

Probabilistische Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsanalysen für schlanke Stahlbetonstützen auf Basis der Quasi-Monte Carlo Methode

Von der Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Stadtplanung der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

von

Dipl.-Ing. Ronald Schwuchow
aus Berlin

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Peter Osterrieder
Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Dr. phil. Konrad Bergmeister

Tag der Disputation: 03. Dezember 2009

Kurzfassung

Auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie werden in dieser Arbeit zuverlässigkeitstheoretische Untersuchungen von schlanken bi-axial beanspruchten Stahlbetonstützen durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschreibt und analysiert dabei Situationen, bei denen Zufall und insbesondere Unsicherheiten vorhanden sind. Die Untersuchungen des Zuverlässigkeitsproblems erfordern die Entwicklung und Implementierung eines komplexen probabilistischen Modells. Neben der deterministischen strukturmechanischen Grundlösung erfolgt zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit die Erfassung von Unsicherheiten in einem stochastischen Modell.

Als strukturmechanische Grundlösung wird ein deterministisches Berechnungsmodell auf Basis der Finiten Elemente Methode entwickelt. Das dafür genutzte Bernoulli-Navier-Balkenelement erlaubt die geometrisch und physikalisch nichtlineare Auswertung der notwendigen impliziten Grenzzustandsfunktion. Die Brauchbarkeit des numerischen Modells zur Abbildung des Tragverhaltens wird im Zuge der Validierung und der Bestimmung der Modellunsicherheiten bestätigt. Ergänzend werden Vergleichsstudien anhand von ausgewählten Experimenten durchgeführt.

Aufgrund komplexer Grenzzustandsfunktionen kommen Monte Carlo Methoden zur Anwendung. Dabei ist es wegen der geringen Zielwahrscheinlichkeit im Bauwesen von ca. 10^{-6} notwendig, die Varianz der Schätzfunktion zu vermindern, um den numerischen Aufwand auf ein effizientes Maß zu reduzieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird dazu die Quasi-Monte Carlo Methode auf strukturmechanische Fragestellungen adaptiert. Es werden im Unterschied zur klassischen Monte Carlo Simulation quasi-Zufallszahlen aus mathematischen Folgen kleiner Diskrepanz generiert. Für stochastische Zustandsgrößen und Verteilungsfunktionen werden wichtige Parameter zur Beschreibung von Material-, Geometrie- und Lastgrößen bereitgestellt.

Auf Basis des entwickelten probabilistischen Modells werden systematische Untersuchungen von schlanken Stahlbetonstützen vorgestellt. Dabei werden das Sicherheitskonzept des Eurocode 2 sowie das Sicherheitsniveau des Modellstützenverfahrens nach Model Code 1990 genauer untersucht. Neben der Berechnung des Zuverlässigkeitsniveaus wird der Einfluss einzelner Parameter im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse bestimmt.

Abstract

Within the framework of this study, probability theory is applied to the reliability analysis of slender reinforced concrete columns. Probability theory is a mathematical background to describe and analyze situations where randomness or uncertainties are present. Therefore a probabilistic model is developed to approximate the complex nature of the system. The probabilistic model is based on the structural deterministic solution of the bearing behaviour with added statistical methods to calculate the probability of failure.

Finite element method is the base of the deterministic approach to calculate the nonlinear and implicit limit state function. The implemented Bernoulli-Navier beam element is applied in geometrically and materially nonlinear analyses of concrete columns. The confidence in the numerical finite element model is evaluated during determination of model uncertainties. During the verification process the model is validated by means of comparative analyses of experimental results.

Due to complex implicit performance functions Monte Carlo method is used. Because of very low target probabilities of 10^{-6} accepted in structural design, there are high requirements on the sampling method. In order to increase statistically efficiency of the simulation or to obtain smaller confidence intervals of the results, variance reduction techniques can be used. In the context of this work the Quasi-Monte Carlo method is applied to structural problems. In contrast to the ordinary Monte Carlo simulation, quasi-random numbers are generated from low-discrepancy sequences. Necessary parameters and probability density functions are provided for statistical description of material, geometry and load values.

On the basis of the developed probabilistic model, systematic investigations of slender reinforced concrete columns are presented. The design concept of Eurocode 2 as well as the safety level of model column procedure of the Model Code 1990 is examined more exactly. The reliability level as well as its sensitivity behaviour to individual parameters is calculated and analyzed.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2005-2010 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Massivbau der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus.

Mein besonderer Dank gilt den Hauptreferenten Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Osterrieder und Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.phil. Konrad Bergmeister für die bereitwillige Unterstützung, das große Interesse an der Arbeit und die hervorragende wissenschaftliche Betreuung.

Beim Lehrstuhlleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Ralf Avak möchte ich mich ganz besonders für seine Hilfestellungen in der Anfangsphase der Bearbeitung bedanken. Herrn Prof. Dr.-Ing. Werner Lorenz danke ich für sein Interesse und seine Bereitschaft, den Vorsitz im Promotionsverfahren zu übernehmen.

Allen meinen Kollegen und den Mitarbeitern am Lehrstuhl und der Forschungs- und Material-Prüfanstalt möchte ich meinen Dank aussprechen. Die konstruktive Zusammenarbeit und das hervorragende Arbeitsklima haben meine Arbeit sehr gefördert.

Schließlich danke ich Frau Kalz für die Bearbeitung der Abbildungen sowie allen Personen, die mir jederzeit zur Seite standen.

Berlin, im April 2010

Ronald Schwuchow

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis.....	V
Tabellenverzeichnis	XI
Verzeichnis der Symbole, Indizes und Abkürzungen.....	XIII
1 Einleitung.....	1
1.1 Einführung	1
1.2 Problemstellung	2
1.3 Zielsetzung und Gliederung des vorliegenden Beitrages	3
2 Trag- und Verformungsverhalten schlanker Stahlbetonstützen.....	7
2.1 Allgemeine Parameter und Eigenschaften.....	7
2.2 Tragverhalten von schlanken Stützen	8
2.2.1 Allgemeiner Überblick.....	8
2.2.2 Uni-axiales Tragverhalten.....	8
2.2.3 Räumliches Tragverhalten	11
2.2.4 Sonderfall der Gleichgewichtsverzweigung	13
2.3 Berechnungsverfahren	13
2.4 Formulierung durch inkrementelle Gleichgewichtsgleichungen.....	15
2.4.1 Konsistente Beschreibung der Stützenbewegung	15
2.4.2 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung bei Stahlbetonstützen.....	18
2.4.3 Umsetzung des Green-Lagrangeschen Verzerrungsmaßes.....	19
2.4.4 Iterative Gleichgewichtsgleichung.....	20
2.5 Materialeigenschaften.....	21
2.5.1 Allgemeines.....	21
2.5.2 Beton	22
2.5.3 Betonstahl.....	25
2.5.4 Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen.....	26

2.6	Zeitvariante Fragestellungen	27
2.6.1	Kriechen.....	27
2.6.2	Dauerhaftigkeit	28
2.7	Imperfektionen	28
2.8	Konstruktive und baupraktische Fragestellungen	28
2.8.1	Konstruktive Durchbildung	28
2.8.2	Baupraktische Durchbildung	29
3	Probabilistische Zuverlässigkeitsanalyse	31
3.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	31
3.2	Sicherheit und Zuverlässigkeit	32
3.2.1	Technische Sicherheit, Risiko	32
3.2.2	Subjektives Sicherheitsempfinden.....	34
3.2.3	Versagen und Grenzzustand	35
3.3	Verteilungsfunktionen lösungsrelevanter Parameter	37
3.3.1	Wahrscheinlichkeitsverteilungen für stetige Zufallsvariablen	37
3.3.2	Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen.....	40
3.4	Versagenswahrscheinlichkeit und Grenzzustandsfunktion	42
3.4.1	Versagenswahrscheinlichkeit	42
3.4.2	Implizite Grenzzustandsfunktionen und deren Beschreibung	44
3.5	Sicherheitskonzepte – Berechnungsniveaus	45
3.5.1	Methodische Sicherheitskonzepte	45
3.5.2	Angestrebte Sicherheit.....	46
3.6	Probabilistische Approximationsverfahren	47
3.7	Direkte Berechnungsverfahren.....	49
3.7.1	Numerische Integration	50
3.7.2	Stochastische Simulation – Crude Monte Carlo.....	50
3.7.3	Monte Carlo Integration	53
3.8	Sampling Technologien und die Quasi-Monte Carlo Methode	54
3.8.1	Sampling Technologien.....	54
3.8.2	Die Quasi-Monte Carlo Methode	56
3.8.3	Multivariate Folgen geringer Diskrepanz.....	58

3.8.4	Diskrepanz und Konvergenzgrenzen	60
3.9	Vergleichsberechnungen probabilistischer Grundlösungen	61
4	Sensitivitätsanalyse	65
4.1	Einleitung.....	65
4.2	Sensitivitätsanalyse schlanker Stahlbetonstützen	66
4.3	Methoden der Sensitivitätsanalyse.....	68
4.3.1	Gewichtsfaktoren	68
4.3.2	Analytische Sensitivitätsanalyse	69
4.3.3	Numerische Sensitivitätsanalyse.....	69
4.4	Entwicklung einer Ein-Schritt-Sensitivitätsanalyse.....	70
4.4.1	Bezugnahme auf die Versagenswahrscheinlichkeit	70
4.4.2	Berechnung von n+1 Einzelergebnissen	72
4.4.3	Konvergenz der Sensitivitätsanalyse.....	73
5	Entwicklung eines probabilistischen Modells für die Zuverlässigkeitsanalyse..	75
5.1	Softwaremodell und Implementierung von NLCS	75
5.1.1	Vorbetrachtungen.....	75
5.1.2	Modellierung und Implementierung	76
5.1.3	Numerik Basisklassen	77
5.1.4	Die SSJ Technologie	77
5.1.5	GUI-Oberfläche.....	78
5.2	Deterministisches strukturmechanisches Modell.....	79
5.2.1	Allgemeines zur nichtlinearen Strukturanalyse	79
5.2.2	Modellierung des Stützenquerschnittes.....	82
5.2.3	Diskretisierung durch Finite Elemente.....	82
5.2.4	Lösung der nichtlinearen strukturmechanischen Gleichgewichts- gleichung	90
5.2.5	Modellierung von Randbedingungen.....	93
5.2.6	Validierung des strukturmechanischen Modells	94
5.2.7	Analyse der Modellunsicherheit	97
5.3	Das auf der Quasi-Monte Carlo Methode basierende stochastische Modell. 101	
5.3.1	Vorbemerkung.....	101

5.3.2	Unsicherheiten der Parameter	101
5.4	Validierung des probabilistischen Modells	109
5.4.1	Validierung anhand eines <i>R-E</i> -Modells	109
5.4.2	Bemerkungen zur Validierung	115
6	Systematische Zuverlässigkeitsanalyse schlanker Stahlbetonstützen	117
6.1	Untersuchungsumfang	117
6.2	Annahmen und Vorbetrachtungen	119
6.2.1	Numerische Annahmen	119
6.2.2	Definition der Belastung	120
6.2.3	Auswahl notwendiger stochastischer Parameter	120
6.2.4	Zusammenfassende Darstellung	121
6.3	Uni-axiale Belastung	122
6.3.1	Allgemeines	122
6.3.2	Variation der Exzentrizitäten	122
6.3.3	Variation der Schlankheit	124
6.3.4	Variation der Betonfestigkeit	126
6.3.5	Zuverlässigkeit des Modellstützenverfahrens	128
6.4	Bi-axiale Belastung	130
6.4.1	Allgemeines	130
6.4.2	Ergebnisse der Analyse für bi-axiale Beanspruchungen	131
6.5	Fazit der systematischen Analyse	134
7	Zusammenfassung und Ausblick	135
8	Literaturverzeichnis	139
9	Anlagen	149

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1-1:	Methodisches Vorgehen und Gliederung der Arbeit	4
Abb. 2-1:	Darstellung der Stabilitätsproblematik einer uni-axial belasteten Stütze .	9
Abb. 2-2:	Darstellung der Momenten-Krümmungslinie mit Lastpfaden.....	10
Abb. 2-3:	Prinzipdarstellung der Stabilitätsproblematik einer Stütze [Haro-94]....	10
Abb. 2-4:	Räumliches Interaktionsdiagramm und Querschnittstragverhalten.....	11
Abb. 2-5:	Vergleich der Nulllinienlagen verschiedener Querschnitte	12
Abb. 2-6:	Anwendungsgrenzen achsgetrennter Nachweise nach [DIN 1045-01] ..	12
Abb. 2-7:	Verformungszustände von stützenähnlichen Betonkörpern	15
Abb. 2-8:	Finite Approximation und Diskretisierung des Lösungsgebietes	16
Abb. 2-9:	Freiheitsgrade zur Beschreibung der Stützenverformung am Element ..	17
Abb. 2-10:	Definition der Verschiebungsgeometrie	18
Abb. 2-11:	Spannungs-Dehnungsbeziehungen des Betons nach [DIN 1045-01]	22
Abb. 2-12:	Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton C25/30	23
Abb. 2-13:	Beton unter Zugbeanspruchung nach [MC 90].....	24
Abb. 2-14:	Idealisiertes Materialgesetz für Betonstahl nach [EC 2-92]	26
Abb. 2-15:	Modifiziertes Materialgesetz für einbetonierten Betonstahl [MC 90]....	26
Abb. 3-1:	Quellen von Unsicherheiten nach [Oumeraci-01]	33
Abb. 3-2:	Grand Canyon Skywalk (ComplexSimpleLLC 2007).....	34
Abb. 3-3:	Häufigkeitsverteilung im x_1, x_2 -Raum mit Grenzzustandsfunktion	36
Abb. 3-4:	Verteilungsdichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung	38
Abb. 3-5:	Nutzung der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ...	40
Abb. 3-6:	Kumulative Darstellung einer Stichprobenauswahl	41
Abb. 3-7:	Beispielhafte Darstellung einer punktuellen Auswertung eines Zuverlässigkeitsproblems im x_1, x_2 -Parameterraum.....	43
Abb. 3-8:	Darstellung der impliziten Grenzzustandsfunktion im Einheits- und Parameterraum	44

Abb. 3-9:	Implizite Grenzzustandsfunktion im 3D- Einheitsraum.....	45
Abb. 3-10:	Definition des Sicherheitsindex β nach [Hasofer-74]	48
Abb. 3-11:	Beziehung zwischen den Sicherheitsgrößen	48
Abb. 3-12:	Transformation der Zufallswerte in den Parameterraum	51
Abb. 3-13:	Verlauf der Berechnung mit der Crude Monte Carlo Methode	52
Abb. 3-14:	Festlegen von Integrationsgrenzen im Fall der MC Integration	54
Abb. 3-15:	Vergleich unterschiedlicher Ergebnispfade eines <i>R-E</i> -Problems.....	55
Abb. 3-16:	Van der Corput Sequenz im Intervall $[0,1]^1$ nach [Niederreiter-87]	57
Abb. 3-17:	Vergleich von 128 Punkten im $[0,1]^2$ zwischen a) random Sampling und b) quasi-random Sampling	57
Abb. 3-18:	Muster der Sobol' Sequenz im $[0,1]^2$	60
Abb. 3-19:	Muster der Sobol' Sequenz von 256 Punkten im $[0,1]^3$	60
Abb. 3-20:	Vergleich von Simulationsverfahren.....	62
Abb. 3-21:	Verhalten der QMC Methode bei geringer Zielwahrscheinlichkeit.....	62
Abb. 4-1:	Beispiel gestapelter Sensitivitätsfaktoren α^2 für eine Stahlbetonstütze mit fünf ausgewählten Parametern.....	65
Abb. 4-2:	Definition der Gewichtungsfaktoren im Rahmen der FORM-Analyse	68
Abb. 4-3:	Mittelwertverschiebung einer Verteilungsfunktion f_i	71
Abb. 4-4:	Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsdifferenzen in der SA	73
Abb. 4-5:	Sensitivitätsanalyse in Abhängigkeit von der Simulationsanzahl.....	73
Abb. 4-6:	Konvergenz der $n+1$ Versagenswahrscheinlichkeiten auf Basis der QMC	74
Abb. 5-1:	Generalisiertes Konzept des probabilistischen Modells [Schwuchow-08].....	76
Abb. 5-2:	Darstellung des Wahrscheinlichkeitseditors	78
Abb. 5-3:	Darstellung des Querschnittseditors.....	79
Abb. 5-4:	Gegenüberstellung unterschiedlicher Diskretisierungstypen am Beispiel einer Stahlbetonstütze.....	80
Abb. 5-5:	2-Knoten-Balkenelement mit 10 Freiheitsgraden, Ansatzfunktionen.....	83
Abb. 5-6:	Kinematische Hypothese für räumliche Balkenelemente nach Bernoulli	84

Abb. 5-7:	Integration nichtlinearer Funktionen über Teilquerschnitte	87
Abb. 5-8:	Adaptive Delaunay-Triangulierung für Stahlbetonquerschnitte.....	88
Abb. 5-9:	Umkreisbedingung der Delaunay-Triangulierung nach [Horstmann-00]	89
Abb. 5-10:	Newton-Raphson Iteration.....	91
Abb. 5-11:	Konvergenzproblematik im Traglastbereich	92
Abb. 5-12:	Vergleich des Last-Verformungsverhaltens der Stütze VK 3	96
Abb. 5-13:	Beschreibungsmöglichkeiten von Modellunsicherheiten [Kortenhaus-03]	98
Abb. 5-14:	Relativer Vergleich der Traglasten nach Tabelle 5-5 und Tabelle 5-4...	99
Abb. 5-15:	Vergleich der Traglasten nach Tabelle 5-5 und Tabelle 5-4.....	99
Abb. 5-16:	Verteilungsfunktionen für Beton C20/25	102
Abb. 5-17:	Vereinfachtes Modell einer zeitabhängigen Belastung nach [EC 1-95]	106
Abb. 5-18:	Verteilung der Extremwerte nach [EC 1-95].....	107
Abb. 5-19:	Geometrie und Materialparameter	109
Abb. 5-20:	Auswertung der Indikatorfunktion $I[g(\mathbf{X})]$ im Parameterraum für das Beispiel NB_1	112
Abb. 5-21:	Ergebnisverlauf der Versagenswahrscheinlichkeit am Beispiel NB_1	112
Abb. 5-22:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren des Beispiels NB_1	114
Abb. 6-1:	System und Belastung der Stützenanalyse.....	118
Abb. 6-2:	Zuverlässigkeitsanalyse für QS1 mit variabler Exzentrizität	123
Abb. 6-3:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Exzentrizität	123
Abb. 6-4:	Schlankheitsbezogene Zuverlässigkeitsanalyse für QS1	124
Abb. 6-5:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Schlankheit.....	125
Abb. 6-6:	Ergebnisverlauf des Sensitivitätsfaktors $\alpha_{\text{Länge}}$ für QS1 mit variabler Schlankheit.....	126
Abb. 6-7:	Zuverlässigkeitsanalyse für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm ²].....	127
Abb. 6-8:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Betonfestigkeit	127

Abb. 6-9:	Vergleich des Zuverlässigkeitsniveaus für QS2 zwischen Bemessungswertkonzept und Modellstützenverfahren	129
Abb. 6-10:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 gemäß MSV	130
Abb. 6-11:	Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L= 0,5$ m	132
Abb. 6-12:	Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L= 4,0$ m	132
Abb. 6-13:	Vergleich des Sicherheitsniveaus von QS1 und QS2 bei schiefer Biegung um 45° mit einer Stützenlänge von $L= 4,0$ m	133
Abb. 6-14:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 bei schiefer Biegung um 45° mit $L= 4,0$ m.....	133
Abb. A-1:	Versuchsaufbau der 480701-Versuchsreihe nach [Schwuchow-07].....	149
Abb. A-2:	Stahlbetonstützenquerschnitt nach [Kordina-76]	150
Abb. A-3:	Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_1	151
Abb. A-4:	Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_2	152
Abb. A-5:	Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_3	152
Abb. A-6:	Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_1.....	153
Abb. A-7:	Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_2.....	153
Abb. A-8:	Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_3.....	154
Abb. 9-9:	Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Exzentrizität	154
Abb. 9-10:	Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Schlankheit.....	155
Abb. 9-11:	Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm^2]	155
Abb. 9-12:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Exzentrizität.....	156
Abb. 9-13:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Schlankheit	156
Abb. 9-14:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm^2].....	157
Abb. 9-15:	Sicherheitsoberfläche für QS1 mit $L= 0,5$ m	157
Abb. 9-16:	Sicherheitsoberfläche für QS1 mit $L= 4,0$ m	158

Abb. 9-17:	Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS2 mit variabler Exzentrizität.....	158
Abb. 9-18:	Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS2 mit variabler Schlankheit	159
Abb. 9-19:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 mit variabler Exzentrizität	159
Abb. 9-20:	Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 mit variabler Schlankheit.....	160
Abb. 9-21:	Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L= 0,5$ m.....	160
Abb. 9-22:	Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L= 4,0$ m.....	161
Abb. 9-23:	Sicherheitsoberfläche für QS3 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L= 0,5$ m.....	161

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1-1:	Ebenen der Zuverlässigkeitsanalyse nach [Spaethe-92].....	1
Tabelle 2-1:	Berechnungsverfahren für schlanke Stahlbetonstützen	14
Tabelle 2-2:	Bruchenergie G_F nach [MC 90]	25
Tabelle 2-3:	Konstruktive Regeln der Stützenbemessung	29
Tabelle 3-1:	Versagensarten für schlanke Stahlbetonstützen.....	35
Tabelle 3-2:	Relevante Verteilungsfunktionen	39
Tabelle 3-3:	Akzeptierte Zielsicherheit.....	46
Tabelle 3-4:	Probabilistische Näherungsverfahren	47
Tabelle 3-5:	Multivariate Folgen geringer Diskrepanz	59
Tabelle 5-1:	Verknüpfung von Struktur- und Wahrscheinlichkeitsmethoden	75
Tabelle 5-2:	Querschnittsmodellierung aus Einzelquerschnitten.....	82
Tabelle 5-3:	Gauß-Punkte und Gewichte.....	89
Tabelle 5-4:	Ergebnisvergleich der 480701-Versuchsreihe (Anlage 1).....	94
Tabelle 5-5:	Ergebnisvergleich der KORDINA-Versuchsreihe.....	95
Tabelle 5-6:	Numerischer Einfluss auf die Traglast der Stütze VK 3.....	97
Tabelle 5-7:	Statistische Auswertung der Modellunsicherheit	100
Tabelle 5-8:	Statistische Kenngrößen für Beton unter Druckbeanspruchung.....	102
Tabelle 5-9:	Stochastische Basisvariablen für Betonstahl BSt 500	104
Tabelle 5-10:	Kennwerte der Dichten ausgewählter Betone gemäß [JCSS-00]	106
Tabelle 5-11:	Statistische Kenngrößen	108
Tabelle 5-12:	Lastdefinition der Validierungsbeispiele	110
Tabelle 5-13:	Analytische Lösung der Validierungsbeispiele	111
Tabelle 5-14:	NLCS-Lösungen der Validierungsbeispiele	113
Tabelle 5-15:	NLCS-Sensitivitätsanalyse der Validierungsbeispiele	114
Tabelle 6-1:	Darstellung des Untersuchungsprogramms	118
Tabelle 6-2:	Gewichtsfaktoren α_i	121

Tabelle 6-3:	Bemessungstraglasten für ausgewählte Betone für den QS1	128
Tabelle 6-4:	Vergleich der Bemessungstraglasten N_{Ed} in [kN]	129
Tabelle 9-1:	Ergebnisse der 480701-Versuchsreihe nach [Schwuchow-07]	149

Verzeichnis der Symbole, Indizes und Abkürzungen

Geometrische Größen

a	[mm]	Querschnittsabmaße in z-Richtung
A	[mm ²]	Fläche (allgemein)
b	[mm]	Querschnittsabmaße in y-Richtung
d	[mm]	Durchmesser, statische Höhe, Randabstand
e	[mm]	Exzentrizität (allgemein)
h	[mm]	Höhe
L	[mm]	Stützenlänge in x-Richtung
r	[mm]	Radius des Kreisquerschnittes
s_k	[mm]	Knicklänge
u	[mm]	Verformungsgröße
V	[mm ³]	Volumen
w	[mm]	Verformungsgröße
X_1, X_2, X_3		globales raumfestes kartesisches Koordinatensystem
Δl	[mm]	differentielle Längenänderung
ε	[-]	Dehnungsgröße
ρ	[-]	geometrischer Bewehrungsgrad
φ	[°]	Verdrehung
λ	[-]	Schlankheit
κ	[1/mm]	Krümmung

Baustoffkenngrößen

E	[N/mm ²]	Elastizitätsmodul (allgemein)
E_{c0}	[N/mm ²]	Ursprungsmodul des Betons
$E_c^t = E_c$	[N/mm ²]	Tangentenmodul des Betons

E_{cm}	[N/mm ²]	Sekantenmodul des Betons
G_F	[Nmm/mm ²]	Bruchenergie
f, f	[N/mm ²]	Festigkeit des Materials (allgemein)
α		Dauerlastbeiwert nach [DIN 1045-01]
η		Beiwert nach [Popovics-73]
n		Parabelbeiwert nach [DIN 1045-01]
φ		Kriechzahl
σ	[N/mm ²]	Spannung
ε		Dehnung

Kombinierte Größen und Lasten

G	ständige Lasten
Q	veränderliche Lasten
ν	bezogene Normalkraft nach [DIN 1045-01]
μ	bezogenes Moment nach [DIN 1045-01]
$\Delta\mu$	bezogenes Zusatzmoment
ω	mechanischer Bewehrungsgrad

Finite Element Modellierung

$\mathbf{0}$	Konfiguration im Ausgangszustand
B	Biegesteifigkeit
Ω	Interpolationsvektor
\mathbf{H}^e	Verzerrungsformfunktionsmatrix
\mathbf{K}	Systemsteifigkeitsmatrix (allgemein)
\mathbf{K}^e	Elementsteifigkeitsmatrix (allgemein)
\mathbf{K}_s	Sekantensteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_t	tangentiale Systemsteifigkeit
$\Delta\mathbf{u}$	inkrementelle Systemverschiebungen
\mathbf{P}_a	Belastungsvektor des Grundzustandes

\mathbf{F}_i		innerer Kraftvektor
n		Anzahl der Iterationen
N	[N]	Normalkraft
M	[Nm]	Moment
\mathbf{p}_0		Ortsvektor
t		Zeit
TOL		numerische Toleranz
u		Verschiebung; Freiheitsgrad
\mathbf{u}_i		Verschiebungsvektor
\mathbf{e}		Einheitsvektor
z_1		normalisierte Koordinate

Stochastische Modellierung und Sicherheitskonzept

α		Sensitivitätsfaktor
β		Sicherheits-, bzw. Zuverlässigkeitsindex nach [Hasofer-74]
D^*		Sterndiskrepanz
γ		Teilsicherheitsbeiwert (allgemein)
$\Delta\mu$		Mittelwertverschiebung
E		Erwartungswert
f, f_i		Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
ϕ		Versatzfaktor der Mittelwertverschiebung
F		Wahrscheinlichkeitsverteilung
Ω		Wahrscheinlichkeitsraum
Σ		Ergebnisalgebra
Φ		Standardnormalverteilung
$G; g(\mathbf{X})$		Grenzzustandsfunktion
N		Anzahl der Simulationen
O		Konvergenz, Fehlerrate
θ		Modellunsicherheitsfaktor
P		Wahrscheinlichkeit (probability)

P_f	Versagenswahrscheinlichkeit (probability of failure)
S	Sensitivität
μ	Mittelwert
σ	Standardabweichung
VAR	Varianz
X	Vektor der Parameterkonfiguration, Zufallsvariablen
x	Zufallsvariable
Y	Ergebnisfunktion

Indizes

a	Anfang
c	Beton
crit	kritisch (engl. <u>critical</u>)
ct	Betonzugfestigkeit
d	Bemessungswert
est	geschätzt (engl. <u>estimate</u>)
M	Material
E	Einwirkung
e	Ende
F	Belastung, Kraft (engl. <u>force</u>)
f	Versagen (engl. <u>failure</u>)
Ki	Knicken
m	Mittelwert
offset	Versatz
R	Widerstand
Rd	Widerstand im Bemessungszustand
s	Stahl
t	Zug (engl. <u>tension</u>); tangential
Th. II. O.	Theorie II. Ordnung
u	Versagenszustand
x, y, z	lokale Koordinatenrichtung; y... Fließen

Erweiterte mathematische Vereinbarungen

$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$	partielle Ableitung
$\nabla f = grad(f)$	Nabla-Operator

Gebräuchliche Abkürzungen

AIS	Adaptive Importance Sampling
BWK	Bemessungswertkonzept
CMC	Crude-Monte Carlo Methode
CV	Variationskoeffizient
EV	Extremwertverteilung
FD	Finite Differenz
FEM	Finite Elemente Methode
FORM	First Order Reliability Method
GUI	General User Interface
HUPS	High Uniform Point Sets
LHS	Latin Hypercube Sampling
LD	Folgen kleiner Diskrepanz
LN	Log-Normalverteilung
MC	Monte Carlo Methode
MSV	Modellstützenverfahren
N	Normalverteilung
NB	Numerisches Beispiel
NLCS	Non Linear Cross-Section
QMC	Quasi-Monte Carlo Methode
QS	Querschnitt
RSM	Response Surface Method
SORM	Second Order Reliability Method
SSJ	Stochastic Simulation in Java
TTHO	Taylor Terme höherer Ordnung

1 Einleitung

1.1 Einführung

Der grundlegende Auftrag eines entwerfenden Ingenieurs ist die Sicherstellung der Bauwerkszuverlässigkeit für die geplante Nutzungsdauer. Zur praktischen Lösung dieser Aufgabe werden im Stahlbetonbau europäische bzw. nationale Bemessungsnormen (u.a. [EC 2-92], [DIN 1045-08]) herangezogen. Diese auf dem Teilsicherheitskonzept beruhenden Normen besitzen für das Zuverlässigkeitsproblem einen semi-probabilistischen Lösungsansatz. Durch Anwendung der Bemessungsnormen sollte demnach gewährleistet sein, dass ein bestimmtes Sicherheitsniveau eingehalten wird. Nach der Klassifikation gemäß folgender Tabelle 1-1 entsprechen diese Bemessungsnormen einer Zuverlässigkeitsanalyse der Ebene 1, wobei keine direkten probabilistischen Berechnungen im Sinne der Zuverlässigkeitstheorie durchgeführt werden.

Tabelle 1-1: Ebenen der Zuverlässigkeitsanalyse nach [Spaethe-92]

Ebene	Zuverlässigkeitsmaß	Sicherheitskonzept
0	globaler Sicherheitsfaktor γ	deterministische Lösung
1	Teilsicherheitsbeiwerte γ_M, γ_F	semi-probabilistische Lösung
2	Sicherheitsindex β	probabilistische Approximation
3	Versagenswahrscheinlichkeit P_f	probabilistische Lösung
4	Risiko (implizit P_f)	<i>Level IV</i> code

Zur Kalibrierung und Überprüfung von Bemessungsnormen ist es notwendig, ein vollständig probabilistisches Modell der Ebene 2 oder 3 zu entwickeln. Dabei wird die Modellierung von Unsicherheiten und streuenden Parametern durch Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie unerlässlich. Neben der realitätsnahen Erfassung des Trag- und Verformungsverhaltens der Struktur gewinnt die Frage nach der Beschreibung von stochastischen Größen an entscheidender Bedeutung. Weiterführende Sensitivitätsanalysen zeigen nicht nur den Einfluss einzelner Parameter auf die Lösung, sondern verbessern

auch das Verständnis für das generalisierte Problem. Somit ist eine umfassende Bewertung bestehender Bemessungsansätze möglich.

Auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie sollen in dieser Arbeit Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsanalysen der Ebene 3 (siehe Tabelle 1-1) für schlanke, bi-axial beanspruchte Stahlbetonstützen durchgeführt werden. Anlass der Untersuchungen sind die von EIBL [Eibl-92] und SIX [Six-01] gezeigten Schwächen der Bemessungskonzepte des Stahlbetonbaus. Speziell bei Nachweisen auf Systemebene ist die Zielstellung eines gleichmäßigen Sicherheitsniveaus (siehe [JCSS-00]) nicht erfüllt. Die Zuverlässigkeitsbetrachtungen der Ebene 3 beantworten die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Stütze versagt bzw. nicht versagt.

1.2 Problemstellung

Ein probabilistisches Modell basiert grundsätzlich auf der Verknüpfung von stochastischen Methoden mit der deterministischen, strukturmechanischen Grundlösung. Dabei stellt die Beschreibung der Unsicherheit streuender Parameter die Kernfunktionalität dar.

Während die strukturmechanischen Untersuchungen für uni-axial belastete Stützen Gegenstand einiger Analysen (z.B.: [Habel-53], [Aas-Jakobsen-74], [Haro-94], [Kordina-94], [Claeson-98]) waren, sind im Bereich der bi-axial belasteten Stützen nur wenige Erkenntnisse vorhanden. Hier sei vor allem das von RAFLA und KORDINA entwickelte Rafla-Verfahren [Kordina-76] genannt. Dieses Verfahren eignet sich jedoch ebenso wie das Modellstützenverfahren [MC 90] nicht für fundierte probabilistische Berechnungen. Bei den Näherungsverfahren werden Vereinfachungen, z.B. in Form von Linearisierungen bzw. Reduzierungen auf eine Querschnittsbemessung vorgenommen, die zu systematischen Abweichungen in der Traglast sowohl auf der sicheren als auch auf der unsicheren Seite führen können [Six-01].

Die Berechnung des Tragverhaltens bi-axial beanspruchter Stützen kann beispielsweise durch Lösung der Differential- bzw. Integralgleichungen [Bathe-86] mit numerischen Verfahren erfolgen. BACKES [Backes-94] und WIENECKE [Wienecke-85] untersuchten das strukturmechanische Problem von Stabtragwerken aus Stahlbeton mit Hilfe der Finiten Elemente Methode (FEM).

Das ausgeprägte nichtlineare Verhalten des Stahlbetons, die stabilitätsbedingte Abnahme der Steifigkeit von schlanken Stahlbetonstützen und die für Tragwerke des Bauwesens sehr kleinen Versagenswahrscheinlichkeiten stellen zusätzlich hohe Anforderungen an die verwendeten wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden. Neben der klassischen Monte Carlo Simulation [Rubinstein-81] hat sich vor allem die Latin Hypercube

Sampling (LHS) Methode sowie das Adaptive Importance Sampling (AIS) bewährt. Die LHS Methode kommt beispielsweise bei der Sicherheitsprüfung [Strauss-07] von den im Stahlbetonbau verwendeten Interaktionsdiagrammen für uni-axial belastete Stützen zum Einsatz. Ähnliche Untersuchungen für den amerikanischen Bemessungscode [ACI-318] sind in [Szerszen-05] mit Hilfe der Monte Carlo Simulation durchgeführt worden. Für zweiachsig beanspruchte Stützen mit stabilitätsbedingter Traglastabnahme liegen bisher keine probabilistischen Untersuchungen vor.

Als schnell konvergierendes Verfahren wird bei finanzmathematischen Problemstellungen die Quasi-Monte Carlo (QMC) Methode [Niederreiter-92] angewandt. Im Unterschied zur klassischen Monte Carlo Simulation werden dabei quasi-Zufallszahlen verwendet. Diese erzeugen eine bessere Gleichverteilung der Zufallsgrößen im Parameterraum. Inwieweit quasi-Zufallszahlen auch für strukturmechanische Problemstellungen genutzt werden können, ist bisher kaum gezeigt. FLEDERER [Flederer-02] nutzt dieses Verfahren bei Verbundquerschnitten für Untersuchungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit und kann dort die Anwendbarkeit demonstrieren. Eine vielversprechende Eigenschaft der QMC Methode ist das einfache Hinzufügen von zusätzlichen Einzelsimulationen. Während beim LHS die Anzahl der Simulationen zu Beginn feststehen muss, ermöglicht die QMC Methode ein Abbrechen der Simulation zu jedem Zeitpunkt. Damit ergeben sich interessante Möglichkeiten hinsichtlich eines automatischen Rechnungsabbruchs, bedingt durch Konvergenzbetrachtungen innerhalb der Simulation.

Der Einfluss der Eingangsparameter auf die zu erwartende Wahrscheinlichkeit wird im Zuge der Sensitivitätsanalyse berechnet. Dabei kann auch geprüft werden, wie robust ein Bemessungsverfahren ist und inwiefern „Updating“, das Untersuchen einer genaueren Verteilungsfunktion des streuenden Parameters, von Interesse ist.

1.3 Zielsetzung und Gliederung des vorliegenden Beitrages

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll ein probabilistisches Modell zur Untersuchung schlanker Stahlbetonstützen entwickelt und anschließend in einem Java Programm implementiert werden. Es werden dabei zum Teil vorhandene Berechnungsverfahren (numerische Methoden) herangezogen, die eingehend auf ihre Anwendbarkeit hin überprüft und gegebenenfalls angepasst werden.

Als deterministische Grundlösung kommt ähnlich der Arbeit von [Backes-94] ein Finite Elemente Modell zum Einsatz, mit dessen Hilfe eine realitätsnahe Erfassung des Tragverhaltens schlanker Stützen ermöglicht wird. Die Basis dafür bildet die vollständige geometrisch und physikalisch nichtlineare Beschreibung der strukturmechanischen Fra-

gestellung. Weiterhin wird die Quasi-Monte Carlo Methode zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit herangezogen. Den Ausgangspunkt bildet die SSJ Technologie [SSJ-08] sowie der JCSS [JCSS-00].

In folgender Abb. 1-1 ist die prinzipielle Vorgehensweise der vorliegenden Arbeit dargestellt, wobei zugleich auf die zugehörigen Kapitel hingewiesen wird.

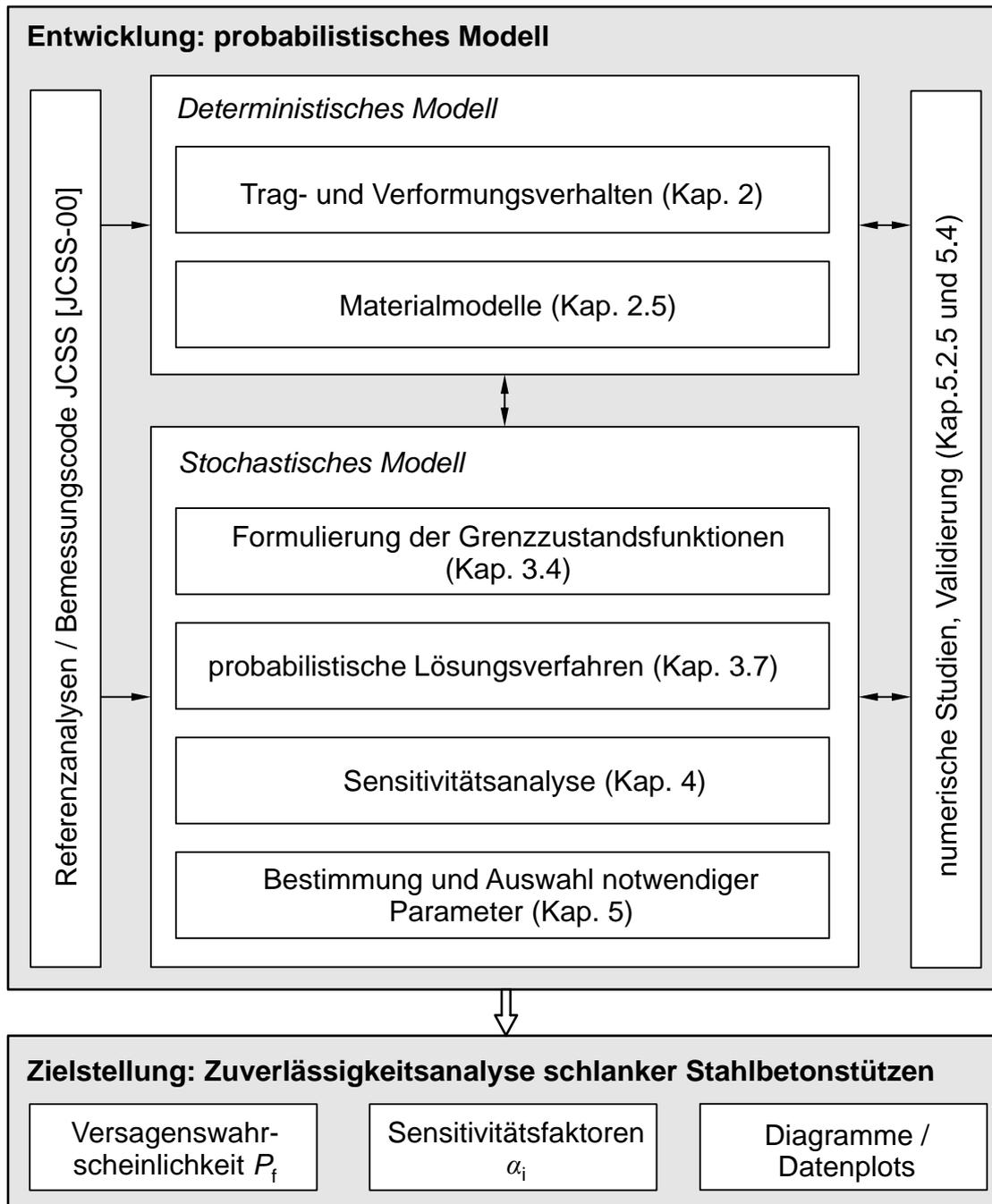


Abb. 1-1: Methodisches Vorgehen und Gliederung der Arbeit

In den Kapiteln 2 und 3 wird der Wissensstand zum Tragverhalten schlanker Stahlbetonstützen sowie zur probabilistischen Berechnung des zugehörigen Zuverlässigkeitsproblems aufgezeigt. Dabei liegt ein Schwerpunkt in der Erfassung und Berechnung der nichtlinearen Grenzzustandsfunktion gemäß der im Abschnitt 3.4 gezeigten Grundlagen. Die Grundlagen zur Berechnung der Zuverlässigkeit schlanker Stahlbetonstützen werden in den Abschnitten 3.5, 3.6 und 3.7 dargelegt. Im Kapitel 4 wird ein Verfahren zur Sensitivitätsanalyse abgeleitet.

Das probabilistische Modell wird im Kapitel 5 entwickelt. Es handelt sich dabei um eine Anpassung der Quasi-Monte Carlo Methode an strukturmechanische Fragestellungen. Neben der Erfassung von streuenden Parametern zur Modellierung von Unsicherheiten, dient es zur Beurteilung der Zuverlässigkeit schlanker Stahlbetonstützen unter Beachtung der sich einstellenden, nichtlinearen Grenzzustandsfunktion.

Die Kenngrößen der streuenden Parameter werden insbesondere dem JCSS [JCSS-00] entnommen. Der JCSS Model Code empfiehlt Basiskennwerte und Beschreibungsgrundlagen für die wesentlichen Eingangsparameter einer strukturmechanischen Zuverlässigkeitsbetrachtung.

Das entwickelte Modell wird hinsichtlich der Anwendbarkeit in den Abschnitten 5.2.6 und 5.4 validiert. Mit dem erstellten Programm ist anschließend die systematische Untersuchung von Stahlbetonstützen möglich. Dies wird im Kapitel 6 dokumentiert.

2 Trag- und Verformungsverhalten schlanker Stahlbetonstützen

2.1 Allgemeine Parameter und Eigenschaften

Die der probabilistischen Untersuchung zugrunde liegenden Berechnungsverfahren müssen eine möglichst exakte bzw. wirklichkeitsnahe Ermittlung des Tragverhaltens einer Stütze unter vorgegebenen deterministischen Stützeigenschaften beinhalten. Zu diesen Eigenschaften zählen neben Material- und Geometrieparametern auch die äußeren Belastungen und Systemkenngrößen.

Es lassen sich folgende parametrisierte Größen für Stahlbetonstützen in generalisierter Form angeben:

- Querschnittsgeometrie (z.B. Teilquerschnittsgeometrie, Bewehrungselemente),
- Systemgeometrie (z.B. Stützenlänge, Querschnittsverteilung),
- Materialeigenschaften des Betons und Betonstahls,
- Verbundeigenschaften (z.B. Verbundspannung),
- Randbedingungen (z.B. Systemeigenschaften, Lagerbedingungen),
- Belastung der Stütze,
- Zeit (z.B. Belastungsgeschichte, zeitvariante Effekte, Temperatur).

Ob und in welcher Form einzelne Parameter berücksichtigt werden, ist vom jeweiligen Berechnungsverfahren und der Sensitivität des Parameters abhängig.

Häufig werden im Zuge von Bemessungsverfahren abgeleitete Parameter wie z.B. die Schlankheit λ nach Gleichung (2-1) herangezogen.

$$\lambda = \frac{s_k}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad (2-1)$$

mit:

- I, A Flächenträgheitsmoment, Querschnittsfläche
- s_k Knicklänge, bzw. Ersatzlänge nach Euler [Petersen-82]

Diese Größen sind implizit in den oben genannten Punkten enthalten und werden daher lediglich für praktische Vergleiche angewandt. Die Güte einer Berechnung der Traglast hängt stark von der Berücksichtigung materieller und geometrischer Nichtlinearitäten ab, wie in den folgenden Kapiteln geschildert wird.

2.2 Tragverhalten von schlanken Stützen

2.2.1 Allgemeiner Überblick

Das Tragverhalten von Stahlbetonstützen ist hinlänglich bekannt und wird daher nur im Sinne der Entwicklung eines strukturmechanischen Modells beschrieben. Um sich einen Überblick über vorhandene Untersuchungen zum einachsigen Problem zu verschaffen, wird auf die Arbeiten von AAS-JAKOBSEN [Aas-Jakobsen-74], HARO [Haro-94] und KORDINA/QUAST [Kordina-94] verwiesen. Anpassungen an leistungsfähigere Baustoffe sind beispielsweise in dem Beitrag von CLAESON et.al. [Claeson-98] dargestellt, in dem experimentelle Untersuchungen von Stützen aus hochfesten Betonen analysiert werden. Erkenntnisse zum Tragverhalten von bi-axial belasteten Stützen werden unter anderem von GALGOUL [Galgoul-78], GRZESCHKOWITZ [Grzeschkowitz-92] und NASER [Naser-95] aufgezeigt. RAFLA und KORDINA [Kordina-76] führen Traglastversuche für Stützen unter schiefer Biegung durch und stellen ein Näherungsverfahren für die Bemessung vor.

Ein besonderes Phänomen schlanker Stützen ist die stabilitätsbedingte Beeinflussung der Traglast im Zusammenspiel mit dem nichtlinearen Materialverhalten des Stahlbetons. Die Kombination von physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten führt zu Traglasten, die weit unterhalb der Querschnittstragfähigkeit und auch der elastischen Verzweigungslast der Bauteile liegen können. Dieser Umstand macht es unmöglich, den Nachweis auf ein ideal elastisches Knick- bzw. Verzweigungsproblem [Petersen-82] zu reduzieren oder eine Bemessung auf Querschnittsebene zu führen.

2.2.2 Uni-axiales Tragverhalten

Das prinzipielle Tragverhalten eines Biege- und Normalkraft beanspruchten Querschnitts unter uni-axialer Belastung kann anschaulich durch Interaktionsdiagramme [Haro-94] beschrieben werden. In diesen Diagrammen sind μ und ν , die auf den Querschnitt und den Beton bezogenen Schnittgrößen für Moment und Normalkraft enthalten.

Abb. 2-1 zeigt das Tragverhalten von drei unterschiedlichen Stahlbetonstützen, bei denen verschiedene Einflüsse zum Versagen führen. Es ist ersichtlich, dass insbesondere bei der schlanksten Stütze die Traglast nicht durch den Querschnittswiderstand be-

stimmt wird, sondern ein Stabilitätsversagen auftritt. Das Moment kann nur bei abnehmender Normalkraft gesteigert werden, was jedoch keinem realistischen Belastungsszenario entsprechen würde.

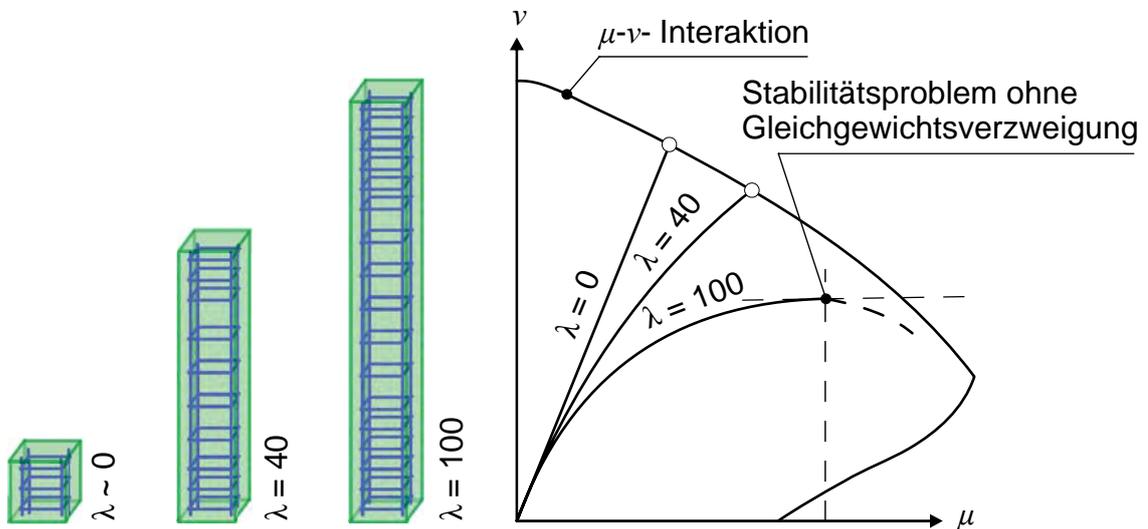


Abb. 2-1: Darstellung der Stabilitätsproblematik einer uni-axial belasteten Stütze

Des Weiteren ist erkennbar, dass bei der Stütze mittlerer Schlankheit ein Querschnittsversagen maßgebend wird, wobei die Normalkraft geringer ist als im Fall von $\lambda = 0$.

Der zu beobachtende Momentenanstieg ist die Folge einer zunehmenden Verformung der Stütze in Hauptbeanspruchungsrichtung. Neben den Verformungen nach Theorie II. Ordnung (siehe [Petersen-82]) ist dieser Effekt vor allem durch die Abnahme der Querschnittssteifigkeit, z.B. durch das Aufreißen des Querschnittes oder das Fließen des Betonstahls begründbar.

Zur weiteren Verdeutlichung des Tragverhaltens schlanker Stahlbetonstützen hat sich neben der Abb. 2-1 die Gegenüberstellung der Momenten-Krümmungs-Beziehung ($\mu - \kappa$) mit den Lastpfaden (siehe Abb. 2-2) als sinnvoll erwiesen.

In Abb. 2-2 ist eine typische Momenten-Krümmungs-Beziehung für einen Stahlbetonquerschnitt dargestellt. Die Linie repräsentiert die für eine konstant wirkende Normalkraft geltenden Querschnittswiderstände in Abhängigkeit von der Krümmung. Die denkbaren Einwirkungspfade E_{d1} bis E_{d3} entsprechen den einwirkenden Biegemomenten, wobei die Zunahme bei steigender Krümmung mit den Zusatzmomenten nach Theorie II. Ordnung korrespondiert. An den ersten Schnittpunkten der Einwirkungspfade E_{d1} und E_{d2} mit der Momenten-Krümmungslinie herrscht stabiles Gleichgewicht. Bei Einwirkung E_{d3} handelt es sich aufgrund des fehlenden Schnittpunktes um ein Stabilitätsproblem ohne Gleichgewichtszustand.

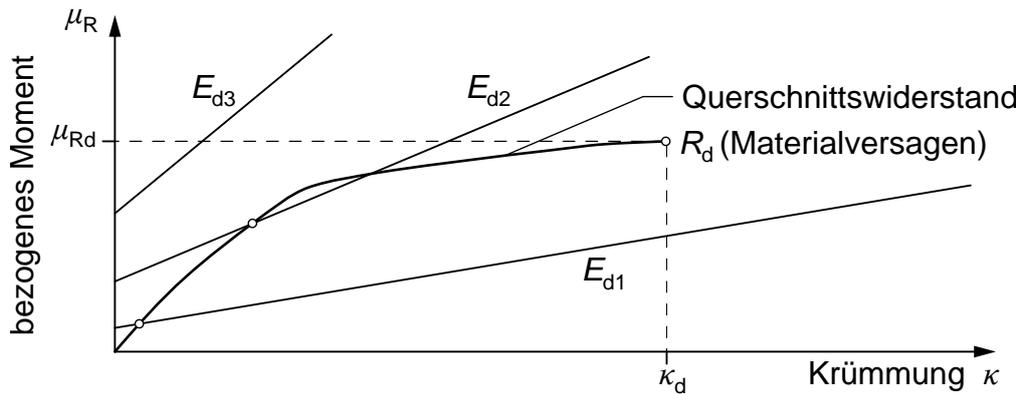


Abb. 2-2: Darstellung der Momenten-Krümmungslinie mit Lastpfaden

Unter der vereinfachten Annahme eines proportionalen Verhaltens zwischen dem belastenden Moment nach Theorie II. Ordnung und der Krümmung des maßgebenden Querschnitts kann das Stabilitätsproblem anhand von Steifigkeitsbeziehungen dargestellt werden. HARO [Haro-94] stellt dazu der Momenten-Krümmungs-Beziehung des am meisten beanspruchten Querschnittes das belastende Moment gegenüber (siehe Abb. 2-3).

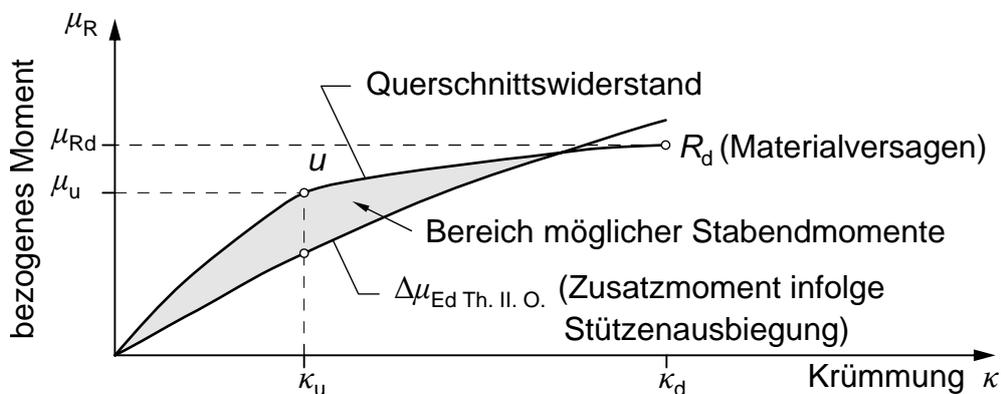


Abb. 2-3: Prinzipdarstellung der Stabilitätsproblematik einer Stütze [Haro-94]

Stabilitätsversagen liegt dann vor, wenn die zur Aufnahme der Momente nach Theorie II. Ordnung erforderliche Steifigkeit nicht ausreicht, um ein Gleichgewicht am verformten System zwischen Belastungs- und Widerstandsseite herzustellen. Dieser Grundsatz ist generell auch für räumlich belastete Stützen maßgebend.

2.2.3 Räumliches Tragverhalten

Das Tragverhalten von zweiachsig belasteten Stützen ist zusätzlich durch schiefe zweiachsig Biegung [Galgoul-78] des Querschnitts gekennzeichnet. Die für ebene Belastungen erstellten $\mu - \nu$ - Interaktionsdiagramme können dazu auf Querschnittsebene zu räumlichen $\mu_1 - \mu_2 - \nu$ - Diagrammen erweitert werden. Hierbei entsprechen μ_1 und μ_2 den jeweils bezogenen Momenten der Hauptachsen y und z des Querschnittes. Abb. 2-4 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

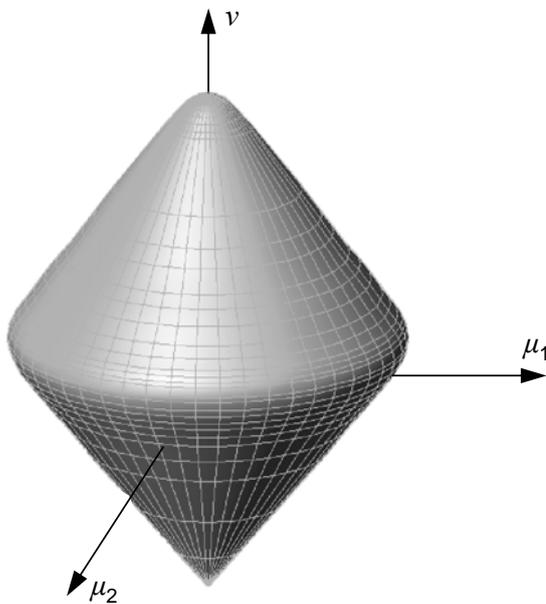


Abb. 2-4: Räumliches Interaktionsdiagramm und Querschnittstragverhalten

Da neben der Belastung auch die Querschnittsform und die Anordnung der Bewehrung einen Einfluss auf die Lage der Spannungsnulllinie (siehe [Kordina-76]) haben, kann deren Drehung nur näherungsweise z.B. mit grafischen Diagrammen oder numerisch bestimmt werden. Eine Ausnahme bilden quadratische Querschnitte.

Hier verläuft die Nulllinie bei symmetrischer Bewehrung, unabhängig von der Lasthöhe, nahezu senkrecht zur Lastebene, was durch KORDINA (Abb. 2-5) experimentell nachgewiesen ist.

Aufgrund der Interaktion zwischen den Steifigkeitseigenschaften der y- und z- Richtung werden im Nachweisformat aktueller Bemessungsvorschriften [DIN 1045-01], [EC 2-92] die Näherungsverfahren für getrennte Knicksicherheitsnachweise im Anwendungsbereich eingeschränkt. Entsprechende Ursachen werden in [Habel-53] und [Naser-95] erläutert.

