllen. Dabei bezeichnen  $\rho$  und  $\delta$  die Diskontrate mit  $0 < \rho < 1$  bzw. die Abschreibungsrate mit  $\pi > \rho + \delta$ . Ein Paar  $(x, u)$  wird als zulässig bezeichnet, falls es die Bedingungen (12.13) – (12.16) erfüllt und das entsprechende Lebesguesche Integral aus (12.12) existiert und endlich ist. Das Problem (12.12) – (12.16) nennen wir  $(P_\infty)$ .

### Diskussion des Problems $(P_\infty)$

Wir wollen nun untersuchen, welche Auswirkungen die Unbeschränktheit des Zeitintervalls auf die Lösung des Problems  $(P_\infty)$  hat.

**Existenz einer optimalen Lösung.** Wir zeigen zunächst, dass das Problem  $(P_\infty)$  in der obigen Formulierung keine Lösung besitzt. Dafür betrachten wir die Folge  $\{u_N\}$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) der zulässigen Steuerungen

$$u_N(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, N] \\ \pi x_N(t) & , t \in [N, \infty) \end{cases} \quad (12.17)$$

und der dazugehörigen Zustandstrajektorien

$$x_N(t) = \begin{cases} x_0 e^{(\pi - \delta)t} & , t \in [0, N] \\ x_0 e^{\pi N - \delta t} & , t \in [N, \infty) \end{cases} \quad (12.18)$$

und ermitteln die resultierende Folge der Zielfunktionalwerte:

$$J_\infty^L(x_N, u_N) = L \int_0^\infty e^{-\rho t} u_N(t) dt \quad (12.19)$$

$$= \pi x_0 e^{\pi N} L \int_N^\infty e^{-(\rho + \delta)t} dt = \frac{\pi x_0}{\rho + \delta} e^{(\pi - (\rho + \delta))N}. \quad (12.20)$$

Offensichtlich gilt

$$J_\infty^L(x_N, u_N) \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad (12.21)$$

was beweist, dass im Sinne der Definition 10.(iii) keine Lösung der Aufgabe  $(P_\infty)$  existiert. Die gewählte Folge  $\{u_N\}$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) konvergiert, allerdings nur punktweise gegen die 0-Funktion und nicht in der Norm irgendeines  $L_p(\mathbb{R}^+)$ . Man beachte, dass wir in dieser Arbeit nicht auf die Optimalitätsdefinitionen eingehen, die unendliche Werte des Zielfunktional zulassen.

**Richtige Wahl des Zustands- bzw. Steuerraumes.** Die zweite entstehende Frage ist die nach der richtigen Wahl des Zustands- und Steuerraumes. Aus der Abschätzung

$$J_{\infty}^L(x, u) = L - \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(t) dt \leq \pi L - \int_0^{\infty} e^{-\rho t} x(t) dt \quad (12.22)$$

ziehen wir den Schluss, dass der Zielfunktionalwert endlich bleibt, wenn die Phasentrajektorie  $x(\cdot)$  dem Funktionenraum  $L_1(\mathbb{R}^+, \nu) \supset L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$  mit  $\nu(t) = e^{-\rho t}$  angehört. Man kann also den unendlichen Wert im Zielfunktional (12.12) ausschliessen, indem man statt  $x(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+)$  die Inklusion  $x(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  fordert. Wenn man die Steuerungsfunktion  $u(\cdot)$  als ein Element des gewichteten Lebesgueraumes  $L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  voraussetzt, dann ergibt sich aus der linearen Zustandsgleichung (12.14) die Inklusion  $\dot{x}(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ , was insgesamt zu der Bedingung  $x(\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  führt.

**Die Anpassung des Modells.** Um die Existenz einer globalen Lösung zu gewährleisten, müsste man jedoch noch die Bedingung  $\|x\|_{W_p^{1,1}(\mathbb{R}^+, \nu)} \leq \text{const}$  voraussetzen. Aus diesem Grund, ähnlich wie bei dem angepassten Ressourcen-Allokationsmodell, wird das lineare Ramsey Modell nun durch die Einführung einer zusätzlichen Zustandsbeschränkung erweitert, die das Wachstum des Kapitals  $x(\cdot)$  durch eine gewisse Gewichtsfunktion von oben beschränkt. Dies hat zur Folge, dass der Phasenpfad so abgeschnitten wird, dass die Steuerung einen endlichen Zielfunktionalwert und somit eine Lösung des Ramsey Modells auf dem unendlichen Zeitintervall liefert.

### 12.3 Das angepasste lineare Ramsey Modell

Wir führen die erwähnten Änderungen ein und modifizieren das Problem ( $P_{\infty}$ ) durch das Hinzufügen einer Zustandsbeschränkung und die Wahl der gewichteten Sobolev- und Lebesgueräume als Zustands- bzw. Steuerräume:

$$L - \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (-u(t)) dt \longrightarrow \min! \quad (12.23)$$

bezüglich aller Paare

$$(x, u) \in W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \times L_2(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \quad (12.24)$$

die den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = (\pi - \delta)x(t) - u(t); \quad (12.25)$$

$$x(t) \leq C e^{\alpha t}, \quad \forall t > 0, \quad C \geq x_0, \quad 0 < \alpha < \rho; \quad (12.26)$$

$$x(0) = x_0 > 0; \quad (12.27)$$

$$0 \leq u(t) \leq \pi x(t) \quad (12.28)$$

genügen. Das Problem (12.23) – (12.28) wird mit ( $P_{\infty}^A$ ) bezeichnet.

### 12.3.1 Existenz einer optimalen Lösung zum angepassten linearen Ramsey Modell

Für das angepasste lineare Ramsey Modell werden demnächst die Voraussetzungen des Satzes 28 verifiziert. Man beachte hierbei, dass in dem erwähnten Existenzsatz keine zustandsabhängigen Steuerungsbeschränkungen berücksichtigt wurden und ihre Auswirkung auf die Existenz einer optimalen Lösung hier extra untersucht werden soll.

- (1) Die Voraussetzung 5 ist erfüllt, denn die Funktion  $r(t, \xi, v) = -v$  ist linear in  $v$ .
- (2) Laut der Voraussetzung 9 muss es eine Funktion  $A_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  sowie eine positive Konstante  $B_1$  geben, so dass für alle  $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U(t, \xi)$  und  $p = 2$  die Wachstumsbedingung

$$|-v| \leq A_1(t)e^{\rho t} + B_1(|\xi|^2 + |v|^2) \quad (12.29)$$

gilt. Dies ist erfüllt mit  $A_1(t) = e^{-\rho t}$  und  $B_1 = 1$  aufgrund der Abschätzung

$$|-v| \leq 1 + |v|^2 = e^{-\rho t} e^{\rho t} + (|\xi|^2 + |v|^2). \quad (12.30)$$

- (3) Die Voraussetzung 10 ist offensichtlich erfüllt, denn  $\nabla_v r(t, \xi, v) = 0$ .
- (4) Mit  $A(t, x(t)) = (\pi - \delta)x(t)$ ,  $B(t, x(t)) \equiv -1$  wird die Voraussetzung 11 überprüft, d.h. ob die Wachstumsbedingungen (6.5) und (6.6) erfüllt sind. Die erste ist erfüllt mit  $p = q = 2$ ,  $B_{11}(t, \xi) = -1$ , der Funktion  $A_{311}(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+)$ , definiert durch  $A_{311}(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t}$ , und einer Konstanten  $B_{311} = 0$ , d.h. es gilt die Ungleichung

$$|-1| \leq e^{-\frac{\rho}{2}t} \cdot e^{\frac{\rho}{2}t} + 0 \cdot |\xi|. \quad (12.31)$$

Die Wachstumsbedingung (6.6) ist ebenso richtig, wenn man die Konstanten  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ; wie folgt setzt:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \pi - \delta$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 1$ .

- (5) Dass der zulässige Bereiches nicht leer ist, ist beispielsweise durch den Prozess

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, \tau] \\ \pi x^*(t) & , t \in (\tau, \infty) \end{cases}, \quad x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{(\pi - \delta)t} & , t \in [0, \tau] \\ x_0 e^{\pi\tau - \delta t} & , t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad (12.32)$$

mit einem beliebigen Schaltpunkt  $\tau : \tau < \frac{1}{(\pi - \delta) - \alpha} \ln\left(\frac{C}{x_0}\right)$  nachgewiesen.

- (6) Die Lipschitzstetigkeit der Funktion  $B(t, \cdot)$  mit  $B(t, \xi) \equiv -1$  ist trivialerweise gegeben.
- (7) Da der Steuerbereich vom Zustand abhängt, wird ein Analogon des Lemmas 6 für den gegebenen Steuerbereich explizit gezeigt.

**Lemma 13.** Sei eine Folge  $\{u_N\}$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) mit Elementen aus dem Funktionenraum  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  im Raum  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  schwach konvergent gegen die Funktion  $u_0(\cdot)$ . Weiterhin sei die Inklusion

$$u_N(t) \in U(t, x_N(t)) = [0, \pi x_N(t)] \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+ \quad (12.33)$$

für jede Zahl  $N \in \mathbb{N}$  erfüllt und die Funktionen  $x_N(\cdot)$  seien als Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}_N(t) = (\pi - \delta)x_N(t) - u_N(t), \quad x(0) = x_0 \quad (12.34)$$

auf  $\mathbb{R}^+$  bestimmt.<sup>1</sup> Dann gilt die Inklusion

$$u_0(t) \in U(t, x_0(t)) = [0, \pi x_0(t)] \quad (12.35)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^+$ .

