

Das Pontrjaginsche Maximumprinzip für eine Klasse hybrider Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen und seine Anwendung

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Nico Tauchnitz

geboren am 11.09.1977 in Eilenburg

Gutachter: Prof. Dr. Sabine Pickenhain

Gutachter: Prof. Dr. Walter Alt

Gutachter: Prof. Dr. Vladimir Veliov

Tag der mündlichen Prüfung: 23.04.2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Eine elementare Beweismethode	7
1.1 Das PMP in einem „einfachen“ Fall	8
1.1.1 Formulierung der Aufgabe	8
1.1.2 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip	10
1.1.3 Der Beweis des Maximumprinzips	10
1.1.4 Consumption vs. Investment	15
1.2 Ein „einfaches“ hybrides Steuerungsproblem	19
1.2.1 Formulierung der Aufgabe	19
1.2.2 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip	22
1.2.3 Der Beweis des Maximumprinzips	23
1.2.4 Consumption vs. Investment	27
2 Eine Grundaufgabe	33
2.1 Formulierung der Aufgabe und das PMP	33
2.2 Die verallgemeinerte Nadelvariation	36
2.2.1 Motivation	36
2.2.2 Die Konstruktion der Mengenfamilie $\{M(\alpha)\}$	40
2.2.3 Die Definition der verallgemeinerten Nadelvariation	44
2.2.4 Eigenschaften der verallgemeinerten Nadelvariation	44
2.3 Der verallgemeinerte Satz von Ljusternik	49
2.3.1 Das Prinzip der kontrahierenden mengenwertigen Abbildung	49
2.3.2 Der Satz von Ljusternik	51
2.4 Die abstrakte Optimierungsaufgabe	56
2.4.1 Die Definitionen der Abbildungen	56
2.4.2 Eigenschaften der Abbildung $F(x(\cdot), u(\cdot))$	56
2.4.3 Differenzierbarkeit des Zielfunktional $J(x(\cdot), u(\cdot))$	60
2.5 Die Lagrangesche Multiplikatorenregel	60
2.5.1 Die Formulierung des Satzes	60
2.5.2 Der Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel	61
2.6 Beweisschluss	69

3	Zum Subdifferential der Zustandsbeschränkungen	73
3.1	Subdifferential konvexer Funktionen	74
3.1.1	Konvexe, homogene und konjugierte Funktionen	74
3.1.2	Das Subdifferential der konvexen Analysis	75
3.1.3	Die klassische Richtungsableitung konvexer Funktionen	77
3.1.4	Clarke'sches Subdifferential konvexer Funktionen	79
3.1.5	Das Subdifferential der Funktion $g(x(\cdot)) = \max_{t \in [a,b]} x(t)$	80
3.2	Eine spezielle Verkettung von Funktionen	82
3.2.1	Eine Kettenregel	82
3.2.2	Das Subdifferential der Funktion $f(x(\cdot)) = \max_{t \in [a,b]} \varphi(t, x(t))$	86
4	Die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe	87
4.1	Formulierung der Aufgabe und das PMP	87
4.2	Die verallgemeinerte Nadelvariation	92
4.2.1	Die Definition der verallgemeinerten Nadelvariation	92
4.2.2	Eigenschaften der verallgemeinerten Nadelvariation	93
4.3	Die abstrakte Optimierungsaufgabe	99
4.3.1	Die Definitionen der Abbildungen	99
4.3.2	Eigenschaften der Abbildung $F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$	100
4.3.3	Differenzierbarkeit des Zielfunktional $J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$	102
4.3.4	Eigenschaften der Funktionen $G_j(x(\cdot))$	103
4.3.5	Differenzierbarkeit der Randbedingungen $H_l(x(\cdot))$	105
4.4	Die Lagrangesche Multiplikatorenregel	105
4.4.1	Die Formulierung des Satzes	105
4.4.2	Bemerkungen zum Beweis	106
4.4.3	Der Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel	108
4.5	Beweisschluss	117
4.6	Eine hybride Grundaufgabe	122
4.7	Freier Anfangs- und Endzeitpunkt	123
5	Analyse eines Modells privater Altersvorsorge	129
5.1	Das Modell	129
5.2	Anwendung des PMP	130
5.3	Optimale Steuerungsrate in einem Zeitpunkt	133
5.4	Spezifikation der Abbildungen	135
5.5	Beispiele mit fester Zinsrate	138
5.6	Ein Beispiel mit variabler Zinsrate	148
5.7	Zusammenfassung	156
A	Differentialgleichungen	159
A.1	Existenz- und Abhängigkeitssätze	159
A.2	Stückweise stetige rechte Seiten	162
A.3	Meßbare rechte Seiten	164

B	Wichtige mathematische Sätze	167
B.1	Maßtheoretische Grundlagen	167
B.2	Integration bzgl. Borelscher Maße	168
B.3	Sätze der Funktionalanalysis	175
B.4	Zum Limes superior im Clarke-Kalkül	177
C	Ergänzungen zum Vorsorgemodell	179
C.1	Untersuchung der Multiplikatoren λ_0 und $p(T)$	179
C.2	Diskussion der Maximumsbedingung (5.10)	180
C.3	Schematische Übersicht	181
	Symbolverzeichnis	183
	Literatur	185

Einleitung

Die Entwicklung der mathematischen Theorie der Optimalen Steuerung wurde durch Problemstellungen aus verschiedensten Fachbereichen, z. B. der Physik, Biologie, Chemie oder den Ingenieurwissenschaften, notwendig. Diese Aufgabenstellungen haben gemein, dass sie steuerbar, d. h. durch den Menschen beeinflussbar, sind. Es ergibt sich damit die Frage nach derjenigen *Steuerung*, die im gewünschten Sinne die *beste*, wir sagen die *optimale*, ist. Diese optimale Steuerung zeigt dem Anwender Handlungsweisen auf, wie auf den *Zustand* des steuerbaren Objektes eingewirkt werden muss, damit sich dieser entsprechend der Zielvorstellungen auf die beste Art und Weise verhält.

Als ein wesentliches Anwendungsgebiet der Theorie der Optimalen Steuerung gilt die Raumfahrt. So formulierte der Raketenpionier R. H. Goddard die Aufgabe, dass eine Höhenrakete mit einer vorgegebenen Treibstoffmenge eine möglichst große Höhe erreichen soll, als ein Steuerungsproblem. Weitere Einsatzmöglichkeiten für die Optimierung ergeben sich, wenn gegensätzliche Ziele gleichzeitig beachtet werden müssen. Gewicht und Sicherheit sind Beispiele dafür aus der Raketenentwicklung. Einerseits sollte das Gesamtgewicht so gering wie möglich sein, um weniger Treibstoff zu verbrauchen. Andererseits ist die Explosionsgefahr bei dickeren Wänden der Brennstoffkammern geringer, dabei aber das Gewicht der Rakete höher. Die optimale Abstimmung dieser gegenläufigen Bestrebungen ist gesucht (vgl. Plail [27], S. 58 ff).

In die Entstehung dieser neuen mathematischen Disziplin flossen verschiedene fachspezifische Quellen ein. An erster Stelle ist dabei die *klassische Variationsrechnung* zu nennen. In den USA wurde nach dem Zweiten Weltkrieg die Research and New Development (RAND) Corporation ins Leben gerufen, für die auch M. R. Hestenes von 1948 bis 1952 Forschungsarbeit leistete. Die von RAND gestellte Aufgabe, optimale Flugbahnen zu berechnen, packte Hestenes mit Hilfe der Variationsrechnung an. In zwei RAND Research Memoranda (RM) passte er die Variationsrechnung an die neue Aufgabe an ([27], S. 78). Mit RM-100 hat Hestenes etwas sehr Wichtiges für die Entwicklung der Optimalen Steuerung geleistet. „*Mit der Formulierung [...] goß er die Aufgabe der optimalen Steuerung in eine für die Anwendung und die Entwicklung der Theorie gut zu verwendende allgemeine Form, die zum Standard wurde. Diese häufig Pontrjagin zugeschriebene Leistung erbrachte Hestenes in dem außerhalb von RAND kaum verbreiteten Memorandum RM-100 knapp zehn Jahre vor den Arbeiten am Steklov-Institut in Moskau.*“ ([27], S. 84.) Allerdings löste Hestenes die Aufgaben nicht aus der Umgebung der Variationsrechnung heraus ([27], S. 188).

Die mathematische Theorie der Optimalen Steuerung entwickelte sich in den 1950er Jahren rasch und lieferte bereits 1956 erste Veröffentlichungen zum Maximumprinzip, das zunächst vom sowjetischen Mathematiker L. S. Pontrjagin als Hypothese ausgesprochen wurde. 1962 erschien im russischen Original eine zusammenfassende Darstellung der erzielten Ergebnisse von Pontrjagin, Boltjanskij, Gamkrelidze und Misčenko, deren Übersetzung ins Englische und Deutsche, [28], zeitnah folgte.

Die heutige Standardformulierung von Aufgaben der Optimalen Steuerung nach Hestenes ist eng mit den Problemen in der klassischen Variationsrechnung verknüpft. Jedoch werden in der klassischen Variationsrechnung eine ganze Reihe von Variationsproblemen, die für die Technik wichtig sind, nicht gelöst. In technischen Problemen können die *Steuerungsparameter*, mit denen die Aufgabe beeinflusst werden kann, nicht beliebige Werte annehmen, sondern unterliegen gewissen Beschränkungen. Die Menge der Steuerungsparameter, die alle vorgegebenen Einschränkungen erfüllen, nennen wir den *Steuerbereich*. Besonders wichtig für die Praxis ist der Fall, in dem die Beschränkungen einen abgeschlossenen und beschränkten Steuerbereich definieren. D. h., dass die Steuerungsparameter gewisse Grenzlagen annehmen können. Dieser Umstand hebt Probleme der Theorie der Optimalen Steuerung aus dem Kontext der klassischen Variationsrechnung heraus.

In der Monographie [28] „*Mathematische Theorie optimaler Prozesse*“ von Pontrjagin et al. wurde das Maximumprinzip in einem allgemeinen Fall bewiesen. Bemerkenswert an den dargelegten Resultaten ist die Tatsache, dass mit Hilfe der angegebenen notwendigen Bedingungen die Aufgabe auf *starke lokale Minimalstellen* untersucht wird. Der Terminus „lokal“ bezieht sich auf den Zustand des steuerbaren Objektes. Wird von einem lokal optimalen Zustand geringfügig abgewichen, wird die Bewältigung der vorliegenden Problemstellung nicht verbessert. Der Begriff der „starken Optimalität“ bedeutet, dass bei der Auswahl „bester“ Lösungen, den zum Vergleich herangezogenen Steuerungen, neben den modellbedingten Grenzen und der gewählten Klasse zulässiger Steuerungen, keine zusätzlichen Einschränkungen auferlegt werden. Dabei gilt aus theoretischer Sicht, dass wir zu einem allgemeineren Optimalitätsbegriff gelangen, wenn wir die Aufgabe weniger restringieren. Aus diesem Grund verdienen die Resultate von Pontrjagin et al. eine besondere Würdigung: In der Theorie der Optimalen Steuerung wird ein Maximumprinzip *Pontrjaginsches Maximumprinzip* genannt, wenn die angegebenen notwendigen Bedingungen starke lokale Minimalstellen charakterisieren.

In den folgenden Jahren wurde die in [28] gelöste Grundaufgabe weiter verallgemeinert. Insbesondere wurden Probleme mit *Zustandsbeschränkungen* betrachtet und das Pontrjaginsche Maximumprinzip bewiesen (vgl. z. B. Dubovickij & Miljutin [15], Ioffe & Tichomirov [25] oder den Überblicksartikel von Hartl et al. [20]). Derartige Nebenbedingungen treten z. B. im Straßenverkehr auf. Wollen wir zeitoptimal, d. h. so schnell wie möglich, mit dem Auto von A nach B fahren, müssen wir die zulässige Höchstgeschwindigkeit beachten. Gerade das Beispiel des Autofahrens macht deutlich, dass neben kontinuierlichen Steuerungen, hier „beschleunigen“ und „bremsen“, diskrete Steuerparameter, d. h. der Wechsel des Ganges während der Autofahrt, in Steuerungsproblemen auftauchen können. Treten in einem Problem der Optimalen Steuerung sowohl kon-

tinuierliche als auch diskrete Steuerungen auf, so sprechen wir von einem *hybriden Steuerungsproblem*¹.

Wir betrachten in dieser Arbeit Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen, in denen zu jedem Zeitpunkt aus einer endlichen Anzahl von gegebenen *Strategien* eine eindeutig ausgewählt werden darf. Am Beispiel des Autofahrens ist mit der Auswahl einer „Strategie“ der Wechsel in den gewünschten Gang gemeint. Dabei ist zu beachten, dass wir beim Schalten in einen anderen Gang („Wechsel der Dynamik“) gleichzeitig auch die Kostenfunktion ändern. Diese könnte hier den Benzinverbrauch pro Zeit oder die dadurch entstehenden Kosten pro Zeit angeben. I. a. kann damit ebenso ein Wechsel in einen anderen Steuerbereich verbunden sein. Zur Unterscheidung der verschiedenen Strategien indizieren wir die Dynamiken, Kostenfunktionen und Steuerbereiche, wobei der Index einer gegebenen endlichen Menge angehört. Wir verwenden die Indexmenge $\{1, \dots, k\}$. Den Wechseln zwischen verschiedenen Strategien auf dem betrachteten Zeitintervall liegt eine *Schaltstrategie* („switching strategy“) zugrunde, die aus der Angabe einer Anzahl von Wechselzeitpunkten und der Angabe von Zahlen aus der Indexmenge $\{1, \dots, k\}$ besteht. Diese Zahlen der Indexmenge geben an, welche Strategie zu den Wechselzeitpunkten ausgewählt wird.

Sussmann [33], Garavello & Piccoli [19], Clarke & Vinter [12] und Dmitruk & Kaganovich [14] untersuchen Aufgaben, in denen die Wechselzeitpunkte zu Unstetigkeiten der Zustandstrajektorie führen können. Zur Analyse dieser Phänomene vergleichen sie Trajektorien mit Schaltstrategien, die die gleiche Anzahl von Wechselzeitpunkten und die gleiche Abfolge von Zahlen aus der Indexmenge besitzen, aber dabei verschiedene „locations“ dieser Zeitpunkte zugelassen sind².

Wir schränken unsere Betrachtungen wie Shaikh [31], Shaikh & Caines [32] auf Aufgaben mit stetigen Zuständen ein, die zusätzlich in unseren Problemstellungen Zustandsbeschränkungen genügen müssen. Im Gegensatz zu den oben zitierten Arbeiten zu hybriden Aufgaben geben wir ferner einen Vorschlag, wie die hybride Struktur als Steuervariable aufgefasst werden kann und wählen anschließend eine Modellierung, die formal wieder zu einem „üblichen“ Steuerungsproblem führt. Damit können wir für die betrachteten hybriden Steuerungsprobleme mit stetigen Zuständen den Begriff der *starken Optimalität* einführen. Nachdem wir ein hybrides Steuerungsproblem definiert haben, untersuchen wir dieses auf lokale Optimalstellen bzgl. aller zulässigen Steuerungen und aller zulässigen Schaltstrategien. D. h., dass wir den Steuerungen keine zusätzlichen Einschränkungen auferlegen und wir die notwendige Bedingungen in einem Pontrjaginschen Maximumprinzip zusammenfassen dürfen.

In der Arbeit „*A nonsmooth hybrid maximum principle*“ von Sussmann [33], werden sogenannte „switching costs“ nicht ausgeschlossen³. Diese Wechselkosten entstehen bei-

¹ „In a broad sense, hybrid control systems are control systems involving both continuous and discrete variables.“ (Dmitruk & Kaganovich [14], S. 1.)

² „The maximum principle gives necessary conditions for [...] a solution [...]. The result only depends on comparing trajectories with the same switching strategy [...]“ (Sussmann [33], S. 330.)

³Vgl. [33], S. 329 f.

spielsweise, wenn eine Investitions- oder Finanzierungsstrategie geändert wird und einmalige Kosten bei der Anschubfinanzierung anfallen. Derartige Kosten würden wir bei einer Unternehmung allerdings nur in Kauf nehmen, wenn wir davon überzeugt sind, dass sich diese zukünftig amortisieren. Jedoch wird die neue Strategie diese zusätzlich anstehenden Kosten erst im weiteren zeitlichen Verlauf (und i. a. in einem nicht-infinitesimalen Zeitrahmen) wieder einbringen. Aus diesem Grund ist in Aufgaben mit Wechselkosten der Begriff der lokalen Optimalität unzureichend.

Wir fassen zusammen: In der vorliegenden Arbeit beweisen wir notwendige Bedingungen für Aufgaben der Optimalen Steuerung mit stetigen Zustandstrajektorien, die sich durch endlich viele verschiedene Dynamiken mit den dazu gehörenden Integranden und Steuerbereichen sowie durch Phasenbeschränkungen auszeichnen. Neu an unserer Darstellung ist die Modellierung der Schaltstrategien mit Hilfe von Zerlegungen des betrachteten Zeitintervalls. Auf diese Weise ist es möglich – und das möchten wir besonders hervorheben – beim Vergleich zulässiger Trajektorien auf die Einschränkung auf die gleiche Schaltstrategie, d. h. auf die gleiche Anzahl von Wechselzeitpunkten und zu diesen Zeitpunkten das Wechseln in die gleichen Strategien, zu verzichten. So ist es uns möglich im Begriff der starken Optimalität die Schaltstruktur als Steuervariable zu berücksichtigen.

In unsere Betrachtungen beziehen wir Wechselkosten und zeitverzögerte Abläufe, wie sie bei chemischen Reaktionsprozessen vorkommen können, nicht ein. Auch der Frage nach der Existenz von Lösungen gehen wir im Rahmen dieser Arbeit nicht nach.

Bei der allgemeinen Beweismethode des Pontrjaginschen Maximumprinzips für hybride Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen orientieren wir uns an Ioffe & Tichomirov [25] und zeigen, dass diese auf die Aufgaben, die in dieser Arbeit betrachtet werden, angewendet werden kann.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

- Wir präsentieren im Kapitel 1 eine vergleichsweise sehr einfache Beweismethode für spezielle Aufgabenklassen, definieren im Abschnitt 1.2 ein „elementares“ hybrides Steuerungsproblem und beweisen für dieses das Pontrjaginsche Maximumprinzip. In dieser Definition einer hybriden Aufgabe sind bereits die grundlegenden Ideen enthalten, die wir auch in allgemeineren Problemstellungen verwenden. Abschließend verknüpfen wir in Kapitel 1 zwei klassische Investitionsmodelle zu einem hybriden Steuerungsproblem und wenden darauf das Pontrjaginsche Maximumprinzip aus Abschnitt 1.2.2 an.
- In Kapitel 2 betrachten wir die Grundaufgabe in Pontrjagin et al. [28] und untersuchen diese mit der Methodik für „lokalkonvexe Aufgaben“ nach Ioffe & Tichomirov [25], S. 200 ff. Die Betrachtung dieser Grundaufgabe haben wir in diese Arbeit aufgenommen, da wir beim Beweis der anspruchsvolleren hybriden Aufgabe mit Zustandsbeschränkungen auf die gleiche Art und Weise vorgehen. Ferner bietet es sich in Vorbereitung auf allgemeinere Aufgaben an, technische Details wie den

verallgemeinerten Satz von Ljusternik ausführlich zu diskutieren und in diesem überschaubareren Rahmen die *verallgemeinerten Nadelvariationen* einzuführen.

- Anschließend untersuchen wir in Kapitel 3 das klassische Subdifferential der Funktion

$$f : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x(\cdot)) = \max_{t \in [a, b]} \varphi(t, x(t)),$$

und bestimmen dieses nach Ioffe & Tichomirov [25]. Hinzu fügen wir Resultate von Clarke [11], welche zeigen, dass das Clarke'sche Subdifferential dieser Funktion mit dem aus [25] übereinstimmt.

- In Kapitel 4 formulieren und beweisen wir das Pontrjaginsche Maximumprinzip für hybride Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen und mit festem Anfangs- und Endzeitpunkt. Dieser Satz ist das Hauptresultat dieser Arbeit. Aus diesem Satz folgt unmittelbar für eine hybride Variante der Grundaufgabe in Kapitel 2 das Pontrjaginsche Maximumprinzip, welches wir in dieser Arbeit noch anwenden werden. Abschließend zeigen wir in diesem Kapitel, dass wir hybride Aufgaben mit freiem Anfangs- und Endzeitpunkt mit dem bekannten Verfahren der Substitution der Zeit in Aufgaben mit fester Zeit überführen können, und formulieren auch für diese Aufgaben das Pontrjaginsche Maximumprinzip.
- Zum Abschluss betrachten wir in Kapitel 5 ein Modell privater Altersvorsorge und untersuchen dieses auf Vorsorgestrategien und auf den Wechsel vom Arbeitsleben in den Ruhestand⁴.

Im Anhang sind von uns verwendete bekannte mathematische Sätze zitiert und ergänzende Betrachtungen beigefügt. So haben wir im Anhang A Untersuchungen zu Differentialgleichungssystemen mit stückweise stetigen rechten Seiten, wie sie im Kapitel 1 vorkommen, eingefügt, und gezeigt, dass wir diese Differentialgleichungssysteme stückweise wie gewöhnliche behandeln dürfen. Ferner sind im Anhang B.2 für die Arbeit wichtige Details zur Integration bzgl. Borelscher Maße, z. B. eine Regel der partiellen Integration, die wir im Beweisschluss der Maximumprinzipien in den Abschnitten 2.6 und 4.5 verwenden, zu finden.

In dieser Arbeit bezeichnen wir das „Pontrjaginsche Maximumprinzip“ manchmal kurz mit „Maximumprinzip“ und verwenden nebenher auch die Abkürzung *PMP*.

⁴Dabei folgen wir einem Vorschlag von G. Feichtinger Mehrstufenmodelle als hybride Probleme aufzufassen, und das Pontrjaginsche Maximumprinzip anzuwenden.

Kapitel 1

Eine elementare Beweismethode

In diesem Kapitel stellen wir eine Beweismethode für das Pontrjaginsche Maximumprinzip vor. Diese Beweisidee, die wir ebenso wie den Beweis von Satz 1.2 aus Ioffe & Tichomirov [25], S. 131 ff, entnommen haben, findet man bereits bei Weierstraß.

In Abschnitt 1.2 zeigen wir, dass man diese Beweisidee auch auf spezielle hybride Aufgaben anwenden kann.

Zur Anwendung der bewiesenen notwendigen Bedingungen, Satz 1.2 und Satz 1.4, betrachten wir in Abschnitt 1.1.4 zwei ökonomische Investitionsmodelle (vgl. Seierstad & Sydsæter [30]), verknüpfen in Abschnitt 1.2.4 diese Modelle zu einem hybriden Problem und werten dieses anschließend aus.

Neu an dieser Darstellung einer hybriden Aufgabe ist, dass wir keine Vorgaben über die Schaltstrategie machen, sondern die Aufgabe um eine zusätzliche Variable erweitern, nämlich um die k -fachen stückweisen Zerlegungen des betrachteten Zeitintervalls.

Vorschläge für eine „beste“ aktive Strategie und für Wechselzeitpunkte ergeben sich aus den angegebenen notwendigen Bedingungen im Pontrjaginschen Maximumprinzip.

Wir möchten ausdrücklich auf die im Anhang definierten Differentialgleichungen mit stückweise stetigen rechten Seiten hinweisen, da die Zustandsgleichungen in den folgenden Abschnitten von dieser Bauart sind. In Satz A.7 wird gezeigt, dass diese Differentialgleichungen eine eindeutige stetige Lösung besitzen. Wegen dem nahen Bezug zu gewöhnlichen Differentialgleichungen verwenden wir für diese Gleichungen die gleichen Notationen, den gleichen Sprachgebrauch und untersuchen sie ebenso ausschließlich auf stetige Lösungen.

Wir geben an dieser Stelle einige Hinweise zu Bezeichnungen und Schreibweisen, die in der gesamten Arbeit vorkommen:

Im Folgenden nennen wir für reelle Zahlen $a < b$ die Mengen

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{bzw.} \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ein *offenes* bzw. *abgeschlossenes Intervall*. Daneben verwenden wir noch die *links-* und *rechtsseitig halboffenen Intervalle*

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{bzw.} \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

In Aufgaben der Optimalen Steuerung ist es von Vorteil, bei der Bezeichnung zwischen einer Variablen (z. B.) x , dem Wert $x(t)$ einer Vektorfunktion $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einem (Zeit-)Punkt $t \in [t_0, t_1]$ und der Vektorfunktion $x(\cdot)$ selbst zu unterscheiden. Ist der Kontext unmissverständlich, so schreiben wir für eine Funktion nur kurz (z. B.) f . Oft ist mit der Angabe einer (Vektor-)Funktion die Zugehörigkeit zu einem Funktionenraum verbunden. Wir verwenden in dieser Arbeit die Räume:

- $PC([t_0, t_1], U)$ – Raum der stückweise stetigen Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$ mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, die nur endlich viele Sprungstellen im Inneren des betrachteten Zeitintervalls besitzen und rechtsseitig stetig sind;
- $PC^1([t_0, t_1], U)$ – Raum der auf $[t_0, t_1]$ stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Vektorfunktionen mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, deren Ableitungen in höchstens endlich vielen Punkten Sprungstellen besitzen und rechtsseitig stetig sind;
- $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ – Raum der stetigen Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$;
- $L^\infty([t_0, t_1], U)$ – Raum der auf $[t_0, t_1]$ meßbaren und essentiell beschränkten Vektorfunktionen mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

1.1 Das PMP in einem „einfachen“ Fall

1.1.1 Formulierung der Aufgabe

Wir betrachten die Aufgabe

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad U \neq \emptyset, \quad (1.3)$$

auf dem vorgegebenen Intervall $[t_0, t_1]$ und mit festem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Wir nennen ein Paar $(x(\cdot), u(\cdot)) \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1], U)$ einen *Steuerprozess*. Ein Steuerprozess heißt *zulässig* in der Aufgabe (1.1)–(1.3), wenn $x(\cdot)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

zur Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

genügt. Einen zulässigen Steuerprozess $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum* der Aufgabe (1.1)–(1.3), wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass für jeden anderen zulässigen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot))$ mit der Eigenschaft

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$$

die Ungleichung

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$$

erfüllt ist.

In der Aufgabe (1.1)–(1.3) nehmen wir für die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ an:

- Stetigkeit in der Gesamtheit der Variablen,
- stetige Differenzierbarkeit bzgl. x ,
- Stetigkeit der Abbildungen $f_x(t, x, u), \varphi_x(t, x, u)$ in der Gesamtheit der Variablen.

Aufgrund der Annahmen über die Abbildungen f und φ sind für einen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot)) \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1], U)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Die Abbildungen $t \rightarrow f(t, x(t), u(t))$ und $t \rightarrow \varphi(t, x(t), u(t))$ sind integrierbar.
- Es existieren eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine auf $[t_0, t_1]$ integrierbare reellwertige Funktion ϱ derart, dass für fast alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\|f_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho(t), \quad \|\varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n \times n} \leq \varrho(t)$$

ausfallen, sobald $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ ist.

Die zweite Eigenschaft verwenden wir im Beweis des Pontrjaginschen Maximumprinzips. Diese sichert nämlich, dass wir nach Satz B.17 über die „Differentiation unter dem Integral“ in

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^b \frac{\varphi(s, x(s) + \lambda \xi(s), u(s)) - \varphi(s, x(s), u(s))}{\lambda} ds$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^b \frac{f(s, x(s) + \lambda \xi(s), u(s)) - f(s, x(s), u(s))}{\lambda} ds$$

Grenzwert und Integral vertauschen dürfen.

Bemerkung 1.1 *Beispielsweise ist der Integrand $f(t, x, u) = \sqrt{x}$ nicht stetig differenzierbar bzgl. x auf \mathbb{R}^n und widerspricht den bisher getroffenen Annahmen.*

Wir definieren die Erreichbarkeitsmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diese besteht aus allen Punkten $\xi \in \mathbb{R}^n$, zu denen es ein $s \in [t_0, t_1]$ und eine zulässige Steuerung $u(\cdot)$ derart gibt, dass für die Lösung $x(\cdot)$ der Gleichung (1.2),

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

zum Zeitpunkt s gerade $\xi = x(s)$ gilt.

Es seien $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen mit $[t_0, t_1] \subseteq \mathcal{T}$, $E \subseteq \mathcal{E}$ und $U \subseteq \mathcal{U}$. Dann sollen alle oben genannten Eigenschaften über Stetigkeit und Differenzierbarkeit für f und φ bzw. f_x und φ_x auf $\mathcal{T} \times \mathcal{E} \times \mathcal{U}$ gelten.

In der gesamten vorliegenden Arbeit verbleiben wir bei der Formulierung der Eigenschaften auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, gehen aber davon aus, dass diese Bemerkung gegebenenfalls berücksichtigt wird.

1.1.2 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

Satz 1.2 (Das Pontrjaginsche Maximumprinzip) ([25], S. 131.) *Ist $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (1.1)–(1.3), dann existiert eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$ und eine Vektorfunktion $p(\cdot)$, $p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nicht beide gleichzeitig verschwinden, derart, dass*

a) *die Vektorfunktion $p(\cdot)$ der adjungierten Gleichung*

$$\dot{p}(t) = -\varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t) + \lambda_0 f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \quad (1.4)$$

genügt und die Randbedingung

$$p(t_1) = 0 \quad (1.5)$$

erfüllt;

b) *für die Pontrjaginsche Funktion*

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) := \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f(t, x, u) \quad (1.6)$$

die Beziehung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x_*(t), u, p(t), \lambda_0) \quad (1.7)$$

für fast alle $t \in [t_0, t_1]$ gilt.

Zusatz: O. B. d. A. dürfen wir $\lambda_0 = 1$ wählen.

1.1.3 Der Beweis des Maximumprinzips

Dieser Beweis ist aus Ioffe & Tichomirov [25], S. 131 ff, entnommen.

Beweis des Zusatzes: Angenommen, es ist $\lambda_0 = 0$. Dann ist $p(\cdot)$ Lösung der Gleichung

$$\dot{p}(t) = -\varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t)$$

zur Randbedingung

$$p(t_1) = 0.$$

Das heißt, auch $p(\cdot)$ würde identisch verschwinden.

Darum ist der Fall $\lambda_0 = 0$ ausgeschlossen.

Es sei $\tau \in (t_0, t_1)$ ein Stetigkeitspunkt der Steuerung $u_*(\cdot)$. Dann ist $u_*(\cdot)$ auch in einer gewissen hinreichend kleinen Umgebung von τ stetig und wir wählen ein festes λ positiv und hinreichend klein, so dass sich $\tau - \lambda$ in dieser Umgebung befindet. Weiter sei nun v ein beliebiger Punkt aus U . Wir setzen

$$u(t; v, \tau, \lambda) = u_\lambda(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ v & \text{für } t \in [\tau - \lambda, \tau), \end{cases}$$

und es bezeichne $x_\lambda(\cdot)$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_\lambda(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dann gilt offenbar $x_\lambda(t) = x_*(t)$ für $t_0 \leq t \leq \tau - \lambda$.

Für $t \geq \tau$ untersuchen wir im Weiteren den Grenzwert

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda},$$

und werden zeigen, dass dieser existiert, die Funktion $y(\cdot)$ der Integralgleichung

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) y(s) ds \quad (1.8)$$

zur Anfangsbedingung

$$y(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \quad (1.9)$$

genügt und die Beziehung

$$\langle p(\tau), y(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^n} = - \int_\tau^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \quad (1.10)$$

erfüllt ist.

► *Gleichung (1.9)*: Nach Voraussetzung ist die Steuerung $u_*(\cdot)$ in einer gewissen hinreichend kleinen Umgebung des Punktes τ stetig. Dann ist auch $\dot{x}_*(\cdot)$ in dieser Umgebung stetig und für hinreichend kleine positive λ gelten

$$\begin{aligned} x_*(\tau) &= x_*(\tau - \lambda) + \lambda \dot{x}_*(\tau - \lambda) + o(\lambda) \\ &= x_*(\tau - \lambda) + \lambda \varphi(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), u_*(\tau - \lambda)) + o(\lambda) \end{aligned}$$

bzw.

$$x_\lambda(\tau) = x_*(\tau - \lambda) + \lambda \varphi(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), v) + o(\lambda).$$

Hieraus folgt

$$\frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} = \varphi(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), v) - \varphi(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), u_*(\tau - \lambda)) + \frac{o(\lambda)}{\lambda}.$$

D. h., dass der Grenzwert

$$y(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda}$$

existiert und gleich (1.9) ist.

► *Gleichung (1.8)*: Auf dem Intervall $[\tau, t_1]$ genügen sowohl $x_*(\cdot)$ als auch $x_\lambda(\cdot)$ der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_*(t)).$$

Aus dem Satz über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems in Abhängigkeit von den Anfangsdaten folgt, dass für hinreichend kleine positive λ die Vektorfunktionen $x_\lambda(\cdot)$ auf $[\tau, t_1]$ definiert sind, für $\lambda \rightarrow 0 + 0$ gleichmäßig gegen $x_*(\cdot)$ konvergieren und dass der Grenzwert

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda}$$

für jedes $t \in [\tau, t_1]$ existiert. Für $t > \tau$ gilt

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(\tau) + \int_\tau^t \varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) ds, \quad x_*(t) = x_*(\tau) + \int_\tau^t \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) ds,$$

woraus sich die folgende Beziehung ergibt:

$$\frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda} = \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} + \int_\tau^t \frac{\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))}{\lambda} ds.$$

Hierin führen wir den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$ durch und erhalten

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda} = y(t) \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} = y(\tau).$$

Aufgrund unserer Annahmen an die Abbildung φ dürfen wir den Grenzübergang unter dem Integralzeichen ausführen und erhalten für den Integranden

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \left[\varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) \cdot \frac{x_\lambda(s) - x_*(s)}{\lambda} + \frac{o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|)}{\lambda} \right] \\ &= \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) y(s). \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigen wir, dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|)}{\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|} = 0$$

ist, da der Grenzwert

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda}$$

existiert. Damit ist die Beziehung (1.8) gezeigt.

► *Gleichung (1.10)*: Es existiert eine Lösung der Differentialgleichung (1.5) zur Randbedingung (1.6). Mit der Beziehung (1.8) erhalten wir für $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle \dot{p}(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle p(t), \dot{y}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\langle \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad + \langle p(t), \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Daher gilt, da $p(t_1) = 0$ ist,

$$\langle p(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} = - \int_t^{t_1} \langle f_x(s, x_*(s), u_*(s)), y(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Für $t = \tau$ folgt daraus insbesondere (1.10).

► *Beweisschluss*: Da $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ein starkes lokales Minimum ist, ist für alle hinreichend kleine und positive λ

$$\frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\lambda} \geq 0,$$

d. h.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\lambda} \geq 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^{t_1} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$ erhalten wir für die einzelnen Summanden:

Für $t \in [t_0, \tau - \lambda]$ sind $u_\lambda(t) = u_*(t)$ und $x_\lambda(t) = x_*(t)$. Daher gilt für alle hinreichend kleine positive λ

$$\int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = 0$$

und somit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = 0.$$

Da f stetig in allen Variablen und $u_*(\cdot)$ stetig auf $[\tau - \lambda, \tau]$ ist, existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi \in (\tau - \lambda, \tau)$ mit

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f(t, x_\lambda(t), v) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = f(\xi, x_\lambda(\xi), v) - f(\xi, x_*(\xi), u_*(\xi)).$$

Ferner gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} x_\lambda(\tau) = x_*(\tau)$, da der Grenzwert $y(\tau)$ existiert. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ = f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

Für $t \geq \tau$ ist $u_\lambda(t) = u_*(t)$. Ferner besitzt die Funktion f eine stetige Ableitung nach x und es ist

$$\begin{aligned} f(t, x_\lambda(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \\ = \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x_\lambda(t) - x_*(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|). \end{aligned}$$

Wir nutzen wieder

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{o(\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|)}{\|x_\lambda(s) - x_*(s)\|} = 0$$

aus und erhalten

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_{\tau}^{t_1} \frac{f(t, x_\lambda(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t))}{\lambda} dt = \int_{\tau}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Zusammenfassend haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\lambda} \\ &= f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) + \int_{\tau}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \end{aligned}$$

gezeigt.

Bei Anwendung von Gleichung (1.10) ergibt sich hieraus die Ungleichung

$$\begin{aligned} \langle p(\tau), \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ \geq \langle p(\tau), \varphi(\tau, x_*(\tau), v) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f(\tau, x_*(\tau), v). \end{aligned}$$

Daraus folgt aus der Definition (1.6) der Funktion H mit $\lambda_0 = 1$

$$H(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) \geq H(\tau, x_*(\tau), v, p(\tau), \lambda_0).$$

Nun ist τ ein beliebiger Stetigkeitspunkt der Steuerung $u_*(\cdot)$ und v ein beliebiger Punkt der Menge U . Demzufolge ist die Beziehung (1.7) in allen Stetigkeitspunkten der Steuerung $u_*(\cdot)$ wahr und damit ist das Maximumprinzip bewiesen.

1.1.4 Consumption vs. Investment

Beispiel 1: Ein lineares Investitionsmodell¹

Wir wollen nun auf das Modell

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T (1 - u(t)) \cdot x(t) dt \rightarrow \sup, \quad (1.11)$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \cdot x(t), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad (1.12)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad T > 1 \text{ fest}, \quad (1.13)$$

Satz 1.2 anwenden. Dazu multiplizieren wir den Integranden in (1.11) mit -1 , um zu einem Minimierungsproblem überzugehen, und erhalten

$$f(t, x(t), u(t)) = -(1 - u(t)) \cdot x(t), \quad \varphi(t, x(t), u(t)) = u(t) \cdot x(t).$$

Die Menge der zulässigen Steuerungen ist der Raum $PC([0, T], [0, 1])$.

Dann nimmt nach (1.7) für $u = u_*(t)$ die Pontrjaginsche Funktion (1.6) mit $\lambda_0 = 1$,

$$\begin{aligned} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), 1) &= \max_{u \in [0, 1]} H(t, x_*(t), u, p(t), 1) \\ &= \max_{u \in [0, 1]} [(p(t) - 1)u + 1] \cdot x_*(t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

für fast alle $t \in [0, T]$ ihr Maximum an, wobei $p(\cdot)$ Lösung der Gleichung (1.4) zur Transversalitätsbedingung (1.5), d. h.

$$\dot{p}(t) = -u_*(t) \cdot p(t) - (1 - u_*(t)) = -1 - u_*(t)(p(t) - 1), \quad p(T) = 0, \quad (1.15)$$

ist. Aus (1.14) können wir

$$u_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } p(t) < 1, \\ 1 & \text{für } p(t) > 1, \end{cases}$$

ablesen. Daraus folgt unmittelbar

$$\dot{p}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } p(t) < 1 \\ -p(t) & \text{für } p(t) > 1 \end{cases} = -\max\{1, p(t)\}$$

und ferner ist offensichtlich $\dot{p}(t) < 0$ für alle $t \in (0, T)$.

Zum Lösen der Gleichung $p(t) = 1$ betrachten wir die Funktion g mit

$$g(t) = g(T) + \int_T^t (-1) ds, \quad g(T) = 0.$$

Dann ist $g(t) = T - t$ und es gibt genau eine Lösung $t'_* \in (0, T)$, genauer

$$t'_* = T - 1, \quad (1.16)$$

¹Dieses Modell wurde aus Seierstad & Sydsæter [30], S. 82, Exercise 2.3.3, entnommen.

der Gleichung $g(t) = 1$.

Da die adjungierte Funktion $p(\cdot)$ streng monoton fallend ist, folgt für diese

$$\dot{p}(t) = \begin{cases} -p(t), & t \in (0, T-1), \\ -1, & t \in (T-1, T), \end{cases} \implies p(t) = \begin{cases} e^{T-(1+t)}, & t \in [0, T-1), \\ T-t, & t \in [T-1, T]. \end{cases} \quad (1.17)$$

Mit der Steuerung

$$u_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, T-1), \\ 0 & \text{für } t \in [T-1, T], \end{cases} \quad (1.18)$$

erhalten wir aus (1.12) für das Kapital

$$\dot{x}_*(t) = \begin{cases} x_*(t), & t \in (0, T-1), \\ 0, & t \in (T-1, T), \end{cases} \implies x_*(t) = \begin{cases} x_0 \cdot e^t & t \in [0, T-1), \\ x_0 \cdot e^{T-1} & t \in [T-1, T], \end{cases} \quad (1.19)$$

und für den Wert des Zielfunktional (1.11)

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \int_0^T (1 - u_*(t)) \cdot x_*(t) dt = \int_{T-1}^T x_0 \cdot e^{T-1} dt = x_0 \cdot e^{T-1}. \quad (1.20)$$

Beispiel 2: Ein Investitionsmodell mit Cobb-Douglas-Produktionsfunktion²

Im Gegensatz zum vorherigen linearen Modell nehmen wir an, dass wir mit einer einprozentigen Erhöhung des Kapitals x eine konstante prozentuale Erhöhung des Nutzens y um $\alpha \in (0, 1)$ erreichen:

$$\frac{\Delta y}{y} = \alpha \frac{\Delta x}{x} \text{ bzw. } \frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x} \implies y = c \cdot x^\alpha.$$

Nun schließen wir uns wieder der Idee des vorherigen Modells an, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ein Anteil $u(t)$ des Nutzens investiert und der verbliebene Teil $1 - u(t)$ konsumiert wird. Damit erhalten wir folgende Aufgabe

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T (1 - u(t)) \cdot x^\alpha(t) dt \rightarrow \sup, \quad (1.21)$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \cdot x^\alpha(t), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad (1.22)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad (1.23)$$

$$\alpha \in (0, 1) \text{ konstant, } T \text{ fest mit } \alpha T - x_0^{1-\alpha} > 0. \quad (1.24)$$

O. B. d. A. haben wir hierin $c = 1$ angenommen, was nach einer geeigneten Transformation der Zeit erreicht werden kann.

Wir multiplizieren den Integranden in (1.21) mit -1 und erhalten

$$f(t, x(t), u(t)) = -(1 - u(t)) \cdot x^\alpha(t), \quad \varphi(t, x(t), u(t)) = u(t) \cdot x^\alpha(t).$$

²[30], S. 130, Exercise 2.7.1.

Die Menge der zulässigen Steuerungen ist wieder der Raum $PC([0, T], [0, 1])$.

Dann nimmt nach (1.7) für $u = u_*(t)$ die Pontrjaginsche Funktion (1.6) mit $\lambda_0 = 1$,

$$\begin{aligned} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), 1) &= \max_{u \in [0, 1]} H(t, x_*(t), u, p(t), 1) \\ &= \max_{u \in [0, 1]} [(p(t) - 1)u + 1] \cdot x_*^\alpha(t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

für fast alle $t \in [0, T]$ ihr Maximum an, wobei $p(\cdot)$ Lösung der Gleichung (1.4) zur Bedingung (1.5), d.h.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\alpha u_*(t) \cdot x_*^{\alpha-1}(t) \cdot p(t) - \alpha(1 - u_*(t)) \cdot x_*^{\alpha-1}(t) \\ &= -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) [1 + u_*(t)(p(t) - 1)] \end{aligned} \quad (1.26)$$

und $p(T) = 0$, ist. Aus (1.25) können wir

$$u_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } p(t) < 1, \\ 1 & \text{für } p(t) > 1, \end{cases}$$

ablesen. Daraus folgt

$$\dot{p}(t) = \begin{cases} -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) & \text{für } p(t) < 1 \\ -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) \cdot p(t) & \text{für } p(t) > 1 \end{cases} = -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) \cdot \max\{1, p(t)\}$$

und ferner ist offensichtlich $\dot{p}(t) < 0$ für alle $t \in (0, T)$.

Wir untersuchen die Gleichung $p(t) = 1$ auf $[0, T]$. Da $p(\cdot)$ stetig und streng monoton fallend ist, ist die Lösung, falls sie existiert, eindeutig. Ferner gibt es wegen $p(T) = 0$ und der strengen Monotonie eine Zahl $t_*'' \in [0, T]$ mit

$$t_*'' = \inf\{t \in [0, T] \mid p(t) < 1\}.$$

Für $t > t_*''$ gilt $u_*(t) = 0$ und es ist $x_*(t)$ auf $[t_*'', T]$ konstant. Daher betrachten wir zunächst die Funktion g mit

$$g(t) = g(T) + \int_T^t (-\alpha K^{\alpha-1}) ds, \quad g(T) = 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad K > 0 \text{ konstant.}$$

Diese erhalten wir, wenn wir $x_*(t)$ durch $K = x_*(t_*'')$ in $\dot{p}(t) = -\alpha x_*^{\alpha-1}(t)$ für $t > t_*''$ ersetzen. Dann ist $g(t) = \alpha K^{\alpha-1}(T - t)$.

Nun bestimmen wir t_*'' . Für $t < t_*''$ ist $p(t) > 1$ und damit $u_*(t) = 1$. Es sei h Lösung der Gleichung, vgl. (1.22) mit $u(\cdot) \equiv 1$,

$$\dot{h}(t) = h^\alpha(t), \quad h(0) = x_0 > 0, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Dann folgt nach der Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration

$$h(t) = [(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Wir erhalten nun aus $K = h(t''_*)$ und $g(t''_*) = 1$ für t''_* die Bestimmungsgleichung

$$1 = \alpha h^{\alpha-1}(t''_*)(T - t''_*) = \alpha \cdot [(1 - \alpha)t''_* + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}}(T - t''_*) = \frac{\alpha(T - t''_*)}{(1 - \alpha)t''_* + x_0^{1-\alpha}}.$$

Aus dieser folgt

$$t''_* = \alpha T - x_0^{1-\alpha}. \quad (1.27)$$

Wegen der Annahme $\alpha T - x_0^{1-\alpha} > 0$ in (1.24) ist $t''_* > 0$.

Für die Analyse der Aufgabe liefert dies die Steuerung

$$u_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, t''_*), \\ 0 & \text{für } t \in [t''_*, T]. \end{cases} \quad (1.28)$$

Mit $u_*(\cdot)$ erhalten wir in (1.22) für die Änderung des Kapitalstocks

$$\dot{x}_*(t) = \begin{cases} x_*^\alpha(t) & \text{für } t \in (0, t''_*), \\ 0 & \text{für } t \in (t''_*, T), \end{cases}$$

und damit für das Kapital

$$x_*(t) = \begin{cases} [(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [0, t''_*), \\ [\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [t''_*, T]. \end{cases} \quad (1.29)$$

Ferner liefert dies in der adjungierten Gleichung

$$\dot{p}(t) = \begin{cases} -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) \cdot p(t) & \text{für } t \in (0, t''_*), \\ -\alpha x_*^{\alpha-1}(t''_*) & \text{für } t \in (t''_*, T). \end{cases}$$

Zur Berechnung von $p(\cdot)$ auf $[0, t''_*]$ verwenden wir $p(t''_*) = 1$ und erhalten nach Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration

$$\ln \left(\frac{p(t)}{p(t''_*)} \right) = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_{t''_*}^t \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha)s + x_0^{1-\alpha}} ds = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \left(\frac{(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)t''_* + x_0^{1-\alpha}} \right).$$

Daraus folgt

$$p(t) = \left[\frac{(1 - \alpha)t''_* + x_0^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left[\frac{\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

auf $[0, t''_*]$. Auf $[0, T]$ gilt damit für die adjungierte Funktion

$$p(t) = \begin{cases} \left[\frac{\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [0, t''_*), \\ \frac{T - t}{(1 - \alpha)T + x_0^{1-\alpha}} & \text{für } t \in [t''_*, T]. \end{cases} \quad (1.30)$$

Der Wert des Zielfunktional (1.21) ist in diesem Beispiel gleich

$$\begin{aligned}
 J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) &= \int_0^T (1 - u_*(t)) \cdot x_*^\alpha(t) dt = \int_{t_*''}^T [\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dt \\
 &= (T - \alpha T + x_0^{1-\alpha}) \cdot [\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
 &= \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot [(1 - \alpha)T + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.2 Ein „einfaches“ hybrides Steuerungsproblem

1.2.1 Formulierung der Aufgabe

Im Gegensatz zur Aufgabe (1.1)–(1.3) nehmen wir nun an, dass wir nicht nur durch die Wahl der Steuerung das Verhalten des Zustandes beeinflussen können, sondern außerdem noch zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ aus einer vorgegeben endlichen Menge von Dynamiken eine eindeutig auswählen dürfen. Die Dynamiken werden beschrieben durch die Abbildungen

$$\varphi_i(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k.$$

Ferner nehmen wir an, dass zu verschiedenen Dynamiken im allgemeinen unterschiedliche Integranden gehören. Daher koppeln wir jede Dynamik mit einem Integranden f_i , wobei die Integranden Funktionen über dem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sind, d.h.

$$f_i(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Zur mathematischen Beschreibung der Auswahl einer Dynamik führen wir den Begriff einer *stückweisen Zerlegung* ein:

Definition 1.3 (*k*-fache stückweise Zerlegung) *Unter einer *k*-fachen stückweisen Zerlegung eines Intervalls $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir ein endliches System $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\}$ von Teilmengen von I mit*

$$a) \quad \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{A}_i = I,$$

$$b) \quad \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

c) für $i = 1, \dots, k$ sind die Mengen \mathcal{A}_i endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen und kompakten Intervallen mit positivem Lebesgue-Maß.

Im Weiteren bezeichnet $\mathfrak{Z}_0^k(I) = \{\mathcal{A}\} = \{\{\mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq k}\}$ die Gesamtheit aller *k*-fachen stückweisen Zerlegungen des Intervalls I .

Wir identifizieren die Elemente $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ aus $\mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ durch die Vektorfunktionen

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi_{\mathcal{A}_1}(t), \dots, \chi_{\mathcal{A}_k}(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

der charakteristischen Funktionen der Mengen \mathcal{A}_i . Wegen den Eigenschaften a) und b) einer k -fachen stückweisen Zerlegung ist zu jedem Zeitpunkt t genau eine Komponente des Vektors $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ gleich Eins. Außerdem folgt aus der Eigenschaft c), dass die Funktionen $\chi_{\mathcal{A}_i}(\cdot)$ auf $[t_0, t_1]$ stückweise und rechtsseitig stetig sind und endlich viele Sprungstellen mit beschränkter Sprunghöhe besitzen. Damit gehören sie dem Raum $PC([t_0, t_1], \{0, 1\})$ an.

Mit Hilfe der k -fachen stückweisen Zerlegungen $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ stellen wir einen Wechsel zwischen den Dynamiken φ_i , und damit auch einen Wechsel in den zugehörigen Integranden f_i , auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ auf folgende Weise dar:

$$\mathcal{A} \circ \varphi(t, x, u) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_i(t, x, u),$$

bzw.

$$\mathcal{A} \circ f(t, x, u) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_i(t, x, u),$$

wobei φ, f den Abbildungsvektor $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ bzw. (f_1, \dots, f_k) bezeichnen.

Mittels dieser Verknüpfung „aktivieren“ wir eine Dynamik φ_i und den dazugehörigen Integranden f_i , nämlich genau diejenige Dynamik bzw. denjenigen Integranden, für die bzw. den $t \in \mathcal{A}_i$ gilt. Ist $t \in \mathcal{A}_i$, so sagen wir auch kurz *die Strategie i oder die i -te Strategie ist aktiv*.

Genauso wie mit den Verknüpfungen $\mathcal{A} \circ \varphi(t, x, u)$ und $\mathcal{A} \circ f(t, x, u)$ verfahren wir mit partiellen Ableitungen. Sind die Abbildungen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ bzw. $f = (f_1, \dots, f_k)$ nach t bzw. x differenzierbar, dann setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \varphi_t(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_t(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_{it}(t, x, u), \\ \mathcal{A} \circ f_t(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_t(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_{it}(t, x, u), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \varphi_x(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_{ix}(t, x, u), \\ \mathcal{A} \circ f_x(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_{ix}(t, x, u). \end{aligned}$$

Dieser Setzung nach besitzt die Ableitung nach t bzw. x gerade den Wert der Ableitung der aktiven Abbildung φ_i bzw. der aktiven Funktion f_i .

Mit diesen Vorbetrachtungen formulieren wir ein *hybrides Steuerungsproblem* – wir sagen auch eine *hybride Aufgabe* – auf folgende Weise:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (1.32)$$

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.33)$$

$$u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad U \neq \emptyset, \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1]). \quad (1.34)$$

Hierin ist $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein gegebenes beschränktes Intervall.

In der Formulierung der Aufgabe (1.32)–(1.34) kann in (1.34) wegen der Eigenschaft *b*) einer stückweisen Zerlegung die Forderung $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ nicht ohne zusätzliche Annahmen durch

$$\chi_{\mathcal{A}_i}(\cdot) \in PC([t_0, t_1], \{0, 1\}), \quad i = 1, \dots, k,$$

ersetzt werden. Eine solche Annahme könnte

$$\sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) = 1 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1]$$

lauten. Um jedoch den speziellen Charakter der stückweisen Zerlegungen und der Menge $\mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ zu verdeutlichen, verbleiben wir bei der Nebenbedingung $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$.

Wir nennen ein Tripel $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ einen *Steuerprozess*. Ein Steuerprozess heißt *zulässig* in der Aufgabe (1.32)–(1.34), wenn $x(\cdot)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t))$$

zur Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

genügt. Ein zulässiger Steuerprozess $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ heißt ein *starkes lokales Minimum* der Aufgabe (1.32)–(1.34), wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass für jeden anderen zulässigen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit der Eigenschaft

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_{\infty} < \varepsilon$$

die Ungleichung

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$$

erfüllt ist.

Es seien für $i = 1, \dots, k$, die Funktionen $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

- stetig in der Gesamtheit der Variablen,
- stetig differenzierbar bzgl. x ,

und es seien

- die Abbildungen $f_{i_x}(t, x, u), \varphi_{i_x}(t, x, u)$ stetig in der Gesamtheit der Variablen.

Aufgrund dieser Annahmen über die Abbildungen f_i und φ_i sind für einen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Die Abbildungen

$$t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)), \quad t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t))$$

sind auf $[t_0, t_1]$ integrierbar.

- Es existieren eine Zahl $\varepsilon > 0$ und auf $[t_0, t_1]$ eine integrierbare reellwertige Funktion ϱ derart, dass für fast alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho(t), \quad \|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n \times n} \leq \varrho(t)$$

ausfallen, sobald $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ ist.

1.2.2 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

Für $i = 1, \dots, k$ definieren wir die *partiellen Pontrjaginschen Funktionen*

$$H_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

gemäß

$$H_i(t, x, u, p, \lambda_0) = \langle p, \varphi_i(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u).$$

Dann heißt für die hybride Aufgabe (1.32)–(1.34) die Funktion

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ H(t, x, u, p, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot H_i(t, x, u, p, \lambda_0) \\ &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot (\langle p, \varphi_i(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u)) \end{aligned} \quad (1.35)$$

mit

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

die *Pontrjaginsche Funktion*.