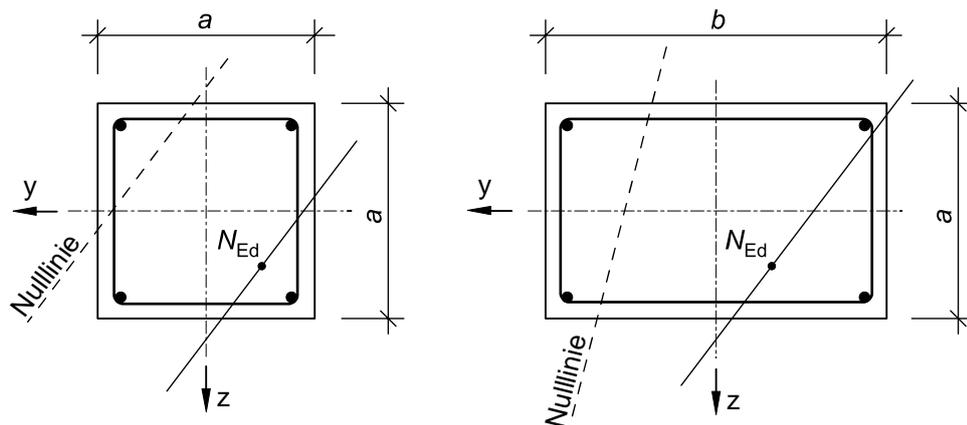


Abb. 2-5: Vergleich der Nulllinienlagen verschiedener Querschnitte

Gemäß Abb. 2-6 sind getrennte Knicksicherheitsnachweise nach [DIN 1045-01] in beide Hauptachsrichtungen nur für kleine Bereiche erlaubt. Liegt die resultierende einwirkende Bemessungsnormalkraft N_{Ed} außerhalb der schraffierten Bereiche, so wird ein Nachweis auf zweiachsige Beanspruchung notwendig.

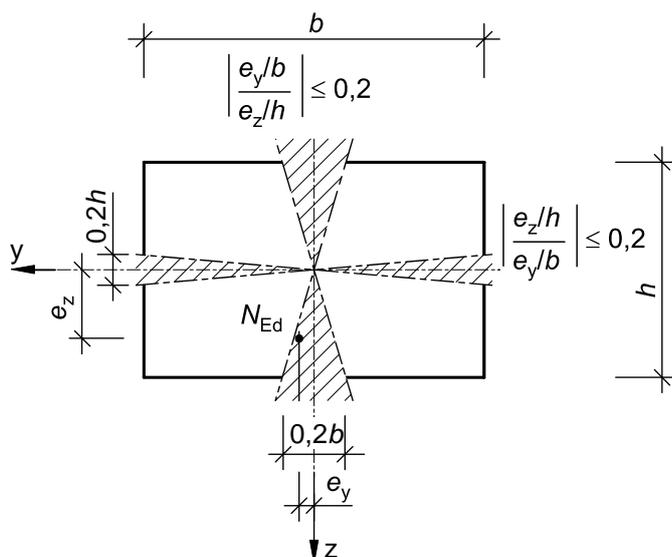


Abb. 2-6: Anwendungsgrenzen achsgetrennter Nachweise nach [DIN 1045-01]

Das allgemeine strukturmechanische Problem schlanker Stahlbetonstützen kann durch eine nichtlineare Gleichgewichtsgleichung beschrieben und numerisch gelöst werden. Dabei wird die Lage der Nulllinie nicht direkt, sondern implizit im Rahmen der Gleichgewichtssiteration des Gesamtsystems bestimmt. Diese Herangehensweise wird im Kapitel 2.4 erläutert. Die Erkenntnisse zum Tragverhalten werden dabei zur Ableitung des Verfahrens genutzt.

2.2.4 Sonderfall der Gleichgewichtsverzweigung

Belastet man ein perfektes Stützensystem mittig, wird mit zunehmender Druckkraft die zentrische Stauchung vergrößert, wobei jedoch keine Deformation quer zur Stabachse auftritt. Mit zunehmender Belastung wird die elastische Biegesteifigkeit durch die geometrische Steifigkeit reduziert, was zu einer Abnahme der bekannten Euler-Verzweigungslast (siehe Gleichung (2-2)) führt.

$$N_{\text{Ki}} = \pi^2 \cdot \frac{B(N)}{s_{\text{k}}^2} \quad (2-2)$$

mit:

- $B(N)$ beanspruchungsabhängige Biegesteifigkeit
- s_{k} Knicklänge

Bei der allgemeinen Beschreibung des Tragverhaltens durch inkrementelle Gleichgewichtsgleichungen (siehe Abschnitt 2.4) wird der Sonderfall der Gleichgewichtsverzweigung implizit berücksichtigt.

Die Herleitung der Gleichung (2-2) kann aus energetischen Betrachtungen erfolgen, bei der die Forderung nach indifferentem Gleichgewicht (bzw. Determinante wird zu Null) gestellt wird.

2.3 Berechnungsverfahren

Bei einer nichtlinearen Berechnung kann der Einfluss der stabilitätsbedingten Traglastabnahme berücksichtigt werden. Entscheidend dabei ist die realitätsnahe Erfassung der belastungsabhängigen Systemsteifigkeit der Stütze.

Einige der im Folgenden genannten Verfahren basieren auf Vereinfachungen z.B. in Form von Linearisierungen der Momenten-Krümmungs-Linien oder Überführungen in eine Querschnittsbemessung. Diese Vereinfachungen haben das Ziel, die inverse Problematik der Bemessung einer Stütze ohne aufwendige Hilfsmittel vornehmen zu können. Das dafür notwendige Sicherheitskonzept verlangt die Gegenüberstellung von Bemessungsschnittgrößen (z.B.: [EC 2-92], [DIN 1045-01]). Die folgende Formel stellt diesen Zusammenhang dar:

$$E_{\text{d}} \leq R_{\text{d}}. \quad (2-3)$$

E_{d} beschreibt den Bemessungswert der Einwirkung bzw. Beanspruchung und R_{d} den Bemessungswert der Beanspruchbarkeit.

Grundsätzlich unterscheidet man bei schlanken Stahlbetonstützen angenäherte und iterativ-numerische Berechnungsverfahren. Tabelle 2-1 gibt einen Überblick über gebräuchliche Berechnungsverfahren.

Tabelle 2-1: Berechnungsverfahren für schlanke Stahlbetonstützen

Ebene	Berechnungs- bzw. Bemessungsverfahren	uni- / bi-axial	Referenzen
angenäherte Verfahren	• Modellstützenverfahren	uni-axial	[EC 2-92], [MC 90]
	• DINAMO - Verfahren	uni-axial	[Haro-94]
	• Δm - Verfahren	uni-axial	[DIN 1045-88]
	• Sekanten - Methode	uni-axial	[ACI-318]
	• RAFLA - Verfahren	bi-axial	[Kordina-76]
	• räumliche Modellstütze	bi-axial	[Allgöwer-02]
iterativ-numerische Verfahren	• numerische Lösung des strukturmechanischen Problems (z.B. mit FEM)	modellierungsabhängig	[Claeson-98], [Backes-94], [Wienecke-85], [Schwuchow-08]
	• Übertragungsmatrizen- / Kraftgrößenverfahren		[Pfeiffer-04], [Six-01], [Quast-07]

Während die angenäherten Verfahren vor allem der praktischen Handrechnung dienen, sind die iterativ-numerischen Verfahren nur mit Hilfe der Rechentechnik anwendbar. Näherungsverfahren sind für probabilistische Untersuchungen nicht geeignet, wie SIX [Six-01] in seiner Arbeit über uni-axial belastete Stützen zeigt. Aufgrund der vereinfachten Annahmen erzeugen sie systematische Fehler, die zu Fehlinterpretationen in der Zuverlässigkeitsanalyse führen können. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Verwendung der angenäherten Verfahren verzichtet und die iterativ-numerische Lösung des strukturmechanischen Problems mittels Finite Elemente Methode bevorzugt. Es wird auf einen weitergehenden Überblick zu den genannten angenäherten Verfahren abgesehen und auf die referenzierte Literatur verwiesen.

Im folgenden Abschnitt wird das Tragverhalten von räumlich belasteten Stahlbetonstützen durch eine konsequente Modellierung mit Gleichgewichtsgleichungen beschrieben. Diese bildet die Grundlage für das parametrisierte strukturmechanische Modell.

2.4 Formulierung durch inkrementelle Gleichgewichtsgleichungen

2.4.1 Konsistente Beschreibung der Stützenbewegung

Eine Stahlbetonstütze ist ein Bauteil, dessen Form sich unter der äußeren Einwirkung verändert. Gesucht wird das durch die äußeren Randbedingungen verursachte Verschiebungsfeld der Stahlbetonstütze, bei dem innere und äußere Kräfte im stabilen Gleichgewicht stehen. Diese Situation ist in Abb. 2-7 dargestellt.

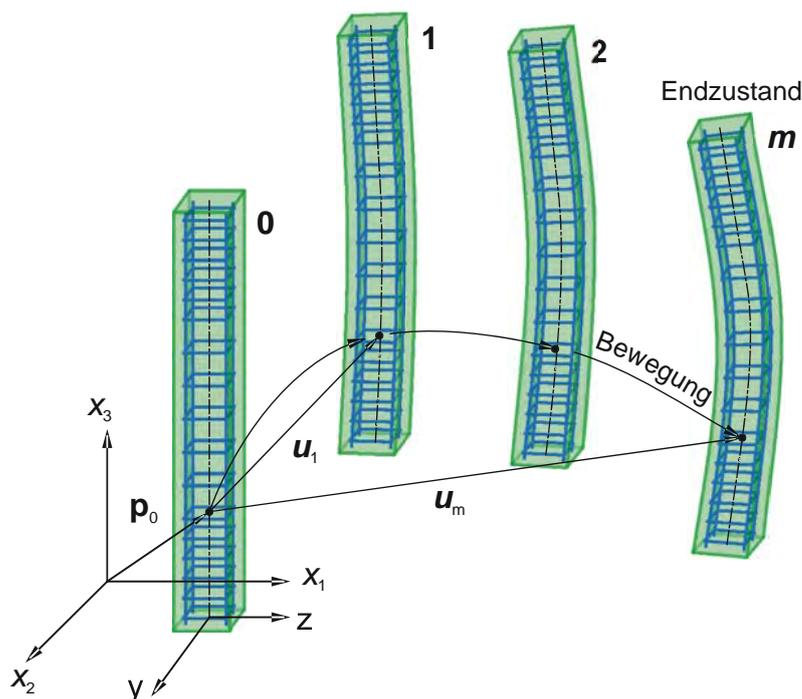


Abb. 2-7: Verformungszustände von stützenähnlichen Betonkörpern

Wie bereits erläutert, ist das Auffinden des Gleichgewichtszustandes m bei materieller und geometrischer Nichtlinearität nur noch iterativ möglich. Für die mathematische Untersuchung dieses strukturmechanischen Problems ist daher die Beschreibung des Körpers und der Körperbewegung notwendig. Um den zunächst unbekanntem Zustand m zu errechnen, kann eine schrittweise Annäherung erfolgen. Dabei werden Zwischenkonfigurationen (in [Bathe-86] auch als Zeitschritte t bezeichnet) $1, 2, \dots, m-1$ durchlaufen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Erfassung der Gleichgewichtszustände mit Hilfe der Methode von Lagrange [Bathe-86] formuliert. Diese Methode wird insbesondere bei Strukturproblemen eingesetzt. Die Beschreibung des Stützenkörpers erfolgt dabei in

einem festen System von Raumkoordinaten mit orthogonalen (kartesischen) Basisvektoren \mathbf{e}_j . Die Gleichungen (2-4) und (2-5) definieren den mathematischen Zusammenhang.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

Die unverformte Stütze wird in der Konfiguration $\mathbf{0}$ definiert und durch mehrere Ortsvektoren \mathbf{p}_0 beschrieben.

$$\mathbf{p}_0 = p_{01} \cdot \mathbf{e}_1 + p_{02} \cdot \mathbf{e}_2 + p_{03} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2-5)$$

Je nach Art und Form der Diskretisierung werden mehrere Ortsvektoren \mathbf{p}_0 für die generelle Beschreibung der Stütze benötigt.

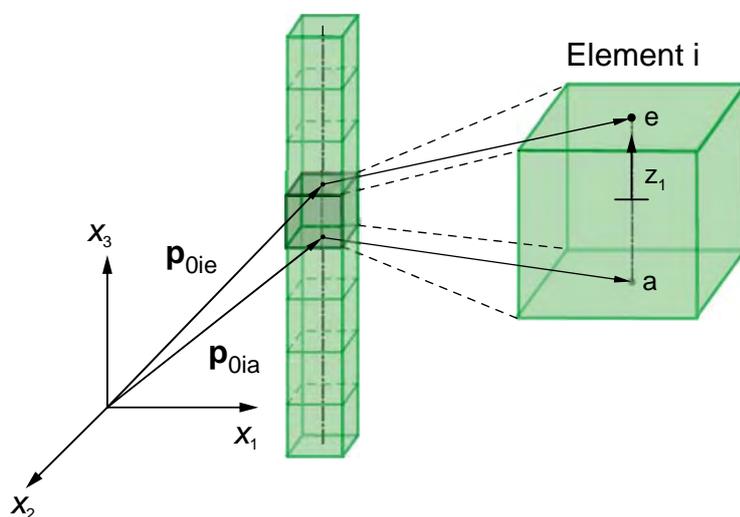


Abb. 2-8: Finite Approximation und Diskretisierung des Lösungsgebietes

Beim Berechnen mit Balkenelementen werden unter anderem die Anfangs- und Endknoten der Elemente mit ihren Koordinaten herangezogen. Die beschreibenden Koordinaten des Elementes werden in der Knotenpunktmatrix \mathbf{X} zusammengefasst. Gleichung (2-6) zeigt die Knotenpunktmatrix für das in Abb. 2-8 dargestellte zweiknotige Element.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p_{01a} & p_{01e} \\ p_{02a} & p_{02e} \\ p_{03a} & p_{03e} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

Der Verschiebungszustand bezieht sich in der totalen Lagrange-Formulierung (siehe [Argyris-86], [Zienkiewicz-77]) auf die unverformte Konfiguration $\mathbf{0}$ und ist durch einen Verschiebungsvektor \mathbf{u}_j gekennzeichnet.

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 + \mathbf{u}_i \quad (2-7)$$

Alternativ beruft sich BACKES [Backes-94] im Unterschied zur totalen Lagrange-Formulierung in seinen Untersuchungen nicht auf die Konfiguration $\mathbf{0}$, sondern nutzt die jeweils zuvor berechnete Konfiguration $\mathbf{m-1}$. Diese Updated Lagrange-Formulierung erzielt äquivalente Berechnungsergebnisse, erfordert aber ein ständiges Anpassen des Referenzkoordinatensystems.

Da die Kenntnis des Verschiebungszustandes in den Elementknoten für eine integrale Betrachtung im Rahmen der Finiten Elemente Methode nicht genügt, muss zusätzlich eine funktionale Beschreibung für den Verformungszustand in den einzelnen Elementen eingeführt werden. In jedem Element werden daher Verformungsansätze $\mathbf{s}(z)$ angewendet, die je nach Bedarf stetig differenziert werden können. Diese auch als Formfunktionen bekannten Ansätze sind Funktionen einer normalisierten Koordinate z_1 , deren Werte an den Knoten der Elemente mit dem globalen Verschiebungsvektor \mathbf{u} gekoppelt sind. Durch diese Funktionen wird es ermöglicht, ein vollkommenes Verschiebungsfeld für die Stütze zu initiieren und durch Angabe eines globalen Verschiebungsvektors \mathbf{u} einen jeden Knotenpunkt der Schwerachse in der jeweiligen Konfiguration zu lokalisieren.

Die für die Traglastberechnung einer Stahlbetonstütze erforderliche Querschnittskinematik wird im Abschnitt 5.2.3.2 bei der Ableitung geeigneter Finiter Elemente erläutert. Dabei beinhaltet der Verschiebungszustand auch Terme für die Verdrehung der Stabachse. Formalisiert werden diese Verdrehungsfreiheitsgrade in den globalen Verschiebungsvektor \mathbf{u} integriert. Die Abb. 2-9 zeigt die zusätzlichen Verdrehungsfreiheitsgrade am Beispiel eines Stützenabschnittes.

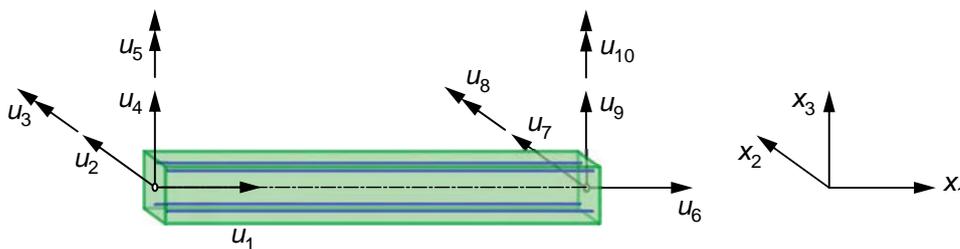


Abb. 2-9: Freiheitsgrade zur Beschreibung der Stützenverformung am Element

Verdrehungsfreiheitsgrade um die Stablängsrichtung können entkoppelt von der Querschnittskinematik berücksichtigt werden. Dies setzt jedoch die Modellierung der Torsionssteifigkeit voraus. BACKES [Backes-94] stellt entsprechende Ansätze für Stahlbetonbalken bereit. Für Stahlbetonstützen ohne planmäßige Torsion kann, wie in

BACKES und im Abschnitt 5.2 gezeigt, auf zusätzliche Torsionsfreiheitsgrade verzichtet werden.

2.4.2 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung bei Stahlbetonstützen

Für das Aufstellen der inkrementellen numerischen Lösung ist es erforderlich, entsprechende Dehnungsgrößen zu definieren. Diese werden aus dem bekannten Verschiebungszustand \mathbf{m} (siehe Abb. 2-7) der Stütze ermittelt. BATHE [Bathe-86] stellt die für strukturmechanische Problemstellungen nötigen Verzerrungstensenoren zusammen und leitet die nichtlineare Bestimmungsgleichung aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebung her.

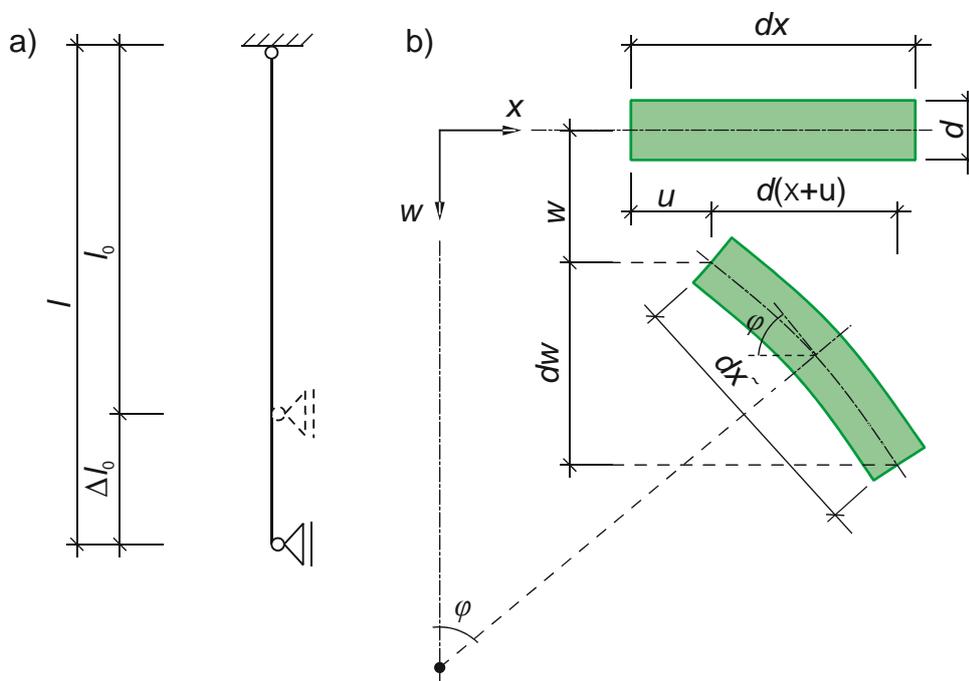


Abb. 2-10: Definition der Verschiebungsgeometrie

Bei Beachtung der stabilitätsbedingten Traglastabnahme von druckbeanspruchten Bauteilen ist es erforderlich, nichtlineare geometrische Beziehungen für die Berechnung der Dehnung heranzuziehen. In Abb. 2-10 werden die entsprechenden geometrischen Verhältnisse der Deformationskinematik dargestellt. Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Green-Lagrangesche Verzerrungsmaß [Bathe-86] kann durch Betrachtungen am differentiell verformten Element abgeleitet werden. Dabei zeigt sich, dass Starrkörperverschiebungen keine Dehnung hervorrufen.

$$\varepsilon_x = \frac{d\tilde{x} - dx}{dx} = \frac{d\tilde{x}}{dx} - 1 \quad (2-8)$$

Die Länge $d\tilde{x}$ kann näherungsweise gemäß Abb. 2-10 b) und Gleichung (2-9) bestimmt werden.

$$d\tilde{x} = \sqrt{(d(x+u))^2 + (dw)^2} \quad (2-9)$$

Unter Beachtung von Gleichung (2-9) kann die Dehnung nach folgender Gleichung durch Reihenentwicklung der Wurzelfunktion ermittelt werden. Es ergibt sich für den Fall der einachsigen Biegung das Green-Lagrangesche Verzerrungsmaß.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\tilde{x}}{dx} - 1 = \frac{\sqrt{(d(x+u))^2 + (dw)^2}}{dx} - 1 = \sqrt{((1+u_{,x})^2 + w_{,x}^2)} - 1 \\ &\approx (1+u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2) - 1 = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \end{aligned} \quad (2-10)$$

In der linearen Analyse werden die auch als „Ingenieurdehnung“ (Abb. 2-10 a)) bezeichneten Dehnungen wie folgt definiert:

$$\varepsilon_x = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{du}{dx} = u_{,x}. \quad (2-11)$$

Im Gegensatz zum nichtlinearen Verzerrungsmaß entfällt bei der linearen Beschreibung der Einfluss der Stabverformung in Stabquerrichtung. Die Betrachtung der Stabilitätsproblematik ist somit nicht mehr möglich.

2.4.3 Umsetzung des Green-Lagrangeschen Verzerrungsmaßes

Untersuchungen von BACKES [Backes-94] zeigen bei Berechnungen mit planmäßigen Verschiebungslastfällen in Stablängsrichtung erhöhte Traglastdifferenzen bei der Verwendung des baupraktischen Verfahrens nach Theorie II. Ordnung im Vergleich zur vollständigen nichtlinearen Berechnung. Bei der Theorie II. Ordnung werden zwar die zusätzlichen Beanspruchungen durch Biegemomente am verformten System beachtet, jedoch bleibt der nichtlineare Einfluss der Stablängsverformung (Stablängskraft) unberücksichtigt.

Dieses Phänomen lässt sich anhand der Eigenschaft der Stahlbetonbauweise erklären. Durch die sehr massiven Querschnitte dieser Bauweise erzeugen sehr kleine Zwängungen große Normkraftdifferenzen. Dieser Effekt wird durch die auftretende Rissbildung zusätzlich verstärkt. BACKES verweist auf numerische Konvergenzprobleme bei der Nutzung der Theorie II. Ordnung, die bei der Gleichgewichtssiteration bei der strukturellen Lösung auftreten. Umgehen lässt sich diese Problematik durch eine konsequente Umsetzung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors für die Strukturformulierung. Die prinzipielle Beschreibung der zugehörigen Piola-Kirchhoff-Spannungen wird im Abschnitt 2.5.1 gezeigt.

2.4.4 Iterative Gleichgewichtsgleichung

Durch ein Linearisierungskonzept (z.B. Newton-Raphson Verfahren [Bronstein-96]) erfolgt die Lösung des nichtlinearen Problems bei konstanter äußerer Belastung in iterativer Form. Dabei wird, wie in Abb. 2-7 dargestellt, von einem bekannten bzw. angenommenen Zustand ausgegangen und im Anschluss der nächste Verschiebungszustand ermittelt. Grundlage für diese Vorgehensweise bildet die bekannte iterative Gleichgewichtsgleichung des Gesamtsystems:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_1) \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{P}_a - \mathbf{F}(\mathbf{u}_1) \quad (2-12)$$

mit:

- $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_1)$ als tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix im Zustand 1
- $\Delta \mathbf{u}$ als Vektor der inkrementellen Systemverschiebungen
- \mathbf{P}_a als Belastungsvektor des Grundzustandes
- $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$ als Vektor der inneren Knotenkräfte im Zustand 1.

Die Ableitung der Gleichung (2-12) kann aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (u. a. Energiemethode) oder aus Variationsformulierungen erfolgen. Entsprechende Herleitungen der allgemeinen Form sind in [Argyris-86], [Bathe-86] und [Zienkiewicz-77] für die totale Lagrange-Formulierung dargestellt. Ableitungen der Gleichgewichtsgleichung hinsichtlich spezieller Materialformulierungen des Stahlbetons sind beispielsweise in [Haufe-01] und [Kotsovovs-95] enthalten.

Eine grundlegende Schwierigkeit bei der Anwendung der Gleichgewichtsgleichung ist die Tatsache, dass sich die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_t und der Vektor der inneren Knotenkräfte $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$ bei jedem Iterationsschritt ändern. Die numerische Lösung strukturmechanischer Probleme ist daher sehr zeitintensiv¹. Entscheidend dabei ist die Tatsache, dass in jedem Iterationsschritt mehrere Integrationen und Gleichungslösungen durchzuführen sind. Informationen zur Berechnung der einzelnen Terme der Gleichgewichtsgleichung für das strukturmechanische Modell schlanker Stahlbetonstützen sind im Kapitel 5.2 bei der Berechnung eines probabilistischen Einzelevents dargestellt. Hier wird auch auf die Umsetzung und Implementierung eingegangen.

¹ Im Zuge einer probabilistischen Analyse müssen sehr viele Einzelsimulationen mit iterativen Berechnungen durchgeführt werden. Die Optimierung der Berechnungszeit gewinnt in diesem Zusammenhang eine große Bedeutung.

2.5 Materialeigenschaften

2.5.1 Allgemeines

Im vorigen Abschnitt ist die allgemeine inkrementelle Gleichgewichtsgleichung (2-12) erläutert worden. Neben der geometrisch bedingten verformungsabhängigen Nichtlinearität der technischen Fragestellung, ist bei der Ermittlung der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_t und des Vektors der inneren Knotenkräfte $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$ bei Stahlbetonstützen die unter Kapitel 2.2.1 bereits aufgeführte physikalische Nichtlinearität zu berücksichtigen. Dabei stellt sich die Frage nach geeigneten Materialmodellen, sowohl für den Beton als auch für den Betonstahl.

Materialmodelle dienen im Allgemeinen dazu, die individuellen physikalischen Eigenschaften der Stoffe mathematisch beschreibbar und damit berechenbar zu machen. In der Praxis des Ingenieurwesens stehen dabei eine Vielzahl von Materialbeschreibungen zur Verfügung, die je nach spezifischer Thematik Anwendung finden. Neben komplexen rheologischen² Modellen [Haupt-00] haben sich bei Stahlbetontragwerken insbesondere empirische Werkstoffgesetze aus Materialversuchen als zweckmäßig erwiesen. Diese auf induktivem Weg ermittelten Materialgesetze stellen einen Kompromiss zwischen der Abbildung des physikalischen Verhaltens und dem numerischem Lösungsaufwand dar. Die Nutzbarkeit dieser Materialmodelle muss jedoch durch Validierung mit geeigneten Bauteilversuchen nachgewiesen werden, da eine a priori Übertragbarkeit eines Werkstoffversuches auf das Verhalten im Bauteil nicht gegeben ist.

In der vorliegenden Arbeit ist die Verwendung von eindimensionalen, nichtlinear elastischen (siehe [Bathe-86]) Materialmodellen sowohl für den Stahl als auch für den Beton hinreichend. Die Anwendbarkeit wird unter anderem in den Arbeiten von BACKES [Backes-94], PFEIFFER [Pfeiffer-04], NASER [Naser-95] und SCHWUCHOW [Schwuchow-05] bestätigt. Die Verwendung weiterer Materialgesetze ist grundsätzlich möglich. KAUFMANN [Kaufmann-03] nutzt beispielsweise elastisch-plastisches Materialverhalten, wobei jedoch die Beschreibung des plastischen Deformationsprozesses mit daraus assoziierten Fließbedingungen notwendig ist.

Neben der funktionalen Beschreibung der Spannungs-Dehnungsbeziehung ist es für die Bestimmung der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_t erforderlich, das Materialgesetz auch in inkrementeller Form zu verwenden. Wird dabei die Lagrange-Formulierung und der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor angewandt (siehe Abschnitt 2.4), sind im Allgemeinen die zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen PK-2 [Bathe-86] einzusetzen.

² Die Rheologie ist die Wissenschaft vom Verformungs- und Fließverhalten der Körper.

Bleiben die Verzerrungen genügend klein, wie dies im Fall von Stahlbetonstützen in der Regel der Fall ist, kann der Unterschied zwischen den Piola-Kirchhoff-Spannungen und den Cauchy-Spannungen vernachlässigt werden. Eine Transformation ist nicht notwendig.

2.5.2 Beton

2.5.2.1 Beton unter Druckbeanspruchung

Bei kleinen Verzerrungen (bis etwa 40 % der Druckfestigkeit) verhält sich Beton linear elastisch. Das weitere Verhalten des Betons geht von herstellungsbedingten Imperfektionen aus. Beginnend bei den Poren und Mikrorissen findet unter Beanspruchung ein stetiges Risswachstum statt, welches zu einer Abnahme der Festigkeit des Werkstoffes führt, wie folgende Abbildung verdeutlicht.

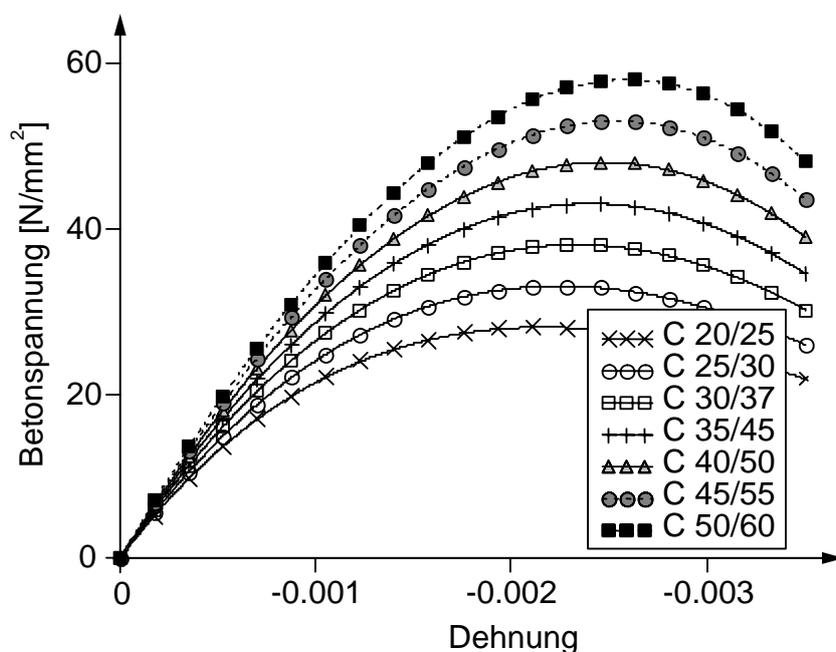


Abb. 2-11: Spannungs-Dehnungsbeziehungen des Betons nach [DIN 1045-01]

In den Bemessungsnormen werden für die Verformungs- und Schnittgrößenberechnung parametrisierte Spannungs-Dehnungsbeziehungen zur Verfügung gestellt. MC 90 [MC 90], EC 2 [EC 2-92] und DIN 1045-1 (2008) empfehlen für die Ermittlung von Schnittgrößen und Verformungen die Nutzung folgender eindimensionaler Werkstoffkennlinie:

$$\sigma(\varepsilon_x) = -f_c \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (2-13)$$

$$\text{mit: } \eta = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{c1}}, k = -1,1 \cdot E_{c0m} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c}, E_{c0m} = 9500 \cdot f_c^{1/3}.$$

Mit ε_{c1} wird die Stauchung des Betons beim Erreichen der maximalen Druckfestigkeit f_c bezeichnet. Während MC 90 und EC 2 diese Stauchung auf einen konstanten Wert von $\varepsilon_{c1} = -2,2\text{‰}$ festlegen, wird in DIN 1045-1 die Dehnung beim Erreichen der Druckfestigkeit auf den Ansatz von POPOVICS [Popovics-73] zurückgeführt.

$$\varepsilon_{c1} = -9,37 \cdot 10^{-4} \cdot f_c^{1/4} \quad (2-14)$$

Diese Änderung gegenüber dem Ansatz im MC 90 hat insbesondere bei Stabilitätsversagen aufgrund der veränderten Steifigkeitsannahmen im Anfangsbereich der Werkstofflinie große Auswirkungen auf die rechnerische Tragfähigkeit.

POPOVICS gibt für die Berechnung folgende Werkstoffkennlinie an:

$$\sigma(\varepsilon_x) = -f_c \cdot n \cdot \frac{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{c1}}}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{c1}}\right)^n} \quad (2-15)$$

$$\text{mit: } n = 0,058 \cdot |f_c| + 1.$$

Abb. 2-12 vergleicht die Spannungs-Dehnungsmodelle der Gleichungen (2-13) und (2-15) mit der bekannten Parabel-Rechteckbeziehung gemäß JCSS 3.1.2 [JCSS-00].

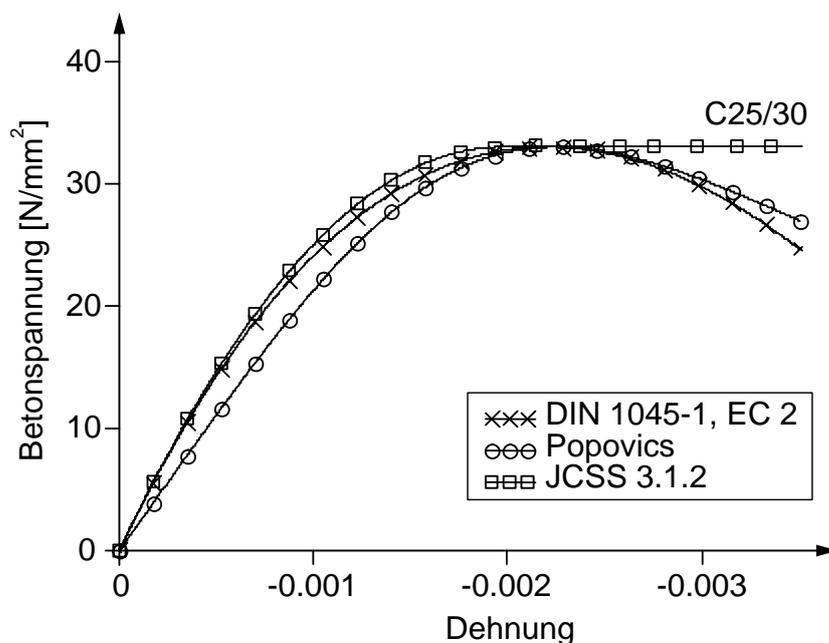


Abb. 2-12: Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton C25/30

Materialmodelle für mehraxiale Beanspruchungszustände werden unter anderem in [Kupfer-95] und [Ottosen-77] behandelt. Bei der Untersuchung von Stahlbetonstützen kann aufgrund des vorrangigen eindimensionalen Tragverhaltens der linienförmigen Bauteile auf die Anwendung mehraxialer Modelle verzichtet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird vorrangig das Modell des EC2 verwendet.

2.5.2.2 Beton unter Zugbeanspruchung

Im Vergleich zur Druckfestigkeit hat Beton unter Zugbeanspruchung eine sehr geringe Belastbarkeit. Die Betonzugspannung σ_{ct} verhält sich zur steigenden Dehnung bis zum Erreichen der Zugfestigkeit annähernd linear.

Der Model Code 1990 [MC 90] gibt folgenden Zusammenhang an.

$$\sigma_{ct} = E_{ci} \cdot \varepsilon_{ct}, \text{ wenn: } \sigma_{ct} \leq 0,9 \cdot f_{ctm}$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} - \frac{0,1 f_{ctm}}{0,00015 - 0,9 \cdot f_{ctm} / E_{ci}} \cdot (0,00015 - \varepsilon_{ct}), \text{ wenn: } \sigma_{ct} > 0,9 \cdot f_{ctm} \quad (2-16)$$

mit:

E_{ci} Tangentenmodul

f_{ctm} ...Betonzugfestigkeit nach [MC 90]

Abgeleitet aus Gleichung (2-16) kann für die Zugfestigkeit des Betons Abb. 2-13 angegeben werden.

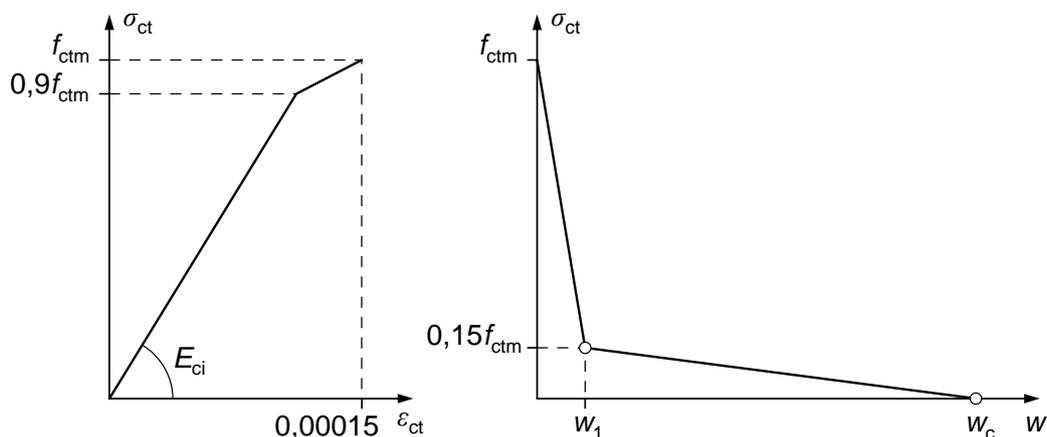


Abb. 2-13: Beton unter Zugbeanspruchung nach [MC 90]

Nach Erreichen der Betonzugfestigkeit f_{ctm} bei einer Dehnung von $\varepsilon_{ct} = 0,00015$ bildet sich eine gerissene Zone aus, in der die Verformung weiter zunimmt, während sie außerhalb dieser Risszone abnimmt. Die übertragbare Zugspannung ist dann im Wesentlichen von der Breite w des Risses abhängig, wobei ein schnelles Abnehmen der

Spannung zu beobachten ist. Das Materialverhalten kann daher mit einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung gemäß Abb. 2-13 modelliert werden.

Tabelle 2-2: Bruchenergie G_F nach [MC 90]

Größtkorn- durchmesser	Bruchenergie G_F in [Nm/m^2]							
	C12	C20/25	C30	C40	C50	C60	C70	C80
8	40	50	65	70	85	95	105	115
16	50	60	75	90	105	115	125	135
32	60	80	95	115	130	145	160	175

Die Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung stellt die Bruchenergie des Betons G_F dar. Zur Ermittlung der Bruchenergie hat das RILEM Technical Committee TC-50 [RILEM-04] einen entsprechenden Biegezugversuch vorgeschlagen. Tabelle 2-2 enthält die Bruchenergie für unterschiedliche Betone und Größtkorndurchmesser. Im Rahmen der Validierung des strukturmechanischen Modells (Kapitel 5.2.6) kommen diese Werte in dem Programm Stab 2dNL [Pfeiffer-04] zum Einsatz.

Wie in [Six-01] dargestellt, ist der Einfluss des Nachbruchverhaltens auf das Tragverhalten von Stahlbetonstützen von untergeordneter Bedeutung. Da jedoch der zusätzlich numerische Aufwand überproportional ansteigt (Berechnung der Rissbreiten), wird die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung lediglich zur Validierung des strukturmechanischen Modells im Kapitel 5.2.6 herangezogen.

2.5.3 Betonstahl

Betonstahl wird grundsätzlich nach der charakteristischen Fließgrenze (bzw. Streckgrenze) f_y klassifiziert. Diese gibt die Spannung beim Übergang vom elastischen zum plastischen Zustand an.

Wie Abb. 2-14 verdeutlicht, liegt im Bereich kleiner Dehnungen ein proportionaler Zusammenhang zwischen Spannung σ_s und Dehnung ε_s vor, der durch die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (linear-elastisches Materialverhalten) und dem damit verknüpften E-Modul E_s gekennzeichnet ist. Nach dem Erreichen der Fließgrenze ε_y sind nur noch geringe Spannungszuwächse (bei Beachtung des Verfestigungsbereichs) bis zum Erreichen der Bruchdehnung ε_u möglich.

Prognostizierend ist es ausreichend, für die Berechnungen das idealisierte, eindimensionale, bi-lineare Modell (elastisch-plastisch) gemäß [EC 2-92] für den Betonstahl anzuwenden, sofern keine genaueren Stahleigenschaften (z.B. Walztyp) bekannt sind. Das

Materialverhalten des Betonstahls gilt sowohl für gedrückte als auch für gezogene Spannungszustände und ist daher punktsymmetrisch zum Nullpunkt.

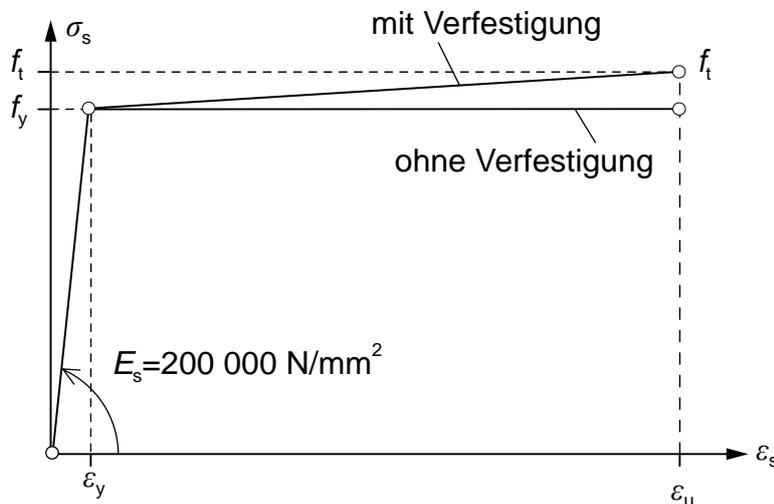


Abb. 2-14: Idealisiertes Materialgesetz für Betonstahl nach [EC 2-92]

2.5.4 Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den entstehenden Rissen führt im Allgemeinen zu Versteifungseffekten, d.h. es entstehen unterschiedliche Steifigkeiten entlang eines Bauteils. Der Einfluss dieses auch mit „tension stiffening Effekt“ bezeichneten Aspektes kann im Wesentlichen durch drei Vorgehensweisen behandelt werden. Neben der exakten Erfassung, z.B. bei einer numerischen Berechnung mit Rissmodellen auf Mikroebene, kann der Effekt zum einen durch die Annahme einer modifizierten Spannungs-Dehnungsbeziehung für den Bewehrungsstahl (siehe Abb. 2-15), zum anderen durch die Annahme einer fiktiven „verschmierten“ Betonzugspannung [Quast-81], [Collins-99] modelliert werden.

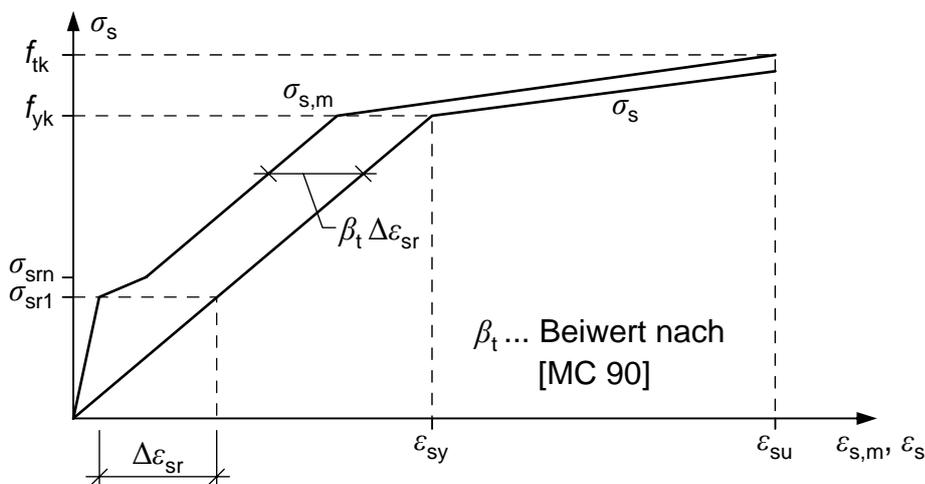


Abb. 2-15: Modifiziertes Materialgesetz für einbetonierten Betonstahl [MC 90]

Die Frage nach der Anwendbarkeit eines dieser Modelle lässt sich nicht allgemeingültig beantworten. Insbesondere durch die Empirie der analytischen Erfassungen sind validierte Modelle nur in deren Grenzen anwendbar. Zusätzlich ergeben sich Schwierigkeiten bei der Festlegung von effektiven Zugzonen [MC 90] für Stützen unter schiefer Biegung. Aufgrund des Nachweises eines sekundären Einflusses des „tension stiffening Effekts“ durch die Validierung und Vergleichsberechnungen wird im vorliegenden Fall auf die Anwendung eines geeigneten Modells verzichtet. In [Naser-95] werden die Auswirkungen der Zugversteifung auf die Traglast der Stützen in Abhängigkeit der Schlankheit, des Bewehrungsgrades und der Exzentrizität gegenübergestellt. Vernachlässigbar ist demnach generell der Einfluss bei Stützen mit einer Schlankheit $\lambda < 100$. Lediglich bei schlanken Stützen mit $\lambda > 100$ und geringem Bewehrungsgrad $\rho < 1\%$ sollte ein „tension stiffening“ Modell genutzt werden.

Im Rahmen der Bestimmung des Modellunsicherheitsfaktors gemäß Kapitel 5.2.6 muss dieser Umstand Berücksichtigung finden.

2.6 Zeitvariante Fragestellungen

2.6.1 Kriechen

Die Auswirkungen des Kriechens auf die Traglast von stabilitätsbeeinflussten Stahlbetonstützen ist unter anderem von KORDINA [Kordina-75] experimentell untersucht worden. Wie KORDINA zeigt, erfahren die Stützen unter Dauerlast eine größere Biegung infolge Kriechverformung. Dieses zeit- und lastabhängige Kriechverhalten des Betons kann nach den im JCSS 3.1.1 [JCSS-00] angegebenen Beziehungen modelliert werden. Dabei wird von einem linearen Zusammenhang zwischen der Kriechdehnung und der elastischen Dehnung ausgegangen. Die Gesamtdehnung ε_t zu einem bestimmten Zeitpunkt t ergibt sich aus:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t=0}(1 + \beta_d \cdot \varphi(t, \tau)). \quad (2-17)$$

Neben der Kriechzahl $\varphi(t, \tau)$ geht in Gleichung (2-17) das Verhältnis β_d zwischen ständiger und gesamter Last ein. Die Bestimmung der Kriechzahl kann z.B. nach [DIN 1045-01] erfolgen. Der in Gleichung (2-17) dargestellte Zusammenhang ist nur dann gültig, wenn die Spannung kleiner als 50% der charakteristischen Druckfestigkeit ist.

Da sich bei Stahlbetonquerschnitten infolge Kriechen des Betons sowohl die Dehnungen als auch die Spannungsverteilungen über den Querschnitt ändern, stellt diese vereinfachte Herangehensweise, die den Bemessungsnormen zu Grunde liegt, nur eine Näherung dar [Kordina-75].

2.6.2 Dauerhaftigkeit

Neben der reinen Sicherstellung der Dauerhaftigkeit durch konstruktive Maßnahmen gemäß Abschnitt 2.8.1 ist das Tragverhalten und insbesondere der Tragwiderstand eine zeitabhängige Größe. Alterung und Degradation stellen gemäß [Petryna-06] einen objektiven und unvermeidlichen Prozess dar. Als Ursache werden im Allgemeinen Umwelteinflüsse und Belastungen betrachtet, die unter anderem zu Ermüdung, chemisch-physikalischen Angriffen und Korrosion führen können. Da etwaige Untersuchungen nicht zum Thema dieser Arbeit gehören, wird auf die anerkannten Regeln der Bemessungsnormen [MC 90] und auf [Sarja-96] verwiesen.

2.7 Imperfektionen

Eine realitätsnahe Ermittlung von Traglasten ist nur unter Berücksichtigung der praktisch unvermeidbaren Imperfektionen möglich. Diese sind meist geometrische Abweichungen der tatsächlichen Stahlbetonstütze vom idealen Tragwerkszustand. Entsprechende Untersuchungen sind beispielsweise in [Maaß-76] dargestellt. Als gängiger Ansatz zur Erfassung von Imperfektionen kann neben der Berechnung am imperfekten Modell die Berücksichtigung durch zusätzliche Stabendexzentrizitäten erfolgen.

Die Ansätze in den Bemessungsnormen [DIN 1045-01] erweisen sich als problematisch im Zusammenhang mit den realistischen messbaren Imperfektionen. Hier wird im Unterschied zur Traglastberechnung nicht mit tatsächlichen Größen, sondern mit kalibrierten Bemessungsgrößen gearbeitet, die ergänzend strukturelle Imperfektionen beinhalten können. Die Vergleichbarkeit mit dem realen Tragverhalten ist daher nicht mehr gegeben.

2.8 Konstruktive und baupraktische Fragestellungen

2.8.1 Konstruktive Durchbildung

Neben der rein strukturmechanischen Betrachtung des Tragverhaltens von Stahlbetonstützen existieren weitere „konstruktive“ Richtlinien, die bei der Bemessung bzw. Bewertung von Stahlbetondruckgliedern zu beachten sind. Anerkannte Regeln sind in den einschlägigen Bemessungsnormen [DIN 1045-01], [EC 2-92] und [Leonhardt-77] dargestellt und in folgender Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 2-3: Konstruktive Regeln der Stützenbemessung

Regel / Richtlinie	Anforderung / Referenzen
Mindestabmessungen	200 mm Seitenlänge ³
Mindest- / Maximalbewehrung	DIN 1045-1 13.5.2
Betondeckung / Betonieren	allgemeine Stahlbetonanforderungen
Querbewehrung	DIN 1045-1 13.5.3
Übergreifungsstöße	[Leonhardt-77]
Anschlussbewehrung	[Leonhardt-77]
Krafteinleitungen / Konsolen	evt. Stabwerkmodelle

Die Prüfung der Einhaltung der konstruktiven Regeln obliegt der Qualitätssicherung bei der Bauausführung bzw. den Untersuchungen der Neubewertung. Die Analyse der Bauteilzuverlässigkeit (siehe Kapitel 3) umfasst nicht die Beurteilung dieser konstruktiven Regeln. So kann z.B. das fehlende Ausbilden eines Übergreifungsstoßes statistisch nicht bzw. nur sehr schwer erfasst werden.

2.8.2 Baupraktische Durchbildung

Neben der konstruktiven Durchbildung sind bei der Bemessung von neu zu errichtenden Stahlbetonstützen baupraktische Punkte relevant. So wird beispielsweise eine vollständig symmetrische Bewehrung empfohlen, die im Hinblick auf die Bewehrungsausführung nicht zu Verwechslungen führen kann. Weitere Parameter wie Rüttellücken und Betonierabschnitte sind von der jeweiligen Situation abhängig und allgemein geläufig.

³ Gemäß DIN 1045-1 [DIN 1045-01] 13.5.1 ist bei Fertigteilstützen, die waagrecht betoniert wurden abweichend eine Seitenlänge von 120 mm zulässig.

3 Probabilistische Zuverlässigkeitsanalyse

3.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Für probabilistische Modelle, welche unter Anderem der Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit zugrunde liegen, soll in den folgenden Kapiteln eine mathematische Beschreibungsmöglichkeit auf Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben werden. Dazu werden zunächst grundlegende Begriffe kurz definiert.

- Als *Zufallsexperiment* bezeichnet man einen Vorgang, der beliebig oft wiederholbar ist, dessen zufälliges *Ergebnis* A jedoch nicht vorhergesagt werden kann.
- Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes wird als *Ergebnismenge* Ω definiert, während die zufälligen Ergebnisse in der *Ergebnisalgebra* Σ enthalten sind.
- Zufällige Realisierungen (x_1, \dots, x_n) eines Zufallsexperimentes werden als mathematische *Stichproben* der *Grundgesamtheit* X bezeichnet.
- Die Abbildung $P(A)$ mit $A \in \Sigma$ heißt *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A .
- Das Tripel (Ω, Σ, P) wird als *Wahrscheinlichkeitsraum* definiert.
- Zwei Ergebnisse $A, B \in \Sigma$ heißen *unabhängig*, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Im gegenteiligen Fall liegt stochastische *Abhängigkeit* vor.
- Die Abbildung $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ wird als *Verteilungsfunktion* der Zufallsvariable X im Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) definiert.
- Eine stetige Zufallsvariable ist mit der *Dichte* $f(t)$ verteilt, wenn sich ihre Verteilungsfunktion in folgender Weise schreiben lässt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3-1)$$

- Im Allgemeinen wird der Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen als Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte definiert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(t) dt. \quad (3-2)$$

- Die *Varianz* als Streumaß wird wie folgt definiert:

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2). \quad (3-3)$$

- Die Quadratwurzel aus der Varianz heißt *Standardabweichung* σ .
- Für Zufallsvariablen mit einem Erwartungswert $E(X) \neq 0$ nennt man $\sigma / E(X)$ den *Variationskoeffizienten CV* bzw. *VarK* der Zufallsvariablen.
- Als *Schätzer* bezeichnet man stochastische Methoden, die auf Basis endlicher Stichproben den Erwartungswert bzw. die Varianz angeben.

Bezüglich einer umfassenden Erläuterung der Wahrscheinlichkeitstheorie und derer Begriffe wird auf [Bronstein-96] und [Lehn-06] verwiesen.

Eine wesentliche Erweiterung der Wahrscheinlichkeitstheorie stellen *stochastische Prozesse* dar. Stochastische Prozesse sind Modelle (z.B. Markow-Ketten) für zufällige zeitliche Abläufe, insbesondere wenn zeitliche Abhängigkeiten, wie bei fast jeder praktischen Anwendung, vorliegen. Ziel ist es, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten zukünftiger Ereignisse anzugeben. Bei Verallgemeinerung auf *zufällige Felder* können auch räumliche Abhängigkeiten modelliert werden.

3.2 Sicherheit und Zuverlässigkeit

3.2.1 Technische Sicherheit, Risiko

In der Bautechnik versucht man durch Abschätzung der erfassbaren Größen, ein Maß für die technische Sicherheit der mechanischen Struktur anzugeben, wobei mathematisch quantifizierbare Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden [Schneider-94].

Untersuchte unscharfe Größen sind neben der Zeit vor allem Material-, Last- und Geometrieparameter. Die Einwirkung menschlicher Fehlhandlungen wird dabei meist nicht erfasst, obwohl sie einen großen Einfluss auf die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Schadens hat [Spaethe-92], [Proske-04]. Abb. 3-1 zeigt die prinzipiellen Ursachen der Unsicherheiten.

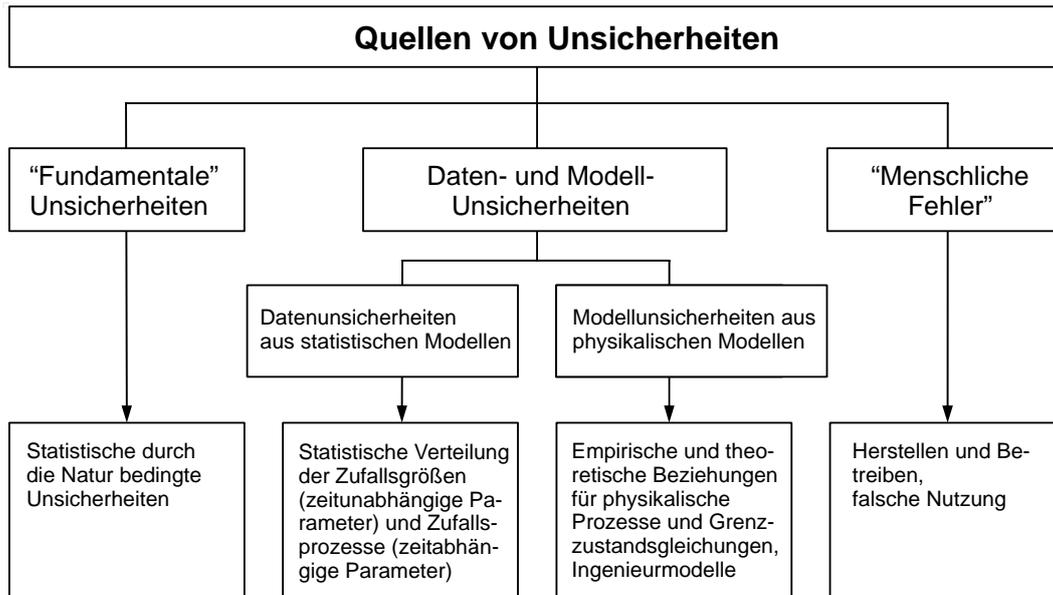


Abb. 3-1: Quellen von Unsicherheiten nach [Oumeraci-01]

Im Einzelnen ergeben sich nach [Kortenhaus-03] und [Oumeraci-01] folgende Definitionen der betrachteten Größen:

- „Fundamentale“ oder statistische Unsicherheiten, die durch die zufälligen Prozesse in der Natur bedingt sind und nicht verringert werden können (in Messdaten immer enthalten);
- Datenunsicherheit: Messfehler, Inhomogenität der Daten, Fehler während der Datenverarbeitung, nicht repräsentative Wiedergabe der Messung wegen ungenügender zeitlicher und räumlicher Auflösung;
- Modellunsicherheit: Erfassung der ungenügenden Wiedergabe der physikalischen Prozesse in der Natur durch das implementierte Modell;
- „Menschliche“ Fehler: alle Fehler während der Herstellung, Verschleiß, Wartung sowie andere menschliche Fehler, die nicht durch das Modell erfasst werden. Sie können in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden, weil sie im Allgemeinen zu spezifisch sind.