**Beweis:** Der Beweis ist fast identisch zum Beweis des Lemmas 6. Wir bezeichnen also mit

$$\mathbb{Z}_u = \left\{ u \in L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}) \left| \begin{array}{l} u(t) \in U(t, x(t)) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}^+, \\ \dot{x}(t) = (\pi - \delta)x(t) - u(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \\ x(t) \leq C e^{\alpha t}, \quad C \geq x_0, \quad 0 < \alpha < \rho \end{array} \right. \right\} \quad (12.36)$$

die Menge der zulässigen Steuerungsfunktionen und beweisen nun die Konvexität und Abgeschlossenheit der Menge  $\mathbb{Z}_u$ . Dafür betrachten wir eine Funktionenfolge  $\{\tilde{u}_N\} \subset \mathbb{Z}_u$ , die in der  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$ -Norm gegen eine Funktion  $\tilde{u}_0(\cdot)$  konvergiert. Das Anwenden des Schemas, das die Beziehungen zwischen verschiedenen Konvergenztypen illustriert, vgl. Anhang B oder KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 446 ff., und die Tatsache, dass

$$\mu_\nu(\mathbb{R}^+) = \int_0^\infty d\nu = \int_0^\infty e^{-\rho t} dt < \infty \quad (12.37)$$

gilt, führt uns zu folgendem Schluss. Wir sind in der Lage aus der Funktionenfolge  $\{\tilde{u}_N\}$  eine solche Teilfolge  $\{\tilde{u}_{N_k}\}$  auszuwählen, die fast überall auf  $\mathbb{R}^+$  gegen die Funktion  $\tilde{u}_0(\cdot)$  konvergiert, d.h. für alle  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}$  findet die punktweise Konvergenz

$$\tilde{u}_{N_k}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t), \quad (12.38)$$

statt, wobei mit  $\mathcal{N}$  hier eine gewisse Lebesguesche Nullmenge bezeichnet wird. Ferner definieren wir

$$B := \bigcup_{N_k=1}^\infty \{t : \tilde{u}_{N_k}(t) \notin U(t, \tilde{x}_{N_k})\}. \quad (12.39)$$

<sup>1</sup>Hier wird vorausgesetzt, dass dieses Problem für alle  $N \in \mathbb{N}$  eine eindeutige Lösung besitzt.

Diese Menge ist ebenso eine Lebesguesche Nullmenge aufgrund der Sigma-Additivität des Lebesgueschen Maßes. Dies bedeutet, dass die Menge  $\mathcal{N} \cup B$  ebenfalls vom Lebesgueschen Maß Null ist und für alle  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup B)$  die Konvergenz

$$\tilde{u}_{N_k}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t) \quad (12.40)$$

bestehen bleibt. Aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung der linearen Differentialgleichung (12.34) vom Störungsglied  $u_N(t)$  folgt die fast überall punktweise Konvergenz

$$\tilde{x}_{N_k}(t) \rightarrow \tilde{x}_0(t). \quad (12.41)$$

Ferner erhalten wir zu jedem fixierten Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup B)$  durch die Oberhalbstetigkeit der mengenwertigen Abbildung  $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ , definiert durch  $U(t, x(t)) = [0, \pi x(t)]$ , aus der Konvergenz der Zahlenfolge  $\tilde{x}_{N_k}(t)$  gegen  $\tilde{x}_0(t)$  die Inklusion

$$U(t, \tilde{x}_0(t)) \supseteq \limsup_{N_k \rightarrow \infty} U(t, \tilde{x}_{N_k}(t)), \quad (12.42)$$

die wegen der Kompaktheit von  $U(t, \tilde{x}_0(t))$  auch die Bedingung

$$\tilde{u}_0(t) \in U(t, \tilde{x}_0(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathcal{N} \cup B) \quad (12.43)$$

nach sich zieht. Somit ist die Abgeschlossenheit von  $\mathbb{Z}_u$  bewiesen.

Zum Beweis der Konvexität der Menge  $\mathbb{Z}_u$  betrachtet man eine konvexe Kombination

$$\lambda u_1(\cdot) + (1 - \lambda)u_2(\cdot), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (12.44)$$

der Funktionen  $u_1(\cdot) \in \mathbb{Z}_u$ ,  $u_2(\cdot) \in \mathbb{Z}_u$  und zeigt, dass diese ebenso ein Element der Menge  $\mathbb{Z}_u$  ist. Es gilt

$$\lambda u_1(\cdot) + (1 - \lambda)u_2(\cdot) \in L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t}), \quad (12.45)$$

da  $L_2^1(\mathbb{R}^+, e^{-\rho t})$  ein Vektorraum ist. Berücksichtigt man die Bedingungen

$$u_1(t) \in U(t, x_1(t)) = [0, \pi x_1(t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}_{u_1}; \quad (12.46)$$

$$u_2(t) \in U(t, x_2(t)) = [0, \pi x_2(t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}_{u_2}, \quad (12.47)$$

so gilt  $\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathcal{N}_{u_1} \cup \mathcal{N}_{u_2}\}$  die Inklusion

$$\lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t) \in U(t, \tilde{x}(t)) = [0, \pi \tilde{x}(t)], \quad (12.48)$$

wobei  $\mathcal{N}_{u_1} \cup \mathcal{N}_{u_2}$  eine Lebesguesche Nullmenge ist und  $\tilde{x}(\cdot)$  die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\pi - \delta)\tilde{x}(t) - (\lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t)) \quad (12.49)$$

löst. Die letzte Gleichung besitzt aufgrund der Linearität die Lösung

$$\tilde{x}(t) = \lambda x_1(t) + (1 - \lambda)x_2(t), \quad (12.50)$$

womit die Bedingung (12.48) gerechtfertigt ist. Somit ist die Konvexität der Menge  $\mathbb{Z}_u$  bewiesen. Wir können nun den Satz III.3.8 aus WERNER [98], S. 108., anwenden, welcher behauptet, dass der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge  $\{u_N\}$  mit Elementen aus einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge  $V$  eines normierten Raumes  $X$  in derselben Teilmenge  $V$  liegt. Die Rolle von  $V$  spielt hier die Menge  $\mathbb{Z}_u$ . Dies schliesst den Beweis des Lemmas ab. ■

Mit dem oben vorgeführten Zusatzbeweis kann nun der Existenzsatz 28 auf das angepasste lineare Ramsey Modell angewendet werden, um die Existenz einer im Sinne der Definition 10.(iii) optimalen Lösung zum Problem  $(P_\infty^A)$  zu schlussfolgern.

### 12.3.2 Optimale Lösung mittels hinreichender Optimalitätsbedingungen

Wir beweisen, dass die Steuerung

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, \tau] \\ \pi x^*(t) & , \quad t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad (12.51)$$

mit der dazugehörigen Zustandsfunktion

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{(\pi-\delta)t} & , \quad t \in [0, \tau] \\ x_0 e^{\pi\tau-\delta t} & , \quad t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad (12.52)$$

global optimal im Sinne des Kriteriums L2 ist. Der Schalterpunkt  $\tau$  ist durch den Zeitpunkt des Auftreffens auf die Zustandsbeschränkung gegeben, also ist  $\tau = \frac{1}{(\pi-\delta)-\alpha} \ln\left(\frac{C}{x_0}\right)$ . Die Zustandsbeschränkung  $x(t) \leq C e^{\alpha t}$  wird dabei nur in einem einzigen Punkt aktiv, nämlich bei  $t = \tau$ . Die punktweise Beschränkung der Zustandstrajektorien nach unten ist nur in dem Punkt  $t = 0$  aktiv, sonst inaktiv. Der Funktionalwert  $J_\infty^L(x^*, u^*)$  beträgt

$$\begin{aligned} J_\infty^L(x^*, u^*) &= L \int_\tau^\infty \pi e^{\pi\tau - (\rho+\delta)t} dt = \frac{\pi x_0}{\rho + \delta} e^{(\pi - (\rho+\delta))\tau} \\ &= \frac{\pi x_0}{\rho + \delta} \left(\frac{C}{x_0}\right)^{\frac{\pi - (\rho+\delta)}{(\pi - (\rho+\delta))}} < \infty. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Zur Veranschaulichung ist der Prozess  $(x^*, u^*)$  auf den Abbildungen 12.1, 12.2 dargestellt. Wir bemerken, dass der Steuerbereich in dem vorliegenden Modell zustandsabhängig ist. Da aber  $U(t, x(t)) = [0, \pi x(t)]$  gilt, d.h. der Steuerbereich kompakt und konvex für alle  $\xi = x(t)$  ist, bleiben der schwache Dualitätssatz 31 und das

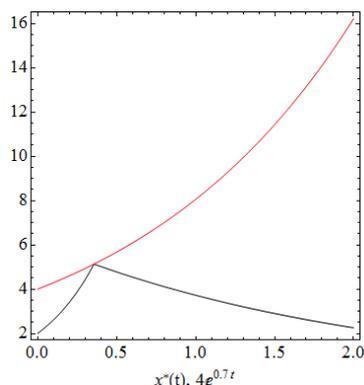


Abbildung 12.1: Das angepasste lineare Ramsey Modell: optimale Zustandstrajektorie  $x^*(\cdot)$  (schwarz) sowie Zustandsbeschränkung  $Ce^{\alpha t}$  (rot) für  $\rho = 0.9$ ;  $\delta = 0.5$ ;  $\alpha = 0.7$ ;  $C = 4$ ;  $x_0 = 2$ .