Satz 1.4 (Das Pontrjaginsche Maximumprinzip) *Ist $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (1.32)–(1.34), dann existiert eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$ und eine Vektorfunktion $p(\cdot)$, $p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die beide nicht gleichzeitig verschwinden, derart, dass*

a) *die Vektorfunktion $p(\cdot)$ der adjungierten Gleichung*

$$\dot{p}(t) = -\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t) + \lambda_0 \cdot \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \quad (1.36)$$

genügt und die Randbedingung

$$p(t_1) = 0 \quad (1.37)$$

erfüllt;

b) *für die Pontrjaginsche Funktion die Beziehung*

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u \in U \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u, p(t), \lambda_0) \quad (1.38)$$

für fast alle $t \in [t_0, t_1]$ gilt.

Zusatz: O. B. d. A. dürfen wir $\lambda_0 = 1$ wählen.

1.2.3 Der Beweis des Maximumprinzips

Beweis des Zusatzes: Angenommen, es ist $\lambda_0 = 0$. Dann ist $p(\cdot)$ Lösung der Gleichung

$$\dot{p}(t) = -\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t)$$

zur Randbedingung

$$p(t_1) = 0.$$

Aus den Eigenschaften einer stückweisen Zerlegung folgt, dass diese Gleichung ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit stückweise stetiger rechter Seite ist. Daher erhalten wir, dass die eindeutige stetige Lösung $p(\cdot)$ identisch verschwinden würde. Darum ist der Fall $\lambda_0 = 0$ ausgeschlossen.

Der folgende Beweis ist eine nahezu wortwörtliche Wiederholung des Beweises von Satz 1.2. Es sei $\tau \in (t_0, t_1)$ ein Stetigkeitspunkt der Steuerungen $u_*(\cdot)$ und $\chi_{\mathcal{A}_*}(\cdot)$. Daher wechseln wir für hinreichend kleine positive λ auf $[t - \lambda, \tau)$ die Dynamik nicht. Es sei $i_* \in \{1, \dots, k\}$ der aktive Index der stückweisen Zerlegung \mathcal{A}_* auf $[\tau - \lambda, \tau)$. Wir setzen

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ v & \text{für } t \in [\tau - \lambda, \tau), \end{cases}$$

mit einem beliebigen aber festen $v \in U$. Weiter bezeichnen wir mit $x_\lambda(\cdot)$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x(t), u_*(t)) & \text{für } t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ \varphi_{i_*}(t, x(t), v) & \text{für } t \in [\tau - \lambda, \tau), \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0,$$

mit einem beliebigen aber festen $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dann gilt offenbar $x_\lambda(t) = x_*(t)$ für $t_0 \leq t \leq \tau - \lambda$.

Für $t \geq \tau$ untersuchen wir im Weiteren den Grenzwert

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda},$$

und werden zeigen, dass dieser existiert, die Funktion $y(\cdot)$ der Integralgleichung

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t [\chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s))] y(s) ds \quad (1.39)$$

zur Anfangsbedingung

$$y(\tau) = \varphi_i(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi_{i_*}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \quad (1.40)$$

genügt und die Beziehung

$$\langle p(\tau), y(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^n} = - \int_\tau^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \quad (1.41)$$

erfüllt ist.

► *Gleichung (1.40)*: Nach Voraussetzung sind die Steuerungen $u_*(\cdot)$ und $\chi_{\mathcal{A}_*}(\cdot)$ in einer gewissen hinreichend kleinen Umgebung des Punktes τ stetig und für hinreichend kleine positive λ gelten

$$\begin{aligned} x_*(\tau) &= x_*(\tau - \lambda) + \lambda \varphi_{i_*}(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), u_*(\tau - \lambda)) + o(\lambda), \\ x_\lambda(\tau) &= x_*(\tau - \lambda) + \lambda \varphi_i(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), v) + o(\lambda). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} = \varphi_i(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), v) - \varphi_{i_*}(\tau - \lambda, x_*(\tau - \lambda), u_*(\tau - \lambda)) + \frac{o(\lambda)}{\lambda}.$$

D. h., dass der Grenzwert

$$y(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda}$$

existiert und gleich (1.40) ist.

► *Gleichung (1.39)*: Auf dem Intervall $[\tau, t_1]$ genügen sowohl $x_*(\cdot)$ als auch $x_\lambda(\cdot)$ der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x(t), u_*(t))$$

und es folgt, dass die Vektorfunktionen $x_\lambda(\cdot)$ auf $[\tau, t_1]$ für $\lambda \rightarrow 0+0$ gleichmäßig gegen $x_*(\cdot)$ konvergieren und dass der Grenzwert

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda}$$

für jedes $t \in [\tau, t_1]$ existiert. Für $t > \tau$ gilt

$$\begin{aligned} x_\lambda(t) &= x_\lambda(\tau) + \int_\tau^t \chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ \varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) ds, \\ x_*(t) &= x_*(\tau) + \int_\tau^t \chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \end{aligned}$$

woraus sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda} &= \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} \\ &+ \int_\tau^t \frac{\chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ \left(\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right)}{\lambda} ds \end{aligned}$$

ergibt. Hierin führen wir den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$ durch, erhalten

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(t) - x_*(t)}{\lambda} = y(t) \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{x_\lambda(\tau) - x_*(\tau)}{\lambda} = y(\tau),$$

und für den Integranden

$$\left[\chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) \right] y(s).$$

Damit ist die Beziehung (1.39) gezeigt.

► *Gleichung (1.41)*: Es existiert eine Lösung der Differentialgleichung (1.36) zur Randbedingung (1.37). Mit der Beziehung (1.39) erhalten wir für $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle \dot{p}(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle p(t), \dot{y}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= - \left\langle \left[\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) \right] p(t), y(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad + \left\langle p(t), \left[\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) \right] y(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Daher gilt, da $p(t_1) = 0$ ist,

$$\langle p(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} = - \int_t^{t_1} \left\langle \chi_{\mathcal{A}_*}(s) \circ f_x(s, x_*(s), u_*(s)), y(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Für $t = \tau$ folgt daraus insbesondere (1.41).

► *Beweisschluss*: Da $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum ist, ist für alle hinreichend kleine und positive λ

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[\chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t) \circ f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f_i(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f_{i_*}(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^{t_1} \left[\chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t) \circ f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$ erhalten wir für die einzelnen Summanden:

Für $t \in [t_0, \tau - \lambda]$ sind $u_\lambda(t) = u_*(t)$, $\chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t) = \chi_{\mathcal{A}_*}(t)$ und $x_\lambda(t) = x_*(t)$. Daher gilt für alle hinreichend kleine positive λ

$$\int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[\chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t) \circ f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = 0$$

und somit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{\tau-\lambda} \left[\chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t) \circ f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = 0.$$

Da f stetig in allen Variablen und $u_*(\cdot)$, $\chi_{\mathcal{A}_*}(\cdot)$ stetig auf $[\tau - \lambda, \tau]$ sind, existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi \in (\tau - \lambda, \tau)$ mit

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f_i(t, x_\lambda(t), v) - f_{i_*}(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt = f_i(\xi, x_\lambda(\xi), v) - f_{i_*}(\xi, x_*(\xi), u_*(\xi)).$$

Ferner gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} x_\lambda(\tau) = x_*(\tau)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left[f_i(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t)) - f_{i_*}(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \\ &= f_i(\tau, x_*(\tau), v) - f_{i_*}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

Für $t \geq \tau$ ist $u_\lambda(t) = u_*(t)$. Ferner besitzt die Funktion f eine stetige Ableitung nach x und es ist

$$\begin{aligned} & \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \left(f(t, x_\lambda(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \\ &= \langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x_\lambda(t) - x_*(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(\|x_\lambda(t) - x_*(t)\|). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \left(f(t, x_\lambda(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) dt \\ &= \int_{\tau}^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$0 \leq f_i(\tau, x_*(\tau), v) - f_{i_*}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) + \int_{\tau}^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$$

gezeigt. Bei Anwendung von Gleichung (1.41) ergibt sich hieraus die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \langle p(\tau), \varphi_{i_*}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f_{i_*}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ & \geq \langle p(\tau), \varphi_i(\tau, x_*(\tau), v) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f_i(\tau, x_*(\tau), v). \end{aligned}$$

Es sind τ ein beliebiger Stetigkeitspunkt der Steuerung $u_*(\cdot)$, v ein beliebiger Punkt der Menge U und $i \in \{1, \dots, k\}$. Demzufolge ist die Beziehung (1.38) in allen Stetigkeitspunkten der Steuerungen $u_*(\cdot)$, $\chi_{\mathcal{A}_*}(\cdot)$ wahr und damit der Satz bewiesen.

1.2.4 Consumption vs. Investment

Beispiel: Ein hybrides Investitionsmodell

Wir verknüpfen die Modelle aus Abschnitt 1.1.4 und betrachten eine Aufgabe, in der wir uns zu jedem Zeitpunkt für eine von diesen Investitionsstrategien entscheiden dürfen:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \int_0^T \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \sup, \quad (1.42)$$

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad (1.43)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad \mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \in \mathfrak{Z}_0^2([0, 1]), \quad (1.44)$$

mit

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) &= \begin{cases} f_1(t, x(t), u(t)) = (1 - u(t)) \cdot x(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ f_2(t, x(t), u(t)) = (1 - u(t)) \cdot x^\alpha(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \\ \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)) &= \begin{cases} \varphi_1(t, x(t), u(t)) = u(t) \cdot x(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ \varphi_2(t, x(t), u(t)) = u(t) \cdot x^\alpha(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\alpha \in (0, 1) \text{ konstant, } \quad T \text{ fest mit } T > \max \left\{ 1, \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha} \right\}. \quad (1.45)$$

Wir wenden Satz 1.4 an. Dazu multiplizieren wir den Integranden in (1.42) mit -1 , um zu einem Minimierungsproblem überzugehen, und bezeichnen diesen wieder mit f . Die Menge der zulässigen Steuerungen $u(\cdot)$ ist der Raum $PC([0, T], [0, 1])$.

Dann gilt nach (1.38) für fast alle $t \in [0, T]$ mit $\lambda_0 = 1$

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), 1) \\ &= \max_{\substack{u \in [0, 1] \\ i=1,2}} \left\{ \langle p(t), \varphi_i(t, x_*(t), u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f_i(t, x_*(t), u) \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{u \in [0, 1]} [(p(t) - 1)u + 1] \cdot x_*(t), \max_{u \in [0, 1]} [(p(t) - 1)u + 1] \cdot x_*^\alpha(t) \right\} \\ &= \max_{u \in [0, 1]} [(p(t) - 1)u + 1] \cdot \max\{x_*(t), x_*^\alpha(t)\}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Aus (1.46) folgt

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & p(t) < 1, \\ 0, & p(t) > 1, \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{A}_*}(t) = (\chi_{\mathcal{A}_1^*}(t), \chi_{\mathcal{A}_2^*}(t)) = \begin{cases} (1, 0), & x_*(t) > 1, \\ (0, 1), & 0 < x_*(t) < 1. \end{cases}$$

D. h., dass die Strategie $i = 1$ bzw. $i = 2$ aktiv ist, falls $x_*(t) > 1$ bzw. $0 < x_*(t) < 1$ ist.

Die Funktion $p(\cdot)$ ist die Lösung der Gleichung (1.36)

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -[\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t))] p(t) + \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \\ &= \begin{cases} -[(p(t) - 1)u_*(t) + 1], & t \in \mathcal{A}_1, \\ -[(p(t) - 1)u_*(t) + 1] \cdot \alpha x_*^{\alpha-1}(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \end{aligned}$$

zur Bedingung $p(T) = 0$. Da die Strategie $i = 1$ bzw. $i = 2$ aktiv ist, falls $x_*(t) > 1$ bzw. $0 < x_*(t) < 1$ ist, erhalten wir für die adjungierte Gleichung

$$\dot{p}(t) = - \begin{cases} [(p(t) - 1)u_*(t) + 1], & x_*(t) > 1, \\ [(p(t) - 1)u_*(t) + 1] \cdot \alpha x_*^{\alpha-1}(t), & 0 < x_*(t) < 1. \end{cases} \quad (1.47)$$

a) $x_0 \geq 1$: Wegen $T > \max\left\{1, \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha}\right\}$ in (1.45) folgt aus den Beispielen in Abschnitt 1.1.4, dass $u_*(\cdot)$ gleich Eins auf einem gewissen Intervall $[0, t_*)$ ist. Also gilt offenbar $x_1(t) > x_2(t) > 1$ auf $(0, T]$ für die Lösungen $x_1(\cdot)$ bzw. $x_2(\cdot)$ der Gleichungen

$$\dot{x}_1(t) = u(t) \cdot x_1(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}_2(t) = u(t) \cdot x_2^\alpha(t), \quad x_1(0) = x_2(0) = x_0 \geq 1,$$

zur Steuerung $u(\cdot) \in PC([t_0, t_1], [0, 1])$, die auf einem gewissen Intervall $[0, t_*)$ gleich Eins ist. Daraus folgt, dass über dem gesamten Zeitraum nur die Strategie $i = 1$ aktiv ist. Daher stimmt in diesem Fall unser hybrides Problem mit dem Beispiel 1 in Abschnitt 1.1.4 überein und es gelten

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T-1), \\ 0, & t \in [T-1, T], \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{A}_*}(t) = (1, 0) \text{ auf } [0, T],$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0 \cdot e^t, & t \in [0, T-1), \\ x_0 \cdot e^{T-1}, & t \in [T-1, T], \end{cases}$$

und $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) = x_0 \cdot e^{T-1}$ für den Wert des Zielfunktional (1.42).

b) $x_0 < 1$ und $T < \frac{1-\alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}$: Wir prüfen die Zulässigkeit von T . D. h. wir zeigen, dass die Menge aller Zahlen T mit

$$\max\left\{1, \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha}\right\} < T < \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}$$

nicht leer ist. Es gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$

$$1 < \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha(1 + x_0^{1-\alpha}) + 1 > 0$$

und wegen $0 < x_0 < 1$

$$\alpha^2 - \alpha(1 + x_0^{1-\alpha}) + 1 > \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 > 0.$$

Andererseits ist für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle $x_0 \in (0, 1)$

$$\frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha} < \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \Leftrightarrow (1-\alpha)x_0^{1-\alpha} < 1 - \alpha x_0^{1-\alpha} \Leftrightarrow x_0^{1-\alpha} < 1.$$

erfüllt.

Also gibt es in diesem Fall zulässige Planungszeiträume $[0, T]$.

Wir bestimmen zunächst den Zeitpunkt, zu dem der Kapitalstock den Wert Eins erreichen würde, wenn wir mit der Strategie $i = 2$ starten. Dazu betrachten wir die Funktion, vgl. (1.29) auf dem Intervall $[0, t_*'']$,

$$h(t) = (1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Diese Funktion ist linear und streng monoton wachsend. Die eindeutige Lösung der Gleichung $h(t) = 1$ ist

$$t_0 = \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ und $0 < x_0 < 1$ ist $t_0 > 0$.

Als nächstes bestimmen wir den Zeitpunkt, zu dem die adjungierte Funktion $p(\cdot)$ den Wert Eins erreicht, wenn wir den Planungszeitraum in der Strategie $i = 2$ beenden würden. Dazu betrachten wir die Funktion, vgl. (1.30) auf dem Intervall $[t_*'', T]$,

$$g(t) = \frac{T - t}{(1 - \alpha)T + x_0^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Diese ist linear und streng monoton fallend. Die einzige Lösung der Gleichung $g(t) = 1$ lautet

$$t_1 = \alpha T - x_0^{1-\alpha}.$$

Dieses t_1 stimmt mit dem Umschaltzeitpunkt t_*'' in (1.27) überein. Aufgrund der Annahmen

$$\frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha} < T < \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1 - \alpha)}$$

erhalten wir $0 < t_*'' < t_0$, denn $t_*'' > 0 \Leftrightarrow \alpha T - x_0^{1-\alpha} > 0$ und

$$t_*'' < t_0 \Leftrightarrow \alpha T - x_0^{1-\alpha} < \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \Leftrightarrow T < \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1 - \alpha)}.$$

Beachten wir $x_0 < 1$ in der Maximumsbedingung (1.46), d. h. wir beginnen den Planungszeitraum mit der Strategie $i = 2$, so erhalten wir mit Blick auf die Funktionen h und g aus obigen Betrachtungen ($t_*'' < t_0$), dass wir wegen $p(t_*'') = 1$ keine weiteren Investitionen mehr tätigen und zur vollständigen Konsumtion übergehen bevor der Kapitalstock $x_*(\cdot)$ den Wert Eins erreicht. Daher folgt $\chi_{\mathcal{A}_*}(t) = (0, 1)$ auf $[0, T]$. In diesem Fall erhalten wir zusammenfassend

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_*''], \\ 0, & t \in [t_*'', T], \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{A}_*}(t) = (0, 1) \text{ auf } [0, T],$$

$$x_*(t) = \begin{cases} [(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \in [0, t_*''], \\ [\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \in [t_*'', T], \end{cases}$$

sowie

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot [(1-\alpha)T + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

für das Zielfunktional (1.42).

c) $x_0 < 1$ und $T > \frac{1-\alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}$: Mit den Resultaten aus b) folgt:

$$t_*'' > t_0 \Leftrightarrow T > \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)},$$

d. h. die optimale Trajektorie $x_*(\cdot)$ übersteigt den Wert Eins bevor der Konsumsektor erreicht wird und wir wechseln – das folgt aus der Maximumsbedingung (1.46) – in $t = t_0$ die Investitionsstrategie. Daher ist

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) = \begin{cases} (0, 1), & t \in [0, t_0), \\ (1, 0), & t \in [t_0, T], \end{cases} \quad \text{mit } t_0 = \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Eingeschränkt auf das Intervall $[t_0, T]$ stellt c) eine Aufgabe wie im ersten Beispiel in Abschnitt 1.1.4 dar. Insbesondere wegen

$$T - t_0 > \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha} - \alpha(1 - x_0^{1-\alpha})}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha} > 1.$$

Mit $t_*' = T - 1$, $t_*'' = T - 1 > \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t_0$, erhalten wir die Steuerungen

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_*'), \\ 0, & t \in [t_*', T], \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{A}_*}(t) = \begin{cases} (0, 1), & t \in [0, t_0), \\ (1, 0), & t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

Das liefert

$$\dot{p}(t) = \begin{cases} -\alpha x_*^{\alpha-1}(t) \cdot p(t), & t \in (0, t_0), \\ -p(t), & t \in (t_0, t_*'), \\ -1, & t \in (t_*', T), \end{cases}$$

$$\dot{x}_*(t) = \begin{cases} x_*^\alpha(t) & \text{für } t \in [0, t_0), \\ x_*(t) & \text{für } t \in [t_0, t_*'), \\ 0 & \text{für } t \in [t_*', T], \end{cases}$$

mit $p(t_*') = 1$, $p(T) = 0$ und $x_*(0) = x_0$, $x_*(t_0) = 1$.

Daraus erhalten wir

$$x_*(t) = \begin{cases} [(1-\alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \in [0, t_0), \\ e^{t-t_0}, & t \in [t_0, t_*'), \\ e^{t_*'-t_0}, & t \in [t_*', T], \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} e^{T-(1+t_0)} [(1-\alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}, & t \in [0, t_0), \\ e^{T-(1+t)}, & t \in [t_0, t_*'), \\ T-t, & t \in [t_*', T], \end{cases}$$

und für den Wert des Zielfunktional (1.42)

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) = \int_{t'_*}^T x_*(t) dt = \int_{T-1}^T e^{T-(1+t_0)} dt = e^{T-(1+t_0)}.$$

d) $x_0 < 1$ und $T = \frac{1-\alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}$: Wir vergleichen die Situation mit b): Für

$$T = \frac{1 - \alpha x_0^{1-\alpha}}{\alpha(1 - \alpha)}$$

stimmen

$$t_0 = \frac{1 - x_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \quad \text{und} \quad t''_* = \alpha T - x_0^{1-\alpha}$$

überein und es ist $T - t''_* = \frac{1}{\alpha}$. Außerdem gilt $x_*(t''_*) = 1$. Aus obigen Betrachtungen in b) folgt, dass der Prozess $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ mit

$$u_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, t''_*], \\ 0 & \text{für } t \in [t''_*, T], \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{A}_*}(t) = (0, 1) \text{ auf } [0, T],$$

$$x_*(t) = \begin{cases} [(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [0, t''_*], \\ [\alpha(1 - \alpha)T + \alpha x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [t''_*, T], \end{cases}$$

die Bedingungen (1.36), (1.37) und (1.38) erfüllt. Für das Zielfunktional erhalten wir

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) = \int_{t''_*}^T x_*^\alpha(t) dt = (T - t''_*) \cdot x_*^\alpha(t''_*) = \frac{1}{\alpha}.$$

Andererseits lohnt sich wegen $T - t''_* = \frac{1}{\alpha} > 1$ für $t = t''_*$ ein Wechsel der Investitionsstrategie und es folgt mit den Ergebnissen aus c), dass der Prozess $(y_*(\cdot), v_*(\cdot), \mathcal{B}_*)$ mit

$$v_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, T-1], \\ 0 & \text{für } t \in [T-1, T], \end{cases} \quad \chi_{\mathcal{B}_*}(t) = \begin{cases} (0, 1) & \text{für } t \in [0, t''_*], \\ (1, 0) & \text{für } t \in [t''_*, T], \end{cases}$$

$$y_*(t) = \begin{cases} [(1 - \alpha)t + x_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \in [0, t''_*], \\ e^{t-t''_*} & \text{für } t \in [t''_*, T-1], \\ e^{T-(1+t''_*)} = \exp\left\{\frac{1}{\alpha} - 1\right\} & \text{für } t \in [T-1, T], \end{cases}$$

ebenfalls als Kandidat für ein starkes lokales Minimum in Frage kommt. Wir erhalten für den Nutzen

$$J(y_*(\cdot), v_*(\cdot), \mathcal{B}_*) = \int_{T-1}^T y_*(t) dt = \int_{T-1}^T e^{T-(1+t''_*)} dt = \exp\left\{\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right\}.$$

Wir vergleichen die Werte $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ und $J(y_*(\cdot), v_*(\cdot), \mathcal{B}_*)$. Es gilt

$$\exp \left\{ \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right\} > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha}{\alpha} > \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \Leftrightarrow 1 + \alpha(\ln \alpha - 1) > 0.$$

Die Funktion $j(\alpha) = 1 + \alpha(\ln \alpha - 1)$ ist für alle $\alpha > 0$ stetig und stetig differenzierbar. Ferner existiert der Grenzwert von $\alpha \cdot \ln \alpha$ für $\alpha \rightarrow 0 + 0$ und ist gleich Null. Daher können wir die Funktion j stetig in den Nullpunkt fortsetzen. Aus $j(0) = 1$, $j(1) = 0$ und $j'(\alpha) = \ln(\alpha) < 0$ für $\alpha \in (0, 1)$ folgt $j(\alpha) = 1 + \alpha(\ln \alpha - 1) > 0$ für alle $\alpha \in (0, 1)$, d. h.

$$\exp \left\{ \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right\} > \frac{1}{\alpha} \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1).$$

Demnach ist es in diesem Fall besser, gemäß dem Prozess $(y_*(\cdot), v_*(\cdot), \mathcal{B}_*)$ die Strategie zu wechseln und länger zu investieren.

Kapitel 2

Eine Grundaufgabe

2.1 Formulierung der Aufgabe und das PMP

Das folgende Grundproblem ist Pontrjagin et al. [28], S. 19, entnommen:

„Im Phasenraum X sind zwei Punkte x_0 und x_1 gegeben. Unter den zulässigen Steuerungen $u = u(t)$, die den Phasenpunkt aus der Lage x_0 in die Lage x_1 überführen (falls solche Steuerungen überhaupt existieren,) soll diejenige gefunden werden, für die das Funktional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt$$

einen möglichst kleinen Wert annimmt.“

Die Bezeichnungen und die Formulierung dieses Grundproblems passen wir der Aufgabe (1.1)–(1.3) des letzten Kapitels an und betrachten folgende Grundaufgabe:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad (2.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (2.3)$$

$$u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad U \neq \emptyset. \quad (2.4)$$

Wie wir im Weiteren sehen werden, führt die auf den ersten Blick unscheinbare Modifikation der Aufgabe, nämlich die Einführung der Randbedingung $x(t_1) = x_1$, zu einer ganzen Reihe mathematischer Schwierigkeiten, die bereits von Pontrjagin et al. in [28] bewältigt wurde.

In der Aufgabe (2.1)–(2.4) verwenden wir für die Nebenbedingung (2.2) die gebräuchliche Schreibweise als Differentialgleichungssystem. Gemeint ist damit das Integralgleichungssystem

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Dieses ist im Gegensatz zum Differentialgleichungssystem auch für stetige Zustandstrajektorien $x(\cdot)$ sinnvoll erklärt.

Mit der Wahl des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$ für die Zustandstrajektorien umgehen wir Problematiken bei der Darstellung und der späteren Regularisierung der Lagrangeschen Multiplikatoren in Satz 2.15 der abstrakten Optimierungsaufgabe (2.25)–(2.28).

Wir nennen ein Paar $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ einen *Steuerprozess*. Ein Steuerprozess heißt *zulässig* in der Aufgabe (2.1)–(2.4), wenn $x(\cdot)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ fast überall der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

und den Randbedingungen $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ genügt. Einen zulässigen Steuerprozess $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum*, wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass für jeden anderen zulässigen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot))$ mit der Eigenschaft

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$$

die Ungleichung

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$$

erfüllt ist.

Wir treffen folgende Annahmen in der Grundaufgabe:

Die Funktionen $f(t, x, u)$ und die Abbildung $\varphi(t, x, u)$ besitzen folgende Eigenschaften:

- Stetigkeit in der Gesamtheit der Variablen,
- stetige Differenzierbarkeit bzgl. x ,
- Stetigkeit der Abbildungen $f_x(t, x, u)$, $\varphi_x(t, x, u)$ in der Gesamtheit der Variablen.

Aufgrund dieser Annahmen über die Abbildungen f und φ sind für einen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Die Abbildungen $t \rightarrow f(t, x(t), u(t))$ und $t \rightarrow \varphi(t, x(t), u(t))$ sind auf $[t_0, t_1]$ integrierbar.
- Es existieren eine Zahl $\varepsilon > 0$ und auf $[t_0, t_1]$ integrierbare reellwertige Funktionen ϱ_1, ϱ_2 derart, dass für fast alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\|f_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho_1(t), \quad \|\varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \leq \varrho_1(t)$$

und

$$\begin{aligned} \|f_x(t, x(t) + \xi, u(t)) - f_x(t, x(t), u(t))\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \varrho_2(t) \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}, \\ \|\varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t)) - \varphi_x(t, x(t), u(t))\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} &\leq \varrho_2(t) \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

ausfallen, sobald $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ ist.

Wir definieren die Pontrjaginsche Funktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gemäß

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) := \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f(t, x, u)$$

und formulieren nun das Maximumprinzip:

Satz 2.1 (Pontrjaginsches Maximumprinzip) *Es seien die obigen Annahmen an die Funktion f und die Abbildung φ erfüllt. Ist $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (2.1)–(2.4), dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0, l_1 \in \mathbb{R}^n$ und eine Vektorfunktion $p(\cdot), p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass*

a) die Vektorfunktion $p(\cdot)$ der adjungierten Gleichung

$$\dot{p}(t) = -\varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t) + \lambda_0 f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \quad (2.5)$$

und den Transversalitätsbedingungen

$$p(t_0) = l_0, \quad p(t_1) = -l_1, \quad (2.6)$$

genügt;

b) für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ die Beziehung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x_*(t), u, p(t), \lambda_0) \quad (2.7)$$

gilt.

Mit dem Terminus „wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden“ ist gemeint, dass nicht gleichzeitig die Zahl $\lambda_0 = 0$, die Vektoren l_0, l_1 gleich dem Nullvektor im \mathbb{R}^n sind und die Funktion $p(\cdot)$ auf $[t_0, t_1]$ identisch verschwindet.

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir auf folgende Weise vor:

- Wir beginnen mit einer Konstruktion, die die Nadelvariation

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ v & \text{für } t \in [\tau - \lambda, \tau), \end{cases}$$

im Beweis von Satz 1.2 verallgemeinert und zeigen, dass diese für den weiteren Beweis nützliche Eigenschaften besitzt (Lemma 2.5 und Lemma 2.6).

- Im darauffolgenden Abschnitt diskutieren wir den verallgemeinerten Satz von Ljusternik (Satz 2.11). Dieser stellt einen Satz über implizite Funktionen dar, den wir zum Beweis notwendiger Bedingungen der Optimierungsaufgabe in Banachräumen benötigen.
- Anschließend formulieren wir die Aufgabe (2.1)–(2.4) als Optimierungsproblem in Banachräumen und untersuchen die Eigenschaften der verwendeten Abbildungen $J(x(\cdot), u(\cdot))$ und $F(x(\cdot), u(\cdot))$.

- Im folgenden Beweisschritt zeigen wir die Gültigkeit des Lagrangeschen Prinzips für die abstrakte Optimierungsaufgabe, auf die wir die Grundaufgabe zurückgeführt haben.
- Abschließend gewinnen wir aus der im vorhergehenden Abschnitt bewiesenen Lagrangeschen Multiplikatorenregel das Pontrjaginsche Maximumprinzip für die Aufgabe (2.1)–(2.4).

Die hier verwendete Vorgehensweise geht auf Ioffe & Tichomirov [25] zurück. Sie hat den Vorteil, dass sie auch auf allgemeinere Probleme, z. B. auf Aufgaben mit Phasenbeschränkungen (vgl. [25], S. 200 ff) oder die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe in Kapitel 4, angewendet werden kann.

2.2 Die verallgemeinerte Nadelvariation

2.2.1 Motivation

In Analogie zur klassischen Variationsrechnung werden im Beweis von Satz 1.2 zulässige Vergleichstrajektorien konstruiert, mit deren Hilfe aus der Variationsungleichung

$$J(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq 0$$

die Maximumsbedingung (1.7) gezeigt wird.

Die Konstruktion zulässiger Trajektorien wird ungleich komplizierter, wenn wir in der Dynamik (1.2) eine Endbedingung der Form $x(t_1) = x_1$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, einbeziehen. D. h., dass die im Beweis von Satz 1.2 verwendete Technik nur unter größeren Mühen anwendbar ist.

Eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung der einfachen Nadelvariationen

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin [\tau - \alpha, \tau), \\ v & \text{für } t \in [\tau - \alpha, \tau), \end{cases} \quad v \in U,$$

ist eine mehrfache Nadelvariation der Form

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin \bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i, \\ v_i & \text{für } t \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i, \end{cases} \quad v_i \in U,$$

mit disjunkten halboffenen Intervallen $I_i \subseteq [t_0, t_1]$ und $\sum_{1 \leq i \leq n} |I_i| = \alpha$.

Mit Hilfe derartiger Variationen wird in Pontrjagin et al. [28] und in Boltjanski [5] das Pontrjaginsche Maximumprinzip bewiesen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, zu einer gegebenen zulässigen Steuerung $u_0(\cdot)$ die „Intervalle“ aus einer „Lebesgueschen Konstruktion“ zu gewinnen. Und zwar derart, dass die zur variierten Steuerung gehörende Zustandstrajektorie „benachbart“ aus $x_*(\cdot)$ hervorgeht. Es sei $\{M(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0}$ eine Mengenfamilie meßbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$ mit

$$|M(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M(\alpha') \subseteq M(\alpha), \quad 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0.$$

Wir betrachten nun die Steuerung

$$u_\alpha(t) = u_*(t) + \chi_{M(\alpha)}(t) \cdot (u_0(t) - u_*(t)) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin M(\alpha), \\ u_0(t) & \text{für } t \in M(\alpha). \end{cases}$$

Dieser Setzung nach ist sie meßbar und beschränkt. Daher ist es an dieser Stelle unumgänglich, im Weiteren alle Steuerungen als Element des Raumes $L^\infty([t_0, t_1], U)$ aufzufassen. Weiter seien die Zustandstrajektorien $x_*(\cdot)$, $x_\alpha(\cdot)$ Lösung der Dynamik

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

zur Steuerung $u_*(\cdot)$ bzw. $u_\alpha(\cdot)$ und zum gleichen Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Nutzen wir in der Differenz

$$x_\alpha(t) - x_*(t) = \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_\alpha(s), u_\alpha(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds$$

die Eigenschaften der Mengenfamilie $\{M(\alpha)\}$ und die Setzung von $u_\alpha(\cdot)$ aus, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) - x_*(t) &= \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_\alpha(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \chi_{M(\alpha)}(s) \cdot \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \chi_{M(\alpha)}(s) \cdot \left[\varphi(s, x_\alpha(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_\alpha(s), u_*(s)) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(s, x_*(s), u_0(s)) + \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds. \end{aligned}$$

Es folgt, die stetige Differenzierbarkeit nach x und die Integrierbarkeit von $\varphi_x(t, x, u(t))$ auf $[t_0, t_1]$ in Umgebung von $x_*(\cdot)$ für alle $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ vorausgesetzt, für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_\alpha(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \\ &= \int_{t_0}^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) (x_\alpha(s) - x_*(s)) ds + o(\alpha). \end{aligned}$$

Weiterhin ist das letztere Integral in obiger Gleichung gleich

$$\int_{t_0}^t \chi_{M(\alpha)}(s) \left(\varphi_x(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) \right) (x_\alpha(s) - x_*(s)) ds + o(\alpha).$$

Dieser Ausdruck ist insgesamt von der Form $o(\alpha)$, da sich das Integral gegen

$$\int_{t_0}^{t_1} \chi_{M(\alpha)}(s) \cdot \left\| \varphi_x(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) \right\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} ds \cdot \|x_\alpha(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty$$

abschätzen lässt und hierin

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M(\alpha)}(s) ds &= \alpha(t_1 - t_0), \quad \|x_\alpha(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } \alpha \rightarrow 0 + 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} \left\| \varphi_x(s, x_*(s), u_0(s)) \right\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} ds &< \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\| \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) \right\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} ds < \infty, \end{aligned}$$

gelten. Der Grenzwert $\|x_\alpha(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0$ folgt aus Lemma A.9. Damit gilt

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) - x_*(t) &= \int_{t_0}^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) (x_\alpha(s) - x_*(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \chi_{M(\alpha)}(s) \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds + o(\alpha). \end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir lediglich die Eigenschaften

$$|M(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M(\alpha') \subseteq M(\alpha), \quad 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0,$$

der Mengenfamilie ausgenutzt. Wir werden zeigen, dass es uns mit Hilfe einer speziellen Konstruktion der Mengen $M(\alpha)$ gelingt nachzuweisen, dass zu beliebigem festen $\delta > 0$ die Relation

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \chi_{M(\alpha)}(s) \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \right. \\ \left. - \alpha \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \alpha \end{aligned}$$

erfüllt ist. Der Akzent in dieser Ungleichung liegt auf der Aussage, dass es zu einer beliebigen festen Zahl $\delta > 0$ Mengenfamilien $M(\alpha)$ mit dieser Eigenschaft gibt. Dann existiert für alle $t \in [t_0, t_1]$ der Grenzwert

$$x(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{x_\alpha(t) - x_*(t)}{\alpha}.$$

Dieser ist für $t = t_0$ gleich Null und es folgen mit $\delta > 0$ für $t \in [t_0, t_1]$ die Relationen

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \int_{t_0}^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) x(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds - \delta, \\ x(t) &\leq \int_{t_0}^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) x(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_*(s), u_0(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds + \delta. \end{aligned}$$

Neben der Relation für die Abbildung φ erfolgt die Konstruktion der Mengenfamilie so, dass gleichzeitig die Beziehung

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M(\alpha)}(t) \left[f(t, x_*(t), u_0(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x_*(t), u_0(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt \right| \leq \delta \alpha \end{aligned}$$

für den Integranden erfüllt ist. Dann folgen für

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{J(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\alpha}$$

im Grenzwert $\alpha \rightarrow 0 + 0$ in der gleichen Art und Weise wie eben für die Abbildung φ die Relationen

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{J(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\alpha} \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x_*(t), u_0(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt - \delta, \\ &\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{J(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\alpha} \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x_*(t), u_0(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt + \delta, \end{aligned}$$

mit dem frei wählbaren positiven Parameter δ .

Diese Ungleichungen, die für ein beliebiges $\delta > 0$ gelten, führen zur Setzung der Menge der Variationen: Unter der Menge der Variationen verstehen wir die Gesamtheit der Elemente

$$(\mu, y(\cdot), v_0, v_1) \in \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

zu denen ein $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und ein $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ existieren derart, dass gleichzeitig

- die Relation

$$\mu > \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x_*(t), u(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] dt$$

gilt,

- für alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) - \int_{t_0}^t \varphi_x(s, x_*(s), u_*(s)) x(s) ds \\ - \int_{t_0}^t \left[\varphi(s, x_*(s), u(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s)) \right] ds \end{aligned}$$

erfüllt ist und

- die Punkte $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ den Bedingungen

$$v_0 = x(t_0) - x_0, \quad v_1 = x(t_1) - x_1$$

genügen.

2.2.2 Die Konstruktion der Mengenfamilie $\{M(\alpha)\}$

Lemma 2.2 (Vgl. [25], Lemma 1, S. 215.) *Zu jeder auf $[t_0, t_1]$ definierten Treppenfunktion $y(\cdot), y(t) \in \mathbb{R}^n$, und jedem $\delta > 0$ kann man eine einparametrische Familie*

$$\{M(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq 1} = \{M(\alpha, y(\cdot), \delta)\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$$

meßbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$ derart konstruieren, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned} |M(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M(\alpha') \subseteq M(\alpha), \quad 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1, \\ \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) y(\tau) - (\alpha - \alpha') y(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \end{aligned}$$

gelten.

Beweis: ([25], S. 216 f.) Da $y(\cdot)$ eine Treppenfunktion auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ ist, gibt es endlich viele $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ und disjunkte Teilmengen $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m\}$ von $[t_0, t_1]$ mit

$$y(t) = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{\mathcal{A}_j}(t).$$

Ferner sei $C = \max_j \|y_j\|_{\mathbb{R}^n}$. Wir zerlegen das Intervall $[t_0, t_1]$ in gleiche Teile $\Delta_1, \dots, \Delta_r$, deren Länge höchstens $\delta/(2C)$ ist und setzen

$$M_{ij}(\alpha) = \left\{ t \in (\mathcal{A}_j \cap \Delta_i) \mid \int_{t_0}^t \chi_{(\mathcal{A}_j \cap \Delta_i)}(\tau) d\tau < \alpha \cdot |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i| \right\}.$$

Dann ist $M(\alpha) = \bigcup_{i,j} M_{ij}(\alpha)$ die gesuchte Menge. Denn es gilt

$$|M(\alpha)| = \sum_{i,j} |M_{ij}(\alpha)| = \alpha \sum_{i,j} |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i| = \alpha(t_1 - t_0).$$

Ferner zieht die Ungleichung $\alpha \geq \alpha'$ die Beziehung $M_{ij}(\alpha') \subseteq M_{ij}(\alpha)$, und damit $M(\alpha') \subseteq M(\alpha)$, nach sich. Schließlich gilt

$$\int_{M_{ij}(\alpha)} y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_{ij}(\alpha)}(t) y(t) dt = \alpha y_j \cdot |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i|,$$

weil jeweils auf den Mengen \mathcal{A}_j die Vektorfunktion $y(\cdot)$ konstant und gleich y_j ist. Hieraus folgt in den Endpunkten der Intervalle Δ_i :

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_i} (\chi_{M(\alpha)}(t) - \chi_{M(\alpha')}(t)) y(t) dt \\ &= \sum_j \left(\int_{M_{ij}(\alpha)} y(t) dt - \int_{M_{ij}(\alpha')} y(t) dt \right) = (\alpha - \alpha') \sum_j y_j \cdot |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i| \\ &= (\alpha - \alpha') \sum_j \int_{\Delta_i} \chi_{(\mathcal{A}_j \cap \Delta_i)}(t) y(t) dt = (\alpha - \alpha') \int_{\Delta_i} y(t) dt, \end{aligned}$$

also, dass in den Endpunkten der Intervalle Δ_i die Werte von $\int_{t_0}^t (\alpha - \alpha') y(\tau) d\tau$ und $\int_{t_0}^t (\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) y(\tau) d\tau$ übereinstimmen. Für $\Delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ und $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\tau_i}^t [(\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) y(\tau) - (\alpha - \alpha') y(\tau)] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \leq \left\| \int_{\tau_i}^t (\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) y(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} + |\alpha - \alpha'| \left\| \int_{\tau_i}^t y(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \leq 2C |\alpha - \alpha'| \cdot |t - \tau_i| \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \end{aligned}$$

q. e. d.

Lemma 2.3 ([25], Lemma 1, S. 215.) *Zu jeder auf $[t_0, t_1]$ definierten beschränkten meßbaren Vektorfunktion $y(\cdot)$ und jedem $\delta > 0$ kann man eine einparametrische Familie*

$$\{M(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq 1} = \{M(\alpha, y(\cdot), \delta)\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$$

mit den Eigenschaften

$$|M(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M(\alpha') \subseteq M(\alpha), \quad 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1,$$

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau))y(\tau) - (\alpha - \alpha')y(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta |\alpha - \alpha'|.$$

konstruieren.

Beweis: ([25], S. 215 f.) Jede beschränkte meßbare Vektorfunktion auf $[t_0, t_1]$ ist gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen (Elstrodt [16], Korollar 4.14, S. 108). D. h., es gibt ein $\tilde{y}(\cdot)$,

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{\mathcal{A}_j}(t),$$

mit

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{t_1 - t_0}.$$

Nach letztem Lemma kann man eine Familie $\{M(\alpha, \tilde{y}(\cdot), \delta)\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ mit den entsprechenden Eigenschaften für $\tilde{y}(\cdot)$ konstruieren. Ist dann $\alpha \geq \alpha'$, so gilt

$$\left\| \int_{t_0}^t (\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) \cdot (y(\tau) - \tilde{y}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{t_1 - t_0} |M(\alpha) \setminus M(\alpha')| \leq \delta |\alpha - \alpha'|$$

und

$$\left\| \int_{t_0}^t (\alpha - \alpha') (y(\tau) - \tilde{y}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq |\alpha - \alpha'| \int_{t_0}^t \|y(\tau) - \tilde{y}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \delta |\alpha - \alpha'|.$$

Zusammenfassend erhalten wir mit der Aussage des letzten Lemma für Treppenfunktionen:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau))y(\tau) - (\alpha - \alpha')y(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \leq \left\| \int_{t_0}^t (\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) \cdot (y(\tau) - \tilde{y}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \quad + \left\| \int_{t_0}^t (\alpha - \alpha') (y(\tau) - \tilde{y}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \quad + \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau))\tilde{y}(\tau) - (\alpha - \alpha')\tilde{y}(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq 3\delta |\alpha - \alpha'|, \end{aligned}$$

also $M(\alpha) = M(\alpha, y(\cdot), 3\delta)$.

q. e. d.

Lemma 2.4 ([25], Lemma 2, S. 217.) *Es seien $y_\kappa(\cdot)$, $y_\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n_\kappa}$, $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, beschränkte meßbare Vektorfunktionen. Dann existieren zu jedem $\delta > 0$ einparametrische Mengenfamilien $M_1(\alpha), \dots, M_{\kappa_0}(\alpha)$ meßbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$, wobei der Parameter α Werte zwischen 0 und $1/\kappa_0$ annimmt derart, dass für alle $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$ und $\kappa \neq \kappa'$ gilt:*

$$|M_\kappa(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M_\kappa(\alpha') \subseteq M_\kappa(\alpha), \quad M_\kappa(\alpha) \cap M_{\kappa'}(\alpha') = \emptyset, \quad (2.8)$$

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t (\chi_{M_\kappa(\alpha)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha')}(\tau)) y_\kappa(\tau) d\tau - (\alpha - \alpha') \int_{t_0}^t y_\kappa(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n_\kappa}} \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \quad (2.9)$$

Beweis: ([25], S. 217.) Es sei $n = n_1 + \dots + n_{\kappa_0}$. Dann ist

$$t \rightarrow z(t) = (y_1(t), \dots, y_{\kappa_0}(t))$$

eine meßbare beschränkte Abbildung des Intervalls $[t_0, t_1]$ in \mathbb{R}^n .

Dann lassen sich Treppenfunktion $\tilde{y}_\kappa(\cdot)$ derart angeben, dass für $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{y}_1(\cdot), \dots, \tilde{y}_{\kappa_0}(\cdot))$ die Beziehung

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|z(t) - \tilde{z}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{t_1 - t_0}$$

gilt. Für die Treppenfunktion $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{y}_1(\cdot), \dots, \tilde{y}_{\kappa_0}(\cdot))$ zerlegen wir die Mengen $M_{ij}(\alpha)$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.2) abermals in κ_0 Teile der Länge $0 \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$

$$M_{ij}^\kappa(\alpha) = \left\{ t \in (\mathcal{A}_j \cap \Delta_i) \mid \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa_0} \right) \cdot |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i| \leq \int_{t_0}^t \chi_{(\mathcal{A}_j \cap \Delta_i)}(\tau) d\tau < \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa_0} + \alpha \right) \cdot |\mathcal{A}_j \cap \Delta_i| \right\}$$

und setzen

$$M_\kappa(\alpha) = \bigcup_{i,j} M_{ij}^\kappa(\alpha), \quad \kappa = 1, \dots, \kappa_0.$$

Offensichtlich sind für $\kappa \neq \kappa'$, $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$ die Mengen $M_\kappa(\alpha)$ und $M_{\kappa'}(\alpha')$ disjunkt, es ist $|M_\kappa(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0)$ und für $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$ gilt $M_\kappa(\alpha') \subseteq M_\kappa(\alpha)$. Genau wie im Beweis des letzten Lemma können wir schließen:

$$\left\| \int_{t_0}^t [(\chi_{M_\kappa(\alpha)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha')}(\tau)) z(\tau) - (\alpha - \alpha') z(\tau)] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq 3\delta |\alpha - \alpha'|, \quad \kappa = 1, \dots, \kappa_0.$$

Die letzte Behauptung des Lemma folgt aus der Tatsache, dass für jeden Vektor $z = (y_1, \dots, y_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^n$, $y_\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$ die Ungleichung

$$\|z\|_{\mathbb{R}^n} \geq \|y_\kappa\|_{\mathbb{R}^{n_\kappa}}, \quad \kappa = 1, \dots, \kappa_0,$$

erfüllt ist.

q. e. d.

2.2.3 Die Definition der verallgemeinerten Nadelvariation

Es genüge $x_*(\cdot)$ der Gleichung (2.2) zur Steuerung $u_*(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$:

$$\dot{x}_*(t) = \varphi(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Weiter seien $u_\kappa(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$, $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$. Dann sind die Vektorfunktionen $y_\kappa(\cdot)$,

$$y_\kappa(t) = \left(\varphi(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \varphi(t, x_*(t), u_*(t)), \right. \\ \left. f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right), \quad \kappa = 1, \dots, \kappa_0,$$

auf $[t_0, t_1]$ meßbar und beschränkt, weil die Steuerungen $u_*(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_{\kappa_0}(\cdot)$ meßbar, beschränkt und die Abbildungen f, φ stetig sind. Daher existieren nach Lemma 2.4 einparametrische Mengenfamilien $\{M_\kappa(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq 1/\kappa_0}$ mit

$$|M_\kappa(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M_\kappa(\alpha') \subseteq M_\kappa(\alpha), \quad M_\kappa(\alpha) \cap M_{\kappa'}(\alpha') = \emptyset$$

und

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha')}(\tau)) y_\kappa(\tau) - (\alpha - \alpha') y_\kappa(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \frac{\delta}{2} |\alpha - \alpha'|$$

für alle $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$ und $\kappa \neq \kappa'$.

Dann ist auf dem Quader

$$Q^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid 0 \leq \alpha_\kappa \leq 1/\kappa_0, \kappa = 1, \dots, \kappa_0 \right\}$$

die Abbildung $\alpha \rightarrow u_\alpha(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$,

$$u_\alpha(t) = u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (u_\kappa(t) - u_*(t)),$$

wohldefiniert und $u_\alpha(\cdot)$ heißt *verallgemeinerte Nadelvariation* von $u_*(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ in Richtung der Elemente $u_1(\cdot), \dots, u_{\kappa_0}(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$.

2.2.4 Eigenschaften der verallgemeinerten Nadelvariation

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind den Ausführungen in [25], S. 217 ff, entnommen.

Aus den Eigenschaften (2.8) der Mengenfamilien in der Setzung der verallgemeinerten Nadelvariation

$$u_\alpha(t) = u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (u_\kappa(t) - u_*(t))$$

folgt unmittelbar für jede auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definierte Vektorfunktion h und jedes $\alpha \in Q^{\kappa_0}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & h(t, x, u_\alpha(t)) - h(t, x, u_*(t)) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ferner gilt für $\alpha, \alpha' \in Q^{\kappa_0}$

$$\begin{aligned} & h(t, x, u_\alpha(t)) - h(t, x, u_{\alpha'}(t)) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t) \right) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

denn aus (2.10) folgt

$$\begin{aligned} & h(t, x, u_\alpha(t)) - h(t, x, u_{\alpha'}(t)) \\ &= h(t, x, u_*(t)) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right) \\ &\quad - h(t, x, u_*(t)) - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t) \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t) \right) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right). \end{aligned}$$

Weil alle Steuerungen $u_*(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_{\kappa_0}(\cdot)$ beschränkt sind, sind ihre Werte in einer kompakten Menge $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ enthalten. Nutzen wir darüber hinaus die Stetigkeit von f, φ und f_x, φ_x aus, so können wir ein $\sigma > 0$ derart angeben, dass

$$\left\| \varphi(t, x, u) - \varphi(t, x_*(t), u) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{4(t_1 - t_0)}, \quad (2.12)$$

$$\left| f(t, x, u) - f(t, x_*(t), u) \right| \leq \frac{\delta}{8(t_1 - t_0)}, \quad (2.13)$$

$$\left\| \varphi(t, x, u) - \varphi(t, x', u) - \varphi_x(t, x_*(t), u)(x - x') \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta \|x - x'\|_{\mathbb{R}^n}}{2(t_1 - t_0)}, \quad (2.14)$$

für alle t, x, x', u mit $\|x - x_*(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sigma, \|x' - x_*(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sigma$ und $u \in U_1$ erfüllt sind. Wir setzen

$$V = \{x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty \leq \sigma\}$$

und wählen $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ mit

$$\varepsilon(t_1 - t_0) \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} \left\| \varphi_x(t, x_*(t), u) \right\|_{\mathbb{R}^n \times n} \leq \frac{\delta}{4}. \quad (2.15)$$

Wir definieren die Menge $\varepsilon\Sigma^{\kappa_0}$ gemäß

$$\varepsilon\Sigma^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0} \geq 0, \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa} \leq \varepsilon \right\}.$$

Offenbar gilt die Relation $\varepsilon\Sigma^{\kappa_0} \subseteq Q^{\kappa_0}$ für $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$. Daher ist die verallgemeinerte Nadelvariation $u_{\alpha}(\cdot)$ für $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ auf dem gesamten Simplex $\varepsilon\Sigma^{\kappa_0}$ definiert.

Lemma 2.5 (Vgl. [25], S. 218.) *Es genüge $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ der Bedingung (2.15). Dann gilt für alle $\alpha, \alpha' \in \varepsilon\Sigma^{\kappa_0}$ und alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$:*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x(\tau), u_{\alpha}(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), u_{\alpha'}(\tau)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_{\kappa} - \alpha'_{\kappa}) \cdot \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_{\kappa}(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \leq \delta \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa} - \alpha'_{\kappa}| \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Beweis: ([25], S. 220 f.) Die linke Seite von (2.16) können wir nach oben gegen

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\| \varphi(t, x(t), u_{\alpha}(t)) - \varphi(t, x'(t), u_{\alpha}(t)) \right. \\ & \quad \left. - \varphi_x(t, x_*(t), u_{\alpha}(t))(x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \left(\varphi_x(t, x_*(t), u_{\alpha}(t)) - \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) \right) (x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \varphi(t, x'(t), u_{\alpha}(t)) - \varphi(t, x'(t), u_{\alpha'}(t)) \right. \\ & \quad \left. - \varphi(t, x_*(t), u_{\alpha}(t)) + \varphi(t, x_*(t), u_{\alpha'}(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ & + \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u_{\alpha}(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_{\alpha'}(\tau)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_{\kappa} - \alpha'_{\kappa}) \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_{\kappa}(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

abschätzen.

Der erste Summand ist nach (2.14) kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty}.$$

Aus (2.10) folgt, dass der zweite Summand gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\varphi_x(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) \right) (x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt$$

ist. Mit (2.15) und der Wahl von $\varepsilon \sum \kappa_0$ lässt sich das nach oben gegen

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) dt \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} \|\varphi_x(t, x_*(t), u)\|_{\mathbb{R}^n \times n} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \\ &= 2 \left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \right) (t_1 - t_0) \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} \|\varphi_x(t, x_*(t), u)\|_{\mathbb{R}^n \times n} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \\ &\leq 2 \cdot \varepsilon (t_1 - t_0) \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} \|\varphi_x(t, x_*(t), u)\|_{\mathbb{R}^n \times n} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty = \frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

abschätzen. Wegen (2.11) ist der dritte Summand gleich

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\varphi(t, x'(t), u_\kappa(t)) - \varphi(t, x'(t), u_*(t)) \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\varphi(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

Gemäß (2.12) ist dieses Integral nicht größer als

$$2 \cdot \frac{\delta}{4(t_1 - t_0)} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^{t_1} \|\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt = \frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa|.$$

Schließlich läßt sich der vierte Summand mittels (2.11) in die Form

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(\tau)) \cdot \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) \cdot \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

bringen. Die Differenz $\left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right)$ enthält die ersten n Koordinaten der Vektorfunktion $y_\kappa(\cdot)$ aus Abschnitt 2.2.3 im Punkt τ . Daher ist der obenstehende Ausdruck nicht größer als

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(\tau)) y_\kappa(\tau) - (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) y_\kappa(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Mit (2.9) ist dieser Ausdruck nicht größer als

$$\frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa|.$$

Damit ist die Beziehung (2.16) bewiesen.

q. e. d.

Lemma 2.6 (Vgl. [25], S. 218.) *Es sei $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ und genüge der Bedingung (2.15). Dann gilt*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x(t), u_\alpha(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \cdot \left(f(t, x(t), u_\kappa(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt \leq \delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \quad (2.17)$$

für alle $\alpha \in \varepsilon \Sigma^{\kappa_0}$ und alle $x(\cdot) \in V$.

Beweis: ([25], S. 221 f.) Beachten wir (2.10), so ist die linke Seite in (2.17) gleich

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^{t_1} \left[\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(f(t, x(t), u_\kappa(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) - \alpha_\kappa \cdot \left(f(t, x(t), u_\kappa(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt$$

und ist kleiner oder gleich

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left| \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) - \alpha_\kappa \cdot \left(f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) dt \right| \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[\int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left[|f(t, x(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_\kappa(t))| \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + |f(t, x_*(t), u_*(t)) - f(t, x(t), u_*(t))| \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \alpha_\kappa \int_{t_0}^{t_1} \left[|f(t, x(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_\kappa(t))| \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + |f(t, x(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t))| \right] dt \right]. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt die Relation (2.9), d.h.