Ein Maß für die Größe der Gefahr des Tragfähigkeitsverlustes ist die Versagenswahrscheinlichkeit P_f (probability of failure). Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der das Tragwerk in einem definierten Zeitraum einen Schaden erleiden kann. Das Komplement der Versagenswahrscheinlichkeit ist die Zuverlässigkeit $1 - P_f$. Bei Zuverlässigkeitsanalysen kann daher sowohl die Versagenswahrscheinlichkeit als auch die Zuverlässigkeit für die Betriebsdauer (Nutzungsdauer) bestimmt werden.

Auch wenn die Versagenswahrscheinlichkeit im Bauwesen das entscheidende Kriterium für die Beurteilung der Sicherheit darstellt, so handelt es sich trotzdem um eine relative Wahrscheinlichkeit, die keine Konstante eines Bauteils ist. Wie in [Schneider-94] beschrieben, handelt es sich vielmehr um den „Grad des Vertrauens“ bzw. „Grad des Glaubens“ in die Aussage, dass das zu prognostizierende Bauteil versagen könnte. Dieser Grad wird durch die bayessche⁴ Wahrscheinlichkeit interpretiert, die eine Abschwächung der klassischen Wahrscheinlichkeit bei relativen Annahmen hinsichtlich der Eingangsparameter beinhaltet. Bei probabilistischen Bemessungscodes (z.B.: [JCSS-00]) wird versucht, diese Beurteilung auf eine einheitliche Basis zu bringen, damit auch vergleichende Analysen ermöglicht werden. Diese Tatsache wird im Rahmen dieser Arbeit herangezogen.

Risikountersuchungen beziehen neben der Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses zusätzlich multiplikativ das Schadensausmaß bzw. die Folgen und Konsequenzen des Ereignisses ein. Entsprechende Definitionen des Schadenspotentials sind dabei erforderlich [Proske-04].

3.2.2 Subjektives Sicherheitsempfinden

Sicherheit als Ziel der tragwerksplanerischen Maßnahmen ist neben dem technischen Aspekt auch eine subjektiv einschätzbare Größe, die jeder Mensch anders empfinden kann (Verständnis der Wahrscheinlichkeit).



Abb. 3-2: Grand Canyon Skywalk (ComplexSimpleLLC 2007)

⁴ Wahrscheinlichkeitsbegriff, benannt nach dem englischen Mathematiker Thomas Bayes.

So weckt beispielsweise die Benutzung des Grand Canyon Skywalk (Abb. 3-2) bei vielen Menschen ein Unbehagen, was aber nicht zwangsläufig mit der Zuverlässigkeit der Konstruktion in Verbindung steht. Diese subjektive Sicherheit kann nicht ohne weiteres mathematisch quantifiziert werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden die technische Zuverlässigkeitsanalyse herangezogen.

Wenn man auch im Fall des Skywalks gezielt mit den Empfindungen der Besucher spielt, so ist es doch die Kernaufgabe des Tragwerksplaners, Bauwerke zu errichten, die neben der technischen Zuverlässigkeit auch das Gefühl von Sicherheit vermitteln.

3.2.3 Versagen und Grenzzustand

Versagen beschreibt einen Zustand, bei dem ein Gebäude oder ein Bauteil seine Funktion nicht mehr erfüllen kann. Im schlimmsten Fall kann dies der plötzliche Verlust der Tragfähigkeit mit all seinen Folgeerscheinungen sein. Bei Stahlbetonstützen können die in Tabelle 3-1 dargestellten Versagensarten auftreten. Ein generalisiertes Modell des Tragverhaltens von Stahlbetonstützen muss alle Versagensursachen umfassen. Da das Versagen eine Folge von vielen verschiedenen Ursachen ist, müssen alle diese beteiligten Effekte im Rahmen der Versagensmodellierung berücksichtigt werden.

Tabelle 3-1: Versagensarten für schlanke Stahlbetonstützen

Versagensart	Versagen
Versagen auf Querschnittsebene	Spannungsversagen des Betons Spannungsversagen des Bewehrungsstahls Versagen des Verbundes
Versagen auf Systemebene	stabilitätsbedingte Traglastabnahme (Theorie großer Verschiebungen)

Zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit ist üblicherweise die vollständige Formulierung des Grenzzustandes notwendig [Nowak-00]. Dabei wird dem Bauteilwiderstand R die entsprechende Einwirkung E gegenübergestellt. Die Betrachtung kann sowohl an einem einzelnen Querschnitt des Bauteils, an einer Faser des Querschnittes, oder am globalen Bauteil / System notwendig sein. Dies kann, wie später beschrieben, durchaus zu Problemen im Hinblick auf ein einheitliches Sicherheitsniveau führen. Gleichung (3-4) gibt die grundlegende Grenzzustandsfunktion für ein Bauteil an, wobei zunächst die Kenngrößen R und E betrachtet werden.

$$g(R, E) = R - E \quad (3-4)$$

Nach SCHNEIDER [Schneider-94] trennt die Grenzzustandsgleichung (3-5) den akzeptierten Bereich vom „Bereich des Versagens D_f “⁵.

$$g(R, E) = R - E = 0 \quad (3-5)$$

Das sich einstellende Versagen ist ein zufälliges Ereignis einer bestimmten Realisierung der möglichen Grundgesamtheit. Als Grundgesamtheit wird die Menge aller möglichen Kombinationen der Eingangsparameter definiert. Die zufällige Realisierung hängt von der Verteilung der Parameter ab. Ist $g > 0$, befindet sich das Bauteil im sicheren Bereich, falls $g < 0$ ist, liegt ein Versagen vor. Der praktisch irrelevante Fall $g = 0$ wird als indifferent bezeichnet.

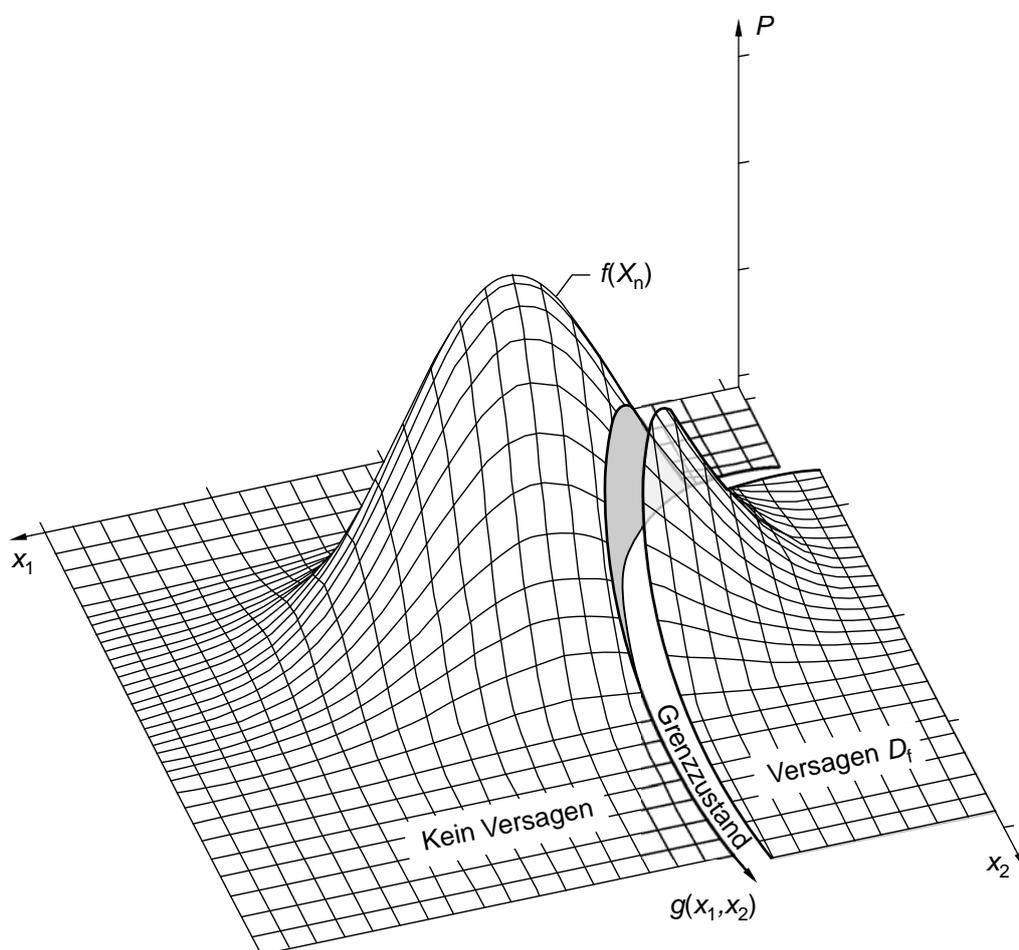


Abb. 3-3: Häufigkeitsverteilung im x_1, x_2 -Raum mit Grenzzustandsfunktion

⁵ engl: domain of failure

Wenn die Verteilung sämtlicher Last- und Widerstandseffekte unabhängig voneinander ist, so kann die Häufigkeit des Auftretens aller möglichen Kombinationen (Grundgesamtheit) im stochastischen Ergebnisraum durch mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichten (siehe [Lehn-06]) dargestellt werden.

Durch Gleichung (3-5) entsteht ein dreidimensionaler orthogonaler Raum mit einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für zwei Parameter wie Abb. 3-3 verdeutlicht.

3.3 Verteilungsfunktionen lösungsrelevanter Parameter

3.3.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen für stetige Zufallsvariablen

Wie bereits im Kapitel 3.2.1 angedeutet, ist die Beschreibung der Unsicherheiten durch streuende Parameter eine grundlegende Kernfunktionalität eines probabilistischen Modells. Neben der Möglichkeit der Modellierung durch Fuzzy-Funktionen [Möller-99] erfolgt diese Beschreibung im Allgemeinen durch stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen für reelle Zahlen (siehe z.B. [Bronstein-96], [Fischer-99], [Olofsson-05]). Hierbei treten an die Stelle von Fuzzy-Funktionen stochastische Funktionsverläufe.

Physikalische Eigenschaften können zu bestimmten Verläufen der Verteilungsfunktionen einzelner Parameter führen. Meist ist es jedoch nicht möglich, direkt aus den physikalischen Gegebenheiten eines Zufallsprozesses auf die Art der Verteilungsfunktion zu schließen. Daher werden in der Regel plausible Verteilungen angenommen, die durch experimentelle Analysen bestätigt oder durch statistische Testverfahren angepasst werden. Auf diese Art und Weise kann, beispielsweise aus einer endlichen Menge von Betonproben einer speziellen Betonfestigkeit, die angenäherte Verteilungsfunktion ermittelt werden [Taerwe-06].

Die Qualität bzw. Anpassungsgüte (engl.: „goodness of fit“) einer experimentellen Datenbasis an eine gewählte Verteilungsfunktion kann mit statistischen Anpassungstests, z.B. dem Chi-Quadrat-Test oder dem Kolmogorow-Smirnow-Test [Plate-93], erfolgen. Obwohl diese Tests ursprünglich für Normalverteilungen entwickelt wurden, sind sie für die meisten Verteilungsfunktionen anwendbar. Prinzipiell werden gängige Annahmen für Verteilungsfunktionen genutzt. Herleitungen für die Parameter des Stahlbetons werden in [JCSS-00], [Schnetzler-00] und [CEB 202-91] dargestellt. Die Modellierung spezifischer Parameter und Modellunsicherheiten wird im Abschnitt 5.3.2 erläutert.

Grundsätzlich werden mathematische Funktionen herangezogen, die von wenigen Parametern abhängig sind. Die Verteilungsfunktion F_x nach Gleichung (3-6) gibt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Ereignisses an.

$$F_x = F(x) = P(X < x) \quad (3-6)$$

Es ist definiert, dass Wahrscheinlichkeiten zwischen null und eins liegen, wie Abb. 3-4 verdeutlicht. Im Fall $P(X < x) = 0$ ist das Auftreten eines Ereignisses „fast ausgeschlossen“, während $P(X < x) = 1$ ein „fast sicheres“ Eintreten eines Ereignisses bedeutet.

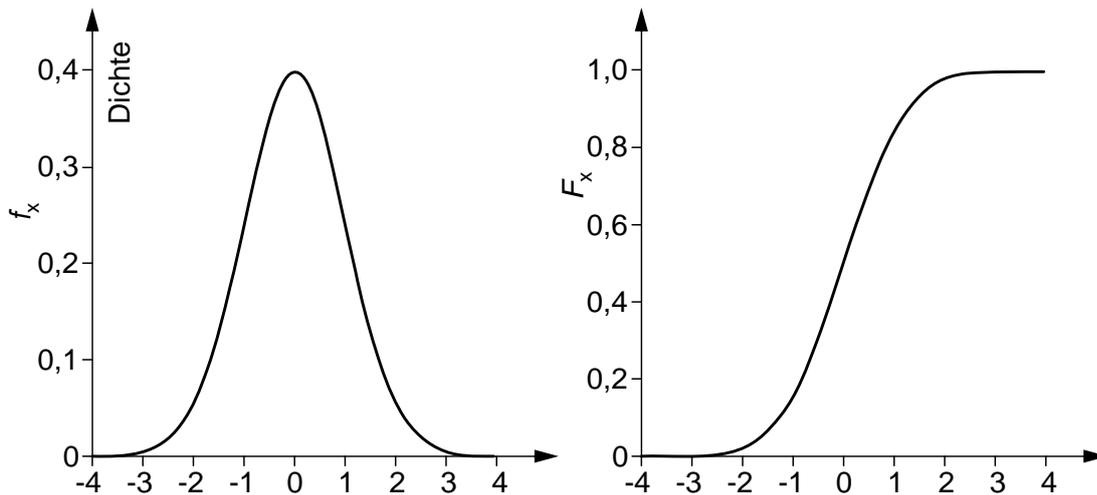


Abb. 3-4: Verteilungsdichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Eine ergänzende Darstellungsform für Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die Verteilungsdichtefunktion f_x , die ebenfalls in Abb. 3-4 dargestellt wird. Mathematisch ist diese die erste Ableitung der Verteilungsfunktion.

$$f_x = f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3-7)$$

Zusätzlich ist es von Vorteil, wenn eine inverse Funktion der Verteilungsfunktion existiert. Sie wird wie folgt definiert:

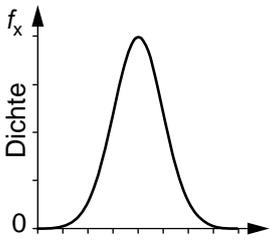
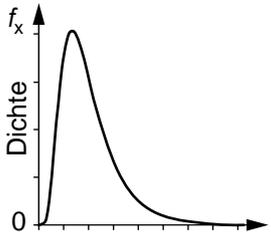
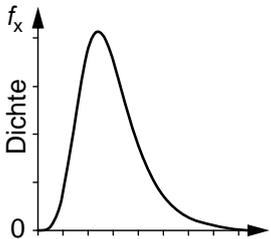
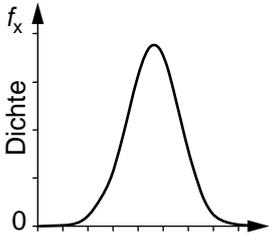
$$F^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (3-8)$$

Diese Funktion wird häufig verwendet, um verteilte Realisierungen aus gleichverteilten Zufallszahlen $U(0,1)$ des Einheitsraumes zu ermitteln.

Relevante Verteilungstypen für strukturelle Anwendungen sind die (Gauß-) Normalverteilung (N), die Log-Normalverteilung (LN) und die Extremwertverteilungen (EV-I, EV-III). Die Extremwertverteilung EV-I ist auch unter dem Begriff Gumbel-Verteilung bekannt und ist eine spezialisierte Verteilung des Fischer-Tippett Typs. Die Funktionen werden in Tabelle 3-2 anhand ihrer Dichteverteilung erfasst. Der Erwar-

teilungswert μ , die Standardabweichung σ und der Variationskoeffizient CV sind die gebräuchlichsten Parameter zur Beschreibung der Verteilungsfunktionen.

Tabelle 3-2: Relevante Verteilungsfunktionen

Typ	Kürzel	Verteilungsdichtefunktion	Dichtefunktionen
Normalverteilung	N		$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\cdot\sigma^2)}$ <p style="text-align: right;">(3-9)</p>
Log-Normalverteilung	LN		$f(x) = \frac{e^{(\ln(x)-\mu_{\ln x})^2/(2\cdot\sigma_{\ln x}^2)}}{x\sigma_{\ln x}^2\sqrt{2\pi}}$ $\mu_{\ln x} = \ln \mu - 0,5 \cdot \sigma_{\ln x}^2$ $\sigma_{\ln x}^2 = \ln(1 + CV^2)$ <p style="text-align: right;">(3-10)</p>
Gumbel-Verteilung	EV-I		$f(x) = \lambda e^{-e^{-\lambda(x-\alpha)}} - \lambda(x-\alpha)$ $\alpha = \mu - \gamma\sigma\sqrt{6}/\pi$ $\lambda = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}, \quad \gamma \approx 0,5772156649$ <p style="text-align: right;">(3-11)</p>
Weibull-Verteilung ⁶	EV-III		$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}$ <p style="text-align: right;">(3-12)</p>

Das zeitvariante Problem der Zuverlässigkeitsanalyse kann durch Einführung der Gumbel-Verteilung innerhalb eines bestimmten Bezugszeitraums auf eine zeitunabhängige Fragestellung reduziert werden [Faber-02]. Die Extremwertverteilung EV-III, welche

⁶ Die Parameter der Gleichung (3-12) sind [SSJ-08] zu entnehmen.

auch als Weibull-Verteilung bezeichnet wird, kann insbesondere als schiefe Verteilung für Modellunsicherheiten herangezogen werden.

3.3.2 Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Kenntnis der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ermöglicht im Vergleich zur stochastischen Simulation verbesserte Berechnungsmethoden der Zuverlässigkeit, wie Abb. 3-5 verdeutlicht.

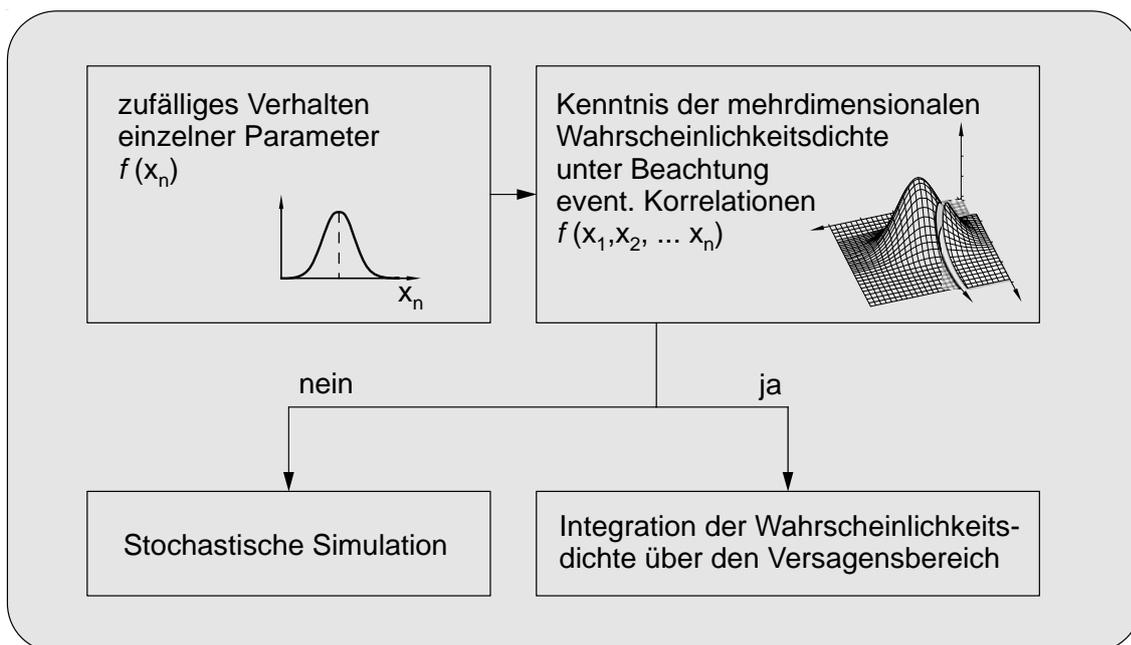


Abb. 3-5: Nutzung der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Die Berechnungsmethoden zur Erfassung der Versagenswahrscheinlichkeit werden im Abschnitt 3.7 dargestellt.

In diesem Kapitel werden die allgemeinen Beziehungen mehrdimensionaler, stetig verteilter Zufallsvariablen entwickelt. Grundsätzlich ist dabei zu beachten, dass die einzelnen Parameter unabhängige oder korrelierte Zufallsvariablen darstellen können. Dieser Zusammenhang kann zum Beispiel bei einer stochastischen Analyse [Plate-93] geprüft werden.

Die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte für mehrdimensionale Fälle kann aus der relativen Häufigkeit abgeleitet werden. Dabei werden die entsprechenden Stichprobenwertepaare in einer kumulativen Darstellung grafisch interpretiert und zur Wahrscheinlichkeitsdichte überführt. Die prinzipielle Vorgehensweise ist in Abb. 3-6 dargestellt.

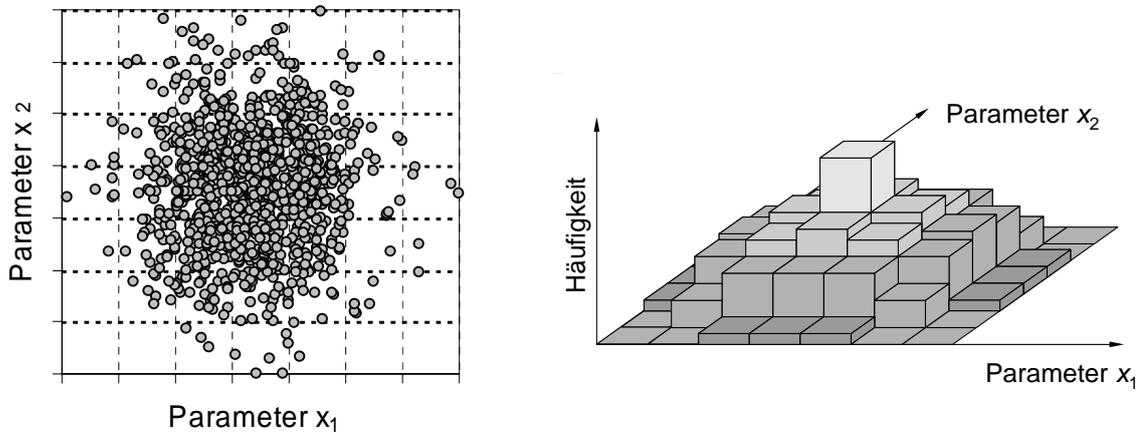


Abb. 3-6: Kumulative Darstellung einer Stichprobenauswahl

Korrelative Zusammenhänge, die bei der Zuverlässigkeitsberechnung von Stahlbetonbauwerken eine Rolle spielen, werden beispielsweise in [Six-01], [Flederer-02] und [JCSS-00] erläutert.

Wie folgende Gleichungen zeigen, sind der Elastizitätsmodul E_{c0m} und die Betonzugfestigkeit f_{ct} direkt mit der Betondruckfestigkeit f_{cm} verknüpft.

$$E_{c0m} = \alpha_E \cdot f_{cm}^{1/3} \quad (3-13)$$

mit: α_E ... Korrelationsfaktor für den Tangentenmodul

$$f_{ct} = \alpha_{ct} \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3-14)$$

mit: α_{ct} ... Korrelationsfaktor für die Zugfestigkeit

Eine besondere Bedeutung bei der Berechnung der Zuverlässigkeit schlanker Stahlbetonstützen hat der Fall, bei dem die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Parameters unabhängig von den jeweils anderen Variablen ist. Dies erreicht man durch die Verwendung von indirekten Korrelationen. So wird beispielsweise nicht der Elastizitätsmodul E_{c0m} als verteilte Größe modelliert, sondern der Vorfaktor α_E . Ähnliche Zusammenhänge ergeben sich beim Betonstahl. Unter Annahme stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen ist es möglich, Gleichung (3-7) für den mehrdimensionalen Fall zu definieren:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n). \quad (3-15)$$

Gleichung (3-15) ist gerechtfertigt, da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines kombinierten Ereignisses $P(A \cap B)$ bei unabhängigen Variablen im Wahrscheinlich-

keitsraum dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse $P(A) \cdot P(B)$ entspricht. Es entsteht eine multidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Abb. 3-3).

Entsprechende Herleitungen des Multiplikationsansatzes werden in [Bronstein-96] aufgezeigt.

3.4 Versagenswahrscheinlichkeit und Grenzzustandsfunktion

3.4.1 Versagenswahrscheinlichkeit

Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f ist das Verhältnis der Summe der Ereignisse, bei welchen der Fall $g < 0$ auftritt, zur Grundgesamtheit. Dies wird durch das Gebiet D_f definiert. Abb. 3-3 zeigt einen entsprechenden Bereich am Beispiel eines zwei-parametrischen Problems. Mathematisch kann man die Versagenswahrscheinlichkeit wie folgt ausdrücken:

$$P_f = P(g(R, E) < 0) = \frac{N_f}{N} \quad (3-16)$$

mit: N_f = Anzahl der Ereignisse $g(R, E) < 0$

N = Anzahl der möglichen Ereignisse (Grundgesamtheit).

Die Grundlage dieser Definition ist durch die Laplace-Annahme [Lehn-06] gegeben. Hierbei wird von einer Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ausgegangen, die entsprechend in den Parameterraum zu transformieren sind. Diese Annahme bildet die Basis für die Beschreibung eines Zufallsexperiments.

Das auch als R - E -Modell⁷ [Schneider-94] bezeichnete Problem, bei dem eine einfache Gegenüberstellung der Beanspruchung E und der Beanspruchbarkeit R herangezogen wird, eignet sich nicht für die Betrachtung schlanker Stahlbetonstützen. Die Beanspruchungen sind Funktionen mehrerer unabhängiger und korrelierter Parameter. Eine Veränderung der Belastung ändert bei schlanken Stahlbetonstützen deren Beanspruchbarkeit, was im Extremfall zur vollständigen Abnahme der Steifigkeit führen kann. Dieser Sachverhalt wurde bereits im Abschnitt 2.2 umfassend erläutert. Entsprechend dieser Betrachtungen ist eine allgemeingültige Formulierung des Grenzzustandes notwendig, da ein reines Gegenüberstellen der Größen wie beim R - E -Modell zu keinem nutzbaren Ergebnis führt. Insbesondere bei nichtlinearem Tragverhalten ist eine Zuordnung in eine der beiden Gruppen nicht mehr möglich, wie SIX [Six-01] erläutert.

⁷ Andere gebräuchliche Bezeichnung: R - S -Modell

Insgesamt werden zwölf relevante Parameter im Zuge eines vollständigen probabilistischen Verfahrens für die Berechnung von bi-axial belasteten Stahlbetonstützen herangezogen. Dabei ist die Grenzzustandsfunktion keine herkömmliche Ebene oder Kurve, sondern eine Hyperfläche im n -dimensionalen stochastischen Ergebnisraum. Die Dimension n wird dabei durch die Anzahl der unabhängigen Parameter definiert. Eine punktuelle Berechnung des Versagensbereichs D_f kann auf Grundlage von Abb. 3-7 und unter Verwendung folgender Gleichung durchgeführt werden:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{"failure"}. \quad (3-17)$$

Die Angabe "failure" verdeutlicht in diesem Zusammenhang, dass sich unter den gegebenen Parametern x_1, x_2, \dots, x_n ein Versagen nach Tabelle 3-1 einstellt. Ob und welches Versagen auftritt, wird durch das parametrisierte, strukturmechanische Verfahren (vgl. Abschnitt 5.2) berechnet. Da dieses Verfahren in der Regel ein Ingenieurmodell beinhaltet, ist mit Modellunsicherheiten zu rechnen. Unter Modellunsicherheit wird die Genauigkeit verstanden, mit der ein Modell oder Verfahren einen physikalischen Prozess oder eine Grenzzustandsgleichung (3-17) darstellen kann. Im Abschnitt 5.2.7 wird auf eine allgemeine Beschreibung der Modellunsicherheiten eingegangen.

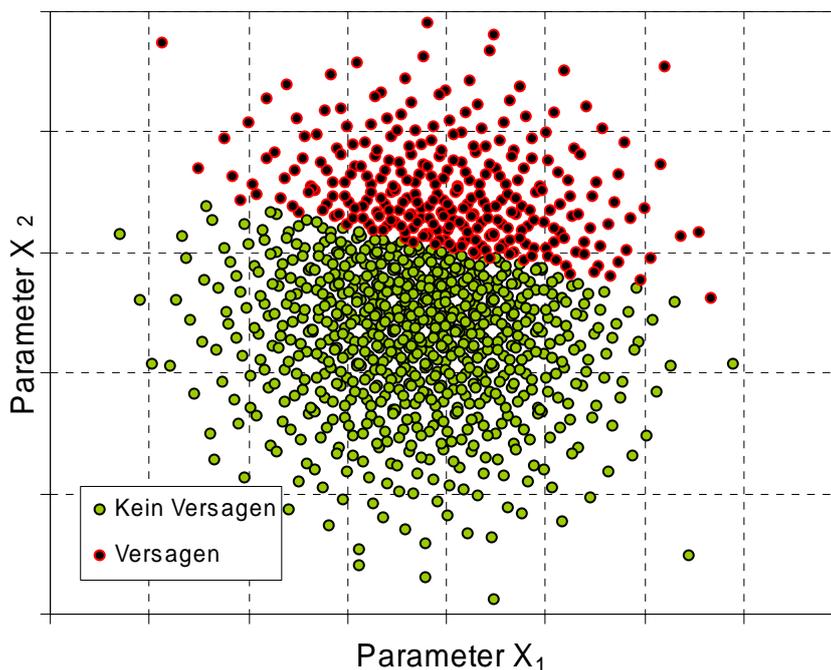


Abb. 3-7: Beispielhafte Darstellung einer punktuellen Auswertung eines Zuverlässigkeitsproblems im x_1, x_2 -Parameterraum

Gleichung (3-16) lässt sich unter Annahme von Gleichung (3-17) verallgemeinern und in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) als integrierbare Funktion definieren. Für

die generelle Beschreibung der Versagenswahrscheinlichkeit bei der zeitinvarianten Zuverlässigkeitsanalyse erhält man folgende Gleichung.

$$P_f = P(g(x_1, x_2, \dots, x_n) = failure) = \int_{D_f} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dX \quad (3-18)$$

Gleichung (3-18) stellt die formale mathematische Definition der Versagenswahrscheinlichkeit dar. Die Zuverlässigkeitsanalyse schlanker Stahlbetonstützen beruht auf der Berechnung dieses multidimensionalen Integrals.

3.4.2 Implizite Grenzzustandsfunktionen und deren Beschreibung

Die mathematische Integration der grundlegenden Gleichung (3-18) ist nur bei bekannter, analytisch beschreibbarer Grenzzustandsfunktion möglich. Generell ist diese Grenzzustandsfunktion eine Funktion aus allen betrachteten Parametern. Es ist nicht mehr ausreichend, das Zuverlässigkeitsproblem durch einfaches Gegenüberstellen der Beanspruchung E und der Beanspruchbarkeit R auszudrücken. Im Falle der nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonstützen ist die Berechnung der Grenzzustandsfunktion nur noch implizit mit Hilfe des strukturmechanischen Modells möglich. Folgende Abbildungen zeigen eine punktuelle Analyse des Tragverhaltens im zwei-dimensionalen Parameter- und Einheitsraum. Die Grenze zwischen „Versagen“ (rote Punkte) und „nicht Versagen“ (grüne Punkte) kann leicht verdeutlicht werden.

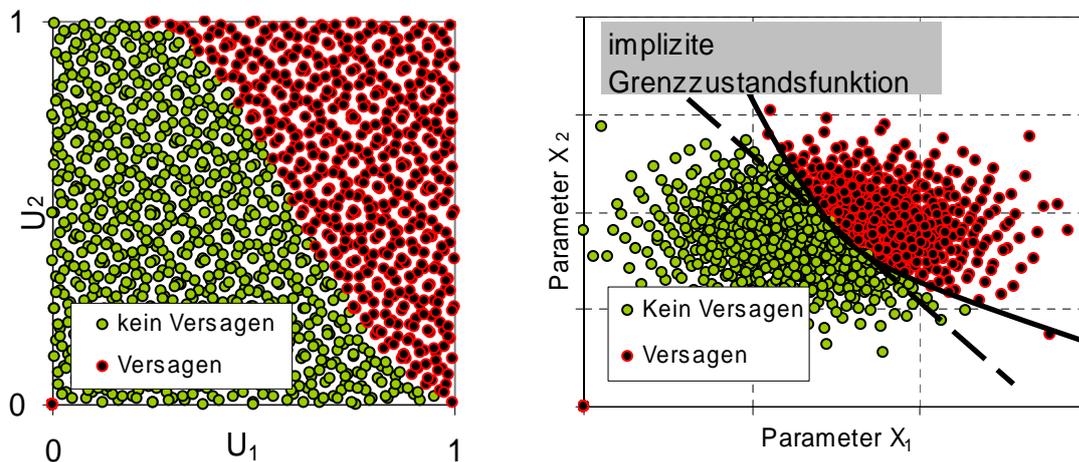


Abb. 3-8: Darstellung der impliziten Grenzzustandsfunktion im Einheits- und Parameterraum

Da die Grenzzustandsfunktion (also die Integrationsgrenze der Gleichung (3-18)) für stabilitätsgefährdete Stahlbetonstützen nur implizit an ausgewählten Punkten vorliegt, ist die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit sehr viel Aufwand verbunden.

Der numerische Aufwand steigt zusätzlich mit der Vergrößerung der Dimension der probabilistischen Fragestellung. Entsprechende Berechnungsmethoden für implizite Grenzzustandsfunktionen werden in den Kapiteln 3.6, 3.7 und 3.8 vorgestellt.

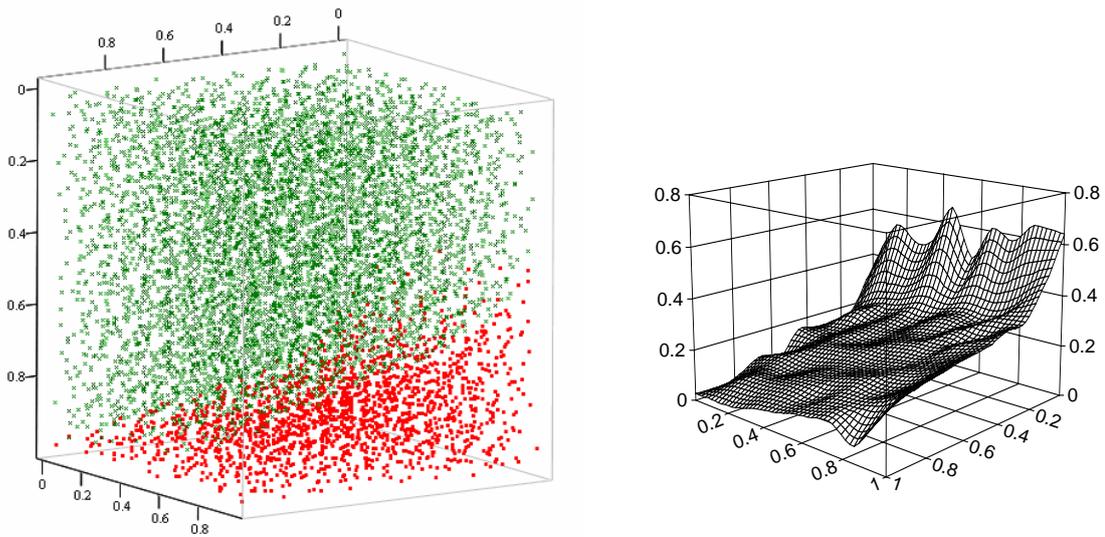


Abb. 3-9: Implizite Grenzzustandsfunktion im 3D- Einheitsraum

Die drei-dimensionalen Darstellungen (siehe Abb. 3-9) verdeutlichen die implizite Grenzzustandsfunktion im Standardeinheitsraum für drei Parameter. An der indifferenten Grenze $g = 0$ ergibt sich die auf der rechten Seite gezeigte Grenzzustandsfläche. Eine ausgeprägte Nichtlinearität ist deutlich erkennbar.

3.5 Sicherheitskonzepte – Berechnungsniveaus

3.5.1 Methodische Sicherheitskonzepte

Zuverlässigkeitstheoretische Methoden zur Lösung des bauwerksspezifischen Bemessungsansatzes sind spätestens seit der Einführung des Teilsicherheitskonzeptes, welches der modernen Normengeneration zugrunde liegt, fester Bestandteil der ingenieurpraktischen Arbeit. Folgende Berechnungsniveaus werden im Zuge unterschiedlicher Sicherheitskonzepte definiert ([Nowak-00]).

„Level 0 und I codes benutzen deterministische Bemessungsformeln. Die Sicherheit wird durch die Einführung von globalen Sicherheitsbeiwerten oder Teilsicherheitsbeiwerten erreicht.

Level II codes definieren das Bemessungskriterium als möglichst „dichteste“ Realisierung des Zuverlässigkeitsindex β zum Zielwert der Zuverlässigkeit.

Level III codes benötigen eine vollständige Zuverlässigkeitsanalyse zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit für verschiedene Belastungsszenarien. Die Akzeptanz wird durch das Erreichen der Zielwahrscheinlichkeit definiert.

Level IV codes ziehen zusätzlich die Kosten als Optimierungskriterium heran. Das akzeptierte Design maximiert die grundlegende Beschreibungsfunktion.“

Eine entsprechende Übersicht wurde bereits in Tabelle 1-1 dargestellt.

3.5.2 Angestrebte Sicherheit

Wie groß die geforderte Zuverlässigkeit bei der Bewertung entsprechender Risiken sein sollte, ist neben der gesellschaftspolitischen und ökonomisch / ökologischen eine durchaus philosophische Fragestellung. Eine Zusammenstellung über die Akzeptanz von Risiken aus verschiedensten Bereichen wird durch PROSKE [Proske-04] ausführlich diskutiert.

Im Bauwesen werden üblicherweise entsprechende Zielwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Anforderung und Gebäudeklasse (Risikogruppe) definiert. Folgende Tabelle 3-3 zeigt die Sicherheitsanforderungen nach [EC 1-95] für einen zeitlichen Bezugszeitraum von einem Jahr und 50 Jahren.

Tabelle 3-3: Akzeptierte Zielsicherheit

Risikoklasse	Versagenswahrscheinlichkeit P_f [1 Jahr]	Versagenswahrscheinlichkeit P_f [50 Jahre]
1 (z.B. Silos)	$P_f = 1,3 \cdot 10^{-5}$	$P_f = 4,8 \cdot 10^{-4}$
2 (z.B. Wohnhäuser)	$P_f = 1,3 \cdot 10^{-6}$	$P_f = 7,3 \cdot 10^{-5}$
3 (z.B. Brücken)	$P_f = 1,0 \cdot 10^{-7}$	$P_f = 8,5 \cdot 10^{-6}$

Die Einteilung der Bauwerke in bestimmte Risikoklassen wird gemäß [JCSS-00] vorgenommen.

3.6 Probabilistische Approximationsverfahren

Probabilistische Approximationsverfahren dienen der Berechnung des Zuverlässigkeitsindex im Rahmen von *Level II codes* (siehe Kapitel 3.5.1). Der Vorteil, der in Tabelle 3-4 genannten Verfahren zur Berechnung des Zuverlässigkeitsindex β gegenüber exakter probabilistischer Verfahren (siehe Kapitel 3.7), liegt im vergleichsweise geringen Rechenaufwand.

Tabelle 3-4: Probabilistische Näherungsverfahren

Verfahren	Referenzen
First Order Reliability Method (FORM)	[Hasofer-74], [Rackwitz-78], [Nowak-00]
Second Order Reliability Method (SORM)	[Saltelli-00], [Möller-00]
Response Surface Method (RSM)	[Ross-06]

FORM stellt das theoretische Konzept für die Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten im Rahmen von Bemessungsnormen [EC 2-92], [DIN 1045-01] und [MC 90] dar. Die Teilsicherheitsbeiwerte werden dabei in Bezug auf den Bemessungspunkt (siehe [Fischer-99]) festgelegt. FORM ist nur für lineare Grenzzustandsfunktionen und für unabhängige, normalverteilte Variablen x_i gültig. Für die übrigen Fälle sind die Ergebnisse nur Näherungen. Das Verfahren (Prinzip siehe Abb. 3-10) impliziert, dass beliebige Verteilungen von Eingangsparametern durch die Transformation in Gauß-Normalverteilungen im Bemessungspunkt geändert werden [Hasofer-74]. Diese Approximation ist eine Schwachstelle des Verfahrens, weil in den Kurvenverläufen der Verteilungen geringfügige Abweichungen große Auswirkungen auf die Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit haben können. Der Zuverlässigkeitsindex β ist im Allgemeinen wie folgt definiert:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}. \quad (3-19)$$

Wegen der im Abschnitt 3.4.2 dargestellten impliziten Grenzzustandsfunktion und der hohen Dimensionalität der probabilistischen Fragestellung stabilitätsgefährdeter Stahlbetonstützen, führen die genannten Verfahren auch im Sinne der Sensitivitätsanalyse zu keiner universell anwendbaren Modellierung.

Es werden daher die im folgenden Kapitel beschriebenen, stochastischen Verfahren (insbesondere die Quasi-Monte Carlo Methode) für diese Aufgaben herangezogen.

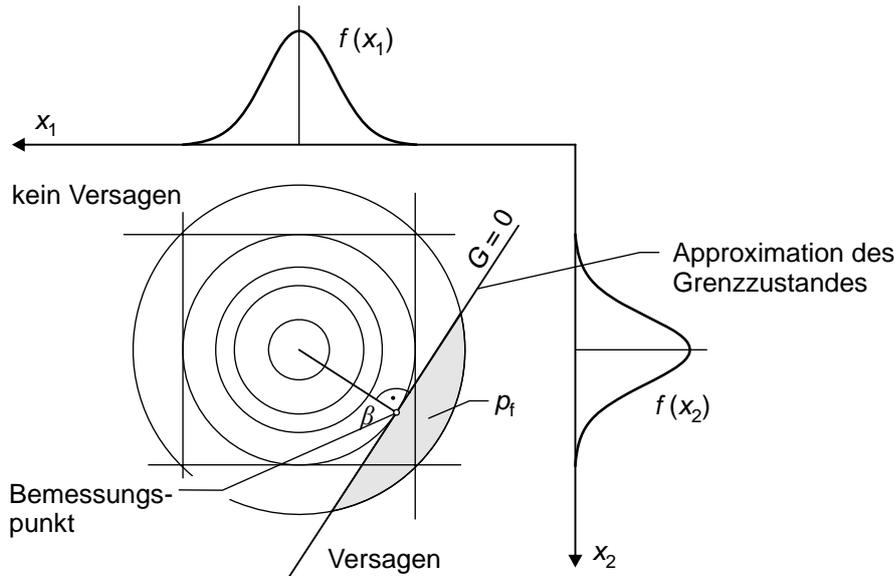


Abb. 3-10: Definition des Sicherheitsindex β nach [Hasofer-74]

Eine Kopplung dieser stochastischen Verfahren mit Approximationsverfahren ist grundsätzlich zweckmäßig, wenn es sich um sehr kleine Versagenswahrscheinlichkeiten handelt. Eine solche Vorgehensweise wird in [Strauss-07] praktiziert.

Der Sicherheitsindex β ist direkt von der Versagenswahrscheinlichkeit P_f funktional abhängig (siehe Abb. 3-11). Es besteht jedoch ein nichtlinearer Zusammenhang mit der Standardnormalverteilung Φ gemäß folgender Gleichung:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad \text{bzw.} \quad \beta = -\Phi^{-1}(P_f). \quad (3-20)$$

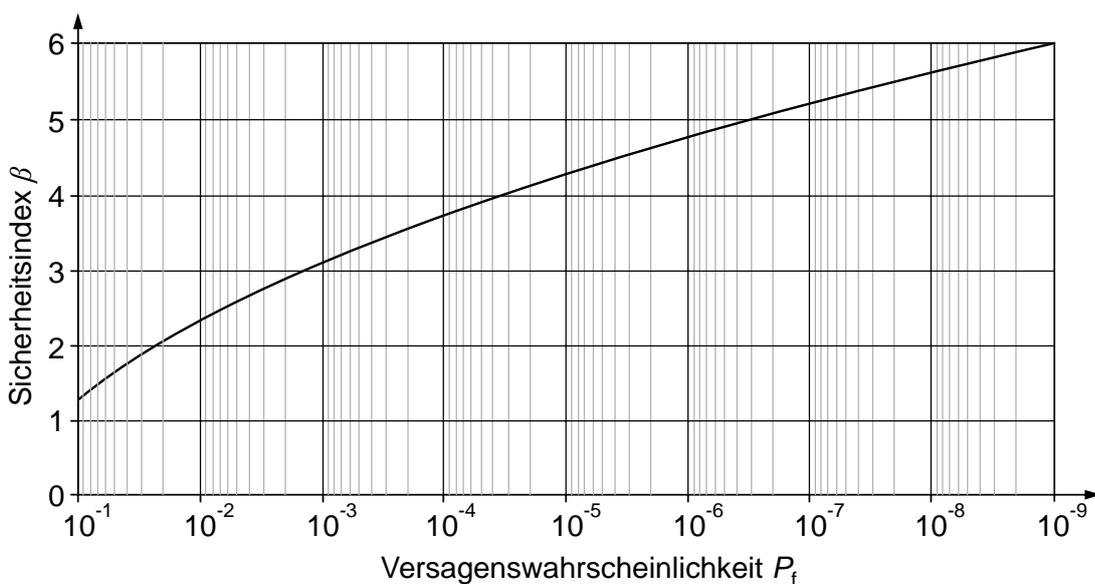


Abb. 3-11: Beziehung zwischen den Sicherheitsgrößen

Mit dem Antwortflächenverfahren (RSM, engl. Response Surface Method) werden die Grenzzustandsfunktionen (Antwortflächen) durch gerichtete Berechnungen diskreter Stützstellen in der Nähe des Bemessungspunktes ermittelt. Mit Hilfe dieser diskreten Punkte kann eine Antwortfläche approximiert werden, welche näherungsweise den Grenzzustand beschreibt. Anschließend kann eine Näherungslösung mittels FORM herbeigeführt werden. Bei einer probabilistischen Fragestellung höherer Dimension werden die zu approximierenden Flächen jedoch sehr komplex und unüberschaubar.

Für diese Arbeit wurden für die Untersuchungen schlanker Stahlbetonstützen zunächst die Approximationsverfahren der Tabelle 3-4 in Betracht gezogen, da sie bezüglich des erforderlichen Berechnungsaufwandes sehr effizient sind. Aufgrund des nichtlinearen und unstetigen Verhaltens der Grenzzustandsfunktionen (siehe Abschnitt 3.4.2) können diese Methoden jedoch nur begrenzt angewendet werden.

3.7 Direkte Berechnungsverfahren

Um die erwähnten Nachteile der Approximationsverfahren zu umgehen, kommen im Allgemeinen direkte Berechnungsverfahren des *Level III code* (siehe Kapitel 3.5.1) zum Einsatz. Zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit P_f bei nichtlinearem Tragverhalten kommen unter anderem folgende Verfahren zum Einsatz:

- numerische Integration
- stochastische Simulation, Monte Carlo Simulation [Rubinstein-81]
- Monte Carlo Integration

Gleichung (3-18) bildet die Basis für diese probabilistischen Verfahren. Zur Abgrenzung des Integrationsgebietes wird eine äquivalente Umformung (siehe: [Fleederer-02], [Six-01]) vorgenommen:

$$P_f = \int_{D_f} f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X} \quad (3-21)$$

mit: $I[g(\mathbf{X})] = 1$, wenn $g(\mathbf{X}) = failure$

$I[g(\mathbf{X})] = 0$, wenn $g(\mathbf{X}) = no failure$.

Die Indikatorfunktion $I[g(\mathbf{X})]$ gibt an, ob ein Versagen vorliegt. Im Fall der Stahlbetonstützen, muss das strukturmechanische Modell prüfen, ob bei den zufälligen Ereignissen \mathbf{X} ein Versagen nach Tabelle 3-1 entsteht. Dieses Vorgehen entspricht dem der impliziten Ermittlung der Grenzzustandsfunktion, das im Abschnitt 3.4.2 dargestellt wurde.

Durch die hohe Dimensionalität entstehen Schwierigkeiten bei der Lösung von Gleichung (3-21). Während für univariante Integrationen sehr gute numerische Methoden entwickelt wurden, eignen sich diese kaum für multivariante Fragestellungen.

3.7.1 Numerische Integration

Die gängigsten numerischen Integrationsmethoden basieren auf einer stückweisen Polynominterpolation der grundlegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. In [Krommer-98] werden entsprechende Quadraturformeln für multivariante Problemstellungen bereitgestellt.

Folgende Punkte treten bei der numerischen Integration auf Basis regulärer Gitter auf:

- Dimensionalitätsproblem,
- Inkrementalitätsproblem,
- eventuell konkaver Bias.

In [Krommer-98] wird erläutert, dass der numerische Rechenaufwand signifikant mit steigender Dimension zunimmt. Die Konvergenzrate beträgt:

$$O(1/N^{-2/d}) \tag{3-22}$$

und ist abhängig von der Anzahl d der unabhängigen Parameter des Problems und der Anzahl der Stichproben N . Bereits bei einer Integration einer Zuverlässigkeitsfunktion mit vier Variablen erreichen Methoden, die auf der Nummertheorie (siehe [Lehn-06]) beruhen, je nach Zielwahrscheinlichkeit eine bessere Effizienz.

Eine grundlegende Einschränkung der numerischen Integration ist das Inkrementalitätsproblem. Es ist nicht möglich, die Stützpunktanzahl inkrementell zu vergrößern, ohne die Gleichheit des Gitters zu gefährden [Krommer-98]. Des Weiteren ist hinlänglich bekannt, dass die Integration einer konvexen Funktion untergewichtet und die einer konkaven Funktion übergewichtet wird. Dieses Verzerrungsproblem kann durch höhere Polynominterpolationen ausgeglichen werden.

3.7.2 Stochastische Simulation – Crude Monte Carlo

Eine Möglichkeit zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mittels der Methode der stochastischen Simulation auf Basis der Laplace-Annahme ist bereits im Abschnitt 3.4 angegeben worden. Das Verfahren, welches auch als Crude Monte Carlo Simulation [Rubinstein-81] bezeichnet wird, ist generell für implizite Grenzzustandsfunktionen geeignet, wobei die mehrdimensionale Verteilungsdichtefunktion nicht explizit benötigt wird.

Grundlage der Simulation ist die Tatsache, dass jeder Einzelsimulationsschritt die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit von $1/N$ bei N Simulationen erhält. Dies gelingt, indem die Samplingpunkte im Integrationsraum (siehe Gleichung (3-21)) so ausgewählt werden, dass sie die zu integrierende Funktion widerspiegeln. Mathematisch wird das Problem in den allgemeinen Zustandsraum überführt.

Für Zuverlässigkeitsanalysen mit bekannten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Einzelparameter ist es erforderlich, Zufallswerte der jeweiligen Verteilungsfunktionen zu generieren und deren Realisierungen strukturmechanisch auszuwerten.

Durch einen geeigneten Transformationsansatz, z.B. auf Basis der inversen kumulativen Verteilungsfunktion ist es möglich, aus gleichverteilten Zufallszahlen des Intervalls $[0,1]$ entsprechende Zufallszahlen im Parameterraum zu generieren. Die Abb. 3-12 verdeutlicht dies.

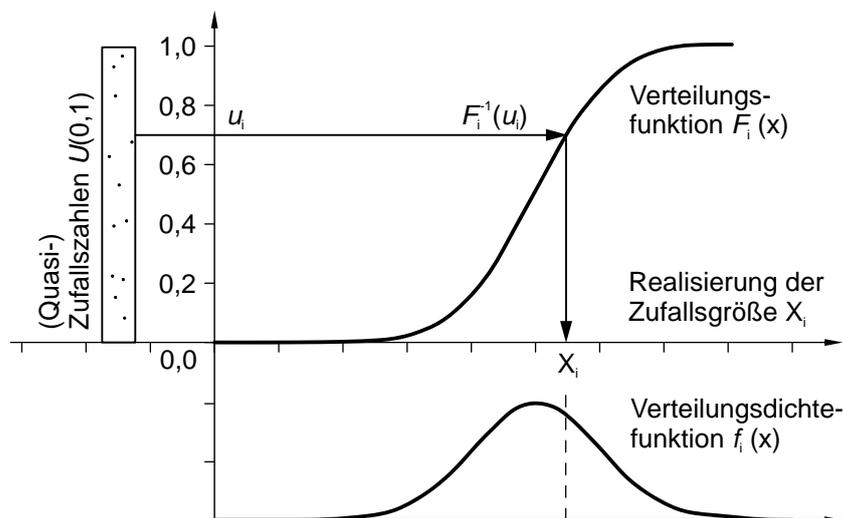


Abb. 3-12: Transformation der Zufallswerte in den Parameterraum

Ausgehend von uniformen Zufallswerten der x-Achse, auf der die Verteilungsfunktion im Intervall $[0,1]$ definiert ist, können die zugehörigen Werte auf der y-Achse bestimmt werden. Diese Vorgehensweise kann für alle stetigen, im Rahmen der Zuverlässigkeitsanalyse verwendeten, Verteilungstypen angewendet werden. Es existiert eine ausreichende Anzahl von Ansätzen, die inverse Verteilungsfunktion zu ermitteln. Hinreichend bekannt ist unter anderem die Box-Muller Methode [Box-58] für normalverteilte Zufallszahlen.

Durch die Transformation in den Parameterraum und die daraus folgende Auftretenswahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses vereinfacht sich Gleichung (3-21) durch Hinzuziehen der inversen Verteilungsfunktion nach Gleichung (3-8) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 P_f &= \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] dF(\mathbf{X}) & (3-23) \\
 &= \int_0^1 I[g(F_n^{-1}(u_n))] du = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I[g(\bar{\mathbf{X}}_i)] \\
 &= \frac{N_f}{N}
 \end{aligned}$$

mit: N_f = Anzahl der Ereignisse $g(\bar{\mathbf{X}}_i) = \text{failure}$

N = Anzahl der möglichen Ereignisse (Grundgesamtheit)

$\bar{\mathbf{X}}$ = Vektor der transformierten Realisierungen im Parameterraum.

Bei der stochastischen Simulation kann die Versagenswahrscheinlichkeit als Erwartungswert (siehe Abschnitt 3.1) der Indikatorfunktion $I[g(\bar{\mathbf{X}})]$ aufgefasst werden, wie Gleichung (3-24) verdeutlicht.

$$P_f = E(I[g(\bar{\mathbf{X}})]) \quad (3-24)$$

Damit wird der Zusammenhang zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Gleichung (3-16) hergestellt. Die Gleichungen (3-23) und (3-24) gelten streng genommen nur für $N \rightarrow \infty$. Da jedoch nur endliche Stichprobensimulationen möglich sind, ist mit auftretenden Fehlern bei der Schätzung zu rechnen.

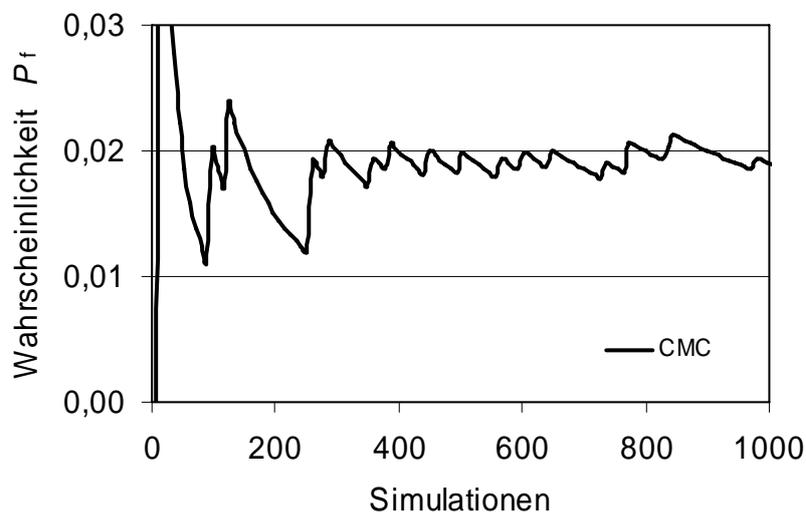


Abb. 3-13: Verlauf der Berechnung mit der Crude Monte Carlo Methode

In Abb. 3-13 ist eine Lösung eines R - E -Modells (siehe Abschnitt 3.4.1) zur Veranschaulichung der Konvergenz dargestellt. Die Zielwahrscheinlichkeit des im Abschnitt 5.4 ausführlich dargestellten Beispiels beträgt $P_f = 0,0204$. Deutlich erkennbar ist, dass die

Verlässlichkeit der getroffenen Aussage zur Wahrscheinlichkeit direkt von der Simulationsanzahl abhängt. Um eine nutzbare Aussagequalität des Schätzwertes (Konfidenzniveau) zu erreichen, muss der Umfang der Simulationen um ein Vielfaches größer sein als der Reziprokwert der Zielwahrscheinlichkeit $1/P_f$. Ergänzende Informationen zur Varianz der Monte Carlo Methode werden im Kapitel 3.8.1 dargelegt.

3.7.3 Monte Carlo Integration

Werden die Samplingpunkte nicht entsprechend der Verteilungsfunktionen ausgewählt sondern gleichmäßig über den Parameterraum verteilt, liegt eine Kombination von numerischer Integration mit den Methoden der Nummertheorie vor. Die Einzelereignisse besitzen dann jedoch nicht die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit $1/N$, sondern eine Auftretenswahrscheinlichkeit, die proportional zu $f(\mathbf{X})$ ist.