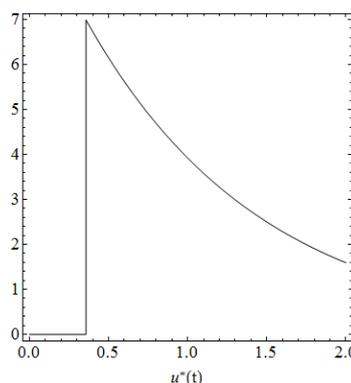


Abbildung 12.2: Das angepasste lineare Ramsey Modell: optimale Steuerung  $u^*(\cdot)$  für  $\rho = 0.9$ ;  $\delta = 0.5$ ;  $\alpha = 0.7$ ;  $C = 4$ ;  $x_0 = 2$ .

verallgemeinerte Maximumprinzip, vgl. Korollar 3, dennoch gültig. Zum Optimalitätsbeweis über die hinreichenden Bedingungen aus dem Unterkapitel 8.1 werden wir die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \begin{cases} \pi\xi - \delta\xi\eta e^{\rho t} & , \quad e^{-\rho t} - \eta > 0 \\ \eta(\pi - \delta)\xi e^{\rho t} & , \quad e^{-\rho t} - \eta \leq 0 \end{cases} \quad (12.54)$$

und den Defekt der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung  $\Lambda(t, \xi)$  gebrauchen, denn es wird die parametrische Optimierungsaufgabe für  $t \neq \tau$

$$\begin{aligned} (P_t) : \quad \Lambda(t, \xi) & := \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} \partial_t S(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, \partial_\xi S(t, \xi)) \\ & = \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t)) \\ & + \quad \mathcal{H}(t, \xi, y(t)) \rightarrow \max! \end{aligned} \quad (12.55)$$

bzgl.  $\xi \in \{\xi \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq \xi \leq Ce^{\alpha t}\}$

mit einem linearen dualen Ansatz für die duale Funktion  $S(t, \xi) \in Y_{\infty, 2}^G$  und der Anzahl der möglichen Unstetigkeitspunkte  $r = 1$ , d.h. für die Zerlegung  $\mathbb{R}^+ = [0, \tau) \cup [\tau, \infty)$ , untersucht, um die Gültigkeit aller Voraussetzungen des verallgemeinerten Maximumprinzips, Korollar 3, zu gewährleisten. Aus den Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen<sup>2</sup> ergibt sich für  $t \in (\mathbb{R}^+ \setminus \tau)$

$$\partial_\xi \mathcal{L}(t, x^*(t)) = -e^{\rho t} \dot{y}(t) - \partial_\xi \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t), 1) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 0; \quad (12.56)$$

$$\lambda_1(t)(x_0 - x^*(t)) = 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0; \quad (12.57)$$

$$\lambda_2(t)(x^*(t) - Ce^{\alpha t}) = 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0, \quad (12.58)$$

<sup>2</sup>Vgl. Satz 43 in Anhang B.

wobei mit  $\mathcal{L}(t, \xi)$  die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(t, \xi) = -\Lambda(t, \xi) + \lambda_1(t)(x_0 - \xi) + \lambda_2(t)(\xi - Ce^{\alpha t}) \quad (12.59)$$

bezeichnet wird. Die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_1(\cdot)$  und  $\lambda_2(\cdot)$  entsprechen dabei den Zustandsbeschränkungen  $x_0 \leq x(t)$  bzw.  $x(t) \leq Ce^{\alpha t}$ . Dadurch, dass die beiden Zustandsrestriktionen auf  $(0, \tau) \cup (\tau, \infty)$  inaktiv sind, ergeben sich für  $t \in (0, \tau)$  die adjungierte Gleichung

$$-e^{\rho t} \dot{y}(t) - y(t)(\pi - \delta)e^{\rho t} = 0; \quad (12.60)$$

$$\dot{y}(t) = -(\pi - \delta)y(t) \quad (12.61)$$

und für  $t \in (\tau, \infty)$  die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \delta y(t) - \pi e^{-\rho t}, \quad (12.62)$$

da beide Multiplikatoren identisch Null sind,  $\lambda_i(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ ; für  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \tau$ . Für die Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$ , definiert durch

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{-(\pi-\delta)t} & , \quad t \in [0, \tau] \\ C_2 e^{\delta t} + \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{-\rho t} & , \quad t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad (12.63)$$

mit den Integrationskonstanten  $C_i$ , ( $i = 1, 2$ ), die gleichzeitig eine Komponente des dualen Ansatzes  $S(t, \xi) = a(t) + y(t)^T(\xi - x^*(t))$  ist, überprüfen wir nun die Maximumbedingung des verallgemeinerten Maximumprinzips, vgl. Korollar 3. Laut der für dieses Steuerungsproblem notwendigen Bedingung  $y(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$ , vgl. Satz 9, ergibt sich  $C_2 = 0$ . Aus der Stetigkeit der adjungierten Funktion  $y(\cdot)$  berechnen wir die Integrationskonstante  $C_1$  und überprüfen anschliessend, ob die Ungleichung

$$e^{-\rho t} < C_1 e^{-(\pi-\delta)t}, \quad t \in [0, \tau) \quad (12.64)$$

mit der gewählten Konstante noch gültig ist. Die Stetigkeit des Kozustandes in  $t = \tau$  liefert

$$C_1 e^{-(\pi-\delta)\tau} = \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{-\rho\tau}, \quad (12.65)$$

womit  $C_1 = \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{(\pi-\delta-\rho)\tau}$  gelten muss. Die Ungleichung (12.64) ist äquivalent zu

$$e^{-\rho t} < \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{(\pi-\delta-\rho)\tau} e^{-(\pi-\delta)t}, \quad t \in [0, \tau); \quad (12.66)$$

$$1 < \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{(\pi-\delta-\rho)(\tau-t)}, \quad t \in [0, \tau), \quad (12.67)$$

was offenbar gilt, da  $\pi > \rho + \delta$  und  $\tau > t$ . Auf diese Weise erhalten wir die stetige, stückweise stetig differenzierbare adjungierte Funktion

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{(\pi-\delta-\rho)\tau} e^{-(\pi-\delta)t} & , \quad t \in [0, \tau] \\ \frac{\pi}{\rho+\delta} e^{-\rho t} & , \quad t \in (\tau, \infty), \end{cases} \quad (12.68)$$

die im gewichteten Sobolevraum  $W_2^{1,1}(\mathbb{R}^+, e^{\rho t})$  liegt. Um den gesuchten dualen Ansatz  $S(t, \xi)$  zu vervollständigen, wird die Komponente  $a(\cdot)$  aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= y(t)^T \dot{x}^*(t) - \mathcal{H}(t, x^*(t), y(t)) \tilde{\nu}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & , t \in [0, \tau] \\ -\pi x_0 \delta e^{\pi \tau} \left(1 + \frac{1}{\rho + \delta}\right) e^{-(\rho + \delta)t} - \pi x_0 e^{\pi \tau} e^{-\delta t} & , t \in (\tau, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (12.69)$$

bestimmt. Bei der Wahl der Integrationskonstante wird die Inklusion  $a(\cdot) \in W_1^1[\tau, \infty)$  berücksichtigt, deren Sicherung für die Anwendung der entwickelten Dualitätstheorie nötig ist. Offensichtlich erfüllt die Funktion

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\pi x_0 \delta}{\rho + \delta} \left(1 + \frac{1}{\rho + \delta}\right) e^{(\pi - (\rho + \delta))\tau} + \frac{\pi x_0}{\delta} e^{(\pi - \delta)\tau} & , t \in [0, \tau] \\ \frac{\pi x_0 \delta}{\rho + \delta} e^{\pi \tau} \left(1 + \frac{1}{\rho + \delta}\right) e^{-(\rho + \delta)t} + \frac{\pi x_0}{\delta} e^{\pi \tau} e^{-\delta t} & , t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad (12.70)$$

die obige Forderung der analytischen Güte. Dabei ist  $\tau = \frac{1}{(\pi - \delta) - \alpha} \ln\left(\frac{C}{x_0}\right)$  der Schaltpunkt der Steuerung. Für den linearen Ansatz  $S^*$  mit der Komponente  $a(\cdot)$  aus (12.70) und der stetigen Kozustandsfunktion  $y(\cdot)$  aus (12.68) ist die Randbedingung

$$\begin{aligned} \inf_{\beta \in \Gamma} \{S^*(\tau - 0, \beta) - S^*(\tau + 0, \beta)\} &= S^*(\tau - 0, x^*(\tau)) - S^*(\tau + 0, x^*(\tau)); \quad (12.71) \\ \Gamma &= \{\beta \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq \beta \leq C e^{\alpha \tau}\} \end{aligned}$$

des verallgemeinerten Maximumprinzips, vgl. Korollar 3, erfüllt. Anschliessend möchten wir die Zulässigkeit des konstruierten linearen Ansatzes  $S^*$  in der dualen Aufgabe mit den nachfolgenden Rechnungen bestätigen. Wir zeigen  $\Lambda(t, \xi) \equiv 0$  für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times [x_0, C e^{\alpha t}]$ . Erinnern wir uns, dass der Defekt  $\Lambda(t, \xi)$  durch