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left| \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) - \alpha_\kappa \cdot \left(f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) dt \right| \leq \frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa.$$

Mit (2.13) folgt, dass die zweite Summe kleiner gleich

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left(2 \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) dt + 2\alpha_\kappa \int_{t_0}^{t_1} dt \right) \cdot \frac{\delta}{8(t_1 - t_0)} = \frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

q. e. d.

2.3 Der verallgemeinerte Satz von Ljusternik

2.3.1 Das Prinzip der kontrahierenden mengenwertigen Abbildung

Satz 2.7 (Prinzip der kontrahierenden mengenwertigen Abbildung) (Vgl. [25], Lemma 1, S. 43f.) *Es sei Z ein Banachraum und L ein abgeschlossener linearer Teilraum von Z . In einer Kugel $U(z_0, r) = \{z \in Z \mid \|z - z_0\|_Z \leq r\}$ sei die mengenwertige Abbildung Φ definiert, die jedem $z \in U(z_0, r)$ einen zu L parallelen Teilraum zuordnet. Genauer gilt mit einem gewissen $\zeta \in Z$:*

$$\Phi(z) = \zeta + L = \{y \in Z \mid y = \zeta + l, l \in L\}.$$

Wir setzen für den Abstand zwischen zwei Teilräumen

$$d(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) = \inf \{ \|\zeta\|_Z \mid \zeta = \zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 \in \Phi(z_1), \zeta_2 \in \Phi(z_2) \}$$

und für den Abstand eines Punktes zu einem Teilraum

$$d(\Phi(z), \zeta_0) = \inf \{ \|\zeta\|_Z \mid \zeta = z_1 - \zeta_0, z_1 \in \Phi(z) \}.$$

Es soll ferner gelten, dass eine Zahl $\theta \in (0, 1)$ existiert mit

a) $d(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \leq \theta \|z_1 - z_2\|_Z$ für alle $z_1, z_2 \in U(z_0, r)$,

b) $d(\Phi(z_0), z_0) < (1 - \theta)r$.

Dann existiert zu jeder Zahl r_1 , die der Ungleichung

$$d(\Phi(z_0), z_0) < r_1 < (1 - \theta)r$$

genügt, ein Element $z \in U(z_0, \frac{r_1}{1 - \theta})$ mit

$$z \in \Phi(z). \tag{2.18}$$

Darüber hinaus gibt es unter den Punkten, die dieser Bedingung genügen, einen Punkt z mit

$$\|z - z_0\|_Z \leq \frac{2}{1-\theta} d(\Phi(z_0), z_0). \quad (2.19)$$

Beweis: ([25], S. 44 f.) Wir beginnen mit der Konstruktion einer Folge z_0, z_1, \dots mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} z_n &\in U(z_0, r), & n = 0, 1, \dots, \\ z_n &\in \Phi(z_{n-1}), & n = 1, 2, \dots, \\ \|z_{n+1} - z_n\|_Z &< \theta^n r_1, & n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Diese Folge wird induktiv konstruiert.

Das Element z_0 ist dasselbe, das in der Voraussetzung des Lemmas auftritt, und z_1 ein beliebiges Element aus $\Phi(z_0)$, für das $\|z_0 - z_1\| < r_1$ gilt. Nun nehmen wir an, dass wir bereits die ersten $(n+1)$ Folgenglieder z_0, \dots, z_n ausgewählt haben. Dann gilt

$$d(\Phi(z_n), \Phi(z_{n-1})) \leq \theta \|z_n - z_{n-1}\|_Z < \theta^n r_1.$$

Hieraus folgt die Existenz eines Elementes $z_{n+1} \in \Phi(z_n)$ mit $\|z_{n+1} - z_n\|_Z < \theta^n r_1$. Ferner gilt nach der Dreiecksungleichung (wenn $k+m \leq n+1$ ist)

$$\begin{aligned} \|z_k - z_{k+m}\|_Z &\leq \|z_k - z_{k+1}\|_Z + \dots + \|z_{k+m-1} - z_{k+m}\|_Z \\ &< (\theta^k + \dots + \theta^{k+m-1}) r_1 < \frac{\theta^k}{1-\theta} r_1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Daraus folgt für $k=0$ und $k+m=n+1$

$$\|z_0 - z_{n+1}\|_Z < \frac{r_1}{1-\theta} < r,$$

also $z_{n+1} \in U(z_0, r)$. Damit ist die Induktion beendet.

Aus der Ungleichung (2.20) folgt, dass $\{z_0, z_1, \dots\}$ eine Cauchyfolge ist. Da der Raum Z vollständig ist, konvergiert sie gegen ein gewisses Element $z \in Z$. Führen wir in

$$\|z_0 - z_n\|_Z < \frac{r_1}{1-\theta}$$

den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus, so erhalten wir $z \in U(z_0, \frac{r_1}{1-\theta}) \subseteq U(z_0, r)$. Andererseits gilt

$$d(\Phi(z), z_{n+1}) = d(\Phi(z), \Phi(z_n)) \leq \theta \|z_n - z\|_Z \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer Folge $\{\omega_i\}$ von Elementen der Menge $\Phi(z)$, die gegen z konvergiert. Daher gilt $z \in \Phi(z)$, weil nach Voraussetzung die Menge $\Phi(z)$ abgeschlossen ist. Damit ist (2.18) gezeigt.

Wenn $d(\Phi(z_0), z_0) = 0$ ist, so gilt $z_0 \in \Phi(z_0)$, und (2.19) ist offensichtlich erfüllt. Ist aber $d(\Phi(z_0), z_0) > 0$, dann wählen wir r_1 so, dass

$$\frac{r_1}{2} \leq d(\Phi(z_0), z_0) < r_1 < (1 - \theta)r$$

ist. Für dieses r_1 finden wir einen Punkt $z \in U(z_0, \frac{r_1}{1-\theta})$, welcher der Beziehung (2.18) genügt. Dann gilt

$$\|z_0 - z\|_Z < \frac{r_1}{1-\theta} \leq \frac{2}{1-\theta} d(\Phi(z_0), z_0).$$

q. e. d.

2.3.2 Der Satz von Ljusternik

Definition 2.8 (lokaler Tangentialkegel) (Vgl. [25], S. 42.) *Es sei X ein Banachraum und $x_0 \in M \subseteq X$. Mit $\mathcal{C}(M, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Elemente $x \in X$, zu denen ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Abbildung $r(\varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \rightarrow X$ mit den Eigenschaften*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\|r(\varepsilon)\|_X}{\varepsilon} = 0$$

und

$$x_0 + \varepsilon x + r(\varepsilon) \in M \quad \text{für alle } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

existiert. $\mathcal{C}(M, x_0)$ heißt der lokale Tangentialkegel an die Menge M im Punkt x_0 .

Satz 2.9 (Satz von Ljusternik) (Vgl. [25], S. 42.) *Es seien X und Y Banachräume, V eine Umgebung des Punktes $x_* \in X$ und F eine Fréchet-differenzierbare Abbildung der Menge V in Y . Wir setzen voraus, die Abbildung F sei regulär im Punkt x_* , d. h., es gelte*

$$\text{Im } F'(x_*) = Y,$$

außerdem sei ihre Ableitung in diesem Punkt in der gleichmäßigen Operatorentopologie des Raumes $\mathcal{L}(X, Y)$ stetig. Dann stimmt der lokale Tangentialkegel an die Menge

$$M = \{x \in V \mid F(x) = F(x_*)\}$$

im Punkt x_* mit dem Kern des Operators $F'(x_*)$ überein:

$$\mathcal{C}(M, x_*) = \text{Ker } F'(x_*).$$

Offenbar gehört jedes Element des lokalen Tangentialkegels an die Menge M im Punkt x_* dem Kern des Operators $F'(x_*)$ an, denn es ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C}(M, x_*) &\Leftrightarrow x_* + \varepsilon x + r(\varepsilon) \in M \text{ für alle } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \\ &\Leftrightarrow F(x_* + \varepsilon x + r(\varepsilon)) = F(x_*) \text{ für alle } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \\ &\Rightarrow F'(x_*) \left(x + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) = 0 \text{ für alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \end{aligned}$$

Daraus folgt $F'(x_*)x = 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, d. h. $\mathcal{C}(M, x_*) \subseteq \text{Ker } F'(x_*)$.

Umgekehrt ist $\text{Ker } F'(x_*) \subseteq \mathcal{C}(M, x_*)$, falls zu jedem $z \in \text{Ker } F'(x_*)$ eine Auflösung $y = r(\varepsilon)$ der Gleichung

$$F(x_* + \varepsilon z + y) = F(x_*)$$

existiert. Das zeigen wir mit Satz 2.11, dem verallgemeinerten Satz von Ljusternik.

Wir nehmen in beiden Versionen des Satzes von Ljusternik zwar an, dass wir einen surjektiven stetigen linearen Operator betrachten, aber dessen Kern muss nicht einzig aus dem Nullelement bestehen. Demnach ist der inverse Operator mengenwertig.

Da der Kern eines stetigen linearen Operators ein abgeschlossener Unterraum ist, wird beim Beweis des Satzes von Ljusternik die Idee des Quotientenraumes zwar aufgegriffen, aber der Übergang zum diesem nicht vollzogen (vgl. Lemma 2.10). Dies ist dadurch begründet, dass wir bei Anwendung eines Fixpunktsatzes für mengenwertige Abbildungen auf einer gewissen Menge mit der Einführung des Faktorraum und der Äquivalenzklassenbildung zu Repräsentanten übergehen, die mit dem betrachteten Fixpunktproblem nichts mehr gemein haben müssen.

Lemma 2.10 ([25], Lemma 3, S. 45.) *Es seien X und Y Banachräume und $\Lambda : X \rightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator. Wir setzen*

$$C(\Lambda) := \sup_{y \neq 0} \left(\frac{\inf \{ \|x\|_X \mid x \in X, \Lambda x = y \}}{\|y\|_Y} \right).$$

Wenn $\text{Im } \Lambda = Y$ gilt, so ist $C(\Lambda) < \infty$.

Beweis: ([25], S. 45.) Ist $\text{Im } \Lambda = Y$, so enthält nach dem Satz über die offene Abbildung das Bild der Einheitskugel des Raumes X bei der Abbildung Λ eine Umgebung des Nullpunktes in Y , d. h., es lässt sich ein $\delta > 0$ derart angeben, dass zu jedem $y \in Y$, $\|y\|_Y \leq \delta$, ein Punkt $x \in X$ existiert, für den $\|x\|_X \leq 1$ und $\Lambda x = y$ gilt.

Deshalb ist für beliebiges $y \in Y$, $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \inf \{ \|x\|_X \mid x \in X, \Lambda x = y \} &= \inf \left\{ \|x\|_X \mid x \in X, \frac{\delta}{\|y\|_Y} \cdot \Lambda x = \frac{\delta}{\|y\|_Y} \cdot y \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\|y\|_Y}{\delta} \cdot \|\xi\|_X \mid \xi \in X, \Lambda \xi = \frac{\delta}{\|y\|_Y} \cdot y \right\} \\ &= \frac{\|y\|_Y}{\delta} \cdot \inf \left\{ \|x\|_X \mid x \in X, \Lambda x = \frac{\delta}{\|y\|_Y} \cdot y \right\} \leq \frac{\|y\|_Y}{\delta}, \end{aligned}$$

also

$$C(\Lambda) = \sup_{y \neq 0} \left(\frac{\inf \{ \|x\|_X \mid x \in X, \Lambda x = y \}}{\|y\|_Y} \right) \leq \frac{1}{\delta}.$$

q. e. d.

Zur Motivation der Zahl $C(\Lambda)$ betrachten wir den Operator $L : Y \rightarrow X/\text{Ker } \Lambda$, der jedem $y \in Y$ die Äquivalenzklasse $[x] \in X/\text{Ker } \Lambda$ aller Elemente $x \in X$ zuordnet, für die $\Lambda x = y$ gilt.

Der Setzung nach können wir L als den inversen Operator $\tilde{\Lambda}^{-1}$ von Λ auffassen, der von Y nach $\tilde{X} = X/\text{Ker } \Lambda$ abbildet. Für die Klasse $[x] = Ly$ gilt in der Quotientenraumnorm

$$\|[x]\|_{\tilde{X}} = \|Ly\|_{\tilde{X}} = \inf\{\|x\|_X \mid x \in X, \Lambda x = y\}.$$

Die Zahl $C(\Lambda)$ gibt also die Operatornorm von $L = \tilde{\Lambda}^{-1}$ an:

$$C(\Lambda) = \|L\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ly\|_{\tilde{X}}}{\|y\|_Y}.$$

Satz 2.11 (Der verallgemeinerte Satz von Ljusternik) ([25], S. 45 f.) *Es seien X und Y Banachräume, $\Lambda : X \rightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator und F eine Abbildung einer gewissen Umgebung V des Punktes $x_* \in X$ in Y . Wir setzen voraus, es sei $\text{Im } \Lambda = Y$ und es gebe eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass erstens*

$$\delta C(\Lambda) < \frac{1}{2}$$

und zweitens

$$\|F(x) - F(x') - \Lambda(x - x')\|_Y \leq \delta \|x - x'\|_X \quad (2.21)$$

für alle x, x' aus V gilt.

Dann existieren eine Umgebung $V' \subseteq V$ des Punktes x_* , eine Zahl $K > 0$ und eine Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi)$ der Umgebung V' in X derart, dass die Beziehungen

$$F(\xi + x(\xi)) = F(x_*) \quad \text{und} \quad \|x(\xi)\|_X \leq K \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y$$

für alle $\xi \in V'$ erfüllt sind.

Satz 2.11 verallgemeinert tatsächlich den Satz von Ljusternik ([25], S. 47):

Wir setzen $\Lambda = F'(x_*)$. Da nach Voraussetzung von Satz 2.9 die Abbildung $x \rightarrow F'(x)$ in x_* stetig ist, existiert eine konvexe Umgebung $U_1 \subseteq U$ des Punktes x_* derart, dass für alle $x \in U_1$ die Beziehung

$$\|F'(x) - \Lambda\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|F'(x)z - \Lambda z\|_Y}{\|z\|_X} < \frac{1}{2 \cdot C(\Lambda)}$$

gilt. Dann ist nach dem Mittelwertsatz ([25], S. 40) für alle $x, x' \in U_1$

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x') - \Lambda(x - x')\|_Y &\leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\|F'(x' + \alpha(x - x')) - \Lambda\| \cdot \|x - x'\|_X) \\ &< \frac{1}{2 \cdot C(\Lambda)} \|x - x'\|_X. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|F(x) - F(x') - \Lambda(x - x')\|_Y \leq \delta \|x - x'\|_X$$

für $\delta > 0$ mit $\delta C(\Lambda) < 1/2$ und es sind alle Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik erfüllt.

Die Inklusion $\mathcal{C}(M, x_*) \subseteq \text{Ker } F'(x_*)$ im Satz von Ljusternik folgt wie bereits gezeigt direkt aus der Definition des lokalen Tangentialkegels. Ist andererseits $z \in \text{Ker } F'(x_*)$ und die Behauptung des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik richtig, so gilt für hinreichend kleine $\varepsilon \geq 0$ offenbar ([25], S. 42 f)

$$\xi = x_* + \varepsilon z \in V'$$

und es existiert eine Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi)$ mit

$$F(\xi + x(\xi)) = F(x_*), \quad \|x(\xi)\|_X \leq K \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y.$$

Da $z \in \text{Ker } F'(x_*)$ ist, lässt sich $\|x(\xi)\|_X$ weiter abschätzen gegen

$$K \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y = K \|F(x_* + \varepsilon z) - F(x_*)\|_Y = K \|F'(x_*)(\varepsilon z)\|_Y + o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Setzen wir $r(\varepsilon) = x(x_* + \varepsilon z)$, so gelten

$$\|r(\varepsilon)\| \leq K \|F(x_* + \varepsilon z) - F(x_*)\|_Y = o(\varepsilon)$$

und $\xi + x(\xi) = x_* + \varepsilon z + r(\varepsilon) \in M$ für alle hinreichend kleine ε . Daraus folgt $z \in \mathcal{C}(M, x_*)$.

Beweis von Satz 2.11: ([25], S. 46 f.) Wir wählen $r > 0$ so, dass $U(x_*, 2r) \subseteq V$ gilt. Aus (2.21) folgt wegen

$$\|F(x) - F(x')\|_Y - \|\Lambda\| \|x - x'\|_X \leq \|F(x) - F(x') - \Lambda(x - x')\|_Y \leq \delta \|x - x'\|_X,$$

dass die Abbildung F im Punkt x_* stetig ist. Daher kann man eine Umgebung $V' \subseteq U(x_*, r)$ des Punktes x_* angeben, in der

$$C(\Lambda) \cdot \sup_{\xi \in V'} \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y \leq \frac{r}{2} \quad (2.22)$$

gilt. (Nach Lemma 2.10 ist $C(\Lambda) < \infty$.)

Wegen der Wahl von r und V' ist $\xi + x \in V$ für alle $\xi \in V', x \in U(0, r)$.

Nun wählen wir ein festes Element $\xi \in V'$ und betrachten die mengenwertige Abbildung $x \rightarrow \Psi_\xi(x)$ der Kugel $U(0, r)$, die durch

$$\Psi_\xi(x) = x - \Lambda^{-1}(F(\xi + x) - F(x_*))$$

definiert wird. $\Lambda^{-1}(y)$ bezeichnet dabei vollständige Urbild. Wegen $\text{Im } \Lambda = Y$ ist diese Setzung für alle x, ξ möglich. Für jedes $y \in Y$ ist $\Lambda^{-1}(y)$ eine lineare Mannigfaltigkeit, die dem Teilraum $\text{Ker } \Lambda$ parallel ist. Die Mengen $\Psi_\xi(x)$ haben dieselbe Eigenschaft. Sie sind insbesondere abgeschlossen.

Wir zeigen: Es existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

- a) $d(\Psi_\xi(x_1), \Psi_\xi(x_2)) \leq \theta \|x_1 - x_2\|_X$ für alle $x_1, x_2 \in U(0, r)$,
 b) $d(\Psi_\xi(0), 0) \leq (1 - \theta)r$.

Aufgrund der Definition der Zahl $C(\Lambda)$ in Lemma 2.10 gilt

$$\begin{aligned} d(\Psi_\xi(x_1), \Psi_\xi(x_2)) &= \inf \{ \|z_1 - z_2\|_X \mid z_i \in \Psi_\xi(x_i), i = 1, 2 \} \\ &= \inf \{ \|z_1 - z_2\|_X \mid \Lambda z_i = \Lambda x_i - F(\xi + x_i) + F(x_*), i = 1, 2 \} \\ &= \inf \{ \|z\|_X \mid \Lambda z = \Lambda(x_1 - x_2) - F(\xi + x_1) + F(\xi + x_2) \} \\ &\leq C(\Lambda) \cdot \|F(\xi + x_1) - F(\xi + x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\|_Y. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Ungleichung (2.21) und setzen $\theta = \delta C(\Lambda)$ (nach Voraussetzung des Satzes ist $\theta < 1/2$), so erhalten wir hieraus

$$d(\Psi_\xi(x_1), \Psi_\xi(x_2)) \leq \theta \|x_1 - x_2\|_X. \quad (2.23)$$

Ferner gilt wegen (2.22)

$$\begin{aligned} d(\Psi_\xi(0), 0) &= \inf \{ \|z - 0\|_X \mid z \in \Psi_\xi(0) \} = \inf \{ \|z\|_X \mid \Lambda z = -F(\xi) + F(x_*) \} \\ &\leq C(\Lambda) \cdot \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y \leq \frac{1}{2}r < (1 - \theta)r. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Beziehungen (2.23), (2.24) zeigen, dass die Abbildung $\Psi_\xi(x)$ allen Voraussetzungen des Satzes 2.7 genügt. Daher existiert ein Vektor $x = x(\xi)$ derart, dass

$$x(\xi) \in \Psi_\xi(x(\xi)),$$

d. h.

$$0 \in \Lambda^{-1}(F(\xi + x(\xi)) - F(x_*))$$

und demzufolge

$$F(\xi + x(\xi)) = F(x_*)$$

gilt. Ferner ist nach (2.19) und der mittleren Ungleichung in (2.24) die Beziehung

$$\|x(\xi)\|_X \leq \frac{2}{1 - \theta} d(\Psi_\xi(0), 0) \leq \frac{2C(\Lambda)}{1 - \theta} \cdot \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y = K \|F(\xi) - F(x_*)\|_Y$$

erfüllt.

Damit ist der verallgemeinerte Satz von Ljusternik bewiesen.

q. e. d.

2.4 Die abstrakte Optimierungsaufgabe

2.4.1 Die Definitionen der Abbildungen

Im Weiteren ist es nützlich, eine äquivalente Schreibweise der Ausdrücke (2.1)–(2.3) zu verwenden. Dazu betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} J &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \rightarrow \mathbb{R}, \\ F &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n), \\ H_\iota &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \iota = 0, 1, \end{aligned}$$

die gemäß

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), u(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt, \\ F(x(\cdot), u(\cdot)) &= z(\cdot), \quad z(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1], \\ H_\iota(x(\cdot)) &= x(t_\iota) - x_\iota, \quad \iota = 0, 1, \end{aligned}$$

definiert sind. Mit diesen Schreibweisen lautet die Aufgabe (2.1)–(2.4) als abstraktes Optimierungsproblem

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \inf, \tag{2.25}$$

$$F(x(\cdot), u(\cdot)) = 0, \tag{2.26}$$

$$H_0(x(\cdot)) = 0, \quad H_1(x(\cdot)) = 0, \tag{2.27}$$

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U). \tag{2.28}$$

Sind für $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ die Bedingungen

$$F(x(\cdot), u(\cdot)) = 0, \quad H_0(x(\cdot)) = 0 \quad \text{und} \quad H_1(x(\cdot)) = 0$$

erfüllt, dann heißt $(x(\cdot), u(\cdot))$ *zulässig* in der Aufgabe (2.25)–(2.28). Ein zulässiges Paar $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum*, wenn eine Umgebung $V \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ von $x_*(\cdot)$ existiert mit

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$$

für alle zulässigen Paare $(x(\cdot), u(\cdot))$ mit $x(\cdot) \in V$.

2.4.2 Eigenschaften der Abbildung $F(x(\cdot), u(\cdot))$

Lemma 2.12 (Vgl. [25], Beispiel 9, S. 52 f.) *Unter den Voraussetzungen an die Abbildung φ in Abschnitt 2.1 ist die Abbildung*

$$x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u_0(\cdot))$$

mit

$$F(x(\cdot), u_0(\cdot))(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u_0(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

für jedes $u_0(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ stetig Fréchet-differenzierbar und es gilt

$$\left[F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))x(\cdot) \right](t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Beweis: (Vgl. [25], S. 52f.) Für ein festes $u_0(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ setzen wir $\mathcal{F}(x(\cdot)) = F(x(\cdot), u_0(\cdot))$. Für ein beliebiges festes $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{F}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot))(t) - \mathcal{F}(x_0(\cdot))(t)}{\lambda} \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\varphi(\tau, x_0(\tau) + \lambda x(\tau), u_0(\tau)) - \varphi(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))}{\lambda} d\tau \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \left[\int_0^1 \varphi_x(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau))x(\tau) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

Letztere Umformung folgt mit $g(s) = \varphi(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau))$ aus der Beziehung

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 \varphi_x(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau)) \lambda x(\tau) ds.$$

Für hinreichend kleine $\lambda > 0$ ist $\|\lambda s x(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$ und es ist

$$\|\varphi_x(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau))x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho_1(\tau) \cdot \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Betrachten wir im Quotienten

$$\frac{\mathcal{F}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot))(t) - \mathcal{F}(x_0(\cdot))(t)}{\lambda}$$

den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$, so erhalten wir nach Satz B.17 über die „Differentiation unter dem Integral“ für die erste Variation

$$\begin{aligned} & \left[\delta \mathcal{F}(x_0(\cdot))x(\cdot) \right](t) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{\mathcal{F}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot))(t) - \mathcal{F}(x_0(\cdot))(t)}{\lambda} \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Gâteaux-Ableitung $\Lambda(x_0(\cdot))$ mit $\Lambda(x_0(\cdot))x(\cdot) = \delta \mathcal{F}(x_0(\cdot))x(\cdot)$ in $x_0(\cdot)$ stetig, also die Abbildung $x(\cdot) \rightarrow \mathcal{F}(x(\cdot)) = F(x(\cdot), u_0(\cdot))$ in diesem Punkt Fréchet-differenzierbar ist.

In der Operatornorm erhalten wir für die Gâteaux-Ableitung in $x_0(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda(x_0(\cdot))\| &= \sup_{\substack{\xi(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ \|\xi(\cdot)\|_\infty = 1}} \left\| \left[\Lambda(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda(x_0(\cdot)) \right] \xi(\cdot) \right\|_\infty \\
&= \sup_{\substack{\xi(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ \|\xi(\cdot)\|_\infty = 1}} \left\{ \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[\varphi_x(\tau, x_0(\tau) + x(\tau), u_0(\tau)) \right. \right. \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)) \right] \xi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \right\} \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \|\varphi_x(t, x_0(t) + x(t), u_0(t)) - \varphi_x(t, x_0(t), u_0(t))\|_{\mathbb{R}^n \times n} dt \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \varrho_2(t) \cdot \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty
\end{aligned}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$. Dies bedeutet, dass die Gâteaux-Ableitung in $x_0(\cdot)$ stetig ist. Da $x_0(\cdot)$ ein beliebiges Element des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ war, folgt daraus die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung $x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u_0(\cdot))$ für jedes $u_0(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$.

Mit den obigen Abschätzungen folgt die Stetigkeit der Fréchet-Ableitung. Es sei $x_0(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Dann folgt in der Operatornorm

$$\begin{aligned}
&\|F_x(x_0(\cdot) + x(\cdot), u_0(\cdot)) - F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))\| \\
&= \sup_{\substack{\xi(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ \|\xi(\cdot)\|_\infty = 1}} \left\| \left[F_x(x_0(\cdot) + x(\cdot), u_0(\cdot)) - F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \right] \xi(\cdot) \right\|_\infty \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty
\end{aligned}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$.

q. e. d.

Lemma 2.13 (Vgl. [25], Lemma 1, S. 60.) *Für jeden Steuerprozess $(x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ ist der stetige lineare Operator $F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$,*

$$\left[F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))x(\cdot) \right](t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

aus Lemma 2.12 bijektiv.

Beweis: ([25], S. 60.) Wir haben zu zeigen, dass zu jedem $z(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ genau ein $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$z(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$. Da wir $F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ als Abbildung auf den gesamten Raum $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ betrachten, dürfen wir $x(t_0)$ auf die linke Seite bringen und diese anschließend wieder mit $z(t)$ bezeichnen.

Der durch

$$x(\cdot) \rightarrow Tx(\cdot), \quad [Tx(\cdot)](t) = z(t) + \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gegebene Operator T bildet den Raum $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ in sich ab.

Wir setzen

$$\Lambda(t) = \varphi_x(t, x_0(t), u_0(t)), \quad C(t) = \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\|_{\mathbb{R}^n \times n} d\tau.$$

Im Weiteren schreiben wir $\|\Lambda(\tau)\|$ statt $\|\Lambda(\tau)\|_{\mathbb{R}^n \times n}$.

Dann gilt bei mehrfacher Anwendung des Operators T die Beziehung

$$[T^m x(\cdot)](t) = z(t) + \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) [T^{m-1} x(\cdot)](\tau) d\tau$$

und es gelten

$$\int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| C(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C^2(t), \quad \dots, \quad \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| \frac{C^{m-1}(\tau)}{(m-1)!} d\tau = \frac{C^m(t)}{m!}, \quad \dots$$

Für $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ folgt damit:

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t_0, t]} \|[Tx_1(\cdot)](s) - [Tx_2(\cdot)](s)\|_{\mathbb{R}^n} &= \sup_{s \in [t_0, t]} \left\| \int_{t_0}^s \Lambda(\tau) (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| d\tau \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty} = C(t) \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t_0, t]} \|[T^2 x_1(\cdot)](s) - [T^2 x_2(\cdot)](s)\|_{\mathbb{R}^n} &= \sup_{s \in [t_0, t]} \left\| \int_{t_0}^s \Lambda(\tau) [Tx_1(\cdot) - Tx_2(\cdot)](\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| \cdot \sup_{s \in [t_0, \tau]} \|[Tx_1(\cdot)](s) - [Tx_2(\cdot)](s)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| C(\tau) d\tau \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty} = \frac{1}{2} C^2(t) \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t_0, t]} \|[T^m x_1(\cdot)](s) - [T^m x_2(\cdot)](s)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| \frac{C^{m-1}(\tau)}{(m-1)!} d\tau \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty} = \frac{C^m(t)}{m!} \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Die Zahlen $a_m = \frac{C^m(t_1)}{m!}$ sind für alle $t \in [t_0, t_1]$ größer oder gleich $\frac{C^m(t)}{m!}$ und liefern eine Folge, deren Reihe konvergiert. Nach dem Fixpunktsatz von Weisinger (Satz B.22) existiert daher genau ein $x(\cdot)$ mit $x(\cdot) = Tx(\cdot)$.

q. e. d.

2.4.3 Differenzierbarkeit des Zielfunktional $J(x(\cdot), u(\cdot))$

Lemma 2.14 (Vgl. [25], Beispiel 10, S. 53.) *Unter den Voraussetzungen an die Funktion f in Abschnitt 2.1 ist die Abbildung*

$$x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u_0(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u_0(t)) dt$$

für jedes $u_0(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ stetig Fréchet-differenzierbar, und es gilt

$$J_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot))x(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_0(t), u_0(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Beweis: (Vgl. [25], S. 52 f.) Für ein festes $u_0(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ setzen wir $\mathcal{J}(x(\cdot)) = J(x(\cdot), u_0(\cdot))$. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.12 erhalten wir

$$\frac{\mathcal{J}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - \mathcal{J}(x_0(\cdot))}{\lambda} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^1 \langle f_x(t, x_0(t) + \lambda s x(t), u_0(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \right] dt$$

und

$$\delta \mathcal{J}(x_0(\cdot))x(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_0(t), u_0(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Für die Gâteaux-Ableitung $\Lambda(x_0(\cdot))$ mit $\Lambda(x_0(\cdot))x(\cdot) = \delta \mathcal{J}(x_0(\cdot))x(\cdot)$ erhalten wir in der Operatornorm

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda(x_0(\cdot))\| \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f_x(t, x_0(t) + x(t), u_0(t)) - f_x(t, x_0(t), u_0(t))\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \varrho_2(t) \cdot \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty. \end{aligned}$$

Dies liefert die Fréchet-Differenzierbarkeit von $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u_0(\cdot))$.

Wiederholen wir die letzte Ungleichungskette mit der Fréchet- statt der Gâteaux-Ableitung, so erhalten wir noch die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit.

q. e. d.

2.5 Die Lagrangesche Multiplikatorenregel

2.5.1 Die Formulierung des Satzes

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Abbildungen

$$x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad \text{und} \quad x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u(\cdot))$$

für jedes $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ stetig Fréchet-differenzierbar sind und die Fréchet-Ableitung $F_x(x(\cdot), u(\cdot))$ für jedes Paar $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ bijektiv ist (vgl. Lemmata 2.12–2.14). Ferner sind die linearen Abbildungen

$$H_\iota : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H_\iota(x(\cdot)) = x(t_\iota) - x_\iota, \quad \iota = 0, 1,$$

offenbar auf $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ stetig Fréchet-differenzierbar und die stetigen linearen Operatoren

$$H'_\iota(x(\cdot)) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H'_\iota(x(\cdot))\xi(\cdot) = \xi(t_\iota), \quad \iota = 0, 1,$$

sind für jedes $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ surjektiv.

Wir definieren die zur Aufgabe (2.25)–(2.28) gehörende Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1) &= \lambda_0 J(x(\cdot), u(\cdot)) + \langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot)) \rangle \\ &\quad + \langle l_0, H_0(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle l_1, H_1(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Satz 2.15 (Lagrangesche Multiplikatorenregel) *Es sei $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (2.25)–(2.28). Dann existieren nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0$, $y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$ und $l_0, l_1 \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1) &= \lambda_0 J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + F_x^*(x_*(\cdot), u_*(\cdot))y^* \\ &\quad + H_0'^T(x_*(\cdot))l_0 + H_1'^T(x_*(\cdot))l_1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1) = \min_{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1). \quad (2.31)$$

2.5.2 Der Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel

Es sei $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (2.25)–(2.28).

Wir bezeichnen mit C die Menge der Variationen. Diese ist (vgl. [25], S. 203 bzw. Abschnitt 2.2.1) die Menge derjenigen Vektoren

$$(\mu, y(\cdot), v_0, v_1) \in \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

zu denen es ein $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und ein $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mu &> J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) + J(x_*(\cdot), u(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)), \\ y(\cdot) &= F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) + F(x_*(\cdot), u(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)), \\ v_\iota &= H'_\iota(x_*(\cdot))x(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \end{aligned}$$

O. B. d. A. dürfen wir annehmen, dass $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = 0$ ist.

► *Behauptung 1: Die Menge C besitzt ein nichtleeres Inneres.*

Begründung: (Vgl. [25], S. 88.) Es sind $J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)), H'_\nu(x_*(\cdot)), \nu = 0, 1$, stetig und linear. Daher existieren eine Nullumgebung $U_0 \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und eine Zahl $a > 0$ mit

$$a > \sup_{x(\cdot) \in U_0} \left\{ J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot), \|H'_0(x_*(\cdot))x(\cdot)\|_{\mathbb{R}^n}, \|H'_1(x_*(\cdot))x(\cdot)\|_{\mathbb{R}^n} \right\}.$$

Wir setzen

$$\mathbb{R}_a = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > a\}, \quad \mathbb{R}_a^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i > a\}.$$

Wegen der Regularität von $F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ folgt aus dem Satz über die offene Abbildung, dass $F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))U_0$ offen in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ist. Offenbar gilt

$$\mathbb{R}_a \times F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))U_0 \times \mathbb{R}_a^n \times \mathbb{R}_a^n \subseteq C.$$

Daher besitzt die Menge C ein nichtleeres Inneres. ■

► *Behauptung 2: Ist $0 \notin \text{conv } C$, dann gelten (2.30) und (2.31).*

Begründung: (Vgl. [25], S. 87.) Da die Menge $\text{conv } C$ konvex ist und C ein nichtleeres Inneres besitzt, existiert nach dem Satz von Hahn-Banach und Folgerung B.19 ein nichttriviales Funktional

$$(\lambda_0, y^*, l_0, l_1) \in \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

das die Menge $\text{conv } C$ vom Ursprung trennt.

Für die Menge $C \subseteq \text{conv } C$ bedeutet dies, dass

$$\lambda_0 \mu + \langle y^*, y(\cdot) \rangle + l_0^T \cdot v_0 + l_1^T \cdot v_1 \geq 0$$

für alle $(\mu, y(\cdot), v_0, v_1) \in C$ gilt.

Damit haben wir $\lambda_0 \geq 0$. Denn angenommen, es ist $\lambda_0 < 0$. Dann führt der Grenzwert $\mu \rightarrow +\infty$ zu einem Widerspruch in dieser Ungleichung.

Aus obiger Relation folgt, dass für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_0 [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) + J(x_*(\cdot), u(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ &\quad + \langle y^*, F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) + F(x_*(\cdot), u(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \rangle \\ &\quad + \langle l_0, H'_0(x_*(\cdot))x(\cdot) \rangle + \langle l_1, H'_1(x_*(\cdot))x(\cdot) \rangle \end{aligned}$$

erfüllt ist. Für $x(\cdot) = 0$ liefert dies (2.31); betrachten wir $u(\cdot) = u_*(\cdot)$, dann erhalten wir (2.30). ■

Zum Beweis des Satzes 2.15 haben wir zu zeigen, dass $0 \notin \text{conv } C$ gilt. Das folgt aus diesen beiden Behauptungen.

Wir nehmen an, es sei $0 \in \text{conv } C$. Dann existieren dem Begriff einer konvexen Hülle nach gewisse $\bar{x}_\kappa(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $\bar{u}_\kappa(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$, $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, und positive Zahlen $\bar{\alpha}_\kappa$, $\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa = 1$, mit

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \bar{x}_\kappa(\cdot) + J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right], \\ 0 &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \bar{x}_\kappa(\cdot) + F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right], \\ 0 &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot H'_\iota(x_*(\cdot)) \bar{x}_\kappa(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \end{aligned}$$

Das schreiben wir unter Verwendung von

$$\bar{x}(\cdot) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot \bar{x}_\kappa(\cdot)$$

in der Form

$$0 > J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \bar{x}(\cdot) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right], \quad (2.32)$$

$$0 = F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \bar{x}(\cdot) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right], \quad (2.33)$$

$$0 = H'_\iota(x_*(\cdot)) \bar{x}(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \quad (2.34)$$

Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \min\{a, 0\},$$

für jeden Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0}$

$$\alpha^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_{\kappa_0}^+), \quad \alpha^- = (\alpha_1^-, \dots, \alpha_{\kappa_0}^-),$$

und außerdem sei für $\alpha \in \mathbb{R}^{\kappa_0}$

$$|\alpha| := \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa|.$$

Ferner betrachten wir die verallgemeinerte Nadelvariation $u_\alpha(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$,

$$u_\alpha(t) = u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (\bar{u}_\kappa(t) - u_*(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

in Richtung der Steuerungen $\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_{\kappa_0}(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ (vgl. Abschnitt 2.2.3), mit denen die obige konvexe Kombination gebildet wird.

Wir untersuchen nun die Abbildungen

$$\begin{aligned}\Phi(x(\cdot), \alpha) &= F(x(\cdot), u_{\alpha^+}(\cdot)) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa^- \left(F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right), \\ \Phi_0(x(\cdot), \alpha) &= H_0(x(\cdot)), \quad \Phi_1(x(\cdot), \alpha) = H_1(x(\cdot)),\end{aligned}$$

und die stetigen linearen Operatoren

$$\begin{aligned}\Lambda(x(\cdot), \alpha) &= F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \left(F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right), \\ \Lambda_0(x(\cdot), \alpha) &= H'_0(x_*(\cdot))x(\cdot), \quad \Lambda_1(x(\cdot), \alpha) = H'_1(x_*(\cdot))x(\cdot).\end{aligned}$$

Für diese gilt :

► *Behauptung 3: Die Abbildung*

$$\tilde{\Phi} = (\Phi, \Phi_0, \Phi_1) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0} \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

und der stetige lineare Operator

$$\tilde{\Lambda} = (\Lambda, \Lambda_0, \Lambda_1) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0} \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

genügen auf einer Umgebung des Punktes $(x_*(\cdot), 0)$ den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik (Satz 2.11).

Begründung: (Vgl. [25], S. 203 f.) Es sei $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ und wir definieren die Menge $\varepsilon\tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ gemäß

$$\varepsilon\tilde{\Sigma}^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa^+ \leq \varepsilon \right\}.$$

Dann gilt für alle $(x(\cdot), \alpha)$ und $(x'(\cdot), \alpha')$ aus $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \varepsilon\tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$:

$$\begin{aligned}& \left\| \Phi(x(\cdot), \alpha) - \Phi(x'(\cdot), \alpha') - \Lambda(x(\cdot), \alpha) + \Lambda(x'(\cdot), \alpha') \right\|_\infty \\ &= \left\| F(x(\cdot), u_{\alpha^+}(\cdot)) - F(x'(\cdot), u_{\alpha'^+}(\cdot)) - F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))(x(\cdot) - x'(\cdot)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_\kappa^+ - \alpha'^+_\kappa) \left(F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right) \right\|_\infty \\ &= \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x(\tau), u_{\alpha^+}(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), u_{\alpha'^+}(\tau)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_\kappa^+ - \alpha'^+_\kappa) \cdot \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), \bar{u}_\kappa(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.5 können wir eine Umgebung V von $x_*(\cdot)$ und ein $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ derart wählen, dass dieser Ausdruck kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{3} \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa| \right)$$

für alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$ und alle $\alpha, \alpha' \in \varepsilon \tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ ist.

Ferner kann diese Umgebung V von $x_*(\cdot)$ so gewählt werden, dass ebenfalls

$$\|H_\iota(x(\cdot)) - H_\iota(x'(\cdot)) - H'_\iota(x_*(\cdot))(x(\cdot) - x'(\cdot))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{3} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty, \quad \iota = 0, 1,$$

für alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$ gilt.

Daraus folgt, dass eine Umgebung $V \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ von $x_*(\cdot)$ und eine Nullumgebung $\varepsilon \tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ des Raumes \mathbb{R}^{κ_0} existieren mit

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\Phi}(x(\cdot), \alpha) - \tilde{\Phi}(x'(\cdot), \alpha') - \tilde{\Lambda}(x(\cdot), \alpha) + \tilde{\Lambda}(x'(\cdot), \alpha')\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \\ & \leq \delta \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa| \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Wir setzen für $(x(\cdot), \alpha) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$, $(y(\cdot), l_0, l_1) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$C(\tilde{\Lambda}) = \sup_{(y(\cdot), l_0, l_1) \neq 0} \left(\frac{\inf \{ \|x(\cdot)\|_\infty + |\alpha| \mid \tilde{\Lambda}(x(\cdot), \alpha) = (y(\cdot), l_0, l_1) \}}{\|(y(\cdot), l_0, l_1)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}} \right).$$

Aus der Definition des Operators $\tilde{\Lambda}$ folgt $\text{Im } \tilde{\Lambda} = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Außerdem ist der Operator $\tilde{\Lambda}$ offenbar linear und stetig. Gemäß Lemma 2.10 gilt deshalb $C(\tilde{\Lambda}) < \infty$. Wir wählen $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $\delta \cdot C(\tilde{\Lambda}) < 1/2$, dann genügen die Abbildung $\tilde{\Phi}$ und der Operator $\tilde{\Lambda}$ den Bedingungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik. ■

► *Behauptung 4:* Es existieren zu $(\bar{x}(\cdot), \bar{\alpha})$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0})$, aus (2.32)–(2.34), Zahlen $\vartheta_0 > 0$, $\delta > 0$ und eine Abbildung

$$\vartheta \rightarrow (\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta)$$

des Intervalls $[0, \vartheta_0]$ in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ mit

$$(\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta) \rightarrow 0 \text{ für } \vartheta \rightarrow 0, \quad \vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta \geq 0 \text{ für alle } \vartheta \in [0, \vartheta_0]$$

und

$$\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta) = 0. \quad (2.36)$$

In dieser Behauptung findet ein Satz über implizite Funktionen, nämlich der verallgemeinerte Satz von Ljusternik (Satz 2.11), Anwendung. Der spezielle Charakter dieses

Satzes ist notwendig, da der lineare Operator $\tilde{\Lambda}$ zwar regulär, aber i. a. nicht bijektiv ist, also eine mengenwertige Inverse besitzt. Ferner gilt es die Abbildung

$$\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta \rightarrow u_{\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot)$$

und die Setzung von $\tilde{\Phi}$ zu beachten. Denn dies bedeutet, dass wir zulässige Prozesse

$$(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) = (x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot)), \quad \vartheta \in [0, \vartheta_0], \quad (2.37)$$

für die Aufgabe (2.25)–(2.28) konstruieren.

Begründung: (Vgl. [25], S. 204 f.) Nach Behauptung 3 darf Satz 2.11 auf den Punkt $(x_*(\cdot), 0)$ des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ angewendet werden. Daher existieren für $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ Zahlen $\vartheta_0 > 0$, $K > 0$ und eine Abbildung

$$\vartheta \rightarrow (\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta)$$

des Intervalls $[0, \vartheta_0]$ in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ derart, dass

$$\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta) = \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0) = 0$$

für alle $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$ und

$$\|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \leq K \|\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot), \vartheta\bar{\alpha}) - \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$$

gilt. Da $\vartheta\tilde{\Lambda}(\bar{x}(\cdot), \bar{\alpha}) = 0$, vgl. (2.33) und (2.34), und $\tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0) = 0$ sind, folgt mit (2.35) aus dieser Ungleichung die Beziehung

$$\begin{aligned} \|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| &\leq K \|\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot), \vartheta\bar{\alpha}) - \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0) \\ &\quad - \tilde{\Lambda}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot), \vartheta\bar{\alpha}) + \tilde{\Lambda}(x_*(\cdot), 0)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \\ &\leq \vartheta K \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \right) = \vartheta K \delta (\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Hieraus ergibt sich $\xi^\vartheta(\cdot) \rightarrow 0$ und $\alpha^\vartheta \rightarrow 0$ für $\vartheta \rightarrow 0$.

Die Zahl $\delta > 0$ sei so gewählt, dass neben $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ noch

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq \min\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0}\} \quad (2.39)$$

erfüllt ist. Dann erhalten wir $\vartheta\bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta \geq 0$ aus (2.38) und (2.39), und es gilt für ein hinreichend kleines $\delta > 0$

$$0 = \tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta)$$

für alle $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$. ■

Wegen (2.32) existiert eine Zahl $c > 0$ mit

$$-4c \geq J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))\bar{x}(\cdot) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right]. \quad (2.40)$$

Da im Punkt $x_*(\cdot)$ die Funktion $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u_*(\cdot))$ stetig differenzierbar ist, lässt sich eine Zahl $\sigma > 0$ derart angeben, dass für $0 \leq \vartheta \leq \sigma$ und $\|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_\infty \leq \sigma$ die Ungleichung

$$J(x_*(\cdot) + \vartheta x(\cdot), u_*(\cdot)) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \vartheta [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))\bar{x}(\cdot) + c] \quad (2.41)$$

gilt.

► *Behauptung 5:* Für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$, ϑ_0 aus letzter Behauptung, gilt

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) - \vartheta c + o(\vartheta), \quad (2.42)$$

mit $(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) = (x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot))$ aus (2.37).

Begründung: (Vgl. [25], S. 205 f.) Wir nehmen an, $\delta > 0$ sei so gewählt, dass neben $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq \min\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0}, \sigma\} \quad (2.43)$$

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \cdot \max_{1 \leq \kappa \leq \kappa_0} |J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))| \leq c, \quad (2.44)$$

$$(\delta + K\delta^2)(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq c. \quad (2.45)$$

Aus (2.17) ergibt sich für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$

$$\begin{aligned} J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) &= J(x^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot)) \\ &\leq J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot)) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) [J(x^\vartheta(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot))] \\ &\quad + \delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Wir schätzen die einzelnen Summanden der rechten Seite ab:

Wegen (2.38) und (2.43) hat man

$$\frac{\|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty}{\vartheta} \leq \sigma, \quad \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \leq \sigma.$$

Daher ist nach (2.41) für den ersten Summanden für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$ die Ungleichung

$$J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot)) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \vartheta [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))\bar{x}(\cdot) + c] \quad (2.47)$$

erfüllt.

Wir betrachten den zweiten Summanden. Wegen (2.38) und (2.44) gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}^{\vartheta} [J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & \leq \vartheta K \delta (\|\bar{x}(\cdot)\|_{\infty} + |\bar{\alpha}|) \cdot \max_{1 \leq \kappa \leq \kappa_0} |J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))| \leq \vartheta c. \end{aligned}$$

Beachten wir $x^{\vartheta}(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot)$ für $\vartheta \rightarrow 0$ und berücksichtigen ferner, dass die Abbildung $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u(\cdot))$ für jedes $u(\cdot) \in L^{\infty}([t_0, t_1], U)$ stetig differenzierbar ist, d. h.

$$J(x^{\vartheta}(\cdot), u(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u(\cdot)) = \vartheta J_x(x_*(\cdot), u(\cdot)) \bar{x}(\cdot) + o(\vartheta),$$

so erhalten wir für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_{\kappa} + \alpha_{\kappa}^{\vartheta}) [J(x^{\vartheta}(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x^{\vartheta}(\cdot), u_*(\cdot)) + J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & \leq \vartheta (|\bar{\alpha}| + \sigma) \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[\vartheta \left(|J_x(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) \bar{x}(\cdot)| + |J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \bar{x}(\cdot)| \right) + o(\vartheta) \right] = o(\vartheta). \end{aligned}$$

Daher gilt für den zweiten Summanden die Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_{\kappa} + \alpha_{\kappa}^{\vartheta}) [J(x^{\vartheta}(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x^{\vartheta}(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & = \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_{\kappa} [J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & \quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}^{\vartheta} [J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & \quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_{\kappa} + \alpha_{\kappa}^{\vartheta}) [J(x^{\vartheta}(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) \\ & \quad \quad - J(x^{\vartheta}(\cdot), u_*(\cdot)) + J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] \\ & \leq \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_{\kappa} [J(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] + \vartheta c + o(\vartheta). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Schließlich gilt gemäß (2.38) und (2.45)

$$\begin{aligned} \delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_{\kappa} + \alpha_{\kappa}^{\vartheta}) & \leq \vartheta \delta \left(|\bar{\alpha}| + \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa}^{\vartheta}| \right) \leq \vartheta \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_{\infty} + |\bar{\alpha}| + \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa}^{\vartheta}| \right) \\ & \leq \vartheta \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_{\infty} + |\bar{\alpha}| + K \delta (\|\bar{x}(\cdot)\|_{\infty} + |\bar{\alpha}|) \right) \\ & \leq \vartheta (\delta + K \delta^2) (\|\bar{x}(\cdot)\|_{\infty} + |\bar{\alpha}|) \leq \vartheta c. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Aus (2.47)–(2.49) folgt für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) &\leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \vartheta J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot))\bar{x}(\cdot) \\ &\quad + \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] + 3\vartheta c + o(\vartheta). \end{aligned}$$

Mit (2.40) erhalten wir

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) - \vartheta c + o(\vartheta)$$

für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$. ■

In Behauptung 4 haben wir gezeigt, dass für hinreichend kleine $\vartheta > 0$ die Punkte

$$(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) = (x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot))$$

zulässig in der Aufgabe (2.25)–(2.28) sind. Ferner folgt aus Behauptung 5 für hinreichend kleine $\vartheta > 0$, dass die Relation

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot)) < J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$$

gilt. Wegen $x^\vartheta(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot)$ für $\vartheta \rightarrow 0$ bedeutet dies, dass der Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes kein starkes lokales Minimum sein kann. Damit ist die Langrangesche Multiplikatorenregel (Satz 2.15) bewiesen.

2.6 Beweisschluss

(Vgl. [25], S. 222 f.) Die Lagrange-Funktion (2.29) der Aufgabe (2.25)–(2.28) lautet

$$\mathcal{L} = \lambda_0 J(x(\cdot), u(\cdot)) + \langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot)) \rangle + \langle l_0, H_0(x(t_0)) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle l_1, H_1(x(t_1)) \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

mit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$, $l_0, l_1 \in \mathbb{R}^n$.

Da $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U)$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (2.25)–(2.28) ist, existieren nach Satz 2.15 nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0$, $y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$ und $l_0, l_1 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$0 = \lambda_0 J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + F_x^*(x_*(\cdot), u_*(\cdot))y^* + H_0'^T(x_*(\cdot))l_0 + H_1'^T(x_*(\cdot))l_1, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1) = \min_{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u(\cdot), \lambda_0, y^*, l_0, l_1). \quad (2.51)$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz B.10) existiert ein signiertes reguläres Vektormaß ν mit

$$\langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot)) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t).$$

Ferner verwenden wir die Fréchet-Ableitungen der Abbildungen J und F im Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ (vgl. Lemma 2.12, Lemma 2.14) und

$$H'_0(x_*(\cdot))x(\cdot) = x(t_0), \quad H'_1(x_*(\cdot))x(\cdot) = x(t_1).$$

Dann lautet die Beziehung (2.50):

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \langle f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) x(\tau) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\ &\quad + \langle l_0, x(t_0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle l_1, x(t_1) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Nach partieller Integration bzgl. dem signierten Borelschen Vektormaß im zweiten Summanden (vgl. Satz B.13), d. h.

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) x(\tau) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\ &= \left[\int_{t_0}^{t_1} \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) x(t) dt \right]^T \cdot \int_{t_0}^{t_1} d\nu(t) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\left[\int_{t_0}^t d\nu(\tau) \right]^T \cdot \left(\varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) x(t) \right) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left[\varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) x(t) \right]^T \cdot \int_{t_0}^{t_1} d\nu(\tau) \right) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\left[\varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) x(t) \right]^T \cdot \int_{t_0}^t d\nu(\tau) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) \int_t^{t_1} d\nu(\tau), x(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt, \end{aligned}$$

bringen wir (2.52) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \lambda_0 f_x(t, x_*(t), u_*(t)) - \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) \int_t^{t_1} d\nu(\tau), x(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), d\nu(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle l_0 - \int_{t_0}^{t_1} d\nu(t), x(t_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle l_1, x(t_1) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die Anwendung eines linearen Funktionals

$$T : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

dar. Da alle vorkommenden Ableitungen in allen Variablen als stetig vorausgesetzt wurden und ν ein signiertes reguläres Borelsches Vektormaß ist, ist dieser Operator beschränkt, also auch stetig.

Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert genau ein reguläres Borelsches Vektormaß μ mit

$$T(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x(t) d\mu(t) \quad \text{für alle } x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n).$$

Aus der Eigenschaft $T(x(\cdot)) = 0$ für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ folgt daher, dass μ das Nullmaß ist. Insbesondere gilt damit für die Einschränkung von $T \in C^*([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ auf Teilabschnitte:

$$\int_a^b x(t) d\mu(t) \quad \text{für alle } x(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{R}^n), \quad t_0 \leq a \leq b \leq t_1.$$

Es sei $s \in (t_0, t_1]$ beliebig und wir definieren

$$x_s(t) = \begin{cases} 1_{\mathbb{R}^n}, & s \leq t \leq t_1, \\ \frac{t - t_0}{s - t_0} \cdot 1_{\mathbb{R}^n}, & t_0 \leq t < s. \end{cases}$$

Setzen wir $p(t) = \int_t^{t_1} d\nu(\tau)$, so erhalten wir aus der Einschränkung von T auf das Intervall $[t, t_1]$, $s \leq t \leq t_1$, und aus $T(x_s(\cdot)) = 0$ in Vektorform die Beziehung

$$p(t) = \int_t^{t_1} \left(\varphi_x^T(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) p(\tau) - \lambda_0 f_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) d\tau - l_1$$

für alle $t \in (t_0, t_1]$, und damit ferner $p(t_0) = l_0$. Damit sind (2.5) und (2.6) gezeigt. Die Beziehung (2.51) ist mit der folgenden äquivalent:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x_*(t), u_*(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\ &= \min_{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x_*(t), u(t)) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\varphi^T(t, x_*(t), u(t)) \cdot \int_t^{t_1} d\nu(\tau) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle p(t), \varphi(t, x_*(t), u(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_0 f(t, x_*(t), u_*(t)) - \langle p(t), \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] dt \\ &= \min_{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)} \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_0 f(t, x_*(t), u(t)) - \langle p(t), \varphi(t, x_*(t), u(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] dt. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass diese Gleichung zur Maximumsbedingung (2.7) führt. Die folgende Argumentation mit Hilfe Lebesguescher Punkte (Natanson [26], S. 283) orientiert sich an dem Beweis in Wagner [34], S. 553f.