Im Allgemeinen wird die Lösung der Gleichung (3-21) innerhalb der Monte Carlo Integration durch folgende Approximation beschrieben:

$$P_f = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X} \approx \frac{C_T}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{X})] \cdot f(\mathbf{X}). \quad (3-25)$$

Die Verteilungsdichtefunktion $f(\mathbf{X})$ sei eine bekannte Funktion, deren Integral zu approximieren ist. Die Integrationsgrenze der Grenzzustandsfunktion wird über die implizite Indikatorfunktion $I[g(\mathbf{X})]$ erfasst (siehe Gleichung (3-21)). Während der Simulation wird die Summe der Funktionswerte in den zufälligen, aber gleichverteilten Punkten berechnet und anschließend durch die Simulationsanzahl N dividiert. Durch einen linearen Transformationsansatz und das vorherige Festlegen geeigneter Integrationsbereiche (siehe Abb. 2-1) wird die Integration mit Samplingpunkten des mehrdimensionalen Einheitsraums (unit hypercube) durchgeführt. Die Koordinaten der Punkte des Vektors \mathbf{X} im Parameterraum werden aus gleichverteilten Punkten des Einheitsraumes bestimmt, was den Hauptunterschied zur stochastischen Simulation darstellt.

Der Wert C_T umfasst die jeweiligen Integrationsbereiche der einzelnen Variablen, wie Gleichung (3-26) verdeutlicht.

$$C_T = \prod_{i=0}^n (b_i - a_i) \quad (3-26)$$

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung der MC Integration für Zuverlässigkeitsbetrachtungen liegt im Festlegen geeigneter Integrationsbereiche (siehe Abb. 3-14). Insbesondere bei Verteilungsfunktionen, die in unbeschränkten Intervallen definiert sind, leidet die numerische Genauigkeit durch Beschränkung auf zu kleine Integrationsbereiche. Werden die Bereiche jedoch zu groß gewählt, verschlechtert sich die Konvergenz der probabilistischen Simulation. Bei einer Zuverlässigkeitsanalyse auf Basis der Monte

Carlo Integration ist es daher zweckmäßig, zunächst die Auswirkungen unterschiedlicher Intervalle auf das Ergebnis der Analyse zu hinterfragen.

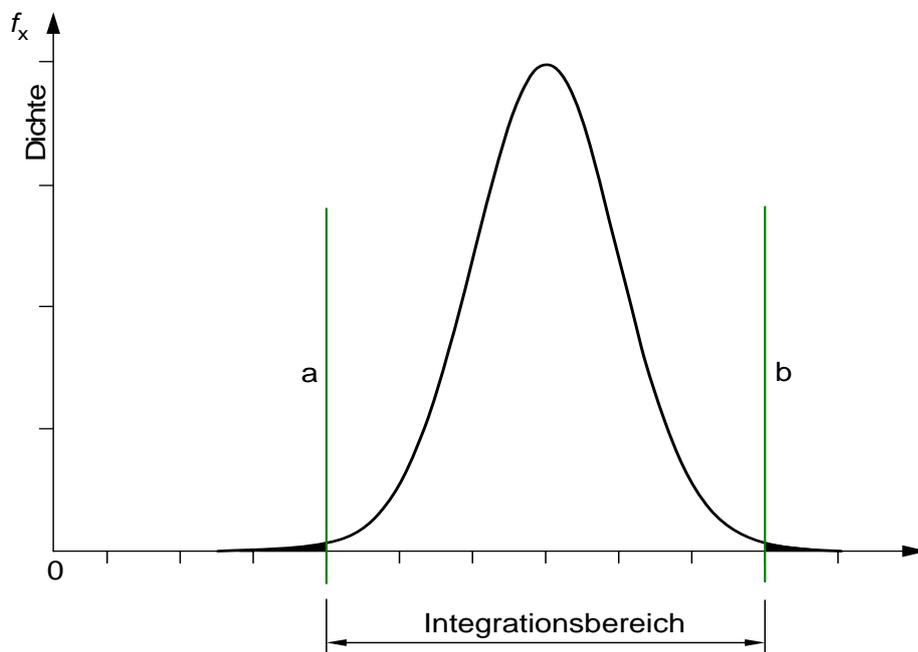


Abb. 3-14: Festlegen von Integrationsgrenzen im Fall der MC Integration

3.8 Sampling Technologien und die Quasi-Monte Carlo Methode

3.8.1 Sampling Technologien

Die Verwendung des klassischen random Sampling ist für die Berechnung des Erwartungswertes eines Zuverlässigkeitsproblems eine gängige Methode. Das Gesetz der großen Zahlen sichert zu, dass der approximierte Erwartungswert nach Gleichung (3-25) bei wachsender Stichprobengröße gegen das genaue Integral konvergiert. Die dimensionsunabhängige Konvergenzrate beträgt $O(1/\sqrt{N})$ [Rubinstein-81] und ist damit dem mittleren Fehler des klassischen Monte Carlo Schätzers proportional. Der mittlere Fehler (Standardabweichung) liefert eine Aussage über die Qualität des ermittelten Erwartungswertes. Je mehr Einzelwerte simuliert werden, desto robuster ist der approximierte Wert und desto kleiner der Fehler.

Um die Genauigkeit des Schätzers auf dem klassischen Weg zu verbessern, kann der Umfang der Stichprobe erhöht werden, wie Abb. 3-15 veranschaulicht. Der Rechenaufwand steigt hierbei quadratisch an, was beispielsweise bei einer Fehlerreduktion um den Faktor 10 zu einer Vergrößerung des Stichprobenumfangs um den Faktor 100 führt. Es besteht ein Zielkonflikt zwischen der Genauigkeit und der Berechnungszeit.

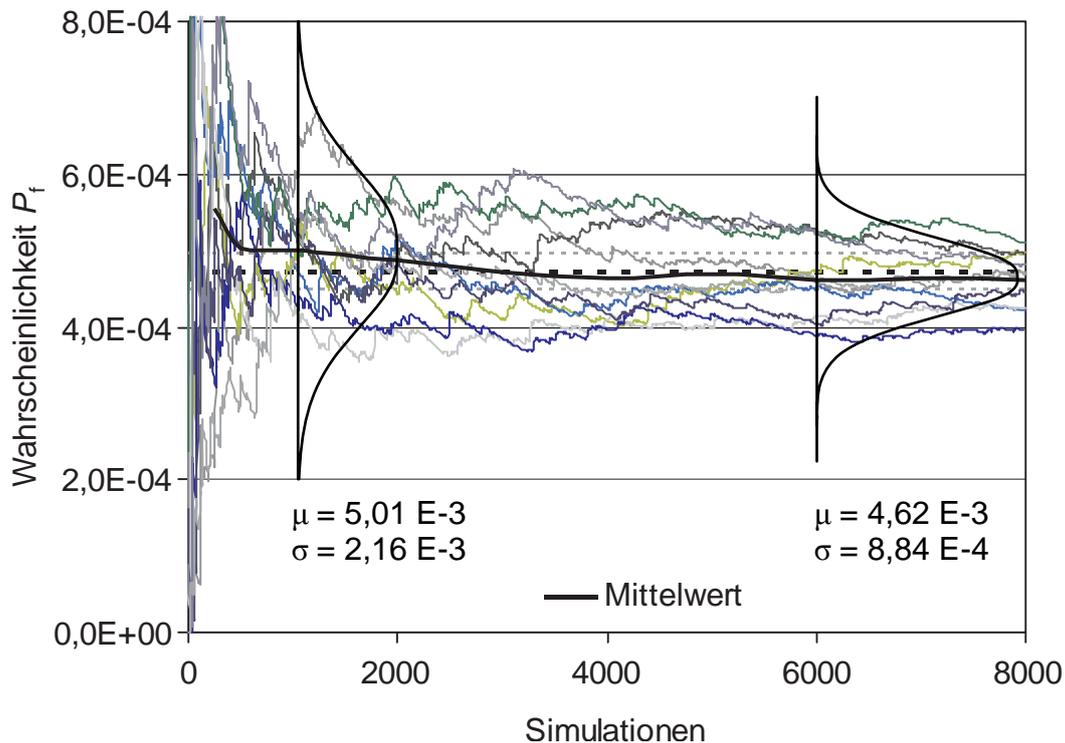


Abb. 3-15: Vergleich unterschiedlicher Ergebnispfade eines R - E -Problems

In Abb. 3-15 werden die ersten zehn von 100 zufälligen Lösungspfade eines R - E -Problems (Beispiel NB_2 siehe Abschnitt 5.4) dargestellt, welche auf Basis der MC Integration ermittelt wurden. Die beteiligten Basisvariablen sind normalverteilt. Die Auswertung der gesamten 100 Ergebnispfade erlaubt die Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichung des gewählten Schätzers. Diese wurden für $n=1000$ und $n=6000$ in Abb. 3-15 dargestellt

Der wichtigste Vorteil des klassischen random Sampling ist neben der Sicherstellung eines unverzerrten (unbias) Erwartungswertes die Möglichkeit, die Simulation jederzeit abzubrechen. Die Simulation eines Zuverlässigkeitsproblems durch Lösung der Gleichungen (3-23) bzw. (3-25) ist daher immer im Zusammenhang mit der Berechnungszeit und dem numerischen Fehler zu betrachten. Die geringe Veränderung der Genauigkeit eines Monte Carlo Schätzers, gemessen an einer zusätzlich aufgewendeten Rechenzeit, hat zur Entwicklung verbesserter Verfahren geführt, die eine weitere Varianzreduktion des Schätzers bewirken. Einige wichtige Konzepte im Hinblick auf strukturelle Anwendungen sollen nachfolgend genannt werden.

Sowohl für die stochastische Simulation als auch für die Monte Carlo Integration ist die Generierung geeigneter Punkte ξ_1, \dots, ξ_n im Einheitsraum $(0,1)^n$ durch folgende Methoden möglich:

- (pseudo⁸-) random Sampling (MC)
- varianzmindernde Sampling Technologien:
 - Stratified Sampling
 - Latin Hypercube Sampling (LHS)
 - Control Variates
 - Adaptive Importance Sampling (AIS)
- quasi-random Sampling (QMC).

Der Sinn der Varianzreduktion durch diese Samplingstrategien besteht im Grunde darin, bei der Berechnung des Monte Carlo Schätzers mit bestimmter Genauigkeit, Rechenzeit in Form von Einzelsimulationen einzusparen. Alle Methoden basieren auf der Verwendung zusätzlicher Informationen, die in einer gewöhnlichen Monte Carlo Simulation nicht genutzt werden. Es können Informationen über das Problem selbst (AIS), als auch Informationen über die zugrunde liegende Verteilung (QMC) genutzt werden.

Ein umfassender Überblick zu varianzmindernden Methoden wird von McKAY et al. [McKay-79] und RUBINSTEIN [Rubinstein-81] gegeben. Anwendungsspezifisch kommen die Methoden AIS und LHS unter anderem in [Bergmeister-06], [Six-01], [Strauss-07], [Melchers-89] für strukturmechanische Zuverlässigkeitsbetrachtungen erfolgreich zum Einsatz.

Die QMC Methode, welche insbesondere bei finanzmathematischen Fragestellungen höherer Dimension zur Anwendung kommt [Glasserman-04], wird im Rahmen der Entwicklung eines probabilistischen Modells auf strukturmechanische Probleme angepasst. Die Methode stellt eine viel versprechende Herangehensweise zur Lösung des Zuverlässigkeitsproblems mit besserer Effizienz dar.

3.8.2 Die Quasi-Monte Carlo Methode

Die Vorteile der QMC Methode werden anhand der Folgen kleiner Diskrepanz (low-discrepancy (LD) sequences) erläutert. Abb. 3-16 zeigt das Konzept der LD-Sequenzen am Beispiel der univariaten Van der Corput Sequenz [Niederreiter-87].

⁸ Pseudo verdeutlicht in diesem Zusammenhang, dass die entsprechenden Zufallszahlen mit Hilfe eines algorithmisch-mathematischen Generators erzeugt wurden.

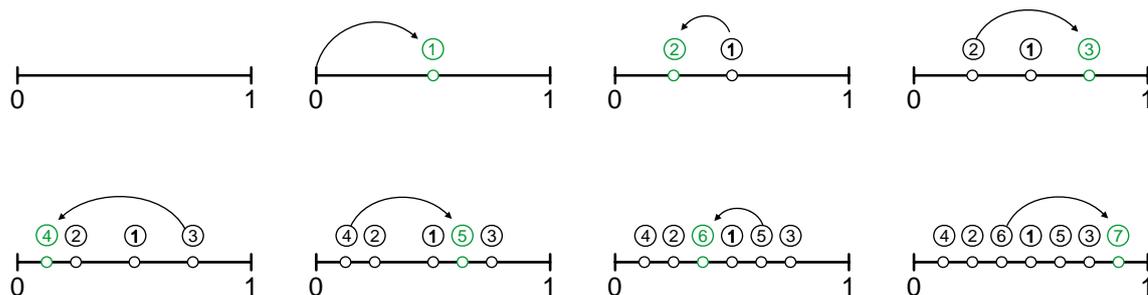


Abb. 3-16: Van der Corput Sequenz im Intervall $[0,1]^1$ nach [Niederreiter-87]

LD Sequenzen erzeugen gleichmäßig verteilte Punkte (HUPS)⁹ im Einheitsraum. Wie Abbildung Abb. 3-16 verdeutlicht, ist das Hinzufügen eines Punktes möglichst weit weg von allen anderen Punkten die grundsätzliche Idee der LD-Sequenzen. Damit entstehen Punkte, die gleichmäßiger verteilt sind als vergleichbare Punkte des random Sampling. Insbesondere werden Punktcluster, also zufällige Punkthäufungen und Leerstellen (siehe Abb. 3-17 a) vermieden.

Die random Sampling Punkte in Abb. 3-17 wurden durch Microsoft Excel 2002 generiert, während die quasi-random Punkte aus der Sobol' Sequenz (siehe Abschnitt 3.8.3) ermittelt wurden. Deutlich erkennbar ist die wesentlich gleichmäßigere Füllung des Einheitsraumes im Fall des quasi-random Sampling.

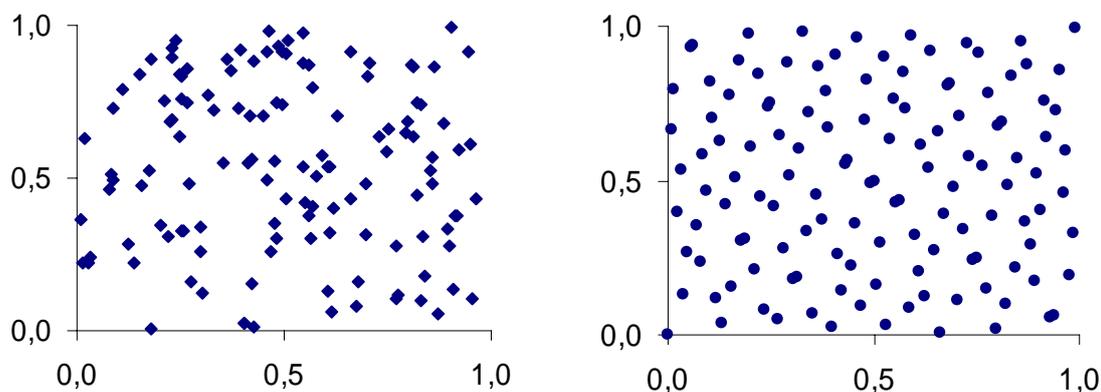


Abb. 3-17: Vergleich von 128 Punkten im $[0,1]^2$ zwischen a) random Sampling und b) quasi-random Sampling

⁹ HUPS, engl.: High Uniform Point Sets

LD Sequenzen haben das Potential, die Fehlerrate $O(1/\sqrt{N})$ der MC Simulation auf ideal $O(1/N)$ zu beschleunigen, wie NIEDERREITER [Niederreiter-92] beschreibt. Die sich einstellende Konvergenz ist jedoch von der Konditionierung, insbesondere von der Dimension des Zuverlässigkeitsproblems und der Art der LD Sequenz abhängig. Diese viel diskutierte Fragestellung ([Glasserman-04], [Saltelli-00]) wird im Kapitel 3.8.4 aufgegriffen.

Neben der idealen Gleichverteilung der Stichprobenumfänge bzw. Integrationspunkte und der daraus steigenden Genauigkeit der Lösung, besitzt die QMC Methode ähnlich der MC Methode den Vorteil, dass die Simulation jederzeit unterbrochen bzw. fortgesetzt werden kann. Es kann zusätzlich nach jedem Simulationsschritt eine Konvergenzanalyse durchgeführt werden, die zu automatischen Simulationsabbrüchen genutzt werden kann.

Die Generierung von HUPS aus den LD Sequenzen erfolgt zum größten Teil deterministisch. Dies ist ein Vorteil, welcher bei der Herleitung eines Konzepts zur Sensitivitätsanalyse genutzt werden kann. Die Lösungen von Zuverlässigkeitsproblemen sind mit dieser Art der Generierung reproduzierbar, wenn die entsprechende LD Sequenz bekannt ist.

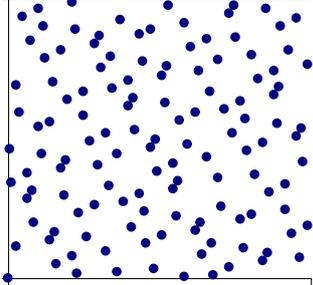
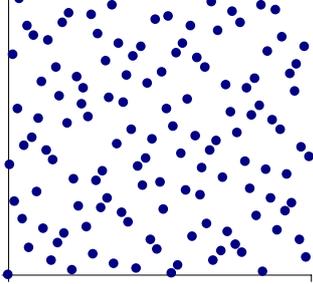
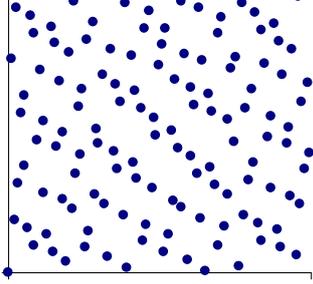
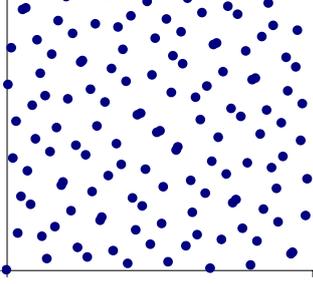
3.8.3 Multivariate Folgen geringer Diskrepanz

Für höherdimensionale Fragestellungen wie der Zuverlässigkeitsanalyse schlanker Stahlbetonstützen ist es notwendig, die Erkenntnisse der univarianten Van der Corput Sequenz (Abb. 3-16) zu verallgemeinern und auf endliche Dimensionen zu erweitern. Ausgehend von mathematischen Prinzipien, z.B. Folgen der Basis 2, werden geeignete (teil-) deterministische Algorithmen entwickelt. Die Halton Sequenz ist beispielsweise eine direkte Erweiterung der Van der Corput Folge auf den multidimensionalen Fall.

NIEDERREITER [Niederreiter-87] sowie BRATLEY et al. [Bratley-88] geben einen Überblick über die Theorie der nachfolgend genannten LD Sequenzen und zeigen entsprechende Berechnungsmöglichkeiten.

Anhand der Sobol' Sequenz soll das primäre Verhalten von LD Sequenzen im multidimensionalen Fall verdeutlicht werden. Das Prinzip des Punkteinfügens möglichst weit weg von den bereits vorhandenen Punkten führt zu spezifischen Punktmustern, wie Abb. 3-18 und Tabelle 3-5 deutlich machen. Tabelle 3-5 zeigt einige verallgemeinerte Sequenzen zur Erzeugung von HUPS im mehrdimensionalen Einheitsraum und gibt entsprechende Referenzen an.

Tabelle 3-5: Multivariate Folgen geringer Diskrepanz

LD Sequenz	Darstellung von 128 Punkten im 2D Einheitsraum $[0,1)^2$	Referenzen
Faure Sequenz		[Faure-02],
Halton Sequenz		[Halton-60], [Hokayem-03]
Niederreiter-Xing Sequenz		[Niederreiter-92], [Niederreiter-87]
Sobol' Sequenz		[Sobol'-76]

Die Muster der quasi-random Sequenzen verändern sich, wenn die Anzahl der Punkte variiert wird. Die annähernd konstante Gleichverteilung bleibt vorhanden.

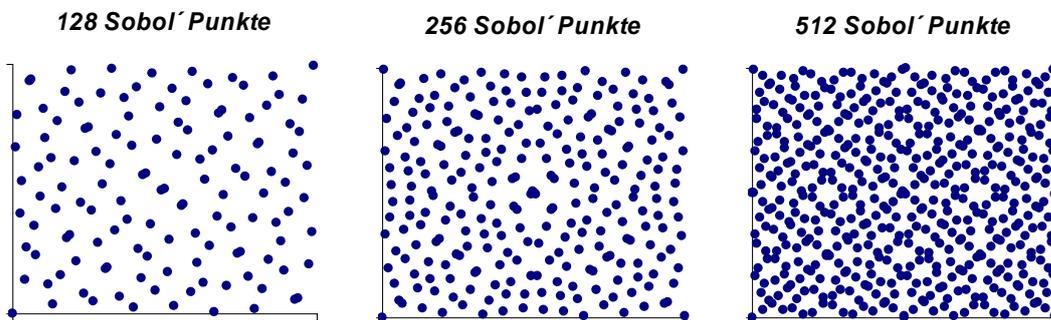


Abb. 3-18: Muster der Sobol' Sequenz im $[0,1)^2$

Insbesondere bei hoher Dimensionalität ergeben sich Schwierigkeiten, denn die Punkte müssen so ermittelt werden, dass in allen Dimensionen eine ideale Gleichverteilung (siehe Abschnitt 3.8.2) entsteht. Verdeutlicht wird dieses Problem durch Drehung einer 3D-Punktvolke des Einheitsraumes in die entsprechenden Dimensionen. Wie folgende Abb. 3-19 zeigt, ändert sich zwar das Punktmuster zwischen den Dimensionen, die Güte der Gleichverteilung bleibt jedoch augenscheinlich erhalten.

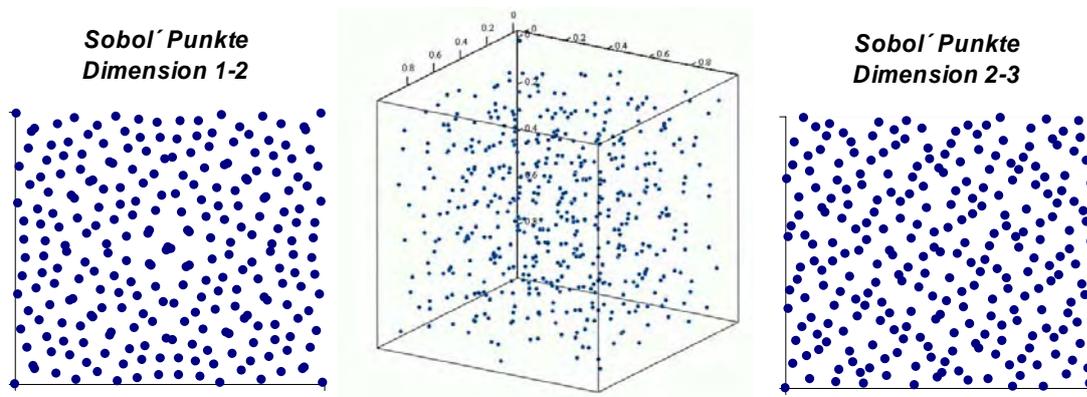


Abb. 3-19: Muster der Sobol' Sequenz von 256 Punkten im $[0,1)^3$

Diese herausragende Eigenschaft der LD Sequenzen ermöglicht eine überproportionale Performance der QMC Methode bis zu einer Dimension von ca. 52 ([Saltelli-00]).

3.8.4 Diskrepanz und Konvergenzgrenzen

Der Vorteil der Quasi-Monte Carlo Methode ergibt sich aus dem schnelleren Konvergenzverhalten gegenüber der Nutzung von pseudo-random Zahlen. Je mehr die Verteilung der Samplingpunkte ξ_1, \dots, ξ_n der idealen Gleichverteilung entgegen strebt, desto

geringer ist der zu erwartende Fehler der QMC Simulation. Um diese Aussage zu bestätigen, ist es zweckmäßig, eine obere Schranke für den Fehler zu ermitteln. Dies kann durch die Koksma-Hlawka Ungleichung [Bouleau-94] geschehen.

$$\left| \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(\xi_1, \dots, \xi_N) - \int_{[0,1]^n} f(u) \right| = V(f(u)) \cdot D^*(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad (3-27)$$

Gleichung (3-27), die den Fehler der Approximation zum exakten Integral beschreibt, gibt eine obere Grenze bei der Approximation des Integrals im Einheitsraum $[0,1]^n$ an. Bemerkenswert ist, dass der Fehler durch ein Produkt begrenzt wird. Während der erste Term die Hardy-Krause Variation der zu integrierenden Funktion darstellt, liefert der zweite Term eine Aussage über die Qualität der Gleichverteilung. Dieser Term entspricht definitionsgemäß der Sterndiskrepanz D^* , welche ein Maß für die Abweichungen der Punkte einer Stichprobe von der idealen Gleichverteilung auf einem Intervall darstellt. Eine mathematische Deutung der Sterndiskrepanz D^* ist beispielsweise in [Homem-06] dargestellt.

Beim Vergleich der Samplingverteilungen (siehe Abb. 3-17) wird der Vorteil bei der Verwendung von quasi-random gegenüber pseudo-random Zahlen deutlich. FLEDERER [Flederer-02] gibt eine Reduzierung des erforderlichen Stichprobenumfangs auf Werte zwischen $N^{0,61}$ und $N^{0,85}$ der vergleichbaren MC Lösung an. Dies wird durch diverse Untersuchungen [Homem-06], [Niederreiter-87], [Glasserman-04] aus der Finanzmathematik bestätigt.

Trotz Verwendung der Quasi-Monte Carlo Integration bei der Auswertung der Integrale nach Gleichung (3-25) kann bei geringer Dimensionalität (zwei bis vier Dimensionen) eine bessere Effizienz erzielt werden, als die theoretische Schranke $O(1/N)$ vorgibt. Dies liegt an der Gleichschaltung mit den Methoden der numerischen Integration (siehe Abschnitt 3.7.1).

3.9 Vergleichsberechnungen probabilistischer Grundlösungen

Mit Bezug auf die vorliegenden probabilistischen Untersuchungen schlanker Stahlbetonstützen wird die QMC Methode in dieser Arbeit als primäre Lösungsvariante verwendet, während die weiteren Samplingstrategien im Rahmen der Validierung Anwendung finden. Zur grundsätzlichen Anwendbarkeit soll an dieser Stelle ein Beispiel dienen, bei dem das Konvergenzverhalten unterschiedlicher Verfahren dargestellt wird. Das Beispiel NB_2 wird ausführlich im Kapitel 5.4 erläutert und auch bei der Sensitivitätsanalyse (siehe Abschnitt 4.4.3) zur Verdeutlichung herangezogen.

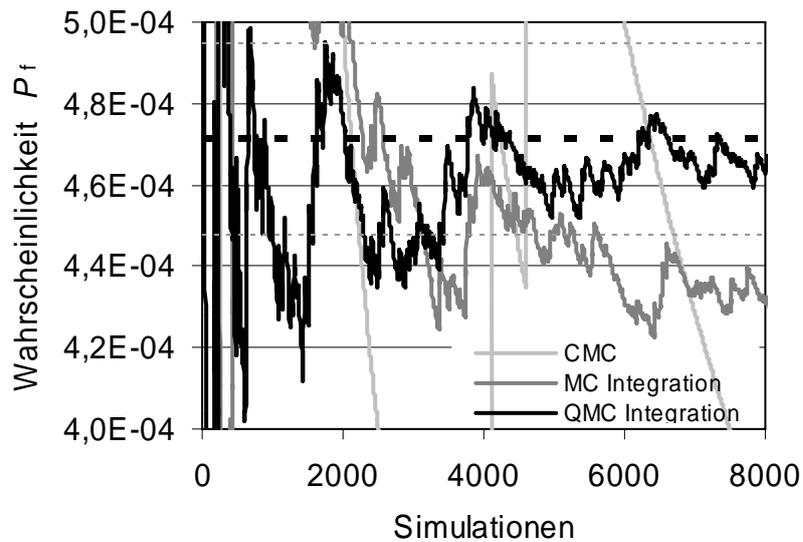


Abb. 3-20: Vergleich von Simulationsverfahren

In Abb. 3-20 ist ähnlich der Abb. 3-13 die Lösung eines *R-E*-Problems dargestellt. Die analytisch berechenbare Zielwahrscheinlichkeit beträgt $P_f = 4,71 \cdot 10^{-4}$. Diese wird durch die schwarz gestrichelte Gerade symbolisiert. Deutlich erkennbar ist, dass die Konvergenz der Verfahren zur Zielwahrscheinlichkeit unterschiedlich ist. Beispielsweise erreicht die CMC Simulation innerhalb von 8000 Durchläufen keine zufrieden stellende Genauigkeit, während die QMC Methode einen zulässigen Fehlerbereich von 5% (grau gestrichelt) ab ca. 3500 Einzelsimulationen nicht mehr überschreitet.

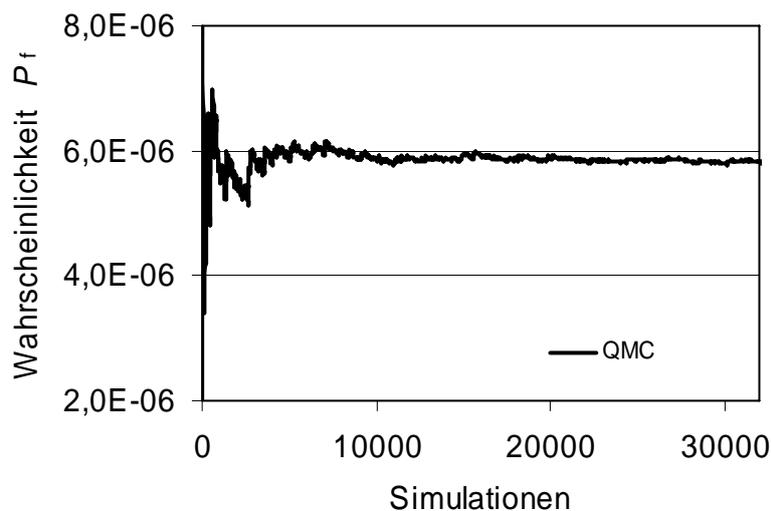


Abb. 3-21: Verhalten der QMC Methode bei geringer Zielwahrscheinlichkeit

In Abb. 3-21 wird zusätzlich das Verhalten bei geringeren Zielwahrscheinlichkeiten mit 32768 Simulationen gezeigt.

Neben dem deutlich schnelleren Konvergenzverhalten besitzt die QMC Methode des Weiteren den Vorteil der Reproduzierbarkeit. Das bedeutet, dass sich ähnlich konfigurierte Fragestellungen gleichartig an die exakte Lösung annähern. Damit sind Vergleichbarkeitsstudien, bei der der Absolutwert der Versagenswahrscheinlichkeit keine Rolle spielt, möglich. Dieser Vorteil wird, wie im Kapitel 4 gezeigt, insbesondere bei Sensitivitätsanalysen genutzt.

Ein weiteres Beispiel zum Vergleich des Konvergenzverhaltens ist in [Schwuchow-08] dargestellt. Hier wird unter anderem auch die Abhängigkeit der Lösung von der Dimension der probabilistischen Fragestellung genauer untersucht.

4 Sensitivitätsanalyse

4.1 Einleitung

Im vorangehenden Kapitel wurde gezeigt, dass die Beschreibung der Unsicherheiten durch streuende Parameter die Basis für die Berechnung der Zuverlässigkeit darstellt. Bei einer systematischen Analyse von Stahlbetonstützen interessiert neben der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit auch die Empfindlichkeit der Lösung in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter des probabilistischen Modells. Dabei kann die Frage geklärt werden, ob die Betonstahlfestigkeit einen größeren Einfluss auf das Versagen der Stahlbetonstütze hat als beispielsweise die Festigkeit des Betons oder die aufgebrauchte Belastung. Des Weiteren kann die allgemeine Annahme geprüft werden, dass die Betonfestigkeit mit steigender Schlankheit ihren Einfluss auf das Versagen einer Stütze verliert [Kordina-76], [Naser-95].

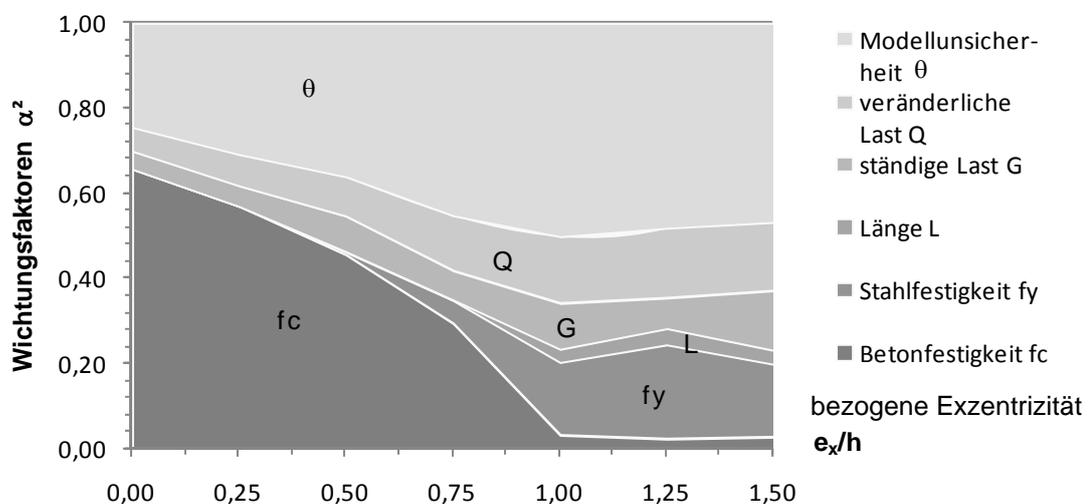


Abb. 4-1: Beispiel gestapelter Sensitivitätsfaktoren α^2 für eine Stahlbetonstütze mit fünf ausgewählten Parametern

Die Frage nach dem Einfluss der einzelnen Variablen eines Modellierungsproblems auf das Resultat wird während einer Sensitivitätsanalyse (SA) beantwortet, wie Abb. 4-1 beispielhaft verdeutlicht. Anhand der in Abb. 4-1 dargestellten Wichtigkeitsfaktoren lässt

sich bestimmen, in welcher Größenordnung die einzelnen Variablen an dem Versagen beteiligt sind.

Die SA ist eine generalisierte Erweiterung der klassischen Parameterstudien. Bei Untersuchungen von Ingenieurproblemen unterstützt sie, die relevanten Parameter zu identifizieren und in geeigneter Weise anzupassen.

Von SALTELLI et al. [Saltelli-00] werden die Hauptziele und Aufgaben der allgemeinen SA benannt:

- Verbesserung der Modelle und des Verständnisses für das Problem
- Prüfung der Konvergenz der Modelle
- Parameterreduktion zur Verringerung der Dimensionalität des Sachverhaltes
- Kalibrierung der Eingangsparameter
- Optimierungsprobleme
- Zuverlässigkeits- und Risikoanalysen
- inverse Analysen
- Robustheitsangaben.

Für einen umfangreichen Überblick zum Thema SA wird auf HAUG [Haug-86], SALTELLI et al. [Saltelli-00] und GLASSERMAN [Glasserman-04] verwiesen. Strukturmechanische Optimierungsprobleme werden unter anderem von BUCHER [Bucher-01], KHARMANDA [Kharmanda-02] und insbesondere SCHWARZ [Schwarz-01] behandelt. Als Anwendungsbeispiel in Bezug auf Stahlbeton nutzte HARO [Haro-94] vereinfachte Parameterstudien zur Ableitung des DINAMO-Verfahren (Kapitel 2.3) für uniaxial belastete Stahlbetonstützen.

4.2 Sensitivitätsanalyse schlanker Stahlbetonstützen

Bei der SA handelt es sich um eine genaue Untersuchung der Auswirkung einer Variation der n Eingangsparameter des Vektors $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ auf das Ergebnis Y . Mathematisch definiert man die Sensitivität als partielle Ableitung der Ergebnisfunktion $Y = y(\mathbf{X})$ (also der strukturmechanischen Bestimmungsgleichung) nach einem Parameter. Es ergibt sich der Einfluss für diesen Parameter x_i zu:

$$S_{x_i} = \frac{\partial y(\mathbf{X})}{\partial x_i}. \quad (4-1)$$

Problematisch erweist sich im Zusammenhang mit der oben genannten Fragestellung jedoch die Quantifizierung des Ergebnisses bzw. der Ergebnisfunktion.

Bei der Strukturoptimierung [Schwarz-01] wird unter anderem der Einfluss der Geometrieparameter auf eine bestimmte Grenzschnittgröße oder Verformung bezogen. Es liegt also eine zahlenmäßige Ergebnisvariable, die aus dem parametrisierten strukturmekanischen Modell berechnet wird, vor. Die SA kann in diesem Fall direkt mit den Ergebnissen der deterministischen Lösung durchgeführt werden. Entsprechende Methoden werden in den folgenden Kapiteln erläutert.

Im Fall der Untersuchung des Versagens schlanker Stahlbetonstützen, ist es jedoch nicht mehr möglich, eine zahlenmäßig konstante Ergebnisvariable bzw. eine funktionale Beschreibung der Ergebnisfunktion für das Versagen zu definieren. Insbesondere durch den Einfluss der stabilitätsbedingten Steifigkeitsabnahme (siehe Abschnitt 2.2) gibt es unterschiedliche Grenzverformungen und Traglasten sowie verschiedene Versagensarten. Die Grenzzustandsfunktion liegt wie im Abschnitt 3.4.2 gezeigt, nur implizit vor.

Bezieht man sich bei der Berechnung der Sensitivitäten auf einen konvergenten Zustand (z.B. kurz vor dem Versagen), so kann durch Annahme eines gleich bleibenden Sensitivitätsverhältnisses auf die Verhältnisse im Versagenszustand geschlossen werden. Dabei wird ein lineares Verhalten eines Ergebnisses zum Versagen vorausgesetzt. Diese Vorgehensweise der Approximation der Grenzzustandsfunktion und derer partieller Ableitungen ist beispielsweise in [Bucher-07] dargestellt. Wie SCHWARZ [Schwarz-01] zeigt, ist diese Annahme aber nur begrenzt für nichtlineare Probleme zulässig. Er empfiehlt die Verwendung analytischer Verfahren zur Berechnung.

Eine weitere viel versprechende Strategie ist es, die Sensitivitäten nicht wie üblich auf ein Ergebnis eines Einzelevents zu beziehen, sondern direkt auf das Ergebnis der Zuverlässigkeitsanalyse, also die Versagenswahrscheinlichkeit. Damit verlagert sich der nichtlineare Hintergrund ins Zuverlässigkeitsproblem, welches nach Kapitel 3 behandelbar ist. Diese Herangehensweise setzt die mehrfache Berechnung der Zuverlässigkeiten mit variierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen f_i, f_{i+1} voraus. Vorteilhaft bei dieser Methode ist die Tatsache, dass die Art der Verteilungsfunktion berücksichtigt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird die Möglichkeit genutzt, neben Mittelwertverschiebungen auch den Einfluss der Art und Form der Verteilungsfunktion aufzuzeigen, was bei der klassischen Herangehensweise nicht möglich ist. Es ist notwendig, ein Verfahren für die mehrfache Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeiten bei angemessenem Zeitaufwand zu entwickeln.

4.3 Methoden der Sensitivitätsanalyse

4.3.1 Gewichtungsfaktoren

Die Sensitivität der Ausgangsparameter kann für die Methoden des *Level II code* bei der Berechnung des Sicherheitsindex β (siehe Kapitel 3.6) über die sog. Wichtungsfaktoren α erfolgen [Hasofer-74]. Diese geometrisch interpretierbaren Faktoren zeigen den Beitrag eines Parameters zur approximierten Versagenswahrscheinlichkeit in Form des Sicherheitsindex. Folgende Abbildung, welche eine Erweiterung der Abb. 3-10 ist, stellt die prinzipiellen Zusammenhänge dar.

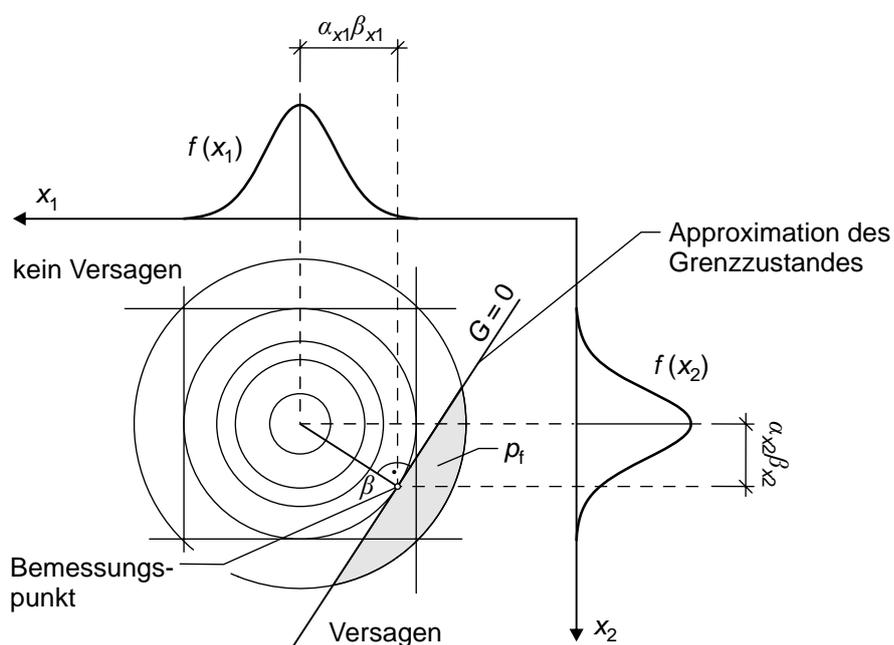


Abb. 4-2: Definition der Gewichtungsfaktoren im Rahmen der FORM-Analyse

Ersichtlich ist der im Hinblick auf die Sensitivitätsangabe wichtige Zusammenhang, als Bezugsgröße bei der Berechnung der Wichtungsfaktoren den Sicherheitsindex β (indirekt auf die Wahrscheinlichkeit) anzuwenden. Die Berechnung wird nach folgender Gleichung (4-2) vorgenommen.

$$\alpha_{X_i} = \frac{\sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_n \sigma_{X_i}^2}} \quad (4-2)$$

Dies stellt eine Vergleichbarkeit zu den in dieser Arbeit verwendeten Sensitivitäten her, die, wie im vorherigen Kapitel erläutert, die Versagenswahrscheinlichkeit als Basis haben. Eine direkte Anwendung der Methode ist jedoch aus den bekannten Gründen

(siehe Kapitel 3.6) nicht möglich. Berechnungsgleichungen für die Wichtungsfaktoren werden in [Ditlevsen-96] angegeben.

4.3.2 Analytische Sensitivitätsanalyse

Grundsätzlich unterscheidet man bei der analytischen SA in direkte und variationelle Vorgehensweise [Schwarz-01]. Die Herleitung der Sensitivitäten erfolgt dabei direkt aus der partiellen Ableitung der diskreten strukturmechanischen Bestimmungsgleichungen (siehe Gleichung (2-12)) in Bezug auf die Variation eines Parameters. Allgemein zeigen entsprechende Untersuchungen für geometrisch und physikalisch nichtlineare Fragestellungen ein hohes Maß an Komplexität [Schwarz-01], da die partielle Ableitung für sämtliche Teile der Bestimmungsgleichung nach allen Parametern zu ermitteln ist.

Da es wie bereits im Abschnitt 4.2 beschrieben Schwierigkeiten gibt, einem strukturmechanischen Parameter eine Versagenswahrscheinlichkeit zuzuordnen, kommen diese Methoden für die SA in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit nicht in Frage. Stattdessen werden sie insbesondere bei der Strukturoptimierung verwendet, bei der zunächst das optimale Tragverhalten den Hauptuntersuchungspunkt darstellt.

4.3.3 Numerische Sensitivitätsanalyse

Die gängigen Verfahren der numerischen SA sind Methoden auf Basis der Finiten Differenz (FD) Approximationen, die auch als Brute-Force-Methoden [Saltelli-00] bezeichnet werden. Dabei wird der Gradient der Ergebnisfunktion nach Gleichung (4-1) durch ein geeignetes Differenzenverfahren berechnet. Diese, aus der Approximation der Taylorreihe entwickelten Gleichungen sind besonders geeignet, da lediglich die Referenzergebnisse für verschiedene Entwürfe zu bestimmen sind. Folgende Umformung zeigt die Entwicklung des Vorwärts-Differenzenverfahrens.

$$y(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) = y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot \Delta x_i + \text{TTHO} \quad (4-3)$$

Die Umformung der Gleichung (4-3) der Taylorreihe liefert unter Vernachlässigung der Taylor Terme höherer Ordnung (TTHO) die Bestimmungsgleichung für die Sensitivität nach dem Vorwärts-Differenzenverfahren.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \approx \frac{y(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (4-4)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die folgenden beiden Gleichungen für die Rückwärts- und Zentraldifferenz herleiten.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \approx \frac{y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - y(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \approx \frac{y(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - y(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{2\Delta x_i} \quad (4-6)$$

Ein entscheidender Einfluss bei der Berechnung der Sensitivität unter Verwendung der Gleichungen (4-4), (4-5) und (4-6) ist die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Approximationsweite Δx_i . Wählt man beispielsweise die Schrittweite zu groß, wird die Approximation nichtlinearer Probleme aufgrund der vernachlässigten TTHO ungenau. Bei zu kleinen Schrittweiten ist die Differenz zwischen dem Originalwert und dem Variationswert sehr klein, wodurch mit numerischen Einflüssen zu rechnen ist. Hinweise zu dieser Fragestellung werden bei der Validierung der SA im Abschnitt 5.4 gegeben.

Die Grundlagen zur Anwendung der FD Approximationen sind hinreichend bekannt. Für weitere Informationen und Konvergenzuntersuchungen wird daher auf [Bronstein-96] verwiesen.

Die Berechnung lokaler Sensitivitäten auf diesem Weg erfordert $n+1$ Simulationen des originalen probabilistischen Berechnungsansatzes bei Verwendung der Gleichungen (4-4) und (4-5). Wird die Zentralfdifferenz der Gleichung (4-6) verwendet, werden $2n$ Simulationen benötigt. Um diese Problematik zu umgehen, wird im Folgenden eine Ein-Schritt-Sensitivitätsberechnung auf Basis der Brute-Force-Methode [Saltelli-00] abgeleitet.

4.4 Entwicklung einer Ein-Schritt-Sensitivitätsanalyse

4.4.1 Bezugnahme auf die Versagenswahrscheinlichkeit

Die Darstellungen der numerischen SA beziehen sich, aufgrund der generalisierten Ableitung aus der Taylorreihe, auf die Ergebnisfunktion der strukturmechanischen Bestimmungsgleichung. Beim Übergang zum Referenzergebnis der Zuverlässigkeitsanalyse (siehe Abschnitt 4.2) müssen die Gleichungen auf die Versagenswahrscheinlichkeit angepasst und auf die Dichtefunktionen angewendet werden. Auf Grundlage der Gleichung (4-4) für die Vorwärtsdifferenz kann durch Einsetzen der multidimensionalen Integrale nach Gleichung (3-18) eine grundlegende Gradientengleichung angegeben werden:

$$\nabla_i P_f \approx \frac{\int f_{i+\Delta}(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X} - \int f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{X}}{\Delta_i} \quad (4-7)$$

Der Gradient entspricht der betragsmäßigen Veränderung der Versagenswahrscheinlichkeit in Bezug auf die Variation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_i . Die Variation kann zum Beispiel durch eine Mittelwertverschiebung eines Parameters (Abb. 4-3) hervorgerufen werden. Die multidimensionale Verteilungsdichtefunktion mit verschobenem Mittelwert wird mit $f_{i+\Delta}$ bezeichnet. Bei einer allgemeinen SA sind entsprechende Mittelwertverschiebungen für alle Parameter durchzuführen.

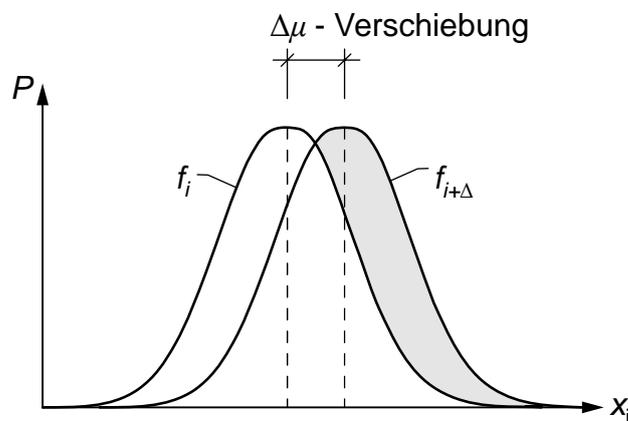


Abb. 4-3: Mittelwertverschiebung einer Verteilungsfunktion f_i

Im Allgemeinen wird eine proportionale Verschiebung unter Beachtung eines Versatzfaktors ϕ_{offset} vorgenommen, wie Gleichung (4-8) zeigt. Aufgrund der im Abschnitt 4.3.3 genannten numerischen Schwierigkeiten ist eine Anpassung notwendig.

$$\Delta\mu_i = \sigma_i \cdot \phi_{\text{offset}} \quad (4-8)$$

Auf Basis dieser Vorgehensweise ergeben sich unter der Voraussetzung gleicher Versatzfaktoren ϕ_{offset} für alle Parameter folgende, quadratnormierte Sensitivitäten:

$$\alpha_{P_f i} = \frac{|P_f(f_i) - P_f(f_{i+\Delta})|}{\sqrt{\sum_i (P_f(f_i) - P_f(f_{i+\Delta}))^2}} \quad (4-9)$$

Wie Gleichung (4-9) zeigt, tritt anstelle der Schrittweite Δx_i die Wurzel der Quadratsummen, womit folgende Definition der Sensitivitätswerte [Schneider-94] eingehalten wird.

$$\sum_n (\alpha_{P_i})^2 = (\alpha_{P_1})^2 + (\alpha_{P_2})^2 + \dots + (\alpha_{P_i})^2 + \dots + (\alpha_{P_n})^2 = 1 \quad (4-10)$$

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit der Methode der Gewichtungsfaktoren (Kapitel 4.3.1) nach [Hasofer-74] zu gewährleisten, muss eine Mittelwertverschiebung in Abhängigkeit der Standardabweichung σ gemäß Gleichung (4-11) vorgenommen und als Referenz der Sicherheitsindex β anstelle der Versagenswahrscheinlichkeit verwendet werden. Diese Umstellung führt nach Normierung mit den Quadratsummen zu folgender Gleichung für die Gewichtungsfaktoren.

$$\alpha_{\beta i} = \frac{|\beta(f_i) - \beta(f_{i+\Delta})|}{\sqrt{\sum_i (\beta(f_i) - \beta(f_{i+\Delta}))^2}} \quad (4-11)$$

Die Anpassung ist aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs (siehe Abschnitt 3.6) zwischen der Versagenswahrscheinlichkeit und dem Sicherheitsindex notwendig.

Die Gleichungen (4-9) und (4-11) verdeutlichen, dass für die klassische SA, die Versagenswahrscheinlichkeiten für $n+1$ variierte Entwürfe zu bestimmen sind. Aus diesem Grund nimmt der numerische Aufwand bei steigender Parameterzahl zu, da für jede Variable eine zusätzliche Funktionsauswertung notwendig wird [Schwarz-01]. Bei höheren Differenzordnungen z.B. nach Gleichung (4-6) sind entsprechend zusätzliche Auswertungen pro Parameter notwendig.

4.4.2 Berechnung von $n+1$ Einzelergebnissen

Durch die Mittelwertverschiebung einer zugrunde liegenden Verteilungsfunktion nach Abb. 4-3 wird die Lage der implizit errechneten Grenzzustandsfunktion im Parameterraum nicht beeinflusst. Es liegt daher nahe, bei Verwendung der Integrationsmethode nach Abschnitt 3.7.3 dieselben Samplingpunkte im Parameterraum zu nutzen, wobei die Auswertung der Indikatorfunktion $I[g(X)]$ nach Abschnitt 3.4.2 nur einmal notwendig wird. Je nach aktueller Verteilungsfunktion (original oder verschoben) besitzen die Samplingpunkte dann unterschiedliche Eintrittswahrscheinlichkeiten. Durch Nutzung dieser Tatsache ist es prinzipiell möglich, die $n+1$ Versagenswahrscheinlichkeiten während einer vollständigen probabilistischen Simulation zu berechnen. Es werden dazu neben der originalen Verteilungsfunktion für einen Parameter zusätzlich eine bzw. zwei sekundäre Verteilungen für den gleichen Parameter definiert.

Eine weitere Betrachtungsweise, die zu äquivalenten Ergebnissen führt, ist in Abb. 4-4 dargestellt. Dabei wird die Monte Carlo Integration nicht auf die Verteilungsfunktion, sondern auf die Differenz der Verteilungsfunktionen angewendet. Als Ergebnis erhält man die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten aufgrund der Verschiebung.

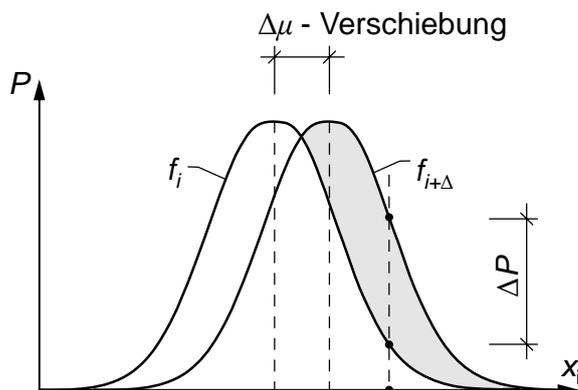


Abb. 4-4: Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsdifferenzen in der SA

Im Kapitel 3.7.3 wurde verdeutlicht, dass eine Hauptschwierigkeit bei der Anwendung der MC Integration beim Festlegen geeigneter Integrationsgrenzen liegt. Bei der SA ist daher zu beachten, dass sich diese Grenzen sowohl aus den originalen als auch aus den sekundären Verteilungen ergeben können. Im Zuge der Implementierung des probabilistischen Modells wurde dieser Sachverhalt berücksichtigt und validiert (Kapitel 5.4).

4.4.3 Konvergenz der Sensitivitätsanalyse

Die Auswertung der Sensitivitätsfaktoren nach Gleichung (4-9) kann analog zur Versagenswahrscheinlichkeit nach jedem bzw. nach einer bestimmten Anzahl von Simulationsschritten erfolgen. Dadurch kann das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Simulationsanzahl in einem Diagramm dargestellt werden.

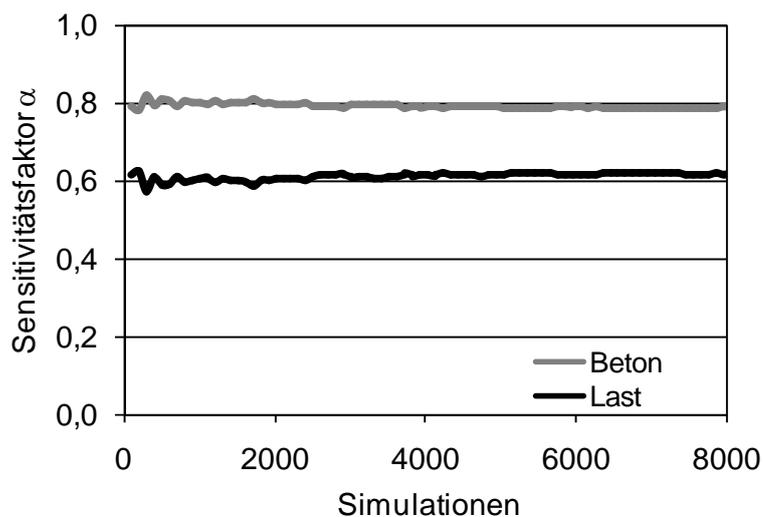


Abb. 4-5: Sensitivitätsanalyse in Abhängigkeit von der Simulationsanzahl¹⁰

¹⁰ Die Auswertung erfolgte nach jedem 50. Simulationsschritt.

Bei der Berechnung des Beispiels NB_2 (siehe Abschnitt 5.4), welches bereits bei der Abb. 3-20 zur Darstellung der Konvergenz herangezogen wurde, zeigt sich eine hervorragende Effektivität der Brute-Force-Methode (Vorwärtsdifferenz) im Rahmen der Ein-Schritt-SA. Dies wird durch die Abb. 4-5 verdeutlicht.

Ersichtlich ist, dass sich bereits nach wenigen Simulationen innerhalb der Quasi-Monte Carlo Methode stabile Sensitivitätsfaktoren ergeben. Dies liegt vor allem an der relativ gleich verlaufenden Konvergenz der $n+1$ Versagenswahrscheinlichkeiten, wie in Abb. 4-6 verdeutlicht wird.

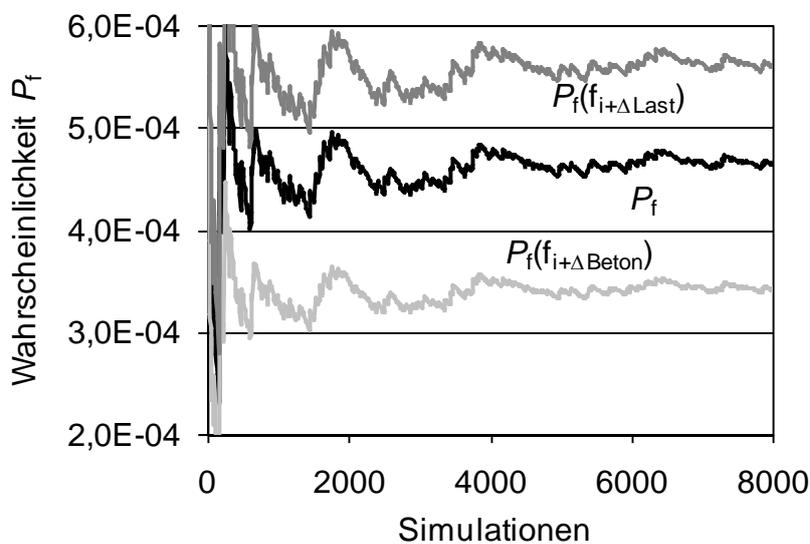


Abb. 4-6: Konvergenz der $n+1$ Versagenswahrscheinlichkeiten auf Basis der QMC

Eine qualitative Aussage zu den Sensitivitäten ist demnach auch bei höherer Dimensionalität der probabilistischen Fragestellung vor Erreichen der Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeit denkbar.