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi) &= \frac{1}{\tilde{\nu}(t)} (\dot{a}(t) + \dot{y}(t)^T (\xi - x^*(t)) - y(t)^T \dot{x}^*(t)) \\ &+ \begin{cases} \pi \xi - \delta \xi y(t) e^{\rho t} & , y(t) < e^{-\rho t} \\ y(t) (\pi - \delta) \xi e^{\rho t} & , y(t) \geq e^{-\rho t} \end{cases} \end{aligned} \quad (12.72)$$

bestimmt ist. Genauso wie im Ressourcen-Allokationsmodell ist diese Funktion linear in  $\xi$ , weswegen die Hamilton-Jacobische Ungleichung nur dann für alle  $\xi \in [x_0, C e^{\alpha t}]$  erfüllt sein kann, wenn die Steigung  $\partial_\xi \Lambda(t, \xi) \equiv 0$  für alle  $t > 0$ . Wir zeigen dies. Für  $t \in [0, \tau]$  gilt unter der Berücksichtigung von (12.68)

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Lambda(t, \xi) &= \dot{y}(t) e^{\rho t} + y(t) (\pi - \delta) e^{\rho t} \\ &= -\frac{(\pi - \delta) \pi}{\rho + \delta} e^{(\pi - \delta - \rho)\tau} e^{-(\pi - \delta)t} e^{\rho t} \\ &+ \frac{(\pi - \delta) \pi}{\rho + \delta} e^{(\pi - \delta - \rho)\tau} e^{-(\pi - \delta)t} e^{\rho t} = 0 \end{aligned} \quad (12.73)$$

und entsprechend für  $t \in (\tau, \infty)$

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Lambda(t, \xi) &= \dot{y}(t) e^{\rho t} + \pi - \delta y(t) e^{\rho t} \\ &= -\rho \frac{\pi}{\rho + \delta} e^{-\rho t} e^{\rho t} + \pi - \delta \frac{\pi}{\rho + \delta} e^{-\rho t} e^{\rho t} = 0. \end{aligned} \quad (12.74)$$

Da durch Konstruktion der Komponente  $a(\cdot)$  die Gleichung  $\Lambda(t, x^*(t)) = 0$  gesichert wurde, gilt die oben erwähnte Identität  $\Lambda(t, \xi) \equiv 0$  für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times [x_0, Ce^{\alpha t}]$ , woraus die Zulässigkeit des Ansatzes  $S^*$  mit den Komponenten aus (12.70), (12.68) folgt.<sup>3</sup>

Die gesamte vorherige Diskussion läßt uns nun schließen, dass der Prozess  $(x^*, u^*)$ , definiert in (12.51), (12.52) global optimal im Sinne des Kriteriums L2 ist. Über die Eindeutigkeit, Striktheit und Isoliertheit des optimalen Prozesses werden hier jedoch keine Aussagen getroffen.

**Bemerkung 49.** Die Hamiltonfunktion ist im Schaltpunkt  $t = \tau$  zwar nicht partiell stetig differenzierbar nach  $\eta$ , jedoch reicht wegen der Konkavität von  $\mathcal{H}(t, \xi, \eta)$  in  $\xi$  ein linearer dualer Ansatz aus, infolgedessen man nur  $\partial_\xi \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$  zu untersuchen hat.

---

<sup>3</sup>Die Zulässigkeit des Ansatzes  $S^*$  folgt sofort, wenn man bedenkt, dass die betrachtete parametrische Optimierungsaufgabe linear in  $\xi$  ist und die notwendige Optimalitätsbedingung, gegeben durch die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, somit auch hinreichend ist.

# Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Untersuchungen über Optimalsteuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont und die sich daraus ergebende Problematik. In der gesamten Arbeit wird der Zugang der gewichteten Funktionenräume konsequent verfolgt, um deren Eigenschaften vorteilhaft zu nutzen. Besonders herauszuheben ist auch die konsequente Unterscheidung zwischen den Riemannschen und Lebesgueschen Interpretationen des verwendeten Integralbegriffes in der Grundaufgabe. Die Auswirkungen dieser Unterscheidung münden beispielsweise in unterschiedliche zulässige Bereiche, vgl. Beispiele aus dem Kapitel 3, oder unterschiedliche Halbsteigigkeitseigenschaften der entsprechenden Zielfunktionale, vgl. Kapitel 5.

Die in dieser Arbeit erzielten Resultate in Form der Sätze lassen sich grob in zwei Gruppen aufteilen. Zum einen sind es die Existenzaussagen einschliesslich der dafür benötigten Halbsteigigkeitsaussagen für die Integralfunktionale sowie Aussagen über die analytische Güte der Nemytskij Operatoren in gewichteten Lebesgueräumen auf  $\mathbb{R}^+$ . Zum anderen sind es hinreichende Optimalitätsbedingungen, die auf der speziell entwickelten Dualitätstheorie aufbauen. Die Ergebnisse aus beiden Gruppen wurden an akademischen Beispielen getestet, um die Anwendbarkeit der Sätze zu zeigen.

Es ist gelungen, die Existenz einer optimalen Lösung für die Probleme mit in der Steuerung konvexem Integranden und in der Steuerung linearer Dynamik unter gewissen Wachstumsbedingungen an den Integranden sowie an die rechte Seite der Differentialgleichung zu beweisen, siehe Satz 28. Dabei ist das Integral im Lebesgueschen Sinne zu verstehen. Der Beweis des Existenzsatzes basiert unter anderem auf der Stetigkeit der Nemytskij Operatoren, die unter vorausgesetzten Wachstumsbedingungen nachgewiesen werden konnte, vgl. Kapitel 4. Die Ergebnisse dieses Kapitels stellen eine Übertragung der Ergebnisse aus LEONARDI [60] auf den Fall der gewichteten Lebesgueräume mit der Grundmenge  $\mathbb{R}^+$ , jedoch im Fall von Funktionenräumen mit der gleichen Gewichtsfunktion ohne Einschränkung auf  $p, q \geq 1$ . Um die Beschränktheit des zulässigen Bereiches und somit die Existenz einer optimalen Lösung zu beweisen, wurde künstlich eine Zustandsbeschränkung eingeführt, die jedoch in sich einen Freiheitsgrad enthält, nämlich die Funktion  $\beta(\cdot)$ , die modellabhängig gewählt wird. Eine zusätzliche Phasenbeschränkung mag eine Schwierigkeit für die numerische Behandlung der Optimalsteuerungsprobleme darstellen, aber sie ließ sich nicht umgehen, da in dem Beweis des Existenzsatzes dem Weierstraßschen Beweisschema gefolgt wurde. Der Vorteil einer solchen Zustandsbeschränkung ist an den Beispielen des Ressourcen-Allokationsmodells und des linearen Ramsey Modells gut erkennbar, da diese Steuerungsprobleme auf dem unbeschränkten Intervall im Allgemeinen nicht lösbar sind. Die Wahl einer künstlichen Zustandsbeschränkung

beeinflusst die optimale Lösung wesentlich, daher möge die Festlegung einer solchen Beschränkung in jedem konkreten Modell sehr sorgfältig überlegt und dem zu modellierenden Sachverhalt entsprechend sein. Eine weitere mögliche Erweiterung des Existenzsatzes liegt in der Zulassung einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Aufgabenstellung.