Es bezeichnen T_f, T_φ bzw. T_p die Menge aller Punkte $t \in (t_0, t_1)$, in denen die Funktion $t \rightarrow f(t, x_*(t), u_*(t))$ und die Vektorfunktionen $t \rightarrow \varphi(t, x_*(t), u_*(t))$ bzw. $t \rightarrow p(t)$ keine Lebesgueschen Punkte besitzen. Da die Funktion $t \rightarrow f(t, x_*(t), u_*(t))$ integrierbar und die Vektorfunktionen $t \rightarrow \varphi(t, x_*(t), u_*(t))$ und $t \rightarrow p(t)$ komponentenweise integrierbar auf $[t_0, t_1]$ sind, sind die Mengen T_f, T_φ und T_p abzählbar ([26], Satz 5, S. 284). Ferner, da f und φ stetige Abbildungen sind und $x_*(\cdot)$ eine stetige Funktion auf $[t_0, t_1]$ ist, sind für jedes $v \in U$ alle $t \in (t_0, t_1)$ Lebesguesche Punkte der Abbildungen $t \rightarrow f(t, x_*(t), v)$, $t \rightarrow \varphi(t, x_*(t), v)$ ([26], Satz 6, S. 285).

Es sei $\tau \in T = (t_0, t_1) \setminus (T_f \cup T_\varphi \cup T_p)$ und $v \in U$. Dann gehört für jedes $0 < \lambda < t_1 - \tau$ die Abbildung

$$u_\lambda(t) = u_*(t) + \chi_{[\tau, \tau+\lambda)}(t)(v - u_*(t))$$

dem Raum $L^\infty([t_0, t_1], U)$ an und τ ist Lebesguescher Punkt von $t \rightarrow f(t, x_*(t), u_\lambda(t))$ und $t \rightarrow \varphi(t, x_*(t), u_\lambda(t))$. Letzteres folgt aus der Definition eines Lebesgueschen Punktes, denn es gilt für alle $n \geq n_0$, $0 < \frac{1}{n_0} < \lambda$,

$$\frac{1}{n} \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} f(t, x_*(t), u_\lambda(t)) dt = \frac{1}{n} \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} f(t, x_*(t), v) dt \rightarrow f(\tau, x_*(\tau), v) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

da τ Lebesguescher Punkt von $t \rightarrow f(t, x_*(t), v)$ ist. Ebenso folgt dies für φ .

Wegen (2.53), diese Bedingung verwenden wir nun mit der Pontrjagin-Funktion H , gilt für

$$u_n(t) = u_*(t) + \chi_{[\tau, \tau+\frac{1}{n})}(t)(v - u_*(t)), \quad 0 < \frac{1}{n} < t_1 - \tau,$$

die Relation

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - H(t, x_*(t), u_n(t), p(t), \lambda_0)] dt \\ &= \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} [H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0)] dt \geq 0 \end{aligned}$$

für alle n mit $\frac{1}{n} < t_1 - \tau$. Daraus folgt, da τ auch Lebesguescher Punkt der Funktionen $t \rightarrow H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0)$ und $t \rightarrow H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0)$ ist, die Beziehung

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} [H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0)] dt \\ &= H(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) - H(\tau, x_*(\tau), v, p(\tau), \lambda_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Für jedes $\tau \in T$ ist diese Ungleichung für alle $v \in U$ erfüllt und daher die Maximumsbedingung (2.7) gezeigt.

Damit ist das Maximumprinzip bewiesen.

Kapitel 3

Zum Subdifferential der Zustandsbeschränkungen

Aufgaben der Optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen beinhalten Nebenbedingungen der Form

$$\varphi(t, x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Um die Aufgabe mit Zustandsbeschränkungen als abstrakte Optimierungsaufgabe zu formulieren, verknüpfen wir die Nebenbedingung mit der Maximumfunktion

$$g : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y(\cdot)) = \max_{t \in [a, b]} y(t)$$

und betrachten die Abbildung

$$f : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x(\cdot)) = \max_{t \in [a, b]} \varphi(t, x(t)).$$

Diese Abbildung ist i. a. nicht differenzierbar.

Aus diesem Grund stellen wir nun ein allgemeineres Kalkül, nämlich die Subdifferentialrechnung, vor. Bei der Untersuchung konvexer Funktionen und der klassischen Richtungsableitung folgen wir Ioffe & Tichomirov [25]. Den Zusammenhang zwischen der klassischen und der Clarke'schen Richtungsableitung konvexer Funktionen haben wir Clarke [11] entnommen.

Die in diesem Kapitel abschließende Berechnung des Subdifferentials der Abbildung

$$f(x(\cdot)) = \max_{t \in [a, b]} \varphi(t, x(t))$$

erfolgt nach [25].

Es seien X, Y Banachräume. Eine *Funktion* f auf X ist eine Abbildung in die erweiterte reelle Zahlengerade, d. h.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty].$$

Die Menge

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$$

heißt *effektiver Definitionsbereich* der Abbildung f .

Unter dem *Epigraphen* von f verstehen wir die Menge

$$\text{epi } f = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mid \alpha \geq f(x)\}.$$

Die Funktion f heißt *eigentlich*, falls $\text{dom } f \neq \emptyset$ und $f(x) > -\infty$ für alle $x \in X$ ([25], S. 55).

Definition 3.1 (klassische Richtungsableitung) ([25], S. 176.) *Es sei f eine Funktion auf X . Existiert für alle $z \in X$ der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert*

$$f'(x; z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda},$$

dann heißt $f'(x; \cdot)$, d. h. die Funktion $z \rightarrow f'(x; z)$, die (klassische) Richtungsableitung der Funktion f im Punkt x .

Ist $|f'(x)| = \infty$, dann existiert die Richtungsableitung nicht.

Definition 3.2 (Clarke'sche Richtungsableitung) ([11], S. 25.) *Es sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $x \in X$ mit $|f(x)| < \infty$. Der Grenzwert*

$$f^\circ(x; z) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0+0}} \frac{f(y + \lambda z) - f(y)}{\lambda}$$

heißt Clarke'scher Gradient in x und die Funktion $z \rightarrow f^\circ(x; z)$ die Clarke'sche Richtungsableitung.

In dieser Definition wird die Existenz des Clarke'schen Gradienten nicht explizit gefordert, da lediglich der Limes superior (vgl. Abschnitt B.4) betrachtet wird ([11], S. 25).

Definition 3.3 (reguläre Funktion) ([11], Definition 2.3.4, S. 39.) *Es existiere für die Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ im Punkt x die klassische Richtungsableitung $f'(x; \cdot)$ und es sei $f'(x; \cdot) = f^\circ(x; \cdot)$. Dann heißt die Funktion f im Punkt x regulär.*

3.1 Subdifferential konvexer Funktionen

3.1.1 Konvexe, homogene und konjugierte Funktionen

Es sei f eine eigentliche Funktion auf X . f heißt *konvex*, wenn die Menge $\text{epi } f$ konvex im Raum $\mathbb{R} \times X$ ist ([25], S. 55). Eine eigentliche Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$, $0 \leq \alpha \leq 1$ die *Jensensche Ungleichung*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

gilt ([25], S. 155).

Die Funktion f heißt *homogen*, falls $f(0) = 0$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in X$, $\lambda > 0$ ist. Aufgrund der Bedingung für die Konvexität eines Kegels ergibt sich sofort, dass eine homogene Funktion f genau dann konvex ist, wenn

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt ([25], S. 175).

Als die *Young-Fenchel-Transformierte* oder auch als die zu f *konjugierte Funktion* bezeichnet man die durch

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x))$$

auf X^* definierte Funktion. Für eigentliche Funktionen haben wir dabei das Supremum lediglich über $\text{dom } f$ zu bilden.

Aus der Definition der konjugierten Funktion folgt die *Young-Fenchel-Ungleichung*

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle,$$

die für alle $x \in X$, $x^* \in X^*$ gilt, falls der Ausdruck auf der linken Seite definiert ist. Ist f eine eigentliche Funktion und $x_0 \in \text{dom } f$, dann folgt $f^*(x^*) \geq \langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) > -\infty$. D. h., dass für eigentliche Funktionen die linke Seite der Young-Fenchel-Ungleichung stets – gegebenenfalls mit $+\infty$ – definiert ist ([25], S. 159).

Satz 3.4 (Stetigkeit konvexer Funktionen) (Vgl. [25], Satz 1, S. 159.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion auf X .*

a) *Die Funktion f ist genau dann in dem Punkt x_0 stetig, wenn sie auf einer Umgebung dieses Punktes nach oben beschränkt ist.*

b) *Ist f in einem Punkt stetig, dann gilt $\text{int}(\text{dom } f) \neq \emptyset$. Ist umgekehrt $\text{int}(\text{dom } f) \neq \emptyset$, dann ist f auf $\text{int}(\text{dom } f)$ stetig.*

Lemma 3.5 (Stetigkeit homogener Funktionen) ([25], Hilfssatz 2, S. 176.) *Es sei f eine homogene Funktion auf X . Ist f auf einer Umgebung des Nullpunktes stetig, so ist f auch auf X stetig.*

3.1.2 Das Subdifferential der konvexen Analysis

Definition 3.6 (Subdifferential der konvexen Analysis) ([25], S. 56.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion. Ein Funktional $x^* \in X^*$ heißt Subgradient der Funktion f im Punkt x , wenn für alle $z \in X$ die Ungleichung*

$$f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle$$

erfüllt ist. Die Menge aller Subgradienten der Funktion f im Punkt x wird Subdifferential der Funktion f im Punkt x genannt und mit ∂f bezeichnet, d. h.

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle \text{ für alle } z \in X\}.$$

Lemma 3.7 ([25], Hilfssatz 1, S. 179.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion auf X . Dann gilt*

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$$

für alle $x \in \text{dom } f$.

Beweis: (Vgl. [25], S. 180.) "⇒": Ist x^* Subgradient von f in x , dann gilt nach Definition $f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle$ für alle $z \in X$. Aus dieser Beziehung folgt die Relation $\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, z \rangle - f(z)$ für alle $z \in X$ und zusammen mit der Young-Fenchel-Ungleichung die Behauptung.

"⇐": Es sei $z \in X$ beliebig. Wir subtrahieren auf beiden Seiten $\langle x^*, z \rangle$ und erhalten

$$f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, z \rangle = \langle x^*, x - z \rangle.$$

Nach Definition gilt $f^*(x^*) - \langle x^*, z \rangle \geq -f(z)$, d. h.

$$f(x) - f(z) \leq \langle x^*, x - z \rangle \implies f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle$$

für alle $z \in X$. Also ist x^* Subgradient von f

q. e. d.

Lemma 3.8 ([25], Beispiel 3, S. 180.) *Es sei f eine eigentliche homogene konvexe Funktion und $x \neq 0$. Dann ist*

$$\partial f(x) = \{x^* \in \partial f(0) \mid f(x) = \langle x^*, x \rangle\}.$$

Beweis: Es sei x^* Subgradient von f in $x \neq 0$. Dann gilt $f(0) = 0$, da f homogen, und

$$f(x) = f(x) - f(0) \geq \langle x^*, x - 0 \rangle = \langle x^*, x \rangle \implies 0 \geq \langle x^*, x \rangle - f(x).$$

Weiterhin gilt nach letztem Lemma, da f konvex ist:

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - f(x).$$

Aus beiden Beziehungen ergibt sich $f^*(x^*) = 0$, denn

$$0 \geq \langle x^*, x \rangle - f(x) = f^*(x^*) = \sup_{z \in X} (\langle x^*, z \rangle - f(z)) \geq \langle x^*, 0 \rangle - f(0) = 0.$$

Außerdem folgt aus $f^*(x^*) = 0$, dass $\langle x^*, z \rangle - f(z) \leq 0 = \langle x^*, 0 \rangle - f(0)$ für alle $z \in X$ gilt und daher $x^* \in \partial f(0)$ ist. Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{x^* \in X^* \mid f(x) = \langle x^*, x \rangle \text{ und } f(z) \geq \langle x^*, z \rangle \text{ für alle } z \in X\} \\ &= \{x^* \in \partial f(0) \mid f(x) = \langle x^*, x \rangle\}. \end{aligned}$$

q. e. d.

Satz 3.9 (Satz von Moreau-Rockafellar) ([25], S. 57.) *Es seien f_1, f_2 eigentliche konvexe Funktionen auf X . Ist eine der Funktionen stetig in einem Punkt, der dem effektiven Definitionsbereich der anderen Funktion angehört, so gilt für alle $x \in X$*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

im Sinne einer Minkowski-Addition.

3.1.3 Die klassische Richtungsableitung konvexer Funktionen

Satz 3.10 (Existenz der Richtungsableitung) ([25], Hilfssatz 3, S. 177.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion auf X . Dann existiert in jedem Punkt der Menge $\text{dom } f$ die Richtungsableitung von f . Dabei gilt*

$$f'(x; z) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda}.$$

Außerdem nimmt der Quotient bzgl. λ nicht ab, d. h. (vgl. [25], S. 177)

$$\frac{f(x + \lambda_1 z) - f(x)}{\lambda_1} \leq \frac{f(x + \lambda_2 z) - f(x)}{\lambda_2} \quad \text{für } 0 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Folgerung 3.11 ([25], S. 176, S. 178.) *$f'(x; \cdot)$ ist eine homogene Funktion, denn es ist $f'(x; 0) = 0$ und für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$f'(x; \alpha z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \lambda \alpha z) - f(x)}{\lambda} = \alpha \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \alpha \lambda z) - f(x)}{\alpha \lambda} = \alpha f'(x; z).$$

Ist f eine konvexe Funktion, so folgt aus

$$\begin{aligned} f'(x; y + z) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f\left(x + \frac{\lambda}{2}(y + z)\right) - f(x)}{\frac{\lambda}{2}} \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x) + f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda} = f'(x; y) + f'(x; z), \end{aligned}$$

dass die Richtungsableitung von f ebenfalls konvex ist.

Satz 3.12 (Stetigkeit der Richtungsableitung) (Vgl. [25], Hilfssatz 4, S. 178.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion auf X , die im Punkt x stetig ist. Dann ist die Richtungsableitung $f'(x; \cdot)$ eine eigentliche stetige Funktion, d. h. $f'(x; z) > -\infty$ für alle $z \in X$ und die Funktion $z \rightarrow f'(x; z)$ ist auf X stetig.*

Satz 3.13 (Gleichmäßige Konvergenz bzgl. einer Richtung) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion, die im Punkt x_0 stetig ist. Dann existiert zu jedem festen $x \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U \subseteq X$ des Punktes x und eine Zahl $\lambda_0 > 0$ mit*

$$\left| \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; x) \right| < \varepsilon$$

für alle $z \in U$ und alle $0 < \lambda < \lambda_0$.

Beweis: (Vgl. [25], S. 189 f.) Da die Funktion f im Punkt x_0 stetig ist, ist sie nach dem Satz über die Stetigkeit konvexer Funktionen auch auf einer gewissen Umgebung U_0 stetig. Wir wählen die Zahl λ_0 in der Weise, dass erstens $x_0 + \lambda_0 x \in U_0$ erfüllt ist und zweitens

$$\frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $0 < \lambda < \lambda_0$ gilt. Das ist nach Satz 3.10 möglich.

Wegen $x_0 + \lambda_0 x \in U_0$ ist die Funktion f im Punkt $x_0 + \lambda_0 x$ stetig. Daher kann man eine Umgebung U des Punktes x angeben mit

$$\frac{f(x_0 + \lambda_0 z) - f(x_0 + \lambda_0 x)}{\lambda_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $z \in U$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass die Menge U symmetrisch bzgl. des Punktes x ist. Andernfalls betrachten wir statt U die Menge $(U - \{x\}) \cap (-U + \{x\}) + \{x\}$. Für $z \in U, 0 < \lambda < \lambda_0$, gilt (Satz 3.10)

$$\frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} \leq \frac{f(x_0 + \lambda_0 z) - f(x_0)}{\lambda_0}.$$

Daher ist für $z \in U, 0 < \lambda < \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; x) &\leq \frac{f(x_0 + \lambda_0 z) - f(x_0)}{\lambda_0} - f'(x_0; x) \\ &< \frac{f(x_0 + \lambda_0 x) - f(x_0)}{\lambda_0} - f'(x_0; x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Andererseits enthält die symmetrische Menge U mit jedem Punkt z auch einen Punkt y mit $x = \frac{1}{2}(y + z)$. Dann gilt für diese Punkte x, y und z :

$$x_0 + \lambda x = \frac{1}{2}(x_0 + \lambda y) + \frac{1}{2}(x_0 + \lambda z).$$

Aus der Konvexität von f folgt daraus

$$f(x_0 + \lambda x) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + \lambda y) + \frac{1}{2}f(x_0 + \lambda z).$$

Da der Quotient bzgl. λ nicht abnimmt gilt

$$f'(x_0; x) = \inf_{\tilde{\lambda} > 0} \frac{f(x_0 + \tilde{\lambda} x) - f(x_0)}{\tilde{\lambda}} \leq \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda}, \quad 0 < \lambda < \lambda_0,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(x_0; x) - \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} &\leq \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} - \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} \\ &\leq \frac{f(x_0 + \lambda x)}{\lambda} - \frac{2f(x_0 + \lambda x) - f(x_0 + \lambda y)}{\lambda} = \frac{f(x_0 + \lambda y)}{\lambda} - \frac{f(x_0 + \lambda x)}{\lambda} \\ &\leq \frac{f(x_0 + \lambda y)}{\lambda} - \left(f'(x_0; x) + \frac{f(x_0)}{\lambda} \right) \leq \frac{f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für alle $z \in U$ und $0 < \lambda < \lambda_0$ und die Beziehung

$$\left| \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; x) \right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

q. e. d.

Lemma 3.14 (Vgl. [25], S. 179f.) *Es sei f eine eigentliche konvexe Funktion auf X . Dann gilt*

$$\partial f(x) = \partial f'(x; 0)$$

für alle $x \in \text{dom } f$.

3.1.4 Clarke'sches Subdifferential konvexer Funktionen

Es sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und M eine Teilmenge des Banachraumes X . Die Funktion f genügt auf M einer *Lipschitz-Bedingung*, falls es eine positive Konstante K gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|_X.$$

Wir nennen f im Punkt x *lokal Lipschitz-stetig*, falls es eine Umgebung des Punktes x gibt, auf der f einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 3.15 (Clarke'sches Subdifferential) ([11], S. 27.) *Es sei die Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ im Punkt x lokal Lipschitz-stetig. Dann heißt die Menge*

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* \mid f^\circ(x; z) \geq \langle x^*, z \rangle \text{ für alle } z \in X\}$$

das Clarke'sche Subdifferential von f im Punkt x .

Satz 3.16 a) ([11], Proposition 2.2.6, S. 34.) *Es sei f eine konvexe Funktion, die auf einer offenen konvexen Teilmenge $U \subseteq X$ nach oben beschränkt ist. Dann ist f in jedem Punkt $x \in U$ lokal Lipschitz-stetig.*

b) ([11], Proposition 2.2.7, S. 36.) *Es sei f eine konvexe Funktion und im Punkt x lokal Lipschitz-stetig. Dann ist f regulär und es stimmen das Subdifferential der konvexen Analysis und das Clarke'sche Subdifferential überein.*

Mit dem Satz über die Stetigkeit konvexer Funktionen folgt aus dem letzten Satz und den Ergebnissen des letzten Abschnitts:

Folgerung 3.17 *Es sei f eine konvexe Funktion auf dem Banachraum X , die im Punkt x stetig ist. Dann ist f im Punkt x regulär, die klassische und die Clarke'sche Richtungsableitung sind im Punkt x homogen, konvex und auf X stetig, und konvergieren in diesem Punkt nach Satz 3.13 gleichmäßig bzgl. einer Richtung. Ferner stimmen das Subdifferential der konvexen Analysis und das Clarke'sche Subdifferential überein. Aus diesem Grund haben wir bisher für die konvexen Funktionen zwischen beiden Subdifferentialbegriffen in der Symbolik nicht streng unterschieden.*

Die Clarke'schen Richtungsableitungen $f_1^\circ(x; \cdot), f_2^\circ(x; \cdot)$ von konvexen und im Punkt x stetiger Funktionen f_1, f_2 sind stetige konvexe Funktionen. Auf diese Funktionen $z \rightarrow f_1^\circ(x; z)$ bzw. $z \rightarrow f_2^\circ(x; z)$ läßt sich der Satz von Moreau-Rockafellar der konvexen

Analysis auf den Punkt $z = 0$ anwenden. Daher gilt für das Subdifferential der konvexen Analysis

$$\partial f_1^\circ(x; 0) + \partial f_2^\circ(x; 0) = \partial(f_1 + f_2)^\circ(x; 0).$$

Nach obiger Definition des Clarke'schen Subdifferentials konvexer Funktionen folgt damit unmittelbar für die Funktionen f_1 und f_2 :

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial(f_1 + f_2)(x).$$

Diese Beziehung bleibt richtig, wenn wir lediglich fordern, dass die Clarke'schen Richtungsableitungen der lokal Lipschitz-stetigen Funktionen f_1, f_2 stetige konvexe Funktionen sind.

Satz 3.18 *Es seien im Punkt x die Clarke'schen Richtungsableitungen $f_1^\circ(x; \cdot), f_2^\circ(x; \cdot)$ der in x lokal Lipschitz-stetigen Funktionen f_1 und f_2 konvexe und stetige Funktionen. Dann gilt für das Clarke'sche Subdifferential in diesem Punkt*

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial(f_1 + f_2)(x).$$

3.1.5 Das Subdifferential der Funktion $g(x(\cdot)) = \max_{t \in [a, b]} x(t)$

Bei der Berechnung dieses Subdifferentials halten wir uns an [25], S. 197 f.

Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Im Raum $C(I, \mathbb{R})$ betrachten wir die Funktion

$$g(x(\cdot)) = \max_{t \in I} x(t).$$

Diese Funktion ist offenbar eigentlich, konvex, homogen und wegen $|g(x(\cdot))| = \|x(\cdot)\|_\infty$ stetig. Das Subdifferential $\partial g(0)$ besteht nach Definition aus denjenigen signierten regulären Borelschen Maßen μ auf der Borelschen σ -Algebra über I , die der Bedingung

$$\max_{t \in I} x(t) \geq \int_I x(t) d\mu(t)$$

für alle $x(\cdot) \in C(I, \mathbb{R})$ genügen.

Hieraus folgt, dass das Maß μ nichtnegativ ist und $\int_I d\mu(t) = 1$ gilt.

Denn es gilt für $-x(t)$ nach obiger Ungleichung

$$\int_I x(t) d\mu(t) \geq -\max_{t \in I} (-x(t)) = \min_{t \in I} x(t).$$

Ist daher $x(t) \geq 0$ für alle $t \in I$, so ist auch $\int_I x(t) d\mu(t) \geq 0$. Aus der Folgerung B.11 des Darstellungssatzes von Riesz erhalten wir daraus, dass das Maß nichtnegativ ist.

Weiterhin gehören alle nichtnegative μ mit $\int_I d\mu(t) = 1$ zu $\partial g(0)$, denn für diese ist die Relation

$$\max_{t \in I} x(t) = \max_{t \in I} x(t) \cdot \int_I d\mu(t) = \int_I \max_{t \in I} x(t) d\mu(t) \geq \int_I x(t) d\mu(t)$$

für alle $x(\cdot) \in C(I, \mathbb{R})$ erfüllt. Offenbar ist auch umgekehrt, wenn μ nichtnegativ ist und Norm Eins hat, die Ungleichung

$$\max_{t \in I} x(t) \geq \int_I x(t) d\mu(t)$$

richtig. Somit haben wir das Subdifferential der Funktion g im Nullpunkt berechnet. Für $x(\cdot) \neq 0$ gilt nach Lemma 3.8

$$\partial g(x(\cdot)) = \left\{ \mu \in \partial g(0) \mid \max_{t \in I} x(t) = \int_I x(t) d\mu(t) \right\}$$

mit dem eben berechneten Subdifferential

$$\partial g(0) = \left\{ \mu \in (C(I, \mathbb{R}))^* \mid \mu \geq 0 \text{ und } \int_I d\mu(t) = 1 \right\}.$$

Wir zeigen, dass die Maße $\mu \in \partial g(x(\cdot))$ auf den Mengen

$$T = \left\{ \tau \in I \mid x(\tau) = \max_{t \in I} x(t) \right\}$$

konzentriert sind. Der Kürze halber bezeichne M das Maximum von $x(\cdot)$ auf I . $I \setminus T$ ist offen, da T abgeschlossen ist. Angenommen, es existiert eine meßbare Menge $B \subseteq I$ mit $B \cap T = \emptyset$ und $\mu(B) > 0$. Dann gilt

$$\int_B x(t) d\mu(t) < \int_B M d\mu(t) \Rightarrow \int_{I \setminus T} x(t) d\mu(t) < \int_{I \setminus T} M d\mu(t),$$

und damit folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned} \max_{t \in I} x(t) &= \int_I M d\mu(t) = \int_T M d\mu(t) + \int_{I \setminus T} M d\mu(t) \\ &> \int_T M d\mu(t) + \int_{I \setminus T} x(t) d\mu(t) = \int_I x(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt μ nichtnegativ und besitzt Norm Eins, dann gehört μ der Menge $\partial g(0)$ an. Wenn μ zusätzlich auf der Menge T konzentriert ist, dann gilt

$$\max_{t \in I} x(t) = \int_I x(t) d\mu(t).$$

Zusammenfassend besteht das Subdifferential der Funktion g in einem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt $x(\cdot)$ aus den nichtnegativen regulären Borelschen Maßen auf der Borelschen σ -Algebra über I , deren Norm gleich Eins ist und die auf der Menge T konzentriert sind.

3.2 Eine spezielle Verkettung von Funktionen

3.2.1 Eine Kettenregel

In diesem gesamten Abschnitt treffen wir folgende Annahmen:

- X und Y sind Banachräume,
- $G : X \rightarrow Y$ ist im Punkt $x_0 \in X$ Fréchet-differenzierbar,
- $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist eigentlich, konvex und im Punkt $G(x_0)$ stetig.

Wegen der Stetigkeit der Abbildung G im Punkt x_0 existiert zu jeder Umgebung $V \subseteq Y$ des Punktes $G(x_0)$ eine Umgebung $U \subseteq X$ des Punktes x_0 mit $G(x) \in V$ für alle $x \in U$. Ferner folgt aus Satz 3.16, dass die Funktion g auf einer Umgebung des Punktes $G(x_0)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, also in diesem Punkt lokal Lipschitz-stetig ist. Daher ist unter den eben getroffenen Annahmen die Abbildung $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(x) = g(G(x))$ im Punkt x_0 lokal Lipschitz-stetig.

Lemma 3.19 (Vgl. [25], Satz 2, S. 191.) *Unter obigen Voraussetzungen ist $g'(G(x_0); \cdot)$ eine eigentliche stetige Funktion auf Y . Ferner existiert unter diesen Voraussetzungen im Punkt x_0 die klassische Richtungsableitung der Funktion $f(x) = g(G(x))$. Die Funktion $f'(x_0; \cdot)$ ist stetig und konvex, die Richtungsableitung konvergiert gleichmäßig bzgl. einer Richtung und es gilt im Punkt x_0 :*

$$f'(x_0; x) = g'(G(x_0); G'(x_0)x).$$

Beweis: (Vgl. [25], S. 191 f.) Aus dem Satz 3.12 über die Stetigkeit der Richtungsableitung konvexer Funktionen folgt unmittelbar, dass $g'(G(x_0); \cdot)$ eigentlich und stetig auf Y ist.

Nach Satz 3.13 läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $V \subseteq Y$ des Punktes $G'(x_0)x$ und eine Zahl $\lambda_1 > 0$ angeben mit

$$\left| \frac{g(G(x_0) + \lambda y) - g(G(x_0))}{\lambda} - g'(G(x_0); G'(x_0)x) \right| < \varepsilon$$

für alle $y \in V$ und $0 < \lambda < \lambda_1$.

Weiterhin existieren wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung G in x_0 eine Umgebung $U \subseteq X$ von x_0 und eine Zahl $\lambda_0 > 0$ mit

$$\frac{G(x_0 + \lambda z) - G(x_0)}{\lambda} \in V$$

für alle $z \in U$ und $0 < \lambda < \lambda_0$. Daher hat man für $z \in U$ und $0 < \lambda < \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$

$$\frac{G(x_0 + \lambda z) - G(x_0)}{\lambda} \in V$$

und folglich

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} - g'(G(x_0); G'(x_0)x) \right| \\
&= \left| \frac{g(G(x_0 + \lambda z)) - g(G(x_0))}{\lambda} - g'(G(x_0); G'(x_0)x) \right| \\
&= \left| \frac{g\left(G(x_0) + \lambda \left(\frac{G(x_0 + \lambda z) - G(x_0)}{\lambda}\right)\right) - g(G(x_0))}{\lambda} - g'(G(x_0); G'(x_0)x) \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $f'(x_0; x) = g'(G(x_0); G'(x_0)x)$ ist und die Richtungsableitung bzgl. einer beliebig gewählten Richtung $x \in X$ gleichmäßig konvergiert.

Noch zu zeigen haben wir die Stetigkeit und Konvexität von $f'(x_0; \cdot)$.

Da $g'(G(x_0); \cdot)$ stetig ist, ist offenbar auch $f'(x_0; \cdot)$ stetig. Ferner folgt aus der Linearität des Operators $G'(x_0)$ und der Konvexität der Richtungsableitung $g'(G(x_0); \cdot)$, dass $f'(x_0; \cdot)$ eine konvexe Funktion ist.

q. e. d.

Lemma 3.20 *Es seien obige Annahmen für g und G erfüllt. Ist die Funktion g regulär, dann ist auch $f(x) = g(G(x))$ regulär.*

Beweis: Nach Satz B.23 existieren Folgen $\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$, $\lambda_n \rightarrow 0+0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n + \lambda_n x) - f(x_n)}{\lambda_n} = f^\circ(x_0; x).$$

Mit diesen Folgen erhalten wir mit letztem Lemma und aus der Regularität von g :

$$\begin{aligned}
f^\circ(x_0; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n + \lambda_n x) - f(x_n)}{\lambda_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(G(x_n + \lambda_n x)) - g(G(x_n))}{\lambda_n} \leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x_0 \\ \lambda \rightarrow 0+0}} \frac{g(G(y + \lambda x)) - g(G(y))}{\lambda} \\
&= g'(G(x_0); G'(x_0)x) = f'(x_0; x).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$f'(x_0; x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} \leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x_0 \\ \lambda \rightarrow 0+0}} \frac{f(y + \lambda x) - f(y)}{\lambda} = f^\circ(x_0; x).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt die Regularität von f .

q. e. d.

Satz 3.21 (Kettenregel) (Vgl. [25], Satz 2, S. 191.) *Es seien X und Y Banachräume. Die Abbildung $G : X \rightarrow Y$ sei im Punkt $x_0 \in X$ Fréchet-differenzierbar; g sei eine eigentliche konvexe Funktion auf Y , die im Punkt $G(x_0)$ stetig ist. Ferner sei g regulär. Dann gilt für das Clarke'sche Subdifferential der Funktion $f(x) = g(G(x))$ in x_0 :*

$$\partial f(x_0) = G'^*(x_0) \partial g(G(x_0)).$$

Beweis: (Vgl. [25], S. 167 f.) Wir bemerken zunächst, dass nach letztem Lemma mit der Funktion g auch die Funktion f regulär ist.

Ist $y^* \in \partial g(G(x_0))$, dann gilt nach Definition

$$\langle y^*, y \rangle \leq g^\circ(G(x_0); y) \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Daraus folgt nach Lemma 3.19 für $y \in \text{Im } G'(x_0) \subseteq Y$:

$$\langle y^*, y \rangle = \langle y^*, G'(x_0)x \rangle \leq g^\circ(G(x_0); G'(x_0)x) = f^\circ(x_0; x).$$

Wegen $\langle y^*, G'(x_0)x \rangle = \langle G'^*(x_0)y^*, x \rangle$ bedeutet dies, dass

$$G'^*(x_0) \partial g(G(x_0)) \subseteq \partial f(x_0)$$

gilt. Die Relation $G'^*(x_0) \partial g(G(x_0)) \subseteq \partial f(x_0)$ haben wir damit gezeigt.

Wir zeigen, dass man die Inklusion durch " = " ersetzen kann. Dazu haben wir zu zeigen, dass es zu jedem $x^* \in \partial f(x_0)$ ein $y_0^* \in Y^*$ mit $x^* = G'^*(x_0)y_0^*$ und $y_0^* \in \partial g(G(x_0))$ gibt. Im Weiteren folgen wir dem Beweis nach [25], S. 167 f.

Die Funktion $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem x den Wert $g^\circ(G(x_0); G'(x_0)x)$ zuordnet, ist eigentlich, stetig, homogen und konvex. Denn $g^\circ(G(x_0); \cdot)$ ist homogen, konvex und nach Lemma 3.19 eigentlich und stetig, was unter der in x_0 Fréchet-differenzierbaren Abbildung G offenbar erhalten bleibt.

Dann folgt aus $x^* \in \partial f(x_0)$, dass $\gamma^*(x^*) = 0$ für die Young-Fenchel-Transformierte

$$\gamma^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - \gamma(x))$$

gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x_0) = \partial f^\circ(x_0; 0) &\Leftrightarrow \langle x^*, x \rangle \leq f^\circ(x_0; x) = g^\circ(G(x_0); G'(x_0)x) = \gamma(x) \\ &\Leftrightarrow x^* \in \partial \gamma(0). \end{aligned}$$

Das ist nach Lemma 3.7 für eigentliche konvexe Funktionen genau dann der Fall, falls

$$\gamma(0) + \gamma^*(x^*) = \langle x^*, 0 \rangle$$

gilt. Daraus erhalten wir $\gamma^*(x^*) = 0$.

Im Raum $\mathbb{R} \times Y$ betrachten wir die lineare Mannigfaltigkeit

$$M = \{(\alpha, y) \in \mathbb{R} \times Y \mid \exists x \in X \text{ mit } \alpha = \langle x^*, x \rangle, y = G'(x_0)x\}.$$

Diese hat mit dem Inneren von $\text{epi } g^\circ(G(x_0); \cdot)$ einen leeren Durchschnitt, weil sonst für ein gewisses $x \in X$

$$g^\circ(G(x_0); G'(x_0)x) = \gamma(x) < \langle x^*, x \rangle$$

gelten würde, d. h.

$$0 < \langle x^*, x \rangle - \gamma(x) \leq \gamma^*(x^*) = 0.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz B.18) kann man die Mengen $\text{epi } g^\circ(G(x_0); \cdot)$ und M durch ein nichttriviales lineares Funktional $(\beta, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$ trennen:

$$\sup_{(\alpha, y) \in \text{epi } g^\circ} (\beta\alpha + \langle y^*, y \rangle) \leq \inf_{(\alpha, y) \in M} (\beta\alpha + \langle y^*, y \rangle).$$

Im Fall $\beta = 0$ ist y^* von Null verschieden und trennt die Mengen $\text{dom } g^\circ(G(x_0); \cdot)$ und $\text{Im } G'(x_0)$. Das widerspricht der Stetigkeit von $g^\circ(G(x_0); \cdot)$ auf Y .

Ferner kann β nicht positiv sein, weil sonst die obere Grenze auf der linken Seite gleich $+\infty$ wäre. Also gilt $\beta < 0$.

Wir dividieren obige Ungleichung durch $|\beta|$, setzen $y_0^* = y^*/|\beta|$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sup_{(\alpha, y) \in \text{epi } g^\circ} (\langle y_0^*, y \rangle - \alpha) &= \sup_{y \in Y} (\langle y_0^*, y \rangle - g^\circ(G(x_0); y)) \\ &\leq \inf_{(\alpha, y) \in M} (\langle y_0^*, y \rangle - \alpha) = \inf_{x \in X} (\langle y_0^*, G'(x_0)x \rangle - \langle x^*, x \rangle). \end{aligned}$$

Da $\sup_{y \in Y} (\langle y_0^*, y \rangle - g^\circ(G(x_0); y)) > -\infty$ für alle y^* ist, ergibt sich hieraus $x^* = G'^*(x_0)y_0^*$, denn sonst wäre in der Ungleichung

$$\inf_{x \in X} (\langle y_0^*, G'(x_0)x \rangle - \langle x^*, x \rangle) = \inf_{x \in X} \langle G'^*(x_0)y_0^* - x^*, x \rangle = -\infty.$$

Somit gilt $x^* = G'^*(x_0)y_0^*$. Weiter folgt damit in der Ungleichung

$$\sup_{y \in Y} (\langle y_0^*, y \rangle - g^\circ(G(x_0); y)) \leq 0,$$

und dass daher für alle $y \in Y$ die Beziehung

$$\langle y_0^*, y \rangle \leq g^\circ(G(x_0); y)$$

erfüllt ist. Also gilt $y_0^* \in \partial g(G(x_0))$.

q. e. d.

3.2.2 Das Subdifferential der Funktion $f(x(\cdot)) = \max_{t \in [a,b]} \varphi(t, x(t))$

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sei ein kompaktes Intervall und $\varphi(t, x)$ eine Funktion auf $I \times \mathbb{R}^n$, die bezüglich beider Veränderlicher stetig und für jedes $t \in I$ nach x stetig differenzierbar ist. Ferner sei die Abbildung $\varphi_x(t, x)$ in der Gesamtheit der Variablen stetig.

Wir betrachten auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$f(x(\cdot)) = \max_{t \in I} \varphi(t, x(t))$$

und zeigen (vgl. [25], S. 198 f), dass das Subdifferential der Funktion f im Punkt $x(\cdot)$ genau diejenigen linearen Funktionale x^* enthält, die sich darstellen lassen gemäß

$$\langle x^*, z(\cdot) \rangle = \int_I \langle \varphi_x(t, x(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\mu(t),$$

wobei μ ein nichtnegatives reguläres Borelsches Maß auf der Borelschen σ -Algebra über I ist, das auf der Menge $T = \{\tau \in I \mid \varphi(\tau, x(\tau)) = f(x(\cdot))\}$ konzentriert ist und für das $\int_I d\mu(t) = 1$ gilt.

In Abschnitt 4.3.4 werden wir zeigen, dass unter obigen Annahmen an φ die Abbildung

$$G : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}), \quad [G(x(\cdot))](t) = \varphi(t, x(t)),$$

Fréchet-differenzierbar ist und

$$[G'(x(\cdot))z(\cdot)](t) = \langle \varphi_x(t, x(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

gilt (vgl. Lemma 4.9). Weiterhin ist die Funktion

$$g(x(\cdot)) = \max_{t \in [a,b]} x(t)$$

auf $C(I, \mathbb{R})$ konvex und stetig. Daher ist sie nach Folgerung 3.17 regulär. Somit können wir zur Berechnung des Subdifferentials der Funktion f ,

$$f(x(\cdot)) = \max_{t \in I} \varphi(t, x(t)) = g(G(x(\cdot)))$$

die Kettenregel (Satz 3.21) anwenden. Demnach gilt

$$\partial f(x(\cdot)) = G'^*(x(\cdot)) \partial g(G(x(\cdot))).$$

Das Subdifferential der Funktion g haben wir bereits berechnet. Es besteht aus allen nichtnegativen regulären Borelschen Maßen μ auf der Borelschen σ -Algebra über I , für die $\int_I d\mu(t) = 1$ ist und die auf der Menge T konzentriert sind.

Für $x^* \in G'^*(x(\cdot)) \partial g(G(x(\cdot)))$ und $z(\cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gilt dann:

$$\langle x^*, z(\cdot) \rangle = \langle G'^*(x(\cdot)) \mu, z(\cdot) \rangle = \langle \mu, G'(x(\cdot))z(\cdot) \rangle = \int_I \langle \varphi_x(t, x(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\mu(t).$$

Kapitel 4

Die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe

4.1 Formulierung der Aufgabe und das PMP

In diesem Kapitel untersuchen wir die hybride Aufgabe mit Zustandsbeschränkungen. Diese verallgemeinert die Grundaufgabe (2.1)–(2.4) in Kapitel 2 und das „einfache“ hybride Steuerungsproblem (1.32)–(1.34) in Kapitel 1.

Erstens geschieht dies in der Weise, dass die Phasentrajektorie $x(\cdot)$ eines zulässigen Prozesses (siehe unten) zusätzlich die Phasenbeschränkungen

$$g_j(t, x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, l,$$

und die Randbedingungen

$$h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0,$$

erfüllen muss. Die Zeitpunkte $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ sind weiterhin fest vorgegeben.

Zweitens nehmen wir an, dass zu verschiedenen Dynamiken möglicherweise verschiedene nichtleere Steuerbereiche $U_i \in \mathbb{R}^{m_i}, i = 1, \dots, k$, gehören. Wir setzen

$$U = U_1 \times \dots \times U_k \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_k}$$

und betrachten Steuervariablen

$$u = (u^1, \dots, u^k) \in U, \quad u^i \in \mathbb{R}^{m_i}.$$

Drittens macht es die Beweismethode, die bereits in der Grundaufgabe verwendet wurde, unumgänglich, die k -fache stückweise Zerlegung (Definition 1.3) von $[t_0, t_1]$ durch die Zerlegung in meßbare Intervalle zu ersetzen:

Definition 4.1 (k -fache Zerlegung) *Unter einer k -fachen Zerlegung eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir ein endliches System $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\}$ von Lebesgue-meßbaren Teilmengen von I mit*

$$a) \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{A}_i = I,$$

$$b) \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Im Weiteren bezeichnet $\mathfrak{Z}^k(I) = \{\mathcal{A}\} = \{\{\mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq k}\}$ die Gesamtheit aller k -fachen Zerlegungen des Intervalls I .

Wir identifizieren die Elemente $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ aus $\mathfrak{Z}^k(I)$ durch die Vektorfunktion

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi_{\mathcal{A}_1}(t), \dots, \chi_{\mathcal{A}_k}(t)), \quad t \in I,$$

der charakteristischen Funktionen der Mengen \mathcal{A}_i .

Bemerkung 4.2 *Streng genommen bezeichnen \mathcal{A}_i bzw. $\chi_{\mathcal{A}_i}(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, Äquivalenzklassen von Mengen bzw. Funktionen, die bzgl. des Lebesgue-Maßes fast überall übereinstimmen. Aufgrund dessen, dass wir zu jedem Zeitpunkt genau eine Strategie $i \in \{1, \dots, k\}$ auswählen, seien die Repräsentanten immer so gewählt, dass die Bedingungen in Definition 4.1 erfüllt sind bzw. die charakteristischen Vektorfunktionen der Mengen \mathcal{A}_i die Eigenschaft*

$$\sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) = 1$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$ besitzen.

Analog zum „einfachen“ hybriden Steuerungsproblem erklären wir die Verknüpfung mit einer Zerlegung $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ und beachten dabei, dass die „Aktivierung“ eines Index $i \in \{1, \dots, k\}$ zusätzlich auch auf den Vektor $u = (u^1, \dots, u^k) \in U$ angewendet wird.

Wie in Kapitel 1.2 verwenden wir für die Verknüpfungen mit den Vektorfunktionen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$ auf $[t_0, t_1]$ die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \varphi(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_i(t, x, u^i), \\ \mathcal{A} \circ f(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_i(t, x, u^i). \end{aligned}$$

Dabei sind $f_i(t, x, u^i)$, $\varphi_i(t, x, u^i)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, \dots, k$, und $f(t, x, u)$, $\varphi(t, x, u)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_k}$ definiert.

Für die partiellen Ableitungen, insofern diese existieren, erklären wir analog

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \varphi_t(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_t(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_{it}(t, x, u^i), \\ \mathcal{A} \circ f_t(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_t(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_{it}(t, x, u^i), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \circ \varphi_x(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_{i_x}(t, x, u^i), \\ \mathcal{A} \circ f_x(t, x, u) &= \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x, u) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot f_{i_x}(t, x, u^i).\end{aligned}$$

Mit diesen Vorbetrachtungen formulieren wir die hybride Aufgabe mit Zustandsbeschränkungen auf folgende Weise:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)), \quad (4.2)$$

$$g_j(t, x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.3)$$

$$h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0, \quad (4.4)$$

$$u(t) \in U = U_1 \times \dots \times U_k, \quad U_i \neq \emptyset, \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]). \quad (4.5)$$

In der Aufgabe (4.1)–(4.5) sind $t_1 > t_0$ fest und

$$\begin{aligned}f_i(t, x, u^i) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k, \\ \varphi_i(t, x, u^i) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k, \\ g_j(t, x) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, l, \\ h_\nu(x) &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_\nu}, \quad \nu = 0, 1.\end{aligned}$$

Der Index der dritten Variablen soll verdeutlichen, dass sich für verschiedene $i, i' \in \{1, \dots, k\}$ die Steuerbereiche $U_i, U_{i'}$ – und damit insbesondere auch die Dimensionen $m_i, m_{i'}$ – dieser Variablen unterscheiden können.

Wir nennen ein Tripel $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ und $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ einen *Steuerprozess*. Ein Prozess $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ heißt *zulässig* in der Aufgabe (4.1)–(4.5), wenn auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ die Funktion $x(\cdot)$ fast überall der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \varphi_i(t, x(t), u^i(t))$$

genügt, die Phasenbeschränkungen

$$g_j(t, x(t)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$ erfüllt sind, und in den Endpunkten t_0, t_1 die Randbedingungen

$$h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0$$

gelten. Einen zulässigen Steuerprozess $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum*, wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass für jeden anderen zulässigen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$$

die Ungleichung

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$$

erfüllt ist.

Wir treffen folgende Annahmen für die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe:

Für $i = 1, \dots, k$ besitzen die Funktionen $f_i(t, x, u^i)$ und die Abbildungen $\varphi_i(t, x, u^i)$ folgende Eigenschaften:

- Stetigkeit in der Gesamtheit der Variablen,
- stetige Differenzierbarkeit bzgl. x ,
- Stetigkeit der Abbildungen $f_{i_x}(t, x, u^i), \varphi_{i_x}(t, x, u^i)$ in der Gesamtheit der Variablen.

Ferner seien die Funktionen $g_j(t, x), j = 1, \dots, l$,

- stetig, stetig nach x differenzierbar und es seien die Abbildungen $g_{j_x}(t, x)$ stetig in der Gesamtheit der Variablen,

und die Abbildungen $h_0(x), h_1(x)$ seien

- stetig differenzierbar.

Aufgrund dieser Annahmen über die Abbildungen f_i und φ_i sind für einen Steuerprozess $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Die Abbildungen

$$t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)), \quad t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t))$$

sind auf $[t_0, t_1]$ integrierbar.

- Es existieren eine Zahl $\varepsilon > 0$ und auf $[t_0, t_1]$ integrierbare reellwertige Funktionen ϱ_1, ϱ_2 derart, dass für fast alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho_1(t), \quad \|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t))\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \leq \varrho_1(t)$$

und

$$\begin{aligned} \|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x(t) + \xi, u(t)) - \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f_x(t, x(t), u(t))\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \varrho_2(t) \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}, \\ \|\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x(t) + \xi, u(t)) - \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi_x(t, x(t), u(t))\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} &\leq \varrho_2(t) \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

ausfallen, sobald $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ ist.

Für $i = 1, \dots, k$ definieren wir die *partiellen Pontrjaginschen Funktionen*

$$H_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

gemäß

$$H_i(t, x, u^i, p, \lambda_0) = \langle p, \varphi_i(t, x, u^i) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u^i).$$

Dann heißt für die hybride Aufgabe die Funktion

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ H(t, x, u, p, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot H_i(t, x, u^i, p, \lambda_0) \\ &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot (\langle p, \varphi_i(t, x, u^i) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u^i)) \end{aligned}$$

mit

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_k} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

die *Pontrjaginsche Funktion*.

Satz 4.3 (Pontrjaginsches Maximumprinzip) *Wir nehmen an, dass die Funktionen und Abbildungen $f_i, \varphi_i, g_j, h_\iota, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l, \iota = 0, 1$, die Annahmen für die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe erfüllen.*

Ist $(x_(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (4.1)–(4.5), dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}, l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $p(\cdot), p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, und auf den Mengen $T_j = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_j(t, x_*(t)) = 0\}$ konzentrierte nichtnegative reguläre Borelsche Maße $\mu_j, j = 1, \dots, l$, (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass gilt:*

a) *Die Vektorfunktion $p(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung*

$$\begin{aligned} p(t) &= -h_1'^T(x_*(t_1)) l_1 + \int_t^{t_1} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \int_t^{t_1} g_{jx}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau) \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit

$$p(t_0) = h_0'^T(x_*(t_0)) l_0. \quad (4.7)$$

b) *Für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ ist die Beziehung*

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0) \quad (4.8)$$

erfüllt.

In den Aufgaben ohne Zustandsbeschränkungen ist $p(\cdot)$ eine absolutstetige Funktion. Liegen aber Phasenbeschränkungen vor, so kann die adjungierte Funktion $p(\cdot)$ Unstetigkeiten aufweisen, da in Gleichung (4.6) Integrale bzgl. der Maße μ_j vorkommen. Sie ist jedoch stets eine Funktion beschränkter Variation, die linksseitig stetig ist (vgl. [25], S. 209 und Lemma B.16).

4.2 Die verallgemeinerte Nadelvariation

4.2.1 Die Definition der verallgemeinerten Nadelvariation

In Abschnitt 2.2.2 haben wir das nachstehende Lemma bewiesen:

Lemma 2.4 *Es seien $y_\kappa(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n_\kappa}$, $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, beschränkte meßbare Vektorfunktionen. Dann existieren zu jedem $\delta > 0$ einparametrische Mengenfamilien $M_1(\alpha), \dots, M_{\kappa_0}(\alpha)$ meßbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$, wobei der Parameter α Werte zwischen 0 und $1/\kappa_0$ derart annimmt, dass für alle $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/\kappa_0$ und $\kappa \neq \kappa'$ gilt:*

$$|M_\kappa(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M_\kappa(\alpha') \subseteq M_\kappa(\alpha), \quad M_\kappa(\alpha) \cap M_{\kappa'}(\alpha') = \emptyset, \quad (4.9)$$

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t (\chi_{M_\kappa(\alpha)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha')}(\tau)) y_\kappa(\tau) d\tau - (\alpha - \alpha') \int_{t_0}^t y_\kappa(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n_\kappa}} \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \quad (4.10)$$

Es genüge $x_*(\cdot)$ der Gleichung (4.2) zur Steuerung $u_*(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ und der Zerlegung $\mathcal{A}_* \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$:

$$\dot{x}_*(t) = \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Für $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$ seien $u_\kappa(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ und $\mathcal{A}_\kappa \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ gewisse k -fache Zerlegungen des Intervalls $[t_0, t_1]$.

Dann sind die $(n+1)$ -dimensionalen Vektorfunktionen $y_\kappa(\cdot)$,

$$y_\kappa(t) = \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t)), \right. \\ \left. \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right), \quad \kappa = 1, \dots, \kappa_0,$$

meßbar und beschränkt, weil die Steuerungen $u_*(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_{\kappa_0}(\cdot)$ meßbar, beschränkt und die Abbildungen f_i, φ_i stetig sind. Daher existieren nach Lemma 2.4 einparametrische Mengenfamilien $\{M_\kappa(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq 1/\kappa_0}$ mit

$$|M_\kappa(\alpha)| = \alpha(t_1 - t_0), \quad M_\kappa(\alpha') \subseteq M_\kappa(\alpha), \quad M_\kappa(\alpha) \cap M_{\kappa'}(\alpha') = \emptyset$$

und

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha')}(\tau)) y_\kappa(\tau) - (\alpha - \alpha') y_\kappa(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \frac{\delta}{2} |\alpha - \alpha'|$$

für alle $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$, $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq \frac{1}{\kappa_0}$ und $\kappa \neq \kappa'$.

Dann ist auf dem Quader

$$Q^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid 0 \leq \alpha_\kappa \leq 1/\kappa_0, \kappa = 1, \dots, \kappa_0 \right\}$$

die Abbildung $\alpha \rightarrow (u_\alpha(\cdot), \mathcal{A}_\alpha) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$, wobei

$$u_\alpha(t) = u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (u_\kappa(t) - u_*(t))$$

ist und wir \mathcal{A}_α durch die charakteristische Vektorfunktion

$$\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) = \chi_{\mathcal{A}_*}(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t))$$

identifizieren, wohldefiniert und $(u_\alpha(\cdot), \mathcal{A}_\alpha)$ heißt *verallgemeinerte Nadelvariation* von $(u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ in Richtung der Elemente $(u_\kappa(\cdot), \mathcal{A}_\kappa)$.

4.2.2 Eigenschaften der verallgemeinerten Nadelvariation

Wir wollen in diesem Abschnitt für die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe analoge Resultate für die verallgemeinerten Nadelvariationen wie in Abschnitt 2.2.4 zeigen. Dazu beginnen wir mit einfachen Eigenschaften der Verknüpfung von Zerlegungen des Intervalls $[t_0, t_1]$ mit Vektorfunktionen, die wir im Weiteren benötigen:

Es seien $g = (g_1, \dots, g_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k)$ auf $[t_0, t_1]$ wohldefinierte Vektorfunktionen und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$. Dann gelten für alle $t \in [t_0, t_1]$ folgende Eigenschaften:

- $\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ (\alpha \cdot h) = \alpha \cdot (\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ h)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ (g + h) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ g + \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ h$,
- $(\chi_{\mathcal{A}_1}(t) + \chi_{\mathcal{A}_2}(t)) \circ h = \chi_{\mathcal{A}_1}(t) \circ h + \chi_{\mathcal{A}_2}(t) \circ h$.

Wenden wir diese Rechenregeln auf $\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x, u)$ bzw. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x, u)$ an, dann müssen wir beachten, dass die Verknüpfung auch mit den Steuerbereichen U_i erfolgen muss. Der Übersichtlichkeit halber wurde das an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt.

Aus den Eigenschaften (4.9) der Mengenfamilien in der Setzung der verallgemeinerten Nadelvariation

$$\begin{aligned} (u_\alpha(t), \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t)) &= \left(u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (u_\kappa(t) - u_*(t)), \right. \\ &\quad \left. \chi_{\mathcal{A}_*}(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot (\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t)) \right) \end{aligned}$$

folgt für jede wohldefinierte Vektorfunktion $h = (h_1, \dots, h_k)$ und jedes $\alpha \in Q^{\kappa_0}$

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_\alpha(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ h(t, x, u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) \right). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Verwenden wir zuerst die Setzung von $u_\alpha(\cdot)$, um dies zu überprüfen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_\alpha(t)) &= \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h\left(t, x, u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t)(u_\kappa(t) - u_*(t))\right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \left(h(t, x, u_*(t)) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right) \right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) + \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right). \end{aligned}$$

Nutzen wir nun die Gestalt von $\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(\cdot)$ aus und verwenden im zweiten Summanden, dass die Mengenfamilien $\{M_\kappa(\alpha_\kappa)\}$ nach Konstruktion die Eigenschaft

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \right)^2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}^2(t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t),$$

besitzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) &+ \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \right) \circ h(t, x, u_*(t)) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \right) \circ \left(h(t, x, u_\kappa(t)) - h(t, x, u_*(t)) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_\alpha(t)) &= \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ h(t, x, u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) \right), \end{aligned}$$

und nach Subtraktion von $\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t))$ die Beziehung (4.11).