Der Versatzfaktor beträgt im Rahmen des Beispiels NB_2 $\phi_{\text{offset}} = 0,1$, d.h. es wird eine Mittelwertverschiebung gemäß Gleichung (4-8) von 10% vorgenommen. Es kommt das Vorwärts-Differenzenverfahren zur Anwendung.

5 Entwicklung eines probabilistischen Modells für die Zuverlässigkeitsanalyse

5.1 Softwaremodell und Implementierung von NLCS

5.1.1 Vorbetrachtungen

Ziel dieses Abschnittes ist die Entwicklung und Implementierung eines vollständigen probabilistischen Ingenieurmodells für die Berechnung der zuverlässigkeitstheoretischen Fragestellung gemäß der in Kapitel 2 und 3 dargestellten Grundlagen. Zur Durchführung dieser Zuverlässigkeitsanalysen auf Basis der (Quasi-) Monte Carlo Methode bzw. der im Abschnitt 3.7 erläuterten Samplingstrategien ist ein modularisiertes Modell unumgänglich.

Tabelle 5-1: Verknüpfung von Struktur- und Wahrscheinlichkeitsmethoden¹¹

Ansatz	Statistik	Struktur	Referenzen
1	SARA / FREET	ATENA	[Strauss-07], [Cervenka-08]
2	OptiSlang	ANSYS	[Bucher-01], [Ross-06]
3	MATHSOFT, APDL	ANSYS	[Brettschneider-07]
4	Fortran90	SLang	[Faber-02]
5	VbSt	VbSt	[Kleinschmitt-03]
6	SSJ ¹² – Java package	NLCS – Java Implementierung	[Schwuchow-08]

¹¹ © und Programminformationen der in Tabelle 5-1 genannten Softwareprogramme sind den Quellen zu entnehmen.

¹² SSJ: Stochastic Simulation in Java, siehe Anlage 3

Ein probabilistisches Modell basiert grundsätzlich auf der Verknüpfung von Struktur- und Wahrscheinlichkeitsmethoden, wobei die im Kapitel 3.3 erläuterte Beschreibung der Unsicherheit streuender Parameter die Kernfunktionalität darstellen sollte.

Wie Tabelle 5-1 zeigt, existieren unterschiedliche Ansätze zur Verknüpfung, die teilweise auf die Nutzung proprietärer Softwareprogramme (z.B. ATENA, ANSYS) zurückgreifen.

Ausgangspunkt der in dieser Arbeit betrachteten Untersuchungen ist daher zunächst die Entwicklung und Implementierung eines Rechenprogramms. Das dazu notwendige Modell ist bereits in [Schwuchow-08] kurz erläutert worden.

5.1.2 Modellierung und Implementierung

Wie in [Brüggemann-07] allgemein bemerkt, hat sich die objektorientierte Modellierung bei der Bearbeitung komplexer technischer Aufgabenstellungen insbesondere wegen der gleichberechtigten Behandlung parametrischer und funktionaler Eigenschaften bewährt. So werden beispielsweise relevante Parameter einmalig und damit eindeutig in einem Modellierungselement abgebildet. Der Vorteil der objektorientierten Umsetzung kommt vor allem bei der Parametrisierung eines Modells zum Ausdruck.

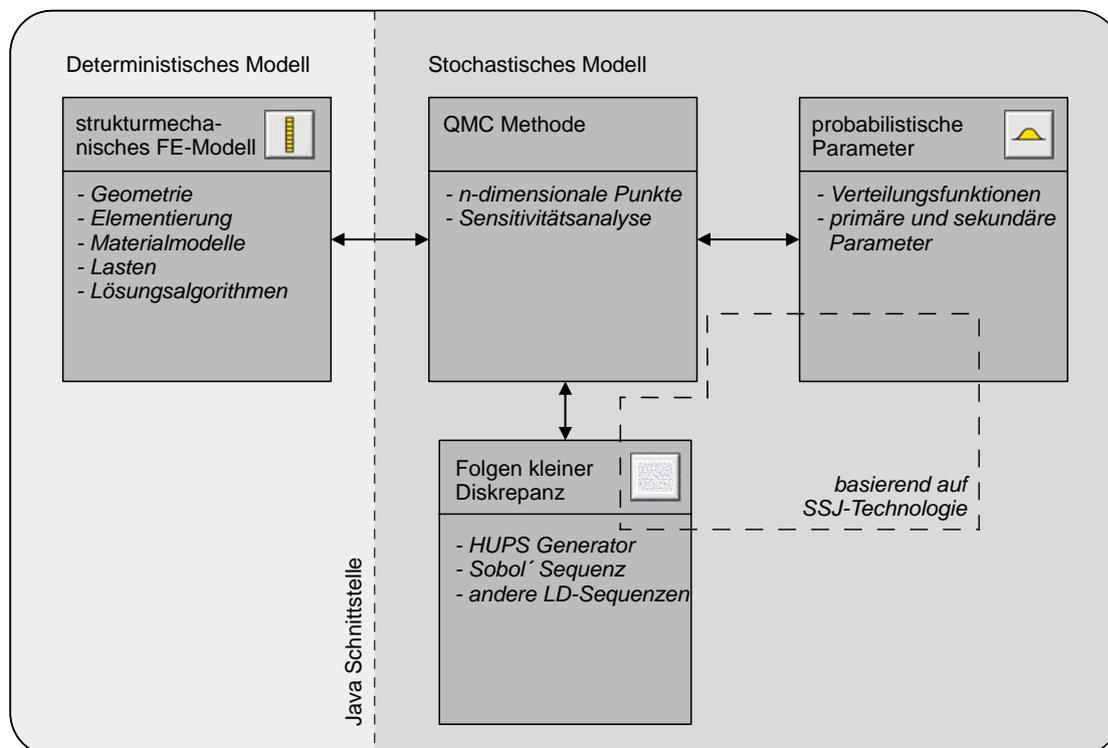


Abb. 5-1: Generalisiertes Konzept des probabilistischen Modells [Schwuchow-08]

In Abb. 5-1 wird das generalisierte Konzept des in dieser Arbeit entwickelten und umgesetzten probabilistischen Modells schematisch verdeutlicht. Die Auswertung der Indikatorfunktion $I[g(\bar{X})]$ gemäß der im Kapitel 3 eingeführten Gleichungen (3-21) bis (3-25) wird durch das parametrisierte strukturmechanische Modell übernommen. Dieses wird im Kapitel 5.2 ausführlich erläutert. Das stochastische Modell auf Basis der QMC Methode wird im anschließenden Abschnitt 5.3 inklusive der notwendigen Parameter der Verteilungsfunktionen dargestellt.

Das aufgezeigte Modell wurde im Rahmen der Programmentwicklung von NLCS in der Entwicklungsumgebung Eclipse [Eclipse-09] in Java implementiert und beruht teilweise auf grundlegenden Java-packages. Die Vorteile der Nutzung der objektorientierten Modellierung in Java sind:

- generalisierte parametrisierte Modellierung,
- hoher Grad an Flexibilität,
- professionelle Entwicklungsumgebung Eclipse,
- grundlegende numerische und stochastische Javabibliotheken,
- plattformunabhängige Programmierung.

Neben den numerischen Basisklassen [Brüggemann-07] wird insbesondere für die stochastische Modellierung die SSJ Technik [SSJ-08] eingesetzt. Zur übersichtlichen Nutzbarkeit wurden graphische Editoren / Benutzeroberflächen (engl. GUI, „Graphical User Interface“) implementiert, die das Modellieren des physikalischen Modells erleichtern.

5.1.3 Numerik Basisklassen

Eine objektorientierte Implementierung numerischer Modelle benötigt effiziente Klassenbibliotheken, die u. a. Vektoren, Matrizen, Gleichungslöser und Methoden zur Integration als Objekte und Funktionen bereitstellen. Mit einer solchen Bibliothek können entsprechende Algorithmen umgesetzt werden. In „Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing“ [Press-07] wird eine der umfangreichsten Zusammenstellungen numerischer Lösungsansätze aufgezeigt. Eine Java-Implementierung in ähnlicher Form ist in [Brüggemann-07] erfolgt. Die dort beschriebene Numerikbibliothek ist funktioneller Bestandteil der Implementierung von NLCS.

5.1.4 Die SSJ Technologie

Die SSJ Technologie (siehe Anlage 3) ist eine organisierte Klassenbibliothek, welche stochastische Simulationen in Java bereitstellt. SSJ ist nicht die einzige Java Klassenbibliothek für stochastische Simulationen. Weitere Programme sind SILK [Kilgore-03], JSIM [Miller-05] und SIMKIT [Buss-02].

Die Java-Basisklassen stellen die Werkzeuge für die Generierung von Zufallszahlen und HUPS (siehe Kapitel 3.8.2) bereit und sind somit die Grundlage für das stochastische Modell. Die Technologie unterstützt unterschiedlichste probabilistische Verteilungsfunktionen und multiple Samplingstrategien (insbesondere die Folgen kleiner Diskrepanz) wie verdeutlicht. Auch wenn der Hauptanwendungsbereich von SSJ im Bereich der Finanzmathematik liegt, bietet diese Programmbibliothek eine hervorragende Grundlage zur Implementierung eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Simulationsmodells. Eine weitergehende Beschreibung und Darstellung der Paketstruktur ist in [L'Ecuyer-05] und [SSJ-08] zu finden. Die Implementierung und Einbindung von SSJ kann äquivalent der numerischen Basisklassen in Eclipse erfolgen. Dies ist einer der entscheidenden Vorteile des generalisierten Konzepts nach Abb. 5-1.

5.1.5 GUI-Oberfläche

Zusätzlich zur Implementierung des Ingenieurmodells ist es zweckmäßig, separate Modelleditoren auf Basis einer grafischen Benutzeroberfläche zu definieren. Eine grafische Benutzeroberfläche ist dabei eine Software-Komponente, die dem Programmnutzer eine Bedienung über grafische Symbole erlaubt. Hierbei können Modellierungswünsche des Nutzers sofort in Diagrammen und Präsentationskomponenten dargestellt werden. Die Implementierung von Modelleditoren basiert auf Java Swing [Brüggemann-07].

In dem Programm NLCS stehen graphische Benutzeroberflächen für folgende Punkte zur Verfügung:

- Querschnitts- und Materialeditor,
- Systemeditor,
- Wahrscheinlichkeitseditor / Verteilungsfunktionsanzeige.

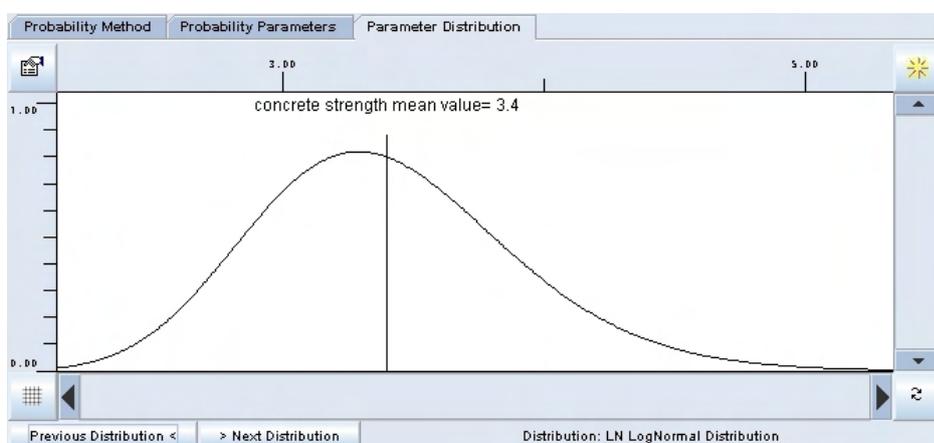


Abb. 5-2: Darstellung des Wahrscheinlichkeitseditors

In Abb. 5-2 und Abb. 5-3 werden beispielhaft die Benutzeroberflächen des Wahrscheinlichkeits- und Querschnittseditors dargestellt. Zusätzlich ist in Abb. 5-3 ein triangulierter Querschnitt einer Stahlbetonstütze abgebildet.

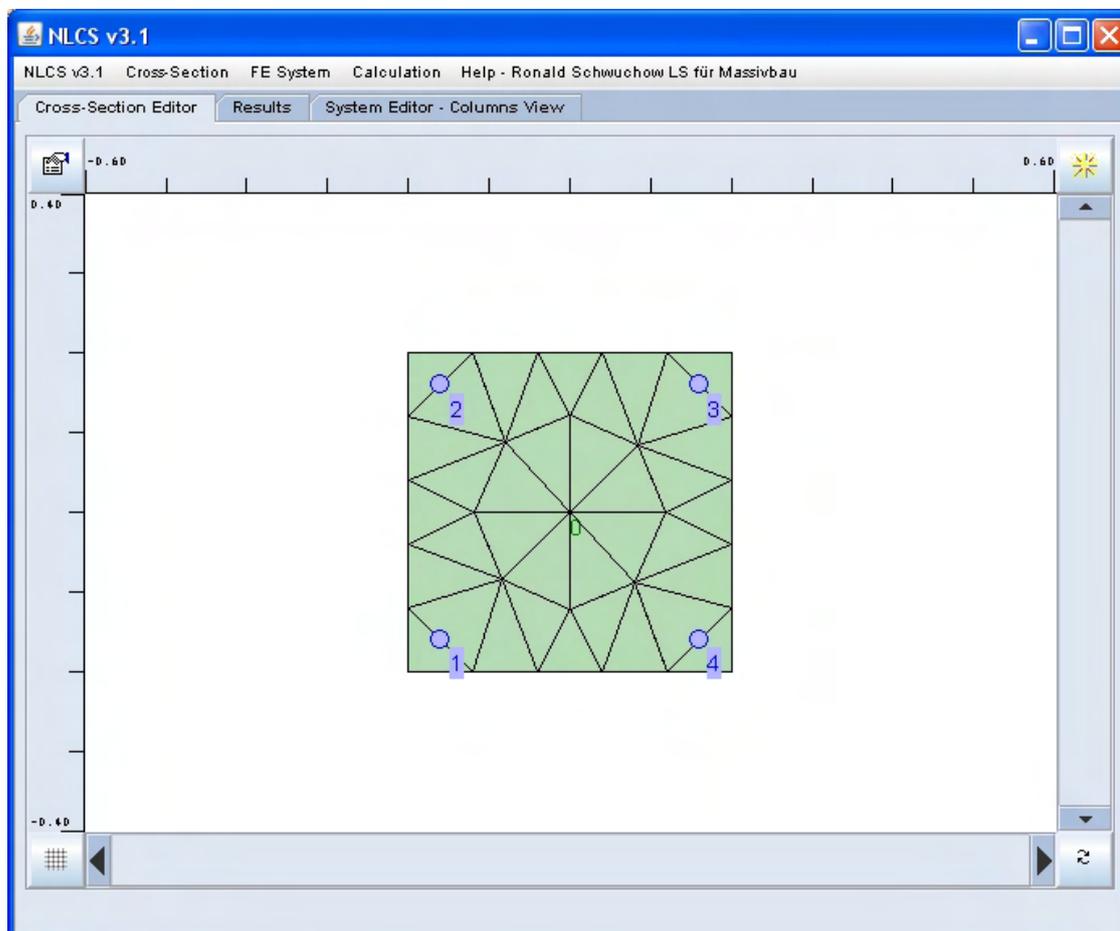


Abb. 5-3: Darstellung des Querschnittseditors

5.2 Deterministisches strukturmechanisches Modell

5.2.1 Allgemeines zur nichtlinearen Strukturanalyse

Die allgemeinen Grundlagen der numerischen Lösung auf Basis der nichtlinearen FEM werden an dieser Stelle nicht erörtert. Es werden lediglich die zur Darstellung des implementierten deterministischen Modells (Programm NLCS) erforderlichen Methoden aufgezeigt. Ein umfassender Überblick über die allgemeine Lösung strukturmechanischer Fragestellungen ist beispielsweise in [Bathe-86] dargestellt.

Grundlage der Systemanalyse von zweiachsig beanspruchten Stahlbetonstützen ist eine vollständige nichtlineare Modellierung der strukturmechanischen Fragestellung, welche im Kapitel 2 behandelt wurde. Das deterministische Berechnungsverfahren sollte eine Traglastermittlung des nichtlinearen stabilitätsbeeinflussten Tragverhaltens ermöglichen, wobei reale Materialkennwerte verwendet werden. Wie im Abschnitt 2.3 bereits aufgezeigt, wird im Kontext dieser Arbeit die iterativ-numerische Lösung des strukturmechanischen Problems mittels FEM bevorzugt, um systematische Fehler eines angenäherten Verfahrens (siehe Tabelle 2-1) zu vermeiden. Bei der FEM ist die Diskretisierung (Abb. 2-8) mit geeigneten Finiten Elementen notwendig, wodurch die Lösung an einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden berechnet werden kann. Über Ansatzfunktionen [Zienkiewicz-77] wird auf das Verhalten des Tragwerkes zwischen den Elementknoten geschlossen.

Zuverlässigkeitsanalysen für Traglastzustände erfordern trotz Verwendung varianzmindernder Methoden eine Vielzahl von Simulationen, bei denen jeweils die Lösung der Funktion $I[g(X)]$ gemäß Gleichung (3-21) erfolgen muss. Hierbei ist vorrangig von Interesse, ob das Tragwerk unter einer vorgegebenen Konfiguration versagt oder nicht.

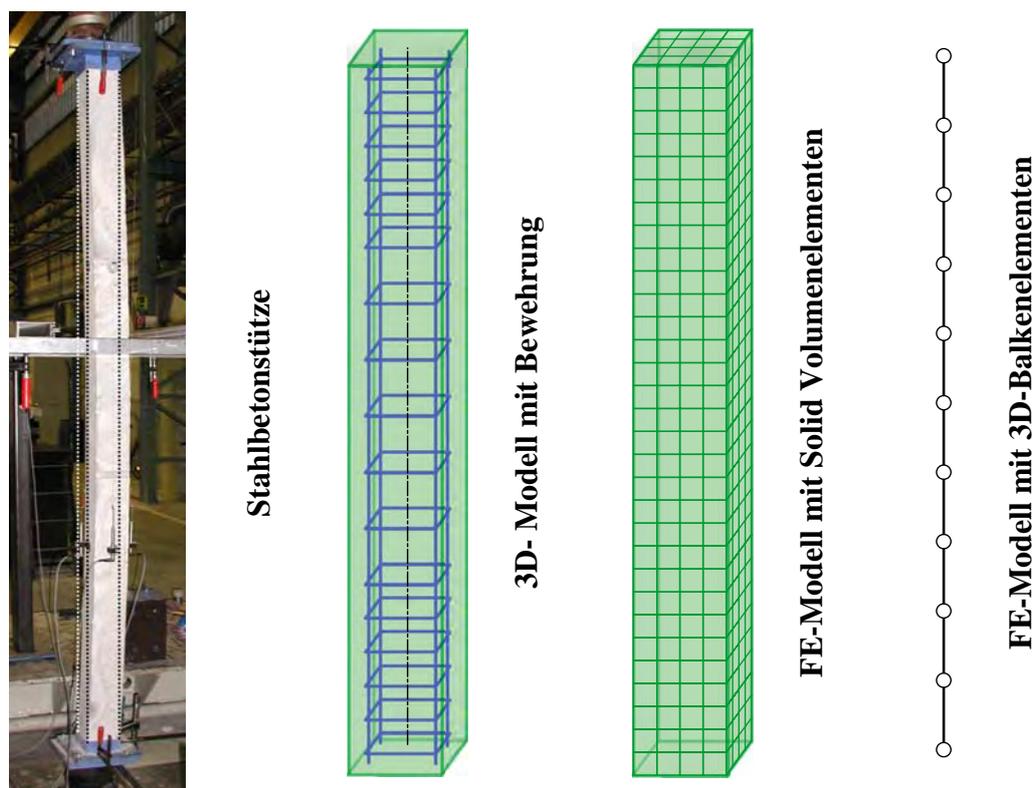


Abb. 5-4: Gegenüberstellung unterschiedlicher Diskretisierungstypen am Beispiel einer Stahlbetonstütze

Insbesondere bei ausgeprägtem nichtlinearem Tragverhalten steigt der Berechnungsaufwand entsprechend an. Aus diesem Grund ist die Auswahl geeigneter Elementtypen für die Lösung des strukturmechanischen Problems von besonderer Bedeutung. Beispielsweise ist die Verwendung von Volumenelementen (siehe [Bathe-86]) im Zuge der Validierung bzw. Tragwerksanalyse sinnvoll, jedoch steht die erzielte numerische Genauigkeit nicht mehr im Verhältnis zur aufgebrauchten Berechnungszeit und den probabilistischen Erkenntnissen der mechanischen Eingangsgrößen. Mechanische Berechnungen z.B. auf Basis von Balkenelementen stellen in diesem Fall einen geeigneten Kompromiss dar (Abb. 5-4).

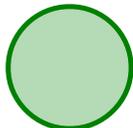
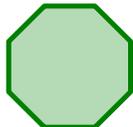
Folgende Annahmen liegen der Entwicklung des parametrisierten strukturmechanischen Modells zugrunde:

- Stützen bestehen aus geraden Balkenelementen mit rechteckigen Querschnitten;
- Querschnitte bleiben auch nach der Verformung eben und senkrecht zur verformten Stabachse (Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese, Schubverformungen werden vernachlässigt);
- Querschnitte bestehen aus Teilquerschnitten ggf. unterschiedlichen Materials, Verbindungen der Teilquerschnitte werden nicht geprüft;
- Torsions- und Schubbeanspruchungen werden vernachlässigt;
- Belastungen und Exzentrizitäten werden als Randbedingungen richtungstreu modelliert;
- zweiachsiges Beanspruchungen sind zulässig;
- Implementierung unterschiedlicher, jedoch eindimensionaler Materialgesetze (siehe Abschnitt 2.5);
- Betonmodell auf Zug, keine Modifikation des Betonstahlmaterials;
- parametrisierte Materialgesetze werden unabhängig von der Deformationsgeschichte und Zeit formuliert (Kriechen wird gemäß Kapitel 2.6 erfasst);
- zwischen Beton und Betonstahl liegt ein vollständiger Verbund vor, Verbundversagen gemäß Tabelle 3-1 wird im Modell vernachlässigt;
- Bewehrungsstöße werden nicht modelliert;
- Degradation (siehe Abschnitt 2.6.2) wird nicht erfasst;
- Green-Lagrangesches Verzerrungsmaß, Theorie großer Verformungen;
- Versagensmechanismen gemäß Tabelle 3-1, bei nichtkonvergenten Zuständen erfolgt die Prüfung auf singuläre Steifigkeitsmatrix.

5.2.2 Modellierung des Stützenquerschnittes

Grundlage der Erfassung des Gesamttragverhaltens ist die Abbildung des Stahlbetonquerschnittes und der damit einhergehenden Integration des verwendeten Werkstoffgesetzes über den Elementquerschnitt. Diese Umsetzung erfolgt analog zu [Backes-94] und [Pfeiffer-04], wonach der Stützenquerschnitt grundsätzlich aus parametrisierten Einzelquerschnitten zusammengesetzt wird. Folgende in der Tabelle 5-2 dargestellten Teilquerschnitte kommen dabei zum Einsatz.

Tabelle 5-2: Querschnittsmodellierung aus Einzelquerschnitten

Teilquerschnitt	Darstellung	Definitionsparameter
Rechteck		Breite, Höhe, Mittelpunkt, Materialmodell
Kreis		Radius, Mittelpunkt, Materialmodell
Polygon		Punktmenge, Materialmodell
Bewehrungspunkt		Radius, Mittelpunkt, Materialmodell

Im Querschnittseditor können die Parameter der Teilquerschnitte angezeigt und verändert werden. Generell ist somit die Generierung beliebiger Querschnitte möglich. Eine Prüfung auf Konsistenz des Stahlbetonquerschnittes erfolgt im Rahmen der grafischen Darstellung, wie Abb. 5-3 zeigt.

5.2.3 Diskretisierung durch Finite Elemente

5.2.3.1 Das räumliche Balkenelement mit Hermiten-Ansatzfunktionen

Eine Stahlbetonstütze ist dadurch gekennzeichnet, dass zwei ihrer Abmessungen klein gegenüber der Stützenlänge sind. Durch die im Abschnitt 5.2.1 getroffenen Annahmen und Voraussetzungen lässt sich die Stütze durch gerade balkenähnliche Elemente modellieren. Die Verformungen der Stabachse sind zur Beschreibung des gesamten Volumenkörpers ausreichend, wenn eine entsprechende Beschreibungsmöglichkeit eines beliebigen Körperpunktes in Form einer Querschnittskinematik vorliegt.

Ausgehend von der Elemententwicklung für physikalisch nichtlineare Problemstellungen durch BACKES [Backes-94] wird das dort beschriebene 2-Knoten-Hermite-Balkenelement (siehe Abb. 5-5) mit zehn Freiheitsgraden für diese vorliegende Arbeit adaptiert. Es entspricht einem Element nach der Bernoulli-Navier-Theorie (siehe [Krätzig-97]). Anpassungen werden lediglich in der Art und Weise der numerischen Integration und der normierten Elementbeschreibung vorgenommen. Diese Anpassungen sind notwendig, um die Effizienz der Berechnung zu verbessern und die Verwendung auf Basis der totalen Lagrange-Formulierung (siehe Kapitel 2.4) zu realisieren.

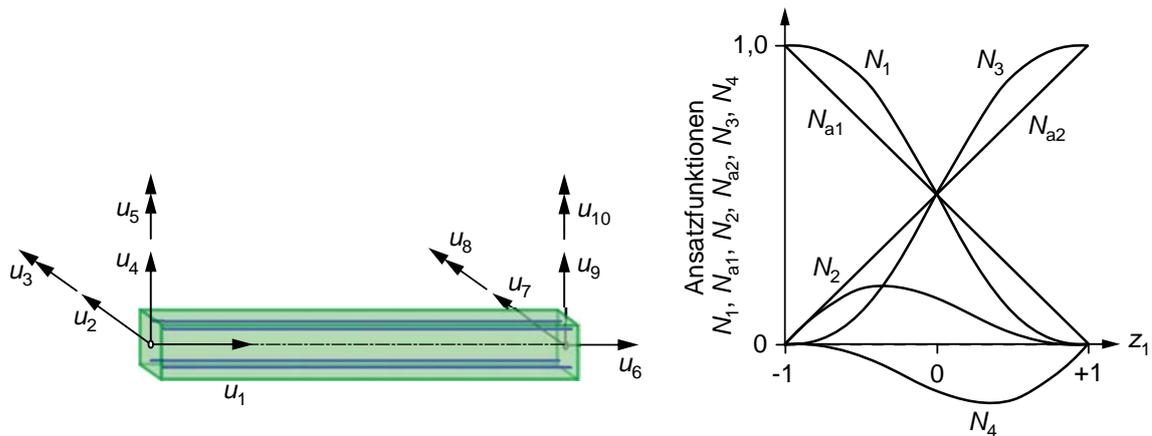


Abb. 5-5: 2-Knoten-Balkenelement mit 10 Freiheitsgraden, Ansatzfunktionen

Zur Approximation des Verlaufes der Verformungen über die Elementlänge verwendet man Ansatzfunktionen bzw. Formfunktionen N_i . Als Stützstellen \mathbf{u}_t werden die Knoten der Elementformen gewählt. Ansatzfunktionen für Balkenelemente werden durch die normalisierte Koordinate $z_1 \in (-1, 1)$ definiert. Entsprechende mathematische Formulierungen werden in den folgenden Gleichungen dargestellt.

$$\begin{aligned}
 N_{a1}(z_1) &= 0,5(1 - z_1) \\
 N_1(z_1) &= 0,25 \cdot (2 - 3z_1 + z_1^3) \\
 N_2(z_1) &= 0,25 \cdot (1 - z_1 - z_1^2 + z_1^3) \\
 N_{a2}(z_1) &= 0,5(1 + z_1) \\
 N_3(z_1) &= 0,25 \cdot (2 + 3z_1 - z_1^3) \\
 N_4(z_1) &= 0,25 \cdot (-1 - z_1 + z_1^2 + z_1^3)
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

Die Gleichung (5-2) gibt den Zusammenhang auf Basis des Interpolationsvektors $\mathbf{\Omega}^e(z_1)$ wieder.

$$\mathbf{u}(z_1) = \mathbf{\Omega}^e(z_1) \cdot \mathbf{u}_t \quad (5-2)$$

mit:

$$\mathbf{u}_t = (u_1, u_2, \dots, u_9, u_{10})^T$$

$$\mathbf{\Omega}^e(z_1) = (N_{a1}, N_1, N_2, N_1, N_2, N_{a2}, N_3, N_4, N_3, N_4)$$

Bedingungen und Kriterien, die an die Verwendung von Ansatzfunktionen geknüpft sind, wie beispielsweise die Stetigkeit an Verbindungsknoten, werden von BACKES ausführlich diskutiert. Abb. 5-5 zeigt die verwendeten Ansatzfunktionen des 2-Knoten-Hermite-Balkenelements. In Stablängsrichtung (Axialkoordinate x) ist es im Allgemeinen ausreichend, lineare Funktionen zu verwenden. Durch die Wahl von Hermite-Polynomen als Ansatz- bzw. Formfunktionen können die in den strukturmechanischen Differentialgleichungen enthaltenen Ableitungen sehr einfach gebildet werden.

5.2.3.2 Kinematische Hypothese

Zusätzlich zu den Verformungen, welche über die Ansatzfunktionen bestimmbar sind, ist es notwendig, entsprechende Dehnungen bzw. Verzerrungen auf Querschnittsebene zu ermitteln. Dabei ist die Verwendung der Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen (siehe Abschnitte 2.4.2 und 2.4.3) und der Querschnittskinematik erforderlich.

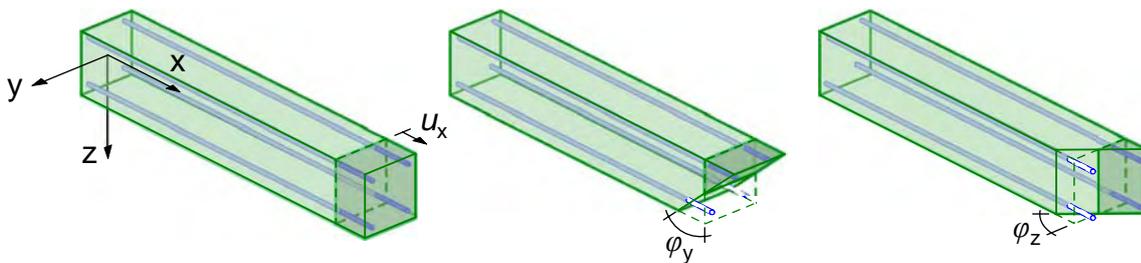


Abb. 5-6: Kinematische Hypothese für räumliche Balkenelemente nach Bernoulli

Die Dehnungskomponente eines beliebigen Volumenpunktes des Kontinuums kann durch die Verschiebungen und Verdrehungen der Stabachse (siehe Abb. 5-6) bestimmt werden. Die Verdrehungen φ_z und φ_y eines betrachteten Querschnittes bedingen eine zusätzliche Dehnung in x -Richtung, wie folgende Gleichung unter Vernachlässigung des Verwölbungs- und Schubeinflusses zeigt.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + y\varphi_z + z\varphi_y + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 = u_{,x} + y\frac{d^2v}{dx^2} + z\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad (5-3)$$

mit:

$$\varphi_z = \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\varphi_y = \frac{d^2w}{dx^2}$$

Damit besteht die Möglichkeit zur Interpolation des Dehnungszustandes durch die Formfunktionen bzw. deren erste und zweite Ableitungen. In Matrixschreibweise ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}^e \mathbf{u}_t \quad (5-4)$$

mit:

$$\mathbf{H}^e = \mathbf{H}^e(z_1, y, z).$$

Die Operatormatrix \mathbf{H}^e (in [Bathe-86] mit \mathbf{B} bezeichnet) enthält die ersten und zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen unter Beachtung der Querschnittskinematik. Generalisiert lässt sich der Zusammenhang in vektorieller Form nach Gleichung (5-4) beschreiben. Ein finites Balkenelement, welches der Annahme der Bernoulli-Theorie entspricht, kann zur Herleitung der allgemeinen inkrementellen Gleichgewichtsgleichung gemäß Gleichung (2-12) herangezogen werden. Für entsprechende Ausführungen wird auf [Backes-94] verwiesen.

5.2.3.3 Numerische Integration über die Elementlänge

Aus der Gleichgewichtsgleichung (2-12) der Stützenverformung ergeben sich die Terme zu:

$$\mathbf{K}_t^e = \int_V \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dV \quad (5-5)$$

$$\mathbf{F}_i^e(\mathbf{u}_t) = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \cdot E_s dV = \int_V \mathbf{H}^e \mathbf{u}_t \cdot E_s dV \quad (5-6)$$

mit:

$$E_t = E_t(\mathbf{H}^{eT} \mathbf{u}_t) \quad \dots \text{Tangentensteifigkeit des Materials im Zustand } t$$

$$E_s = E_s(\mathbf{H}^{eT} \mathbf{u}_t) \quad \dots \text{Sekantensteifigkeit des Materials im Zustand } t.$$

Eine umfassende Übersicht zur Berechnung der einzelnen Terme ist unter anderem in [Bathe-86], [Krätzig-97] und [Zienkiewicz-77] dargestellt.

Am Beispiel der Tangentensteifigkeitsmatrix wird das weitere Vorgehen demonstriert. Das Integral über das Volumen des Elements gemäß Gleichung (5-5) wird entsprechend der folgenden Gleichung in ein Integral über den Querschnitt und in ein Integral über die Elementlänge zerlegt.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t^e &= \int_V \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dV \\ &= \int_L \int_A \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dAdL\end{aligned}\quad (5-7)$$

Da die Tangentensteifigkeit $E_t = E_t(\mathbf{H}^{eT} \mathbf{u}_t)$ sowohl über die Querschnittsfläche als auch über die Elementlänge variiert (materielle Nichtlinearität), kann der Integrand nur an gegebenen Punkten numerisch bestimmt werden. Zur Lösung dieser Integrationsaufgabe kommen daher numerische Quadraturmethoden, speziell die effiziente Gauß-Legendre-Methode [Krommer-98] zum Einsatz.

Für das eindimensionale Integral über die Länge des Elementes wird die Integration im normalisierten Raum $z_1 \in (-1,1)$ durchgeführt. Die entsprechenden Gauß-Punkte und deren Gewichte sind [Krommer-98] zu entnehmen.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t^e &= \int_{-1}^1 \int_A \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dA \cdot 2L \cdot dz_1 \\ &= \sum_{i=1}^r \int_A \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dA \cdot 2L \cdot g_r\end{aligned}\quad (5-8)$$

Erfolgt die Berechnung im normalisierten Raum, so ist eine Transformation durchzuführen. Dies kann im eindimensionalen Integral mit $z_1 \in (-1,1)$ durch Multiplikation mit der doppelten Elementlänge L erreicht werden. Damit ist die Integration über die Elementlänge je nach Anzahl der Gauß-Punkte exakt lösbar.

Insbesondere bei Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten, der Rissbildung und der Hermiten-Ansatzfunktionen ist die Nutzung der numerischen Integration über die Elementlänge auch für die inneren Kraftgrößen $\mathbf{F}_1^e(\mathbf{u}_t)$ nach Gleichung (5-6) sinnvoll. Werden die Schnittgrößen hingegen lediglich durch Integration über die Stabendquerschnitte berechnet [Backes-94], führt dies zu unüberwindbaren numerischen Konvergenzproblemen, da das Gleichgewicht der stark schwankenden Normalkräfte nicht mehr einzustellen ist. Ähnliche numerische Konvergenzprobleme treten auch im Rahmen des Übertragungsmatrizen-Verfahrens bei PFEIFFER [Pfeiffer-04] auf.

5.2.3.4 Numerische Integration über den Querschnitt

Der grundlegende Bestandteil der Erfassung auf Querschnittsebene ist die numerische Integration der in Gleichung (5-5) dargestellten Integranden über die Querschnittsfläche. Im Stahlbetonbau kann dies unter Beachtung unterschiedlicher Querschnittsgeo-

metrien und Materialien erfolgen. Dieser Zusammenhang wurde bereits in Abschnitt 5.2.2 dargestellt.

Um veränderliche Verläufe der Steifigkeiten über den Querschnitt, unterschiedliche Materialien und Rissbildung zu erfassen, erfolgt zweckmäßigerweise eine Zerlegung des Querschnittes in Teilquerschnitte A_q . Das Integral wird durch folgende Summe ersetzt.

$$\int_A \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dA = \sum_n \int_{A_q} \mathbf{H}^{eT} \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e dA_q \quad (5-9)$$

Mit dieser Vorgehensweise kann eine getrennte Integration der Anteile von Bewehrungselementen und Betonflächen durchgeführt werden. Besonderes Augenmerk liegt auf der Integration über Teilquerschnitte mit stark unterschiedlichen Steifigkeitsbereichen, wie folgende Abbildung verdeutlicht.

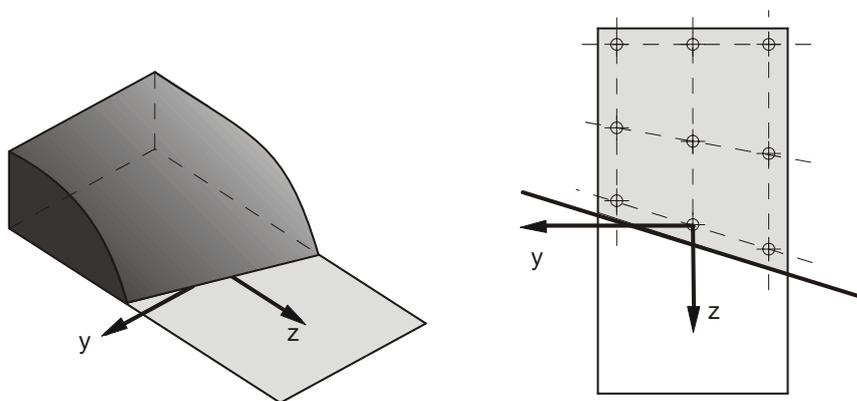


Abb. 5-7: Integration nichtlinearer Funktionen über Teilquerschnitte

Numerische Simulationsmethoden erfordern eine zusätzliche Zerlegung des Integrationsgebietes in einfache geometrische Teilgebiete. Das in dieser Arbeit verwendete Modell ist eine Weiterentwicklung des bekannten Fasermodells (siehe z.B. [Galgoul-78]). Im Unterschied zum klassischen Fasermodell werden jedoch zur Bestimmung der Integrationsflächen keine Quadrat- bzw. Lamellenelemente, sondern Dreieckselemente Abb. 5-8 verwendet.

Diese Unterteilung ist aus folgenden Gründen besonders vorteilhaft.

- Beliebige Querschnitte und Teilquerschnitte (auch runde Formen) können erfasst werden.
- Die Integration über Dreieckselemente wird durch Gauß-Punkte unterschiedlicher Genauigkeit ermöglicht [Krommer-98].
- Die Genauigkeit kann zusätzlich durch eine adaptive Delaunay-Triangulierung [Horstmann-00] innerhalb des numerischen Problems angepasst werden.

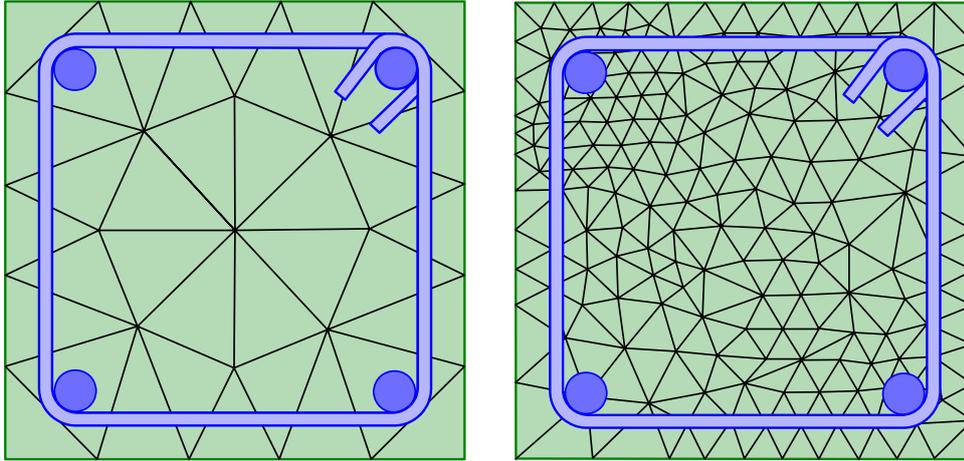


Abb. 5-8: Adaptive Delaunay-Triangulierung für Stahlbetonquerschnitte

Damit nutzt diese Methode die positiven Eigenschaften des Fasermodells und der Gauß-Legendre-Quadratur. Die Gauß-Punkt-Quadratur einer Funktion, angewendet auf Dreiecksflächen, kann durch die Summe einzelner Integrationspunkte bestimmt werden, wie Gleichung (5-10) zeigt.

Die Globalkoordinaten ergeben sich durch Transformation aus den natürlichen Koordinaten für Dreiecke. Natürliche Gauß-Punkt-Koordinaten und die Gewichte der Integrationspunkte für Dreiecksflächen sind Tabelle 5-3 zu entnehmen. Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens können physikalisch nichtlineare Zusammenhänge über den Querschnitt genau berücksichtigt werden.

$$\int_{A_q} \mathbf{H}^{eT}(z_1, y, z) \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e(z_1, y, z) dA_q \quad (5-10)$$

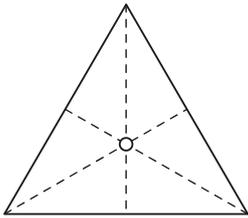
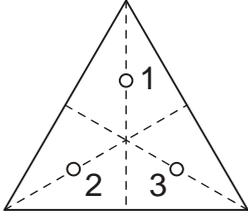
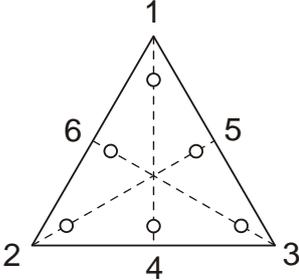
$$= \sum_i (\mathbf{H}^{eT}(z_1, y_{gi}, z_{gi}) \cdot E_t \cdot \mathbf{H}^e(z_1, y_{gi}, z_{gi})) \cdot g_i$$

mit:

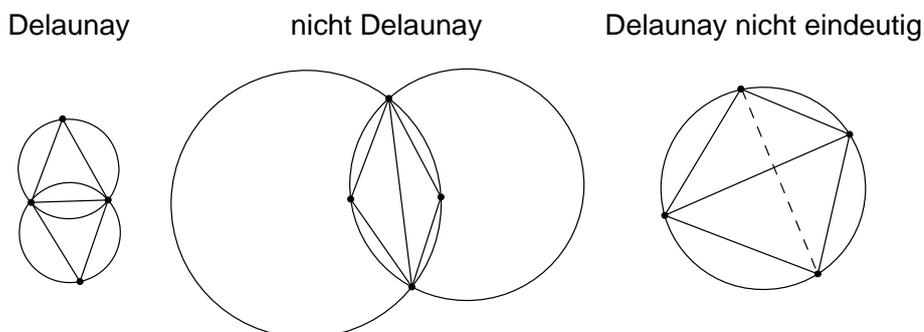
y_{gi}, z_{gi} globale Koordinaten des Gauß-Punktes i

g_i Gewicht des Gauß-Punktes i

Tabelle 5-3: Gauß-Punkte und Gewichte

Typ	i	Koordinaten z_1, z_2, z_3	Gewicht g_i
	1	1/3	1/2
	1	2/3; 1/6; 1/6	1/6
	2	1/6; 2/3; 1/6	1/6
	3	1/6; 1/6; 2/3	1/6
	1	a, b, b	0,05497 58718 27661
	2	b, a, b	0,05497 58718 27661
	3	b, b, a	0,05497 58718 27661
	4	c, d, d	0,11169 07948 39005
	5	d, c, d	0,11169 07948 39005
	6	d, d, c	0,11169 07948 39005
		$a = 0,81684 75729 80459$ $b = 0,09157 62135 09771$	
		$c = 0,10810 30181 68070$ $d = 0,44594 84909 15965$	

Unter den verschiedenen Triangulierungsmethoden [Horstmann-00] erweist sich die Delaunay-Generierung aus numerischen Gründen als vorteilhaft, da z.B. keine zu spitzen Dreiecke entstehen. Eine Grundlage der Triangulation nach Delaunay ist die Umkreisbedingung, wonach ein Umkreis eines Dreieckes mit seinen Punkten keinen weiteren Punkt eines Nachbardreiecks beinhalten darf.

**Abb. 5-9:** Umkreisbedingung der Delaunay-Triangulierung nach [Horstmann-00]

Der genannte Vorteil der Triangulation nach Delaunay ist durch Abb. 5-9 erklärlich. Die erforderliche Anzahl der Dreiecke kann gemäß Abb. 5-8 adaptiv an die Genauigkeitsanforderung angepasst werden. Im Rahmen der Validierung des strukturmechanischen Modells (Abschnitt 5.2.6.2) werden entsprechende Untersuchungen zur Genauigkeit unterschiedlicher Dreiecksanzahlen auf das Lösungsergebnis analysiert.

5.2.4 Lösung der nichtlinearen strukturmechanischen Gleichgewichtsgleichung

5.2.4.1 Inkrementierung der Gleichgewichtsgleichung

Im entwickelten Rechenprogramm NLCS wird ein iterativ-inkrementelles Rechenverfahren verwendet, wobei die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems nach jedem Inkrement auf das mehrfache Lösen linearer Gleichungssysteme zurückgeführt wird. Es ergibt sich die allgemeine Formulierung des hier angewendeten Newton-Raphson Verfahrens [Wriggers-01] für Laststeuerung gemäß folgender Gleichung:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_t, \lambda) = \lambda \mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t) = 0 \quad (5-11)$$

mit:

- \mathbf{P}_a als Belastungsvektor des Grundzustandes
- λ als Lastfaktor
- $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)$ als Vektor der inneren Knotenkräfte im Zustand t
- $\mathbf{G}(\mathbf{u}_t, \lambda)$ als Vektor der Ungleichgewichtskräfte.

Da bei probabilistischen Berechnungen vorrangig von Interesse ist, ob das Tragwerk unter einer bestimmten Konfiguration versagt oder nicht, muss unter einer vorgegebenen Last untersucht werden, ob ein dazugehöriger stabiler Gleichgewichtszustand vorliegt. Dies erfolgt durch eine reine Laststeuerung. Definitionsgemäß ist das Gleichgewicht dann erfüllt, wenn die Ungleichgewichtskräfte nach Gleichung (5-11) im Laufe einer Newton-Raphson-Iteration unterhalb einer definierten Schranke bleiben.

Wegen der Verwendung pfadunabhängiger Werkstoffmodelle kann der Lastvektor \mathbf{P}_a bei der Berechnung einer Konfiguration in voller Größe von $\lambda = 1$ aufgebracht werden. Eine Inkrementierung, wie sie bei der Validierung zur Ermittlung der nichtlinearen Last-Verformungskurven notwendig wird, ist in diesem Fall nicht erforderlich. Auf die Umsetzung bekannter Pfadverfolgungsalgorithmen wie beispielsweise des Bogenlängenverfahrens nach RIKS [Riks-72] kann verzichtet werden, wenn die Konvergenz im Traglastbereich gewährleistet wird [Backes-94]. Beim Bogenlängenverfahren wird neben der reinen Laststeuerung die Vorgabe diskreter Knotenverschiebungen erforderlich, wodurch verschiedene Last-Verschiebungscharakteristiken berücksichtigt werden können.

5.2.4.2 Gleichgewichtsiteration

Der durch die Linearisierung der Gleichgewichtsgleichung auftretende Fehler wird durch eine Iteration in jeder Laststufe gemäß der im Kapitel 2.4.4 dargelegten iterativen Formulierung nach Gleichung (2-12) minimiert. Gesucht wird dabei der Verformungszustand $\mathbf{u}_t + \Delta\mathbf{u}$, bei dem der Vektor der inneren Knotenpunktkräfte $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)$ dem äußeren Kraftvektor \mathbf{P}_a entspricht.

$$\mathbf{K}_t \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t) \quad (2-12)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix wird nicht durch explizite Bildung der Richtungsableitung (5-12) bestimmt, sondern durch die aus den Energiebetrachtungen gewonnene Beziehung gemäß der Gleichungen (5-5) bis (5-8), wie im Kapitel 5.2.3 beschrieben.

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)}{\partial \mathbf{u}_t} \quad (5-12)$$

Es ist die Ermittlung der Systemsteifigkeitsmatrix aus den Elementlösungen notwendig. Dies kann, wie beispielsweise in [Backes-94] gezeigt, durch Zuordnungsmatrizen geschehen.

Das prinzipielle Vorgehen der Newton-Raphson Iteration ist in Abb. 5-10 dargestellt. Die Berechnung der verbesserten Verformungskonfiguration innerhalb der Iteration kann mit Gleichung (5-13) erfolgen.

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \Delta\mathbf{u} \quad (5-13)$$

Die totalen Verformungen werden durch Aufsummieren der Verschiebungen aktualisiert. Der Vektor der Verformungszinkremente $\Delta\mathbf{u}$ wird aus der Lösung der Gleichung (2-12) ermittelt.

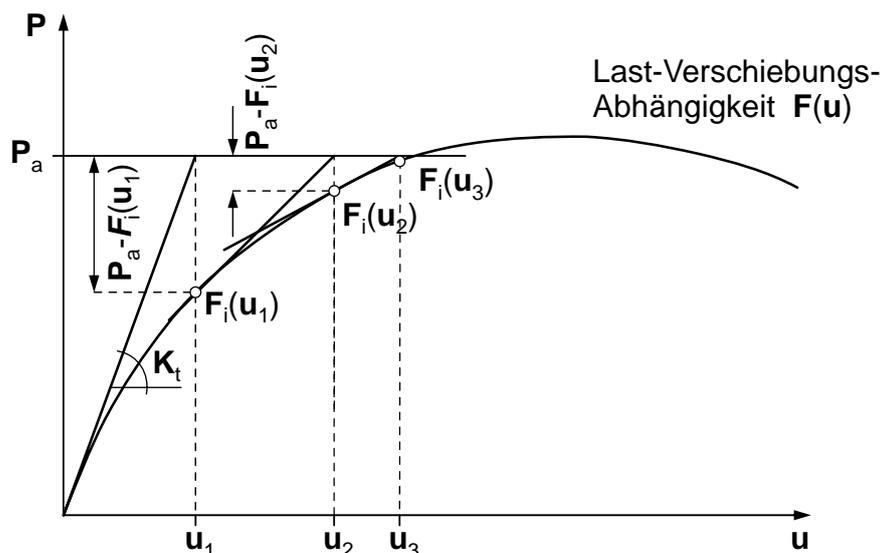


Abb. 5-10: Newton-Raphson Iteration

Wie bereits erwähnt, wird das nichtlineare Systemverhalten auf die mehrfache Lösung dieser Gleichung zurückgeführt. Daher sind effiziente und schnelle Lösungsalgorithmen notwendig. Als Anfangsverformung im Zustand 0 wird meist die elastische Lösung herangezogen.

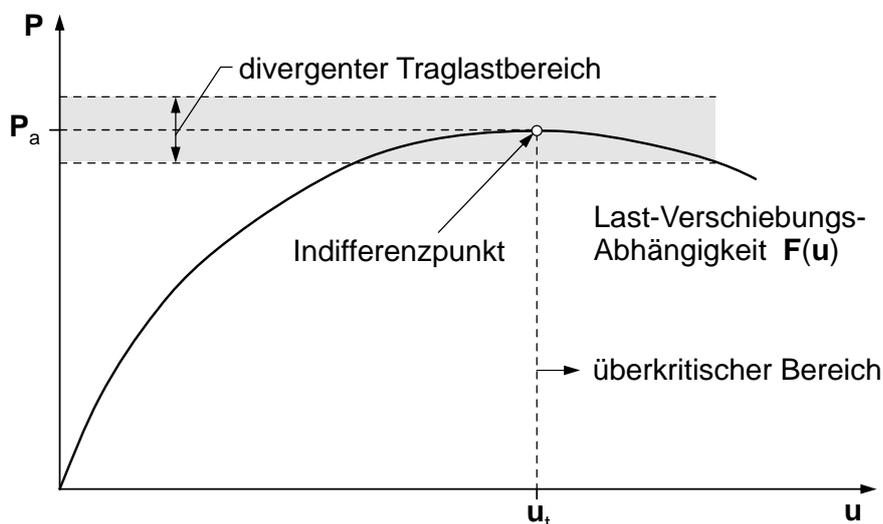


Abb. 5-11: Konvergenzproblematik im Traglastbereich

Liegt die vorgegebene Konfiguration in der Nähe der aufnehmbaren Traglast (Indifferenzpunkt), so kann es bei dem dargestellten Lösungsansatz auf Basis der Laststeuerung gemäß Gleichung (5-11) zu numerischen Konvergenzproblemen bei der Iteration kommen.

Dieses Phänomen ist durch die Gleichgewichtsiteration des Vektors $\mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)$ begründbar, bei dem die Tangentensteifigkeitsmatrix nicht durch explizite Bildung der Richtungsableitung (5-12) bestimmt wird. Die Interaktion der Vektorgrößen kann ggf. ein teilweises Überwinden des vektoriellen Indifferenzpunktes bewirken, was im nächsten Iterationsschritt zu der in Abb. 5-11 dargestellten Problematik führen kann. Ursache ist eine ungünstige Konditionierung der Tangentensteifigkeitsmatrix.

Als zweckmäßiger Ansatz zur Lösung dieser Schwierigkeiten wird eine gedämpfte numerische Iteration [Zienkiewicz-77] im divergenten Traglastbereich gewählt.

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \delta \Delta \mathbf{u} \quad (5-14)$$

mit: δ ...Dämpfungsfaktor

Durch Verwenden des Ansatzes nach Gleichung (5-14) ist eine Konvergenz des numerischen Lösungsverfahrens sehr nah am Indifferenzpunkt gewährleistet. Dies wird durch die Validierung (Kapitel 5.2.6) bestätigt. Im Allgemeinen ist es ausreichend, im Trag-

lastbereich (10% unterhalb des Indifferenzpunktes) einen inkrementellen Dämpfungsfaktor von $\delta = 0,5$ anzuwenden.

5.2.4.3 Konvergenzkriterien

Bei der Berechnung des Verformungszustandes innerhalb einer gegebenen Konfiguration können sowohl die Veränderungen der Verformungsinkremente $\Delta \mathbf{u}$ als auch der Vektor der nicht im Gleichgewicht stehenden Knotenkräfte $\mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)$ als Abbruchkriterium herangezogen werden.

$$\begin{aligned} \text{TOL} &= \max\{\mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_t)\} \\ \text{TOL} &= \max\{\Delta \mathbf{u}\} \end{aligned} \tag{5-15}$$

Als Abbruchkriterien für den Iterationsprozess im Inkrement dienen:

- Versagen gemäß Tabelle 3-1 , z.B. Materialversagen;
- Unterschreiten der zugelassenen Toleranz (TOL) zweier aufeinander folgender Iterationsschritte (siehe Gleichung (5-15));
- Überschreiten einer maximalen Anzahl von Iterationen ohne erkennbare Konvergenz bzw. ohne erkennbares Versagen (Prüfung auf negativ definierte Systemsteifigkeitsmatrix in zwei aufeinander folgenden Iterationsschritten). Hierbei werden pauschal 500 Iterationen angenommen.

Die konkreten Abbruchkriterien sind von der zu untersuchenden Problemstellung abhängig und werden daher in den jeweiligen Annahmen und Vorbetrachtungen dargestellt. Da im Sinne der vollständigen Zuverlässigkeitsanalyse nur die Auswertung der Funktion $I[g(\mathbf{X})]$ gemäß Gleichung (3-21) interessiert, kann je nach Versagenstyp und Stabilitätsverhalten der Stütze (siehe Abb. 2-1) bereits nach wenigen (ca. 3-6) Iterationsschritten abgebrochen werden. Dies ist insbesondere bei konvergenten Konfigurationen bis ca. 90% der Traglast und bei hohen Lasten ab ca. 110 % der Traglast der Fall. Lediglich im divergenten Traglastbereich nach Abb. 5-11 sind teilweise 10-30 Iterationen notwendig.

5.2.5 Modellierung von Randbedingungen

Auflager- und Lasteinleitungspunkte stellen Zwangsbedingungen dar, deren Verformungen bzw. Lastkomponenten von außen auf die Stahlbetonstütze einwirken. Zur eindeutigen Lösbarkeit der generellen Gleichgewichtsgleichung (2-12) müssen entsprechende Auflager- bzw. Lastbedingungen an den Knoten des Finiten Elemente Modells definiert werden.

In NLCS müssen für alle Freiheitsgrade der Knotenpunkte entsprechende Randbedingungen des Dirichlet- oder Neumannstyps erfasst werden. Damit ist es generell möglich, entsprechende stationäre Verformungen und Lasten in ein strukturmechanisches System

einzutragen und die Systemantwort zu berechnen. Durch die Vorgabe einer Dirichlet-Bedingung, z.B. $u_i=0$, wird ein Auflager definiert, wodurch an dieser Stelle die Auflagerkraft als Unbekannte in der Gleichgewichtsgleichung auftritt. Ist im gegenteiligen Fall in \mathbf{P}_a eine Kraft angegeben (Neumann-Bedingung), so werden die Verschiebungsfreiheitsgrade in \mathbf{u} als Unbekannte berechnet.

Für Gleichungssysteme mit Randbedingungen des Dirichlet- und Neumannstyps (d.h. Unbekannte auf beiden Seiten der Gleichung) wird in den im Abschnitt 5.1.3 erwähnten Numerikklassen [Brüggemann-07] ein Algorithmus bereitgestellt.

5.2.6 Validierung des strukturmechanischen Modells

Wie bereits in den Kapiteln 2.5.1 und 5.2.4.2 dargestellt, ist es notwendig, die Nutzbarkeit eines implementierten strukturmechanischen Modells aufgrund der vorgenommenen Idealisierungen und numerischen Lösungsansätze nachzuweisen. Dabei ist es zusätzlich von Interesse, inwieweit die numerischen Eingangsparameter (z.B. Integrationsgenauigkeit, Anzahl der Elemente) Auswirkungen auf die Lösung haben.