Es ist gelungen, die Dualitätstheorie im Sinne von Klötzler für die Grundaufgabe mit unendlichem Zeithorizont zu entwickeln, wobei hierin zwei, möglicherweise unterschiedliche, Gewichtsfunktionen einbezogen waren, die eine zur Gewichtung des Integranden und die andere zur Gewichtung der zulässigen Paare. Die Ergebnisse wurden als Dualitätssätze formuliert. Die entscheidende Rolle bei der Konstruktion der dualen Aufgabe und der Formulierung der hinreichenden Bedingungen spielt die duale Variable  $S$  bzw. ihre Komponenten  $(a, y, Q)$ , die als “passend“ angesehen werden, wenn sie Elemente von Sobolev- bzw. gewichteten Sobolevräumen sind. Besonders interessant ist der Fall, wenn zwischen der primalen und dualen Aufgaben die starke Dualität besteht, da sie auf die Optimalität des involvierten Prozesses schliessen läßt. So wurden die Kenntnisse aus der endlich-dimensionalen Optimierung eingesetzt, um die starke Dualität und folglich die Optimalität eines Paares zu gewährleisten, vgl. zum Beispiel die Sätze 35, 36. Eine dritte Gewichtsfunktion wurde eingeführt, um die Möglichkeit einzuräumen, die Optimalität eines Prozesses in Bezug auf die Zeit messen zu können. Anders ausgedrückt, die Breite der Umgebung des Prozesses, wo selbiger auch einen optimalen Funktionswert liefert, kann von der Zeit abhängen. Diese zeitliche Abhängigkeit wird mit der Gewichtsfunktion  $\hat{\nu}(\cdot)$  erfasst. Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für ein starkes striktes lokales Minimum, d.h. ein globales Minimum in  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$ , wurden in Satz 38 bewiesen und auf dem Problem der optimalen Erneuerung einer technischen Ressource getestet. Die Verbindung zwischen den drei Gewichtsfunktionen kommt in den Voraussetzungen des Satzes zum Vorschein. Beispielsweise liegt die Optimalität eines Prozesses  $(x^*, u^*)$  in einer  $C_\delta^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu})$  – Umgebung von  $x^*(\cdot)$  vor, wenn unter anderem  $\hat{\nu}^{-1}(\cdot) \in L_p^1(\mathbb{R}^+, \nu)$  erfüllt ist. Diese Inklusion sichert die Stetigkeit der Einbettung  $C^0(\mathbb{R}^+, \hat{\nu}) \subset L_p(\mathbb{R}^+, \nu)$ . Anhand von allen zum Modell passenden Gewichtsfunktionen  $\hat{\nu}(\cdot)$  ist es möglich die Entscheidung darüber zu treffen, wie wichtig das Verhalten der Phasentrajektorien im Unendlichen in Hinsicht auf die Optimalität ist. Das Erfülltsein der hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung hängt in gewissem Maße von der Definitheitsbedingung an den Operator  $\mathcal{L}_{\xi\xi}^2(t, \xi)$  ab, d.h. von der Existenz beschränkter Lösungen einer Riccati-schen Differentialungleichung. Da diese nicht immer gegeben sind, war es sinnvoll denselben Satz in schwächerer Form zu formulieren, vgl. den Satz 39, wo die aktiven Zustandsbeschränkungen berücksichtigt werden, wodurch sich die Riccati-sche Differentialungleichung vereinfacht oder sogar in eine lineare Differentialungleichung ausartet, vgl. MALANOWSKI ET AL. [68]. Gibt es jedoch ein unendliches Teilintervall des  $\mathbb{R}^+$ , wo alle Zustandsrestriktionen inaktiv sind und die erwähnte Definitheitsbedingung nicht erfüllt werden kann, so ist bislang nicht klar, wie diese Schwierigkeit beseitigt werden kann.

Generell hat sich herauskristallisiert, dass weder der Lebesguesche noch Riemannsche Integralbegriff allen Anforderungen eines “guten“ Optimalsteuerungspro-

blems mit unendlichem Zeithorizont standhält, was die zukünftigen Untersuchungen in Richtung allgemeinerer Integralbegriffe lenken könnte. Angesichts der geschilderten Unstimmigkeiten zwischen den Problemformulierungen samt der Präzisierung des verwendeten Integrallbegriffs und dem Prozess der Entwicklung der Existenztheorie oder der notwendigen Optimalitätsbedingungen kann es durchaus möglich sein, dass ein anderer Integrallbegriff, verschieden vom Lebesgueschen oder Riemannsches Integral, diese Diskrepanzen beheben kann. Dies hätte möglicherweise der Integrationsbegriff von Henstock-Kurzweil getan, der eine Verallgemeinerung sowohl des Riemannsches als auch des Lebesgueschen Integrals darstellt, und zwar eine solche, dass unter anderem folgende "unscharf formulierten" Eigenschaften vorhanden sind:

- (i) Jede Riemann integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch Henstock-Kurzweil integrierbar, KURTZ&SWARTZ [58], S. 142.
- (ii) Die Menge aller Henstock-Kurzweil integrierbaren Funktionen bildet einen Vektorraum, [58], S. 205 ff.
- (iii) Die absolute Henstock-Kurzweil Integrierbarkeit auf  $\mathbb{R}$  ist äquivalent zu Lebesgue Integrierbarkeit, vgl. [58], S. 189 ff.

Dieses Integral berücksichtigt ausserdem das Verhalten der zu integrierenden Funktion, womit zum Beispiel Oszillationen nicht ohne Beachtung bleiben und ein Henstock-Kurzweilsches Integral bedingt konvergent sein kann. Weiterhin, im Gegensatz zum Riemannsches Begriff, ist sogar die Dirichlet Funktion Henstock-Kurzweil integrierbar, was die Klasse der zulässigen Prozesse formal wesentlich vergrößern würde. Desweiteren, wegen der Vektorraum – Eigenschaft und geltender Konvergenzsätze wäre es möglich eine Existenztheorie aufzustellen, ohne auf das Vorhandensein der bedingt konvergenten Integrale verzichten zu müssen, wie es unter Lebesguescher Interpretation der Fall ist. Mehr zu dem Henstock-Kurzweil Integralbegriff selbst vgl. [58], S. 133 ff. Die genannten Untersuchungen stellen den Gegenstand der zukünftigen Forschung dar.

Die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen verschiedenen Interpretationen des verwendeten Integraltyps zeigt gleichzeitig, dass die numerische Behandlung der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont nicht ohne weiteres auf Riemannsches Integralsummen basieren darf. Desweiteren stellt die Herleitung des Pontrjaginschen Maximumprinzips als Trennungssatz für die formulierte Grundaufgabe eine Herausforderung dar.



# Anhang A

## Abkürzungen und Bezeichnungen

$\mathbb{R}^+$	die Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mu(\Omega)$	Lebesguesches Maß der Menge $\Omega$
$\mathcal{P}(\Omega)$	Die Menge aller messbaren Teilmengen von $\Omega$
$C^k(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^{0,\infty}(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger
$PC(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ stückweise stetigen Funktionen
$PC^1(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ stückweise stetig differenzierbaren Funktionen
$D_0^n(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ stückweise stetigen Vektorfunktionen
$D_1^n(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Vektorfunktionen
$AC^n(\Omega)$	Raum der auf $\Omega$ absolut stetigen Vektorfunktionen
$L_p^n(\Omega)$	Lebesguescher Funktionenraum
$W_p^{1,n}(\Omega)$	Sobolevraum
$\nu(\cdot), \tilde{\nu}(\cdot), \hat{\nu}(\cdot)$	Gewichtsfunktionen
$\mu_\nu(\cdot)$	das Maß, das von der Gewichtsfunktion $\nu(\cdot)$ induziert wird
$L_p^n(\Omega, \nu)$	gewichteter Lebesgueraum mit Gewichtsfunktion $\nu(\cdot)$
$W_p^{1,n}(\Omega, \nu)$	gewichteter Sobolevraum mit Gewichtsfunktion $\nu(\cdot)$
$L_\infty^{n \times n}(\Omega, \nu^{-1})$	gewichteter Lebesgue Raum der $n \times n$ -dimensionalen Matrixfunktionen mit Gewichtsfunktion $\nu^{-1}(\cdot)$
$W_\infty^{1,n \times n}(\Omega, \nu^{-1})$	gewichteter Sobolevraum der $n \times n$ -dimensionalen Matrixfunktionen mit Gewichtsfunktion $\nu^{-1}(\cdot)$
$(P_T)$	primales Steuerungsproblem auf dem Intervall $[0, T]$
$(P_\infty)$	primales Steuerungsproblem auf dem Intervall $\mathbb{R}^+$
$(P_{\infty,loc})$	lokalisierendes primales Steuerungsproblem auf dem Intervall $\mathbb{R}^+$

$(P_\infty^L)$	primales Steuerungsproblem mit der Lebesgueschen Interpretation des Integrals im Zielfunktional
$(P_\infty^R)$	primales Steuerungsproblem mit der Riemannschen Interpretation des Integrals im Zielfunktional
$(D_T)$	duales Steuerungsproblem auf dem Intervall $[0, T]$ im Sinne von Klötzler
$(D_\infty)$	duales Problem im Sinne von Klötzler auf $\mathbb{R}^+$
$(D_\infty^G)$	duales Problem auf $\mathbb{R}^+$ im Sinne von Klötzler, in dem unstetige Funktionen zulässig sind
$(D_{\infty,loc})$	lokalisiertes duales Problem auf $\mathbb{R}^+$ im Sinne von Klötzler
$\mathcal{K}_{\delta,\hat{\nu}}(x^*(t))$	gewichtete $\delta$ -Umgebung von $x^*(t)$
$U_\delta^{C^0(\mathbb{R}^+,\hat{\nu})}(x^*)$	gewichtete $C_\delta^0(\mathbb{R}^+)$ – Umgebung der Funktion $x^*(\cdot)$
$r(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$	Funktion im Integranden
$f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$	rechte Seite der Zustandsgleichung
$x(\cdot), u(\cdot)$	Zustandsfunktion bzw. Steuerungsfunktion
$y(\cdot)$	adjungierte Funktion, auch Kozustandsfunktion genannt
$U \subset \mathbb{R}^m$	Steuerbereich
$U(t, x(t))$	zustandsabhängiger Steuerbereich
$R(t)$	Erreichbarkeitsmenge zum Zeitpunkt $t$
$\tau$	Umschaltzeitpunkt
$\left. \begin{array}{l} \xi = x(t) \\ v = u(t) \\ \eta = y(t) \end{array} \right\}$	Platzhaltervariablen
$H(t, \xi, v, \eta)$	Pontrjaginsche Funktion
$\mathcal{H}(t, \xi, \eta)$	Hamiltonfunktion, die maximierte Pontrjaginsche Funktion
$S(t, \xi)$	duale Variable
$(a, y, Q)$	Komponenten des quadratischen dualen Ansatzes
$\Lambda(t, \xi)$	Defekt der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung
$L$ - $\int$	Integral im Lebesgueschen Sinne
$R$ - $\int$	Integral im Riemannschen uneigentlichen Sinne
$Y_\infty$	Menge der stetigen quadratischen dualen Funktionen $S$ mit Komponenten aus bestimmten Sobolevräumen
$Y_\infty^G$	Menge der dualen quadratischen Funktionen $S$ mit Komponenten aus bestimmten Sobolevräumen, die Sprünge haben können
$Nx(t)$	Nemytskij Operator
$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}^+} f(t)$	das wesentliche Supremum der Funktion $f$
$x_N \rightharpoonup x_0$	schwache Konvergenz der Folge $\{x_N\}$ gegen $x_0$
$(\forall) t \in A$	fast überall auf $A$
$\text{int}A$	das Innere der Menge $A$