Betrachten wir die Verknüpfung der Vektorfunktion $h = (h_1, \dots, h_k)$ mit den Zerlegungen $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_{\alpha'} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$, $\alpha, \alpha' \in Q^{\kappa_0}$, dann erhalten wir mit (4.11)

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ h(t, x, u_\alpha(t)) &- \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(t) \circ h(t, x, u_{\alpha'}(t)) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t) \right) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ h(t, x, u_\kappa(t)) \right. \\ &\quad \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ h(t, x, u_*(t)) \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Weil alle Steuerungen $u_*(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_{\kappa_0}(\cdot)$ beschränkt sind, sind ihre Werte in einer kompakten Menge $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \times \dots \times \tilde{U}_k \subset \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_k}$ enthalten. Nutzen wir darüber hinaus die Stetigkeit von f_i, φ_i und f_{ix}, φ_{ix} aus, so können wir ein $\sigma > 0$ derart angeben, dass

$$\left\| \varphi_i(t, x, u^i) - \varphi_i(t, x_*(t), u^i) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{4(t_1 - t_0)}, \quad (4.13)$$

$$\left| f_i(t, x, u^i) - f_i(t, x_*(t), u^i) \right| \leq \frac{\delta}{8(t_1 - t_0)}, \quad (4.14)$$

$$\left\| \varphi_i(t, x, u^i) - \varphi_i(t, x', u^i) - \varphi_{ix}(t, x_*(t), u^i)(x - x') \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta \|x - x'\|_{\mathbb{R}^n}}{2(t_1 - t_0)} \quad (4.15)$$

für alle $i = 1, \dots, k$ und alle t, x, x' mit $\|x - x_*(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sigma$, $\|x' - x_*(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sigma$, $u^i \in \tilde{U}_i$ erfüllt sind. Wir setzen

$$V = \{x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_{\infty} \leq \sigma\}$$

und wählen $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ mit

$$\varepsilon(t_1 - t_0) \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u^i \in \tilde{U}_i \\ 1 \leq i \leq k}} \left\| \varphi_{ix}(t, x_*(t), u^i) \right\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \leq \frac{\delta}{4}. \quad (4.16)$$

Lemma 4.4 *Es genüge $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ der Bedingung (4.16). Dann gilt für alle $\alpha, \alpha' \in \varepsilon \Sigma^{\kappa_0}$, wobei*

$$\varepsilon \Sigma^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0} \geq 0, \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa} \leq \varepsilon \right\} \subseteq Q^{\kappa_0}, \quad \varepsilon \in (0, 1/\kappa_0],$$

und alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(\tau) \circ \varphi(\tau, x(\tau), u_\alpha(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x'(\tau), u_{\alpha'}(\tau)) \right. \right. \\ & \quad - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \\ & \quad - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) \right. \\ & \quad \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \Big\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \leq \delta \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa| \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Beweis: Die linke Seite von (4.17) können wir nach oben abschätzen gegen die Summe folgender Integrale: 1. Summand:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \varphi(t, x(t), u_\alpha(t)) - \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_{\alpha'}(t)) \right. \\ \left. - \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_\alpha(t))(x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt,$$

2. Summand:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \left(\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_\alpha(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) \right) (x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt,$$

3. Summand:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_\alpha(t)) - \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_{\alpha'}(t)) \right. \\ \left. - \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_\alpha(t)) + \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_{\alpha'}(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt,$$

4. Summand:

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_\alpha}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\alpha(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_{\alpha'}(\tau)) \right. \\ \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Der erste Summand ist nach (4.15) kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty.$$

Mit (4.11) folgt, dass der zweite Summand gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_\kappa(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x(t, x_*(t), u_*(t)) \right) (x(t) - x'(t)) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt$$

ist. Wegen (4.16) und der Wahl von $\varepsilon \sum^{\kappa_0}$ lässt sich das nach oben abschätzen gegen

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) dt \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ 1 \leq i \leq k \\ u^i \in U_i}} \|\varphi_{i_x}(t, x_*(t), u^i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \\ = 2 \left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \right) (t_1 - t_0) \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ 1 \leq i \leq k \\ u^i \in U_i}} \|\varphi_{i_x}(t, x_*(t), u^i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \\ \leq 2 \cdot \varepsilon (t_1 - t_0) \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ 1 \leq i \leq k \\ u^i \in U_i}} \|\varphi_{i_x}(t, x_*(t), u^i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty \leq \frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_\infty.$$

Wegen (4.12) ist der dritte Summand gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_\kappa(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_*(t)) \right) \right. \\ \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_\kappa(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Dies ist kleiner oder gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_\kappa(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_\kappa(t)) \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x'(t), u_\kappa(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} dt,$$

und gemäß (4.13) ist der Ausdruck nicht größer als

$$2 \cdot \frac{\delta}{4(t_1 - t_0)} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^{t_1} \|\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt = \frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa|.$$

Schließlich lässt sich der vierte Summand mittels (4.12) in die Form

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(\tau)) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right. \\ \left. - (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

bringen. Die Differenz

$$\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_\kappa(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))$$

enthält die ersten n Koordinaten der Vektorfunktion $y_\kappa(\cdot)$ aus Abschnitt 4.2.1 im Punkt τ . Daher ist der obenstehende Ausdruck nicht größer als

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^t \left[(\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(\tau) - \chi_{M_\kappa(\alpha'_\kappa)}(\tau)) \cdot y_\kappa(\tau) - (\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa) \cdot y_\kappa(\tau) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Mit (4.10) ist dieser Ausdruck nicht größer als

$$\frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa - \alpha'_\kappa|.$$

Damit ist die Beziehung (4.17) bewiesen.
q. e. d.

Lemma 4.5 *Es sei $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ und genüge der Bedingung (4.16). Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(t) \circ f(t, x(t), u_\alpha(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt \\ & \leq \delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa \end{aligned} \quad (4.18)$$

für alle $\alpha \in \varepsilon \Sigma^{\kappa_0}$ und alle $x(\cdot) \in V$.

Beweis: Beachten wir (4.11), so ist die linke Seite in (4.18) gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^{t_1} \left[\chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right. \\ & \quad \left. - \alpha_\kappa \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist kleiner oder gleich der Summe der Integrale

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \int_{t_0}^{t_1} \left| \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \right. \\ & \quad \left. - \alpha_\kappa \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right) \right| dt \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[\int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_\kappa(\alpha_\kappa)}(t) \cdot \left[\left| \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) \right| \right] \right] dt \\ & + \alpha_\kappa \int_{t_0}^{t_1} \left[\left| \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x(t), u_\kappa(t)) - \chi_{\mathcal{A}_\kappa}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\kappa(t)) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x(t), u_*(t)) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right| \right] dt \Big]. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt die Relation (4.10). D. h., dass dieser kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}$$

ist. Mit (4.14) folgt, dass wir die zweite Summe nach oben gegen

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left(2 \int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_{\kappa}(\alpha_{\kappa})}(t) dt + 2\alpha_{\kappa} \int_{t_0}^{t_1} dt \right) \cdot \frac{\delta}{8(t_1 - t_0)} = \frac{\delta}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}$$

abschätzen können. Damit ist das Lemma bewiesen.

q. e. d.

4.3 Die abstrakte Optimierungsaufgabe

4.3.1 Die Definitionen der Abbildungen

Wir verwenden im Weiteren eine äquivalente Schreibweise der Ausdrücke (4.1)–(4.4). Dazu betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} J &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^{\infty}([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]) \rightarrow \mathbb{R}, \\ F &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^{\infty}([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]) \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n), \\ G_j &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, l, \\ H_{\iota} &: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{s_{\iota}}, \quad \iota = 0, 1, \end{aligned}$$

die gemäß

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) &= \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt, \\ F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) &= z(\cdot), \quad z(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \\ G_j(x(\cdot)) &= \max_{t \in [t_0, t_1]} g_j(t, x(t)), \quad j = 1, \dots, l, \\ H_{\iota}(x(\cdot)) &= h_{\iota}(x(t_{\iota})), \quad \iota = 0, 1, \end{aligned}$$

definiert sind. Mit diesen Schreibweisen lautet die Aufgabe (4.1)–(4.5) als abstraktes Optimierungsproblem:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \rightarrow \inf, \quad (4.19)$$

$$F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = 0, \quad (4.20)$$

$$G_j(x(\cdot)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.21)$$

$$H_{\iota}(x(\cdot)) = 0, \quad \iota = 0, 1, \quad (4.22)$$

$$(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^{\infty}([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]). \quad (4.23)$$

Sind für $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ die Bedingungen

$$F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = 0, \quad G_j(x(\cdot)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad H_\iota(x(\cdot)) = 0, \quad \iota = 0, 1,$$

erfüllt, dann heißt $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ *zulässig* in der Aufgabe (4.19)–(4.23). Ein zulässiges Tripel $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum*, wenn eine Umgebung $V \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ von $x_*(\cdot)$ existiert mit

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$$

für alle zulässigen Tripel $(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit $x(\cdot) \in V$.

4.3.2 Eigenschaften der Abbildung $F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$

Lemma 4.6 *Unter den Voraussetzungen an die Abbildungen φ_i , $i = 1, \dots, k$, ist die Abbildung*

$$x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0),$$

die für jedes $t \in [t_0, t_1]$ wie folgt definiert ist

$$F(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi(\tau, x(\tau), u_0(\tau)) d\tau,$$

für jedes Paar $(u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ stetig Fréchet-differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} & \left[F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)x(\cdot) \right](t) \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Beweis: (Vgl. Lemma 2.12.) Für $(u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ setzen wir $\mathcal{F}(x(\cdot)) = F(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)$. Für ein beliebiges festes $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{F}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot))(t) - \mathcal{F}(x_0(\cdot))(t)}{\lambda} \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \left[\int_0^1 \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau))x(\tau) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine $\lambda > 0$ ist $\|\lambda s x(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$ und es ist

$$\left\| \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau) + \lambda s x(\tau), u_0(\tau))x(\tau) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varrho_1(\tau) \cdot \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Betrachten wir im Quotienten

$$\frac{\mathcal{F}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot))(t) - \mathcal{F}(x_0(\cdot))(t)}{\lambda}$$

den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0 + 0$, so erhalten wir nach Satz B.17 über die „Differentiation unter dem Integral“ für die erste Variation

$$\begin{aligned} & [\delta\mathcal{F}(x_0(\cdot))x(\cdot)](t) \\ &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Gâteaux-Ableitung $\Lambda(x_0(\cdot))$, $\Lambda(x_0(\cdot))x(\cdot) = \delta\mathcal{F}(x_0(\cdot))x(\cdot)$, in $x_0(\cdot)$ stetig, also die Abbildung F in diesem Punkt bzgl. der ersten Variablen Fréchet-differenzierbar ist. Bzgl. der Operatornorm erhalten wir für die Gâteaux-Ableitung:

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda(x_0(\cdot))\| \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \|\chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ \varphi_x(t, x_0(t) + x(t), u_0(t)) - \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ \varphi_x(t, x_0(t), u_0(t))\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \varrho_2(t) \cdot \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_{\infty} \end{aligned}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x(\cdot)\|_{\infty} < \varepsilon$. Da $x_0(\cdot)$ ein beliebiges Element des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ war, folgt daraus die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung $x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)$ für jedes Paar $(u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$.

Mit den gleichen Abschätzungen wie eben erhalten wir ferner für die Fréchet-Ableitung F_x bzgl. der Operatornorm

$$\|F_x(x_0(\cdot) + x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) - F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \varrho_2(t) \cdot \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_{\infty}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x(\cdot)\|_{\infty} < \varepsilon$.

q. e. d.

Lemma 4.7 *Der stetige lineare Operator $F_x(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ aus Lemma 4.6 ist für jeden Steuerprozess $(x_0(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ bijektiv.*

Beweis: (Vgl. Lemma 2.13.) Wir haben zum Beweis des Lemmas zu zeigen, dass zu jedem $z(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ genau ein $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$z(t) = x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$. Da wir $F_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)$ als Abbildung auf den gesamten Raum $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ betrachten, dürfen wir $x(t_0)$ auf die linke Seite bringen und diese anschließend wieder mit $z(t)$ bezeichnen.

Der durch

$$x(\cdot) \rightarrow [Tx(\cdot)](t) = z(t) + \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_0}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))x(\tau) d\tau$$

gegebene Operator T bildet den Raum $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ in sich ab.

Wir setzen

$$\Lambda(t) = \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ \varphi_x(t, x_0(t), u_0(t)), \quad C(t) = \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\|_{\mathbb{R}^n \times n} d\tau.$$

Im Weiteren schreiben wir $\|\Lambda(\tau)\|$ statt $\|\Lambda(\tau)\|_{\mathbb{R}^n \times n}$.

Dann gilt bei mehrfacher Anwendung des Operators T

$$[T^m x(\cdot)](t) = z(t) + \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) [T^{m-1} x(\cdot)](\tau) d\tau$$

und es ist

$$\int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| C(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C^2(t), \quad \dots, \quad \int_{t_0}^t \|\Lambda(\tau)\| \frac{C^{m-1}(\tau)}{(m-1)!} d\tau = \frac{C^m(t)}{m!}, \quad \dots$$

Für $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ folgt damit bei Anwendung des Operators T

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t_0, t]} \left\| [Tx_1(\cdot)](s) - [Tx_2(\cdot)](s) \right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq C(t) \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty}, \\ \sup_{s \in [t_0, t]} \left\| [T^2 x_1(\cdot)](s) - [T^2 x_2(\cdot)](s) \right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \frac{1}{2} C^2(t) \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty}, \\ &\vdots \\ \sup_{s \in [t_0, t]} \left\| [T^m x_1(\cdot)](s) - [T^m x_2(\cdot)](s) \right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \frac{C^m(t)}{m!} \cdot \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Die Zahlen $a_m = \frac{C^m(t_1)}{m!}$ sind für alle $t \in [t_0, t_1]$ größer oder gleich $\frac{C^m(t)}{m!}$ und liefern eine Folge, deren Reihe konvergiert. Nach dem Fixpunktsatz von Weissinger (Satz B.22) existiert daher genau ein $x(\cdot)$ mit $x(\cdot) = Tx(\cdot)$.

q. e. d.

4.3.3 Differenzierbarkeit des Zielfunktional $J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$

Lemma 4.8 *Unter den Voraussetzungen an die Funktionen f_i , $i = 1, \dots, k$, ist die Abbildung*

$$x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ f(t, x(t), u_0(t)) dt$$

für jedes Paar $(u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ stetig Fréchet-differenzierbar, und es gilt

$$J_x(x_0(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)x(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ f_x(t, x_0(t), u_0(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Beweis: (Vgl. Lemma 2.14.) Für $(u_0(\cdot), \mathcal{A}_0) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ setzen wir $\mathcal{J}(x(\cdot)) = J(x(\cdot), u_0(\cdot), \mathcal{A}_0)$. Dann erhalten wir für die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}(x_0(\cdot))x(\cdot) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{\mathcal{J}(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - \mathcal{J}(x_0(\cdot))}{\lambda} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ f_x(t, x_0(t), u_0(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Gâteaux-Ableitung $\Lambda(x_0(\cdot))$,

$$\Lambda(x_0(\cdot))x(\cdot) = \delta \mathcal{J}(x_0(\cdot))x(\cdot),$$

bzgl. der Operatornorm in $x_0(\cdot)$ stetig ist:

$$\begin{aligned} &\|\Lambda(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda(x_0(\cdot))\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|\chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ f_x(t, x_0(t) + x(t), u_0(t)) - \chi_{\mathcal{A}_0}(t) \circ f_x(t, x_0(t), u_0(t))\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \varrho_2(t) \cdot \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty. \end{aligned}$$

Wiederholen wir diese Ungleichungskette mit der Fréchet- statt der Gâteaux-Ableitung, so erhalten wir die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit.

q. e. d.

4.3.4 Eigenschaften der Funktionen $G_j(x(\cdot))$

Wir zeigen nun die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildungen $\Gamma_j : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R})$,

$$\Gamma_j(x(\cdot))(t) = g_j(t, x(t)), \quad j = 1, \dots, l.$$

Dieses Resultat haben wir bei der Anwendung der Kettenregel 3.21 zur Berechnung des Subdifferentials in Abschnitt 3.2.2 verwendet und reichen dieses nun in dieser zusammenhängenden Untersuchung der Abbildungen der abstrakten Optimierungsaufgabe nach.

Lemma 4.9 *Unter den Voraussetzungen an die Funktionen g_j , $j = 1, \dots, l$, sind die Abbildungen $\Gamma_j : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R})$, die durch die Beziehungen*

$$\Gamma_j(x(\cdot))(t) = g_j(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, l,$$

definiert sind, Fréchet-differenzierbar, und es gilt für die Fréchet-Ableitungen

$$[\Gamma'_j(x(\cdot))z(\cdot)](t) = \langle g_{j_x}(t, x(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Beweis: Es sei $x_0(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Dann folgt für die erste Variation in Richtung $z(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} [\delta\Gamma_j(x_0(\cdot))z(\cdot)](t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{\Gamma_j(x_0(\cdot) + \lambda z(\cdot))(t) - \Gamma_j(x_0(\cdot))(t)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{g_j(t, x_0(t) + \lambda z(t)) - g_j(t, x_0(t))}{\lambda} = \langle g_{j_x}(t, x_0(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Gâteaux-Ableitungen $\Lambda_j(x_0(\cdot)), \Lambda_j(x_0(\cdot))z(\cdot) = \delta\Gamma_j(x_0(\cdot))z(\cdot)$, in $x_0(\cdot)$ stetig sind. Dann sind die Abbildungen $\Gamma_j, j = 1, \dots, l$, in $x_0(\cdot)$ Fréchet-differenzierbar. Bzgl. der Operatornorm erhalten wir für die Gâteaux-Ableitung in $x_0(\cdot)$:

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_j(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda_j(x_0(\cdot))\| \\ &= \sup_{\substack{z(\cdot) \in C \\ \|z(\cdot)\|_\infty = 1}} \|\Lambda_j(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda_j(x_0(\cdot))\| z(\cdot)\|_\infty \\ &= \sup_{\substack{z(\cdot) \in C \\ \|z(\cdot)\|_\infty = 1}} \left\{ \sup_{t \in [t_0, t_1]} |\langle g_{j_x}(t, x_0(t) + x(t)) - g_{j_x}(t, x_0(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}| \right\} \\ &\leq \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|g_{j_x}(t, x_0(t) + x(t)) - g_{j_x}(t, x_0(t))\|_{\mathbb{R}^n}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Dies lässt sich für jedes $j \in \{1, \dots, l\}$ und beliebiges $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ weiterhin nach oben gegen $C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty$ abschätzen, da die Abbildungen $(t, x) \rightarrow g_{j_x}(t, x)$ stetig sind. Dies bedeutet die Stetigkeit der Gâteaux-Ableitungen $\Lambda_j, j = 1, \dots, l$, in $x_0(\cdot)$.

q. e. d.

Mit Lemma 4.9 sind die Funktionen G_j ,

$$G_j(x(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, t_1]} g_j(t, x(t)), \quad j = 1, \dots, l,$$

jeweils eine Verkettung von einer Fréchet-differenzierbaren Abbildung und einer stetigen und konvexen Funktion, wie wir sie im Abschnitt 3.2 untersucht haben. Die Ergebnisse in 3.2 zeigen, dass die klassische und die Clarke'sche Richtungsableitung der Funktion $G_j, j = 1, \dots, l$, übereinstimmen und diese im Sinne der Aussage von Satz 3.13 gleichmäßig bzgl. einer Richtung konvergieren. In 3.2.2 haben wir mit Hilfe der Kettenregel 3.21 die Subdifferenziale der Funktionen $G_j(x(\cdot))$ bestimmt. Diese bestehen demnach aus denjenigen linearen Funktionalen $x_j^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})^*$, die sich gemäß

$$\langle x_j^*, z(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle g_{j_x}(t, x(t)), z(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\mu_j(t), \quad j = 1, \dots, l,$$

darstellen lassen. Darin sind μ_j nichtnegative reguläre Borelsche Maße auf der Borelschen σ -Algebra über $[t_0, t_1]$, die jeweils auf der zugehörigen Menge

$$T_j = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_j(t, x(t)) = G_j(x(\cdot))\}$$

konzentriert sind und für die $\int_{t_0}^{t_1} d\mu_j(t) = 1$ gilt.

4.3.5 Differenzierbarkeit der Randbedingungen $H_\iota(x(\cdot))$

Lemma 4.10 *Unter den Voraussetzungen an h_0, h_1 sind die Abbildungen*

$$H_\iota(x(\cdot)) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{s_\iota}, \quad \iota = 0, 1,$$

mit

$$H_0(x(\cdot)) = h_0(x(t_0)), \quad H_1(x(\cdot)) = h_1(x(t_1)),$$

stetig Fréchet-differenzierbar, und es gilt in $x_0(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$:

$$H'_\iota(x_0(\cdot))x(\cdot) = h'_\iota(x_0(t_\iota))x(t_\iota), \quad \iota = 0, 1.$$

Beweis: Wir bestimmen zunächst die erste Variation:

$$\begin{aligned} \delta H_\iota(x_0(\cdot))x(\cdot) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{H_\iota(x_0(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - H_\iota(x_0(\cdot))}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{h_\iota(x_0(t_\iota) + \lambda x(t_\iota)) - h_\iota(x_0(t_\iota))}{\lambda} = h'_\iota(x_0(t_\iota))x(t_\iota), \quad \iota = 0, 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\delta H_\iota(x_0(\cdot))x(\cdot) = h'_\iota(x_0(t_\iota))x(t_\iota), \quad \iota = 0, 1.$$

Bzgl. der Operatornorm erhalten wir für die Gâteaux-Ableitungen Λ_ι :

$$\|\Lambda_\iota(x_0(\cdot) + x(\cdot)) - \Lambda_\iota(x_0(\cdot))\| \leq \|h'_\iota(x_0(t_\iota) + x(t_\iota)) - h'_\iota(x_0(t_\iota))\|_{\mathbb{R}^{s_\iota}}.$$

Da die Abbildungen h_ι stetig differenzierbar sind, existiert eine positive Konstante C mit

$$\|h'_\iota(x_0(t_\iota) + x(t_\iota)) - h'_\iota(x_0(t_\iota))\|_{\mathbb{R}^{s_\iota}} \leq C \cdot \|x(t_\iota)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C \cdot \|x(\cdot)\|_\infty, \quad \iota = 0, 1.$$

Wiederholen wir für die Fréchet-Ableitungen diese Abschätzungen, erhalten wir außerdem die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit.

q. e. d.

4.4 Die Lagrangesche Multiplikatorenregel

4.4.1 Die Formulierung des Satzes

Wir definieren auf

$$C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]) \times \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$$

die zur Aufgabe (4.19)–(4.23) gehörende Lagrange-Funktion \mathcal{L} . Diese lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1) \\ = \lambda_0 J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) + \langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \rangle + \sum_{j=1}^l \lambda_j G_j(x(\cdot)) \\ + \langle l_0, H_0(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}} + \langle l_1, H_1(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Zur weiteren Begriffsbildung, die wir speziell für die Lagrange-Funktion \mathcal{L} in (4.24) benötigen, betrachten wir für fest gewählte $u(\cdot)$, \mathcal{A} , y^* und $\lambda_0, \dots, \lambda_l, l_0, l_1$ die Abbildung $\Lambda : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(\cdot) \rightarrow \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1).$$

Dann nennen wir die Clarke'sche Richtungsableitung (Definition 3.2) der Funktion Λ die *partielle Clarke'sche Richtungsableitung* bzgl. $x(\cdot)$ der Lagrange-Funktion \mathcal{L} und bezeichnen diese mit

$$\mathcal{L}_x^\circ(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1; \cdot).$$

Entsprechend heißt das Clarke'sche Subdifferential (Definition 3.15) der Funktion Λ das *partielle Clarke'sche Subdifferential* der Lagrange-Funktion \mathcal{L} bzgl. $x(\cdot)$ und stellen dieses symbolisch mit

$$\partial_x \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1)$$

dar.

Satz 4.11 (Lagrangesche Multiplikatorenregel) *In der Aufgabe (4.19)–(4.23) sei $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ ein starkes lokales Minimum. Dann existieren nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_l \geq 0, y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$ und $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}, l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ mit*

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1), \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1) \\ &= \min_{\substack{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \\ \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])}} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1), \end{aligned} \quad (4.26)$$

und

$$\lambda_j G_j(x_*(\cdot)) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (4.27)$$

4.4.2 Bemerkungen zum Beweis

Da die Abbildungen $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$, $x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$, $x(\cdot) \rightarrow H_\iota(x(\cdot))$, $\iota = 0, 1$, stetig Fréchet-differenzierbar sind und die Funktionen $G_j, j = 1, \dots, l$, stetige und konvexe Richtungsableitungen besitzen (vgl. Lemma 3.19 und Lemma 3.20), gilt nach Satz 3.18

$$\begin{aligned} & \partial_x \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1) \\ &= \lambda_0 J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) + F_x^*(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) y^* + \sum_{j=1}^l \lambda_j \partial G_j(x_*(\cdot)) \\ & \quad + H_0'^T(x_*(\cdot)) l_0 + H_1'^T(x_*(\cdot)) l_1. \end{aligned}$$

Nach Definition 3.15 des Clarke'schen Subdifferentials ist

$$\partial_x \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots) = \partial \mathcal{L}_x^\circ(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots; 0)$$

mit der partiellen Clarke'schen Richtungsableitung

$$z(\cdot) \rightarrow \mathcal{L}_x^\circ(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots; z(\cdot)).$$

Daraus folgt, dass (4.25) genau dann erfüllt ist, falls

$$\begin{aligned} 0 \leq & \lambda_0 J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + \langle y^*, F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) \rangle \\ & + \sum_{j=1}^l \lambda_j G_j^\circ(x_*(\cdot); x(\cdot)) + \langle l_0, H'_0(x(\cdot))x(\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}} + \langle l_1, H'_1(x(\cdot))x(\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} \end{aligned}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ist. Daher beweisen wir die Beziehung (4.25), indem wir die letzte Ungleichung zeigen.

Zu Beginn des Beweises der Lagrangeschen Multiplikatorenregel verwenden wir das folgende Resultat über konvexe Funktionen:

Lemma 4.12 (Vgl. [29], Theorem 4.3, S. 25.) *Es seien $f_i, i = 1, \dots, n$, konvexe Funktionen auf dem Banachraum X . Dann gilt für jede konvexe Kombination \bar{x} von Punkten x_1, \dots, x_m aus X die Beziehung*

$$f_i(\bar{x}) \leq \sum_{j=1}^m \alpha_j f_i(x_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Im Beweis von Satz 4.11 beschränken wir uns auf den regulären Fall. Mit diesem Fall ist die Situation gemeint, in der

$$\text{Im } F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \times \text{Im } H'_0(x_*(\cdot)) \times \text{Im } H'_1(x_*(\cdot)) = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$$

ist. Da der stetige lineare Operator $F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ bijektiv ist (Lemma 4.7), tritt der reguläre Fall nur dann nicht ein, falls

$$\text{Im } H'_0(x_*(\cdot)) \times \text{Im } H'_1(x_*(\cdot)) \neq \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$$

gilt.

Bemerkung 4.13 (Entarteter Fall) *Es sei $\text{Im } H'_0(x_*(\cdot)) \times \text{Im } H'_1(x_*(\cdot)) \neq \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$. Dann existieren Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, wobei nicht beide gleichzeitig der Nullvektor in \mathbb{R}^{s_0} bzw. \mathbb{R}^{s_1} sind, mit*

$$l_0^T \cdot v_0 + l_1^T \cdot v_1 = 0 \quad \text{für alle } v_0 \in \text{Im } H'_0(x_*(\cdot)), v_1 \in \text{Im } H'_1(x_*(\cdot)).$$

Setzen wir noch $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, ..., $\lambda_l = 0$ und $y^* = 0$, so sind die Beziehungen (4.25)–(4.27) erfüllt.

4.4.3 Der Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel

Es sei $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (4.19)–(4.23).

O. B. d. A. seien $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) = 0$ und

$$G_j(x_*(\cdot)) = 0, \quad j = 1, \dots, l', \quad G_j(x_*(\cdot)) < 0, \quad j = l' + 1, \dots, l.$$

Wir bezeichnen mit C die Menge der Variationen. Diese ist die Menge derjenigen Vektoren

$$(\mu_0, y(\cdot), \mu_1, \dots, \mu_{l'}, v_0, v_1)$$

aus

$$\mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{l'} \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1},$$

zu denen es ein $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, ein $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ und ein $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mu_0 &> J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + J(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*), \\ y(\cdot) &= F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + F(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*), \\ \mu_j &> G_j^\circ(x_*(\cdot); x(\cdot)), \quad j = 1, \dots, l', \\ v_\iota &= H'_\iota(x_*(\cdot))x(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \end{aligned}$$

► *Behauptung 1: Die Menge C besitzt ein nichtleeres Inneres.*

Begründung: (Vgl. [25], S. 88.) Die stetigen und konvexen Funktionen

$$x \rightarrow G_1^\circ(x_*(\cdot); x), \dots, x \rightarrow G_{l'}^\circ(x_*(\cdot); x)$$

sind auf einer gemeinsamen Nullumgebung $U_0 \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ nach oben beschränkt (Satz 3.4). Ferner sind $J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$, $H'_\iota(x_*(\cdot))$, $\iota = 0, 1$, stetig und linear. Daher existiert eine Zahl $a > 0$ mit

$$a > \sup_{x(\cdot) \in U_0} \left\{ J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot), G_j^\circ(x_*(\cdot); x(\cdot)), \|H'_\iota(x_*(\cdot))x(\cdot)\|_{\mathbb{R}^{s_\iota}} \right\}$$

und wir setzen

$$\mathbb{R}_a = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > a\}, \quad \mathbb{R}_a^{l'+s_0+s_1} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{l'+s_0+s_1}) \in \mathbb{R}^{l'+s_0+s_1} \mid \alpha_i > a\}.$$

Wegen der Regularität von $F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ folgt aus dem Satz über die offene Abbildung, dass $F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)U_0$ offen in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ist. Daraus folgt, dass die offene Menge $\mathbb{R}_a \times F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)U_0 \times \mathbb{R}_a^{l'+s_0+s_1}$ in der Menge C enthalten ist. ■

► *Behauptung 2: Ist $0 \notin \text{conv } C$, dann gelten (4.25)–(4.27).*

Begründung: (Vgl. [25], S. 87.) Da die Menge $\text{conv } C$ konvex ist und wegen $C \subseteq \text{conv } C$

ein nichtleeres Inneres besitzt, existiert nach dem Satz von Hahn-Banach und Folgerung B.19 ein nichttriviales Funktional

$$(\lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_{l'}, l_0, l_1) \in \mathbb{R} \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^{l'} \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1},$$

das die Menge $\text{conv } C$ vom Ursprung trennt.

Für die Menge $C \subseteq \text{conv } C$ bedeutet dies, dass

$$\lambda_0 \mu_0 + \langle y^*, y(\cdot) \rangle + \sum_{j=1}^{l'} \lambda_j \mu_j + l_0^T \cdot v_0 + l_1^T \cdot v_1 \geq 0$$

für alle $(\mu_0, y(\cdot), \mu_1, \dots, \mu_{l'}, v_0, v_1) \in C$ gilt.

Damit haben wir $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{l'} \geq 0$. Denn angenommen, es ist eine dieser Zahlen λ_j negativ, dann liefert die Betrachtung $\mu_j \rightarrow \infty$ einen Widerspruch in der Ungleichung.

Aus obiger Relation folgt, dass für alle

$$(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 \leq & \lambda_0 [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + J(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\ & + \langle y^*, F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + F(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \rangle \\ & + \sum_{j=1}^{l'} \lambda_j G_j^\circ(x_*(\cdot); x(\cdot)) + \langle l_0, H_0'(x(\cdot))x(\cdot) \rangle + \langle l_1, H_1'(x(\cdot))x(\cdot) \rangle \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Setzen wir $\lambda_{l'+1} = \dots = \lambda_l = 0$, so gilt offenbar (4.27) wegen

$$G_j(x_*(\cdot)) = 0, \quad j = 1, \dots, l', \quad G_j(x_*(\cdot)) < 0, \quad j = l' + 1, \dots, l.$$

Für $x(\cdot) = 0$ folgt unmittelbar (4.26).

Betrachten wir $(u(\cdot), \mathcal{A}) = (u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq & \lambda_0 J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) + \langle y^*, F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) \rangle \\ & + \sum_{j=1}^{l'} \lambda_j G_j^\circ(x_*(\cdot); x(\cdot)) + \langle l_0, H_0'(x(\cdot))x(\cdot) \rangle + \langle l_1, H_1'(x(\cdot))x(\cdot) \rangle \end{aligned}$$

für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Also ist nach Definition des Subdifferentials auch (4.25) erfüllt. ■

Zum Beweis des Satzes 4.11 haben wir zu zeigen, dass $0 \notin \text{conv } C$ gilt. Das folgt aus diesen beiden gezeigten Behauptungen.

Wir nehmen an, es sei $0 \in \text{conv } C$. Dann existieren dem Begriff einer konvexen Hülle nach gewisse $\bar{x}_\kappa(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $\bar{u}_\kappa(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$, $\bar{\mathcal{A}}_\kappa \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$, $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$ und positive Zahlen $\bar{\alpha}_\kappa$, $\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa = 1$, mit

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}_\kappa(\cdot) + J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right], \\ 0 &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}_\kappa(\cdot) + F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right], \\ 0 &> \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}_\kappa(\cdot)), \\ 0 &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot H'_\iota(x_*(\cdot)) \bar{x}_\kappa(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\bar{x}(\cdot) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot \bar{x}_\kappa(\cdot)$$

Dann folgt aus Lemma 4.12

$$G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}(\cdot)) \leq \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \cdot G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}_\kappa(\cdot)) < 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &> J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}(\cdot) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}(\cdot) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[F(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$0 > G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}(\cdot)), \quad (4.30)$$

$$0 = H'_\iota(x_*(\cdot)) \bar{x}(\cdot), \quad \iota = 0, 1. \quad (4.31)$$

Statt die konvexe Kombination der Abbildungen bzgl. $\bar{x}_\kappa(\cdot)$ zu betrachten, beschränken wir uns auf $\bar{x}(\cdot)$ und vereinfachen damit die weiteren Darstellungen. Dass ein solches $\bar{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften (4.28)–(4.31) wirklich existiert, falls $0 \in \text{conv } C$ gilt, haben wir eben mit Hilfe von Lemma 4.12 gezeigt.

Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \min\{a, 0\},$$

für jeden Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0}$

$$\alpha^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_{\kappa_0}^+), \quad \alpha^- = (\alpha_1^-, \dots, \alpha_{\kappa_0}^-),$$

und außerdem sei für $\alpha \in \mathbb{R}^{\kappa_0}$

$$|\alpha| := \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa}|.$$

Im Folgenden bezeichne $(u_{\alpha}(\cdot), \mathcal{A}_{\alpha}) \in L^{\infty}([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ die verallgemeinerte Nadelvariation von $(u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ in Richtung der Elemente $(\bar{u}_1(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_1), \dots, (\bar{u}_{\kappa_0}(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_{\kappa_0})$, mit denen die konvexe Kombination gebildet wird (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Wir untersuchen nun die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi(x(\cdot), \alpha) &= F(x(\cdot), u_{\alpha^+}(\cdot), \mathcal{A}_{\alpha^+}) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}^- \left(F(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_{\kappa}) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right), \\ \Phi_0(x(\cdot), \alpha) &= H_0(x(\cdot)), \quad \Phi_1(x(\cdot), \alpha) = H_1(x(\cdot)), \end{aligned}$$

und die stetigen linearen Operatoren

$$\begin{aligned} \Lambda(x(\cdot), \alpha) &= F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)x(\cdot) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa} \left(F_x(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_{\kappa}) - F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right), \\ \Lambda_0(x(\cdot), \alpha) &= H'_0(x_*(\cdot))x(\cdot), \quad \Lambda_1(x(\cdot), \alpha) = H'_1(x_*(\cdot))x(\cdot). \end{aligned}$$

Für diese gilt :

► *Behauptung 3: Die Abbildung*

$$\tilde{\Phi} = (\Phi, \Phi_0, \Phi_1) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0} \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1},$$

und der stetige lineare Operator

$$\tilde{\Lambda} = (\Lambda, \Lambda_0, \Lambda_1) : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0} \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$$

genügen auf einer Umgebung des Punktes $(x_*(\cdot), 0)$ den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik (Satz 2.11).

Begründung: (Vgl. [25], S. 203 f.) Es sei $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$, und wir definieren die Menge $\varepsilon\tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ gemäß

$$\varepsilon\tilde{\Sigma}^{\kappa_0} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa_0}) \in \mathbb{R}^{\kappa_0} \mid \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_{\kappa}^+ \leq \varepsilon \right\}.$$

Dann gilt für alle $(x(\cdot), \alpha)$ und $(x'(\cdot), \alpha')$ aus $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \varepsilon \tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$:

$$\begin{aligned}
& \left\| \Phi(x(\cdot), \alpha) - \Phi(x'(\cdot), \alpha') - \Lambda(x(\cdot), \alpha) + \Lambda(x'(\cdot), \alpha') \right\|_{\infty} \\
&= \left\| F(x(\cdot), u_{\alpha^+}(\cdot), \mathcal{A}_{\alpha^+}) - F(x'(\cdot), u_{\alpha'^+}(\cdot), \mathcal{A}_{\alpha'^+}) - F_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)(x(\cdot) - x'(\cdot)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_{\kappa}^+ - \alpha'_{\kappa}{}^+) \left(F(x_*(\cdot), \bar{u}_{\kappa}(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_{\kappa}) - F(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right) \right\|_{\infty} \\
&= \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^t \left[\chi_{\mathcal{A}_{\alpha^+}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x(\tau), u_{\alpha^+}(\tau)) - \chi_{\mathcal{A}_{\alpha'^+}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x'(\tau), u_{\alpha'^+}(\tau)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) (x(\tau) - x'(\tau)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\alpha_{\kappa}^+ - \alpha'_{\kappa}{}^+) \cdot \left(\chi_{\bar{\mathcal{A}}_{\kappa}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), \bar{u}_{\kappa}(\tau)) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.4 können wir eine Umgebung V von $x_*(\cdot)$ und ein $\varepsilon \in (0, 1/\kappa_0]$ derart wählen, dass dieser Ausdruck kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{3} \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa} - \alpha'_{\kappa}| \right)$$

für alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$ und alle $\alpha, \alpha' \in \varepsilon \tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ ist.

Ferner kann diese Umgebung V von $x_*(\cdot)$ so gewählt werden, dass ebenfalls

$$\|H_{\iota}(x(\cdot)) - H_{\iota}(x'(\cdot)) - H'_{\iota}(x_*(\cdot))(x(\cdot) - x'(\cdot))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{3} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty}, \quad \iota = 0, 1,$$

für alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$ gilt.

Daraus folgt, dass eine Umgebung $V \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ von $x_*(\cdot)$ und eine Nullumgebung $\varepsilon \tilde{\Sigma}^{\kappa_0}$ des Raumes \mathbb{R}^{κ_0} existieren mit

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{\Phi}(x(\cdot), \alpha) - \tilde{\Phi}(x'(\cdot), \alpha') - \tilde{\Lambda}(x(\cdot), \alpha) + \tilde{\Lambda}(x'(\cdot), \alpha') \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}} \\
& \leq \delta \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{\infty} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_{\kappa} - \alpha'_{\kappa}| \right). \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Wir setzen für $(x(\cdot), \alpha) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$, $(y(\cdot), l_0, l_1) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$:

$$C(\tilde{\Lambda}) = \sup_{(y(\cdot), l_0, l_1) \neq 0} \left(\frac{\inf \{ \|x(\cdot)\|_{\infty} + |\alpha| \mid \tilde{\Lambda}(x(\cdot), \alpha) = (y(\cdot), l_0, l_1) \}}{\|(y(\cdot), l_0, l_1)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}}} \right).$$

Aus der Definition des Operators $\tilde{\Lambda}$ folgt $\text{Im } \tilde{\Lambda} = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$. Außerdem ist der Operator $\tilde{\Lambda}$ offenbar linear und stetig. Gemäß Lemma 2.10 gilt deshalb $C(\tilde{\Lambda}) < \infty$.

Wir wählen $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$, dann genügen die Abbildungen $\tilde{\Phi}$ und $\tilde{\Lambda}$ den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik. ■

► *Behauptung 4:* Es existieren zu $(\bar{x}(\cdot), \bar{\alpha})$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0})$, aus (4.28)–(4.31) Zahlen $\vartheta_0 > 0$, $\delta > 0$ und Abbildungen

$$\vartheta \rightarrow (\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta)$$

des Intervalls $[0, \vartheta_0]$ in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ mit

$$(\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta) \rightarrow 0 \text{ für } \vartheta \rightarrow 0, \quad \vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta \geq 0 \text{ für alle } \vartheta \in [0, \vartheta_0]$$

und

$$\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta) = 0. \quad (4.33)$$

In dieser Behauptung findet ein Satz über implizite Funktionen, nämlich der verallgemeinerte Satz von Ljusternik (Satz 2.11), Anwendung. Der spezielle Charakter dieses Satzes ist notwendig, da der lineare Operator $\tilde{\Lambda}$ zwar regulär, aber i. a. nicht bijektiv ist, also eine mengenwertige Inverse besitzt. Genauer bestimmen wir mit der Abbildung

$$\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta \rightarrow (u_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot), \mathcal{A}_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta})$$

verallgemeinerte Nadelvariationen der Form

$$\begin{aligned} u_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(t) &= u_*(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\vartheta \alpha_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta)}(t) \cdot (\bar{u}_\kappa(t) - u_*(t)), \\ \chi_{\mathcal{A}_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}}(t) &= \chi_{\mathcal{A}_*}(t) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \chi_{M_\kappa(\vartheta \alpha_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta)}(t) \cdot (\chi_{\bar{\mathcal{A}}_\kappa}(t) - \chi_{\mathcal{A}_*}(t)). \end{aligned}$$

Beachten wir die Setzung von $\tilde{\Phi}$, so bedeutet dies, dass wir Prozesse

$$(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) = (x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot), \mathcal{A}_{\vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}), \quad \vartheta \in [0, \vartheta_0], \quad (4.34)$$

für die Aufgabe (4.19)–(4.22) konstruieren, die die Gleichungsbedingungen (4.20) und (4.22) erfüllen.

Begründung: (Vgl. [25], S. 204f.) Nach Behauptung 3 darf Satz 2.11 auf den Punkt $(x_*(\cdot), 0)$ des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ angewendet werden. Daher existieren für $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ Zahlen $\vartheta_0 > 0$, $K > 0$ und Abbildungen

$$\vartheta \rightarrow (\xi^\vartheta(\cdot), \alpha^\vartheta)$$

des Intervalls $[0, \vartheta_0]$ in $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0}$ derart, dass

$$\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta \bar{\alpha} + \alpha^\vartheta) = \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0) = 0 \quad \text{für alle } \vartheta \in [0, \vartheta_0]$$

und

$$\|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \leq K \|\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta \bar{x}(\cdot), \vartheta \bar{\alpha}) - \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{\kappa_0} \times \mathbb{R}^{s_1}}$$

gilt. Da $\tilde{\Phi}(x_*, 0) = 0$ und $\vartheta\tilde{\Lambda}(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0$, vgl. (4.29) und (4.31), folgt mit (4.32) aus dieser Ungleichung die Beziehung

$$\begin{aligned} \|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| &\leq K \|\tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot), \vartheta\bar{\alpha}) - \tilde{\Phi}(x_*(\cdot), 0) \\ &\quad - \tilde{\Lambda}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot), \vartheta\bar{\alpha}) + \tilde{\Lambda}(x_*(\cdot), 0)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}} \\ &\leq \vartheta K \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \right) = \vartheta K \delta (\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Hieraus ergibt sich $\xi^\vartheta(\cdot) \rightarrow 0$ und $\alpha^\vartheta \rightarrow 0$ für $\vartheta \rightarrow 0$.

Die Zahl $\delta > 0$ sei so gewählt, dass neben $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ noch

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq \min\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0}\} \quad (4.36)$$

erfüllt ist. Dann erhalten wir $\vartheta\bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta \geq 0$ aus (4.35) und (4.36) und es gilt für ein hinreichend kleines $\delta > 0$

$$0 = \tilde{\Phi}(x_*(\cdot) + \vartheta\bar{x}(\cdot) + \xi^\vartheta(\cdot), \vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta)$$

für alle $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$. ■

Wegen (4.28) und (4.30) existiert eine Zahl $c > 0$ mit

$$\begin{aligned} -4c &\geq J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)\bar{x}(\cdot) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa \left[J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$-c \geq G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}(\cdot)), \quad j = 1, \dots, l'. \quad (4.38)$$

Im Punkt $x_*(\cdot)$ ist die Funktion $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ stetig differenzierbar und die Funktionen $G_j(x(\cdot))$ genügen den Voraussetzungen der Lemmata 3.19, 3.20 des Abschnitts 3.2. Daher lässt sich eine Zahl $\sigma > 0$ derart angeben, dass für $0 \leq \vartheta \leq \sigma$ und $\|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_\infty \leq \sigma$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} J(x_*(\cdot) + \vartheta x(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) &\leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \\ &\quad + \vartheta [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)\bar{x}(\cdot) + c], \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$G_j(x_*(\cdot) + \vartheta x(\cdot)) \leq G_j(x_*(\cdot)) + \vartheta [G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}(\cdot)) + c], \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.40)$$

gelten.

► *Behauptung 5: Für den Prozess $(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta)$ aus (4.34) gilt für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$, ϑ_0 aus letzter Behauptung:*

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) - \vartheta c + o(\vartheta). \quad (4.41)$$

Begründung: (Vgl. [25], S. 205 f.) Wir nehmen an, $\delta > 0$ sei so gewählt, dass neben $\delta \cdot C(\Lambda) < 1/2$ noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq \min\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{\kappa_0}, \sigma\} \quad (4.42)$$

$$K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \cdot \max_{1 \leq \kappa \leq \kappa_0} |J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)| \leq c, \quad (4.43)$$

$$(\delta + K\delta^2)(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq c. \quad (4.44)$$

Aus der Beziehung (4.18) in Lemma 4.5 folgt für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$

$$\begin{aligned} J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) &= J(x^\vartheta(\cdot), u_{\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}(\cdot), \mathcal{A}_{\vartheta\bar{\alpha} + \alpha^\vartheta}) \\ &\leq J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta\bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) [J(x^\vartheta(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\ &\quad + \delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta\bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wir schätzen die einzelnen Summanden der rechten Seite ab:

Wegen (4.35) und (4.42) hat man

$$\frac{\|\xi^\vartheta(\cdot)\|_\infty}{\vartheta} \leq \sigma, \quad \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \leq \sigma.$$

Daher ist nach (4.39) für den ersten Summanden für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$ die Ungleichung

$$J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) + \vartheta [J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)\bar{x}(\cdot) + c] \quad (4.46)$$

erfüllt.

Wir betrachten den zweiten Summanden. Wegen (4.35) und (4.43) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa^\vartheta [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\ &\leq \vartheta K\delta(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \cdot \max_{1 \leq \kappa \leq \kappa_0} |J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)| \leq \vartheta c. \end{aligned}$$

Beachten wir $x^\vartheta(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot)$ für $\vartheta \rightarrow 0$ und berücksichtigen ferner, dass die Abbildung $x(\cdot) \rightarrow J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ für jedes Paar $(u(\cdot), \mathcal{A}) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ stetig differenzierbar ist, d. h.

$$J(x^\vartheta(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) - J(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \vartheta J_x(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})\bar{x}(\cdot) + o(\vartheta),$$

so erhalten wir für $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) [J(x^\vartheta(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) \\
& \quad - J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) + J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& \leq \vartheta (|\bar{\alpha}| + \sigma) \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \left[\vartheta \left(|J_x(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) \bar{x}(\cdot)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}(\cdot)| \right) + o(\vartheta) \right] \\
& = o(\vartheta).
\end{aligned}$$

Daher gilt für den zweiten Summanden die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) [J(x^\vartheta(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& = \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& \quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \alpha_\kappa^\vartheta [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& \quad + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) [J(x^\vartheta(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) \\
& \quad \quad - J(x^\vartheta(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) + J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& \leq \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] + \vartheta c + o(\vartheta). \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Schließlich gilt gemäß (4.35) und (4.44)

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} (\vartheta \bar{\alpha}_\kappa + \alpha_\kappa^\vartheta) & \leq \vartheta \delta \left(|\bar{\alpha}| + \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \right) \leq \vartheta \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}| + \frac{1}{\vartheta} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} |\alpha_\kappa^\vartheta| \right) \\
& \leq \vartheta \delta \left(\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}| + K \delta (\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \right) \\
& \leq \vartheta (\delta + K \delta^2) (\|\bar{x}(\cdot)\|_\infty + |\bar{\alpha}|) \leq \vartheta c. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Aus (4.46)–(4.48) folgt für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) & \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) + \vartheta J_x(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \bar{x}(\cdot) \\
& \quad + \vartheta \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} \bar{\alpha}_\kappa [J(x_*(\cdot), \bar{u}_\kappa(\cdot), \bar{\mathcal{A}}_\kappa) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)] \\
& \quad + 3\vartheta c + o(\vartheta).
\end{aligned}$$

Mit (4.37) erhalten wir

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) - \vartheta c + o(\vartheta)$$

für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$. ■

Für $1 \leq j \leq l'$ folgt wegen $G_j(x_*(\cdot)) = 0$ aus (4.38) und (4.40)

$$G_j(x^\vartheta(\cdot)) \leq G_j(x_*(\cdot)) + \vartheta[G_j^\circ(x_*(\cdot); \bar{x}(\cdot)) + c] \leq 0$$

für alle $0 \leq \vartheta \leq \min\{\vartheta_0, \sigma\}$. Für $l' + 1 \leq j \leq l$ hat man

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} G_j(x^\vartheta(\cdot)) = G_j(x_*(\cdot)) < 0.$$

Außerdem haben wir in Behauptung 4 gezeigt, dass für hinreichend kleine $\vartheta > 0$ die Prozesse

$$(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta)$$

die Nebenbedingungen (4.20) und (4.22) erfüllen.

Daher sind $(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta)$ für hinreichend kleine $\vartheta > 0$ zulässig in der Aufgabe (4.19)–(4.23). Ferner folgt aus Behauptung 5 für hinreichend kleine $\vartheta > 0$, dass die Relation

$$J(x^\vartheta(\cdot), u^\vartheta(\cdot), \mathcal{A}^\vartheta) < J(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$$

gilt. Wegen $x^\vartheta(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot)$ für $\vartheta \rightarrow 0$ bedeutet dies, dass der Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes kein starkes lokales Minimum sein kann.

Damit ist die Lagrangesche Multiplikatorenregel (Satz 4.11) bewiesen.

4.5 Beweisschluss

(Vgl. [25], S. 222 f.) Die Lagrange-Funktion (4.24) der Aufgabe (4.19)–(4.23) lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1) \\ = \lambda_0 J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) + \langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \rangle + \sum_{j=1}^l \lambda_j G_j(x(\cdot)) \\ + \langle l_0, H_0(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}} + \langle l_1, H_1(x(\cdot)) \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}}, \end{aligned}$$

mit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ und $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$.

Da $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (4.19)–(4.23) ist, existieren nach Satz 4.11 nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0$, $y^* \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_l \geq 0$ und $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ mit:

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1), \quad (4.49)$$

die Lagrange-Funktion nimmt in $(u_*(\cdot), \mathcal{A}_*) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \times \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ ihr Minimum an, d. h.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1) \\ &= \min_{\substack{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \\ \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])}} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}, \lambda_0, y^*, \lambda_1, \dots, \lambda_l, l_0, l_1), \end{aligned} \quad (4.50)$$

und es sind die Bedingungen

$$\lambda_j G_j(x_*(\cdot)) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.51)$$

erfüllt.

Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz B.10) existiert ein signiertes reguläres Borelsches Vektormass ν mit

$$\langle y^*, F(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t).$$

Ferner verwenden wir die Fréchet-Ableitungen der Abbildungen J und F im Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ bzw. von H_0 und H_1 in $x_*(\cdot)$ (vgl. Lemma 4.6, Lemma 4.8 und Lemma 4.10) und die Darstellung der Subdifferenziale $\partial G_j(x_*(\cdot))$ (vgl. Abschnitt 4.3.4).

Dann folgt aus (4.49), dass für alle $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \langle \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) x(\tau) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \lambda_j \cdot \int_{t_0}^{t_1} \langle g_{jx}(t, x_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\mu}_j(t) \\ &+ \langle l_0, h'_0(x_*(t_0))x(t_0) \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}} + \langle l_1, h'_1(x_*(t_1))x(t_1) \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

gilt. Darin sind $\tilde{\mu}_j$, $j = 1, \dots, l$, auf den Mengen

$$\tilde{T}_j = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_j(t, x_*(t)) = G_j(x_*(\cdot))\}$$

konzentrierte nichtnegative reguläre Borelsche Maße der Totalvariation Eins.

Wir schreiben $\mu_j = \lambda_j \cdot \tilde{\mu}_j$. Mit Blick auf (4.51) folgt, dass $\lambda_j = 0$ ist, falls $G_j(x_*(\cdot)) < 0$. Damit können nur diejenigen Maße μ_j von Null verschieden sein, die solchen Indizes entsprechen, für die $G_j(x_*(\cdot)) = 0$ gilt. In diesem Fall hat man

$$\tilde{T}_j = T_j = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_j(t, x_*(t)) = 0\}.$$

Daher kann man o. B. d. A. annehmen, alle Maße μ_j seien auf den Mengen T_j konzentriert.

Dann folgt mit partieller Integration (Satz B.13) des zweiten Summanden in (4.52)

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \lambda_0 \cdot [\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t))] \right. \\
&\quad \left. - [\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t))] \int_t^{t_1} d\nu(\tau), x(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^l \int_{t_0}^{t_1} \langle g_{j_x}(t, x_*(t)), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\mu_j(t) + \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), d\nu(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad + \left\langle h_0'^T(x_*(t_0)) l_0 - \int_{t_0}^{t_1} d\nu(t), x(t_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle h_1'^T(x_*(t_1)) l_1, x(t_1) \rangle_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt die Anwendung eines linearen Funktionals T auf die Elemente $x(\cdot)$ des Raumes $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ dar. Da alle vorkommenden Ableitungen stetig in allen Variablen und die Maße μ_j und das signierte Vektormass ν von beschränkter Totalvariation sind, ist dieser Operator beschränkt, also auch stetig.