Bei der Implementierung des Programms NLCS wurden zahlreiche Vergleichsrechnungen durchgeführt, die hier nicht im Einzelnen dargestellt werden können. Exemplarisch werden daher die im folgenden Abschnitt dokumentierten Versuchsreihen von KORDINA [Kordina-76] und eigene Versuche [Schwuchow-07] zur Validierung herangezogen. Beide Versuchsreihen beinhalten zum überwiegenden Teil Stützen mit bi-axialer Beanspruchung. Die eigenen Versuchsergebnisse bieten sich insbesondere zur Prüfung der Konvergenz einer lastgesteuerten Berechnung an, da die kompletten Lastverformungskurven vorliegen. Die Versuchsreihe von KORDINA wird zum reinen Traglastvergleich herangezogen.

5.2.6.1 Gegenrechnung von Traglastversuchen auf Systemebene

In der Tabelle 5-4 und Tabelle 5-5 werden die Traglasten, welche in den Versuchen ermittelt wurden, der rechnerischen Traglast des implementierten strukturmechanischen Verfahrens (Programm NLCS) gegenübergestellt.

Tabelle 5-4: Ergebnisvergleich der 480701-Versuchsreihe (Anlage 1)

Programm	f_c	$-\varepsilon_{c1}$	E_{cm}	N_{exp}	N_{cal}	N_{cal}/N_{exp}
480701	[N/mm ²]	1/1000	[N/mm ²]	[kN]	[kN]	-
VK 3	35,9	2,29	31374	204	210	1,03
VK 4	35,2	2,28	31134	153	146	0,95
VK 5	47,0	2,45	34293	184	177	0,96
VK 6	40,6	2,36	32654	138,5	137	0,99
VK 7	50,5	2,50	35109	206	189	0,92
VK 8	58,6	2,59	36900	204	209	1,02

Tabelle 5-5: Ergebnisvergleich der KORDINA-Versuchsreihe

Stahlbeton- stütze	f_c [N/mm ²]	$-\varepsilon_{c1}$ 1/1000	E_{cm} [N/mm ²]	N_{exp} [kN]	N_{cal} [kN]	N_{cal}/N_{exp} -
S IIIa	41,17	2,37	33074	115	131	1,14
S IIIb	32,39	2,24	30533	332	333	1,00
S IIIc	32,00	2,23	30409	54	57	1,06
S IIIId	34,93	2,28	31310	220	299	1,36 ¹³
S IVa	26,24	2,12	28464	130	140	1,08
S Ivb	28,98	2,17	29419	75	75	1,00
S Ivc	35,51	2,29	31484	296	345	1,17
S Ivd	41,56	2,38	33178	224	215	0,96
S Va	34,05	2,26	31045	125	107	0,86
S Vb	41,37	2,38	33126	150	127	0,85
S VI	33,66	2,26	30926	270	243	0,90
S VII	28,98	2,17	29419	173	154	0,89
S VIII	27,12	2,14	28778	450	431	0,96
S IX	28,59	2,17	29287	376	334	0,89
S X	28,00	2,16	29086	460	343	0,75
S XI	28,68	2,17	29320	304	250	0,82
S XII	24,78	2,09	27925	550	524	0,95
S XIII	25,07	2,10	28035	450	418	0,93

Als numerische Eingangsparameter wurden zunächst folgende Bedingungen definiert.

- Diskretisierung mit 10-FE-Balkenelementen
- schrittweise Laststeigerung um 1 kN zur Bestimmung einer möglichst exakten Last-Verformungskurve
- Verwendung des Betonmodells nach Gleichung (2-13) ohne „tension stiffening“
- Materialparameter ε_{c1} nach Gleichung (2-14)
- Toleranz $TOL = 0,01$, angewendet auf die Ungleichgewichtskräfte gemäß Gleichung (5-15)
- Querschnittsintegrationsindex 3 (12 Dreiecke)
- Gauß-Punkt-Integration 3. Ordnung
- Dämpfungsfaktor $\delta = 0,5$ im divergenten Traglastbereich

Die Parameter der Stützenversuche und die grundlegenden Materialparameter für die KORDINA-Versuchsreihe sind in Anlage 2 aufgeführt. Anlage 1 dokumentiert die Daten der eigenen Versuche.

Die Stütze VK 3 der 480701-Versuchsreihe dient beispielhaft der Gegenrechnung des Kraft-Verformungsverhaltens mittels der o. g. numerischen Eingangsparameter. Zusätz-

¹³ Es wurde bereits in [Kordina-76] angemerkt, dass die Stütze S IIIId eine sehr geringe experimentelle Traglast aufweist. Explizite Gründe werden nicht gegeben.

lich wurde die Stütze mit dem Programm Stab 2dNL [Pfeiffer-04] nachgerechnet, welches in der Arbeit von PFEIFFER validiert wurde. Dies ist möglich, da es sich bei der Stütze um eine einachsige exzentrische Beanspruchung handelt. Die Ergebnisse der Berechnungen der Last-Verformungskurve werden für die mittige Stützensauslenkung in Abb. 5-12 dargestellt.

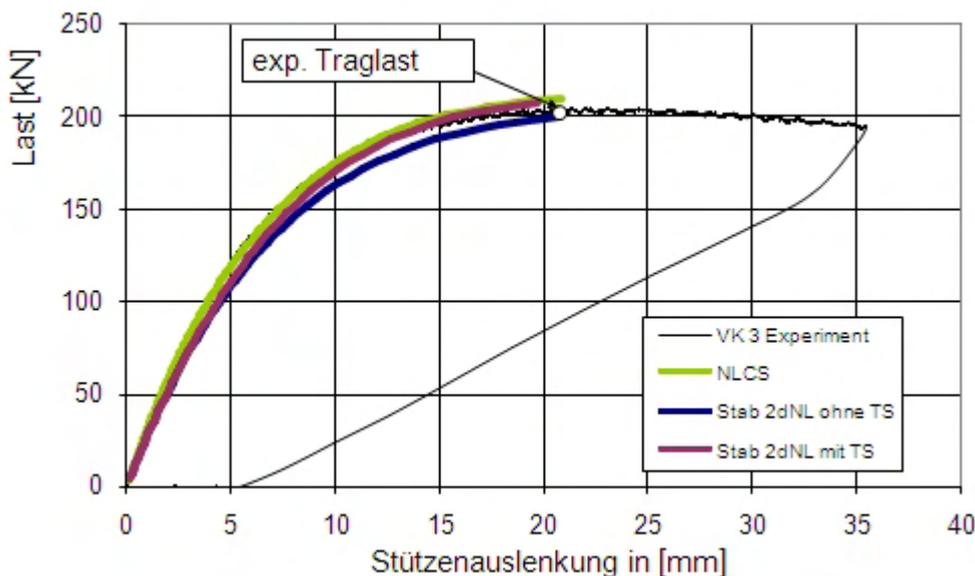


Abb. 5-12: Vergleich des Last-Verformungsverhaltens der Stütze VK 3

Deutlich erkennbar ist, dass beide Programme das Tragverhalten der Stütze sehr gut abbilden. Aufgrund des lastgesteuerten Berechnungsansatzes (siehe Abschnitt 5.2.4) brechen die Programme im Indifferenzpunkt ab. Ergänzend wurde der „tension stiffening“ Effekt unter Beachtung eines Betongesetzes auf Zug (siehe Kapitel 2.5.4) mit Stab 2dNL modelliert. Der Einfluss dieses Effektes ist jedoch bei der Stütze sekundär, wie Abb. 5-12 zeigt.

Die Gegenüberstellung der Traglasten zeigt die Tauglichkeit des implementierten strukturellen Modells. Hinsichtlich der Validierung der genutzten Finiten Elemente wird zusätzlich auf die Arbeit von [Backes-94] verwiesen, in welcher prinzipiell ein ähnlicher Ansatz für die Finiten Elemente genutzt wird.

5.2.6.2 Einfluss der numerischen Eingangsparameter

In Tabelle 5-6 werden die Auswirkungen unterschiedlicher Integrationsgenauigkeiten und Systemdiskretisierungen analysiert. Nicht untersuchte numerische Parameter wurden dabei aus dem Abschnitt 5.2.6.1 übernommen. Abweichend wurde eine lineare Laststeigerung von 0,1 kN eingestellt.

Die Lösung des Traglastversuches der Stütze VK 3 (Anlage 1) dient als Basis. Der zu erwartende Einfluss der Systemdiskretisierung ist deutlich erkennbar, während sich die Anzahl der triangulierten Dreiecke kaum auf die Lösung der quadratischen Stütze auswirkt.

Tabelle 5-6: Numerischer Einfluss auf die Traglast der Stütze VK 3

Anzahl der Elemente	2	4	8	10	50
Integrationsindex	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
2 (6 Dreiecke)	214,0	210,0	209,3	209,1	208,9
3 (12 Dreiecke)	215,6	210,4	209,5	209,3	209,1
5 (34 Dreiecke)	215,8	209,8	208,5	208,5	208,3
6 (64 Dreiecke)	215,7	209,9	208,8	208,7	208,4
adaptiv ¹⁴	215,7	209,9	208,8	208,7	208,4

Insgesamt bleibt festzustellen, dass für die untersuchten Traglastberechnungen mit mittlerer Diskretisierungsdichte (8-10 Elemente) der auftretende Konvergenzfehler auch bei geringer Dreiecksanzahl unerheblich ist. Für stark unsymmetrische Querschnitte kann die Anzahl der Dreiecke von der in Tabelle 5-6 genannten Anzahl abweichen.

5.2.7 Analyse der Modellunsicherheit

Naturgemäß sind Abweichungen zwischen der rechnerischen Stützentragsfähigkeit und der experimentellen Traglast unvermeidbar, wie Tabelle 5-5 und Tabelle 5-4 auf Basis der Nachrechnung von Stützenversuchen verdeutlichen. Ursachen sind vor allem notwendige Idealisierungen bei der Modellierung des Tragverhaltens, wie sie im Kapitel 2 ausführlich dargestellt wurden.

Modellunsicherheiten für die im Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Grenzzustandsgleichungen sind in der Literatur bisher nicht oder nur in Ausnahmefällen zu finden. Die Auswertung vergleichbarer probabilistischer Analysen des Schrifttums (u. a. [Six-01], [Strauss-07], [Vismann-95] sowie [JCSS-00]) zeigt, dass bisher kaum konkrete Ergebnisse zu Modellunsicherheiten vorliegen. Ein einheitliches Konzept zur Beschreibung der Modellunsicherheit in Form eines Modellfaktors existiert ebenfalls bisher nicht und muss daher vor allem auf der Grundlage gemessener Daten entwickelt werden.

¹⁴ Bei der adaptiven Berechnung wird der Integrationsindex solange vergrößert, bis zwischen zwei aufeinander folgenden Integrationen keine signifikante Abweichung vorliegt.

5.2.7.1 Methoden und Konzepte der Modellunsicherheit

Wie KORTENHAUS [Kortenhaus-03] ausführlich diskutiert, hängen die Methoden zur Erfassung der Modellunsicherheiten stark von der Kondition der Daten und deren Gegenüberstellung ab. Es werden grundsätzlich drei mögliche Konzepte angeführt:

- additiver Ansatz,
- multiplikativer Ansatz,
- kombinatorischer Ansatz.

In Abb. 5-13 werden die prinzipiellen Konzepte der unterschiedlichen Ansätze verdeutlicht.

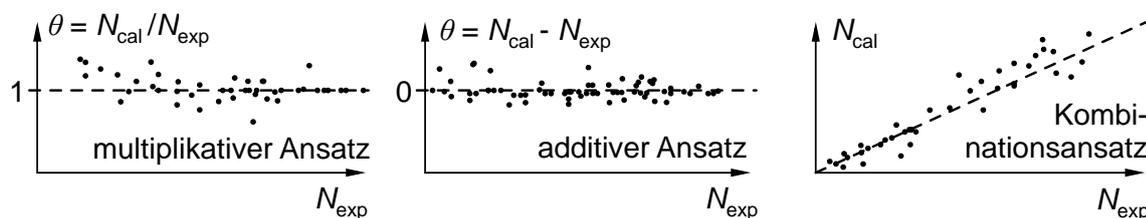


Abb. 5-13: Beschreibungsmöglichkeiten von Modellunsicherheiten [Kortenhaus-03]

Liegt im Fall der Gegenüberstellung der Kenngrößen eine Abweichung unabhängig von der Basisgröße vor, sollte der additive Ansatz zur Anwendung kommen. Es wird angenommen, dass alle gemessenen Daten unabhängig vom Betrag der Eingangswerte von den durch das Modell vorhergesagten Ergebnissen abweichen. Ist die Abweichung jedoch abhängig von der Basisgröße, wird der multiplikative Ansatz in Bezug auf das relative Verhältnis angewendet. Eine Kombination beider Effekte wird im dritten Ansatz aufgegriffen. Für die Ansätze werden in [Kortenhaus-03] Formeln zur Verfügung gestellt, mit deren Hilfe man einen Modellfaktor ermitteln kann. Der Modellfaktor ist eine Rechengröße, mit der das durch ein Modell berechnete Ergebnis korrigiert wird, um das tatsächliche Ergebnis zu erhalten.

5.2.7.2 Anwendung auf die Grenzzustandsfunktion für schlanke Stahlbetonstützen

Auf Basis der Traglastvergleiche nach Abschnitt 5.2.6.1 soll ein Ansatz für die Modellunsicherheiten für das in dieser Arbeit verwendete deterministische Modell ausgewählt werden. Aufgrund der Kondition der Daten wird der multiplikative Ansatz genutzt. Bei diesem Ansatz ist der Modellfaktor θ , wie folgt definiert:

$$\theta = \frac{N_{\text{cal}}}{N_{\text{exp}}} \quad (5-16)$$

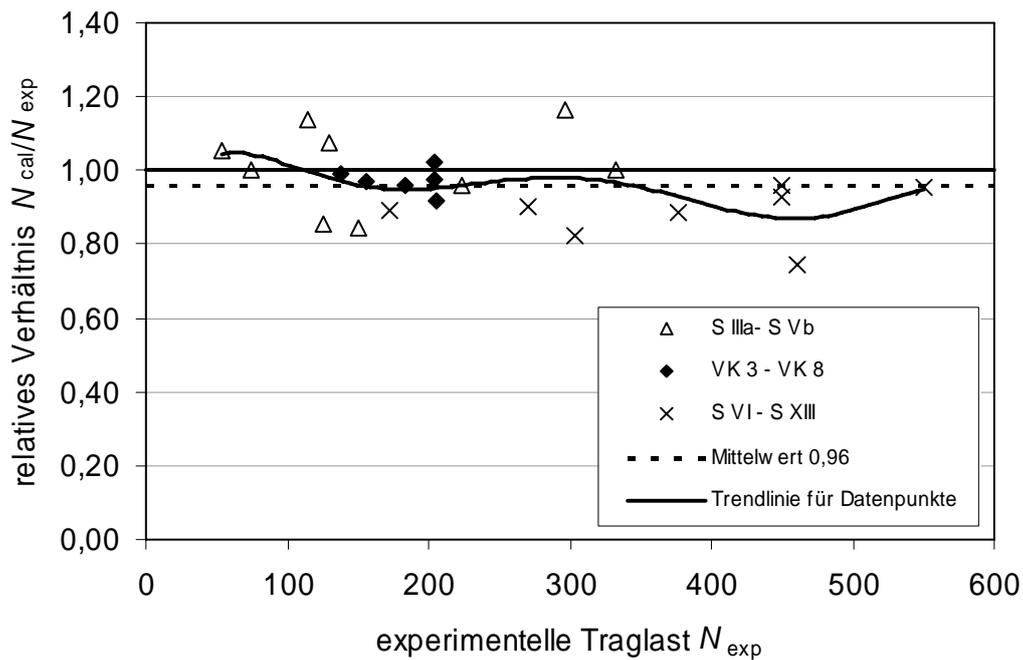


Abb. 5-14: Relativer Vergleich der Traglasten nach Tabelle 5-5 und Tabelle 5-4

In Abb. 5-14 ist ersichtlich, dass bei einer relativen Auftragung der Datenpunkte über die experimentelle Traglast die Abweichungen annähernd konstant sind. Demgegenüber ist aus folgender absoluter Darstellung Abb. 5-15 ersichtlich, dass die Abweichungen mit steigender Traglast zunehmen.

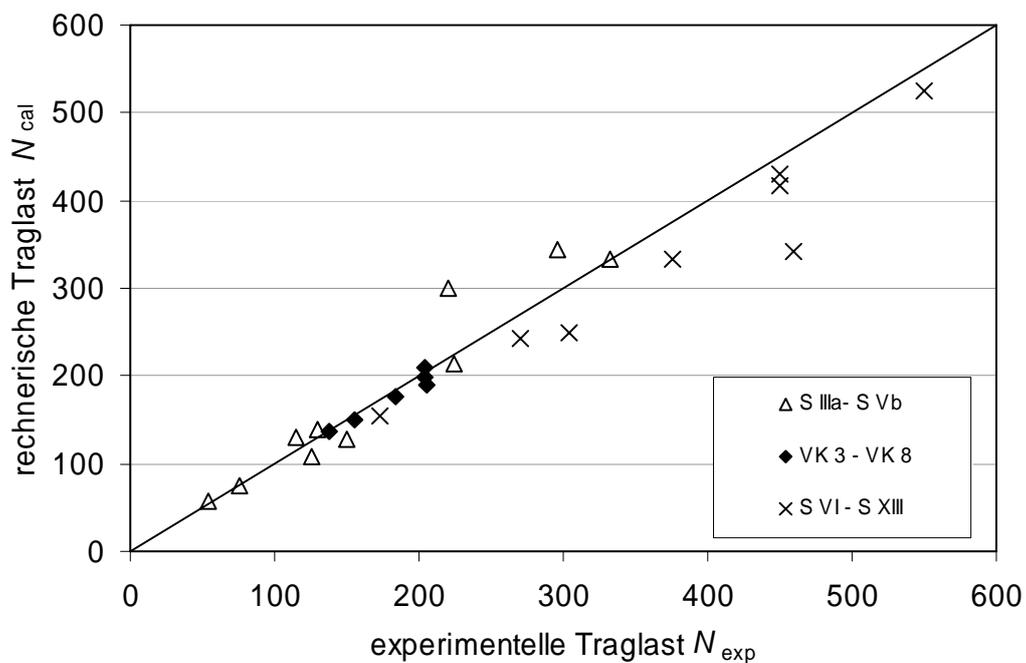


Abb. 5-15: Vergleich der Traglasten nach Tabelle 5-5 und Tabelle 5-4

Basierend auf diesen Betrachtungen ist die Annahme eines multiplikativen Ansatzes gerechtfertigt. Bei der Ermittlung eines geeigneten Modellunsicherheitsfaktors unter Beachtung der physikalischen Zusammenhänge zwischen experimentellen und berechneten Traglasten ist es sinnvoll, die Standardabweichung und den Mittelwert aus den Versuchsreihen zu berechnen. Folgende Tabelle 5-7 gibt die Ergebnisse der Auswertung an.

Tabelle 5-7: Statistische Auswertung der Modellunsicherheit

Auswertung	Menge	Mittelwert μ_θ	Standardabweichung σ_θ	Variationskoeffizient CV
KORDINA + 480701 Versuchsreihe	24	0,98	0,127	0,130
KORDINA ¹⁵ + 480701 Versuchsreihe	23	0,96	0,099	0,103

Im betrachteten Fall zeigt der Mittelwert eine gute Übereinstimmung des Modells mit der Wirklichkeit. Liegt der Wert oberhalb von 1,0, so unterschätzt das Modell die realen Traglasten und muss angepasst werden. Hier ist keine Anpassung notwendig, da der Wert bei etwa 0,96 leicht unterhalb von 1,0 liegt. Der Variationskoeffizient beläuft sich auf ca. 10%. Wie bereits im Abschnitt 3.3.1 erläutert, könnte bei der Ermittlung der Modellunsicherheiten die Extremwertverteilung EV-III, welche auch als Weibull-Verteilung bezeichnet wird, als schiefe Verteilung herangezogen werden. Für etwaige statistische Anpassungen ist die vorhandene Datenmenge jedoch zu gering. Im Rahmen des in den folgenden Kapiteln dargestellten probabilistischen Modells wird daher von einer Normalverteilung für den Modellunsicherheitsfaktor ausgegangen.

5.2.7.3 Zusammenfassung

Modellunsicherheiten für die beschriebenen Grenzzustandsgleichungen sind in der Literatur bisher nicht oder nur in Ausnahmefällen zu finden. Die statistische Auswertung der Traglastberechnungen verschiedener Versuchsreihen unter Annahme eines multiplikativen Modellansatzes zeigt die Güte des deterministischen Modells. Als weiteres Resultat dieser Untersuchungen kann für die Modellierung der Unsicherheit ein normalverteilter Faktor $N(1,0;0,1)$ ermittelt werden.

¹⁵ Reduziert um den Versuch S III d.

5.3 Das auf der Quasi-Monte Carlo Methode basierende stochastische Modell

5.3.1 Vorbemerkung

Sowohl die Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens, ihre Wechselwirkungen und Versagensmechanismen (vgl. Tabelle 3-1) als auch die entsprechenden Eingangsparameter sind mit Unsicherheiten behaftet (siehe Kapitel 2.1). Neben der Entwicklung eines probabilistischen Modells ist es daher Hauptziel dieses Kapitels, die erforderlichen Größen dieser Unsicherheiten zu diskutieren und sie für die Bestimmung der Eingangsparameter und Modelle anzuwenden. Unter Eingangsparametern versteht man die, für die Berechnung der Grenzzustandsgleichungen (Gleichung (3-17)) benötigten, Einflussgrößen.

Wie bereits im Kapitel 3.3.1 dargelegt, ist die Art der statistischen Verteilung bei den meisten Eingangsparametern nicht direkt aus den Gegebenheiten eines Zufallsprozesses ableitbar. In verschiedenen Hinweisen im Schrifttum finden sich unterschiedliche Angaben zu Verteilungstypen einzelner Parameter, wobei jedoch nur wenige auf entsprechender Datenbasis und Anpassungstests beruhen.

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse dieser Arbeit zu gewährleisten, werden die Verteilungstypen für die Parameter vorrangig aus dem JCSS [JCSS-00] und der Arbeit von SIX [Six-01] übernommen.

5.3.2 Unsicherheiten der Parameter

5.3.2.1 Beton

Die Festigkeit des Betons auf Druck wird durch die Streuung der relevanten Betonparameter (Herstellungsbedingungen, w/z-Wert, Zuschläge, Zusätze, Temperatur, Nachbehandlung, usw.) beeinflusst. Diese Tatsache führt zu komplexen Modellen, welche die Berücksichtigung mehrerer spezifischer Informationen erfordern. Ein entsprechendes Verfahren wird beispielsweise im JCSS angegeben. Da einige dieser Informationen jedoch nicht vorliegen bzw. nicht klassifiziert sind, bedarf es einer geeigneten Verteilungsfunktion für die Streuung der Betondruckfestigkeit f_{cm} . Entsprechende Untersuchungen werden in [CEB 202-91] und [Taerwe-06] aufgeführt.

Die Betondruckfestigkeit f_{cm} ist eine Zufallsvariable, welche im Allgemeinen durch eine Normal- bzw. Log-Normalverteilung modelliert werden kann. Aktuelle Bemessungsnormen geben auf der Grundlage der Erkenntnisse der in [CEB 202-91] dargestellten Untersuchungen von Betonproben folgenden Zusammenhang zwischen dem Mittelwert der Betondruckfestigkeit und dem 5%-Quantil an.

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ N/mm}^2 \quad (5-17)$$

Die Standardabweichung σ_c für die Betondruckfestigkeit von Normalbeton beträgt bei einem 5%-Quantilkoeffizienten von 1,645 generell:

$$\sigma_c = \frac{8 \text{ N/mm}^2}{1,645} \approx 5 \text{ N/mm}^2. \quad (5-18)$$

Daraus resultiert ein variabler Variationskoeffizient (CV), der mit steigender Betongüte abnimmt, wie Tabelle 5-8 verdeutlicht.

Tabelle 5-8: Statistische Kenngrößen für Beton unter Druckbeanspruchung

Beton	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
$f_{cm} \text{ [N/mm}^2\text{]}$	28	33	38	43	48	53	58
$\sigma_c \text{ [N/mm}^2\text{]}$	5	5	5	5	5	5	5
CV [%]	17,9	15,2	13,2	11,6	10,4	9,43	8,62

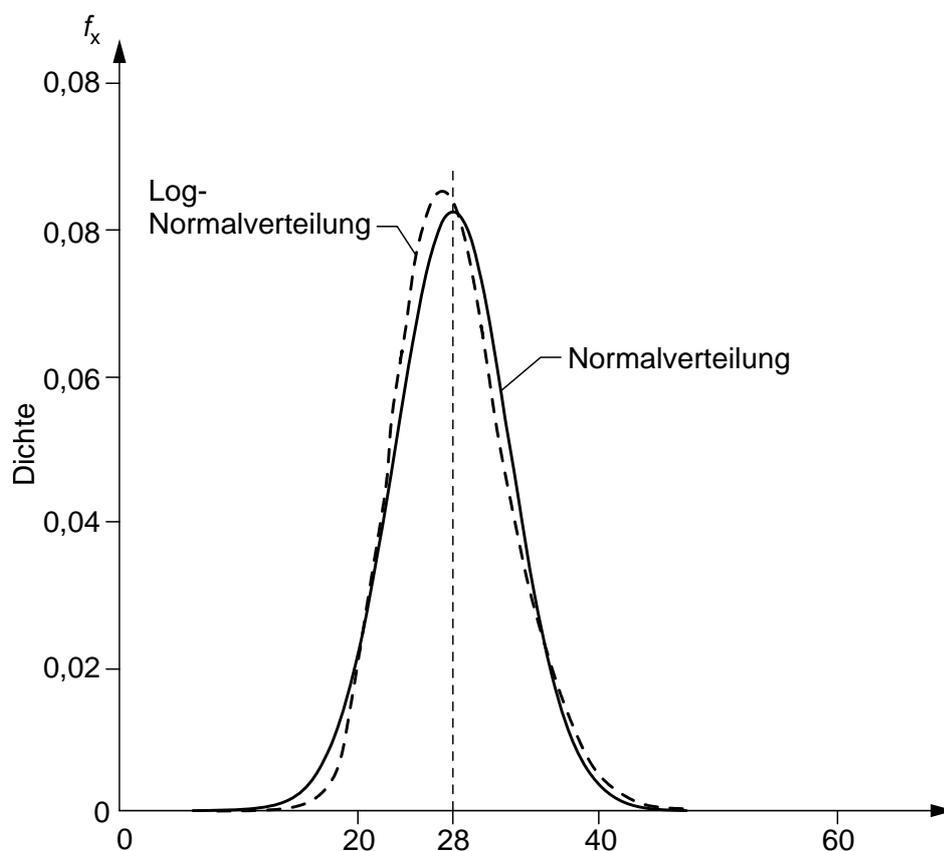


Abb. 5-16: Verteilungsfunktionen für Beton C20/25

Für Zuverlässigkeitsanalysen von Stahlbetonkonstruktionen wird sehr häufig eine Log-Normalverteilung (siehe Abb. 5-16) für den Beton auf Druck angewendet. Entsprechende Annahmen kommen unter anderem in [Bergmeister-06], [Kleinschmitt-03], [Six-01] und dem [JCSS-00] zum Einsatz.

Die Abb. 5-16 zeigt, dass die Normal- und die Log-Normalverteilung sehr ähnlich sind, wobei jedoch bei der Log-Normalverteilung eine geringe Linksschiefe erkennbar ist. Als vorteilhaft erweist sich die Tatsache, dass bei der Log-Normalverteilung nur positive Realisierungen auftreten.

Für den Verteilungstyp der Grundgesamtheit gelten dabei entsprechende formelmäßige Zusammenhänge nach Tabelle 3-2.

Gemäß der bereits im Kapitel 3.3.2 dargelegten korrelativen Zusammenhänge muss bei einer probabilistischen Systembetrachtung die Modellierung der Streuung unter Beachtung der nichtlinearen Korrelationsfunktionen (3-13) und (3-14) erfolgen.

$$E_{c0m} = \alpha_E \cdot f_{cm}^{1/3} \quad (3-13)$$

mit: α_E ... Korrelationsfaktor für den Tangentenmodul

$$f_{ct} = \alpha_{ct} \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3-14)$$

mit: α_{ct} ... Korrelationsfaktor für die Zugfestigkeit

Durch die Korrelation der Zugfestigkeit und des Tangentenmoduls zur Betondruckfestigkeit ist es möglich, den aktuellen Korrelationsfaktor streuend zu modellieren. Die resultierenden Streuungen beider Größen entsprechen dabei näherungsweise dem des Korrelationsfaktors.

Der Mittelwert der Vorfaktoren wird gemäß [JCSS-00] mit $\alpha_E = 9500$ und $\alpha_{ct} = 0,3$ angenommen. Für beide Vorfaktoren werden Log-Normalverteilungen mit konstanten Variationskoeffizienten ($CV_E = 0,15$, $CV_{ct} = 0,3$) angesetzt.

5.3.2.2 Betonstahl

Die für das Materialgesetz des Betonstahls notwendigen mechanischen Beziehungen wurden bereits im Abschnitt 2.5.3 angegeben. Hauptsächlich stochastische Parameter zur Beschreibung des probabilistischen Verhaltens sind die Streckgrenze, der Stahlquerschnitt A_s sowie der Elastizitätsmodul E_s . Tabelle 5-9 zeigt einen Überblick ausgewählter Literaturquellen.

Tabelle 5-9: Stochastische Basisvariablen für Betonstahl BSt 500

Basisvariable	Typ	Mittelwert	Standardabweichung σ	Variationskoeffizient CV	
[JCSS-00]	f_y	LN	560 N/mm ²	30 N/mm ²	-
	A_s	N	$A_{s,nom}$	-	0,02
	E_s	DET	205.000 N/mm ²	-	-
[Six-01]	f_y	LN	550	33 N/mm ²	-
	A_s	N	$A_{s,nom}$	-	0,02
	E_s	DET	200.000	-	-
[Strauss-07]	f_y	LN	582	-	0,05
	A_s	DET	$A_{s,nom}$	-	-
	E_s	N	210.000	-	0,03
[Vismann-95]	f_y	LN	560	30	-
	A_s	N	$A_{s,nom}$	-	0,025
	E_s	DET	210.000	-	-

In Anlehnung an [Six-01] wird für die Streckgrenze eine Log-Normalverteilung (LN) und ein Variationskoeffizient von 6% angenommen. Die Parameter der Verteilungsfunktionen ergeben sich für Betonstahl BSt 500 daher wie folgt:

$$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{e^{-1,645 \cdot CV}} = \frac{500 \text{ N/mm}^2}{e^{-1,645 \cdot 0,06}} = 551,8 \text{ N/mm}^2 \approx 550 \text{ N/mm}^2 \quad (5-19)$$

$$\sigma = f_{ym} \cdot CV = 550 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,06 = 33 \text{ N/mm}^2.$$

Die Streuung des Elastizitätsmoduls ist sehr gering. Der charakteristische und mittlere E-Modul des Bewehrungsstahls wird daher als deterministische Größe (DET) mit $E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$ angenommen. Ergänzende Untersuchungen zur Abschätzung der Sensitivität des E-Moduls sind normalverteilt mit CV= 3 % durchgeführt worden.

Wie in [Kleinschmitt-03] dargestellt, lassen Bemessungsnormen ([DIN 1045-01]) eine Unterschreitung des Nennquerschnittes der Bewehrungsstäbe um 4% zu. Daraus er-

rechnet sich unter Annahme einer Normalverteilung ein Variationskoeffizient von $CV=2,4\%$.

5.3.2.3 Geometrie

In Bezug auf [Casciati-91] wird davon ausgegangen, dass sich die Größenordnung der Abweichungen lediglich durch die Art der Herstellung und der Abmessung der Stütze ergibt. Im Allgemeinen werden geometrische Abmessungen mit einer Normalverteilung variiert, bei der eine einheitliche Standardabweichung von $\sigma=5$ mm angesetzt wird. Dabei wird von einer Identität des Mittelwertes mit den Nennabmessungen ausgegangen. Für ergänzende Informationen zur Streuung geometrischer Abmessungen im ausgeführten Zustand wird auf MAAß et al. [Maaß-76] verwiesen.

Abweichungen der Betondeckung durch herstellungsbedingte Fertigung werden durch Streuung der Lage der Bewehrung modelliert. Diese Abweichungen entstehen beispielsweise durch zu kleine Bewehrungskörbe. Die Angaben des JCSS [JCSS-00] führen als Größenordnung für die Standardabweichung ebenfalls $\sigma=5$ mm an.

In einer generalisierten Modellierung des Stahlbetonquerschnittes durch Einzelquerschnitte (siehe Abschnitt 5.2.2) erweist sich die Erfassung einer streuenden Betondeckung von Stahlbetonstützen als problematisch. Prinzipiell ist es zwar möglich, einzelne Bewehrungspunkte in ihrer Mittelpunktlage zu verschieben, jedoch besteht dann ein korrelativer Zusammenhang zur Verschiebung der weiteren Bewehrungspunkte, abhängig von dem Bewehrungskorb und dessen Verschiebung. Bis auf [Maaß-76] liegen bisher keine ausführlichen Untersuchungen zu diesem Thema vor.

5.3.2.4 Ständige Einwirkungen

Ständige Einwirkungen präsentieren gemäß JCSS [JCSS-00] primär das Eigengewicht der tragenden und nichttragenden Struktur. Die Charakteristik des Eigengewichts kann durch folgende Punkte beschrieben werden.

- Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein der Last zu einem beliebigen Zeitpunkt ist annähernd 1,0 (ständige Last).
- Die Schwankungen in der Zeit sind vernachlässigbar.
- Die Streuungen sind vergleichsweise klein in Bezug auf weitere Lasttypen.

Wie in [Kleinschmitt-03] dargestellt, resultieren die Schwankungen des Eigengewichts vorrangig aus Abweichungen geplanter Bauteilabmessungen (gemäß Abschnitt 5.3.2.3) und geringen Dichteveränderungen der verbauten Materialien. In Tabelle 5-10 sind die Dichten für verschiedene Betone gezeigt.

Die üblichen Ansätze gehen daher von einer Normalverteilung mit einem Variationskoeffizienten von $CV=10\%$ aus ([Six-01], [Vismann-95]). Die charakteristischen Nor-

mangaben [1055-1] beziehen sich im Übrigen auf den 50% Fraktilwert und entsprechen somit dem Mittelwert der Verteilungsfunktion.

Tabelle 5-10: Kennwerte der Dichten ausgewählter Betone gemäß [JCSS-00]

Material	Mittelwert [kN/m ³]	Standardab- weichung σ
Normalbeton	24	0,04
Hochfester Beton	24-26	0,03
Leichtbeton	variabel	0,04-0,08

5.3.2.5 Veränderliche Einwirkungen

Die probabilistische Modellierung veränderlicher Einwirkungen ist generell wesentlich komplexer als die der Material- und Geometrieparameter sowie der ständigen Einwirkungen. Sie unterliegen im Allgemeinen einer zeitvarianten Abhängigkeit, so dass die Beschreibung mit Hilfe stochastischer Prozesse bzw. Zufallsfeldern zu erfolgen hat.

Folgende Abb. 5-17 zeigt die zeitabhängige Wirkung einer veränderlichen Last am vereinfachten Modell nach [EC 1-95].

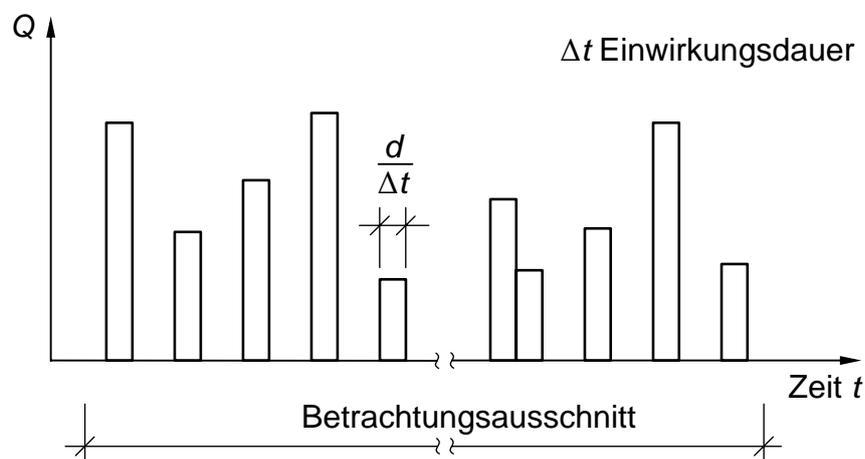


Abb. 5-17: Vereinfachtes Modell einer zeitabhängigen Belastung nach [EC 1-95]

Für die systematischen Untersuchungen schlanker Stahlbetonstützen ist es nicht Ziel führend, komplexe zeitabhängige Modellierungen für veränderliche Belastungen vorzunehmen. Etwaige Untersuchungen, wie sie beispielsweise in [Faber-02] dargestellt sind, erfordern Belastungsszenarien und Untersuchungen zur Herkunft der veränderlichen

Belastung. Diese zeitabhängigen Fragestellungen erhöhen den bereits umfangreichen probabilistischen Berechnungsaufwand je nach Zeitschrittanalyse um ein Vielfaches, was zu keiner praktikablen Lösung führt. Ein Vergleich mit den normativen Sicherheitselementen der nichtlinearen Bemessungsformate (Sicherheitskonzepte) ist zudem nicht mehr gegeben.

Im Rahmen der zeitinvarianten Zuverlässigkeitstheorie kann die veränderliche Belastung näherungsweise durch die Verteilung ihrer Maximalwerte innerhalb eines bestimmten Bezugszeitraums beschrieben werden. Diese Modellierung ist im Sinne der Zuverlässigkeitsanalyse verschiedener Berechnungskonzepte hinreichend und wird bei diversen probabilistischen Modellen herangezogen (u. a. [Six-01], [Kleinschmitt-03], [Vismann-95]).

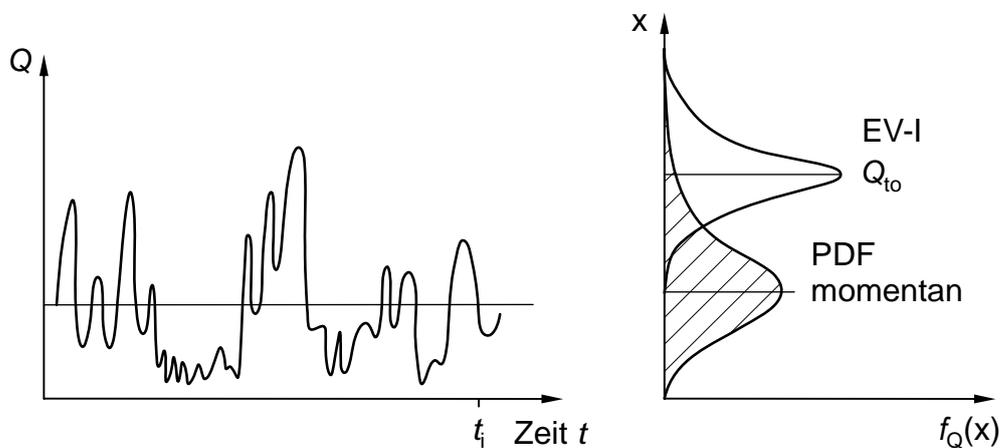


Abb. 5-18: Verteilung der Extremwerte nach [EC 1-95]

Durch Nutzung der Extremwerttheorie (EVT, engl. extreme value theory) wird versucht, die Funktion anzugeben, die der Verteilung der Extrema der veränderlichen Belastung einer wachsenden Anzahl von Zufallsgrößen immer näher kommt. Abb. 5-18 verdeutlicht das prinzipielle Vorgehen. Als mögliche Verteilungsfunktion wird die in Tabelle 3-2 eingeführte Extremwertverteilung EV-I, die auch als Gumbel-Verteilung bekannt ist, herangezogen.

$$f(x) = \lambda e^{-e^{-\lambda(x-\alpha)} - \lambda(x-\alpha)}$$

$$\alpha = \mu - \gamma\sigma\sqrt{6}/\pi \quad (5-20)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}, \quad \gamma \approx 0,5772156649$$

Als Bezugszeitraum werden in der Regel ein Jahr bzw. 50 Jahre gewählt. Die charakteristischen Werte des Bemessungscodes [EC 1-95] beziehen sich meist auf den Größtwert, der nur einmal in dem Referenzzeitraum von 50 Jahren auftritt. Die maximale Last

hat also eine Wiederkehrperiode von 50 Jahren. Die jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit für diesen Größtwert liegt bei 2%, was dem 98%-Quantilwert entspricht. Ergänzend zur Auswahl der Verteilungsfunktion wird ein Variationskoeffizient $CV = 40\%$ festgelegt. Mit dieser Annahme ist die Umrechnung charakteristischer Werte auf Mittelwerte gemäß folgender Gleichung (5-21) möglich.

$$Q_{m,t=1a} = \frac{Q_{k98}}{1 - CV \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot (\gamma + \ln(-\ln(0,98)))} \approx \frac{Q_{k98}}{2,04} \quad (5-21)$$

5.3.2.6 Zusammenfassung der Basisgrößen

In der Tabelle 5-11 sind die streuenden Kenngrößen mit ihren jeweiligen Verteilungstypen und Parametern zusammengestellt. Dabei kommen in dieser Arbeit primär zweiparametrische Verteilungsfunktionen zum Einsatz. Entsprechende Definitionen der Verteilungsfunktionen sind in Tabelle 3-2 gezeigt.

Tabelle 5-11: Statistische Kenngrößen

Basisvariable		Typ	Mittelwert	Standardabweichung σ	Variationskoeffizient	Referenzen
Beton	f_c	LN	f_{cm}	5 N/mm ²	-	[JCSS-00],[Six-01], [Kleinschmitt-03]
	α_E	LN	9500	-	0,15	
	α_{ct}	LN	0,3	-	0,3	
Geometrie	a	N	a_{nom}	5 mm	-	[JCSS-00], [Vismann-95], [Maaß-76]
	b	N	a_{nom}	5 mm	-	
	L	N	L_{nom}	10 mm	-	
Stahl	f_y	LN	550	33	-	[Six-01]
	A_s	N	$A_{s,nom}$	-	0,02	
	E_s	DET	-	-	-	
Einwirkung	G	N	G_k	-	0,1	[EC 1-95]
	Q	EV-I [1/a]	$\frac{Q_k}{2,04}$	-	0,4	
Modell	θ	N	0,96	-	0,1	Tabelle 5-7

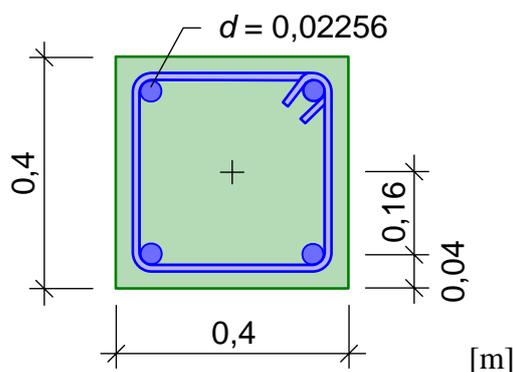
5.4 Validierung des probabilistischen Modells

5.4.1 Validierung anhand eines R - E -Modells

Zur Validierung des entwickelten und implementierten Modells wird im Folgenden beispielhaft die Zuverlässigkeitsanalyse einer zentrisch gedrückten, symmetrisch bewehrten Stahlbetonstütze unter drei verschiedenen Lastvarianten durchgeführt. Es wird vereinfachend unterstellt, dass nur zwei Parameter, die Druckfestigkeit und die Last, streuen. Beide Zufallsvariablen seien zunächst normalverteilt, so dass eine Zuverlässigkeitsanalyse auf Basis des Sicherheitsindex β nach [Hasofer-74] erfolgen kann. Das Zuverlässigkeitsproblem ist dem direkten R - E -Modell nach Abschnitt 3.4.1 äquivalent.

5.4.1.1 Definition des R - E -Modells

Die grundlegenden geometrischen und materiellen Parameter werden in Abb. 5-19 dargestellt.



- Betonparameter für C20/25

$$f_{cm} = 20 + 8 = 28 \text{ N/mm}^2$$

$$N(28;5) \text{ in N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{c2} = -2/1000$$

- Betonstahl BSt 500

Abb. 5-19: Geometrie und Materialparameter

Der Mittelwert des Stützenwiderstandes berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \mu_R &= A_c \cdot f_{cm} + A_s \cdot E_s \cdot |\varepsilon_{c2}| \\ &= 0,4 \cdot 0,4 \cdot 28000 + 4 \cdot (0,5 \cdot 0,02256)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2/1000 = 5120 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (5-22)$$

Die Standardabweichung des Stützenwiderstandes ergibt sich lediglich aus der Streuung der Betonfestigkeit.

$$\sigma_R = A_c \cdot \sigma_c = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 5000 = 800 \text{ kN} \quad (5-23)$$

Um zunächst die stabilitätsbedingten Einflüsse auszuschließen, wird eine idealisierte Stützenlänge von 0,1 m festgelegt. Als Belastungen werden entsprechend folgender Tabelle 5-12 drei Varianten angesetzt, die unterschiedliche Größenordnungen der Versagenswahrscheinlichkeit bewirken. Es soll der Schwerpunkt bei der Berechnung insbesondere kleiner Wahrscheinlichkeiten verdeutlicht werden.

Tabelle 5-12: Lastdefinition der Validierungsbeispiele

numerisches Beispiel	Lastparameter in [kN] $N(\mu; \sigma)$	Hinweise
NB_1	N(2500;1000)	hohe Wahrscheinlichkeit
NB_2	N(2000;500)	mittlere Wahrscheinlichkeit
NB_3	N(1000;500)	geringe Wahrscheinlichkeit

5.4.1.2 Analytische Berechnung

Am Beispiel NB_1 wird das prinzipielle Vorgehen der Berechnung des Sicherheitsindex, der Versagenswahrscheinlichkeit sowie der Wichtungsfaktoren auf analytischem Weg dargestellt. Die Berechnung erfolgt gemäß des klassischen Ansatzes [Schneider-94] und ist entsprechend der Angaben im Abschnitt 3.6 ausgeführt.

$$\beta_{\text{NB}_1} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{5120 - 2500}{\sqrt{800^2 + 1000^2}} = 2,05 \quad (5-24)$$

Unter Beachtung von Gleichung (3-11) entspricht dem Sicherheitsindex eine Versagenswahrscheinlichkeit von:

$$P_f_{\text{NB}_1} = \Phi(-2,04588) = 0,0204. \quad (5-25)$$

Von Interesse sind zusätzlich die Sensitivitäts- bzw. Wichtungsfaktoren, die anzeigen, mit welcher Wichtung die entsprechende Variable am Wert der Versagenswahrscheinlichkeit beteiligt ist. Diese Faktoren errechnen sich zu:

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{800}{\sqrt{800^2 + 1000^2}} = 0,62$$

$$\alpha_E = \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{1000}{\sqrt{800^2 + 1000^2}} = 0,78. \quad (5-26)$$

Zusammenfassend ergeben sich die in der folgenden Tabelle berechneten Lösungen der drei Varianten.

Tabelle 5-13: Analytische Lösung der Validierungsbeispiele

Beispiel	Sicherheitsindex β_{FORM}	Versagenswahrscheinlichkeit P_f	Wichtungsfaktoren
NB_1	2,05	$2,04 \cdot 10^{-2}$	$\alpha_R = 0,62$; $\alpha_E = 0,78$
NB_2	3,31	$4,71 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_R = 0,85$; $\alpha_E = 0,53$
NB_3	4,37	$6,29 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_R = 0,85$; $\alpha_E = 0,53$

5.4.1.3 Versagenswahrscheinlichkeit auf Basis von NLCS

Im Rahmen des implementierten Programms NLCS werden neben den streuenden Variablen und deterministischen Größen weitere Parameter definiert. Diese werden im Folgenden festgelegt:

- Diskretisierung mit 10-FE-Balkenelementen,
- Verwendung des Betonmodells nach Gleichung (2-13) ohne „tension stiffening“,
- Betonstahl BSt 500 nach Abschnitt 2.5,
- Toleranz $TOL = 0,01$, angewendet auf Gleichung (5-15),
- Querschnittsintegrationsindex 3, Gauß-Punktintegration 3. Ordnung,
- adaptiver Dämpfungsfaktor im divergenten Traglastbereich,
- numerische Integrationsgrenze $r=0,0001$ gemäß Abb. 3-14,
- Versatzfaktor $\phi_{\text{offset}} = 0,1$ bei der SA,
- QMC Methode, Sobol' Sequenz unterschiedlicher Realisierungsanzahlen.

Zur ergänzenden Verdeutlichung der Aufgabenstellung wird zunächst die Lösung mittels der Crude Monte Carlo Methode im Parameterraum berechnet. In der folgenden Abb. 5-20 ist somit die implizite Grenzzustandsfunktion des komplett linearen Zusammenhangs dargestellt.

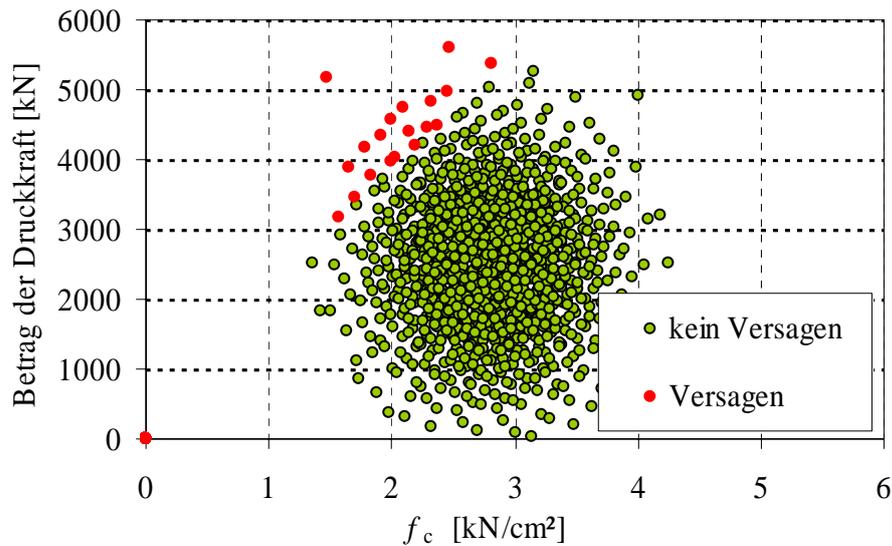


Abb. 5-20: Auswertung der Indikatorfunktion $I[g(\mathbf{X})]$ im Parameterraum für das Beispiel NB_1

Zweckmäßigerweise erfordert eine probabilistische Berechnung die Darstellung in Lösungsdiagrammen. Am Beispiel NB_1 wird äquivalent der analytischen Lösung exemplarisch die Lösung der probabilistischen Fragestellung mit NLCS aufgezeigt, wie folgende Abb. 5-21 des Ergebnisverlaufes zeigt. Die numerische Auswertung von NB_1 liefert einen Wert von $P_f = 2,01 \cdot 10^{-2}$ nach 4096 Simulationen.

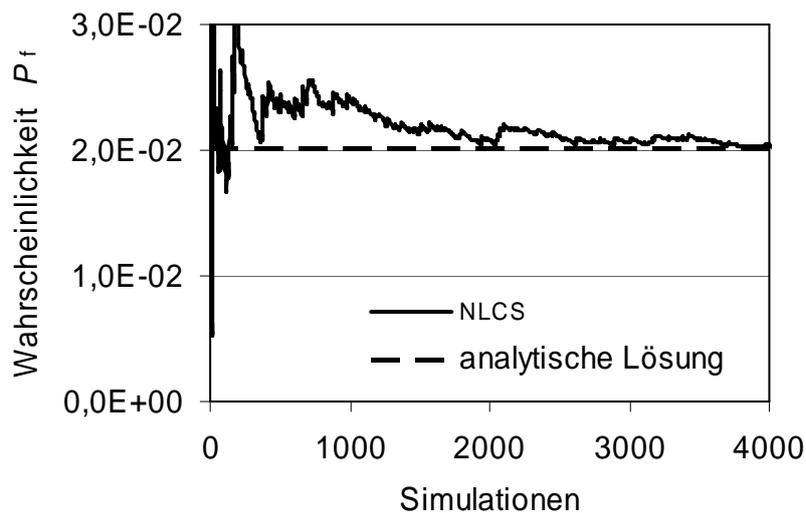


Abb. 5-21: Ergebnisverlauf der Versagenswahrscheinlichkeit am Beispiel NB_1

Ersichtlich ist die Konvergenz zur analytischen Lösung, insbesondere ab ca. 2000 Realisierungen. Es besteht im numerischen Wert der Versagenswahrscheinlichkeit praktisch kein Unterschied mehr.

Es sei daran erinnert, dass bei der Konvergenzbetrachtung der Crude Monte Carlo Methode und der diversen Samplingstrategien bereits Ergebnisplots der Beispiele NB_1 und NB_2 in den Abschnitten 3.7.2 und 3.9 dargestellt wurden. Ferner werden die Ergebnisverläufe der drei Beispiele in Anlage 4 komplett abgebildet, so dass ein Vergleich der NLCS- und der analytischen Lösung für alle Beispiele ermöglicht wird.

In Tabelle 5-14 werden die numerischen Auswertungen nach Erreichen einer offensichtlichen Konvergenz dargestellt. Ergänzend wird der Sicherheitsindex β_{NLCS} aus der Lösung ermittelt und dem analytischen Wert β_{FORM} gegenübergestellt.

Tabelle 5-14: NLCS-Lösungen der Validierungsbeispiele

Beispiel	Anzahl	P_f nach QMC	β_{NLCS}	β_{FORM}	Fehler [%]
NB_1	4096	$2,01 \cdot 10^{-2}$	2,05	2,05	0,0
NB_2	8194	$4,70 \cdot 10^{-4}$	3,31	3,31	0,0
NB_3	32768	$5,86 \cdot 10^{-6}$	4,38	4,37	0,002

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die implementierte QMC Methode in diesem Beispiel eine äußerst schnelle Konvergenz aufweist. Die Versagenswahrscheinlichkeit respektive des Zuverlässigkeitsindex stimmen mit den analytisch berechneten Werten überein.

Schon diese bewusst einfach gewählten Beispiele zeigen jedoch die Komplexität der Lösung in Bezug auf die Parameterwahl und insbesondere auf die Anzahl der notwendigen Simulationen. Zusätzlich soll vor allem durch das Beispiel NB_3 verdeutlicht werden, dass der absolute numerische Wert bei sehr geringen Wahrscheinlichkeiten durchaus größere Abweichungen haben kann. Durch den nichtlinearen Zusammenhang zwischen P_f und β wird dieser Effekt relativiert.

5.4.1.4 Validierung der Sensitivitätsanalyse von NLCS

Anhand der im vorigen Abschnitt dargestellten Beispiele und der im Kapitel 1 beschriebenen Grundlagen wird die Ein-Schritt-Sensitivitätsberechnung auf Basis der Brute-Force-Methode in NLCS validiert. Die Abb. 5-22 zeigt beispielhaft die Ergebnisgrafik für die Ermittlung der Sensitivitätsfaktoren α_{P_f} .

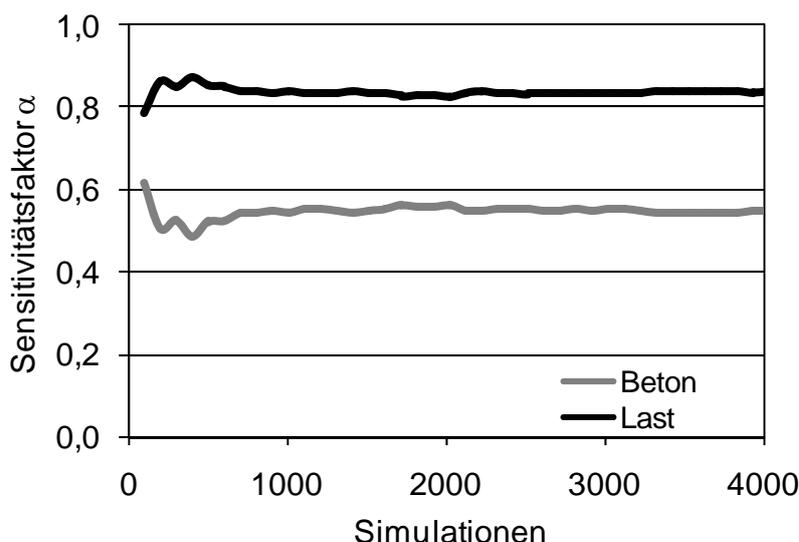


Abb. 5-22: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren des Beispiels NB_1

Die Grafiken für die Beispiele NB_2 und NB_3 sind in Anlage 4 aufgeführt. Die numerischen Werte werden in Tabelle 5-15 den analytischen Ergebnissen aus Tabelle 5-13 gegenübergestellt. Wie bereits im Kapitel 4.4.1 beschrieben, müssen im Zuge der Vergleichbarkeit die Ergebnisse von α_{Pf} auf α_{β} umgerechnet werden. Dies kann mit dem Ansatz der Gleichung (4-11) erfolgen.

Tabelle 5-15: NLCS-Sensitivitätsanalyse der Validierungsbeispiele

Beispiel	Anzahl	NLCS-Lösung				FORM	
		α_{RP_f}	α_{EP_f}	$\alpha_{R\beta}$	$\alpha_{E\beta}$	α_R	α_E
NB_1	4096	0,56	0,83	0,61	0,79	0,62	0,78
NB_2	8194	0,79	0,62	0,85	0,53	0,85	0,53
NB_3	32768	0,75	0,66	0,84	0,54	0,85	0,53

Auch bei der SA lässt sich die gute Performance der QMC Methode von NLCS feststellen. Anzumerken ist die Tatsache, dass die Sensitivitätsfaktoren schneller konvergieren als die Versagenswahrscheinlichkeit selbst. Dieses positive Faktum wurde bereits im Abschnitt 4.4.3 im Zuge der Konvergenz der SA angesprochen. Zur Umrechnung auf α_{β} wird jedoch eine Lösung der Versagenswahrscheinlichkeit benötigt.