$P[A|B]$  Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  eintritt, wenn das Ereignis  $B$  schon eingetreten ist, bedingte Wahrscheinlichkeit

$\lambda(\cdot)$  Lagrangesche Multiplikatorfunktion

$\text{conv}\{A\}$  konvexe Hülle der Menge  $A$



# Anhang B

## Wichtige Sätze und Definitionen

**Definition 22 (Halbstetigkeit einer Funktion, vgl. KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 119 ff.).** Eine Funktion  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  heisst unterhalbstetig ( bzw. oberhalbstetig) im Punkt  $x_0 \in D(f)$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  existiert, so dass für alle  $x \in U_\delta(x_0)$  die Ungleichung  $f(x) > f(x_0) - \epsilon$  ( bzw.  $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ ) gilt.

Äquivalent kann man diese Definition im Fall eines metrischen Raumes  $X$  und  $D(f) \subseteq X$  mit Hilfe von Folgen wie folgt aufschreiben:

**Definition 23 (Halbstetigkeit einer Funktion, vgl. BLANCHARD&BRÜNING [15], S. 17).** Es sei  $X$  ein metrischer Raum mit der ersten Abzählbarkeitsaxiom, d.h. jeder Punkt besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis. Funktion  $f : D(f) \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  heisst unterhalbstetig ( bzw. oberhalbstetig) im Punkt  $x_0 \in D(f)$ , falls für alle Folgen  $x_N$  mit  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = x_0$  die Ungleichung

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} f(x_N) \geq f(x_0) \text{ (bzw. } \limsup_{N \rightarrow \infty} f(x_N) \leq f(x_0)) \text{ gilt.}$$

**Definition 24 (Oberhalbstetigkeit einer mengenwertigen Abbildung, vgl. CLARKE [27], S. 29).** Seien  $X, Y$  Banachräume. Eine Mengenwertige Abbildung ist eine Abbildung  $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  aus  $X$  in die Potenzmenge  $\mathcal{P}(Y)$ , d.h. die Menge aller Teilmengen von  $Y$ .  $\Gamma(\cdot)$  ist oberhalbstetig in  $x_0$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in x_0 + \delta B_X$  die Inklusion  $\Gamma(x) \subset \Gamma(x_0) + \epsilon B_Y$  gilt, wobei mit  $B_X, B_Y$  die Einheitskugeln in  $X$  bzw.  $Y$  bezeichnet sind.

Mithilfe der Halblimites im Sinne von Kuratowski kann man diese Definition wie folgt umformulieren:

**Definition 25 (Oberhalbstetigkeit einer mengenwertigen Abbildung, vgl. AUBIN&FRANKOWSKA [11], S. 38).** Seien  $X, Y$  Banachräume. Wir betrachten eine mengenwertige Abbildung  $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  mit nichtleeren, abgeschlossenen Bildern. Die Abbildung  $\Gamma(\cdot)$  heisst oberhalbstetig in  $x_0 \in X$ , wenn  $\limsup_{x \rightarrow x_0} \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x_0)$  mit

$$\limsup_{N \rightarrow x_0} A_N := \left\{ v \in X \mid \begin{array}{l} \exists \{v_N\} \subset X \text{ mit } v_N \in A_N \text{ für unendlich viele } N \\ \text{und } \lim_{N \rightarrow \infty} \|v_N - v\| = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.1})$$

gilt.

**Satz 40 (Verallgemeinerter Satz von Weierstraß, vgl. CARATHÉODORY [21], Satz 5, S. 139).**  $(X, \tau)$  sei ein topologischer Raum, die Topologie  $\tau$  gestatte die Folgenkonvergenz. Wenn  $Z \subseteq X$   $\tau$ -folgenkompakt ist und  $f : X \cap Z \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $Z$   $\tau$ -unterhalbstetig ist, so nimmt  $f$  auf  $Z$  sein Infimum an, d.h. für die Aufgabe

$$f(x) \rightarrow \inf!, \quad x \in X \cap Z \quad (\text{B.2})$$

existiert eine globale Minimalstelle  $\hat{x} \in Z$ .

**Definition 26 (Testfunktionen, vgl. ADAMS [1], S. 19).** Unter der Menge der Testfunktionen versteht man die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, d.h.

$$C^{0,\infty}(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \phi \text{ ist kompakt in } \Omega\}. \quad (\text{B.3})$$

**Definition 27 (Maßraum, vgl. ELSTRODT [34], S. 28).** Ist  $m(\cdot)$  ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma$  über  $X$ , so heißt  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum.

**Definition 28 ( $\sigma$ -endliches Maß, vgl. ELSTRODT [34], S. 59).** Sei  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum. Das Maß  $m(\cdot)$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn es eine abzählbare Folge messbarer Mengen  $\{S_k\}$ ,  $(k = 1, 2, 3, \dots)$  gibt, die alle ein endliches Maß  $m(S_k) < \infty$  besitzen und die Grundmenge  $X$  überdecken, d.h. es gilt  $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ .

**Definition 29 (Konvergenz dem Maße nach, vgl. ELSTRODT [34], S. 252).** Sei  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum. Die Funktionen  $f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $N \in \mathbb{N}_0$ ) seien messbar. Man sagt, die Folge  $\{f_N\}$ ,  $(N = 1, 2, \dots)$  konvergiert nach Maß (oder dem Maße nach) gegen  $f_0(\cdot)$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m(\{t \in X \mid |f_N(t) - f_0(t)| \geq \epsilon\}) = 0. \quad (\text{B.4})$$

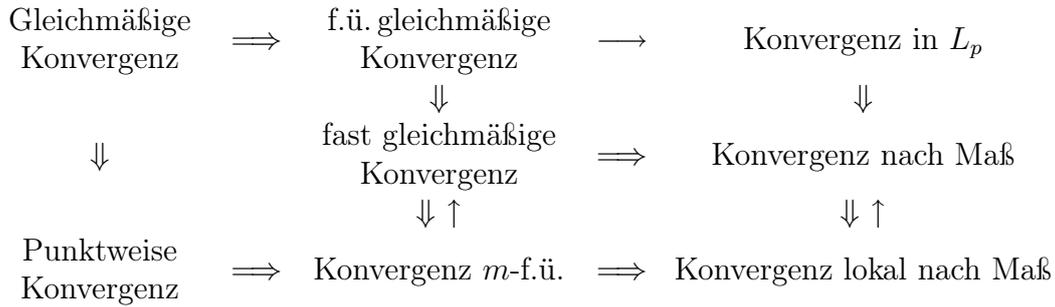
**Definition 30 (Fast gleichmäßige Konvergenz, CHAE [26], S. 106).** Sei  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum. Eine Funktionenfolge  $\{f_N\}$ ,  $(N = 1, 2, \dots)$ ,  $f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$ , konvergiert fast gleichmäßig gegen eine Funktion  $f(\cdot)$  auf einer messbaren Menge  $A$ , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  eine messbare Teilmenge  $E \subset A$  mit  $m(E) < \epsilon$  existiert, so dass  $\{f_N\}$  gleichmäßig auf  $A \setminus E$  gegen  $f(\cdot)$  konvergiert.

**Satz 41 (Satz von Jegorow, vgl. ELSTRODT [34], S. 250).** Seien  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum und  $\{f_N\}$ ,  $(N = 1, 2, \dots)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $m$ -fast überall auf  $X$  gegen die messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Ist  $m(X) < \infty$ , so konvergiert  $\{f_N\}$ ,  $(N = 1, 2, \dots)$  fast gleichmäßig gegen  $f(\cdot)$ .  $\square$

**Vergleich der Konvergenzbegriffe, vgl. ELSTRODT [34], S. 255 oder KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 446.**

Sei  $(X, \Sigma, m)$  ein Maßraum. Das nächste Schema stellt die wesentlichen Beziehungen zwischen verschiedenen Konvergenzarten. Dabei werden mit  $\longrightarrow$  die Implikationen

bezeichnet, die unter der Zusatzvoraussetzung  $m(X) < \infty$  gelten.