Setzen wir $p(t) = \int_t^{t_1} d\nu(\tau)$, so erhalten wir aus der eindeutigen Darstellung eines stetigen linearen Funktionals im Raum $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ die Beziehungen (vgl. Abschnitt 2.6)

$$\begin{aligned}
p(t) &= \int_t^{t_1} \left([\chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi_x^T(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))] p(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_0 \cdot [\chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ f_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))] \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^l \int_t^{t_1} g_{j_x}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau) - h_1'^T(x_*(t_1)) l_1
\end{aligned}$$

und

$$p(t_0) = h_0'^T(x_*(t_0)) l_0.$$

Damit sind (4.6) und (4.7) gezeigt.

Die Beziehung (4.50) ist mit der folgenden äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 \cdot [\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t))] dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\
&= \min_{\substack{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \\ \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 \cdot [\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x_*(t), u(t))] dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}}(\tau) \circ \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \right]^T \cdot d\nu(t) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left[\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u(t)) \right]^T \cdot \int_t^{t_1} d\nu(\tau) \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \langle p(t), \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_0 \cdot \left[\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t)) \right] - \langle p(t), \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] dt \\
&= \min_{\substack{u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U) \\ \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])}} \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_0 \cdot \left[\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x_*(t), u(t)) \right] \right. \\
&\quad \left. - \langle p(t), \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] dt. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung führt zur Maximumsbedingung (4.8): Es bezeichnen T_f , T_φ bzw. T_p die Menge aller Punkte $t \in (t_0, t_1)$, in denen die Funktion $t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f(t, x_*(t), u_*(t))$ und die Vektorfunktionen $t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_*(t))$ bzw. $t \rightarrow p(t)$ keine Lebesgueschen Punkte besitzen. Diese Mengen sind abzählbar.

Für T_f und T_φ folgt dies aus Natanson [26], Satz 5, S. 284, da $\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f$ integrierbar und $\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi$ komponentenweise integrierbar auf $[t_0, t_1]$ sind.

Unstetigkeiten der adjungierten Funktion $p(\cdot)$ können nur durch den Term

$$\sum_{j=1}^l \int_t^{t_1} g_{j_x}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau),$$

darin sind μ_j nichtnegative reguläre Borelsche Maße und g_{j_x} stetige Abbildungen, hervorgerufen werden. Um die folgende Argumentation übersichtlicher zu führen, streichen wir in diesem Ausdruck das Summenzeichen und den Index j , und ersetzen g_{j_x} durch die stetige Vektorfunktion ψ . Da μ ein nichtnegatives reguläres Borelsches Maß ist, ist die Funktion

$$V(t) = \int_{t_0}^t d\mu(\tau), \quad t \in [t_0, t_1],$$

monoton und beschränkt, und besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeiten ([26], Satz 1, S. 229). Dann folgt für die Funktion

$$W(t) = \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\mu(\tau)$$

aus der Ungleichung

$$\|W(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|\psi(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \int_{t_0}^t d\mu(\tau) = \max_{s \in [t_0, t_1]} \|\psi(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot V(t),$$

dass diese ebenso höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten besitzt. Damit ist auch die Menge T_p höchstens abzählbar, da jeder Stetigkeitspunkt einer integrierbaren Funktion ein Lebesguescher Punkt ist ([26], Satz 6, S. 285) und $p(\cdot)$ in höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig ist.

Für jedes $v = (v^1, \dots, v^k) \in U = U_1 \times \dots \times U_k$ und $i = 1, \dots, k$ sind ferner alle $t \in (t_0, t_1)$ Lebesguesche Punkte der Funktionen $t \rightarrow f_i(t, x_*(t), v^i)$ und der Vektorfunktionen $t \rightarrow \varphi_i(t, x_*(t), v^i)$, da diese und $x_*(\cdot)$ stetig sind.

Für $j \in \{1, \dots, k\}$ bezeichnet $\mathcal{A}^j = (\mathcal{A}_1^j, \dots, \mathcal{A}_k^j)$ den Mengenvektor, dessen Komponenten $\mathcal{A}_i^j = \emptyset$ für $j \neq i$ und $\mathcal{A}_j^j = [t_0, t_1]$ sind. Dann gehört \mathcal{A}^j offenbar zu $\mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$.

Es sei $\tau \in T = (t_0, t_1) \setminus (T_f \cup T_\varphi \cup T_p)$, $j \in \{1, \dots, k\}$ und $v = (v^1, \dots, v^k) \in U = U_1 \times \dots \times U_k$. Dann gehört für jedes $0 < \lambda < t_1 - \tau$ die Abbildung $u_\lambda(\cdot)$,

$$u_\lambda(t) = u_*(t) + \chi_{[\tau, \tau+\lambda)}(t)(v - u_*(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

dem Raum $L^\infty([t_0, t_1], U)$ und die Zerlegung \mathcal{A}_λ^j , die wir über die charakteristische Funktion

$$\chi_{\mathcal{A}_\lambda^j}(t) = \chi_{\mathcal{A}^j}(t) + \chi_{[\tau, \tau+\lambda)}(t)(\chi_{\mathcal{A}^j}(t) - \chi_{\mathcal{A}^j}(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

erklären, der Menge $\mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ an. Diese Zerlegung \mathcal{A}_λ^j aktiviert auf dem Intervall $[\tau, \tau + \lambda)$ den j -ten Index.

Ferner ist τ Lebesguescher Punkt von $t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}_\lambda^j}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\lambda(t))$ und $t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}_\lambda^j}(t) \circ \varphi(t, x_*(t), u_\lambda(t))$, denn es gilt für alle $n \geq n_0$, $0 < \frac{1}{n_0} < \lambda$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda^j}(t) \circ f(t, x_*(t), u_\lambda(t)) dt &= \frac{1}{n} \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} f_j(t, x_*(t), v^j) dt \\ &\rightarrow f_j(\tau, x_*(\tau), v^j) \text{ für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da τ Lebesguescher Punkt von $t \rightarrow f_j(t, x_*(t), v^j)$ ist. Ebenso folgt dies für φ .

Wegen (4.53), diese Bedingung verwenden wir nun mit der Pontrjagin-Funktion $\chi_{\mathcal{A}} \circ H$, gilt für $u_n(\cdot)$, \mathcal{A}_n^j ,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u_*(t) + \chi_{[\tau, \tau+\frac{1}{n})}(t)(v - u_*(t)), \\ \chi_{\mathcal{A}_n^j}(t) &= \chi_{\mathcal{A}^j}(t) + \chi_{[\tau, \tau+\frac{1}{n})}(t)(\chi_{\mathcal{A}^j}(t) - \chi_{\mathcal{A}^j}(t)), \end{aligned} \quad 0 < \frac{1}{n} < t_1 - \tau,$$

die Relation

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} [\chi_{\mathcal{A}^j}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - \chi_{\mathcal{A}_n^j}(t) \circ H(t, x_*(t), u_n(t), p(t), \lambda_0)] dt \\ &= \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} [\chi_{\mathcal{A}^j}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - H_j(t, x_*(t), v^j, p(t), \lambda_0)] dt \geq 0 \end{aligned}$$

für alle n mit $\frac{1}{n} < t_1 - \tau$. Daraus folgt, da τ auch Lebesguescher Punkt der Funktionen $t \rightarrow \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0)$ und $t \rightarrow H_j(t, x_*(t), v^j, p(t), \lambda_0)$ ist, die Beziehung

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\tau}^{\tau + \frac{1}{n}} [\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) - H_j(t, x_*(t), v^j, p(t), \lambda_0)] dt \\ & = \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) - H_j(\tau, x_*(\tau), v^j, p(\tau), \lambda_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Für jedes $\tau \in T$ ist diese Ungleichung für alle $v \in U$ und alle $j \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt und daher die Maximumsbedingung (4.8) gezeigt und das Maximumprinzip bewiesen.

4.6 Eine hybride Grundaufgabe

Ein wichtiger Spezialfall der Aufgabe (4.1)–(4.5) ist die *hybride Grundaufgabe*:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (4.54)$$

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)), \quad (4.55)$$

$$h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0, \quad (4.56)$$

$$u(t) \in U = U_1 \times \dots \times U_k, \quad U_i \neq \emptyset, \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]). \quad (4.57)$$

Für diese Aufgabe erhalten wir unmittelbar aus Satz 4.3:

Satz 4.14 (Pontrjaginsches Maximumprinzip) *Wir nehmen an, dass die Funktionen und Abbildungen $f_i, \varphi_i, h_\iota, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l, \iota = 0, 1$, die Annahmen für die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe erfüllen. Ist $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (4.54)–(4.57), dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}, l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ und eine Vektorfunktion $p(\cdot), p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass*

a) die Vektorfunktion $p(\cdot)$ der adjungierten Gleichung

$$\dot{p}(t) = -\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ \varphi_x^T(t, x_*(t), u_*(t)) p(t) + \lambda_0 \cdot \chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \quad (4.58)$$

und den Transversalitätsbedingungen

$$p(t_0) = h_0'^T(x_*(t_0)) l_0, \quad p(t_1) = -h_1'^T(x_*(t_1)) l_1, \quad (4.59)$$

genügt;

b) für die Pontrjaginsche Funktion

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ H(t, x, u, p, \lambda_0) = \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot (\langle p, \varphi_i(t, x, u^i) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u^i)) \quad (4.60)$$

die Beziehung

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0) \quad (4.61)$$

für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ gilt.

4.7 Freier Anfangs- und Endzeitpunkt

Wir betrachten in diesem Abschnitt die zustandsbeschränkte hybride Aufgabe mit freiem Anfangs- und Endzeitpunkt (oder kurz *mit freier Zeit*). Im Gegensatz zur zustandsbeschränkten hybriden Aufgabe (4.1)–(4.5) bedeutet dies, dass die Abbildungen h_0 bzw. h_1 , die die Start- und Zielmannigfaltigkeit definieren, zeitabhängig sind:

$$h_\iota(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_\iota}, \quad \iota = 0, 1.$$

Zur Behandlung dieser Aufgaben gehen wir analog zu Ioffe & Tichomirov [25], S. 210 ff, vor und überführen das Problem mit freier Zeit mittels einer Substitution der Zeit in eine Aufgabe auf festem Zeitintervall.

Diese Substitution der Zeit macht es unumgänglich, dass die eingehenden Funktionen und Abbildungen bzgl. der Zeitvariablen t differenzierbar sind.

Wir übernehmen alle in Kapitel 4 getroffenen Bezeichnungen und Festlegungen und betrachten im folgenden die hybride Aufgabe mit freier Zeit:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A}) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (4.62)$$

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t)), \quad (4.63)$$

$$g_j(t, x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.64)$$

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0, \quad h_1(t_1, x(t_1)) = 0, \quad (4.65)$$

$$u(t) \in U = U_1 \times \dots \times U_k, \quad U_i \neq \emptyset, \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1]). \quad (4.66)$$

In dieser Aufgabe sind $t_1 > t_0$ frei und

$$f_i(t, x, u^i) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\varphi_i(t, x, u^i) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$g_j(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$h_\iota(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_\iota}, \quad \iota = 0, 1.$$

Wir nennen ein Quadrupel $([t_0, t_1], x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], U)$ und $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ einen *Steuerprozess*. Ein Steuerprozess heißt *zulässig* in der Aufgabe (4.62)–(4.66), wenn auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ die Funktion $x(\cdot)$ fast überall der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x(t), u(t))$$

genügt, die Phasenbeschränkungen

$$g_j(t, x(t)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$ erfüllt sind, und in den Endpunkten t_0, t_1 die Randbedingungen

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0, \quad h_1(t_1, x(t_1)) = 0$$

gelten. Einen zulässigen Steuerprozess $([t_{0*}, t_{1*}], x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ nennen wir ein *starkes lokales Minimum*, wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass für jeden anderen zulässigen Steuerprozess $([t_0, t_1], x(\cdot), u(\cdot), \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften

$$|t_0 - t_{0*}| < \varepsilon, \quad |t_1 - t_{1*}| < \varepsilon, \quad \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_\infty < \varepsilon$$

für jedes $t \in [t_{0*}, t_{1*}] \cap [t_0, t_1]$ die Ungleichung

$$\int_{t_0}^t \chi_{\mathcal{A}}(\tau) \circ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \geq \int_{t_{0*}}^t \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau$$

erfüllt ist.

Wir treffen die folgenden Annahmen für hybride Aufgaben mit freier Zeit:

Die Funktionen $f_i(t, x, u^i)$, $i = 1, \dots, k$, $g_j(t, x)$, $j = 1, \dots, l$, und die Abbildungen $\varphi_i(t, x, u^i)$, $i = 1, \dots, k$, $h_0(t, x)$, $h_1(t, x)$ besitzen folgende Eigenschaften:

- Stetigkeit in der Gesamtheit der Variablen,
- stetige Differenzierbarkeit bzgl. t und x ,
- Stetigkeit aller partiellen Ableitungen in der Gesamtheit der Variablen.

Wir werden nun zeigen, wie man mit Hilfe des Pontrjaginschen Maximumprinzips für Aufgaben mit fester Zeit (Satz 4.3) unter Verwendung der Substitution der Zeit das Maximumprinzip für hybride Aufgaben mit freier Zeit erhält:

Es sei $([t_{0*}, t_{1*}], x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum der Aufgabe (4.62)–(4.66). Wir führen eine neue unabhängige Veränderliche s ein, die das Intervall $[0, 1]$ durchläuft, und betrachten folgendes Gleichungssystem

$$t'(s) = v(s), \quad y'(s) = v(s) \cdot \left(\chi_{\mathcal{B}}(s) \circ \varphi(t(s), y(s), w(s)) \right). \quad (4.67)$$

Es sei $v(s) > 0$ für alle $s \in [0, 1]$. Ist $(t(\cdot), y(\cdot))$ eine Lösung dieses Systems, die der Steuerung $(v(\cdot), w(\cdot))$ und der k -fachen Zerlegung $\mathcal{B} \in \mathfrak{Z}^k([0, 1])$ entspricht, so ist $s \rightarrow t(s)$ eine streng wachsende stetige Funktion. Die zu ihr inverse Funktion $t \rightarrow s(t)$ ist ebenfalls stetig und streng wachsend. In diesem Fall ist $x(\cdot)$ mit $x(t) = y(s(t))$ für $t \in [t(0), t(1)]$ Lösung der Gleichung (4.63) zur Steuerung $u(\cdot)$ mit $u(t) = w(s(t))$ für $t \in [t(0), t(1)]$ und zur k -fachen Zerlegung $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t(0), t(1)])$, die durch $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{B}}(s(t))$ identifiziert wird, wobei

$$\int_{t(0)}^{t(1)} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x(t), u(t)) dt = \int_0^1 v(s) \cdot \left(\chi_{\mathcal{B}}(s) \circ f(t(s), y(s), w(s)) \right) ds \quad (4.68)$$

gilt. Weil $v(\cdot)$ auf $[0, 1]$ stets positiv ist, sind diese Behauptungen klar.

Ist umgekehrt $x(\cdot)$ eine auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ definierte Lösung der Gleichung (4.63), die der Steuerung $u(\cdot)$ und der k -fachen Zerlegung $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ entspricht, so ist

$(t(\cdot), y(\cdot))$ mit $t(s) = t_0 + (t_1 - t_0)s$, $y(s) = x(t(s))$ eine Lösung des Systems (4.67), die den Steuerungen $(v(\cdot), w(\cdot))$ mit $v(s) \equiv t_1 - t_0$, $w(s) = u(t(s))$ und der k -fachen Zerlegung $\mathcal{B} \in \mathfrak{Z}^k([0, 1])$, die durch $\chi_{\mathcal{B}}(s) = \chi_{\mathcal{A}}(t(s))$ erklärt ist, zugeordnet ist. Dabei gilt die Beziehung (4.68). Daher ist

$$(t_*(\cdot), y_*(\cdot), w_*(\cdot), v_*(\cdot), \mathcal{B}_*),$$

wobei für $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} t_*(s) &= t_{0*} + (t_{1*} - t_{0*})s, & y_*(s) &= x_*(t_*(s)), \\ v_*(s) &\equiv v_* = t_{1*} - t_{0*}, & w_*(s) &= u_*(t_*(s)), \end{aligned}$$

sind und \mathcal{B}_* durch

$$\chi_{\mathcal{B}_*}(s) = \chi_{\mathcal{A}_*}(t_*(s))$$

bestimmt ist, ein starkes lokales Minimum der Aufgabe:

$$\int_0^1 v \cdot (\chi_{\mathcal{B}}(s) \circ f(t(s), y(s), w(s))) ds \rightarrow \inf, \quad (4.69)$$

$$t'(s) = v, \quad y'(s) = v \cdot (\chi_{\mathcal{B}}(s) \circ \varphi(t(s), y(s), w(s))), \quad (4.70)$$

$$g_j(t(s), y(s)) \leq 0, \quad s \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.71)$$

$$h_0(t(0), y(0)) = 0, \quad h_1(t(1), y(1)) = 0, \quad (4.72)$$

$$v > 0, \quad w(s) \in U, \quad \mathcal{B} \in \mathfrak{Z}^k([0, 1]). \quad (4.73)$$

Dies ist bereits eine Aufgabe mit fester Zeit, auf die wir Satz 4.3 anwenden können.

Die Pontrjaginsche Funktion der Aufgabe (4.69)–(4.73) lautet

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \tilde{H}(t, x, u, v, p, q, \lambda_0) \\ &= \langle p, v \cdot \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ \varphi(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + qv - \lambda_0 v \cdot (\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ f(t, x, u)) \\ &= v \cdot (\chi_{\mathcal{A}}(t) \circ H(t, x, u, p, \lambda_0) + q), \end{aligned} \quad (4.74)$$

wobei

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) \circ H(t, x, u, p, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot H_i(t, x, u^i, p, \lambda_0) \\ &= \sum_{i=1}^k \chi_{\mathcal{A}_i}(t) \cdot \left(\langle p, \varphi_i(t, x, u^i) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f_i(t, x, u^i) \right) \end{aligned}$$

die Pontrjagin-Funktion der Aufgabe (4.62)–(4.66) ist. Weiterhin setzen wir

$$\Delta_j = \{s \in [0, 1] \mid g_j(t_*(s), y_*(s)) = 0\}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Dann existieren nach Satz 4.3 eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $\tilde{p}(\cdot)$, eine Funktion $\tilde{q}(\cdot)$ und nichtnegative, reguläre, auf den Mengen Δ_j

konzentrierte Borelsche Maße $\tilde{\mu}_j, j = 1, \dots, l$, (diese Größen verschwinden nicht gleichzeitig) derart, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned}\tilde{p}(s) &= \int_s^1 \chi_{\mathcal{B}_*}(\tau) \circ \tilde{H}_x(t_*(\tau), y_*(\tau), w_*(\tau), v_*, \tilde{p}(\tau), \tilde{q}(\tau), \lambda_0) d\tau \\ &\quad - h_{1x}^T(t_*(1), y_*(1)) l_1 - \sum_{j=1}^l \int_s^1 g_{jx}(t_*(\tau), y_*(\tau)) d\tilde{\mu}_j(\tau), \\ \tilde{p}(0) &= h_{0x}^T(t_*(0), y_*(0)) l_0, \\ \tilde{q}(s) &= \int_s^1 \chi_{\mathcal{B}_*}(\tau) \circ \tilde{H}_t(t_*(\tau), y_*(\tau), w_*(\tau), v_*, \tilde{p}(\tau), \tilde{q}(\tau), \lambda_0) d\tau \\ &\quad - \langle h_{1t}(t_*(1), y_*(1)), l_1 \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} - \sum_{j=1}^l \int_s^1 g_{jt}(t_*(\tau), y_*(\tau)) d\tilde{\mu}_j(\tau), \\ \tilde{q}(0) &= \langle h_{0t}(t_*(0), y_*(0)), l_0 \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}}\end{aligned}$$

gelten und die Maximumsbedingung

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{B}_*}(s) \circ \tilde{H}(t_*(s), y_*(s), w_*(s), v_*, \tilde{p}(s), \tilde{q}(s), \lambda_0) \\ = \max_{\substack{u^i \in U_i, v > 0 \\ 1 \leq i \leq k}} v \cdot [H_i(t_*(s), y_*(s), u^i, \tilde{p}(s), \lambda_0) + \tilde{q}(s)]\end{aligned}$$

für fast alle $s \in [0, 1]$ erfüllt ist.

Es sei $s_*(\cdot)$ die zu $t_*(\cdot)$ inverse Funktion, d. h.

$$s_*(t) = \frac{t - t_{0*}}{t_{1*} - t_{0*}}, \quad t \in [t_{0*}, t_{1*}].$$

Wenn wir jetzt die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}p(t) &= \tilde{p}(s_*(t)), \quad q(t) = \tilde{q}(s_*(t)), \\ T_j &= \{t \in [t_{0*}, t_{1*}] \mid g_j(t, x_*(t)) = 0\} = t_*(\Delta_j), \quad j = 1, \dots, l,\end{aligned}$$

eingeführen und die Bildmaße μ_j des Maße $\tilde{\mu}_j$ bei der Abbildung $t_*(\cdot)$ verwenden, dann gilt (vgl. Lemma B.14)

$$\int_{t_{0*}}^{t_{1*}} \psi(t) d\mu_j(t) = \int_0^1 \psi(t_*(s)) d\tilde{\mu}_j(s) \quad \text{für alle } \psi(\cdot) \in C([t_{0*}, t_{1*}], \mathbb{R})$$

und die Maße μ_j sind offensichtlich auf T_j konzentriert, so lassen sich die obigen Beziehungen unter Berücksichtigung von (4.74) auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
p(t) &= -h_{1x}^T(t_{1*}, x_*(t_{1*}))l_1 + \int_t^{t_{1*}} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^l \int_t^{t_{1*}} g_{jx}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau), \tag{4.75}
\end{aligned}$$

$$p(t_{0*}) = h_{0x}^T(t_{0*}, x_*(t_{0*}))l_0, \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
q(t) &= -\langle h_{1t}(t_{1*}, x_*(t_{1*})), l_1 \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} + \int_t^{t_{1*}} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_t(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^l \int_t^{t_{1*}} g_{jt}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau), \tag{4.77}
\end{aligned}$$

$$q(t_{0*}) = \langle h_{0t}(t_{0*}, x_*(t_{0*})), l_0 \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}} \tag{4.78}$$

und wir erhalten die Maximumsbedingung

$$\begin{aligned}
v_* \cdot \left(\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) + q(t) \right) \\
= \max_{\substack{u^i \in U_i, v > 0 \\ 1 \leq i \leq k}} v \cdot [H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0) + q(t)]. \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Aus (4.79) folgt

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0). \tag{4.80}$$

Ferner erhalten wir wegen $0 < v_* < \infty$ aus (4.79) die Beziehung

$$\max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0) = -q(t).$$

Im Folgenden verwenden wir die Funktion

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0).$$

Diese heißt *Hamilton-Funktion*.

Durch Vergleich mit (4.77) und (4.78) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda_0) &= \langle h_{1t}(t_{1*}, x_*(t_{1*})), l_1 \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} \\
&\quad - \int_t^{t_{1*}} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_t(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\
&\quad + \sum_{j=1}^l \int_t^{t_{1*}} g_{jt}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau), \tag{4.81}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(t_{0*}, x_*(t_{0*}), p(t_{0*}), \lambda_0) = -\langle h_{0t}(t_{0*}, x_*(t_{0*})), l_0 \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}}. \tag{4.82}$$

Nach Lemma B.16 ist die Funktion $\mathcal{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda_0)$ von beschränkter Variation und linksseitig stetig.

Zusammenfassend lautet damit das Maximumprinzip für Aufgaben mit freier Zeit:

Satz 4.15 (Pontrjaginsches Maximumprinzip, freie Endzeit) *Es seien für die Funktionen und Abbildungen $f_i, \varphi_i, g_j, h_\nu, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l, \nu = 1, 2$, die Annahmen für Aufgaben mit freien Endzeiten erfüllt. Ist $([t_{0*}, t_{1*}], x_*(\cdot), u_*(\cdot), \mathcal{A}_*)$ ein starkes lokales Minimum in der Aufgabe (4.62)–(4.66), dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}, l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $p(\cdot), p: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, und auf den Mengen $T_j = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_j(t, x_*(t)) = 0\}$ konzentrierte nichtnegative reguläre Borelsche Maße $\mu_j, j = 1, \dots, l$, (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass gilt:*

a) *Die Vektorfunktion $p(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung (4.75) und es gilt (4.76):*

$$\begin{aligned} p(t) &= -h_{1x}^T(t_{1*}, x_*(t_{1*}))l_1 + \int_t^{t_{1*}} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \int_t^{t_{1*}} g_{jx}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau), \\ p(t_{0*}) &= h_{0x}^T(t_{0*}, x_*(t_{0*}))l_0. \end{aligned}$$

b) *Für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ ist die Beziehung (4.80)*

$$\chi_{\mathcal{A}_*}(t) \circ H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{\substack{u^i \in U_i \\ 1 \leq i \leq k}} H_i(t, x_*(t), u^i, p(t), \lambda_0)$$

erfüllt.

c) *Die Hamilton-Funktion ist eine Funktion beschränkter Variation, die linksseitig stetig ist, und es gelten (4.81) und (4.82):*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda_0) &= \langle h_{1t}(t_{1*}, x_*(t_{1*})), l_1 \rangle_{\mathbb{R}^{s_1}} \\ &\quad - \int_t^{t_{1*}} \chi_{\mathcal{A}_*}(\tau) \circ H_t(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau + \sum_{j=1}^l \int_t^{t_{1*}} g_{jt}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_j(\tau), \\ \mathcal{H}(t_{0*}, x_*(t_{0*}), p(t_{0*}), \lambda_0) &= -\langle h_{0t}(t_{0*}, x_*(t_{0*})), l_0 \rangle_{\mathbb{R}^{s_0}}. \end{aligned}$$

Ebenso wie in Aufgaben mit fester Zeit ist die adjungierte Funktion $p(\cdot)$ von beschränkter Variation und linksseitig stetig.

Kapitel 5

Analyse eines Modells privater Altersvorsorge

Zur Anwendung der in dieser Arbeit dargelegten mathematischen Theorie folgen wir dem Vorschlag von G. Feichtinger und betrachten ein mehrstufiges Problem der Theorie der Optimalen Steuerungen. Im Folgenden wollen wir mit Hilfe des Maximumprinzips – speziell Satz 4.14, das Maximumprinzip für die hybride Grundaufgabe – ein Modell privater Altersvorsorge diskutieren.

In der Modellierung berücksichtigen wir nur die Finanzierung durch Privatkapital. Die Auswirkungen der gesetzlichen Rente aus dem Umlageverfahren und die daraus resultierenden Konflikte zwischen verschiedenen Altersgruppen beziehen wir nicht ein.

5.1 Das Modell

In diesem Modell betrachten wir die Entwicklung einer (großen) Gruppe gleichaltriger Menschen. Diese *Altersgruppe* $S(\cdot)$ bestehe zum Zeitpunkt $t = 0$ aus S_0 Individuen. Gemäß einer Überlebensfunktion, z. B. der Gompertzschen Überlebensfunktion der Versicherungsmathematik, vgl. Heuser [23], S. 70 f, genüge $S(\cdot)$ der Differentialgleichung

$$\dot{S}(t) = -\mu(t) S(t)$$

mit der Sterbeintensität $\mu(t) > 0$. Wir nehmen an, für diese Altersgruppe bestehe ein biologisches Maximum $T > 0$ für die Lebenszeit¹.

Es bezeichne $l(t) \cdot L(t)$ das durchschnittliche Gehalt, mit der die Altersgruppe S zum Zeitpunkt t für ihre Arbeit entlohnt werden würde, falls diese mit der *relativen Arbeitszeit* $l(t) \in [0, 1]$ zum *durchschnittlichen Lohn* $L(t)$ arbeiten geht. Wir nehmen implizit an, dass $l(t) \cdot L(t)$ bereits um gesetzliche und sonstige Abgaben, sowie um den minimalen Lebensunterhalt bereinigt ist.

¹Dies kann mit der verwendeten Überlebensfunktion nicht exakt beschrieben werden, da die Lösung $S(\cdot)$ der Differentialgleichung für alle $t > 0$ positiv ist. Allerdings sei diese Funktion eine ausreichend gute Näherung.

Die Altersgruppe kann sich zu jedem Zeitpunkt t entscheiden, einen Teil $v(t) \cdot l(t) \cdot L(t)$ vom Gehalt mit der *Vorsorgerate* $v(t) \in [0, 1]$ in einen *privaten Vorsorgepool* $A(\cdot)$ zu investieren und den verbliebenen Rest $(1 - v(t)) \cdot l(t) \cdot L(t)$ zu konsumieren. Entscheidet sich die Altersgruppe Vorsorge zu schaffen, so wird nach Eintritt in die Rente zum Zeitpunkt $\tau \in (0, T)$ ab diesem Zeitpunkt das angesparte Kapital mit einem zu bestimmenden konstanten Betrag $\bar{a} = \bar{a}(\tau, A(\tau))$ über das restliche Zeitintervall $[\tau, T]$ an jedes noch lebende Individuum der Altersgruppe ausgezahlt. Außerdem berücksichtigen wir die Verzinsung des Kapitalstocks A . Die Altersgruppe erhält zum Zeitpunkt t die effektive Zinsrate $r \cdot (1 + \mu(t))$. Diese wurde um die variable Rate $r \cdot \mu(t)$ erhöht, um Ausfallrisiken auszugleichen². Für die private Altersvorsorge $A(\cdot)$ liefert dieser Ansatz die Dynamik

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v(t) \cdot l(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in (0, \tau), \\ -\bar{a}(\tau, A(\tau)) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

Die Funktion $A(\cdot)$ muss den Randbedingungen $A(0) = 0$ und $A(T) = 0$ genügen, da der Vorsorgepool erst aufgebaut werden muss und von dieser Vorsorge alles an die Altersgruppe wieder ausgezahlt werden soll.

Die Altersgruppe ist nun bestrebt, ihren Nutzen

$$\int_0^\tau \left[U\left((1 - v(t)) \cdot l(t) \cdot L(t)\right) - V(t, l(t)) \right] \cdot S(t) \cdot e^{-rt} dt \\ + \int_\tau^T \left[U\left(\bar{a}(\tau, A(\tau))\right) - V(t, 0) \right] \cdot S(t) \cdot e^{-rt} dt$$

über alle zulässigen Steuerungen $v(\cdot), l(\cdot)$ und das Pensionsalter $\tau \in (0, T)$ zu maximieren. Hierin beschreibt $U = U(C)$ eine vom Konsum $C = (1 - v) \cdot l \cdot L$ abhängige Nutzenfunktion und $V = V(t, l)$ eine vom Alter und der geleisteten Arbeit abhängiges „Altersleid“. In diesen Begriff „Altersleid“ fließen z. B. gesundheitliche Schäden körperlich schwer arbeitender Menschen, die finanziellen Aufwendungen für die Gesundheitsfürsorge oder – wie es der Begriff schon sagt – altersbedingte Leiden ein.

5.2 Anwendung des PMP

Die Aufgabe der Altersvorsorge des letzten Abschnitts formulieren wir als ein hybrides Steuerungsproblem und wollen diese Situation daraufhin untersuchen, ob sich unter gewissen Voraussetzungen private Vorsorge lohnt und ob ein optimaler Zeitpunkt τ für den Austritt aus dem Arbeitsleben existiert.

Das Modell, das wir untersuchen werden, lautet

$$\int_0^T \left\{ \begin{array}{l} \left[U\left((1 - v(t)) \cdot l(t) \cdot L(t)\right) - V(t, l(t)) \right] \cdot S(t) \cdot e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_1, \\ \left[U\left(\bar{a}(\tau, A(\tau))\right) - V(t, 0) \right] \cdot S(t) \cdot e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_2, \end{array} \right\} dt \rightarrow \sup, \quad (5.1)$$

²Näher gehen wir darauf im Abschnitt 5.6 ein.

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v(t) \cdot l(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ -\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$A(0) = 0, \quad A(T) = 0, \quad \bar{a} = \bar{a}(\tau, A(\tau)), \quad (5.3)$$

$$\dot{S}(t) = -\mu(t) \cdot S(t), \quad S(0) = S_0, \quad \mu(t) > 0, \quad (5.4)$$

$$v(t), l(t) \in [0, 1], \quad \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \in \mathfrak{Z}^2([0, T]). \quad (5.5)$$

Zulässige Steuerungen $v(\cdot), l(\cdot)$ gehören in dieser Aufgabe dem Raum $L^\infty([0, T], [0, 1])$ an.

Die Aufgabe (5.1)–(5.5) gibt die Modellbeschreibung in Abschnitt 5.1 nicht exakt wieder. Die Auszahlung \bar{a} hängt nämlich nicht nur vom Wert $A(t)$ des Vorsorgepools, sondern auch vom Wechselzeitpunkt ab. Daher ist \bar{a} durch die Wahl von $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ beeinflussbar und eine steuerbare Zustandsgröße. Trotzdem fassen wir in unseren Betrachtungen diese Größe als einen Parameter auf, denn die Bedeutung dieses Kapitels ist die Untersuchung eines mathematischen Modells mit Hilfe der theoretischen Resultate dieser Arbeit.

Für die Abbildungen nehmen wir an, dass diese folgende Eigenschaften besitzen:

- $L(t)$ sei stetig differenzierbar, streng monoton wachsend, positiv und beschränkt;
- $\mu(t)$ sei positiv und auf $[0, T]$ integrierbar;
- $U(C)$ sei stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und streng konkav;
- $V(t, l)$ sei in der Gesamtheit der Variablen stetig differenzierbar und streng konvex.

Ferner sei o. B. d. A. $V(t, 0) = 0$ auf $[0, T]$ und wir vernachlässigen diesen Term im Integranden der zweiten Strategie.

Wir wenden Satz 4.14 an: Die adjungierte Funktion $p(\cdot)$ genügt in beiden Strategien der adjungierten Gleichung

$$\dot{p}(t) = -r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot p(t) \quad (5.6)$$

zur Randbedingung $p(T) \in \mathbb{R}$. Die Maximumsbedingung, die für fast alle $t \in [0, T]$ erfüllt ist, lautet

$$\max_{\substack{v, l \in [0, 1] \\ i=1, 2}} \left\{ \begin{array}{l} p(t) \cdot [v \cdot l \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t)] \\ p(t) \cdot [-\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t)] \\ + \lambda_0 \cdot [U((1 - v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l)] \cdot S(t) \cdot e^{-rt}, \quad i = 1 \\ + \lambda_0 \cdot U(\bar{a}) \cdot S(t) \cdot e^{-rt}, \quad i = 2 \end{array} \right\}. \quad (5.7)$$

Aus der adjungierten Gleichung (5.6) folgt

$$p(t) = p(T) \cdot \exp \left\{ - \int_T^t r \cdot (1 + \mu(\xi)) d\xi \right\}.$$

Wir setzen

$$M(t) = \exp \left\{ r \cdot \int_t^T \mu(\xi) d\xi \right\}.$$

Diese Funktion ist nichtnegativ, wegen der Integrierbarkeit von $\mu(\cdot)$ beschränkt, streng monoton fallend und es gilt $M(T) = 1$. Mit dieser Funktion schreiben wir die Adjungierte in der Form

$$p(t) = p(T) \cdot e^{-r(t-T)} \cdot M(t). \quad (5.8)$$

Aus der Untersuchung im Anhang C.1 folgt, dass sich die Altersgruppe nur dann entscheidet Vorsorge zu treffen, wenn o. B. d. A. $\lambda_0 = 1$ und $p(T) > 0$ gilt.

In der Maximumsbedingung (5.7) haben beide Strategien den Term

$$p(t) \cdot r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t)$$

gemein und den positiven Faktor $S(t) \cdot e^{-rt}$ können wir vor die Maximierung ziehen. Somit ist (5.7) für fast alle $t \in [0, T]$ äquivalent zu

$$\max \left\{ \max_{v, l \in [0, 1]} \left[p(T) e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l) \right], \right. \\ \left. U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T) e^{rT} \cdot M(t) \right\}. \quad (5.9)$$

Die Aufgabe (5.1)–(5.5) wollen wir auf Vorsorge untersuchen. D. h., dass wir nur den Fall diskutieren, wo $A(\cdot) \neq 0$ gilt und ein Wechsellpunkt $\tau \in (0, T)$ von der Strategie $i = 1$ in die zweite Strategie existiert. Daher fassen wir nur die Situation als sinnvoll auf, in der ein Vorsorgepool aufgebaut wird und von diesem auch (nämlich für $t \geq \tau$) Gebrauch gemacht wird.

Abschließend geben wir in diesem Abschnitt eine Interpretation der Zahl $p(T)$ an. Wir beziehen uns dabei auf die ökonomische Deutung des Maximumprinzips in Feichtinger & Hartl [17], S. 28 ff; insbesondere auf die Ausführungen auf S. 29: Die Pontrjagin-Funktion

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \lambda_0 f(t, x, u)$$

„beschreibt die totale Auswirkung der Entscheidung u zum Zeitpunkt t , die in einen direkten und indirekten Effekt zerlegt werden kann:

- der unmittelbare Effekt der Entscheidung u besteht in Verbindung mit dem herrschenden Zustand x darin, dass die Profitrate $f(t, x, u)$ erzielt wird,
- die indirekte Wirkung von u manifestiert sich im Wert der Änderung der Kapitalbestände.

Somit mißt H die Profitrate ergänzt um den indirekten Gewinn, der aus der Wertänderung des Kapitalstocks resultiert.“

Betrachten wir in unserem Beispiel die Abbildung

$$(l, v) \rightarrow p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l),$$

diese resultiert aus den obigen Umformungen in der Maximumsbedingung (5.9) bzgl. der Strategie $i = 1$, so bemisst $U((1-v) \cdot l \cdot L(t))$ den direkten und $p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t)$ den indirekten Effekt von v , d. h. der Entscheidung für das Alter zu sparen. Wählen wir $v = 0$, so maximieren wir den momentanen Nutzen zum Zeitpunkt t und sparen nicht für das Alter. Wählen wir $v = 1$, so ist der momentane Nutzen minimal, aber die Änderung des Kapitalpools zum Zeitpunkt t wird maximiert. Die Entscheidung fürs Alter zu sparen fällt in unserem Modell umso leichter, je größer der positive Faktor $p(T)$ ist. Daher stellt diese Zahl einen *Anreiz* privat vorzusorgen dar. Die Funktion $t \rightarrow p(T)e^{rT} \cdot M(t)$ nennen wir in diesem Zusammenhang die *Anreizfunktion*.

5.3 Optimale Steuerungsraten in einem Zeitpunkt

Das Modell (5.1)–(5.5) wurde in einem recht allgemeinen Rahmen aufgestellt. Diese Allgemeinheit hat den Nachteil, dass wir nur sehr wenige konkrete Aussagen treffen können. Daher beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf die Diskussion der Maximumsbedingung (5.9) in einem Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Dies wird uns Informationen über die Wahl der optimalen Steuerungen $l_*(\cdot), v_*(\cdot)$ zu diesem Zeitpunkt liefern.

Wir lenken nun den Fokus auf die Untersuchung der Strategie $i = 1$ in der Maximumsbedingung (5.9), d. h. auf

$$\max_{v, l \in [0, 1]} \left[p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l) \right]. \quad (5.10)$$

In dieser Strategie legt die Altersgruppe ihre Vorsorge- $v(\cdot)$ und ihre Arbeitspolitik $l(\cdot)$ fest. Diese haben wir im Anhang C.2 mit Hilfe der Funktion

$$F(l, v) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l)$$

untersucht und in C.3 die Resultate zusammengefasst.

Wir treffen die grundlegende Annahme, dass

- $U'(0)$ „hinreichend groß“³ und endlich ist; insbesondere sei $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(0)$.

Wegen $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(0)$ – deswegen ist $F_v(l_*, 1) < 0$ und es entfällt $v_*(t) = 1$ – sind zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ eine der folgenden Situationen möglich⁴:

³Eine drastische mathematische Formulierung von „hinreichend groß“ ist die zu den Inada-Bedingungen gehörende Annahme $U'(0) = \infty$ (vgl. Barro [2], S. 16). Diese Bedingung würde aber der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit der Abbildungen in der Formulierung des Satzes 4.14 widersprechen.

⁴Die Unterscheidung der verschiedenen Fälle ist nur in den Situationen „teilweise Vorsorge“ mit $v_*(t) = 0$ oder $v_*(t) = 1$ bzw. „Teilzeit arbeiten“ mit $l_*(t) = 0$ oder $l_*(t) = 1$ nicht eindeutig. Allerdings hängen in diesen nicht eindeutig festgelegten Situation die Berechnungen nicht von dem gewählten Fall ab.

- „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“, d. h. $l_*(t) = 1, v_*(t) = 0$;
- „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“, d. h. $l_*(t) = 1, v_*(t) \in [0, 1]$;
- „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“, d. h. $l_* \in [0, 1], v_* = 0$;
- „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“, d. h. $l_* \in [0, 1], v_* \in [0, 1]$;
- „nicht arbeiten“, d. h. $l_* = 0, v_* = 0$.

Im Anhang C.3 sind Bedingungen angegeben, mit deren Hilfe sich die einzelnen Fälle voneinander abgrenzen lassen.

Zum Abschluss dieser allgemein gehaltenen Betrachtungen kommen wir zur Berechnung der optimalen Steuerungen in den Fällen, in denen $l_*(t)$ oder bzw. und $v_*(t)$ Werte aus dem Inneren des Intervalls $[0, 1]$ annehmen kann bzw. können. Diese Fälle können eintreten, wenn zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ für eine Maximalstelle (l_*, v_*) der Funktion $F(l, v)$ eine der beiden oder beide Ableitungen

$$\begin{aligned} F_l(l_*, v_*) &= U'((1 - v_*) \cdot l_* \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*), \\ F_v(l_*, v_*) &= [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'((1 - v_*) \cdot l_* \cdot L(t))] \cdot l_* \cdot L(t), \end{aligned}$$

gleich Null ist bzw. sind.

Wir definieren die Funktion $\Lambda = \Lambda(t)$ implizit über die Bedingung

$$U'(\Lambda(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t).$$

Diese Funktion ist eindeutig festgelegt, positiv und streng monoton wachsend, da $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(0)$, $C \rightarrow U'(C)$ streng monoton fallend und $t \rightarrow p(T)e^{rT} \cdot M(t)$ streng monoton fallend ist.

Dann können wir $v_*(t)$ im Fall „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“, d. h. wegen $F_v(1, v_*) = 0 \Leftrightarrow p(T)e^{rT} \cdot M(t) = U'((1 - v_*(t)) \cdot L(t))$, durch

$$(1 - v_*(t)) \cdot L(t) = \Lambda(t) \implies v_*(t) = 1 - \frac{\Lambda(t)}{L(t)}$$

bestimmen. Im Fall „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“ ist $v_*(t) = 0$ und die Steuerung $l_*(t)$ können wir aus der Gleichung

$$F_l(l_*, 0) = U'(l_* \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*) = 0$$

eindeutig berechnen, da $l \rightarrow U'(l \cdot L(t))$ streng konkav und $l \rightarrow V(t, l)$ streng konvex ist.

Im Fall „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“ suchen wir Nullstellen der Ableitungen $F_l(l, v)$ und $F_v(l, v)$. Aus zweiterer erhalten wir wegen

$$(1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t) = \Lambda(t),$$

dass das Produkt $(1 - v_*(t)) \cdot l_*(t)$ gleich $\frac{\Lambda(t)}{L(t)}$ ist. Setzen wir dies in die Ableitung F_l ein, so ergibt sich die eindeutig lösbare Gleichung

$$U'(\Lambda(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) = 0$$

für $l_*(t)$; und damit ferner $v_*(t) = 1 - \frac{\Lambda(t)}{l_*(t) \cdot L(t)}$.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Existenz des Umschaltpunktes τ von der ersten in die zweite Strategie nicht gegeben sein muss. Die Altersgruppe entscheidet sich evtl. zu wechseln, falls es in der Maximumsbedingung (5.9) einen Zeitpunkt τ mit

$$\begin{aligned} & p(T)e^{rT} \cdot M(\tau) \cdot v_*(\tau) \cdot l_*(\tau) \cdot L(\tau) + U((1 - v_*(\tau)) \cdot l_*(\tau) \cdot L(\tau)) - V(\tau, l_*(\tau)) \\ &= U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T)e^{rT} \cdot M(\tau) \end{aligned}$$

gibt. Da U streng konkav ist, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) - x \cdot p(T)e^{rT} \cdot M(\tau) = -\infty.$$

D. h., dass auch nach der Entscheidung nicht mehr zu arbeiten, der Nutzen bemessen mit der Funktion U als zu gering aufgefasst werden kann und deswegen die Altersgruppe nicht in die zweite Strategie wechseln wird.

5.4 Spezifikation der Abbildungen

Als erstes nehmen wir an, der Lohn steigt exponentiell und angepasst an die Zinsrate, d. h. $\dot{L}(t) = r \cdot L(t)$ mit $L(0) = L_0 > 0$. Daraus folgt

$$L(t) = L_0 \cdot e^{rt}.$$

Für die Nutzenfunktion U verwenden wir den Zugang $U(C) = \ln C$. Allerdings existiert der Logarithmus im Nullpunkt nicht. Deswegen setzen wir die Nutzenfunktion für C nahe bei Null stetig, stetig differenzierbar und streng konkav mit einer Parabel fort:

$$U(C) = \begin{cases} \ln C, & C \geq C_0, \\ C \cdot \left(\frac{1}{C_0} + 1 \right) - \frac{C^2}{2C_0} + c_0, & 0 \leq C \leq C_0, \end{cases}$$

mit der Konstanten $c_0 = \ln C_0 - \left(1 + \frac{1}{2}C_0 \right)$. Dies liefert für die Ableitung die stetige und streng monoton wachsende Funktion

$$U'(C) = \begin{cases} \frac{1}{C}, & C \geq C_0, \\ \frac{1}{C_0} + \left(1 - \frac{C}{C_0} \right), & 0 \leq C \leq C_0. \end{cases}$$

Für die Zahl C_0 sei

$$0 < C_0 < \frac{1}{p(T)e^{rT} \cdot M(0)}$$

erfüllt. Damit ist die Annahme $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(0)$ gesichert.

In der Abbildung $V(t, l)$ des Arbeitsleides, so nehmen wir an, lassen sich die Variablen t und l separieren:

$$V(t, l) = V_1(t) \cdot V_2(l).$$

Wir setzen $V_2(l) = l \cdot (l + 1)$. Dann gilt $V(t, 0) = 0$ für alle t und $V_l(t, l) = V_1(t) \cdot (1 + 2l)$ steigt umso schneller, je mehr die Arbeitsgruppe arbeitet.

Für die Funktion V_1 machen wir mit einer positiven und streng monoton wachsenden Funktion α den Ansatz

$$\dot{V}_1(t) = \alpha(t) \cdot V_1(t).$$

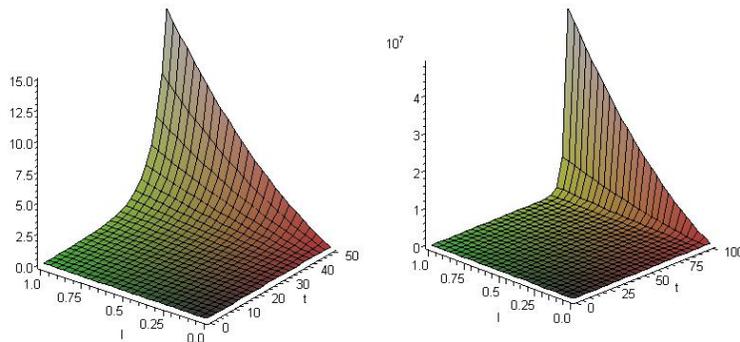
Dann wächst V_1 umso schneller, je größer t ist. Dies liefert für den linearen Ansatz $\alpha(t) = \frac{\varrho_2}{2} \cdot t$ und mit dem Anfangswert $V_1(0) = \varrho_1$:

$$V_1(t) = \varrho_1 \cdot e^{\varrho_2 \cdot t^2} \implies V(t, l) = \varrho_1 \cdot l(l + 1) \cdot e^{\varrho_2 \cdot t^2}.$$

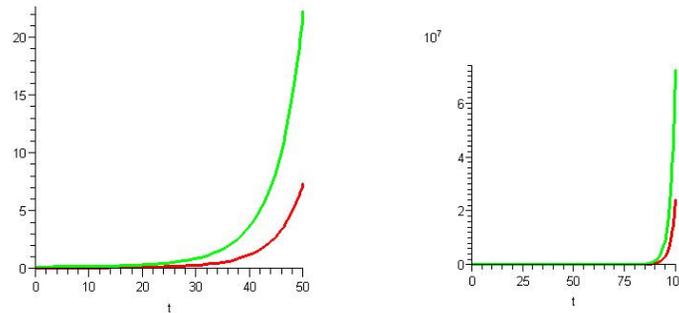
In den Beispielen betrachten wir eine Altersgruppe, die zum Zeitpunkt $t = 0$ ihre Ausbildung beendet hat und in das Arbeitsleben wecheln könnte, und untersuchen die Entwicklung in den nächsten $T = 100$ Jahren. Zu Beginn der Planung seien nach allen Abgaben noch $L_0 = 1$ Geldeinheit übrig. Für die Zinsrate nehmen wir $r = 0,02$ an. Ferner wählen wir die Parameter

$$\varrho_1 = 0,05, \quad \varrho_2 = 2 \cdot 10^{-3}, \quad C_0 = 10^{-2}.$$

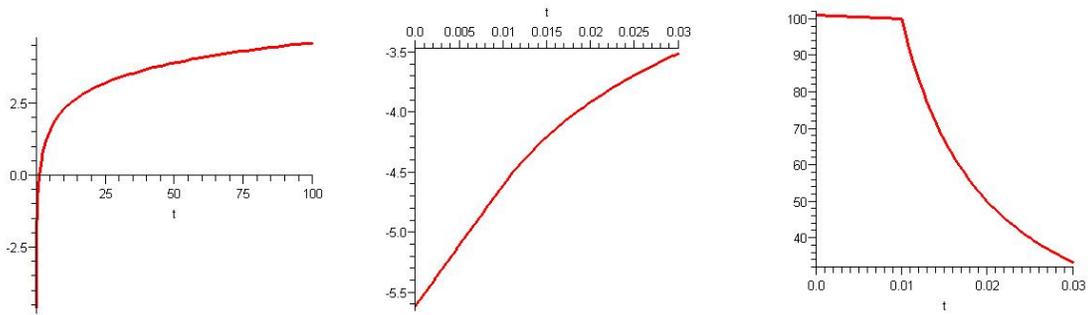
In der folgenden Abbildung ist links die Fläche $V(t, l)$ für $t \in [0, 50]$ dargestellt und der rechte Graph verdeutlicht, wie stark $V(t, l)$ mit der Zeit wächst.



In der nächsten Abbildung sind die partiellen Ableitungen $V_l(t, 0)$ (rot) und $V_l(t, 1)$ (grün) auf $[0, 50]$ bzw. $[0, 100]$ zu sehen.



Die nachstehenden Graphen stellen die Nutzenfunktion U und die stetige Fortsetzung von U bzw. U' in $C_0 = 0,01$ mit der streng konkaven Parabel dar.



Die Entwicklung der Altersgruppe beschreiben wir angenähert durch eine Gompertzsche Überlebensfunktion

$$\dot{S}(t) = -\mu(t) \cdot S(t) \quad \text{mit} \quad \mu(t) = \lambda e^{\mu t}.$$

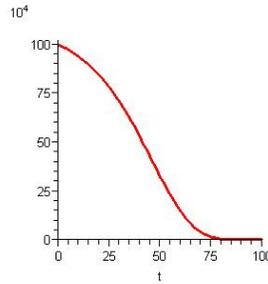
Daraus folgt für S :

$$S(t) = S_0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu t} - 1)}, \quad t \in [0, 100].$$

Zur Bestimmung der Parameter λ, μ nehmen wir an, dass die Altersgruppe zu Beginn aus $S_0 = 10^6$ Individuen besteht und zum Zeitpunkt $t = T$ eine gute Näherung für die Anzahl überlebender Individuen liefert. Mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ und $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ erhalten wir

$$\mu(t) = \frac{5}{1000} \cdot e^{0,05t}, \quad S(t) = 10^6 \cdot e^{-0,1(e^{0,05t} - 1)}, \quad S(100) < 1.$$

Das Schaubild von S ist in der nachstehenden Abbildung zu sehen.



Ferner erhalten wir aus diesen Annahmen für die Funktion M :

$$M(t) = \exp \left\{ r \cdot \int_t^{100} \mu(\xi) d\xi \right\} = \exp \left\{ \frac{2}{1000} (e^5 - e^{0,05 \cdot t}) \right\}, \quad M(0) \approx 1,34.$$

5.5 Beispiele mit fester Zinsrate

In den folgenden Beispielen nehmen wir an, dass in der Dynamik (5.2) der Term $r \cdot \mu(t) \cdot A(t)$ entfällt. Ferner verwenden wir aus dem letzten Abschnitt die Abbildungen

$$L(t) = e^{0,02t}, \quad V(t, l) = \frac{1}{20} \cdot l(l+1) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}, \quad S(t) = 10^6 \cdot e^{-0,1(e^{0,05t} - 1)},$$

sowie die stückweise definierte Nutzenfunktion

$$U(C) = \begin{cases} \ln C, & C \geq 0,01, \\ 101 \cdot C - \frac{C^2}{2 \cdot 0,01} + \ln 0,01 - \left(1 + \frac{0,01}{2}\right), & 0 \leq C \leq 0,01, \end{cases}$$

und untersuchen die Aufgabe

$$\int_0^T \left\{ \begin{array}{l} \left[U \left((1 - v(t)) \cdot l(t) \cdot L(t) \right) - V(t, l(t)) \right] \cdot S(t) e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_1, \\ U(\bar{a}) \cdot S(t) e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_2, \end{array} \right\} dt \rightarrow \sup, \quad (5.11)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v(t) \cdot l(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ -\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$A(0) = 0, \quad A(T) = 0, \quad \bar{a} = \bar{a}(\tau, A(\tau)), \quad (5.13)$$

$$v(t), l(t) \in [0, 1], \quad \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \in \mathfrak{Z}^2([0, T]). \quad (5.14)$$

Zur Berechnung der optimalen Steuerungen benutzen wir die Funktion $\Lambda = \Lambda(t)$, die implizit über die Bedingung (ohne die variable Zinsrate $r \cdot \mu(t)$ ist die Funktion $M(t) = 1$ auf $[0, T]$)

$$U'(\Lambda(t)) = p(T)e^{rT}$$

definiert ist (vgl. Abschnitt 5.3). Aus den Setzungen folgt $\Lambda(t) > C_0$ und es gilt

$$U'(\Lambda(t)) = \frac{1}{\Lambda(t)} \implies \Lambda(t) = \frac{1}{p(T)e^{rT}}.$$

Wir bestimmen nun, wie sich die Altersgruppe auf dem Zeitintervall $[0, T]$ verhält. Dazu verwenden wir die schematische Übersicht im Anhang C.3 über die verschiedenen Fälle, die sich aus dem Verhalten der Funktion (mit $M(t) = 1$)

$$F(l, v) = p(T)e^{rT} \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l)$$

(vgl. die Maximumsbedingung (5.9) bzgl. der Strategie $i = 1$) zu einem festen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ergeben. In diesen Kriterien taucht die Ableitung $V_l(t, l)$ auf. Diese lautet

$$V_l(t, l) = 0,05 \cdot (1 + 2l) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}.$$

► Der Anreiz nach Vorsorge $p(T)$ sei gleich $\frac{1}{12}$.