5.4.2 Bemerkungen zur Validierung

Mit Bezug auf die durchgeführte Validierung des probabilistischen Modells werden zusammenfassend folgende Schlüsse gezogen.

- Das strukturmechanische Modell ermöglicht die Berechnung des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Tragverhaltens schlanker Stahlbetonstützen.
- Die Verwendung von quasi-random Zahlen verbessert das Konvergenzverhalten der MC Methode.
- Die untersuchten Beispiele zeigen eine strenge Konvergenz und bestätigen die Aussagen der Koksma-Hlawka Ungleichung gemäß Abschnitt 3.8.4.
- Das implementierte probabilistische Modell erlaubt die Zuverlässigkeitsanalyse für beliebige Stahlbetonstützen unter uni- und bi-axialer Belastung.
- Die entwickelte Ein-Schritt-SA auf Basis der Brute-Force Methode ermöglicht die Berechnung von Sensitivitätsfaktoren.

Die grundsätzliche Anwendbarkeit des entwickelten Modells kann somit gezeigt werden. Damit sind die im folgenden Kapitel dargestellten, systematischen Untersuchungen möglich.

6 Systematische Zuverlässigkeitsanalyse schlanker Stahlbetonstützen

6.1 Untersuchungsumfang

Das Untersuchungsprogramm zur systematischen Analyse schlanker Stahlbetonstützen ist mit dem Ziel konzipiert, einen möglichst repräsentativen Bereich hinsichtlich praktischer Anwendungen und theoretischer Fragestellungen abzudecken. Dazu werden sinnvolle Parameterkonfigurationen zusammengestellt.

Die folgenden Punkte stehen im Interesse der systematischen Analyse:

- Angabe der Versagenswahrscheinlichkeit P_f auf Basis der QMC Methode,
- Umrechnung auf den Sicherheitsindex β ,
- uni- und bi-axiale Analysen,
- Ermittlung der Wichtungsfaktoren α_{P_f} und α_β ,
- Erstellung gestapelter Sensitivitätsplots (siehe Abb. 4-1),
- Auswirkungen verschiedener Verteilungsfunktionen auf die Zuverlässigkeitsproblematik,
- Untersuchung der Abhängigkeiten von der Schlankheit λ , der Exzentrizität e_x/h sowie der Betonfestigkeit f_c ,
- Analyse normativer Bemessungskonzepte hinsichtlich eines ausgeglichenen Sicherheitsniveaus.

Die Betrachtungen werden für diverse Geometrie- und Materialparameter mit Hilfe von drei unterschiedlichen Untersuchungsquerschnitten QS1, QS2 und QS3 durchgeführt (siehe Tabelle 6-1). Es handelt sich dabei um symmetrisch bewehrte, rechteckige Querschnitte mit einem Bewehrungsgrad von $\rho = 1\% \dots 2\%$ und einem Randachsabstand von $d_1 = 34$ mm. Im Fall des Untersuchungsquerschnitts QS3 beträgt der Randachsabstand $d_1 = 40$ mm. Als System dient die bereits bei der Validierung verwendete, gelenkig gelagerte Einfeldstütze (siehe Abschnitt 5.2.6 bzw. Abb. 6-1), wobei die Lastausmitten beidseitig gleichgerichtet sind. Aus den Untersuchungen kann direkt auf die Modellstütze des Modellstützenverfahrens [Haro-94] geschlossen werden.

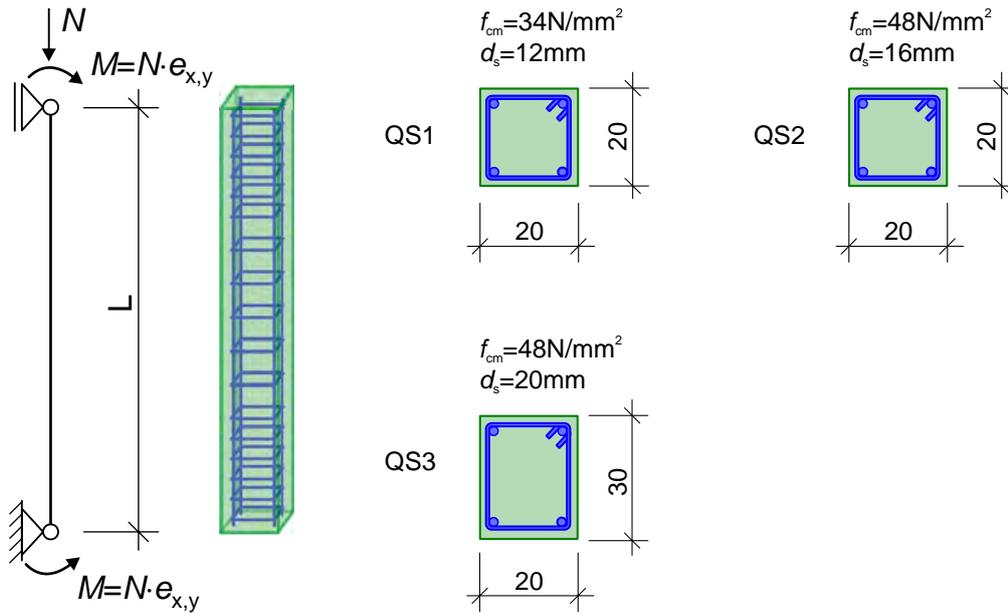
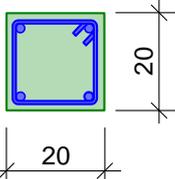
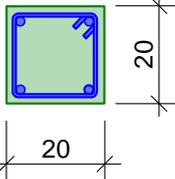
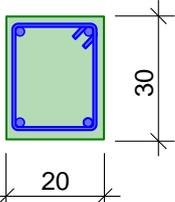


Abb. 6-1: System und Belastung der Stützenanalyse

Tabelle 6-1: Darstellung des Untersuchungsprogramms

Querschnitt	Belastung	Variation	Diagramme
QS1 $f_{cm} = 34 \text{ N/mm}^2$ $d_s = 12 \text{ mm}$ 	uni-axial	e_x	β , P_f , Sensitivitätsplot
		λ , f_c	β , P_f , Sensitivitätsplot
	bi-axial	e_x, e_y	β -Index
QS2 $f_{cm} = 48 \text{ N/mm}^2$ $d_s = 16 \text{ mm}$ 	uni-axial	e_x	β , P_f , Sensitivitätsplot
		λ	β , P_f , Sensitivitätsplot
	bi-axial	e_x, e_y	β -Index, 45° - β , P_f 45° - Sensitivitätsplot
QS3 $f_{cm} = 48 \text{ N/mm}^2$ $d_s = 20 \text{ mm}$ 	bi-axial	e_x, e_y	β -Index

Dem Hauptziel der Arbeit entsprechend wird die Stützenlänge L (0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0; 7,0 [m]) variiert, um die Auswirkungen der steigenden Schlankheit auf die Zuverlässigkeit zu untersuchen. Damit ergeben sich Stützenschlankheiten von $\lambda \approx 0$ bis $\lambda = 121,1$. Des Weiteren werden insgesamt sieben verschiedene Exzentrizitäten e_x (0,0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3 [m]) analysiert. Dies entspricht normierten Werten e_x/h von 0,0 bis 1,5; wobei im Fall von $e_x = 0,0$ m zentrische Belastung vorliegt. Um praxisferne kleine Belastungen zu vermeiden, wird im Rahmen der räumlichen Beanspruchung auf die Betrachtung großer Exzentrizitäten verzichtet. In Tabelle 6-1 ist das Untersuchungsprogramm zusammengefasst.

Dem gesamten Untersuchungsumfang liegen ca. 200 Einzelstudien zugrunde. Die notwendigen Konvergenzschritte des probabilistischen Modells sind der jeweiligen Simulation zu entnehmen.

6.2 Annahmen und Vorbetrachtungen

6.2.1 Numerische Annahmen

Als Grundlage der Untersuchungen wird das im Kapitel 5 entwickelte probabilistische Modell herangezogen. Analog zum Abschnitt 5.4 werden neben den streuenden Variablen und deterministischen Größen weitere Parameter benötigt. Diese sind im Folgenden definiert:

- Diskretisierung mit 10-FE-Balkenelementen,
- Verwendung des Betonmodells nach Gleichung (2-13) ohne „tension stiffening“,
- Betonstahl BSt 500 nach Abschnitt 2.5,
- keine Imperfektionen,
- Toleranz $TOL = 0,01$ angewendet auf Gleichung (5-15),
- Querschnittsintegrationsindex 3, Gauß-Punktintegration 3. Ordnung ,
- adaptiver Dämpfungsfaktor im divergenten Traglastbereich,
- numerische Integrationsgrenze $r=0,00001$ gemäß Abb. 3-14,
- Versatzfaktor $\phi_{\text{offset}} = 0,1$ bei der SA,
- QMC Methode, Sobol' Sequenz unterschiedlicher Realisierungsanzahlen.

6.2.2 Definition der Belastung

Wichtigste Kenngröße der probabilistischen Analyse ist die, auf das zu untersuchende Nachweiskonzept bezogene, Bemessungslast N_{Rd} des jeweiligen Druckgliedes. Als Rechengrundlage wird hierbei das Bemessungswertkonzept des EC2 [EC 2-92] verwendet. In diesem Konzept gehen die Materialeigenschaften mit ihren Bemessungswerten in die nichtlineare Traglastanalyse ein. Es ist sicherzustellen, dass unter den Bemessungswerten der Einwirkungen N_{Ed} ein stabiler Gleichgewichtszustand $N_{Rd} = N_{Ed}$ möglich ist und an keiner Stelle die Grenzdehnungen überschritten werden. Alternativ zum Bemessungswertkonzept wird im Abschnitt 6.3.5 die Zuverlässigkeit des Modellstützenverfahrens untersucht. Die Berechnungen der Belastung erfolgen dabei nach [DIN 1045-01] bzw. den Erläuterungen in [Haro-94].

Ausgehend von der Bemessungslast N_{Ed} ist für die Definition der notwendigen Verteilungsfunktionen der veränderlichen und ständigen Last (Abschnitt 5.3.2) die Rückrechnung auf mittlere Parameter notwendig. Das für die Rückrechnung erforderliche Verhältnis von G/Q wird für Bemessungslasten auf 1:1 ($G_d = Q_d$) festgelegt. Daraus folgt für die Berechnung der Mittelwerte unter Verwendung von Gleichung (5-21) folgender Berechnungsansatz:

$$N_{qm} = \frac{N_{Rd}}{2,04 \cdot 2 \cdot \gamma_q} \quad (6-1)$$

$$N_{gm} = \frac{N_{Rd}}{2 \cdot \gamma_g} \quad (6-2)$$

Im Bemessungswertkonzept des EC2 [EC 2-92] gelten für die Gleichungen (6-1) und (6-2) die Teilsicherheitsbeiwerte $\gamma_q=1,5$ und $\gamma_g=1,35$. Wiederholend sei an dieser Stelle angemerkt, dass für die veränderliche Belastung eine Umrechnung des 98%-Quantilwerts aus einer Extremwertverteilung EV-I erforderlich ist.

Der Teilsicherheitsfaktor für die Betondruckfestigkeit im Bemessungswertkonzept ist für alle Festigkeitsklassen bis C 50/60 einheitlich mit $\gamma_c = 1,50$ angegeben.

$$\gamma_c = \gamma_{conv} \cdot \gamma_M = 1,15 \cdot 1,3 \approx 1,5 \quad (6-3)$$

Zu beachten ist hierbei, dass innerhalb des Teilsicherheitsbeiwertes γ_c bereits ein Anteil γ_{conv} aus der Umrechnung der Prüfsylinder auf die Bauteilfestigkeit berücksichtigt wurde.

6.2.3 Auswahl notwendiger stochastischer Parameter

Wie in Abschnitt 5.3.2 erläutert, ist die Modellierung der Eingangsgrößen einer probabilistischen Berechnung deterministisch und stochastisch (streuend) möglich. Um die Darstellbarkeit der Sensitivitätsplots und die Effizienz der dimensionsabhängigen QMC

Methode zu gewährleisten, ist es zweckmäßig, die notwendige Anzahl der streuenden Parameter zu reduzieren.

Zur Abgrenzung der gering sensitiven Parameter werden die Gewichtungsfaktoren von zwei repräsentativen Sensitivitätsanalysen herangezogen, die unter Beachtung aller streuenden Größen gemäß Tabelle 5-11 durchgeführt wurden. Als Grundlage diente eine Stütze mit dem Untersuchungsquerschnitt QS1 unter uni-axialer Beanspruchung, mit der Exzentrizität $e_x = 0,1$ m und mit den Längen 0,5 m und 4,0 m. Die Ergebnisse der Tabelle 6-2 ermöglichen eine Vorauswahl der betreffenden relevanten Parameter.

Tabelle 6-2: Gewichtungsfaktoren¹⁶ α_i

Parameter	f_c	α_E	a	B	L	f_y	G	Q	θ
L= 0,5 m	0,67	0,12	0,11	0,07	0,01	0,02	0,27	0,33	0,58
L= 4,0 m	0,23	0,12	0,43	0,09	0,06	0,04	0,03	0,50	0,69

Neben den stark sensitiven Parametern f_c , G, Q und θ wird trotz geringen Gewichts der Parameter L für die systematischen Untersuchungen herangezogen. Dies ist notwendig, um die Auswirkungen unterschiedlicher Stützenschlankheiten λ auf die Versagenswahrscheinlichkeit zu untersuchen. Ergänzend wird f_y streuend modelliert, da bei größeren Exzentrizitäten $e_x > 0,1$ m mit einer Zunahme des Einflusses der Betonstahlspannung zu rechnen ist.

6.2.4 Zusammenfassende Darstellung

In den folgenden Abschnitten werden die Lösungen des Untersuchungsprogramms auszugswise dargestellt. Alle Lösungen der Zuverlässigkeitsanalysen sind in Anlage 5, Anlage 6 und Anlage 7 getrennt nach den unterschiedlichen Querschnittstypen QS1, QS2 und QS3 in Form von Diagrammen grafisch aufbereitet. Die nach Tabelle 3-3 und [EC 1-95] angestrebte Zielwahrscheinlichkeit von $P_f = 1,3 \cdot 10^{-6}$ für einen Bezugszeitraum von einem Jahr ist zu Vergleichszwecken eingezeichnet. Alternativ wurden die Versagenswahrscheinlichkeiten gemäß der Definition von Gleichung (3-20) in den Sicherheitsindex β umgerechnet und ebenfalls grafisch dargestellt. Das Sicherheitsniveau bezieht sich entsprechend auf den Sicherheitsindex $\beta = 4,7$.

Für die Darstellung der Wichtungsfaktoren wird die in Abb. 4-1 eingeführte Schematisierung gestapelter Sensitivitätsfaktoren α^2 genutzt. Diese Vorgehensweise erlaubt die Auftragung der Sensitivitätsfaktoren gemäß der Definition (6-4) in einem Sensitivitätsplot.

¹⁶ Bezeichnungen gemäß dem Variablenverzeichnis

$$\sum_n (\alpha_{P_i})^2 = (\alpha_{P_1})^2 + (\alpha_{P_2})^2 + \dots + (\alpha_{P_i})^2 + \dots + (\alpha_{P_n})^2 = 1 \quad (6-4)$$

Weitere Daten werden in Tabellenform bereitgestellt.

6.3 Uni-axiale Belastung

6.3.1 Allgemeines

Im ersten Teil des systematischen Untersuchungsprogramms werden uni-axial belastete Stützen analysiert. Ergänzend zu bestehenden probabilistischen Berechnungen (z.B. [Six-01], [Strauss-07], [Vismann-95]), bei denen die Auswirkungen unterschiedlicher Exzentrizitäten untersucht wurden, soll der Einfluss der Länge L und der Betonfestigkeit f_c auf das Sicherheitsniveau gezeigt werden. Hiermit soll dem Umstand der stabilitätsbedingten Beeinflussung der Traglast im Zusammenspiel mit dem nichtlinearen Materialverhalten und deren Auswirkungen auf das Bemessungskonzept Rechnung getragen werden.

Für die Berechnungen der uni-axialen Belastung wurden im Rahmen der QMC Methode 32768 Einzelsimulationen (Sobol' 2^{15}) benötigt, damit für die gewählte Dimensionalität mit sechs Parametern eine genügende Konvergenz des Schätzers vorhanden ist.

6.3.2 Variation der Exzentrizitäten

Die Versagenswahrscheinlichkeiten gedrungener Stützen ($L= 0,5$ m) mit variabler exzentrischer Belastung liegen für das Bemessungskonzept des [EC 2-92] stets unterhalb der geforderten Größenordnung, wie Abb. 6-2 zeigt. Bestätigt wird dies durch die Angabe des Sicherheitsindex, der generell über dem Zielwert von $\beta = 4,7$ liegt. Des Weiteren ist ersichtlich, dass die Art der Verteilungsfunktion für Beton (Log- bzw. Normalverteilung) Auswirkungen auf die Zuverlässigkeit besitzt. Beispielsweise vergrößert sich bei zentrischer Belastung die Versagenswahrscheinlichkeit für normalverteilte Betonfestigkeit auf das 150-fache der zugehörigen log-normalverteilten Wahrscheinlichkeit. Auch wenn dies im vorliegenden Fall unproblematisch erscheint, so zeigt es die Abhängigkeit der Zuverlässigkeitsanalyse von der Genauigkeit der verwendeten Verteilungsfunktion. Dieser Umstand verdeutlicht die Notwendigkeit der im Abschnitt 3.2.1 definierten bayesschen Wahrscheinlichkeit.

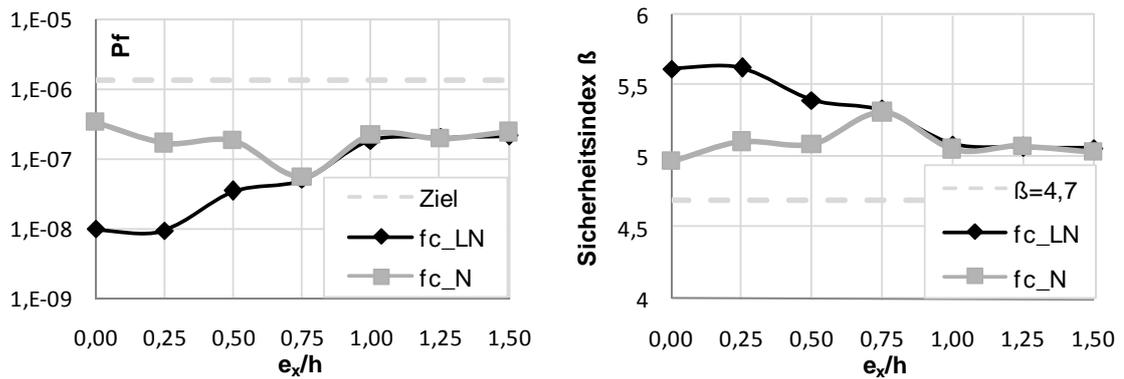


Abb. 6-2: Zuverlässigkeitsanalyse für QS1 mit variabler Exzentrizität

Die in den Diagrammen dargestellte Variabilität des Sicherheitsniveaus resultiert aus den verschiedenen Versagensmechanismen des Querschnittstragverhaltens, die je nach Exzentrizität unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Im Fall der Untersuchung der variablen Exzentrizitäten bei gedungenen Stützen ist ein Übergang vom Betonversagen hin zum Stahlversagen zu erwarten. Während, wie in Abb. 6-3 dargestellt, bei geringer Exzentrizität die Betonfestigkeit das Zuverlässigkeitsproblem dominiert, gewinnt erwartungsgemäß die Stahlfestigkeit ab einer bezogenen Exzentrizität von 0,75 an Bedeutung. Bei einem Wert von 1,0 besitzt die Betonfestigkeit auf das Zuverlässigkeitsproblem keinen Einfluss mehr. Gleiches Verhalten zeigen die Ergebnisse des QS2 wie in Anlage 6 dargestellt.

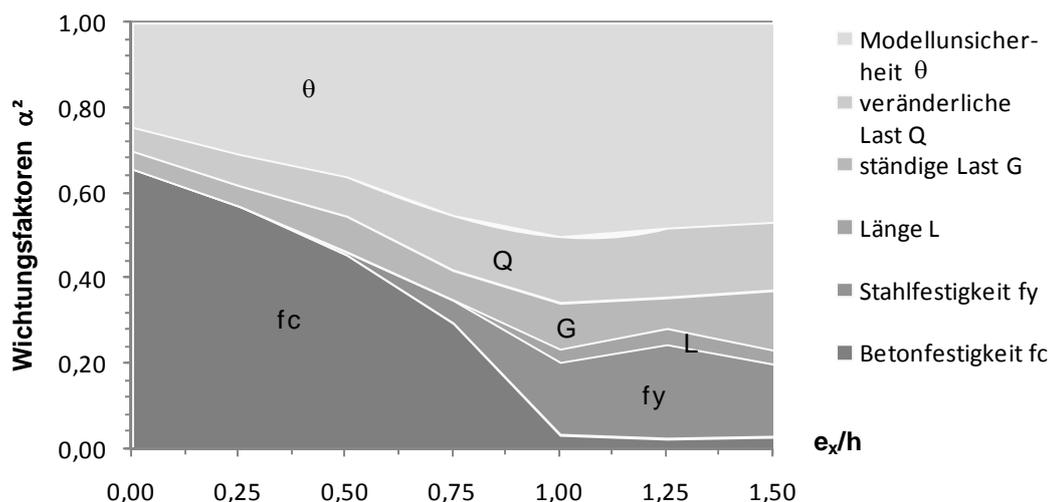


Abb. 6-3: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Exzentrizität

Der Anteil der Lasten an der Versagenswahrscheinlichkeit beträgt im Mittel 10-35%, wobei hiervon ca. 1/3 auf die ständige Last und ca. 2/3 auf die veränderliche Last entfallen. Bei einem höheren Variationskoeffizienten $CV > 0,4$ der veränderlichen Last, dominiert diese schnell das Zuverlässigkeitsproblem, was bereits von [Schneider-94] verdeutlicht wurde. Der größte Anteil von mehr als 50% entfällt auf den Modellunsicherheitsfaktor θ , der die Traglast der Stützen multiplikativ vergrößert oder abmindert. Der Einfluss der Länge ist bei gedrungenen Stützen erwartungsgemäß sehr gering, wie Abb. 6-3 verdeutlicht. Ähnlich verhält es sich mit der Betonzugfestigkeit, wie ergänzende Untersuchungen in [Naser-95] zeigen.

6.3.3 Variation der Schlankheit

In den folgenden Diagrammen (Abb. 6-4 und Abb. 6-5) werden die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse für variable Schlankheiten von $\lambda \approx 0$ bis $\lambda = 121,1$ mit einer Einheitsexzentrizität von $e_x = 0,1$ m dargestellt. Dies entspricht für den QS1 einer bezogenen Exzentrizität $e_x / h = 0,5$.

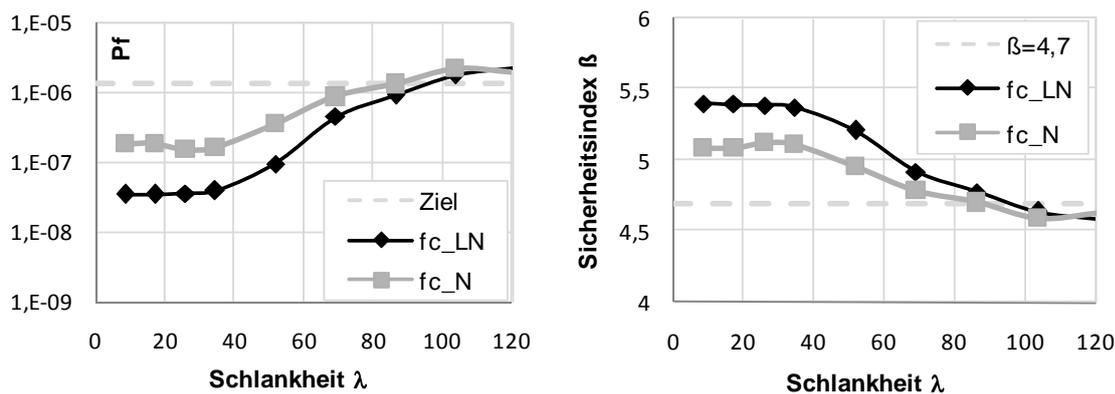


Abb. 6-4: Schlankheitsbezogene Zuverlässigkeitsanalyse für QS1

Allgemein lässt sich mit steigender Schlankheit eine Zunahme der Versagenswahrscheinlichkeit feststellen, die bei einem Wert von $\lambda = 90$ zu einer Überschreitung der Zielwahrscheinlichkeit führt. Der zugehörige Sicherheitsindex unterschreitet demzufolge den Zielwert von $\beta = 4,7$, was im Fall der höher bewehrten Stütze QS2 bereits bei einer Schlankheit von $\lambda = 70$ auftritt. Es wurde bei einer Schlankheit von $\lambda = 120$ eine Überschreitung um das ca. 10-fache der Zielwahrscheinlichkeit berechnet, wie Anlage 6 verdeutlicht. Die Auswirkungen der Art der Verteilungsfunktion verhalten sich analog zu den im Abschnitt 6.3.2 genannten Feststellungen.

Die durch die SA zugängliche Wichtungsverteilung (siehe Abb. 6-5) erlaubt die Beurteilung der Variabilität und zeigt, dass mit steigender Schlankheit die Wichte der Betonzugfestigkeit abnimmt. Anstelle der Stahlfestigkeit nimmt der Einfluss der Länge und ins-

besondere der Modellunsicherheit zu, wodurch auf einen Übergang vom Betondruck- zum Stabilitätsversagen geschlossen werden kann.

Der Anteil der Lasten an dem Ergebnis der Versagenswahrscheinlichkeit verändert sich nur geringfügig von 20% auf 30%, so dass die Auswirkungen der Teilsicherheitsbeiwerte auf der Lastseite als annähernd konstant betrachtet werden können. Da auf Widerstandsseite der Einfluss von γ_c stetig abnimmt und kein Gewicht von γ_s zu beobachten ist, liefert das Bemessungskonzept des [EC 2-92] mit steigender Schlankheit ein zu geringes Sicherheitsniveau. Auch wenn durch zusätzliche Sicherheitsmaßnahmen (z.B. additive Imperfektionen gemäß Kapitel 2.7) eine Dämpfung dieses Effektes zu erwarten ist, so ändert dies nichts an der prinzipiellen Beschränkung des Teilsicherheitskonzepts in Bezug auf die Stabilitätsbemessung schlanker Bauteile. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt u. a. [Six-01] in seinen Untersuchungen.

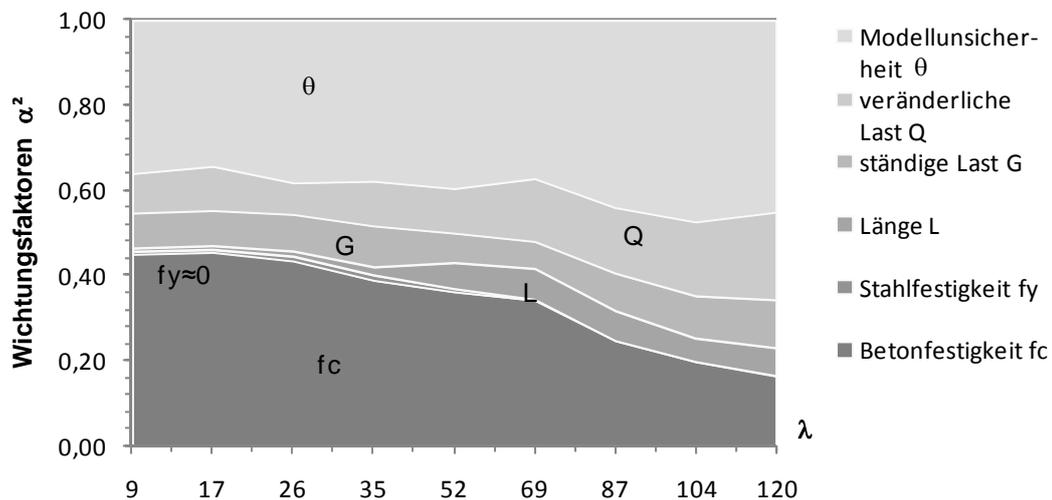


Abb. 6-5: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Schlankheit

Zur weiteren Verdeutlichung der stabilitätsbedingten Beeinflussung des Zuverlässigkeitsniveaus und der Traglastabnahme wird der in Abb. 6-6 dargestellte Verlauf des Wichtungsfaktors $\alpha_{\text{Länge}}$ hinzugezogen.

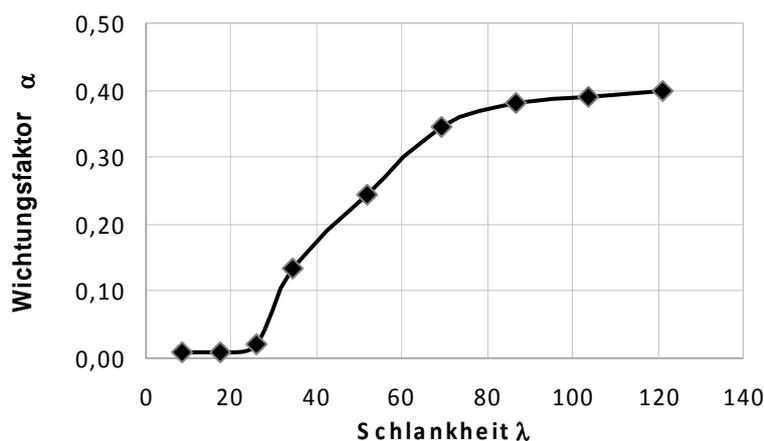


Abb. 6-6: Ergebnisverlauf des Sensitivitätsfaktors $\alpha_{\text{Länge}}$ für QS1 mit variabler Schlankheit

Eine stetige Zunahme des Einflusses der Länge ist ab einer Schlankheit von ca. $\lambda_{\text{crit}} = 25$ deutlich erkennbar. Der Maximalwert wird bei einer Schlankheit von $\lambda = 120$ erreicht. Ergänzende Untersuchungen zeigen keine weitere Zunahme des Einflusses. Ein ähnlicher Zusammenhang ist auch für den QS2 in Abb. 9-20 ableitbar, wobei sogar eine leichte Abnahme bei sehr hoher Schlankheit zu beobachten ist.

Wie allgemein bekannt, ist bei geringer Schlankheit $\lambda \leq \lambda_{\text{crit}}$ der Einfluss der Länge und damit die Auswirkung der Theorie II. Ordnung vernachlässigbar [DIN 1045-01]. Es liegt reines Querschnittstragverhalten gemäß der Untersuchungen im vorherigen Abschnitt 6.3.2 vor.

6.3.4 Variation der Betonfestigkeit

Da mit steigender Betonfestigkeit der Variationskoeffizient des Betons abnimmt (siehe Tabelle 5-8), ist mit einem Absinken des zugehörigen Sensitivitätsfaktors zu rechnen. Welche direkten Auswirkungen dieser Umstand auf die Querschnittstragfähigkeit besitzt, ist in Abb. 6-7 und Abb. 6-8 dargestellt. Die Untersuchungen erfolgen an einer gedrunenen Stütze (QS1; $L = 0,5\text{m}$) mit einer Einheitsexzentrizität von $0,1\text{m}$ und log-normalverteilter Betonfestigkeit.

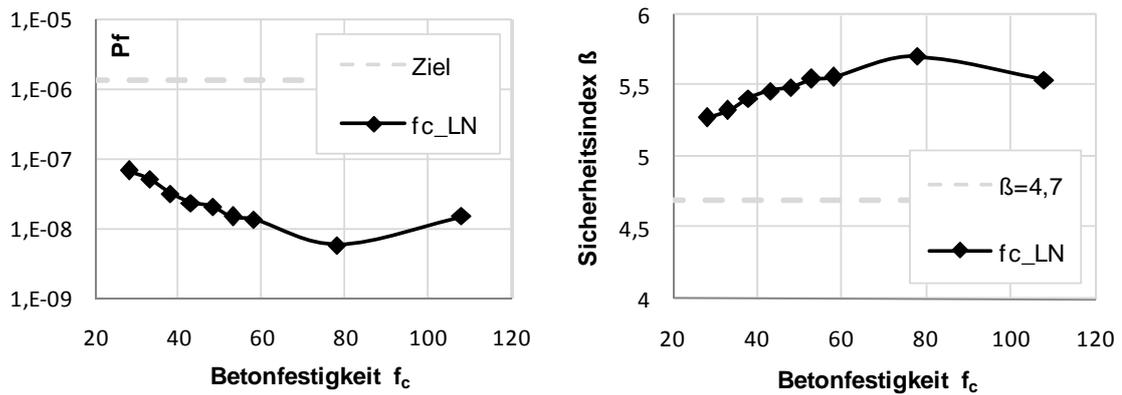


Abb. 6-7: Zuverlässigkeitsanalyse für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm²]

In den dargestellten Zuverlässigkeitsdiagrammen fällt auf, dass trotz abnehmenden Betoneinflusses das Zuverlässigkeitsniveau zunächst steigt. Ursache ist die mit steigender Normalkraft einhergehende Vergrößerung des Biegemomentes und damit der Steigerung des Einflusses der Stahlfestigkeit. Dieser Zusammenhang wird in Tabelle 6-3 und Abb. 6-8 verdeutlicht.

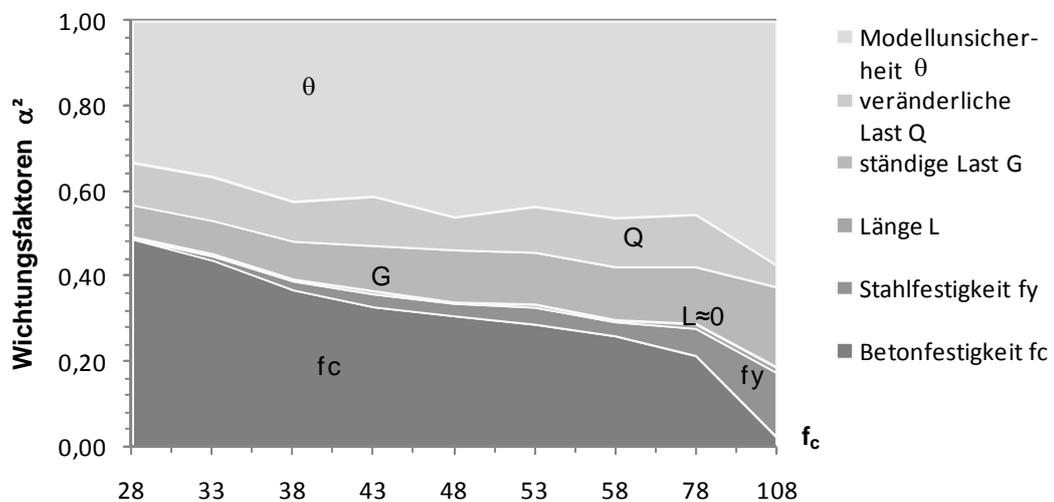


Abb. 6-8: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Betonfestigkeit

Tabelle 6-3: Bemessungstraglasten für ausgewählte Betone für den QS1

Beton	C 20/25	C 30/37	C 40/50	C 50/60	C 70/85	C 100/115
f_{cm} [N/mm ²]	28	38	48	58	78	108
N_{Rd} [kN] ¹⁷	246	306	352	395	466	562
M_{Rd} [kNm]	24,6	30,6	35,2	39,5	46,6	56,2

Weiterhin bleibt festzustellen, dass bei höherfesten Betonen unter der dargestellten Konfiguration alle Werte des Sicherheitsindex deutlich über dem geforderten Zielwert $\beta = 4,7$ liegen.

Problematisch erweist sich, dass in [DIN 1045-01] eine Vergrößerung des Teilsicherheitsbeiwertes mittels eines Anpassungsfaktors für höherfesten Beton ab C50/60 erfolgt.

$$\gamma'_c = \frac{1}{(1,1 - 0,002 \cdot f_{ck})} \quad (6-5)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ N/mm}^2 \quad (6-6)$$

Klärungsbedürftig erscheint in diesem Zusammenhang die Modellierung der Betonstreuung, da dieser Anpassungsfaktor größere Materialstreuungen impliziert. Der im Kapitel 5.3.2.1 dargestellte Zusammenhang nach Gleichung (6-6) erscheint somit für höherfesten Beton inkonsistent, da er von einer konstanten Standardabweichung ausgeht.

6.3.5 Zuverlässigkeit des Modellstützenverfahrens

Wie von HARO [Haro-94] in seinem Beitrag zum Modellstützenverfahren bemerkt, besitzt die Überführung des Stabilitätsproblems in eine Querschnittsbemessung insbesondere für die praktische Bemessung eine große Bedeutung. Die Bemessung schlanker uni-axial belasteter Stahlbetonstützen kann nach dem Modellstützenverfahren gemäß [MC 90], [EC 2-92] und [DIN 1045-01] erfolgen. Eine inverse Berechnung der Bemessungslast $N_{Rd} = N_{Ed}$ bei vorgegebenem Querschnitt ist direkt möglich.

Das Modellstützenverfahren kann durch Idealisierungen des Tragverhaltens (siehe Abschnitt 2.3) abgeleitet werden. Die Zusatzausmitte e_2 nach Theorie II. Ordnung wird mit Hilfe der aus dem Fließzustand abgeleiteten Krümmung ermittelt. Neben den vorrangig guten Übereinstimmungen der Traglasten des Modellstützenverfahrens mit denen des Bemessungswertkonzepts, sind im Rahmen der Zuverlässigkeitsanalyse vor allem Über-

¹⁷ Obwohl die Anwendung im [EC 2-92] auf C50/60 beschränkt ist, wurden für höherfeste Betone Untersuchungen auf der Grundlage des Bemessungskonzeptes vorgenommen.

schätzungen der Traglast von Bedeutung. Daher werden aus der umfassenden Analyse des Modellstützenverfahrens von HARO insbesondere die Eigenschaften ermittelt, welche zu einer Überbewertung der Traglast führen. Neben einer erhöhten Betonfestigkeit verursachen unter anderem hohe Bewehrungsgrade sowie geringe Randabstände und Exzentrizitäten überschätzte Traglasten. In der systematischen Analyse trifft dies für den QS2 zu.

Tabelle 6-4: Vergleich der Bemessungstraglasten N_{Ed} in [kN]

Schlankheit λ ¹⁸	0	26	51,9	86,5	121,1
N_{Ed} für QS1, MSV	274	273	199	122	75
N_{Ed} für QS1, BWK	277	259	201	119	70
N_{Ed} für QS2, MSV	476	475	367	236	133
N_{Ed} für QS2, BWK	477	435	339	197	119

In Tabelle 6-4 werden Bemessungstraglasten N_{Ed} nach dem Bemessungswertkonzept BWK, sowie dem Modellstützenverfahren MSV für ausgewählte Schlankheiten gegenübergestellt. Wie die Tabelle verdeutlicht, ist für den Querschnittstyp QS1 eine gute Übereinstimmung in den Bemessungslasten vorhanden.

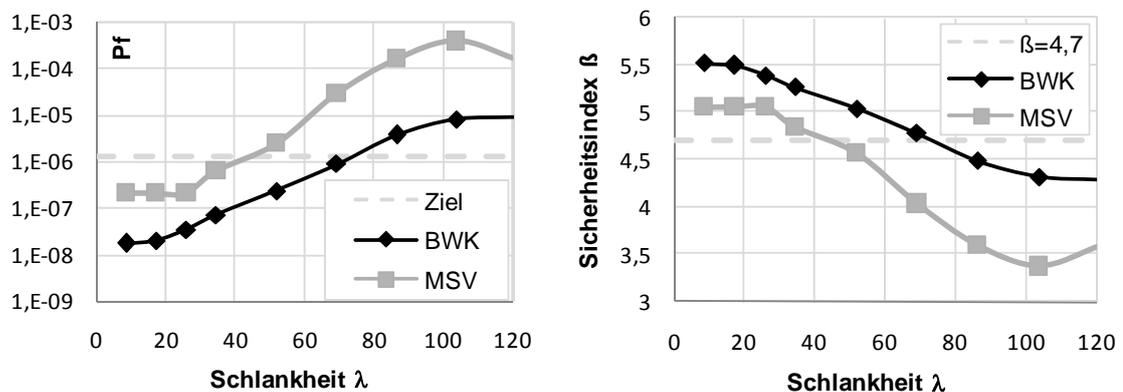


Abb. 6-9: Vergleich des Zuverlässigkeitsniveaus für QS2 zwischen Bemessungswertkonzept und Modellstützenverfahren

Bezüglich des Zuverlässigkeitsniveaus des Modellstützenverfahrens wird auf Abb. 6-2, Abb. 6-3 sowie Abb. 6-4 verwiesen. Größere Abweichungen ergeben sich bei den Trag-

¹⁸ Die Exzentrizität beträgt in Anlehnung an Abschnitt 6.3.3 $e_x = 0,1$ m.

lasten für die Stützen des Querschnittstyps QS2. Eine Neuauswertung unter Beachtung der Traglasten des Modellstützenverfahrens ist in Abb. 6-9 für variable Schlankheiten dargestellt. Den Berechnungen liegt eine log-normalverteilte Betonfestigkeit zugrunde.

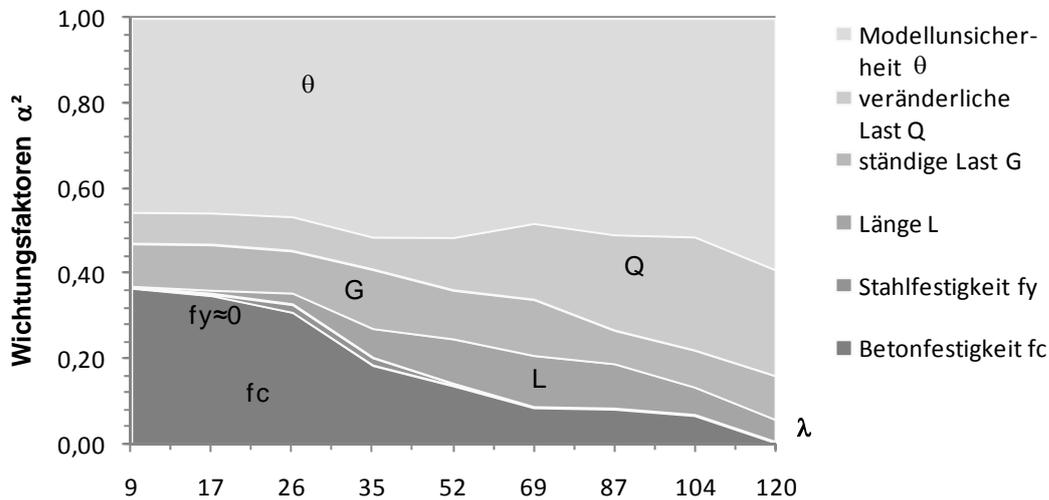


Abb. 6-10: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 gemäß MSV

Der Zuverlässigkeitsindex für die Stützen mit dem Querschnittstyp QS2 ($e_x = 0,1 \text{ m}$) liegt für das Modellstützenverfahren ab einer Schlankheit von $\lambda = 50$ im unsicheren Bereich, wie Abb. 6-9 verdeutlicht. Es wurde bei einer Schlankheit von $\lambda = 120$ eine Überschreitung um das ca. 100-fache der Zielwahrscheinlichkeit berechnet. Die prozentuale Abweichung der Traglast liegt etwa bei 10% (siehe Tabelle 6-4). Aus den Wichtungsfaktoren (Abb. 6-10) geht hervor, dass der Anteil der Belastung, insbesondere der veränderlichen Last signifikant steigt. Der Einfluss der Lasten deutet im Vergleich zum Bemessungswertkonzept auf eine zu hohe Traglast hin. An dieser Stelle liegt ein erhebliches Defizit in der Sicherheit des Modellstützenverfahrens vor, welches sich jedoch nur unter der gezeigten Konfiguration einstellt. Im Allgemeinen liefert das Modellstützenverfahren konservative Traglasten [Haro-94].

6.4 Bi-axiale Belastung

6.4.1 Allgemeines

Der Einfluss aus schiefer Biegung auf das Tragverhalten wurde bereits im Abschnitt 2.2.3 erläutert. Nachfolgend wird zusätzlich das Sicherheitsniveau nach dem Bemess-

sungswertkonzept für Stützen mit dieser Belastung analysiert. Bei der Erstellung der Zuverlässigkeitsdiagramme ergeben sich im Vergleich zu uni-axialen Belastungen Zuverlässigkeitsniveaus in Form von gekrümmten Flächen. Der Sicherheitsindex wird dabei in Abhängigkeit von zwei Exzentrizitäten in x- und y-Richtung aufgetragen.

Es ergeben sich bei sechs verschiedenen Exzentrizitäten $e_{x,y}$ (0,0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25 [m]) 36 mögliche Kombinationen, die jeweils mit Hilfe der QMC Simulation berechnet werden müssen. Bei QS1 und QS2 kann aufgrund der Symmetrie im Gegensatz zu QS3 eine Reduzierung auf 21 Berechnungen erfolgen. Für die Betrachtungen wird das in Abb. 6-1 gezeigte statische System in beide Achsenrichtungen zugrunde gelegt. Die in Abschnitt 6.3 dargestellten Bedingungen werden gleichartig für die bi-axiale Beanspruchung angenommen, wobei von log-normalverteilter Betonfestigkeit ausgegangen wird.

Um den Einfluss der Schlankheit untersuchen zu können, werden für QS1 und QS2 zwei Basislängen $L= 0,5$ m und $L= 4,0$ m ausgewählt. Demnach ergeben sich Schlankheiten von $\lambda \approx 0$ und $\lambda = 69,2$. Für den Querschnitt QS3 wird die reine Querschnittstragfähigkeit hinsichtlich erreichter Zuverlässigkeit geprüft. Aus Gründen der Übersicht wird auf die Darstellung der Versagenswahrscheinlichkeit zugunsten des Sicherheitsindex verzichtet.

6.4.2 Ergebnisse der Analyse für bi-axiale Beanspruchungen

In Abb. 6-11 und Abb. 6-12 wird das Zuverlässigkeitsniveau für Stützen des QS2 mit den Basislängen $L= 0,5$ m und $L= 4,0$ m dargestellt. Aus den Diagrammen der kurzen Stütze kann auf das Querschnittstragverhalten ohne Einfluss der Stabilität geschlossen werden. Gleiches gilt für die Abb. 9-15 und Abb. 9-23 im Anhang für den QS1 und QS3. Beim Querschnittstragverhalten ist die Abnahme des Sicherheitsindex mit steigender Exzentrizität deutlich erkennbar. Die Wölbung der Zuverlässigkeitsfläche mit der Erhebung im Bereich von 45° zeigt einen geringeren Abfall des Sicherheitsindex bei schiefer Biegung als am Rand bei uni-axialer Biegung. Der homogen verlaufende Sicherheitsindex liegt zwischen $\beta = 5,0$ und $\beta = 5,9$, wobei der Höchstwert bei zentrischer Belastung berechnet wird. Der Zielwert von $\beta = 4,7$ wird bei keiner Konstellation der Exzentrizitäten unterschritten.

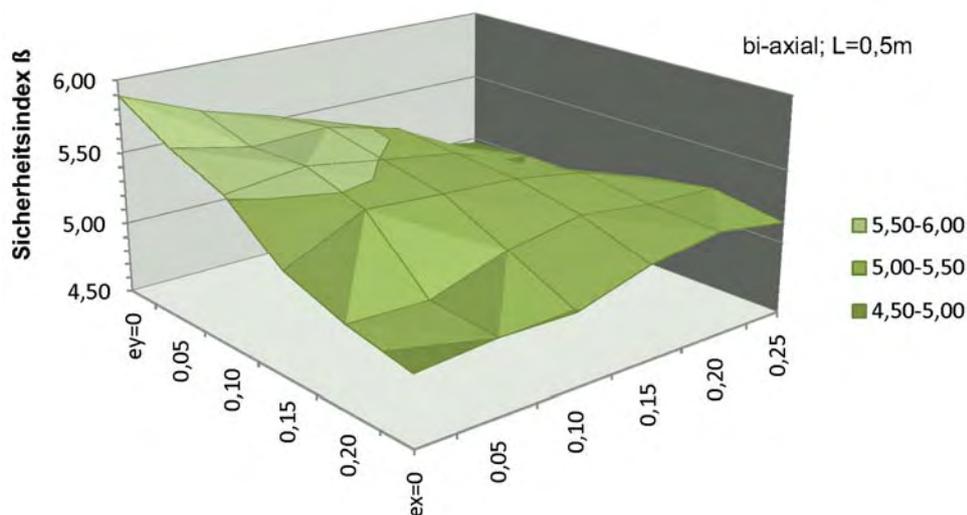


Abb. 6-11: Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L=0,5$ m

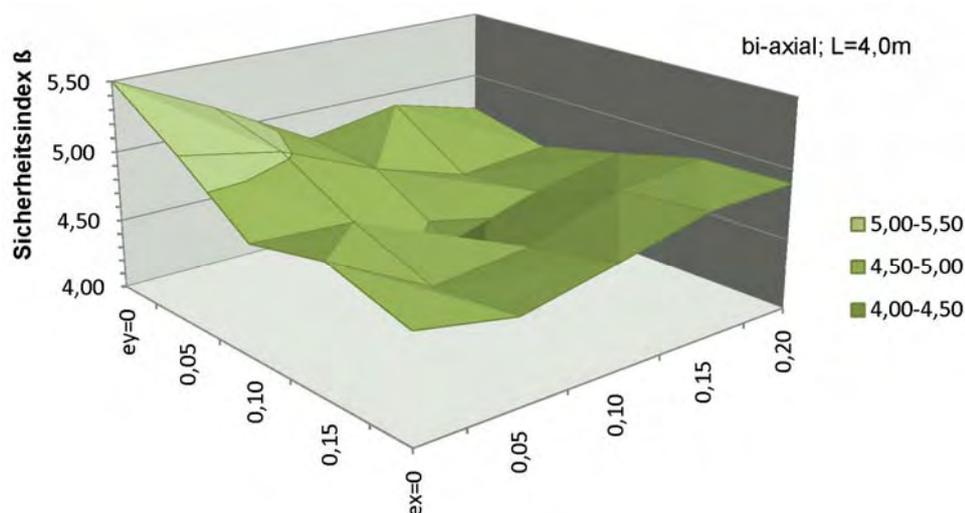


Abb. 6-12: Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L=4,0$ m

Die schlankere Stütze zeigt gemäß Abb. 6-12 ein schwankendes variables Sicherheitsniveau. Bei einem Winkel von 45° tritt eine Vertiefung der Fläche auf. Insbesondere bei der Konfiguration von $e_{x,y}=0,1$ m ist eine ausgeprägte Delle mit einem Abfallen auf $\beta = 4,3$ zu beobachten. Beim QS1 mit einem geringeren Bewehrungsgrad ist diese ausgeprägte Vertiefung auch zu erkennen, wie Abb. 9-16 im Anhang verdeutlicht. Das Bemessungskonzept zeigt bei dieser Parameterkonstellation deutliche Schwächen, die bei größerer Schlankheit weiter zunehmen. Verdeutlicht wird dies durch folgende vergleichende Abb. 6-13 mit zugehörigem Sensitivitätsverlauf (siehe Abb. 6-14) in einem 45° - Schnitt durch das Zuverlässigkeitsniveau.

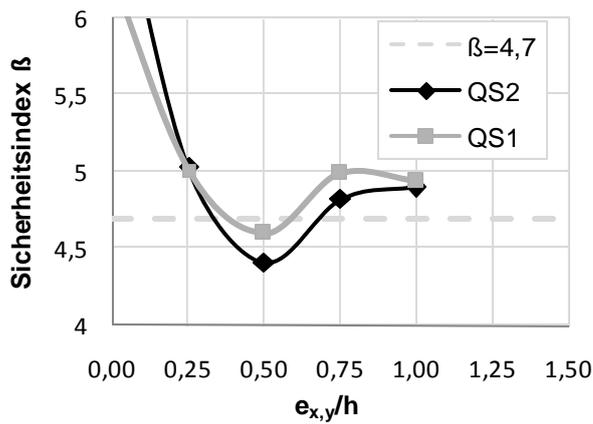


Abb. 6-13: Vergleich des Sicherheitsniveaus von QS1 und QS2 bei schiefer Biegung um 45° mit einer Stützenlänge von $L=4,0$ m

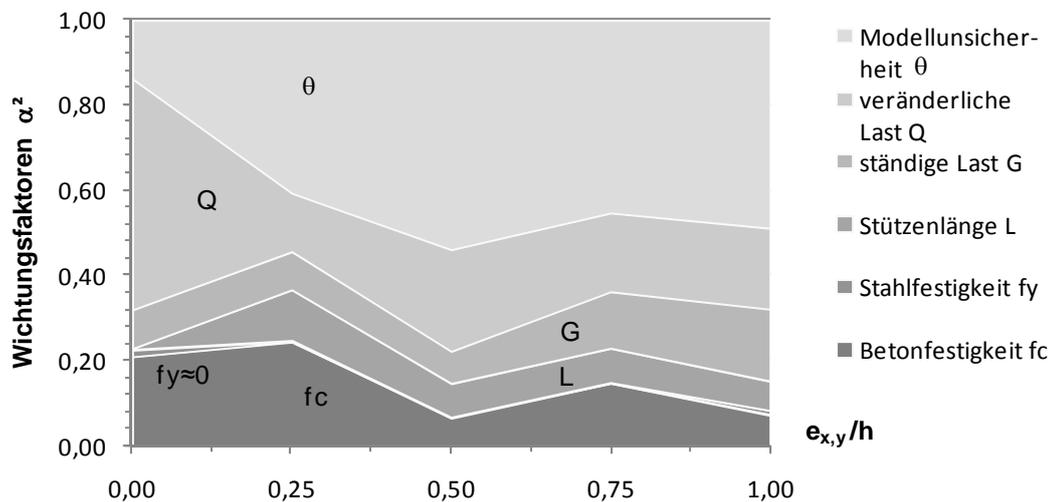


Abb. 6-14: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 bei schiefer Biegung um 45° mit $L=4,0$ m

In Abb. 6-14 ist eine deutliche Abnahme des Einflusses der Betonfestigkeit zu erkennen. Da diese aufgrund des fehlenden Einflusses der Stahlfestigkeit allein den Bauteilwiderstand repräsentiert, erreicht das gewählte Bemessungskonzept in diesem Fall einen zu geringen Sicherheitsindex.

6.5 Fazit der systematischen Analyse

Wie die durchgeführten Untersuchungen verdeutlichen, ist das im Kapitel 5 entwickelte probabilistische Modell generell für systematische Analysen von Stahlbetonstützen geeignet. Die errechneten Zuverlässigkeitsdiagramme und Sensitivitätsplots ermöglichen Aussagen über die Variabilität und Sicherheit des gewählten Bemessungskonzepts. Folgende Aussagen können allgemein getroffen werden.

- Besitzt das Bemessungskonzept Einfluss auf die mechanische Lösung, ist ein sehr variables Sicherheitsniveau zu erwarten.
- Für reines Querschnittsversagen ohne stabilitätsbedingte Traglastabnahme zeigt sich ein ausgewogenes Zuverlässigkeitsniveau. Die akzeptierten Zielwahrscheinlichkeiten werden eingehalten.
- Für reines Querschnittsversagen erscheint eine Approximation mit FORM als ausreichend, da sich wie die Vergleichsanalysen im Abschnitt 5.4.1 zeigen, ein annähernd lineares R-E-Problem einstellt.
- Bei deutlicher Abnahme des Einflusses der Widerstandsgrößen an der Versagenswahrscheinlichkeit liegt zum Teil ein erhebliches Sicherheitsdefizit im Bemessungswertkonzept vor. Eine Approximation mit FORM bzw. SORM ist nicht mehr möglich. Dies ist insbesondere bei sehr schlanken Stützen der Fall.
- Das Modellstützenverfahren zeigt Schwächen bei der Bemessung von Stützen mit hoher Druckfestigkeit und mittlerem Bewehrungsgrad.
- Die Modellunsicherheit und die veränderliche Last dominieren meist die probabilistische Fragestellung.

Auch das Rechenwertkonzept der [DIN 1045-01] führt zu einer, wenn auch abgeschwächten Beeinflussung der Steifigkeit des Betons und somit zu einem variablen Sicherheitsniveau. Ein neuer Ansatz der z.B. in [Six-01] diskutiert wird, ist die konsequente Berechnung mit Mittelwerten der Festigkeiten. Dabei ist jedoch ein bemessungsabhängiger variabler Teilsicherheitsbeiwert erforderlich. Unabhängig vom Bemessungskonzept wäre eine vollständig probabilistische Lösung am konsequentesten.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit Hilfe der Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie können streuende Parameter und zufällige Vorgänge in einem vollständigen probabilistischen Verfahren erfasst werden. In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Ansatz aufgenommen, um ein probabilistisches Modell für die Zuverlässigkeitsanalyse von Stahlbetonstützen zu entwickeln. Das in dem Programm NLCS implementierte Modell ist somit die Voraussetzung für eine systematische Bewertung von verschiedenen Bemessungskonzepten hinsichtlich eines gleichmäßigen und ausreichenden Zuverlässigkeitsniveaus. Insgesamt bietet das vorgestellte Verfahren dem Nutzer die Anwendungsmöglichkeit, das Tragverhalten von Stahlbetonstützen realitätsnah mit streuenden Einflussgrößen zu prognostizieren und Versagenswahrscheinlichkeiten für Bemessungsvarianten anzugeben.

Die Grundlage des probabilistischen Modells bildet neben der Finiten Elemente Lösung auch die Erfassung und Verknüpfung der unscharfen bzw. streuenden Parameter durch stochastische Zufallsvariablen. Das Modell gliedert sich in vier Hauptbereiche:

- Abbildung des stabilitätsbeeinflussten Tragverhaltens schlanker Stahlbetonstützen in einem deterministischen Finite Elemente Modell,
- Beschreibung von Eingangsdaten (z.B. Geometrie-, Material- und Lastgrößen) durch Zufallswerte von statistischen Verteilungsfunktionen mit dem Ziel der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit,
- Ermittlung des Einflusses bzw. des Gewichts der beteiligten Parameter durch eine Sensitivitätsanalyse,
- Verknüpfung von Struktur- und Wahrscheinlichkeitsmethoden in einem generalisierten Konzept.