**Satz 42 (Lemma von Fatou, vgl. DUNFORD&SCHWARTZ [32], S. 152).** Sei  $(X, \Sigma, m)$  ein positiver Maßraum und  $\{f_N\}$ ,  $(N = 1, 2, \dots)$  eine Folge messbarer nichtnegativer aber nicht unbedingt integrierbarer Funktionen  $f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_X \liminf_{N \rightarrow \infty} f_N(x) dm(x) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N(x) dm(x). \quad (\text{B.5})$$

□

**Definition 31 (schwache Konvergenz, vgl. WERNER [98], S. 106).** Eine Folge  $\{x_N\}$  in einem normierten Raum  $X$  heißt schwach konvergent gegen  $x_0$ , wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(x_N) = f(x_0) \quad (\text{B.6})$$

für alle Funktionale  $f \in X^*$  gilt.

**Definition 32 (schwache\* Konvergenz, vgl. KOLMOGOROV&FOMIN [54], S. 230 ff.).** Sei  $X$  ein normierter Raum,  $X^*$  sein Dualraum. Eine Folge  $\{f_N\} \subset X^*$  heißt schwach\* konvergent gegen  $f_0$ , wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f_0(x) \quad (\text{B.7})$$

für alle Elemente  $x \in X$  gilt.

**Satz 43 (Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, vgl. ALT, Satz 7.2.19, S. 270).** Sei ein Optimierungsproblem

$$(P) : \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \min! \quad \text{bzgl. } x \in F; \\ F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

gegeben und die Abbildungen  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien in einem für  $(P)$  zulässigen Punkt  $x^*$  differenzierbar. Ist  $x^*$  lokales Minimum zum  $(P)$  und ist  $x^*$  regulär, d.h. der Tangentialkegel  $T(F, x^*)$  mit dem Linearisierungskegel  $L(F, x^*)$  übereinstimmt, dann existieren Lagrange Multiplikatoren  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  und  $\mu_j \in \mathbb{R}$ ,  $(j = 1, \dots, p)$ , so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0; \quad (\text{B.9})$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \mu_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (\text{B.10})$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. (1978). *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Diego.
- [2] Alt, W. (2002). *Nichtlineare Optimierung. Eine Einführung in die Theorie, Verfahren und Anwendungen*, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.
- [3] Antoci, F. (2003). Some necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces. *Ricerche di Matematica*. **52**, 55 – 71.
- [4] Arada, N.; Raymond. J. P. (2000). Optimal control problems with mixed control-state constraints. *Journal on Control and Optimization* **39**, Vo. 5, 1391 – 1407.
- [5] Arrow, K. J.; Kurz, M. (1970). *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policies*, The Johns Hopkins Press, Baltimore.
- [6] Aseev, S. M.; Kryazhimskiy, A. V. (2003). The Pontrjagin maximum principle and transversality condition for a class of optimal control problems with infinite time horizons. *Interim Report IR-03-013*, IIASA, Austria.
- [7] Aseev, S. M.; Kryazhimskiy, A. V. (2008). Shadow Prices in Infinite-horizon Optimal Control Problems with Dominating Discounts. *Applied Mathematics and Computation* **204**, No. 2, 519 – 531.
- [8] Aseev, S. M.; Kryazhimskii, A. V. (2007). *The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Economic Growth Problems*, Proceedings of Steklov Institute of Mathematics, Vol. **257**, Moscow.
- [9] Athans, M.; Falb, P. (1966). *Optimal Control*, McGraw Hill, New York.
- [10] Aubin, J. P.; Clarke, F. H. (1979). Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control Problems. *Journal on Control and Optimization* **17**, No. 5, September 1979, 567 – 586.
- [11] Aubin, J. P.; Frankowska, H. (1990). *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.
- [12] Balder, E. J. (1983). An existence result for optimal economic growth problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **95**, 195 – 213.

- [13] Baum, R. F. (1976). Existence theorems for lagrange control problems with unbounded time domain. *Journal of Optimization Theory and Applications* **19**, No. 1, 89 – 116.
- [14] Benveniste, L. M.; Scheinkman, J. A. (1982). Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case. *Journal of Economic Theory* **27**, 1 – 19.
- [15] Blanchard, P.; Brüning, E. (1982). *Direkte Methoden der Variationsrechnung*, Springer-Verlag, Wien, New York.
- [16] Blot, J.; Hayek, N. (1996). Second order necessary conditions for the infinite-horizon variational problems. *Mathematics of Operations Research* **21**, 979 – 990.
- [17] Blot, J.; Hayek, N. (2000). Sufficient conditions for infinite-horizon calculus of variations problems. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations* **5**, 279 – 292.
- [18] Blot, J.; Michel, P. (1996). First-order necessary conditions for infinite-horizon variational problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **88**, 339 – 364.
- [19] Carlson, D. A. (1995). An existence theorem for hereditary Lagrange problems on an unbounded interval. In: *Boundary value problems for functional differential equations* (Hersg.: J. Henderson), 73 – 82, World Scientific Publishing, Singapore, River Edge, London.
- [20] Carlson, D. A.; Haurie, A. B.; Leizarowitz, A. (1991). *Infinite Horizon Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- [21] Carathéodory, C. (1968). *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Chelsea, New York.
- [22] Cartigny, P.; Michel, P. (2003). On a sufficient transversality condition for infinite horizon optimal control problems. *Automatica* **39**, 1007 – 1010.
- [23] Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* **32**, 233 – 240.
- [24] Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, A Turnpike Theorem, *Econometrica* **34**, 833 – 850.
- [25] Cesari, L. (1966). Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems in unilateral constraints. *Transactions of the American Mathematical Society* **124**, 369 – 412.
- [26] Chae, S. B. (1995). *Lebesgue Integration*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

- [27] Clarke, F. H. (1990). *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.
- [28] Clarke, F. H.; Ledyaev, Yu. S.; Stern, R. J.; Wolenski, P. R. (1998). *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics **178**, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-etc.
- [29] Clarke, F. H.; Vinter, R. (1983). Local optimality conditions and Lipschitz solutions to the Hamilton-Jacobi equation. *Journal on Control and Optimization* **21**, 856 – 870.
- [30] Dacorogna, B. (2004). *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, London.
- [31] Dmitruk A. V.; Kuz’kina N. V. (2005). Existence theorem for an optimal control problem on an unbounded time interval, (in Russian), *Mathematical Notes* **78**, No.4., 466 – 480.
- [32] Dunford N.; Schwartz, J. T. (1988). *Linear Operators. Part I: General Theory*. Wiley-Interscience; New York-etc.
- [33] Ekeland, I.; Temam, R. (1976). *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland Publ. Comp. and New York: Amer. Elsevier Publ. Comp.
- [34] Elstrodt, J.(1996). *Mass- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin.
- [35] Feichtinger, G.; Hartl, R. F. (1986). *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*. de Gruyter; Berlin - New York.
- [36] Feinstein, C. D.; Luenberger, D. G. (1981). Analysis of the Asymptotic Behavior of Optimal Control Trajectories: The Implicit Programming Problem. *Journal on Control and Optimization* **19**, 561 – 585.
- [37] Felgenhauer, U. (1998). *Diskretisierung von Steuerungsproblemen unter stabilen Optimalitätsbedingungen* Habilitationschrift, BTU Cottbus, Dresden-Cottbus.
- [38] Fichtenholz, G. M. (1990). *Differential- und Integralrechnung. Band II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 10th ed.
- [39] Goh, B. S.; Leitmann, G.; Vincent, T. L. (1974). Optimal control of a prey-predator system. *Mathematical Biosciences* **19**, 263 – 286.
- [40] Grass, D.; Caulkins, J. P.; Feichtinger, G.; Tragler, G.; Behrens, D. A. (2008). *Optimal Control of Nonlinear Processes With Applications in Drugs, Corruption, and Terror*. Springer; Berlin - Heidelberg.
- [41] Grüne, L.; Rantzer, A. (2008). On the infinite horizon performance of receding horizon controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**, No. 9, 2100 – 2111.