Phase I: „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten $F_l(1, 0) \geq 0$ und $F_v(1, 0) \leq 0$ wegen

$$U'(L_0) \cdot L_0 - V_l(0, 1) = 1 - 0,15 > 0 \quad \text{und} \quad p(T)e^{rT} = \frac{e^2}{12} < U'(L_0) = 1.$$

Daher beginnt die Altersgruppe den Planungszeitraum mit „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“. Dieses Verhalten ändert sich, falls eine dieser Ungleichungen aktiv wird. Dies ist erstmals zum Zeitpunkt t_1 mit (vgl. $F_v(1, 0) = 0$)

$$p(T)e^{rT} = U'(L(t_1)) = \frac{1}{L(t_1)} \iff \frac{e^2}{12} \cdot e^{0,02t_1} = 1 \iff t_1 = 50 \cdot \ln\left(\frac{12}{e^2}\right) \approx 24,25$$

der Fall, da für alle $0 \leq t \leq t_1$ die Relation

$$F_l(1, 0) = U'(L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, 1) = 1 - 0,15 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} > 0$$

gilt.

Phase II: „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“

Für gewisse $t > t_1$ gelten die Relationen $F_v(1, 0) > 0$ und $F_v(1, 1) < 0$. Daher ändert die Altersgruppe in t_1 ihr Verhalten in „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“. Die optimalen Vorsorgeraten berechnen sich in dieser Phase gemäß

$$v_*(t) = 1 - \frac{\Lambda(t)}{L(t)} = 1 - \frac{12}{e^2} \cdot e^{-0,02t}.$$

Ferner gilt in dieser Phase $F_v(1, v_*(t)) = 0$, d. h. $U'((1 - v_*(t)) \cdot L(t)) = p(T)e^{rT}$, da $v_*(t)$ aus dem Inneren des Intervalls $[0, 1]$ stammt. Ersetzen wir dies in $F_l(1, v_*(t))$, dann erhalten wir

$$F_l(1, v_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot L(t) - V_l(t, 1).$$

An dem Verhalten „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“ hält die Altersgruppe fest, solange

$$p(T)e^{rT} \cdot L(t) - V_l(t, 1) = \frac{e^2}{12} \cdot e^{0,02t} - 0,15 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} \geq 0$$

ist. Aus der Gleichung

$$\frac{e^2}{12} \cdot e^{0,02t_2} - 0,15 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t_2^2} = 0$$

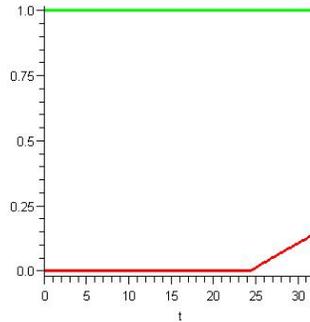
folgt

$$t_2 \approx 32,04.$$

Wir erhalten damit

$$v_*(t) = 1 - \frac{12}{e^2} \cdot e^{-0,02t} \text{ auf } [t_1, t_2].$$

In der folgenden Abbildung sind die Steuerungen $l_*(\cdot)$ in grüner und $v_*(\cdot)$ in roter Farbe auf $[0, t_2]$ dargestellt.



Phase III: „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“

Für $t > t_2$ gilt

$$F_l(1, v_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot L(t) - V_l(t, 1) = \frac{e^2}{12} \cdot e^{0,02t} - 0,15 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} < 0$$

und die Altersgruppe wechselt in „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“. Die optimalen relativen Arbeitszeiten $l_*(t)$ berechnen sich in dieser Phase anhand der Gleichung

$$F_l(l_*(t), v_*(t)) = U'((1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) = 0.$$

Wir verwenden $U'((1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) = p(T)e^{rT}$ aus $F_v(l_*(t), v_*(t)) = 0$ und erhalten

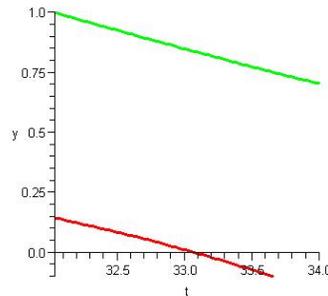
$$\begin{aligned} V_l(t, l_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot L(t) &\iff 0,05 \cdot (1 + 2l_*(t)) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} = \frac{e^2}{12} \cdot e^{0,02t} \\ &\iff l_*(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{e^{0,02t}}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Die optimalen Vorsorgeraten $v_*(t)$ können wir anschließend aus der Beziehung

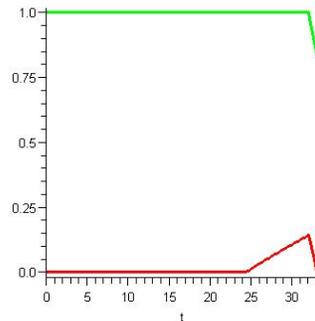
$$(1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t) = \Lambda(t) \implies v_*(t) = 1 - \frac{12}{l_*(t) \cdot e^2 \cdot e^{0,02t}}$$

bestimmen. Aus den Graphen der Funktionen

$$t \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{e^{0,02t}}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right], \quad t \rightarrow 1 - \frac{12}{\frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{e^{0,02t}}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right] \cdot e^2 \cdot e^{0,02t}}$$



folgt, dass zuerst die optimale Vorsorgepolitik $v_*(\cdot)$ gleich Null wird. Dies geschieht zum Zeitpunkt $t_3 \approx 33,08$. Auf $[0, t_3]$ erhalten wir für die optimalen Steuerungen die folgenden Schaubilder ($l_*(\cdot)$ in grüner und $v_*(\cdot)$ in roter Farbe).



Für $t > t_3$ ändert die Altersgruppe wieder ihr Verhalten.

Phase IV: „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“

Für $t > t_3$ bestimmen wir $l_*(t)$ aus der Beziehung

$$F_l(l_*(t), 0) = U'(l_*(t) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) = 0.$$

Dabei müssen wir beachten, dass sich U' für Argumente kleiner $C_0 = 10^{-2}$ ändert. Für $l_*(t) \cdot L(t) \geq C_0$ erhalten wir

$$\frac{1}{l_*(t)} = 0,05 \cdot (1 + 2l_*(t)) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2},$$

und damit die quadratische Gleichung

$$0 = l_*^2(t) + \frac{1}{2}l_*(t) - 10 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} \implies l_*(t) = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 10 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}}.$$

Von diesen Lösungen sind wir nur an den positiven interessiert. Daher erhalten wir für die optimale Arbeitspolitik für $t > t_3$

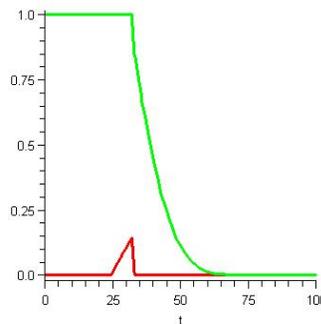
$$l_*(t) = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 10 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}}.$$

Aus der Gleichung $l_*(t_4) \cdot L(t_4) = C_0$ folgt $t_4 \approx 66,83$. Für $t > t_4$ betrachten wir den Parabelabschnitt von U und können $l_*(t)$ aus

$$\begin{aligned} 0 &= U'(l_*(t) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) \\ &= \left(\frac{1}{C_0} + 1 - \frac{l_*(t) \cdot L(t)}{C_0} \right) \cdot L(t) - 0,05 \cdot (1 + 2l_*(t)) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}, \\ l_*(t) &= \frac{101 \cdot L(t) - 0,05 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}}{100 \cdot L^2(t) + 0,1 \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}}, \end{aligned}$$

bestimmen. Aus dem Grund, dass $l_*(t_4)$ kleiner als $3 \cdot 10^{-3}$ ist, vernachlässigen wir einfach den Parabelabschnitt und setzen $l_*(t) = 0$ für $t > t_4$ und die Altersgruppe wechselt in den letzten Abschnitt ihres Arbeitslebens, nämlich in Phase V: „nicht arbeiten“.

Für die Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ erhalten wir aus der Maximumsbedingung bzgl. der Strategie $i = 1$ zusammenfassend das Schaubild:



„Wechsel in den Ruhestand?“:

Wir untersuchen nun, ob es einen Umschaltzeitpunkt in die zweite Strategie gibt. Aus der Dynamik

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v_*(t) \cdot l_*(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ -\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \quad \text{mit } A(0) = 0, \quad A(T) = 0,$$

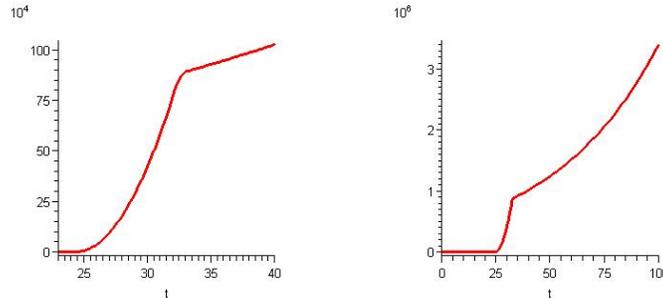
erhalten wir

$$A(t) = e^{rt} \cdot \int_0^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} ds,$$

solange sich die Altersgruppe für die Strategie $i = 1$ entscheidet. Mit der Kenntnis der Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ lässt sich $A(\cdot)$ stückweise in den einzelnen Phasen durch die folgenden Funktionen berechnen:

$$\begin{aligned} t \in [0, t_1] : & A_1(t) = 0, \\ t \in [t_1, t_2] : & A_2(t) = e^{rt} \cdot \int_{t_1}^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} ds, \\ t \in [t_2, t_3] : & A_3(t) = A_2(t_2) \cdot e^{r(t-t_2)} + e^{rt} \cdot \int_{t_2}^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} ds, \\ t \in [t_3, T] : & A_4(t) = A_3(t_3) \cdot e^{r(t-t_3)}. \end{aligned}$$

Mit den ermittelten Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ erhalten wir für die Funktion $A(\cdot)$ ohne Wechsel in die Strategie $i = 2$ auf $[20, 40]$ bzw. auf $[0, T]$ das Schaubild:



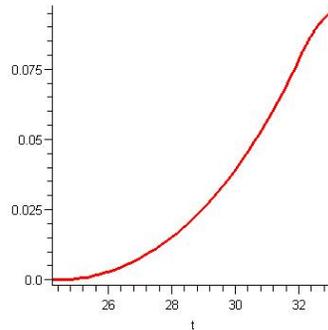
Entschließt sich die Altersgruppe zum Zeitpunkt τ in die zweite Strategie zu wechseln, dann berechnet sich die Auszahlung gemäß

$$A(\tau) = e^{r(\tau-T)} \cdot \int_{\tau}^T -\bar{a} \cdot S(t) \cdot e^{-r(t-T)} dt \implies \bar{a} = \frac{A(\tau) \cdot e^{-r\tau}}{\int_{\tau}^T S(t) \cdot e^{-rt} dt}.$$

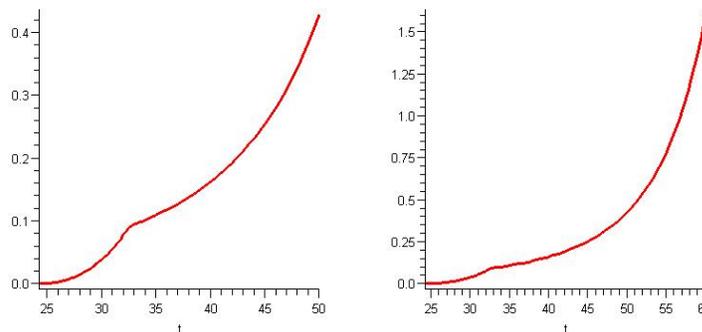
Um eine Vorstellung von der Entwicklung der Auszahlung zu bekommen, betrachten wir die Funktion

$$a(t) = \frac{A(t) \cdot e^{-rt}}{\int_t^T S(s) \cdot e^{-rs} ds}.$$

Diese Funktion ist für $t \leq t_1$ gleich Null. Auf dem Intervall $[t_1, t_3]$ erhalten wir für deren Graph:



Für $t > t_3$ wird die Entwicklung von $a(\cdot)$ durch den Nenner dominiert, was durch die folgenden beiden Graphen verdeutlicht wird.



Wir werten nun die Maximumsbedingung (5.9) mit $M(t) = 1$ auf $[0, T]$, d. h.

$$\max \left\{ \max_{v, l \in [0, 1]} \left[p(T)e^{rT} \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1 - v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l) \right], U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T)e^{rT} \right\},$$

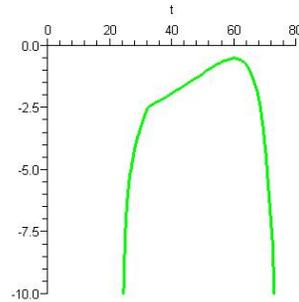
aus. In der zweiten Strategie berechnet sich das Maximum gemäß

$$U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T)e^{rT}.$$

Die Entwicklung dieses Wertes in Abhängigkeit vom Umschaltzeitpunkt wird durch die Abbildung

$$t \rightarrow U(a(t)) - a(t) \cdot p(T)e^{rT}$$

beschrieben. Der Graph dieser Funktion zeigt, wie stark der in $a(t)$ lineare Term $a(t) \cdot p(T)e^{rT}$ den in $a(t)$ konkaven Term $U(a(t))$ am Ende des Zeitraumes dominiert, falls Vorsorge geschaffen wurde:

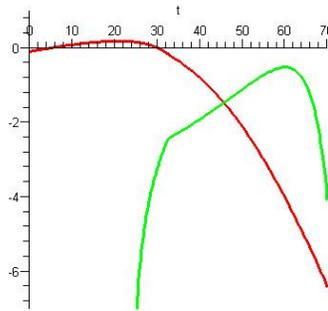


Wir vergleichen die Funktionen

$$t \rightarrow p(T)e^{rT} \cdot v_*(t) \cdot l_*(t) \cdot L(t) + U((1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) - V(t, l_*(t)),$$

$$t \rightarrow U(a(t)) - a(t) \cdot p(T)e^{rT},$$

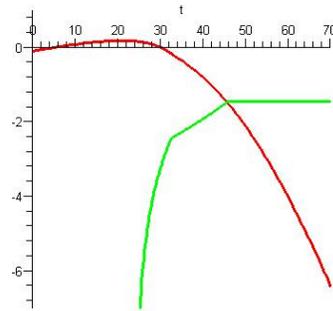
die die Entwicklung des Maximums in der Strategie $i = 1$ bzw. $i = 2$ beschreiben:



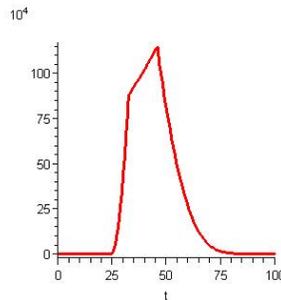
Zum Zeitpunkt $\tau \approx 45,66$ schneiden sich die beiden Funktionen. Für $t > \tau$ ist das Maximum der zweiten Strategie vorerst besser. Ab diesem Zeitpunkt gibt es wegen dem Wechsel in $i = 2$ auf jeden Fall keine Einzahlungen und – dies ist vorallem zu beachten – zu diesem Zeitpunkt berechnet sich $\bar{a} = a(\tau)$ und ist rund 0,27. D. h. für $t \geq \tau$ ändert sich die Funktion, die das Maximum in (5.9) für $i = 2$ beschreibt, gemäß

$$t \rightarrow U(a(\tau)) - a(\tau) \cdot p(T)e^{rT} = U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T)e^{rT}.$$

Wir erhalten für die Maximumsbedingungen mit der Auszahlung \bar{a} für $t \geq \tau$ in der Strategie $i = 2$ das Schaubild:



Aus diesem folgt, dass zum Zeitpunkt τ die Altersgruppe in die Strategie $i = 2$ wechselt und nicht wieder verlässt. Das Schaubild

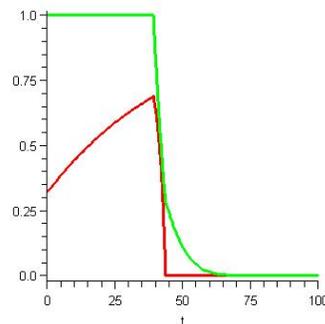


zeigt die Entwicklung des Vorsorgepools. Aus diesem Graph können wir entnehmen, dass der Pool vollständig ausgezahlt wird.

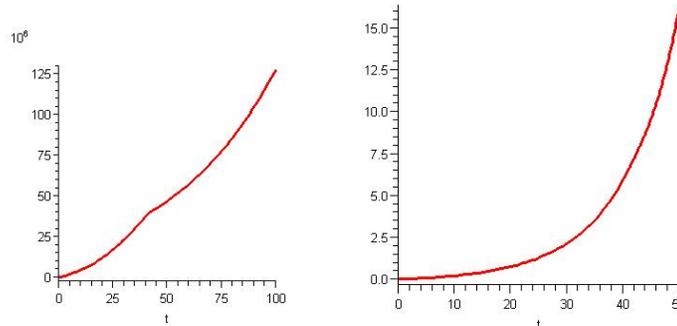
► Wir wollen nun untersuchen, wie sich das Modell bei Abänderung vom Anreiz $p(T)$ nach Vorsorge entwickelt. Dazu betrachten wir den Parameter $p(T) = \frac{1}{5}$. Mit einer völlig analogen Argumentation wie eben erhalten wir für diesen Anreiz die Schaltpunkte

$$t_1 = 0, \quad t_2 \approx 39, 19, \quad t_3 \approx 43, 65, \quad t_4 \approx 66, 83,$$

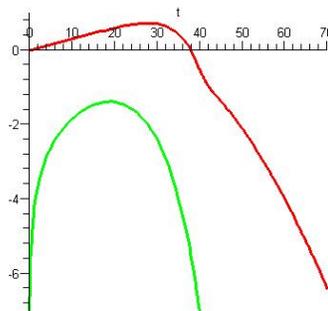
und für die optimalen Steuerungen $l_*(\cdot)$ in grüner und $v_*(\cdot)$ in roter Farbe die Graphen:



In den nachstehenden Abbildungen ist links der Vorsorgepool $A(\cdot)$ graphisch dargestellt und im rechten Bild ist die Entwicklung der Auszahlung $a(\cdot)$ auf dem Intervall $[t_1, 50]$ zu sehen:



Vergleichen wir die Werte in der Maximumsbedingung für die Strategien $i = 1$ und $i = 2$

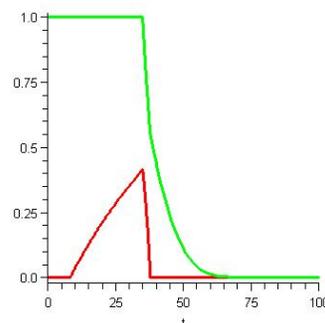


so erhalten wir, dass kein Umschaltzeitpunkt τ existiert.

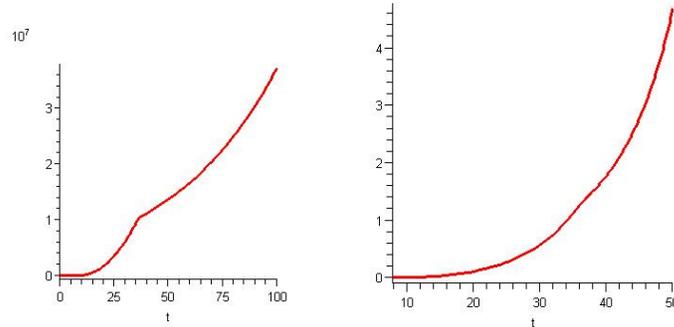
► Nun betrachten wir den Anreiz $p(T) = \frac{1}{8,65}$: Die Schaltzeitpunkte lauten

$$t_1 \approx 7,88, \quad t_2 \approx 34,91, \quad t_3 \approx 37,76, \quad t_4 \approx 66,83.$$

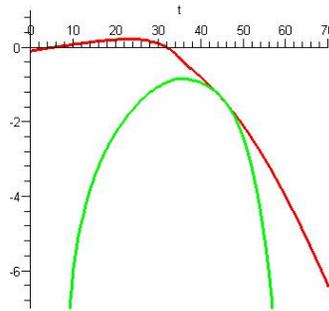
Für die optimalen Steuerungen $l_*(\cdot), v_*(\cdot)$ erhalten wir die Schaubilder



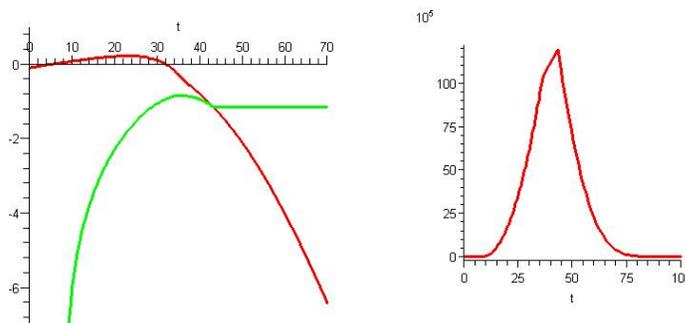
für die Entwicklung des Kapitalstocks $A(\cdot)$ und der Auszahlung $a(\cdot)$:



Die Untersuchung nach einem Wechselzeitpunkt $\tau \in (0, T)$ liefert die Grafik:



Zum Wechselzeitpunkt $\tau \approx 43,22$ beträgt die Auszahlung $\bar{a} = a(\tau) \approx 2,36$. Vergleichen wir abschließend noch die Werte in den Maximumbedingungen und die Entwicklung des Kapitalpools unter Beachtung des Strategiewechsels zum Zeitpunkt $t = \tau$, dann erhalten wir die Graphen:



5.6 Ein Beispiel mit variabler Zinsrate

Private Anlagen sind dem Risiko unterworfen, dass der Anleger verstirbt, bevor dieser das angesparte Kapital entnommen hat. Andererseits wird mit einer erhöhten Zinsrate

im Finanzsektor der Ausfall von Kreditrückzahlungen, falls die Kreditnehmer zu früh versterben, kompensiert. In Bloom et al. [4] wird diesem Umstand mit einer erhöhten variablen Zinsrate Rechnung getragen.

„We assume that there is a family of possible survival schedules indexed by a single variable λ . There is a survival schedule $s(t, \lambda)$ that gives the probability of survival to age t . The mortality rate at time t is

$$m(t, \lambda) = -\frac{\frac{ds}{dt}(t, \lambda)}{s(t, \lambda)}$$

and life expectancy is given by

$$z(\lambda) = \int_0^T t m(t, \lambda) s(t, \lambda) dt.$$

[...] Agents are paid an effective interest rate $m(t, z) + r$ on their savings, which is larger than r , to compensate them for the fact that they may die before withdrawing their savings. Similarly, agents who borrow pay the rate $m(t, z) + r$ to compensate the bank for the fact that they may die before repaying their borrowings.“[4], S. 6f, S. 10.

In unseren Beispielen lauten die Sterberate $\mu(\cdot)$ und die Überlebensfunktion $S(\cdot)$

$$\mu(t) = \frac{5}{1000} \cdot e^{0,05t}, \quad S(t) = 10^6 \cdot e^{-0,1(e^{0,05t}-1)}.$$

Führen wir in unserem Modell (5.1)–(5.5) die Zinsrate ebenso wie in [4] mit $r + \mu(t)$ statt $r \cdot (1 + \mu(t))$ ein, dann erhalten wir für die adjungierte Funktion

$$p(t) = p(T) \cdot \exp \left\{ - \int_T^t (r + \mu(\xi)) d\xi \right\} \implies p(T) e^{r(T-t)} \cdot \exp \left\{ \int_t^T \mu(\xi) d\xi \right\}.$$

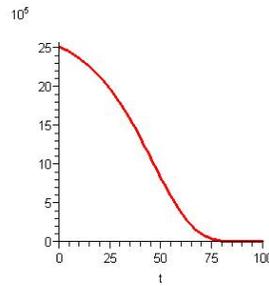
Wir setzen

$$\tilde{M}(t) = \exp \left\{ \int_t^T \mu(\xi) d\xi \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{10} (e^5 - e^{0,05 \cdot t}) \right\}.$$

Dann erhalten wir für die Anreizfunktion, diese bezieht sich auf die Maximumsbedingung (5.9) nach den entsprechenden Umformungen,

$$t \rightarrow p(T) e^{rT} \cdot \tilde{M}(t) = p(T) e^2 \cdot \exp \left\{ \frac{1}{10} (e^5 - e^{0,05 \cdot t}) \right\}.$$

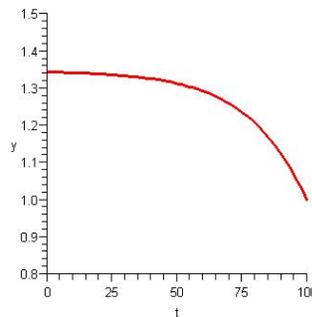
Der Faktor $e^2 \approx 7,4$ steht für den Anreiz durch die Zinsrate r und der Faktor $\tilde{M}(t)$ gibt den Anreiz unter Beachtung der Sterberaten wieder. Zum Vergleich dieser Faktoren geben wir den Graphen von $\tilde{M}(\cdot)$ an:



Daraus wird ersichtlich, dass die Raten r und $\mu(t)$ in keinem vernünftigen Verhältnis zueinander stehen. Das ist auch nicht überraschend, da sich diese Kenngrößen auf völlig verschiedene Grundgesamtheiten beziehen. Aus diesem Grund berücksichtigen wir das Ausfallrisiko durch den Term $r \cdot (1 + \mu(t))$ und erhalten für

$$M(t) = \exp \left\{ r \cdot \int_t^T \mu(\xi) d\xi \right\} = \exp \left\{ \frac{2}{1000} (e^5 - e^{0,05 \cdot t}) \right\}$$

auf $[0, T]$ den Graphen



Wir betrachten die Situation wie im ersten Beispiel des letzten Abschnitts. Es seien

$$L(t) = e^{0,02t}, \quad V(t, l) = \frac{1}{20} \cdot l(l+1) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}, \quad S(t) = 10^6 \cdot e^{-0,1(e^{0,05t} - 1)},$$

die Nutzenfunktion ist stückweise definiert

$$U(C) = \begin{cases} \ln C, & C \geq 0,01, \\ 101 \cdot C - \frac{C^2}{2 \cdot 0,01} + \ln 0,01 - \left(1 + \frac{0,01}{2}\right), & 0 \leq C \leq 0,01, \end{cases}$$

und der Anreiz $p(T)$ nach Vorsorge sei $\frac{1}{12}$.

Wir untersuchen nun die Aufgabe

$$\int_0^T \left\{ \begin{array}{l} \left[U\left((1-v(t)) \cdot l(t) \cdot L(t)\right) - V(t, l(t)) \right] \cdot S(t)e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_1, \\ U(\bar{a}) \cdot S(t)e^{-rt}, \quad t \in \mathcal{A}_2, \end{array} \right\} dt \rightarrow \sup, \quad (5.15)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v(t) \cdot l(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ -\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases} \quad (5.16)$$

$$A(0) = 0, \quad A(T) = 0, \quad \bar{a} = \bar{a}(\tau, A(\tau)), \quad (5.17)$$

$$v(t), l(t) \in [0, 1], \quad \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \in \mathfrak{Z}^2([0, T]). \quad (5.18)$$

Die Funktion Λ , die wir zur Berechnung der optimalen Steuerungen benutzen, ist implizit über die Bedingung

$$U'(\Lambda(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t)$$

definiert (vgl. Abschnitt 5.3). Aus den Setzungen folgt $\Lambda(t) > C_0$ für alle $t \in [0, T]$ und es gilt

$$U'(\Lambda(t)) = \frac{1}{\Lambda(t)} \implies \Lambda(t) = \frac{1}{p(T)e^{rT} \cdot M(t)}.$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir genauso wie im letzten Abschnitt vor:

Phase I: „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten $F_l(1, 0) \geq 0$ und $F_v(1, 0) \leq 0$ wegen

$$U'(L_0) \cdot L_0 - V_l(0, 1) = 1 - 0,15 > 0 \quad \text{und} \quad p(T)e^{rT} \cdot M(0) \approx 0,83 < U'(L_0) = 1.$$

Daher beginnt die Altersgruppe den Planungszeitraum mit „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“. Dieses Verhalten ändert sich, falls eine dieser Ungleichungen aktiv wird. Dies ist erstmals zum Zeitpunkt t_1 mit (vgl. $F_v(1, 0) = 0$)

$$p(T)e^{rT} \cdot M(t_1) = U'(L(t_1)) \implies t_1 \approx 9,57$$

der Fall.

Phase II: „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“

Für gewisse $t > t_1$ gelten die Relationen $F_v(1, 0) > 0$ und $F_v(1, 1) < 0$. Daher ändert die Altersgruppe in t_1 ihr Verhalten in „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“. Die optimalen Vorsorgeraten berechnen sich in dieser Phase gemäß

$$v_*(t) = 1 - \frac{\Lambda(t)}{L(t)} = 1 - \frac{12}{e^2 \cdot M(t) \cdot L(t)}.$$

Ferner gilt in dieser Phase $F_v(1, v_*(t)) = 0$, d. h. $U'((1-v_*(t)) \cdot L(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t)$, da $v_*(t)$ aus dem Inneren des Intervalls $[0, 1]$ stammt. Ersetzen wir dies in $F_l(1, v_*(t))$, dann erhalten wir

$$F_l(1, v_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, 1).$$

An dem Verhalten „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“ hält die Altersgruppe fest, solange

$$p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, 1) \geq 0$$

ist. Aus dieser Bedingung folgt

$$t_2 \approx 34,56.$$

Phase III: „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“

Für $t > t_2$ gilt

$$F_l(1, v_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, 1) < 0$$

und die Altersgruppe wechselt in „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“. Die optimalen relativen Arbeitszeiten $l_*(t)$ berechnen sich in dieser Phase anhand der Gleichung

$$F_l(l_*(t), v_*(t)) = U'((1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) = 0.$$

Wir verwenden $U'((1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t)$ aus $F_v(l_*(t), v_*(t)) = 0$ und erhalten

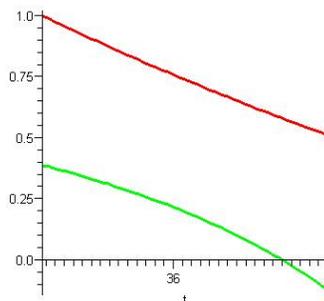
$$V_l(t, l_*(t)) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) \iff l_*(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{M(t) \cdot L(t)}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right].$$

Die optimalen Vorsorgegraden $v_*(t)$ können wir anschließend aus der Beziehung

$$(1 - v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t) = \Lambda(t) \implies v_*(t) = 1 - \frac{12}{l_*(t) \cdot e^2 \cdot M(t) \cdot L(t)}$$

bestimmen. Aus den Graphen der Funktionen

$$t \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{M(t) \cdot L(t)}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right], \quad t \rightarrow 1 - \frac{12}{\frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \frac{e^2}{12} \cdot \frac{M(t) \cdot L(t)}{e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}} - 1 \right] \cdot e^2 \cdot M(t) \cdot L(t)}$$



folgt, dass zuerst die optimale Vorsorgepolitik $v_*(\cdot)$ gleich Null wird. Dies geschieht zum Zeitpunkt $t_3 \approx 37,20$.

Phase IV: „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“

Für $t > t_3$ bestimmen wir $l_*(t)$ aus der Beziehung

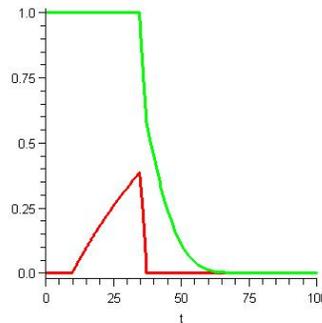
$$F_l(l_*(t), 0) = U'(l_*(t) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*(t)) = 0.$$

Dabei müssen wir beachten, dass sich U' für Argumente kleiner $C_0 = 10^{-2}$ ändert. Für $l_*(t) \cdot L(t) \geq C_0$ erhalten wir

$$\frac{1}{l_*(t)} = 0,05 \cdot (1 + 2l_*(t)) \cdot e^{2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2} \implies l_*(t) = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 10 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-3} \cdot t^2}},$$

da wir nur an den positiven Lösungen dieser Gleichung interessiert sind. Wir vernachlässigen wieder den Parabelabschnitt und setzen $l_*(t) = 0$ für $t > t_4 \approx 66,83$. Den Zeitpunkt t_4 erhalten wir aus der Bedingung $l_*(t_4) \cdot L(t_4) = C_0$. D. h., dass für $t > t_4$ die Altersgruppe in Phase V: „nicht arbeiten“ wechselt.

Für die Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ erhalten wir aus der Maximumsbedingung bzgl. der Strategie $i = 1$ zusammenfassend die Graphen:

„Wechsel in den Ruhestand?“:

Wir untersuchen nun, ob es einen Umschaltzeitpunkt in die zweite Strategie gibt. Aus der Dynamik

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} v_*(t) \cdot l_*(t) \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_1, \\ -\bar{a} \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t), & t \in \mathcal{A}_2, \end{cases}$$

mit $A(0) = 0$, $A(T) = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} A(t) &= \exp \left\{ \int_0^t r \cdot (1 + \mu(s)) ds \right\} \cdot \left(A(0) + \int_0^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot \exp \left\{ - \int_0^s r \cdot (1 + \mu(\xi)) d\xi \right\} ds \right), \\ &= \frac{e^{rt}}{M(t)} \cdot \int_0^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} \cdot M(s) ds, \end{aligned}$$

solange sich die Altersgruppe für die Strategie $i = 1$ entscheidet. In den verschiedenen Phasen berechnen wir diese Funktion stückweise über die Funktionen

$$\begin{aligned}
 t \in [0, t_1) : \quad & A_1(t) = 0, \\
 t \in [t_1, t_2) : \quad & A_2(t) = \frac{e^{rt}}{M(t)} \cdot \int_{t_1}^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} \cdot M(s) ds, \\
 t \in [t_2, t_3) : \quad & A_3(t) = A_2(t_2) \cdot \frac{M(t_2) \cdot e^{r(t-t_2)}}{M(t)} \\
 & \quad + \frac{e^{rt}}{M(t)} \cdot \int_{t_2}^t v_*(s) \cdot l_*(s) \cdot L(s) \cdot S(s) \cdot e^{-rs} \cdot M(s) ds, \\
 t \in [t_3, T] : \quad & A_4(t) = A_3(t_3) \cdot \frac{M(t_3) \cdot e^{r(t-t_3)}}{M(t)}.
 \end{aligned}$$

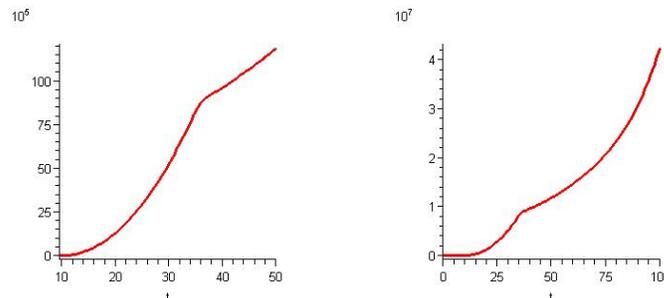
Entschließt sich die Altersgruppe zum Zeitpunkt τ in die zweite Strategie zu wechseln, dann gilt für $t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \exp \left\{ \int_T^t r \cdot (1 + \mu(s)) ds \right\} \cdot \left(A(T) + \int_T^t -\bar{a} \cdot S(s) \cdot \exp \left\{ - \int_T^s r \cdot (1 + \mu(\xi)) d\xi \right\} ds \right), \\
 &= \frac{e^{rt}}{M(t)} \cdot \int_T^t -\bar{a} \cdot S(s) \cdot e^{-rs} \cdot M(s) ds.
 \end{aligned}$$

Für $t = \tau$ erhalten wir daraus für die Berechnung der Auszahlung \bar{a}

$$A(\tau) = \frac{e^{r\tau}}{M(\tau)} \cdot \int_T^\tau -\bar{a} \cdot S(t) \cdot e^{-rt} \cdot M(t) dt \implies \bar{a} = \frac{A(\tau) \cdot M(\tau) \cdot e^{-r\tau}}{\int_\tau^T S(t) \cdot e^{-rt} \cdot M(t) dt}.$$

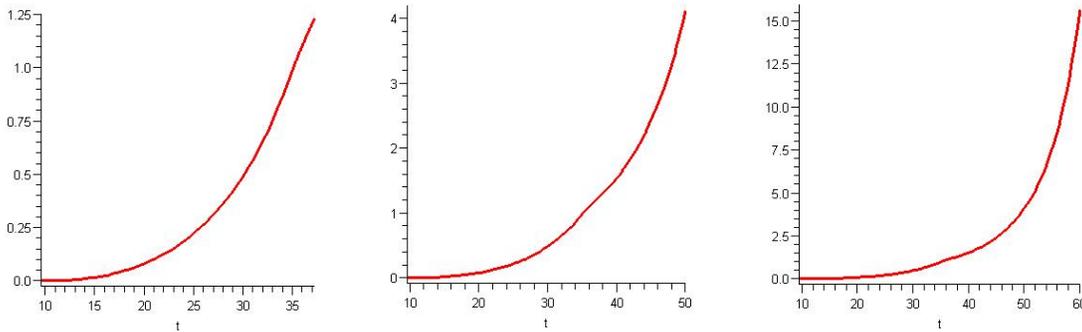
Mit den ermittelten Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ erhalten wir für die Funktion $A(\cdot)$ ohne Wechsel in die Strategie $i = 2$ auf $[10, 50]$ bzw. auf $[0, T]$ das Schaubild:



Die Wertentwicklung der Auszahlung \bar{a} wird durch die Funktion

$$a(t) = \frac{A(t) \cdot M(t) \cdot e^{-rt}}{\int_t^T S(s) \cdot e^{-rs} \cdot M(s) ds}$$

beschrieben. Diese Funktion ist für $t \leq t_1$ gleich Null. Auf dem Intervall $[t_1, t_3]$ wird der Wert $a(t)$ im Wesentlichen durch die Einzahlungen erhöht, für $t > t_3$ dominiert der Nennerterm die Entwicklung von $a(t)$.



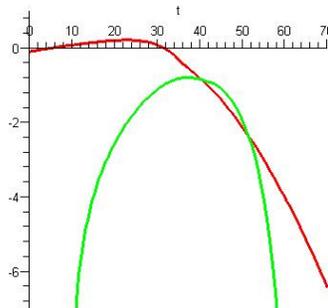
Wir werten nun die Maximumsbedingung (5.9), d. h.

$$\max \left\{ \max_{v, l \in [0,1]} \left[p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l) \right], \right. \\ \left. U(\bar{a}) - \bar{a} \cdot p(T)e^{rT} \cdot M(t) \right\},$$

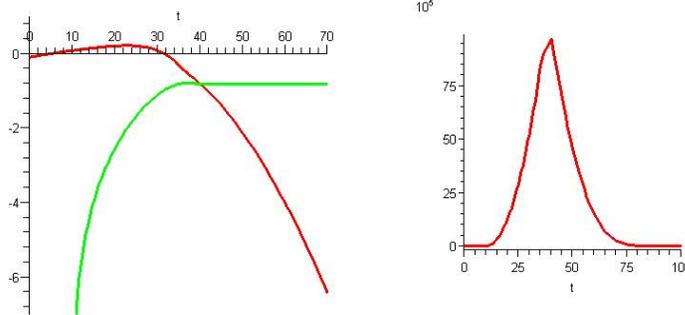
aus. Wir vergleichen dazu die Funktionen

$$t \rightarrow p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v_*(t) \cdot l_*(t) \cdot L(t) + U((1-v_*(t)) \cdot l_*(t) \cdot L(t)) - V(t, l_*(t)), \\ t \rightarrow U(a(t)) - a(t) \cdot p(T)e^{rT} \cdot M(t),$$

die die Entwicklung des Maximums in der Strategie $i = 1$ bzw. $i = 2$ beschreiben:



Zum Zeitpunkt $\tau \approx 40,35$ schneiden sich die beiden Funktionen. Zu diesem Zeitpunkt berechnet sich $\bar{a} = a(\tau)$ und beträgt rund 1,59. Wir erhalten für die Maximumsbedingungen mit der Auszahlung \bar{a} für $t \geq \tau$ in der Strategie $i = 2$ das linke Schaubild:



Aus diesem folgt, dass zum Zeitpunkt τ die Altersgruppe in die Strategie $i = 2$ wechselt und nicht wieder verlässt. Der rechte Graph zeigt die Entwicklung des Vorsorgepools. Dieser zeigt, dass der Pool vollständig ausgezahlt wird.

5.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir das Modell einer privaten Altersvorsorge aufgestellt und als eine hybride Aufgabe formuliert. Diese Aufgabe (5.1)–(5.5) untersuchten wir mit der in dieser Arbeit zur Verfügung gestellten Theorie, speziell Satz 4.14. Mit Hilfe dieses Pontrjaginschen Maximumprinzips war es uns unter der Voraussetzung, dass Altersvorsorge getroffen wird und davon auch Gebrauch gemacht wird, d. h. $A(\cdot) \neq 0$ und $\tau \in (0, T)$, möglich, die Wahl der Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0$ und $p(T) \in \mathbb{R}$ auf den Fall $\lambda_0 = 1$ und $p(T) > 0$ zu reduzieren (vgl. Anhang C.1).

Trotz des sehr allgemeinen Rahmens der Aufgabe konnten wir im Abschnitt 5.3 mit Hilfe der Ergebnisse im Anhang C.2 und C.3 notwendige und gleichzeitig hinreichende Bedingungen für die Wahl der optimalen Steuerungen $l_*(\cdot), v_*(\cdot)$ zu einem festen Zeitpunkt angeben. Insbesondere war es uns möglich eindeutig lösbar Gleichungen – wenn auch teilweise nur implizite – für die Situationen anzugeben, in denen die Werte der optimalen Steuerungen innere Punkte des Intervalls $[0, 1]$ sind.

Unter der speziellen Wahl der Abbildungen (vgl. Abschnitt 5.4) konnten wir in den untersuchten Beispielen, in denen Vorsorge getroffen und in den Ruhestand gewechselt wird, auf $[0, T]$ das optimale Verhalten

- zu Beginn für $t \in [0, t_1)$ „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“,
- dann für $t \in [t_1, t_2)$ „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“,
- dann für $t \in [t_2, t_3)$ „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“,
- dann für $t \in [t_3, \tau)$ „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“ und

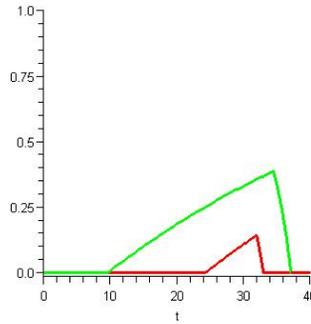
— abschließend für $t \in [\tau, T]$ „Ruhestand“

bestimmen.

In den Beispielen mit fester bzw. erhöhter variabler Zinsrate in den Abschnitten 5.5 und 5.6 zum Anreiz $p(T) = \frac{1}{12}$ erhielten wir für die Zeitpunkte t_1, t_2, t_3, τ , zu denen sich das Verhalten jeweils ändert, und für die Auszahlung \bar{a} :

Zinsrate	t_1	t_2	t_3	τ	\bar{a}
fest	24,25	32,04	33,08	45,66	0,27
variabel	9,57	34,56	37,20	40,35	1,59

Die Graphen der optimalen Vorsorgepolitiken $v_*(\cdot)$, mit fester Zinsrate in roter bzw. mit variabler Zinsrate in grüner Farbe,



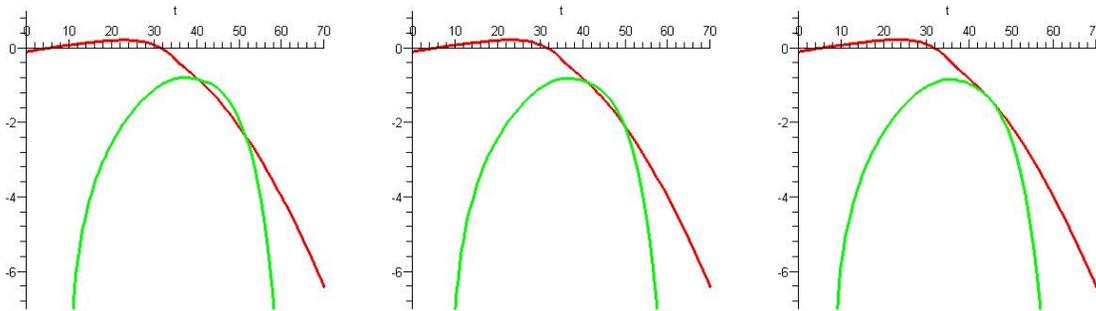
unterstreichen das deutlich früher beginnende Sparen über einen vergleichsweise langen Zeitraum und die höheren Sparraten im Modell mit erhöhter Zinsrate.

Weitere Untersuchungen des Modells mit variabler Zinsrate führten zu folgenden Resultaten:

$p(T)$	t_1	t_2	t_3	τ	\bar{a}
$\frac{1}{12}$	9,57	34,56	37,20	40,35	1,59
$\frac{1}{11,8}$	8,72	34,70	37,42	41,09	1,83
$\frac{1}{11,6}$	7,86	34,85	37,63	42,61	2,25
$\frac{1}{11,55}$	7,64	34,88	37,69	43,50	2,48
$\frac{1}{11,5}$	7,42	34,92	37,74	—	—

Auffallend in dieser Tabelle sind die Veränderungen des Zeitpunktes t_1 für den Beginn der Einzahlungen, des Pensionsalters τ und der Höhe der Auszahlung \bar{a} , und heben die Bedeutung des Anreizes $p(T)$ hervor. Das Verhalten des Pensionsalters, d. h. des Umschaltpunktes τ von der ersten in die zweite Strategie, in Abhängigkeit vom Anreiz

$p(T)$ können wir den folgenden Bildern entnehmen, in denen auf dem Intervall $[0, 70]$ die Entwicklung der Werte in der Maximumsbedingung (5.9) bzgl. der ersten und zweiten Strategie (in roter bzw. grüner Farbe) zum Anreiz $p(T)$ gleich $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{11,8}$ bzw. $\frac{1}{11,55}$ dargestellt sind:



Diesen Graphen ist für $A(\cdot) \neq 0$ ein überraschendes Verhalten zu entnehmen: Unsere Erwartung wurde widerlegt, dass mit steigendem Alter die rasch anwachsende Auszahlung \bar{a} in jedem Fall bevorzugt wird und damit die Existenz des Pensionsalters $\tau \in (0, T)$ gesichert ist. Die Graphen, die die Entwicklung des Wertes der Maximumsbedingung (5.9) bzgl. der Strategie $i = 2$ wiedergeben, zeigen, dass am Ende des Planungszeitraumes ein extrem starkes Abfallen charakteristisch ist. Dieses starke Abfallen wird dadurch erklärt, dass sich die Altersgruppe nicht einfach mit einer höheren Auszahlung im Alter zufrieden gibt, sondern private Vorsorge in drastisch zunehmendem Maße für nicht erstrebenswert auffasst, umso weniger die Gesamtheit zukünftig von diesem Pool profitieren würde.

Dieses Verhalten führt in unserem Modell (5.1)–(5.5) unter den gewählten Abbildungen und Parametern dazu, dass wir die Diskussion nicht auf die optimalen Steuerungen $l_*(\cdot)$ und $v_*(\cdot)$ und auf die Auswirkungen erhöhter Vorsorgeraten und eines erhöhten Anreizes beschränken dürfen, sondern dass wir unbedingt die Existenz eines Wechselzeitpunktes $\tau \in (0, T)$ sicherstellen müssen.

Anhang A

Differentialgleichungen

A.1 Existenz- und Abhängigkeitssätze

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $y(x), y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|y\|$ die folgende Norm:

$$\|y\| = \max_{k=1, \dots, n} |y_k|.$$

Weiter sei Q der kompakte, achsenparallele Quader

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}, \quad a, b > 0.$$

Satz A.1 (Satz von Picard-Lindelöf) ([23], Satz 60.2, S. 516.) *Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig auf Q und genüge dort einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y , d. h. es existiert ein K mit*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq K \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in Q.$$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine auf

$$J := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

definierte Lösung $y(x)$; hierbei ist

$$M := \max_{(x, y) \in Q} \|f(x, y)\|, \quad \alpha := \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Satz A.2 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten) *Es genüge $f(x, y)$ den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf, $\tilde{f}(x, y)$ hingegen sei lediglich stetig auf dem oben beschriebenen Quader Q . Ferner bedeute $y(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

auf dem Intervall $J := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ und $\tilde{y}(x)$ sei irgendeine, auf einem abgeschlossenen Intervall $\tilde{J} \subset J$ existierende und ganz in Q verlaufende Lösung von

$$y'(x) = \tilde{f}(x, y(x)), \quad y(x_0) = \tilde{y}_0.$$

Schließlich sollen mit festen Zahlen σ, ω die Abschätzungen

$$\|y_0 - \tilde{y}_0\| \leq \sigma$$

und

$$\|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\| \leq \omega$$

auf Q gelten. Dann ist – mit einer Lipschitz-Konstanten K von f –

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \sigma e^{K|x-x_0|} + \frac{\omega}{K}(e^{K|x-x_0|} - 1) \quad \text{für alle } x \in \tilde{J}.$$

Die Integrale $y(x)$ und $\tilde{y}(x)$ unterscheiden sich also beliebig wenig auf \tilde{J} , sofern σ und ω nur hinreichend klein sind.

Satz A.3 (Differenzierbarkeit nach Parametern) *Für alle $(x, y, \lambda) \in \tilde{Q} = Q \times [c, d]$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$, sei $f(x, y, \lambda)$ erklärt. Auf \tilde{Q} sei f stetig und besitze dort überdies stetige partielle Ableitungen f_y, f_λ nach y und λ . Schließlich sei M eine obere Schranke für f auf \tilde{Q} :*

$$\|f(x, y, \lambda)\| \leq M \quad \text{für alle } (x, y, \lambda) \in \tilde{Q},$$

und α werde erklärt durch

$$\alpha := \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (nach Satz A.1)

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda), \quad y(x_0) = y_0$$

für jedes $\lambda \in [c, d]$ genau eine auf $J := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ existierende Lösung $y(x, \lambda)$. Diese Lösung $y(x, \lambda)$ ist auf ganz $[c, d]$ partiell nach λ differenzierbar.

Die Sätze A.2, A.3 und die Beweise sind in Heuser [23], S. 143 ff, S. 517, zu finden.

Folgerung A.4 *Es sei $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in Q$ erklärt. Auf Q sei sie stetig und besitze dort überdies eine stetige partielle Ableitung f_y nach y . Schließlich sei M eine obere Schranke für f auf Q :*

$$\|f(x, y)\| \leq M \quad \text{für alle } (x, y) \in Q,$$

und α werde erklärt durch

$$\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Ferner sei $y_0(\lambda)$ für $\lambda \in [0, \lambda_0]$ definiert und stetig, und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{y_0(\lambda) - y_0(0)}{\lambda}.$$

Auf Q mögen die Anfangswertaufgaben

$$y'(x) = (x, y(x)), \quad y(x_0, \lambda) = y_0(\lambda),$$

für alle $\lambda \in [0, \lambda_0]$ den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf genügen. Mit $y(x, \lambda)$ bezeichnen wir die eindeutige Lösung des AWP's zum Anfangswert $y_0(\lambda)$.

Für diese existiert dann auf J der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{y(x, \lambda) - y(x, 0)}{\lambda}.$$

Beweis: Wir wenden den Beweis von Satz A.3 in [23], S. 145 f, auf $y(x, \lambda)$ und $y(x, 0)$ mit

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= y_0(\lambda) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi, \lambda)) d\xi, \\ y(x, 0) &= y_0(0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi, 0)) d\xi, \end{aligned}$$

an. Für diese folgt (mit $x \in J$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y(x, \lambda) - y(x, 0)) &= f(x, y(x, \lambda)) - f(x, y(x, 0)) \\ &= f_y\left(x, y(x, 0) + \vartheta(y(x, \lambda) - y(x, 0))\right)(y(x, \lambda) - y(x, 0)), \end{aligned}$$

mit einem $\vartheta \in (0, 1)$. Somit haben wir

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y(x, \lambda) - y(x, 0)}{\lambda} \right) = f_y\left(x, y(x, 0) + \vartheta(y(x, \lambda) - y(x, 0))\right) \frac{y(x, \lambda) - y(x, 0)}{\lambda}.$$

Die Funktion $\tilde{g}(x) = f_y\left(x, y(x, 0) + \vartheta(y(x, \lambda) - y(x, 0))\right)$ ist auf J stetig und

$$\tilde{z} := \frac{y(x, \lambda) - y(x, 0)}{\lambda}$$

löst dort dank der letzten Gleichung die lineare Anfangswertaufgabe

$$\frac{dw}{dx} = \tilde{g}(x)w, \quad w(x_0) = \frac{y_0(\lambda) - y_0(0)}{\lambda}.$$

Auch die Funktion $g(x) := f_y(x, y(x, 0))$ ist auf J stetig. Infolgedessen besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\frac{du}{dx} = g(x)u, \quad u(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{y_0(\lambda) - y_0(0)}{\lambda},$$

dort genau eine Lösung z . Eine erste Anwendung von Satz A.2 auf $y'(x) = f(x, y)$ zum Anfangswert $y(x_0, \lambda) = y_0(\lambda)$ zeigt, dass sich $y(x, \lambda)$ auf J beliebig wenig von $y(x, 0)$ unterscheidet, wenn nur λ hinreichend klein ist. Eine zweite Anwendung auf $\frac{dw}{dx} = \tilde{g}(x)w$ und $\frac{du}{dx} = g(x)u$ zu den Anfangswerten $w(x_0)$ bzw. $u(x_0)$ lehrt nun, dass Entsprechendes für \tilde{z} und z gilt. Das aber bedeutet, dass der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{y(x, \lambda) - y(x, 0)}{\lambda}$$

für jedes $x \in J$ existiert (und gleich $z(x)$ ist).

q. e. d.

A.2 Stückweise stetige rechte Seiten

Definition A.5 (Unstetigkeit 1. Art) Eine Abbildung $\varphi(x)$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, besitzt eine Unstetigkeit 1. Art im inneren Punkt ξ des Definitionsbereiches D , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \xi-0} \varphi(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \xi+0} \varphi(x) = b$$

mit festen Werten $a \neq b$ gilt.

Definition A.6 (GDI-System mit stückweise stetiger rechter Seite) Ist die Abbildung $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf Q bis auf endliche viele Unstetigkeiten 1. Art, dann nennen wir das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit stückweise stetiger rechter Seite.