- [42] Halkin, H. (1979). Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica* **42**, 267 – 272.
- [43] Haurie, A. (2003). Integrated assessment modeling for global climate change: An infinite horizon optimization viewpoint. *Environmental Modeling and Assessment* **8**, 117 – 132.
- [44] Ioffe, A. D. (1979). Necessary and sufficient conditions for a local minimum 3: second order conditions and augmented duality. *Journal on Control and Optimization* **17**, 266 – 288.
- [45] Ioffe, A. D.; Tichomirow, V. M. (1979). *Theorie der Extremalaufgaben*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [46] Ito, K.; Kunisch, K. (2006). Receding Horizon Control with Incomplete Observations. *Journal on Control and Optimization* **45**, No. 1, 207 – 225.
- [47] Kalman, R. E. (1960). On the general theory of control systems. *Proceedings of the 1st International Congress on Automatic Control*, Moskau.
- [48] Kalman, R. E. (1960). Contribution to the Theory of Optimal Control. *Boletín Sociedad Matemática Mexicana* **5**, 102 – 119.
- [49] Kamihigashi, T. (2001). Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems. *Econometrica* **69**, 995 – 1012.
- [50] Kircheis, R. (2008). *On the Solution of State Constrained Optimal Control Problems in Economics*, Masterarbeit in Finanzmathematik (Technical report, IDE0830), School of Information Science, Computer and Electrical Engineering, Halmstad Universität, Halmstad.
- [51] Klötzler, R. (1969). *Mehrdimensionale Variationsrechnung*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [52] Klötzler, R. (1979). On a general conception of duality in optimal control. In: *Equadiff IV. Proceedings of the Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications held in Prague, August 22 – 26, 1977*. (Fábera, J. (Ed.)), 189 – 196, Springer, Berlin (Lecture Notes in Mathematics **703**).
- [53] Klötzler, R. (1985). Zur analytischen Lösung alter und neuer geometrischer Optimierungsprobleme. In: *Equadiff VI. Proceedings of the International Conference on Differential Equations and their Applications held in Brno, August 26 – 30, 1985*. (Vosmansk, J. and M. Zlmal J. (Ed.)), 451 – 458, Springer, Berlin.
- [54] Колмогоров, А. Н.; Фомин, С. В. (1989). (Russische Ausgabe) *Элементы теории функции и функционального анализа*. Nauka, Moskwa.
- [55] Korn, R.; Korn, E. (1999). *Optionsbewertung und Portfoliooptimierung*, GABLER Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.

- [56] Kufner, A. (1985). *Weighted Sobolev Spaces*. John Wiley & Sons; Chichester, *cdots*.
- [57] Kunkel, P.; von dem Hagen, O. (2000). Numerical Solution of Infinite-Horizon Optimal-Control Problems. *Computational Economics* **16**, 189 - 205.
- [58] Kurtz, D. S.; Swartz, C. W. (2005). *Theories of Integration. The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*. World Scientific; New Jersey-London-Singapore-etc.
- [59] Leizarowitz, A.; Mizel, V. J. (1989). One-dimensional infinite-horizon variational problems arising in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **106**, 161 - 194.
- [60] Leonardi, S. (1994). On embedding theorems and Nemytski's operator in weighted Sobolev spaces. *Ricerche di Matematica* **XLIII**, fasc. 1, 35 - 44.
- [61] Lions, P. L. (1982). *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. (*Research Notes in Mathematics* **69**), Pitman, Boston.
- [62] Lykina, V.; Pickenhain, S.; Wagner, M. (2008). Different interpretations of the improper integral objective in an infinite horizon control problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **340**, 498 - 510.
- [63] Lykina, V.; Pickenhain, S.; Wagner, M. (2008). On a resource allocation model with infinite horizon. *Applied Mathematics and Computation* **204**, 595 - 601.
- [64] Lucchetti, R.; Patrone, F. (1980). On Nemytskii's Operator and its Application to the Lower Semicontinuity of Integral Functionals. *Indiana University Mathematical Journal* **29**, No. 5, 703 - 713.
- [65] Magill, M. J. P. (1980). An existence criterion for models of resource allocation over an infinite horizon. *Economics Letters* **5**, 209 - 213.
- [66] Magill, M. J. P. (1981). On a class of variational problems arising in mathematical economics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **82**, 66 - 74.
- [67] Magill, M. J. P. (1982). Pricing infinite horizon programs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **88**, 398 - 421.
- [68] Malanowski, K.; Maurer, H.; Pickenhain, S. (2004). Second Order Sufficient Conditions for State Constrained Optimal Control Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **123**, 595 - 617.
- [69] Maurer, H.; Zowe, J. (1979). First and second order sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. *Mathematical Programming* **16**, 98 - 110.

- [70] Maurer, H.; Osmolovskii, N. P. (2003). Second order optimality conditions for bang-bang control problems. *Control and Cybernetics* **36**, 555 – 584.
- [71] McShane, E. J. (1934). Existence theorems for ordinary problems of calculus of variations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **3**, 181 – 211, 287 – 315.
- [72] Michel, P. (1982). On the transversality conditions in infinite horizon optimal problems. *Econometrica* **50**, 975 – 985.
- [73] Pickenhain, S. (1992). *Beiträge zur Theorie mehrdimensionaler Steuerungsprobleme*, Habilitationsschrift, Leipzig.
- [74] Pickenhain, S. (1998). Duality in optimal control with first-order differential equations. *Preprint Reihe Mathematik. M-08/1998*, BTU Cottbus.
- [75] Pickenhain, S. (1988). Zum Vergleich verschiedener Dualitätsbegriffe aus der Sicht der Steuerungstheorie. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.* **7**, No. 3, 277 – 285.
- [76] Pickenhain, S. (1992). Sufficiency Conditions for Weak Local Minima in Multidimensional Optimal Control Problems with Mixed Control-State Restrictions. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.* **11**, 559 – 568.
- [77] Pickenhain, S. (2009). On Adequate Transversality Conditions For Infinite Horizon Optimal Control Problems – A Famous Example of Halkin. *Applied Mathematics and Computation* (Status: angenommen).
- [78] Pickenhain, S.; Lykina, V. (2006). Sufficiency conditions for infinite horizon optimal control problems. In: *Recent Advances in Optimization*. (Seeger, A. (Ed.)), (*Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **563**), 217 – 232, Springer, Berlin-etc.
- [79] Pickenhain, S.; Lykina, V.; Wagner, M. (2008) On the lower semicontinuity of functionals involving Lebesgue or improper Riemann integrals in infinite horizon optimal control problems. *Control and Cybernetics* **37**, 451 – 468.
- [80] Pickenhain, S.; Tammer, K. (1991). Sufficient conditions for local optimality in multidimensional control problems with state restrictions. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **10**, 397 – 405.
- [81] Pickenhain, S.; Wagner, M. (2000). Critical points in relaxed deposit problems. In: *Calculus of Variations and Optimal Control*. (Ioffe, A., Reich, S., Shafrir, I. (Eds.)), Technion 98, Vol. **II**), (*Research Notes in Mathematics.* **411**), 217 – 236, Chapman Hall / CRC Press; Boca Raton etc.
- [82] Pickenhain, S.; Wagner, M. (2005). Piecewise continuous controls in Dieudonné-Rachevsky type problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **127**, 145 – 163.

- [83] Pontrjagin, L. S.; Boltjanskij, V. G.; Gamkrelidze, R. V.; Mischenko, Y. F. (1969). *Matematicheskaja teorija optimalnih protsessov*. Nauka, Moskwa.
- [84] Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal* **152**, No. 38, 543 – 559.
- [85] Rapaport, A; Cartigny, P. (2007). Nonturnpike Optimal Solutions and Their Approximations in Infinite Horizon. *Journal of Optimization Theory and Applications* **134**, No. 38, 1 – 14.
- [86] Robinson, S. M. (1982). Generalized equations and their solutions, Part II. Applications to nonlinear programming. *Mathematical Programming Study* **19**, 200 – 221.
- [87] Rockafellar, R. T. (1970). Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **32**, 174 – 222.
- [88] Schwartz, L. (1950). *Théorie des distributions.*, Band I, Hermann, Paris.
- [89] Seierstad, A. (1999). Necessary Conditions for Nonsmooth, Infinite-Horizon, Optimal Control Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **103**, No. 1, 201 – 229.
- [90] Seierstad, A.; Sydsaeter, K. (1977). Sufficient conditions in optimal control theory. *International Economic Review* **18**, No. 2, 367 – 391.
- [91] Sethi, S. P.; Thompson, G. L. (2000). *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics* Kluwer; Boston - Dordrecht - London, 2nd ed.
- [92] Sieveking, M.; Semmler, W. (1997). The Present Value of Resources with Large Discount Rates. *Journal of Applied Mathematics and Optimization* **35**, 283 – 309.
- [93] Smirnov, G. V. (1996). Transversality Condition for Infinite-Horizon Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **88**, No. 3, 671 – 688.
- [94] Takekuma, S.-I. (1980). A sensitivity analysis of optimal economic growth. *Journal of Mathematical Economics* **7**, 193 – 208.
- [95] Tonelli, L. (1934). Su gli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **3**, 401 – 450.
- [96] Vainberg, M. M. (1964). *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*. Holden-Day, San Francisco - London - Amsterdam.
- [97] von Weizsaecker, C. C. (1965). Existence of optimal programs of accumulation for an infinite time horizon. *Review of Economic Studies* **32**, 85 – 92.

- [98] Werner, D. (1991). *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York etc.
- [99] Vinter, R.; Wolenski, P. (1990). Hamilton-Jacobi theory for problems with data measurable in time. *Journal on Control and Optimization* **28**, 1404 – 1419.
- [100] Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 6th ed.
- [101] Zaslavski, A. J. (1995). The existence of periodic minimal energy configurations for one-dimensional infinite horizon variational problems arising in continuum mechanics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **194**, 459 – 476.
- [102] Zaslavski, A. J. (2006). *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*. 1. Aufl., Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. **80**, Springer, New York.