Satz A.7 Auf dem kompakten Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$ genüge $f(x, y) : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Wir setzen

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } a \leq x < b, \\ \eta_0 & \text{für } x = b, \end{cases}$$

mit einem beliebig, aber fest gewählten $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist die nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig bestimmte stetige Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0$$

auf ganz $[a, b]$ auch die einzige stetige Lösung auf $[a, b]$ für

$$y'(x) = \tilde{f}(x, y(x)), \quad y(a) = y_0.$$

Beweis: Wir überführen für $x \in [a, b]$ die Anfangswertprobleme in die äquivalenten Integralgleichungen

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi)) d\xi, \quad \tilde{y}(x) = y_0 + \int_a^x \tilde{f}(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

Wegen der Definition von \tilde{f} ist $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein. Da f eine stetige Funktion auf dem betrachteten Quader Q ist, existiert ein Maximum von

$$\max_{(x,y) \in Q} \|f(x, y) - \eta_0\| =: M.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|y(b) - \tilde{y}(b)\| &= \left\| \int_a^b [f(\xi, y(\xi)) - \tilde{f}(\xi, y(\xi))] d\xi \right\| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left\| \int_a^{b-\varepsilon} [f(\xi, y(\xi)) - \tilde{f}(\xi, y(\xi))] d\xi + \int_{b-\varepsilon}^b [f(\xi, y(\xi)) - \tilde{f}(\xi, y(\xi))] d\xi \right\| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left\| \int_{b-\varepsilon}^b [f(\xi, y(\xi)) - \tilde{f}(\xi, y(\xi))] d\xi \right\| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{b-\varepsilon}^b M d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon \cdot M = 0. \end{aligned}$$

D. h. $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

q. e. d.

Wegen Satz A.7 vereinbaren wir auch für Differentialgleichungssysteme mit stückweise stetiger rechter Seite die Sprechweise $y(x)$ genüge der Gleichung $y' = f(x, y(x))$.

Lösungsverfahren für DGL-Systeme mit stückweise stetigen rechten Seiten:

Wir betrachten auf dem Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$ wieder das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Im Gegensatz zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme sei nun $f(x, y)$ lediglich stückweise stetig auf Q mit endlichen vielen Unstetigkeitsstellen 1. Art

ξ_1, \dots, ξ_q im Inneren von Q . Weiter sei f in den Punkten ξ_1, \dots, ξ_q rechtsseitig stetig. Um solche Differentialgleichungssysteme zu lösen, können wir nun folgendermaßen vorgehen: Wir setzen f stetig auf das Intervall $[a, \xi_1]$ fort.

Wie im Satz A.7 gezeigt, ändert sich durch diese Änderung für $x = \xi_1$ die Lösung nicht. Auf diesem kompakten Intervall können wir die Theorien für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme anwenden und es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $y^1(x)$ zur Anfangsbedingung $y^1(a) = y_0$.

Dann setzen wir f stetig auf das Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ fort und bestimmen die Lösung $y^2(x)$ zur Anfangsbedingung $y^2(\xi_1) = y^1(\xi_1)$.

Führen wir das Verfahren so fort, dann erhalten wir sukzessive die eindeutige und stetige Lösung auf ganz $[a, b]$.

A.3 Meßbare rechte Seiten

(Vgl. Ioffe & Tichomirov [25], S. 63.) Es sei f eine Abbildung eines Gebietes V des Raumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ in den Raum \mathbb{R}^n . Wir sagen die Abbildung f sei auf der Menge $\Omega \subseteq V$ durch die Funktion $r(x)$ beschränkt, wenn

$$\|f(x, y)\| \leq r(x) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega$$

gilt. Wenn für jeden Punkt $(\xi, y) \in V$ ein Intervall I existiert derart, dass $I \times \{y\} \subset V$ gilt und die Abbildung $x \rightarrow f(x, y)$ auf I meßbar ist, so nennen wir die Abbildung f meßbar bzgl. x . Man sagt, die Abbildung f genüge auf der Menge $\Omega \subseteq V$ einer Lipschitz-Bedingung in y , wenn für alle x, y, y' mit $(x, y), (x, y') \in \Omega$ die Ungleichung

$$\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq K\|y - y'\|, \quad K > 0,$$

erfüllt ist. Die Abbildung f heißt *lokal vom Lipschitz-Typ* bezüglich y , wenn jeder Punkt des Gebietes V in eine Umgebung eingebettet werden kann, in der die Abbildung f durch eine summierbare Funktion beschränkt ist und einer Lipschitz-Bedingung bzgl. y genügt.

Speziell gilt: Ist die Vektorfunktion $y(x)$ stetig und liegt ihre Bildkurve im Gebiet V , so ist die Vektorfunktion $x \rightarrow f(x, y(x))$ meßbar.

Satz A.8 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz, stetige Abhängigkeit vom Anfangswert) ([25], Satz 3, S. 63.) *In einem Gebiet $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei die Abbildung $f(x, y) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert, bzgl. x meßbar und bzgl. y lokal vom Lipschitz-Typ. Dann lassen sich zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in V$ ein den Punkt x_0 als inneren Punkt enthaltendes Intervall I_0 und eine Umgebung U_0 des Punktes y_0 derart angeben, dass $I_0 \times U_0 \subseteq V$ gilt und zu jedem $z \in U_0$ genau eine Lösung $y_z(x)$ der Gleichung*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

im Intervall I_0 existiert, welche die Anfangsbedingung $y_z(x_0) = z$ erfüllt.

Ist dabei $z \in U_0$ und ist $\{z_k\}$ eine für $k \rightarrow \infty$ gegen z konvergierende Folge von Punkten aus U_0 , so konvergiert $\{y_{z_k}(x)\}$ auf I_0 gleichmäßig gegen $y_z(x)$.

Wir betrachten nun eine Situation, wie sie bei der Motivation der verallgemeinerten Nadelvariationen in Abschnitt 2.2.1 entstanden ist.

Auf dem Gebiet $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ seien die Abbildungen $f(x, y)$, $\tilde{f}(x, y)$ meßbar und für fast alle $(x, y) \in V$ beschränkt, stetig nach y differenzierbar und es seien die Abbildungen $f_y(x, y)$, $\tilde{f}_y(x, y)$ auf V meßbar.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Dieses möge auf $[x_0, x_1] \times [a, b] \subseteq V$, $y_0 \in (a, b)$, den Voraussetzungen des letzten Satzes genügen und wir bezeichnen mit $y(x)$ dessen eindeutige Lösung.

Ferner sei $\{M(\alpha)\}_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0}$ eine Mengenfamilie meßbarer Teilmengen des Intervalls $[x_0, x_1]$ mit

$$|M(\alpha)| = \alpha|x_1 - x_0|, \quad M(\alpha') \subseteq M(\alpha), \quad 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0,$$

und wir betrachten das AWP (auf $[x_0, x_1] \times [a, b]$ genüge auch $\tilde{f}(x, y)$ den Voraussetzungen des letzten Satzes)

$$y'(x) = f(x, y(x)) + \chi_{M(\alpha)}(x) \cdot [f(x, y(x)) - \tilde{f}(x, y(x))], \quad y(x_0) = y_0,$$

dessen Lösung wir mit $y_\alpha(x)$ bezeichnen. Dann gilt:

Lemma A.9 *Fast überall auf $[x_0, x_1] \times [a, b]$ sei mit der festen Zahl ω die Abschätzung*

$$\|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\| \leq \omega$$

erfüllt. Dann ist – mit einer Lipschitz-Konstanten K von f –

$$\|y(x) - y_\alpha(x)\| \leq \alpha|x_1 - x_0| \cdot \frac{\omega}{K}(e^{K|x-x_0|} - 1) \quad \text{für alle } x \in [x_0, x_1].$$

Dieses Lemma ist eng verknüpft mit dem Satz A.2 über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten. Daher beziehen wir uns auch auf dessen Beweis in Heuser [23], S. 144.

Beweis: Wir führen den Beweis nicht komplett aus, sondern zeigen, dass wir genauso wie in [23] schließen können.

Für $[x_0, x_1]$ sei $\varphi_0(x) = y_\alpha(x)$, d. h.

$$\varphi_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_\alpha(\xi)) d\xi + \int_{x_0}^x \chi_{M(\alpha)}(\xi) \cdot [f(\xi, y_\alpha(\xi)) - \tilde{f}(\xi, y_\alpha(\xi))] d\xi,$$

und

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_0(\xi)) d\xi = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_\alpha(\xi)) d\xi.$$

Dann gilt

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \leq \alpha|x_1 - x_0| \cdot \omega \quad \text{auf } [x_0, x_1].$$

Da f und \tilde{f} auf $[x_0, x_1] \times [a, b]$ meßbar und beschränkt sind, sind φ_0 und φ_1 stetige Funktionen. Der Rest des Beweises folgt nun wortwörtlich [23], S. 144.

q.e.d.

Anhang B

Wichtige mathematische Sätze

B.1 Maßtheoretische Grundlagen

Definition B.1 (σ -Algebra) (Werner [35], Definition A.1.1, S. 457.) *Sei T eine Menge, und sei Σ ein System von Teilmengen von T mit den Eigenschaften*

- a) $\emptyset \in \Sigma$,
- b) $E \in \Sigma \Rightarrow T \setminus E \in \Sigma$,
- c) $E_1, E_2 \in \Sigma \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.

Dann heißt Σ eine Algebra. Gilt statt c)

$$c^*) E_1, E_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma,$$

dann heißt Σ eine σ -Algebra.

Definition B.2 (Maß, signiertes Maß) ([35], Definition A.2.1, S. 457, Definition A.4.1, S. 467.) *Sei Σ eine σ -Algebra auf einer Menge T . Eine Abbildung $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein Maß, wenn*

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- b) μ σ -additiv ist, d. h., wenn für paarweise disjunkte $E_1, E_2, \dots \in \Sigma$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Eine Abbildung $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein signiertes Maß, falls μ σ -additiv ist.

Ein Maß ist demnach im Unterschied zu signierten Maßen eine Abbildung mit ausschließlich nichtnegativen Werten.

Definition B.3 (Variation eines Maßes) ([35], Definition A.4.2, S. 467.) Sei μ ein signiertes Maß auf Σ und $A \in \Sigma$. Setze

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{k=1}^n |\mu(A_k)|,$$

wobei das Supremum über alle endlichen Zerlegungen $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit paarweise disjunkten $A_k \in \Sigma$ zu bilden ist. $|\mu|(A)$ heißt Variation von μ auf A .

Satz B.4 ([35], Satz A.4.3, S. 467.) Ist μ ein signiertes Maß, so definiert $A \rightarrow |\mu|(A)$ ein endliches Maß.

Satz B.5 (Hahn-Jordan-Zerlegung) ([35], Satz A4.4, S. 467.) Sei Σ eine σ -Algebra auf einer Menge T und $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ein signiertes Maß.

a) Es existiert ein bis auf eine $|\mu|$ -Nullmenge eindeutig bestimmtes $A^+ \in \Sigma$ mit

- $0 \leq \mu(A) \leq \mu(A^+)$ für alle $A \in \Sigma$, $A \subseteq A^+$,
- $0 \geq \mu(A) \geq \mu(A^-)$ für alle $A \in \Sigma$, $A \subseteq A^- := T \setminus A^+$.

b) $\mu^+ = \chi_{A^+} \mu$ und $\mu^- = \chi_{A^-} \mu$ sind endliche Maße mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

c) $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$.

Die Zerlegung $A = A^+ \cup A^-$ heißt Hahn-Zerlegung, und die Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ heißt Jordan-Zerlegung.

B.2 Integration bzgl. Borelscher Maße

Es sei μ ein Maß über der σ -Algebra der Borelmengen auf \mathbb{R} .

Eine nichtnegative Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf $[a, b]$ meßbar, wenn es eine monoton wachsende Folge $\{f_n(x)\}$, d. h. $f_n(x) \leq f_m(x)$ auf $[a, b]$ für alle $m \geq n$, von nichtnegativen Treppenfunktionen gibt, die punktweise gegen f konvergiert (Elstrodt [16], Satz 4.13, S. 108). Ist die nichtnegative Funktion f auf $[a, b]$ meßbar, so ist die Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\mu(x)$$

nur von f und nicht von der zur Darstellung von f verwendeten monoton wachsenden Folge $\{f_n\}$ nichtnegativer Treppenfunktionen abhängig (Bauer [3], Korollar 11.2, S. 66). Wir nennen eine nichtnegative Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar, falls eine monoton wachsende Folge $\{f_n\}$ nichtnegativer Treppenfunktionen auf $[a, b]$ existiert, die punktweise gegen f konvergiert. Die Zahl

$$\int_a^b f d\mu = \int_a^b f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\mu(x),$$

welche unabhängig von der speziellen Darstellung mittels $\{f_n\}$ ist, heißt das μ -Integral von f über $[a, b]$ ([3], Definition 11.3, S. 67).

Eine meßbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt μ -integrierbar, falls ihr Positivteil $f^+ : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ und ihr Negativteil $f^- : [a, b] \rightarrow (-\infty, 0]$ μ -integrierbar sind und die μ -Integrale $\int_a^b f^+ d\mu, \int_a^b f^- d\mu$ reelle Zahlen sind. Dann heißt

$$\int_a^b f d\mu = \int_a^b f^+ d\mu - \int_a^b f^- d\mu$$

das μ -Integral von f über $[a, b]$ ([3], Definition 12.1, S. 74).

Es sei μ ein signiertes Maß, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ seine Jordan-Zerlegung und $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar. Dann heißt f μ -integrierbar, falls f $|\mu|$ -integrierbar ist. Wir setzen

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$$

([35], Definition A.4.5, S. 468).

Definition B.6 (Borelsches Maß) ([35], Definition I.2.13, S. 32). Sei T ein metrischer (oder auch topologischer) Raum, Σ die σ -Algebra der Borelmengen (also die von den offenen Mengen erzeugte σ -Algebra). Ein Maß μ auf Σ heißt Borelsches Maß. Ein Borelsches Maß μ heißt regulär, falls

- a) $\mu(C) < \infty$ für alle kompakten C ,
- b) für alle $A \in \Sigma$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, C \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(O) \mid A \subset O, O \text{ offen}\}.$$

Ein signiertes Borelmaß heißt regulär, wenn seine Variation regulär ist.

$M(T)$ bezeichnet die Gesamtheit der signierten regulären Borelmaße.

Folgerung B.7 ([16], Folgerung 2.22, S. 342.) Ein signiertes reguläres Maß ist genau dann regulär, wenn der positive und negative Anteil μ^+ und μ^- der Jordan-Zerlegung reguläre Maße sind.

Lemma B.8 ([35], Beispiel I.1(j), S. 21 f.) $M(T)$, versehen mit der Variationsnorm, ist ein Banachraum.

Definition B.9 (isometrischer Isomorphismus) ([35], Definition II.1.9, S. 55.) Ein linearer stetiger Operator zwischen normierten Räumen $L : X \rightarrow Y$ heißt Isomorphismus, falls L bijektiv und L^{-1} stetig ist.

Gilt $\|Lx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$, so heißt L isometrisch. Normierte Räume, zwischen denen ein (isometrischer) Isomorphismus existiert, heißen (isometrisch) isomorph, in Zeichen $X \simeq Y$ (bzw. $X \cong Y$).

Satz B.10 (Rieszscher Darstellungssatz) [35], Theorem II.2.5, S. 62.) *Sei K ein kompakter metrischer (oder topologischer) Raum. Dann ist $C(K)^* \cong M(K)$ unter der Abbildung*

$$L : M(K) \rightarrow C(K)^*, \quad (L\mu)(x) = \int_K x d\mu.$$

Dieser Satz wurde von F. Riesz für positive Linearformen auf der Menge stetiger Funktionen mit kompaktem Träger formuliert ([16], Satz 2.5, S. 331 f). Aus dieser Version des Darstellungssatzes von Riesz für positive Linearformen folgt

Folgerung B.11 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es sei μ ein signiertes reguläres Borelsches Maß über I mit*

$$\int_I x(t) d\mu(t) \geq 0$$

für alle nichtnegative Funktionen $x(\cdot) \in C(I, \mathbb{R})$.

Dann ist μ ein nichtnegatives reguläres Borelsches Maß.

Beweis: Wir geben einen Beweis an, der sich aus Alt [1], Ü 4.9, S. 138 f, ergibt. Wir müssen zeigen, dass $\mu(E) \geq 0$ für alle offenen Teilmengen $E \subseteq I$ gilt. Da μ regulär – dies ist nach Folgerung B.7 genau dann der Fall, wenn der positive und negative Anteil μ^+ und μ^- der Jordan-Zerlegung regulär sind – ist, muss dazu $\mu(K) \geq 0$ für kompakte Mengen $K \subset E$ gezeigt werden.

Es sei $E \subset I$ offen und K eine kompakte Teilmenge von E . Dann sei $d(t, K)$ der Abstand des Punktes t von Menge K , d. h.

$$d(t, K) = \inf \{|t - k| \mid k \in K\}.$$

Wir definieren für $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$x_\varepsilon(t) := \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} d(t, K) \right\}.$$

Auf I ist diese Funktion stetig und es gilt $0 \leq x_\varepsilon(t) \leq 1$, und es ist $x_\varepsilon(t) = 1$ auf K . Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir

$$0 \leq \int_I x_\varepsilon(t) d\mu(t) \rightarrow \mu(K).$$

q. e. d.

Satz B.12 (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung) ([16], Satz 6.7, S. 154.) *Es seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Wir formulieren nun eine Version der Regel der partiellen Integration, die wir in den Abschnitten 2.6 und 4.5 verwenden.

Satz B.13 (Partielle Integration) Auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ seien F eine absolutstetige Funktion und ν ein signiertes reguläres Borelsches Maß mit seiner Jordan-Zerlegung $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Wir setzen für $t \in [a, b]$:

$$V^+(t) = \int_a^t d\nu^+(\tau), \quad V^-(t) = \int_a^t d\nu^-(\tau)$$

und

$$V(t) = \int_a^t d\nu(\tau) = V^+(t) - V^-(t).$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(t) d\nu(t) + \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt = [F(t) \cdot V(t)]_a^b.$$

Wir verwenden in den Abschnitten 2.6 und 4.5 diese Regel zur Berechnung des Integrals bzgl. des Borelschen Maßes gemäß

$$\int_a^b F(t) d\nu(t) = [F(t) \cdot V(t)]_a^b - \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt.$$

Daher liegt der Akzent des Satzes in der Integration bzgl. des Borelschen Maßes.

Beweis: 1. Schritt: Es sei ν ein reguläres Borelsches Maß auf $[a, b]$. Die Funktion F ist absolutstetig, also auch stetig und insbesondere auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Damit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$F(t_1) - F(t_2) \leq \frac{\varepsilon}{V(b) - V(a)}$$

für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $|t_1 - t_2| \leq \delta$. Ferner gibt es Folgen $\{g_n\}, \{f_n\}$ von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) d\nu(t) = \int_a^b F(t) d\nu(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt.$$

Da ν ein reguläres Borelsches Maß ist, ist die Funktion V auf $[a, b]$ monoton, nichtnegativ, beschränkt und ist höchstens in abzählbar vielen Punkten unstetig (Natanson [26], Satz 1, S. 229). Es seien nun $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ Punkte des Intervalls $[a, b]$, die eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit der maximalen Schrittweite δ definieren und für $j = 1, \dots, m - 1$ Stetigkeitspunkte der Funktion V darstellen. Dann gilt

$$\nu([x_{i-1}, x_i] \cap [x_i, x_{i+1}]) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m - 1,$$

und wir dürfen zu Integralen auf den Teilintervallen übergehen ([16], Korollar 5.5, S. 145):

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt + \int_a^b F(t) d\nu(t) - (F(b) \cdot V(b) - F(a) \cdot V(a)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(t) d\nu(t) \right) \right. \\ & \quad \left. - (F(b) \cdot V(b) - F(a) \cdot V(a)) \right|. \end{aligned}$$

Diese spezielle endliche Zerlegung des Intervalls hat keinen Einfluss auf die Integrale

$$\int_a^b F(t) d\nu(t), \quad \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt,$$

weil diese unabhängig von der zur Darstellung verwendeten Folgen sind. Denn es seien

$$f_n(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j \cdot \chi_{A_j}(t), \quad g_n(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \eta_j \cdot \chi_{B_j}(t).$$

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_{mn}(t) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} y_j \cdot \chi_{A_j \cap [x_{i-1}, x_i]}(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j \cdot \chi_{A_j}(t) = f_n(t), \\ g_{mn}(t) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \eta_j \cdot \chi_{B_j \cap [x_{i-1}, x_i]}(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \eta_j \cdot \chi_{B_j}(t) = g_n(t), \end{aligned}$$

und unabhängig von der Zahl $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{mn}(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_{mn}(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dt = \int_a^b F(t) d\nu(t). \end{aligned}$$

V ist auf $[a, b]$ monoton und $t \rightarrow F'(t)$ ist Lebesgue-integrierbar. Daher können wir auf jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ den Mittelwertsatz B.12 anwenden. Demnach existieren Punkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt &= V(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} F'(t) dt + V(x_i) \int_{\xi_i}^{x_i} F'(t) dt \\ &= V(x_i) \cdot F(x_i) - V(x_{i-1}) \cdot F(x_{i-1}) - F(\xi_i)(V(x_i) - V(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Damit setzen wir in obiger Rechnung fort und es folgt

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^m (V(x_i) \cdot F(x_i) - V(x_{i-1}) \cdot F(x_{i-1})) - (F(b) \cdot V(b) - F(a) \cdot V(a)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(V(x_i) - V(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(t) d\nu(t) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} |F(t) - F(\xi_i)| d\nu(t) \leq \frac{\varepsilon}{V(b) - V(a)} \cdot \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\nu(t) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Schritt: Es sei ν ein signiertes reguläres Borelsches Maß auf $[a, b]$.

Mit der Jordan-Zerlegung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b F(t) d\nu(t) + \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt \\
&= \int_a^b F(t) d\nu^+(t) + \int_a^b \left(\int_a^t d\nu^+(\tau) \right) F'(t) dt \\
&\quad - \left[\int_a^b F(t) d\nu^-(t) + \int_a^b \left(\int_a^t d\nu^-(\tau) \right) F'(t) dt \right].
\end{aligned}$$

Da V^+ und V^- monotone Funktionen sind, können wir die Argumentation des ersten Schrittes auf diese Integrale anwenden und erhalten, dass diese Integrale gleich $[F(t) \cdot V^+(t)]_a^b$ bzw. $[F(t) \cdot V^-(t)]_a^b$ sind. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b F(t) d\nu(t) + \int_a^b \left(\int_a^t d\nu(\tau) \right) F'(t) dt &= [F(t) \cdot V^+(t)]_a^b - [F(t) \cdot V^-(t)]_a^b \\
&= [F(t) \cdot V(t)]_a^b.
\end{aligned}$$

q. e. d.

In Kapitel 4.7 führen wir die Aufgabe mit freier Zeit mit Hilfe einer Substitution der Zeit auf eine Aufgabe mit festem Anfangs- und Endzeitpunkt zurück. Bei der anschließenden Rücktransformation gilt es zu klären, was mit den regulären Borelschen Maßen geschieht.

Es sei \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} die Borelsche σ -Algebra über dem kompakten Intervall $[0, 1]$ bzw. $[a, b]$. Ferner sei $T : ([0, 1], \mathfrak{A}) \rightarrow ([a, b], \mathfrak{B})$ eine meßbare Abbildung. Dann wird für jedes Maß ν auf \mathfrak{A} durch

$$B \rightarrow \mu(T^{-1}(B))$$

ein Maß μ auf \mathfrak{B} definiert ([3], Satz 7.5, S. 43).

Lemma B.14 *Es sei ν ein Maß auf \mathfrak{A} und $T : ([0, 1], \mathfrak{A}) \rightarrow ([a, b], \mathfrak{B})$ definiert gemäß*

$$T(s) = a + (b - a)s, \quad s \in [0, 1].$$

Dann ist $T : ([0, 1], \mathfrak{A}) \rightarrow ([a, b], \mathfrak{B})$ eine meßbare bijektive Abbildung und es gilt mit dem Bildmaß μ bzgl. T die Beziehung

$$\int_a^b \psi(t) d\mu(t) = \int_0^1 \psi(T(s)) d\nu(s) \quad \text{für alle } \psi(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

Ferner ist mit ν auch das Bildmaß μ ein reguläres Borelsches Maß.

Beweis: Die Abbildung T ist stetig, also auch meßbar. Nach Definition des Bildmaßes und aus der Bijektivität von T folgt außerdem

$$\int_a^b \psi(t) d\mu(t) = \int_a^b \psi(t) d\nu(T^{-1}(t)) = \int_0^1 \psi(T(s)) d\nu(s)$$

für alle $\psi(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{R})$. Ferner bleiben unter der Abbildung T die Eigenschaften eines regulären Borelschen Maßes, d. h. die Endlichkeit bzgl. kompakter Mengen und die Stetigkeit von innen und außen, erhalten.

q. e. d.

In Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen kann die adjungierte Funktion Unstetigkeiten aufweisen. Wir werden nun zeigen, dass sie jedoch stets von beschränkter Variation und linksseitig stetig ist (Lemma B.16).

Ein Maß μ auf einer σ -Algebra der Menge Ω wird *Wahrscheinlichkeitsmaß* (kurz: *W-Maß*) genannt, wenn $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Wir betrachten nun speziell ein W-Maß auf der Borelschen σ -Algebra über \mathbb{R} . Dieser gehört das offene Intervall $(-\infty, x)$ an. Somit wird durch

$$F_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$$

eine reelle Funktion F_μ auf \mathbb{R} mit Werten in $[0, 1]$ definiert. Man nennt F_μ die *Verteilungsfunktion* von μ ([3], S. 38).

Wir präsentieren nun ein Resultat über den Zusammenhang von Maßen und Verteilungsfunktionen, das nicht nur bzgl. Borelscher Maße Gültigkeit besitzt. Da wir dieses im Zuge der Integrationen in den Abschnitten 2.6 und 4.5 verwenden, ordnen wir folgenden Satz in diesen Abschnitt über die Integration bzgl. Borelscher Maße ein:

Satz B.15 ([3], Satz 6.6, S. 38.) *Eine reelle Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R} ist genau dann die Verteilungsfunktion eines – notwendigerweise eindeutig bestimmten – W-Maßes μ auf der Borelschen σ -Algebra auf \mathbb{R} , wenn F maßerzeugend (also isoton und linksseitig stetig) ist und wenn außerdem gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Durch $\mu \mapsto F_\mu$ wird somit die Menge der W-Maße auf der Borelschen σ -Algebra bijektiv auf die Menge der maßerzeugenden Funktionen F auf \mathbb{R} mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

abgebildet. Hierin liegt die Bedeutung des Satzes ([3], S. 39).

Lemma B.16 *Es sei μ ein reguläres Borelsches Maß auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit positiver Totalvariation. Dann ist für beliebiges $f(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{R})$ die Funktion*

$$\Phi(t) = \int_t^b f(\tau) d\mu(\tau), \quad t \in [a, b],$$

von beschränkter Variation und linksseitig stetig.

Beweis: Die Aussage über die beschränkte Variation ist offensichtlich. Zur Begründung der linksseitigen Stetigkeit führen wir das Lemma auf Satz B.15 zurück:

Wir setzen das Maß μ auf \mathbb{R} derart fort, dass $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ eine μ -Nullmenge bildet. O. B. d. A. besitze μ Totalvariation Eins. Dann ist μ eindeutig bestimmt ([3], Satz 5.4, S. 26) und ein W-Maß. Ferner ist die Funktion

$$F(t) = \mu(-\infty, t) = 1 - \int_t^\infty d\mu(\tau)$$

nach Satz B.15 linksseitig stetig.

Angenommen, Φ ist in $t \in (a, b]$ nicht linksseitig stetig. D. h., es existiert eine monoton wachsende Folge $\{t_n\}$, $t_n \in [a, b]$, $t_n \rightarrow t$, mit

$$\begin{aligned} 0 &< \lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(t_n) - \Phi(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{t_n}^t f(\tau) d\mu(\tau) \right| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^t d\mu(\tau) = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |F(t_n) - F(t)| = 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch! Also ist Φ linksseitig stetig.

q. e. d.

B.3 Sätze der Funktionalanalysis

Satz B.17 ([22], Satz 128.2, S. 102.) *Für jedes feste $y \in I$ sei die Funktion $f(x, y)$ partiell nach x differenzierbar, und es gebe eine Lebesgue-integrierbare Funktion g mit*

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \leq g(y) \quad \text{für alle } x \in [a, b], y \in I.$$

Dann ist die Funktion $\partial f(x, y)/\partial x$ für jedes feste $x \in [a, b]$ Lebesgue-integrierbar auf I , die Funktion

$$F(x) = \int_I f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

ist differenzierbar auf $[a, b]$ und ihre Ableitung kann „durch Differentiation unter dem Integral“ gewonnen werden, kurz: es ist

$$\frac{d}{dx} \int_I f(x, y) dy = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

Satz B.18 (Satz von Hahn-Banach; Trennungsversion I) ([35], Theorem III.2.4, S. 103, Theorem VIII.2.11, S. 379.) *Sei X ein normierter linearer (oder lokalkonvexer) Raum, $V_1, V_2 \subset X$ seien konvex und V_1 zusätzlich noch offen. Weiterhin gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert ein nichttriviales $x^* \in X^*$ mit*

$$x^*(v_1) < x^*(v_2) \quad \text{für alle } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Es sei V eine konvexe Teilmenge des normierten linearen oder lokalkonvexen Raumes X . Dann sind auch ihr Inneres $\text{int } V$ und ihr Abschluss \bar{V} konvex. Ist insbesondere $\text{int } V \neq \emptyset$, so gilt $\bar{V} = \overline{\text{int } V}$ und $\text{int } \bar{V} = \text{int } V$ ([25], Hilfssatz 4, S. 151). Mit diesen Eigenschaften konvexer Mengen folgt unmittelbar aus dem Satz von Hahn-Banach:

Folgerung B.19 ([25], Trennungssatz, S. 30.) *Es seien V_1 und V_2 disjunkte konvexe Mengen in einem linearen topologischen Raum X . Überdies sei $\text{int } V_1 \neq \emptyset$. Dann existiert auf X ein nichttriviales stetiges lineares Funktional x^* mit*

$$x^*(v_1) \leq x^*(v_2) \quad \text{für alle } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Definition B.20 (Offene Abbildung) ([35], Definition IV.3.1, S. 151.) *Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.*

Satz B.21 (Satz von der offenen Abbildung) ([35], Theorem IV.3.3, S. 152.) *Seien X und Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.*

Satz B.22 (Fixpunktsatz von Weissinger) ([23], Satz 12.1, S. 138.) *Es sei V eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes X mit Norm $\|\cdot\|$, ferner $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen und $A : V \rightarrow V$ eine Selbstabbildung von V mit*

$$\|A^n v_1 - A^n v_2\| \leq \alpha_n \|v_1 - v_2\| \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt A genau einen Fixpunkt, d. h., es gibt genau ein $v \in V$ mit $Av = v$. Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge $\{A^n v_0\}$ bei völlig beliebigem Startelement $v_0 \in V$, also derjenigen Folge $\{v_n\}$, die rekursiv durch die nachstehenden Festsetzungen definiert wird:

$$v_0 \in V \text{ willkürlich, } v_n := Av_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Und schließlich gilt noch die Fehlerabschätzung

$$\|v - v_n\| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \right) \|v_1 - v_0\|.$$

B.4 Zum Limes superior im Clarke-Kalkül

Es sei X ein Banachraum und $f : A \subseteq X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann bildet für jede feste Teilmenge $B \subseteq A$ das Bild $f(B) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ eine Zahlenmenge, deren obere Grenze die *obere Grenze der Funktion f auf B* heißt (Carathéodory [10], S. 121). Diese Zahl – wobei wir dabei auch $\pm\infty$ zulassen – bezeichnen wir mit

$$G(f; B).$$

Es sei nun x_0 ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches A der Funktion f . Dann ist der Durchschnitt von A mit einer Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 nie leer. Wir betrachten nun die Menge der Zahlen $G(f; A \cap U(x_0))$ für alle möglichen Umgebungen $U(x_0)$ von x_0 ; die untere Grenze $\Phi(x_0)$ dieser Zahlenmenge heißt der *obere Limes der Funktion f im Punkt x_0* ([10], S. 122). Diesen oberen Limes $\Phi(x_0)$ bezeichnen wir auch mit

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Um $\Phi(x_0)$ zu berechnen, betrachten wir eine streng monoton fallende Nullfolge $\{\varrho_n\}$ und offene Kugeln $U_n(x_0)$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius ϱ_n . Wegen $U_{n+1}(x_0) \subset U_n(x_0)$ erhalten wir, wenn wir

$$\Phi_n(x_0) = G(f; A \cap U_n(x_0))$$

setzen, die monoton fallende Folge $\{\Phi_n(x_0)\}$. Für diese gilt, da $\Phi(x_0)$ die untere Grenze der Zahlenmenge $G(f; A \cap U(x_0))$ für alle möglichen Umgebungen $U(x_0)$ von x_0 ist, die Relation

$$\Phi(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x_0).$$

Andererseits existiert zu einer beliebigen vorgegebenen Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mindestens ein $U_k(x_0)$, das in $U(x_0)$ enthalten ist. Daher gibt es ein $\Phi_n(x_0)$, das nicht größer ist als $G(f; A \cap U(x_0))$; und damit auch die untere Grenze der $\Phi_n(x_0)$. Diese Betrachtungen zeigen ([10], S. 123)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x_0) \leq G(f; A \cap U(x_0)).$$

Da dies für jede willkürliche Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gilt, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x_0) \leq \Phi(x_0).$$

Es sei nun $\{x_n\}$ eine Folge von Punkten aus A , die gegen $x_0 \in \overline{A}$ konvergiert. Ist $\Phi(x_0) < +\infty$ und ist die Zahl $p > \Phi(x_0)$, so gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung $U(x_0)$, für die $G(f; A \cap U(x_0)) \leq p$ gilt. Es liegen aber nur endlich viele Punkte der Folge $\{x_n\}$ außerhalb von $U(x_0)$ und es gibt folglich nur höchstens endlich viele x_n , für die $f(x_n) > p$ sein kann. Hieraus folgt für den oberen Limes der Zahlenfolge

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq p.$$

Da p eine beliebige reelle Zahl ist, die der Ungleichung $G(f; A \cap U(x_0)) \leq p$ genügen soll, so ist auch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \Phi(x_0)$$

eine Bedingung, die offenbar auch dann erfüllt ist, wenn $\Phi(x_0) = +\infty$ ist. Wir halten damit fest ([10], Satz 3, S. 123):

Ist x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion f , so gilt für jede gegen x_0 konvergierende Folge von Punkten x_1, x_2, \dots aus dem Definitionsbereich die Relation

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \Phi(x_0).$$

Ist nun $\Phi(x_0) = -\infty$, so konvergiert jede Folge von Zahlen $f(x_1), f(x_2), \dots$ gegen $\Phi(x_0)$. Ist aber $\Phi(x_0) > -\infty$, dann sei $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ eine monoton wachsende Folge von Zahlen, die gegen $\Phi(x_0)$ konvergiert. Aus $G(f; A \cap U_n(x_0)) \geq \Phi(x_0) > p_n$ folgt, dass man innerhalb einer jeden offenen Kugel $U_n(x_0)$ einen Punkt $x_n \in A$ auswählen kann, für den $f(x_n) > p_n$ ist.

Gibt es erstens nur endlich viele x_n , die vom Punkt x_0 verschieden sind, so ist $f(x_0) > p_n$ für alle $n \geq n_0$ mit einem gewissen n_0 und daher $f(x_0) \geq \Phi(x_0)$. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $x_0 \in A$ gilt; andererseits ist aber dann stets für jede Umgebung $U(x_0)$ die Ungleichung $f(x_0) \leq G(f; A \cap U(x_0))$ erfüllt und folglich $f(x_0) \leq \Phi(x_0)$ ([10], S. 125).

Im zweiten Fall, in welchem es unendlich viele x_n gibt, die von x_0 verschieden sind, können wir eine Teilfolge $\{x_m\}$ auswählen, in der es höchstens endlich viele Elemente gibt, für die $f(x_m) \leq p_n$ ist. Hieraus folgt aber

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} f(x_m) \geq p_n$$

und, da diese Ungleichung für alle n gilt,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} f(x_m) \geq \Phi(x_0).$$

Da aber obige Beziehung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \Phi(x_0)$$

auch für diese spezielle Folge gilt, können wir "≥" durch "=" ersetzen ([10], S. 126).

Satz B.23 ([10], Satz 4, S. 126) *Ist x_0 ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs A einer Funktion f , so gibt es stets eine gegen x_0 konvergierende Folge von Punkten x_1, x_2, \dots aus A , so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \Phi(x_0)$$

ist, oder x_0 ist ein Punkt von A , in dem

$$f(x_0) = \Phi(x_0)$$

ist. Diese beiden Möglichkeiten schließen sich aber nicht aus.

Anhang C

Ergänzungen zum Vorsorgemodell

C.1 Untersuchung der Multiplikatoren λ_0 und $p(T)$

Das Modell (5.1)–(5.5) untersuchen wir auf Vorsorge. Dabei interessiert uns nur die Situation, in der Vorsorge getroffen wird, also $A(\cdot) \neq 0$ gilt, und ein Wechselzeitpunkt $\tau \in (0, T)$ von der ersten in die zweite Strategie existiert.

Wir wollen nun zeigen, dass dies nur möglich ist, wenn o. B. d. A. $\lambda_0 = 1$ und $p(T) > 0$ gilt.

Im Fall $\lambda_0 = 0$ darf $p(T)$ nicht gleich Null sein, da sonst im Widerspruch zu Satz 4.14 $p(\cdot) = 0$ und $\lambda_0 = 0$ sind.

Ist nun $p(T) < 0$, so folgt aus (5.6) und der Maximumsbedingung (5.7) bzgl. der Strategie $i = 1$,

$$\max_{v, l \in [0, 1]} p(t) \cdot [v \cdot l \cdot L(t) \cdot S(t) + r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t)],$$

dass $p(t) < 0$ für alle t ist und die optimalen Steuerungen $v_*(\cdot)$, $l_*(\cdot)$ so gewählt werden, dass $v_*(t) \cdot l_*(t) \cdot L(t) \cdot S(t) = 0$ für fast alle t gilt. Daher gibt es kein Bestreben einen Vorsorgepool aufzubauen.

Ist $p(T) > 0$, so folgt $p(t)$ für alle t aus (5.6) und wir erhalten aus der Maximumsbedingung $v_*(t) = 1$ und $l_*(t) = 1$ für fast alle t . Daraus folgt aber in der Maximumsbedingung (5.7), dass die Strategie $i = 2$ genau dann bevorzugt wird, wenn

$$p(t) \cdot L(t) \cdot S(t) < p(t) \cdot (-\bar{a}) \cdot S(t)$$

gilt. Damit erhalten wir wegen

$$p(t) \cdot L(t) \cdot S(t) > 0 \geq p(t) \cdot (-\bar{a}) \cdot S(t) \text{ für fast alle } t \in (0, T)$$

einen Widerspruch zur Forderung eines Wechselzeitpunktes $\tau \in (0, T)$.

Es sei nun $\lambda_0 \neq 0$. Dann dürfen wir o. B. d. A. den Fall $\lambda_0 = 1$ betrachten.

Ist $p(T) = 0$, so folgt aus der Maximumsbedingung (5.7) bzgl. der Strategie $i = 1$,

$$\max_{v, l \in [0, 1]} [U((1 - v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l)] \cdot S(t) \cdot e^{-rt},$$

dass $l_*(t) \cdot v_*(t) = 0$ gilt. Denn entweder ist $l_*(t) = 0$ oder es ist $v_*(t) = 0$ für $l_*(t) > 0$. Dies bedeutet wiederum, dass die Altersgruppe keine Vorsorge schafft.

Ist $p(T) < 0$, so ist die Maximumsbedingung (5.7) bzgl. der Strategie $i = 1$ äquivalent zur Bedingung

$$\max_{v, l \in [0, 1]} \left\{ -|p(T)e^{rT} \cdot M(t)| \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l) \right\}.$$

Dies folgt, indem wir die Darstellung (5.8) für die adjungierte Funktion p verwenden, sowie $p(t) \cdot r \cdot (1 + \mu(t)) \cdot A(t)$ aus der Maximierung und anschließend den positiven Faktor $S(t) \cdot e^{-rt}$ vor die Maximierung ziehen. Es folgt wieder, dass $l_*(t) = 0$ oder $v_*(t) = 0$ für $l_*(t) > 0$ gilt; also kein Bestreben vorhanden ist, Vorsorge zu schaffen.

C.2 Diskussion der Maximumsbedingung (5.10)

Für ein festes $t \in [0, T]$ untersuchen wir die stetig differenzierbare Funktion

$$F(l, v) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot l \cdot L(t) + U((1-v) \cdot l \cdot L(t)) - V(t, l)$$

auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ auf Maximalstellen (l_*, v_*) .

Die Abbildung $l \rightarrow F_l(l, v)$ mit

$$F_l(l, v) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot v \cdot L(t) + U'((1-v) \cdot l \cdot L(t)) \cdot (1-v) \cdot L(t) - V_l(t, l)$$

ist streng monoton fallend, da sie (im Wesentlichen) Differenz der monoton fallenden¹ Funktion $l \rightarrow U'((1-v) \cdot l \cdot L(t))(1-v) \cdot L(t)$ und der streng monoton wachsenden Funktion $l \rightarrow V_l(t, l)$ ist.

Daraus folgt, dass die Abbildung $l \rightarrow F(l, v_*)$ ihr Maximum für

- $l_* = 0$ annimmt, falls $F_l(0, v_*) \leq 0$,
- $l_* = 1$ annimmt, falls $F_l(1, v_*) \geq 0$,
- $l_* \in (0, 1)$ annimmt, falls $F_l(0, v_*) > 0$ und $F_l(1, v_*) < 0$.

Die Abbildung $v \rightarrow F(l, v)$ ist für $l = 0$ identisch Null und wir erhalten vorerst keine Informationen über v_* . Für $l > 0$ ist $v \rightarrow F_v(l, v)$ mit

$$F_v(l, v) = [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'((1-v) \cdot l \cdot L(t))] \cdot l \cdot L(t)$$

eine streng monoton fallende Funktion, da $v \rightarrow U'((1-v) \cdot l \cdot L(t))$ streng monoton wachsend ist. Daher nimmt die Abbildung $v \rightarrow F(l_*, v)$ ihr Maximum für

- $v_* = 0$ an, falls $F_v(l_*, 0) \leq 0$,

¹Diese Monotonie ist nur für $v = 1$ nicht streng.

- $v_* = 1$ an, falls $F_v(l_*, 1) \geq 0$,
- $v_* \in (0, 1)$ an, falls $F_v(l_*, 0) > 0$ und $F_v(l_*, 1) < 0$.

Für $l_* = 0$ legen wir v_* über den Grenzwert $l_* \rightarrow 0$ fest. Wir erhalten unter der Annahme $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(0)$, $p(T)e^{rT} \cdot M(0) \geq p(T)e^{rT} \cdot M(t)$ für $t \in [0, T]$, dass $F_v(l_*, 0) \leq 0$ für hinreichend kleine Werte für l_* gilt. Daher setzen wir $v_* = 0$ im Fall $l_* = 0$. Aus den Beziehungen für $v \rightarrow F_v(l_*, v)$ folgt, dass das Produkt

$$\left[p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'((1 - v_*) \cdot l_* \cdot L(t)) \right] \cdot v_*$$

verschwindet, falls das Maximum in $v_* < 1$ angenommen wird. Daher folgt insbesondere

$$F_l(l, v_*) = \begin{cases} U'((1 - v_*) \cdot l \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l) & \text{für } v_* < 1, \\ p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, l) & \text{für } v_* = 1. \end{cases}$$

Da die einfließenden Abbildungen Konkavität der Funktion $F(l, v)$ liefern (sogar strenge Konkavität für $l \neq 0$), sind die eben aufgestellten notwendigen Bedingungen gleichzeitig hinreichend.

C.3 Schematische Übersicht

Wir fassen nun die vorhergehende Diskussion der Maximumsbedingung für die erste Strategie zusammen. Die nachstehende Übersicht umfaßt alle möglichen Situation.

A₁) „Vollzeit arbeiten und keine Vorsorge“, d. h. $l_* = 1, v_* = 0$, falls

$$\begin{aligned} F_l(1, 0) &= U'(L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, 1) \geq 0, \\ F_v(1, 0) &= [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'(L(t))] \cdot L(t) \leq 0; \end{aligned}$$

A₂) „Vollzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“, d. h. $l_* = 1, v_* \in [0, 1]$, falls

$$\begin{aligned} F_l(1, v_*) &= U'((1 - v_*) \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, 1) \geq 0, \\ F_v(1, v_*) &= [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'((1 - v_*) \cdot L(t))] \cdot L(t) = 0; \end{aligned}$$

A₃) „Vollzeit arbeiten und komplette Vorsorge“, d. h. $l_* = 1, v_* = 1$, falls

$$\begin{aligned} F_l(1, 1) &= p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, 1) \geq 0, \\ F_v(1, 1) &= [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'(0)] \cdot L(t) \geq 0; \end{aligned}$$

B₁) „Teilzeit arbeiten und keine Vorsorge“, d. h. $l_* \in [0, 1], v_* = 0$, falls

$$\begin{aligned} F_l(l_*, 0) &= U'(l_* \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*) = 0, \\ F_v(l_*, 0) &= [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'(l_* \cdot L(t))] \cdot l_* \cdot L(t) \leq 0; \end{aligned}$$

B_2) „Teilzeit arbeiten und teilweise Vorsorge“, d. h. $l_* \in [0, 1], v_* \in [0, 1]$, falls

$$F_l(l_*, v_*) = U'((1 - v_*) \cdot l_* \cdot L(t)) \cdot L(t) - V_l(t, l_*) = 0,$$

$$F_v(l_*, v_*) = [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'((1 - v_*) \cdot l_* \cdot L(t))] \cdot l_* \cdot L(t) = 0;$$

B_3) „Teilzeit arbeiten und komplette Vorsorge“, d. h. $l_* \in [0, 1], v_* = 1$, falls

$$F_l(l_*, 1) = p(T)e^{rT} \cdot M(t) \cdot L(t) - V_l(t, l_*) = 0,$$

$$F_v(l_*, 1) = [p(T)e^{rT} \cdot M(t) - U'(0)] \cdot l_* \cdot L(t) \geq 0;$$

C) „nicht arbeiten“, d. h. $l_* = 0, v_* = 0$, falls

$$F_l(0, 0) = U'(0) \cdot L(t) - V_l(t, 0) \leq 0.$$

Ist die Relation $U'(0) > p(T)e^{rT} \cdot M(t)$ für alle $t \in [0, T]$ erfüllt, dann entfallen in der Übersicht die Punkte A_3) und B_3).

Symbolverzeichnis

$x \in A, x \notin A$	—	das Element x gehört bzw. gehört nicht der Menge A an,
$A \cup B, A \cap B$	—	Vereinigung bzw. Schnitt der Mengen A und B ,
$A \setminus B$	—	Differenz der Mengen A und B ,
$A \subseteq B$	—	die Menge A ist Teilmenge der Menge B ,
$A \subset B$	—	die Menge A ist echte Teilmenge der Menge B ,
$A \times B$	—	kartesisches Produkt der Mengen A und B ,
$A + B$	—	Minkowski-Summe der Mengen A und B ,
\mathbb{R}	—	Menge der reellen Zahlen,
\mathbb{R}^n	—	n -dimensionaler euklidischer Raum,
$\inf A, \sup A$	—	untere bzw. obere Grenze der zur Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gehörenden Zahlen,
$\min A, \max A$	—	kleinste bzw. größte zur Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gehörende Zahl,
$\text{int } A$	—	Inneres der Menge A ,
$\text{conv } A$	—	konvexe Hülle der Menge A ,
$ A $	—	Lebesgue-Maß der meßbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}$,
$F : X \rightarrow Y$	—	Abbildung F der Menge X in die Menge Y ,
$f : X \rightarrow \mathbb{R}$	—	Funktion auf X ,
$x \rightarrow F(x)$	—	die Abbildung F ordnet dem Element x das Element $F(x)$ zu,
$F(A)$	—	Bild der Menge A bei der Abbildung F ,
$F^{-1}(A)$	—	Urbild der Menge A bei der Abbildung F ,
$\text{Im } F$	—	Wertemenge der Abbildung F ,
$\text{Ker } F$	—	Kern der Abbildung F ,
$\text{epi } f$	—	Epigraph der Funktion f ,
$\text{dom } f$	—	effektiver Definitionsbereich der Funktion f ,
$ x $	—	absoluter Betrag der Zahl $x \in \mathbb{R}$,
$\ x\ _X$	—	Norm des Elementes x im normierten Raum X ,
$\langle x, y \rangle_X$	—	Skalarprodukt der Elemente x, y im Hilbertraum X ,
X^*	—	Dualraum zum Raum X ,
x^*	—	stetiges lineares Funktional auf X ,
$\langle x^*, x \rangle$	—	Wert des linearen Funktionals x^* im Punkt x ,
$F'(x)$	—	erste bzw. Fréchet-Ableitung der Abbildung F ,
$F_x(x, y)$	—	Ableitung der Abbildung $x \rightarrow F(x, y)$,
$\delta F(x)$	—	erste Variation der Abbildung F ,
$f'(x; z)$	—	Richtungsableitung der Funktion f im Punkt x in Richtung z ,

- $f^\circ(x; z)$ — Clarke'sche Richtungsableitung der Funktion f im Punkt x in Richtung z ,
 $f_x^\circ(x, y; z)$ — Clarke'sche Richtungsableitung der Funktion $x \rightarrow f(x, y)$ in Richtung z ,
 $\partial f(x)$ — Clarke'sches Subdifferential der Funktion f im Punkt x ,
 $\partial_x f(x, y)$ — Clarke'sches Subdifferential der Funktion $x \rightarrow f(x, y)$,
 $\dot{x}(t)$ — Ableitung von $x(\cdot)$ nach t ,
 $PC([t_0, t_1], U)$ — Raum der stückweise stetigen Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$ mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, die nur endlich viele Sprungstellen im Inneren des betrachteten Zeitintervalls besitzen und rechtsseitig stetig sind,
 $PC^1([t_0, t_1], U)$ — Raum der auf $[t_0, t_1]$ stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Vektorfunktionen mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, deren Ableitungen in höchstens endlich vielen Punkten Sprungstellen besitzen und rechtsseitig stetig sind,
 $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — Raum der stetigen Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$,
 $C^m([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — Raum der m -mal stetig differenzierbaren Vektorfunktionen auf $[t_0, t_1]$,
 $L^\infty([t_0, t_1], U)$ — Raum der auf $[t_0, t_1]$ meßbaren und essentiell beschränkten Vektorfunktionen mit Werten in der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
 $\mathfrak{Z}_0^k([t_0, t_1])$ — Menge der k -fachen stückweisen Zerlegungen von $[t_0, t_1]$,
 $\mathfrak{Z}^k([t_0, t_1])$ — Menge der k -fachen Zerlegungen von $[t_0, t_1]$,

Literaturverzeichnis

- [1] Alt, H. W.: Lineare Funktionalanalysis. 2. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1992.
- [2] Barro, R. J. & Sala-I-Martin, X.: Economic Growth. McGraw-Hill, New York 1995.
- [3] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York 1992.
- [4] Bloom, D. E. & Canning, D. & Moore, M. J.: A Theory of Retirement. NBER Working Paper Series, Vol. w13630, 2007.
- [5] Boltjanski, W. G.: Mathematische Methoden der Optimalen Steuerung. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971.
- [6] Branicky, M. S. & Borkar, V. S. & Mitter, S. K.: A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems Discrete Event Systems, pp. 352–358, 1994.
- [7] Branicky, M. S.: General Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Analysis, and Control. Lecture Notes in Computer Science, Hybrid Systems III, 1996.
- [8] Branicky, M. S.: Introduction to Hybrid Systems. Control Engineering, Handbook of Networked and Embedded Control Systems, pp. 91–116, 2005.
- [9] Caines, P. E. & Clarke, F. H. & Liu, X. & Vinter, R. B.: A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems with Pathwise State Constraints. 45th Conference on Decision and Control, San Diego, 2006.
- [10] Carathéodory, C.: Vorlesungen Über Reelle Funktionen, Third Edition. Chelsea Publishing Company 1968.
- [11] Clarke, F.: Optimization and Nonsmooth Analysis. John Wiley & Sons, New York 1983.
- [12] Clarke, F. H. & Vinter, R. B.: Optimal multiprocesses. SIAM J. Control and Optimization, 27, pp. 1072–1091, 1989.

- [13] Clarke, F. H. & Vinter, R. B.: Applications of Optimal Multiprocesses. *SIAM J. Control and Optimization*, 27, pp. 1048–1071, 1989.
- [14] Dmitruk, A. V. & Kaganovich, A. M.: The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle. *Systems & Control Letters*, 2008, Vol. 57, no. 11, p. 964–970.
- [15] Dubovickij, A. Ya. & Miljutin, A. A.: Extremal problems in the presence of constraints. *Zh.Vychisl.Mat.i.Mat.Fiz.*5, pp. 393–453, 1960. (Englische Übersetzung in *USSR Comput.Math.Math.Phys.*5, 1965.)
- [16] Elstrodt, J.: Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1996.
- [17] Feichtinger, G. & Hartl, R. F.: Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse. Walter der Gruyter-Berlin-New York 1986.
- [18] Galbraith, G. N. & Vinter, R. B.: Optimal control of hybrid systems with an infinite set of discrete states. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 9, pp. 563 – 584, 2003.
- [19] Garavello, M. & Piccoli, B.: Hybrid Necessary Principle. *SIAM J. Control Optim.*, 43, pp. 1867–1887, 2005.
- [20] Hartl, R. F. & Sethi, S. P. & Vickson, G.: A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints. *SIAM Review*, 37 (2), pp. 181–218, 1995.
- [21] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. 11. Auflage. B. G. Teubner Stuttgart 1994.
- [22] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 2. 11. Auflage. B. G. Teubner Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden 2000.
- [23] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Auflage. B. G. Teubner Stuttgart 1995.
- [24] Heuser, H.: Funktionalanalysis. 3. Auflage. B. G. Teubner Stuttgart 1992.
- [25] Ioffe, A. D. & Tichomirov, V. M.: Theorie der Extremalaufgaben. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1979.
- [26] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt/Main 1981.
- [27] Plail, M.: Die Entwicklung der optimalen Steuerungen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1998.

- [28] Pontrjagin, L. S. & Boltjanskij, V. G. & Gamkrelidze, R. V. & Misčenko, E. F.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. R. Oldenbourg, München-Wien 1964.
- [29] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1970.
- [30] Seierstad, A. & Sydsæter, K.: *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo 1987.
- [31] Shaikh, M. S.: *Optimal control of hybrid systems: Theory and algorithms*. Ph.D. dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, McGill University, Montreal, Canada, May 2004.
- [32] Shaikh, M. S. & Caines, P. E.: On the hybrid optimal control problem: Theory and algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, pp. 1587–1603, 2007.
- [33] Sussmann, H. J.: A nonsmooth hybrid maximum principle. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences 246*, Springer, pp. 325–354, London 1999.
- [34] Wagner, M.: Pontryagin’s maximum principle for multidimensional control problems in image processing. *J. Optim. Theory Appl.* 140, pp. 543–576, 2009.
- [35] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1995.