Für diese Bereiche wurden die notwendigen theoretischen Grundlagen wie beispielsweise die Erfassung des nichtlinearen Materialverhaltens, die Darstellung von Verteilungsfunktionen oder die stochastischen Simulationen, in den Kapiteln 2 bis 4 aufgearbeitet. Besondere Beachtung verdient dabei die Berücksichtigung der numerischen Behandlung. Aus diesem Grund wurden die Lösungsmethoden im Kapitel 5 ausführlich dargestellt.

Hauptgegenstand der Berechnungen der mechanischen Grundlösung ist die Diskretisierung der Stütze mit FE-Stahlbetonelementen. Das geometrisch und physikalisch nichtlineare Tragverhalten wird dabei durch eine konsequente Umsetzung des Green-

Lagrangeschen Verzerrungsmaßes gemäß Abschnitt 2 sowie durch Inkrementierung der Gleichgewichtsgleichung erfasst. Die strukturmechanische Lösung erfolgt auf Basis der im Kapitel 5.2.1 dargestellten Newton-Raphson Iteration, wobei zunächst die Konvergenz im Traglastzustand gezeigt wurde.

Als Voraussetzung für die probabilistische Simulation wurden Annahmen für streuende Ausgangsgrößen angegeben. Dazu wurde auf vorhandene Literatur z.B. [JCSS-00] und [Six-01] zurückgegriffen. Modellunsicherheiten wurden im Abschnitt 5.2.7 anhand des implementierten deterministischen Verfahrens analysiert. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bzw. des Sicherheitsindex erfolgte auf Grundlage der Methode der Monte Carlo Integration. Es kamen quasi-random Samplingpunkte zur Behandlung des komplexen Zuverlässigkeitsproblems zum Einsatz, wodurch sich die Varianz des Monte Carlo Schätzers signifikant reduzieren ließ. Grundsätzlich konnte die Einsatzfähigkeit der QMC Methode für strukturmechanische Fragestellungen bewiesen werden. Parallel wurden die Möglichkeiten und Grenzen weiterer Samplingverfahren z.B. LHS und MC sowie Approximationsmethoden (FORM und SORM) aufgezeigt.

Im Hinblick auf die Erfassung des Einflusses einzelner Parameter auf die probabilistische Lösung ist im Kapitel 4 eine Ein-Schritt-Sensitivitätsanalyse entwickelt worden. Die Sensitivitätsanalyse basiert auf einer Gradienten-Approximationsmethode. Untersucht wurden die Veränderung der Versagenswahrscheinlichkeit bzw. des Sicherheitsindex bei Variation der Eingangsparameter.

Bezüglich der notwendigen Verknüpfung von Struktur- und Wahrscheinlichkeitsmethoden für ein probabilistisches Modell wurden zunächst verschiedene recherchierte Ansätze und Möglichkeiten in Kapitel 5.1 diskutiert. Aufgrund proprietärer Eigenschaften der klassischen FE-Programme erfolgte die Implementierung eines eigenen generalisierten Konzeptes nach Abb. 5-1. Es erfolgte eine objektorientierte Programmierung in Java. Die Qualität und Einsatzfähigkeit der deterministischen als auch der probabilistischen Lösung wurden anschließend im Rahmen von Vergleichsrechnungen (siehe Abschnitt 5.2.6 und 5.4) gezeigt.

Durch umfangreiche Berechnungen bei der systematischen Analyse schlanker Stahlbetonstützen (siehe Kapitel 6) konnten die einzelnen Systemzuverlässigkeiten anhand errechneter bayesscher Versagenswahrscheinlichkeiten für variable Parameter vergleichend gegenübergestellt werden. Des Weiteren wurden Zuverlässigkeitsflächen für zwei variable Parameter bei bi-axialer Beanspruchung herangezogen. Erstmals wurde dadurch der Einfluss der Schlankheit auf die Zuverlässigkeit unter bi-axialer Belastung genauer analysiert. Ergänzende Sensitivitätsplots erlauben auf die Bedeutung der einzelnen Parameter an der Versagenswahrscheinlichkeit zu schließen. Es zeigt sich, dass bei Bemessungssituationen, wo weder der Betonstahl noch der Beton selbst einen Einfluss auf das Zuverlässigkeitsergebnis besitzen, keine ausreichende Sicherheit vorliegt.

Dies ist insbesondere bei sehr schlanken Stützen der Fall, bei denen kein Querschnittsversagen auftritt. Das untersuchte Bemessungswertkonzept des Eurocode 2 [EC 2-92] zeigt trotz einer überwiegenden konservativen Bemessung Schwächen in einem einheitlichen Sicherheitsniveau. Das zugrunde liegende Sicherheitskonzept arbeitet mit getrennten Teilsicherheitsbeiwerten für Beton und Stahl, wodurch ein variables Sicherheitsniveau entsteht. Das in [DIN 1045-01] eingeführte Sicherheitskonzept zeigt nach externen Studien [Six-01] vergleichbare Ergebnisse. Die probabilistische Analyse des praxisrelevanten Modellstützenverfahrens liefert bei bestimmten Konstellationen der Eingangsparameter eine Überschreitung der Versagenswahrscheinlichkeit um das 150-fache. Es existieren somit erhebliche Überschreitungen der geforderten Versagenswahrscheinlichkeit.

In der vorliegenden Arbeit ist ein implementiertes Verfahren präsentiert worden, mit dessen Hilfe umfangreiche Zuverlässigkeitsanalysen ermöglicht werden. Der generalisierte Ansatz bei der Umsetzung des Programms NLCS gestattet die schnelle Adaptierbarkeit künftiger Erkenntnisse hinsichtlich:

- neuer Bemessungskonzepte,
- verbesserter statistischer Verteilungsfunktionen streuender Eingangsparameter,
- genauerer Materialmodelle,
- zeitabhängiger Analysen,
- komplexerer Strukturmodelle.

Daraus ergeben sich weiterführende Aufgaben beispielsweise bei der Kalibrierung der kontrovers diskutierten variablen Teilsicherheitsbeiwerte oder der theoretischen Auffassung der bayesschen Wahrscheinlichkeit. Einhergehend mit einer weiteren Verbesserung der Zuverlässigkeitsanalyse sollte eine Diskussion des akzeptierten Sicherheitsniveaus erfolgen.

8 Literaturverzeichnis

- [ACI-318] Building code requirements for reinforced concrete and commentary. American Concrete Institute, Detroit, 1995
- [Aas-Jakobsen-74] Aas-Jakobsen, K.: Design of slender reinforced concrete frames. Dissertation 1974, Nr. 5131, ETH Zürich
- [Allgöwer-02] Allgöwer, G., Avak, R.: Bemessung von Stahlbetondruckgliedern unter zweiachsiger Beanspruchung, Interaktionsdiagramme nach Theorie II. Ordnung, Bautechnik 2002, Heft 8, Ernst & Sohn Verlag Berlin
- [Argyris-86] Argyris, J., Mlejnek, H.-P.: Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Band I Verschiebungsmethode in der Statik, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1986
- [Avak-98] Avak, R.: Interaktionsdiagramme zur Bemessung von Druckgliedern unter einachsiger Lastausmitte nach Theorie II. Ordnung, Bautechnik 1998, Heft 6, Ernst & Sohn Verlag Berlin
- [Avak-07] Avak, R.: Stahlbetonbau in Beispielen; Teil 1: Grundlagen der Stahlbeton-Bemessung - Bemessung von Stabtragwerken, 5. Auflage, Werner Verlag, Köln, 2007
- [Backes-94] Backes, W.: Ein Beitrag zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnung von Stabtragwerken unter besonderer Berücksichtigung räumlicher Stabilitätsprobleme des Massivbaues. Dissertation 1994, Universität Kaiserslautern
- [Bathe-86] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen, Springer Verlag Berlin, 1986
- [Bergmeister-06] Bergmeister, K., Hoffmann, S.: Stochastic structural modeling, Proc. of the 4th International Probabilistic Symposium, pp. 17-28, 2006
- [Böhme-93] Böhme, G.: Fuzzy-Logik, Einführung in die algebraischen und logischen Grundlagen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993

- [Bouleau-94] Bouleau, N.: Numerical Methods for Stochastic Processes, Wiley, New York, 1994
- [Box-58] Box, G. E. P., Muller, M.E.: A note on the generation of random normal deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, 29:610–611, 1958.
- [Bratley-88] Bratley, P., Fox, B.L.: Algorithm 659 Implementing Sobol’s quasi-random sequence generator. *ACM Trans. Math. Software* 14, 1988, 88-100.
- [Brettschneider-07] Brettschneider, T.: Assessment of existing glued laminated timber beams by Probability-Based Updating, Dissertation, BTU Cottbus, 2007
- [Bronstein-96] Bronstein, I.N., Semendjajew, K. A., Übersetzung Ziegler, V.: Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1996
- [Brüggemann-07] Brüggemann, B.M.: Informationsmodellierung im Bauwesen, Habilitationsschrift, Publications of the Institut für Bauinformatik, Cottbus, 2007
- [Bucher-01] Bucher, C., Will, J., Riedel, J.: Multidisciplinary non-linear optimization with optimizing structural language OptiSlang. In 19th CAD-FEM USERS’ Meeting 2001 International Congress on FEM Technology, Potsdam, Germany, 2001
- [Bucher-07] Bucher, C.: Basic Concepts for robustness evaluation using stochastic analysis, *EUROMECH Colloquium 482*, London, 10 - 12 September 2007
- [Buss-02] Buss, A.: Component-based simulation modelling with Simkit. In *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, ed. E.Yücesan, C.-H. Chen, J. L. Snowdon, and J. M. Charnes, 243–249: IEEE Press, 2002
- [Casciati-91] Casciati, F., Negri, I, Rackwitz, R. Geometrical Variability in Structural Members and Systems, *JCSS Working Document*, January 1991.
- [CEB 202-91] CEB, Bulletin d’Information No. 202, Reliability of Concrete Structures – Final Report of Permanent Commission I , Comite Euro-International Du Beton, 1991
- [Cervenka-08] Cervenka Consulting, Structural Analysis and Reliability Assessment, SARA Product sheet, 2008

- [Claeson-98] Claeson, C., Gylltoft, K.: Slender High- Strength Concrete Columns Subjected to Eccentric Loading. *Journal of Structural Engineering*, No. 3 March 1998, ASCE, S. 233 – 240
- [Collins-99] Collins, M.P., Mitchell, D.: *Prestressed Concrete Structure*, New Jersey: Prentice-Hall, 1999
- [DIN 1045-01] DIN 1045: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion*, 2001
- [DIN 1045-08] DIN 1045: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion*, 2008
- [DIN 1045-88] DIN 1045: *Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung*, Juli 1988
- [Ditlevsen-96] Ditlevsen, O., Madsen, H.O.: *Structural Reliability Methods*, Chichester, John Wiley & Sons, 1996
- [EC 1-95] Eurocode 1.1 Project Team: *Background Documentation Part 1 of EC1. Basis of Design, First Draft* 1995
- [EC 2-92] Eurocode 2, *Design of concrete structures, Part1: General rules and rules for buildings*, 1992
- [Eclipse-09] Eclipse Platform SE binary, www.eclipse.org, Copyright ©2009, The Eclipse Foundation.
- [Eibl-92] Eibl, J.: *Nichtlineare Traglastermittlung/Bemessung. Beton und Stahlbetonbau*, Heft 6, 1992
- [Faber-02] Faber, O. U.: *Zeitabhängige Zuverlässigkeit schlanker Stahltragwerke unter Windbelastung im Grenzzustand der Ermüdung*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2002
- [Faure-02] Faure, H., Tezuka, S.: Another random scrambling of digital (t, s)-sequences. In K.- T. Fang, F. J. Hickernell, and H. Niederreiter, editors, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*, 2002. Springer-Verlag, Berlin
- [Fischer-99] Fischer, L.: *Sicherheitskonzept für neue Normen –ENV und DIN-neu, Grundlagen und Hintergrundinformationen, Teil 1-Teil 12, Bautechnik 76/77*, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1999
- [Flederer-02] Flederer, H.: *Beitrag zur Berechnung von Verbundträgern im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit unter Berücksichtigung stochastischer Größen*. Dissertation 2002, Technische Universität Dresden
- [Galgoul-78] Galgoul, N.S.: *Beitrag zur Bemessung von schlanken Stahlbetonstützen für schiefe Biegung mit Achsdruck unter Kurzzeit-*

- und Dauerbelastung. Dissertation, 1978, Technische Universität München
- [Gaughan-74] Gaughan, J.: Computer analysis of slender concrete columns. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, No. 10894 1974, ASCE, S. 2123-2141
- [Glasserman-04] Glasserman, P.: Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer-Verlag, New York, 2004
- [Grzeschkowitz-92] Grzeschkowitz, R.: Zum Trag- und Verformungsverhalten schlanker Stahlbetonstützen unter Berücksichtigung zweiachsiger Biegung. DAfStb 1992, Heft 423, Beuth Verlag
- [Habel-53] Habel, A.: Die Tragfähigkeit der außermittig belasteten Stahlbetonsäulen. Beton- und Stahlbetonbau 1953, Heft 7, Ernst & Sohn Verlag, Berlin
- [Halton-60] Halton, J.H.: On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numerische Mathematik, 1960, 2:84–90
- [Haro-94] Haro, C. E.: Ein linearisiertes Bemessungsverfahren für Stahlbetonstützen – Vergleich mit dem Modellstützenverfahren nach Eurocode 2. Dissertation 1994, TU Hamburg-Harburg
- [Hasofer-74] Hasofer, A.M. & Lind, N.C.: An exact and invariant first order reliability format, Journal of the Engineering Mechanics, Vol. 100 (1974), pp. 111-121
- [Haufe-01] Haufe, A.: Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächen-tragwerke aus Beton mit Plastizitätstheorie. Dissertation, 2001, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
- [Haug-86] Haug, E. J., Choi, K.K., Komkov, V.: Design sensitivity analysis of structural systems. Academic Press, New York, 1986
- [Haupt-00] Haupt, P.: Continuum Mechanics and Theory of Materials, Springer-Verlag, New York, 2000
- [Hokayem-03] Hokayem, P.F., Chaouki, T.A., Dorato, P.: Quasi-Monte Carlo Method in Robust Control Design, Mediterranean Conference on Control and Automation, 2003
- [Homem-06] Homem-de-Mello, T.: On Rates of Convergence for Stochastic Optimization Problems Under Non-I.I.D. Sampling, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, 2006

- [Horstmann-00] Horstmann, O.: Finite-Elemente-Gitter für das Küsteningenieurwesen auf der Basis hierarchischer Gebietsmodelle, Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Cottbus, 2000
- [JCSS-00] Joint Committee on Structural Safety: Probabilistic Model Code. Zurich: www.jcss.ethz.ch, 2000
- [Kaufmann-03] Kaufmann, N.: Physikalisch nichtlineare Analyse dreidimensionaler Stabtragwerke aus Stahlbeton mit der Methode der mathematischen Optimierung, Dissertation, Bauhaus Universität Weimar
- [Kharmanda-02] Kharmanda, G., Mohamed, A., Lemaire, M.: Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24:233 – 245, 2002.
- [Kilgore-03] Kilgore, R. A.: Object-oriented simulation with SML and Silk in .NET and Java. In *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*, ed. S. Chick, P. J. Sánchez, D. Ferrin, and D. J. Morrice, 218–224: IEEE Press., 2003
- [Kleinschmitt-03] Kleinschmitt, J.: Probabilistisch fundierte Bewertung nichtlinearer Berechnungskonzepte für die Traglastermittlung von Verbundstützen aus einbetonierten I-Profilen, Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik der TU Darmstadt, 2003
- [Kordina-75] Kordina, K.: Langzeitversuche an Stahlbetonstützen. *DAfStb* 1975, Heft 250, Ernst & Sohn Verlag Berlin
- [Kordina-76] Kordina, K., Rafla, K.F. , Hjorth, O.: Traglast von Stahlbeton-Druckgliedern unter schiefer Biegung mit Achsdruck. *DAfStb* 1976, Heft 265, Ernst & Sohn Verlag Berlin
- [Kordina-94] Kordina, K., Quast, U.: Bemessen von schlanken Bauteilen – Knicksicherheitsnachweis. *Beton-Kalender* 1994, Teil 1., Ernst & Sohn Verlag Berlin, S. 493 ff
- [Kortenhaus-03] Kortenhaus, A.: Probabilistische Methoden für Nordseedeiche, Dissertation vom Fachbereich Bauingenieurwesen der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2003
- [Kotsovos-95] Kotsovos, M.D., Pavlovic, M.N.: *Structural Concrete – Finite-element analysis for limit-state design*, 3rd edition, Thomas Telford Publications, London, 1995

- [Krätzig-97] Krätzig, W.B., Basar, Y.: Tragwerke 3 - Theorie und Anwendung der Finiten Elemente, Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 1997
- [Krommer-98] Krommer, A.R., Ueberhuber, C.W.: Computational Integration, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1998
- [Kupfer-95] Kupfer, H. B. & Gerstle, K. H.: Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 99, No. EM 4., Aug. 1973 pp. 853- 867.
- [L'Ecuyer-05] L'Ecuyer, P.: Simulation in Java with SSJ, Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference, 2005
- [Lehn-06] Lehn, J.: Einführung in die Statistik, 5. Auflage, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006
- [Leonhardt-77] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau; Dritter Teil: Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau, 3. Auflage, Springer Verlag Berlin, 1977
- [Maaß-76] Maaß, G., Rackwitz, R., Müller, K. F., Karner, G., Materna, H.: Statistische Untersuchungen von geometrischen Abweichungen an ausgeführten Stahlbetonbauteilen, SFB 96, LKI, TU München, 1976
- [MC 90] MC 90, CEB-FIP Model Code 1990. Comite Euro-International Du Beton. Thomas Telford Services Ltd., London, 1991
- [McKay-79] McKay, M.D., Beckman, R.J. and Conover, W.J.: A comparison of selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, Technometrics 21, 1979, pp: 239-245
- [Melchers-89] Melchers, R.E.: Discussion on: Adaptive sampling – An iterative fast Monte Carlo procedure. Structural Safety 6, 1989, pp. 65-66
- [Miller-05] Miller, J. A.: JSIM: A java-based simulation and animation environment. Available from www.chief.cs.uga.edu/~jam/jsim/ 2005
- [Möller-00] Möller, B., Graf, W., Schneider, R.: Probabilistische Sicherheitsbeurteilung von Stahlbeton-Konstruktionen - Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie erster Ordnung, Bautechnik 2000, Heft 77, Ernst & Sohn Verlag Berlin

- [Möller-99] Möller, B., Graf, W., Hoffmann, A., Beer, M.: Fuzzy-Modelle zur Sicherheitsbeurteilung von Stahlbetontragwerken, Forschungsbericht, TU Dresden, Lehrstuhl für Statik, 1999
- [Naser-95] Naser, A.: Untersuchungen zu schlanken Stahlbeton-Druckgliedern mit schiefer Biegung. Dissertation, 1995, Ruhr-Universität Bochum
- [Niederreiter-87] Niederreiter, H.: Point sets and sequences with low discrepancy, Monatsheft für Mathematik 104, 1987, pp. 273
- [Niederreiter-92] Niederreiter, H.: Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992
- [Nowak-00] Nowak, A. S., Collins, K. R.: Reliability of Structures, Mc Graw Hill, Boston, 2000
- [Olofsson-05] Olofsson, P.: Probability, Statistics, and Stochastic Processes, John Wiley & Sons Inc., 2005, Hoboken, New Jersey
- [Ottosen-77] Ottosen, N.S.: A Failure Criterion for Concrete, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1977, Vol. 103, pp. 527-535
- [Oumeraci-01] Oumeraci, H.; Kortenhaus, A.; Allsop, N.W.H.; De Groot, M.B.; Crouch, R.S.; Vrijling, J.K.; Voortman, H.G. (2001): Probabilistic design tools for vertical breakwaters. Rotterdam, Holland: Balkema, pp. 392
- [Petersen-82] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. 2. durchgesehene Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig, 1982
- [Petryna-06] Petryna, Y.: Lebensdauerprognose für Bauwerke – was ist notwendig und realistisch?, Proc. 10. Dresdner Baustatik-Seminar, Dresden, 2006
- [Pfeiffer-04] Pfeiffer, U.: Die nichtlineare Berechnung ebener Rahmen aus Stahl- und Spannbeton mit Berücksichtigung der durch das Aufreißen bedingten Achsdrehung. Dissertation, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2004
- [Plate-93] Plate, E. J.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1993
- [Popovics-73] Popovics, S.: A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. Cement and Concrete Research, Vol. 3., Pergamon Press, 1973

- [Press-07] W. H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2007
- [Proske-04] Proske, D.: Katalog der Risiken - Risiken und ihre Darstellung, Eigenverlag Dresden, 2004
- [Quast-81] Quast, U.: Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone, Beton- und Stahlbetonbau 76, 1981
- [Quast-07] Quast, U.: Nichtlineare Statik im Stahlbetonbau, 1. Auflage, Bauwerk Verlag, Berlin, 2007
- [Rackwitz-78] Rackwitz, R., Fießler, B.: Structural reliability under combined random load sequences, Computer & Structure 9, pp. 489-494
- [Riks-72] Riks, E.: The Application of Newtons Method to the Problem of Elastic Stability, Journal of applied mechanics 39, 1972
- [RILEM-04] RILEM Publications SARL.: Fracture energy determination of SFRC from notched beam tests, 6th International RILEM Symposium on Fibre Reinforced Concretes, 2004
- [Ross-06] Ross, D., Adam, U., Bayer, V.: Design Reliability Analysis, 24th CAD-FEM Users' Meeting, 2006
- [Rubinstein-81] Rubinstein, R.Y.: Simulation and the Monte Carlo Methods, Wiley, New York, 1981
- [Saltelli-00] Saltelli, A., Chan, K., Scott, E.M.: Sensitivity Analysis, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, 2000
- [Sarja-96] Sarja, A, Vesikari, E.: Durability design of concrete structures, Report of RILEM TC-130-CSL, London, 1996
- [Schneider-94] Schneider, J.: Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen – Grundwissen für Ingenieure, vdf Verlag der Fachvereine Zürich, 1994
- [Schnetzler-00] Schnetzler, H.: Stochastische Baustoffmodelle für Beton, Dissertation am Institut für Baustatik und Konstruktion, 2000, ETH Zürich
- [Schwarz-01] Schwarz, S.: Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten. Bericht Nr. 34 (2001), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
- [Schwuchow-08] Schwuchow, R.: The Application of Quasi-Monte Carlo Method in Reliability Studies of Slender Concrete Columns. In Proc. of 7th International PhD Symposium in Civil Engineering, Stuttgart, 2008

- [Schwuchow-07] Schwuchow, R.: Traglastversuche an schlanken Stahlbetonstützen unter schiefer Biegung, Versuchsauswertung - 480701, LS für Massivbau, BTU Cottbus, 2007
- [Schwuchow-05] Schwuchow, R.: Modellierung Nichtlinearen Materialverhaltens bei Iterativen Numerischen Berechnungen, Forum Bauinformatik 2005 – Junge Wissenschaftler forschen, Progress in Bauinformatik, Cottbus, 20057
- [Six-01] Six, M.: Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau. Dissertation TU Darmstadt, 1. Auflage Darmstadt, Eigenverlag, Heft 3, 2001
- [Sobol'-76] I. M. Sobol': Uniformly distributed sequences with an additional uniform property, USSR Comput. Math. Math. Phys. Academy of Sciences, 1976, 16:236–242
- [Spaethe-92] Spaethe, G.: Die Zuverlässigkeit tragender Baukonstruktionen. 2. Auflage, Springer Verlag Berlin, 1992
- [SSJ-08] SSJ: Stochastic Simulation in Java, SSJ & User Guide, Copyright (C) 2008 Pierre L'Ecuyer and Université de Montréal <http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/ssj/indexe.html>, 2008
- [Strauss-07] Strauss, A., Bergmeister, K., März, S.: Zuverlässigkeitsbetrachtungen exzentrisch belasteter Stahlbetonstützen. Beton- und Stahlbetonbau 2007, Heft 4, Ernst & Sohn Verlag Berlin
- [Szerszen-05] Szerszen, M., Szwed, A., Nowak, A.S.: Reliability Analysis for Eccentrically Loaded Columns. Technical Paper, ACI Structural Journal, Title 102 (2005), S. 676 - 688
- [Taerwe-06] Taerwe, L.: Analysis and modelling of autocorrelation in concrete strength series, Proc. of the 4th International Probabilistic Symposium, S. 29-43, 2006
- [Vismann-95] Vismann, U.: Zuverlässigkeitstheoretische Verifikation von Bemessungskriterien im Stahlbetonbau, Dissertation, TU München, 1995
- [Wienecke-85] Wienecke, U.J.: Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbeton- und Spannbetonstäben nach einer konsequenten Theorie II. Ordnung unter allgemeiner Belastung. Dissertation 1985, Technische Hochschule Darmstadt
- [Wriggers-01] Wriggers, P.: Nichtlineare Finite-Element-Methoden, Springer Verlag, Berlin, 2001

- [Zienkiewicz-77] Zienkiewicz, O.C.: The finite element method, 3rd edition, McGraw-Hill, London, 1977

9 Anlagen

Anlage 1: Ergebnisse aus den Stützenversuchen

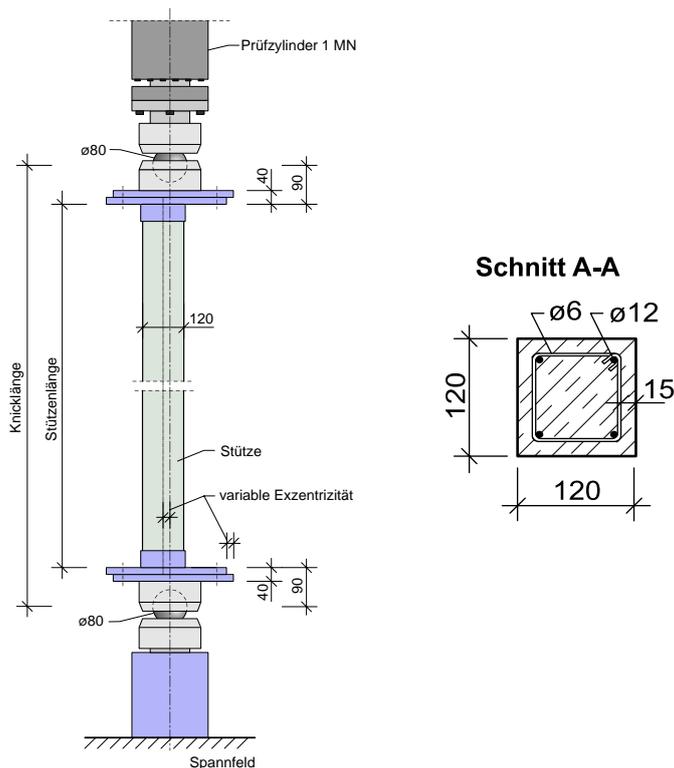


Abb. A-1: Versuchsaufbau der 480701-Versuchsreihe nach [Schwuchow-07]

Tabelle 9-1: Ergebnisse der 480701-Versuchsreihe nach [Schwuchow-07]

Programm	f_c	$-\varepsilon_{c1}$	E_{cm}	e_x / e_y	L	N_{exp}
480701	[N/mm ²]	1/1000	[N/mm ²]	[m]	[m]	[kN]
VK 3	35,9	2,29	31400	0,2 / 0,0	2,70	204
VK 4	35,2	2,28	31100	0,2 / 0,2	2,70	153
VK 5	47,0	2,45	34300	0,2 / 0,2	2,70	184
VK 6	40,6	2,36	32700	0,2 / 0,2	3,00	138,5
VK 7	50,5	2,50	35050	0,2 / 0,1	3,00	206
VK 8	58,6	2,59	36900	0,2 / 0,2	2,52	204

Anlage 2: Zusammenstellung der Stützenversuche von KORDINA

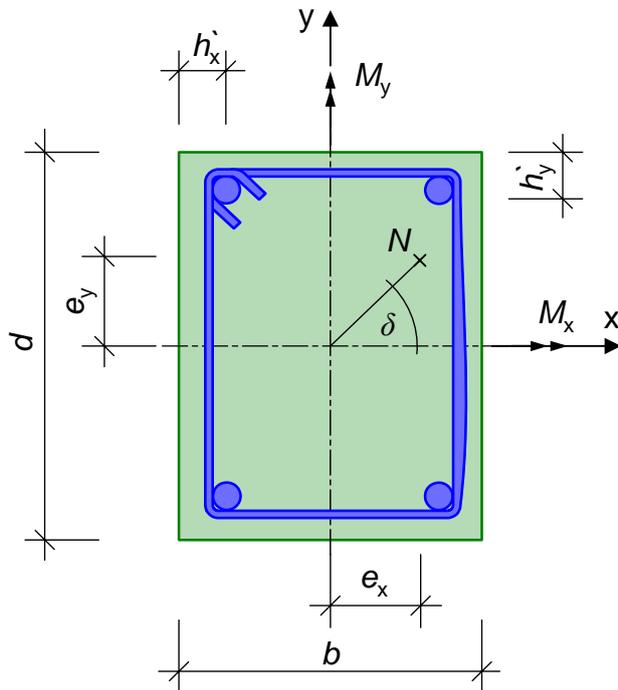


Abb. A-2: Stahlbetonstützenquerschnitt nach [Kordina-76]

Tabelle A-1: Parameter der KORDINA-Versuchsreihe [Kordina-76]

Versuch	b [cm]	d [cm]	e [cm]	δ [°]	Beton [N/mm ²]	d [mm]	h_x'/b	h_y'/d	Traglast [kN]
S IIIa	17,25	17,3	6,1	45	41,17	10	0,122	0,123	115
S IIIb	17,1	17,7	2,1	45	32,39	10	0,117	0,13	332
S IIIc	17,15	17,5	12,2	45	32,00	10	0,117	0,124	54
S III d	17,2	17,45	2,6	22,5	34,93	10	0,122	0,128	220
S IVa	17,3	17,5	6,6	22,5	26,24	14	0,145	0,149	130
S IVb	17,15	17,2	13,1	22,5	28,98	14	0,14	0,141	75
S Ivc	17,1	17,2	2,6	22,5	35,51	14	0,135	0,137	296
S Ivd	17,2	17,6	6,7	22,5	41,56	20	0,172	0,179	224
S Va	17,3	17,3	6,6	22,5	34,05	10	0,142	0,142	125
S Vb	17,3	17,35	6,1	45	41,37	10	0,139	0,14	150
S VI	17,25	26,8	8,8	67,5	33,66	12	0,149	0,101	270
S VII	17,3	26,7	8,65	45	28,98	12	0,143	0,097	173
S VIII	17,25	26,7	4,31	67,5	27,12	12	0,139	0,094	450
S IX	17,3	26,6	4,33	45	28,59	12	0,139	0,09	376
S X	17,35	26,65	8,68	67,5	28,00	20	0,183	0,114	460
S XI	17,5	26,7	8,75	45	28,68	20	0,183	0,115	304
S XII	17,4	26,55	4,35	67,5	24,78	20	0,184	0,116	550
S XIII	17,4	26,5	4,35	45	25,07	20	0,18	0,117	450

Die Stützen dieser Versuchsreihe sind in beiden Richtungen gelenkig gelagert und haben eine Länge von 5,145 m.

Anlage 3: SSJ and Colt library

SSJ: Stochastic Simulation in Java basiert auf Colt library des CERN

Packages `cern.colt*`, `cern.jet*`, `cern.clhep`

Copyright (c) 1999 CERN - European Organization for Nuclear Research.

Permission to use, copy, modify, distribute and sell this software and its documentation for any purpose is hereby granted without fee, provided that the above copyright notice appear in all copies and that both that copyright notice and this permission notice appear in supporting documentation. CERN makes no representations about the suitability of this software for any purpose. It is provided "as is" without expressed or implied warranty.

Anlage 4: Lösung der Validierungsbeispiele nach Abschnitt 5.4

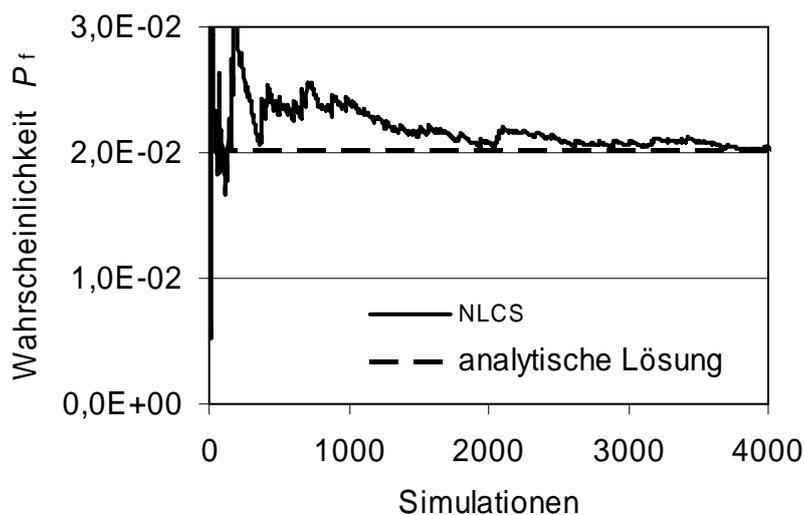


Abb. A-3: Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_1

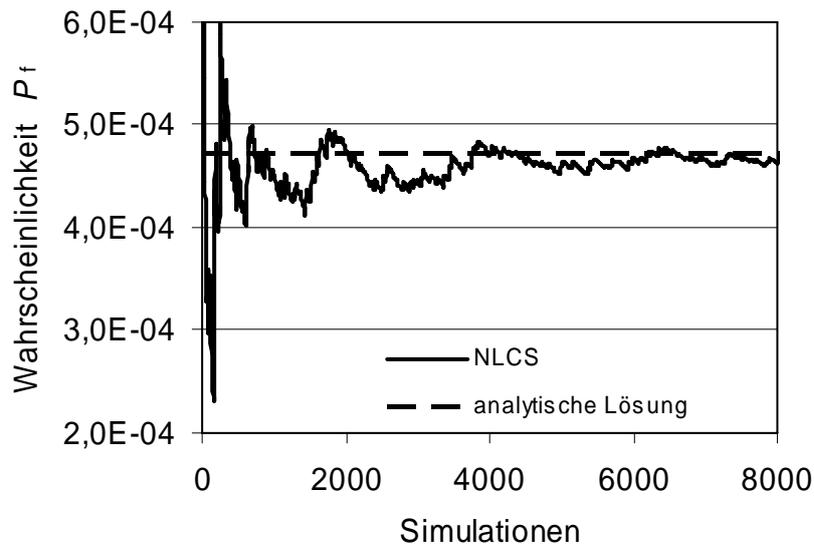


Abb. A-4: Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_2

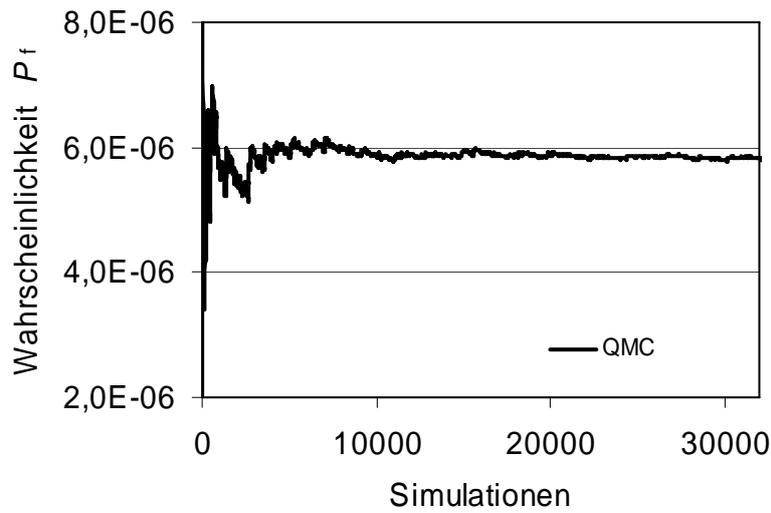


Abb. A-5: Versagenswahrscheinlichkeit Beispiel NB_3

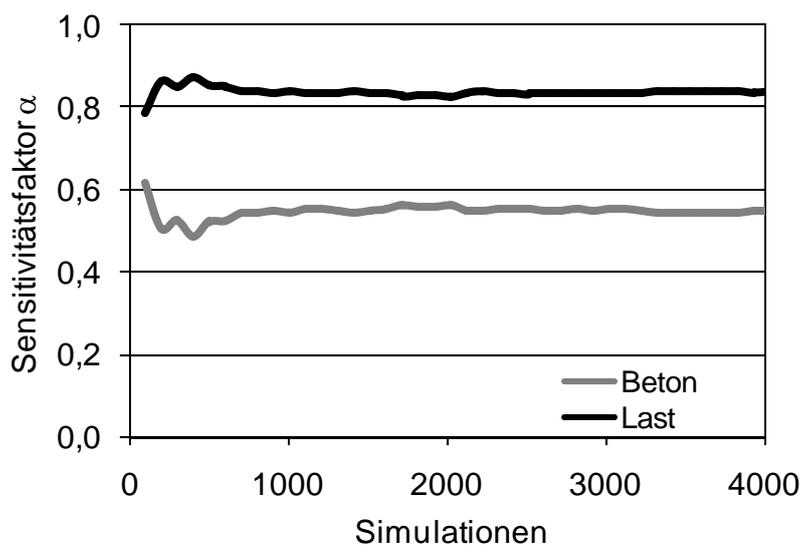


Abb. A-6: Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_1

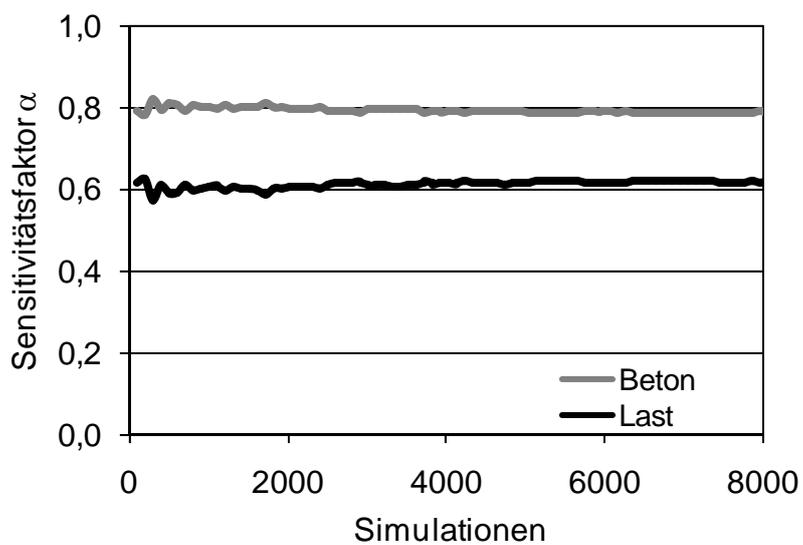


Abb. A-7: Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_2

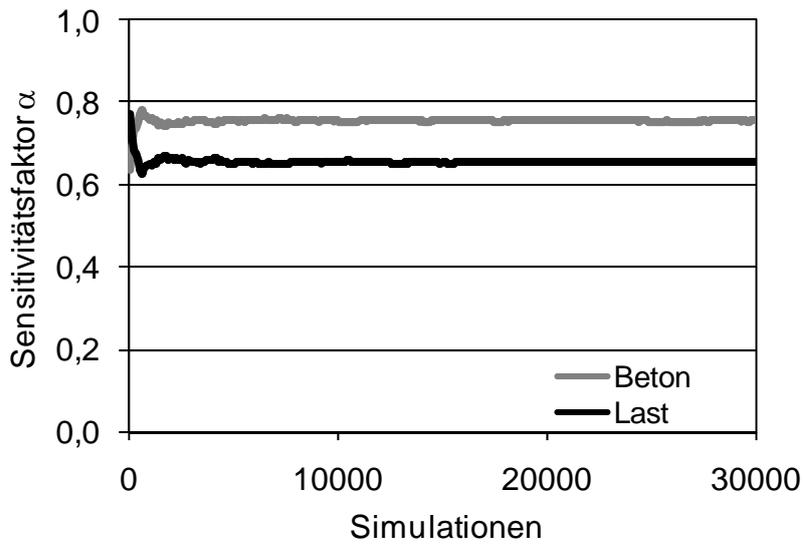


Abb. A-8: Sensitivitätsanalyse Beispiel NB_3

Anlage 5: Zuverlässigkeitsanalyse für QS1

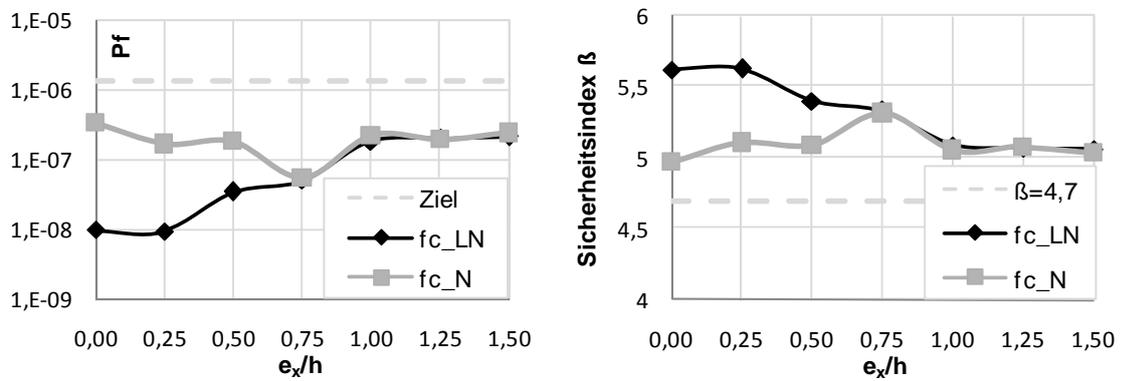


Abb. 9-9: Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Exzentrizität

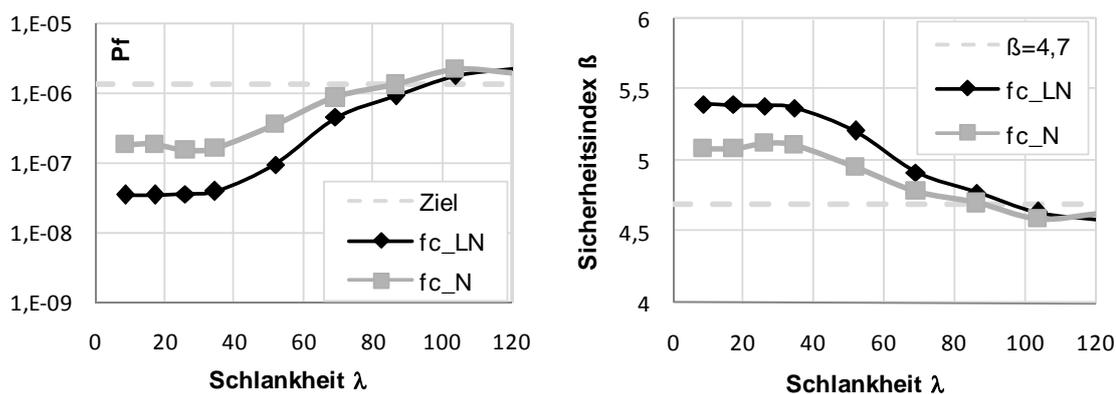


Abb. 9-10: Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Schlankheit

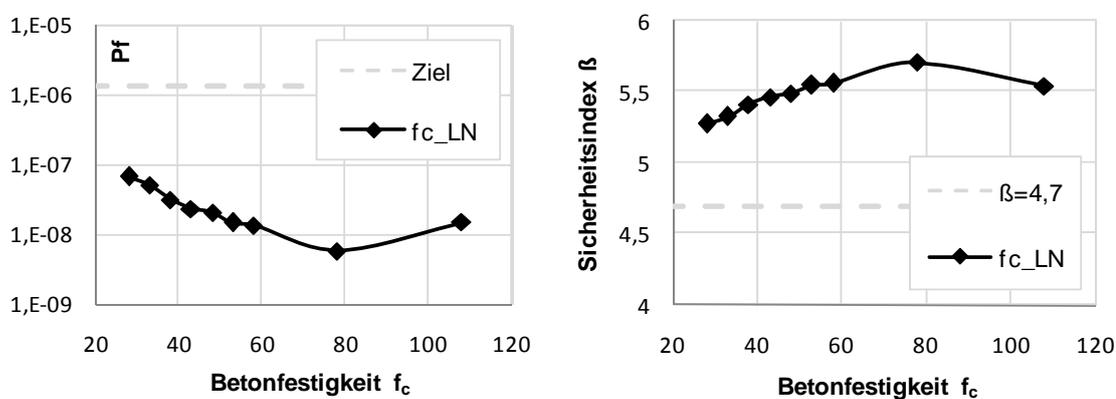


Abb. 9-11: Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm²]

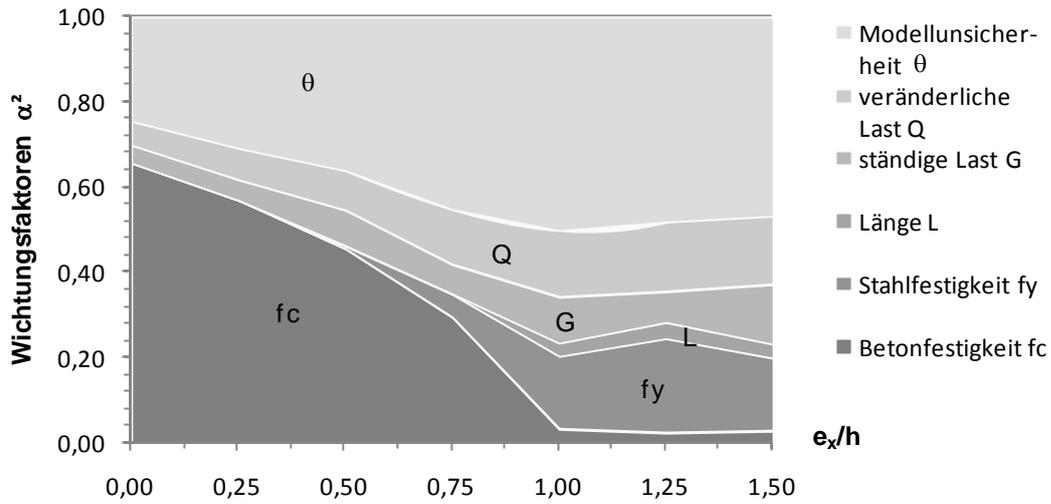


Abb. 9-12: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Exzentrizität

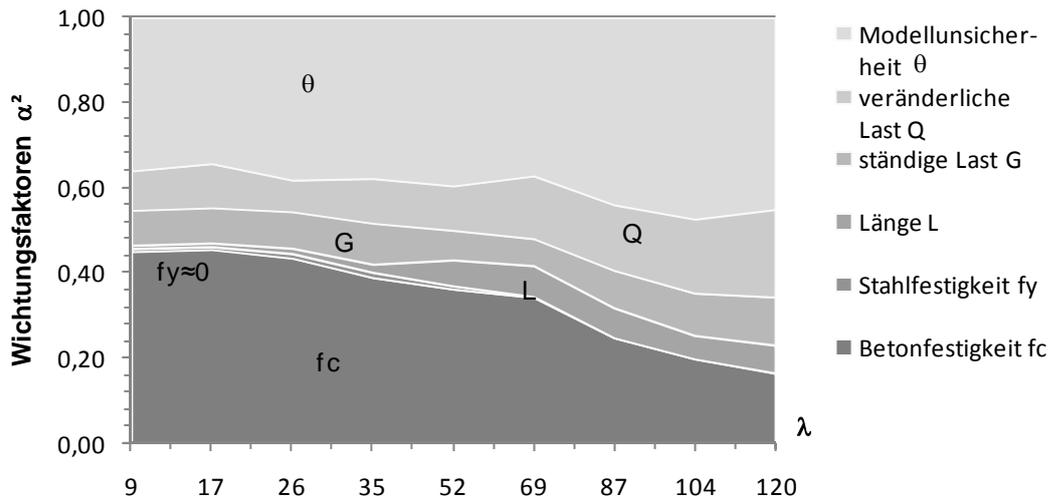


Abb. 9-13: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Schlankheit

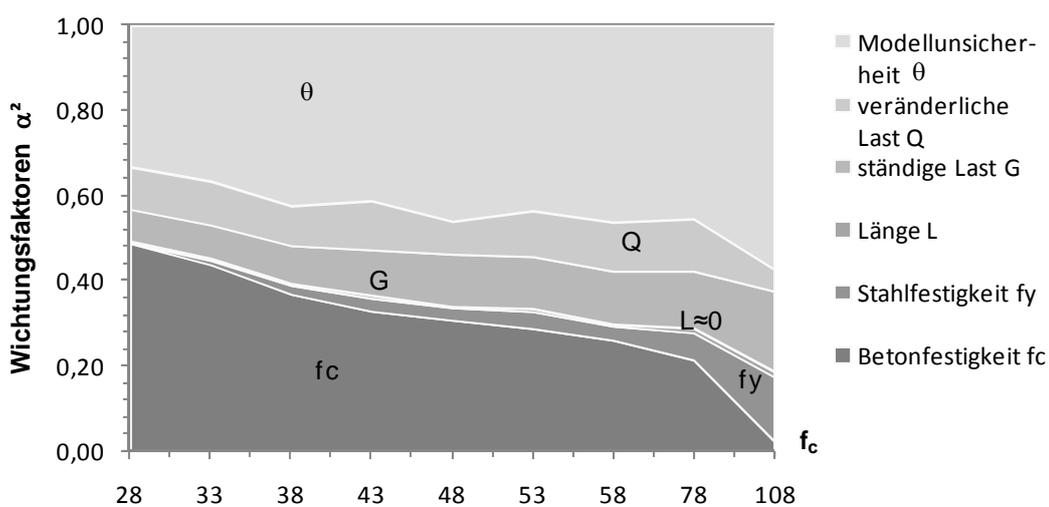


Abb. 9-14: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS1 mit variabler Betonfestigkeit [N/mm²]

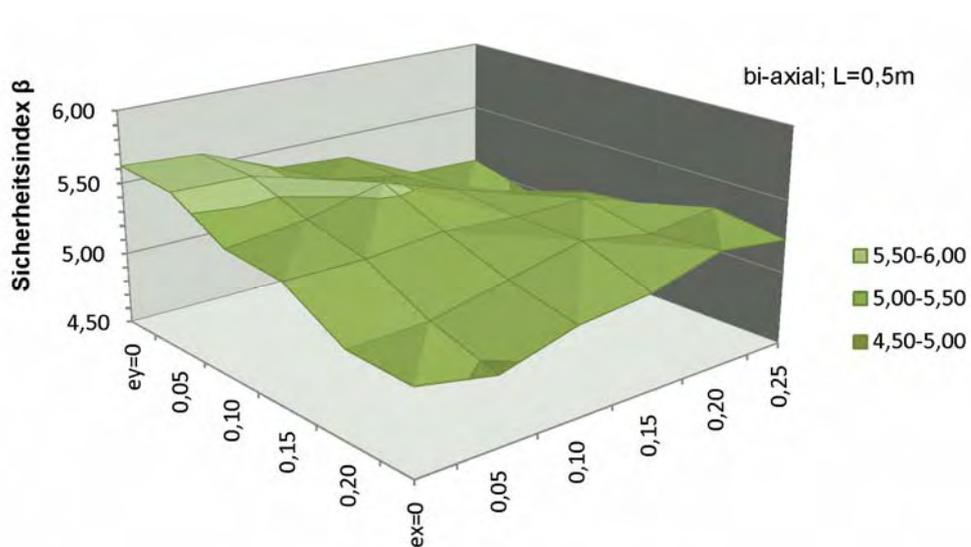


Abb. 9-15: Sicherheitsoberfläche für QS1 mit L= 0,5 m

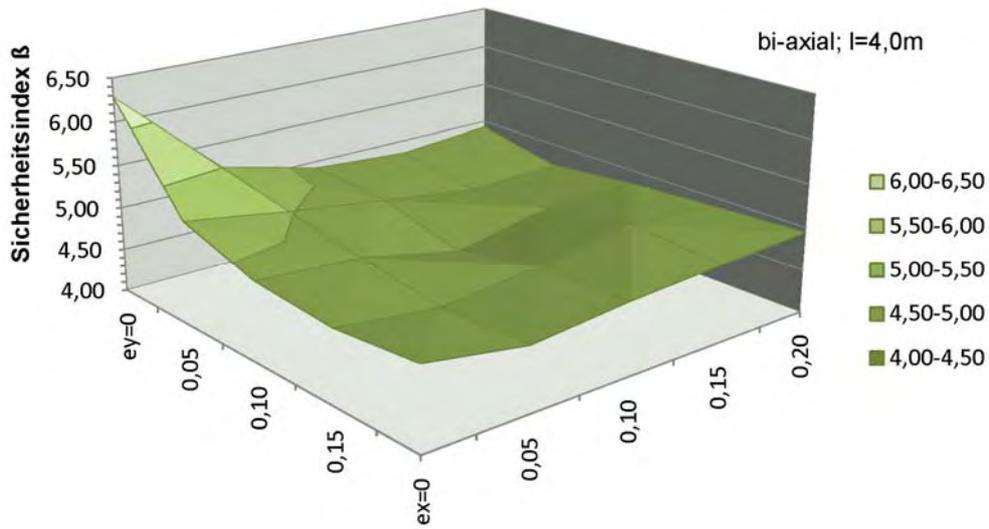


Abb. 9-16: Sicherheitsoberfläche für QS1 mit L= 4,0 m

Anlage 6: Zuverlässigkeitsanalyse für QS2

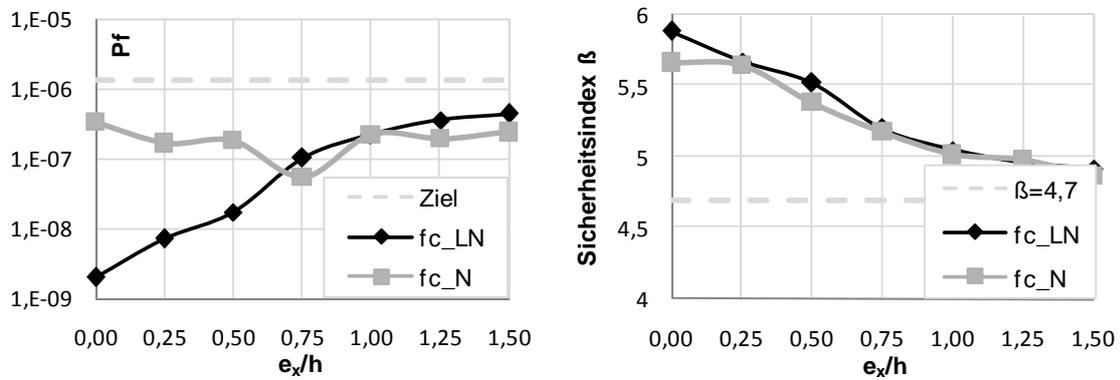


Abb. 9-17: Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS2 mit variabler Exzentrizität

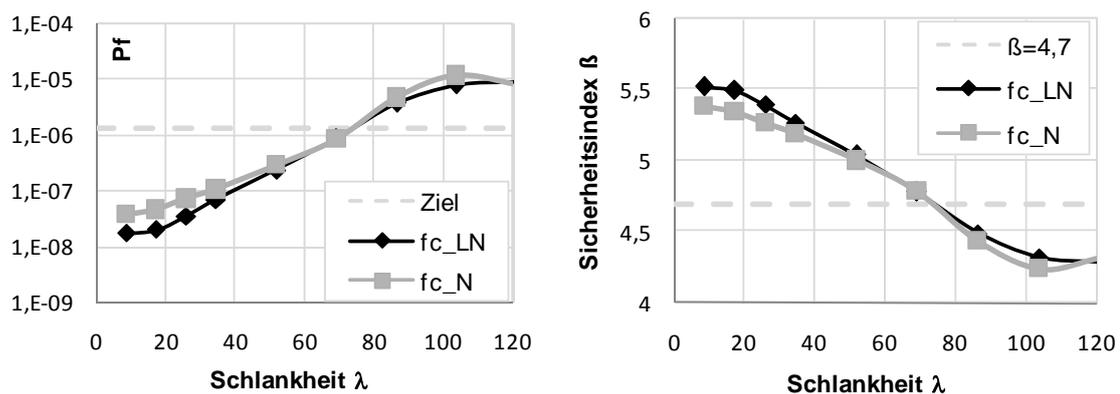


Abb. 9-18: Versagenswahrscheinlichkeiten und Sicherheitsindizes für QS2 mit variabler Schlankheit

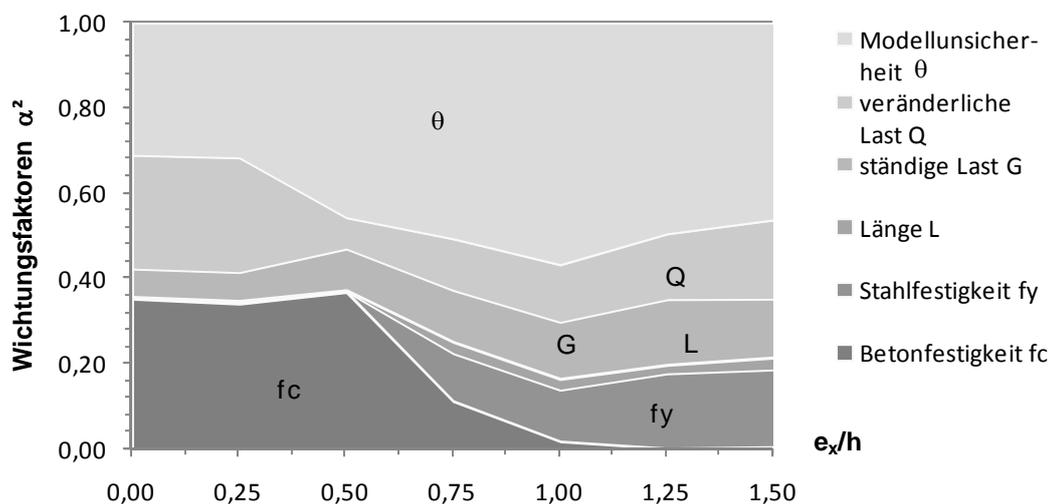


Abb. 9-19: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 mit variabler Exzentrizität

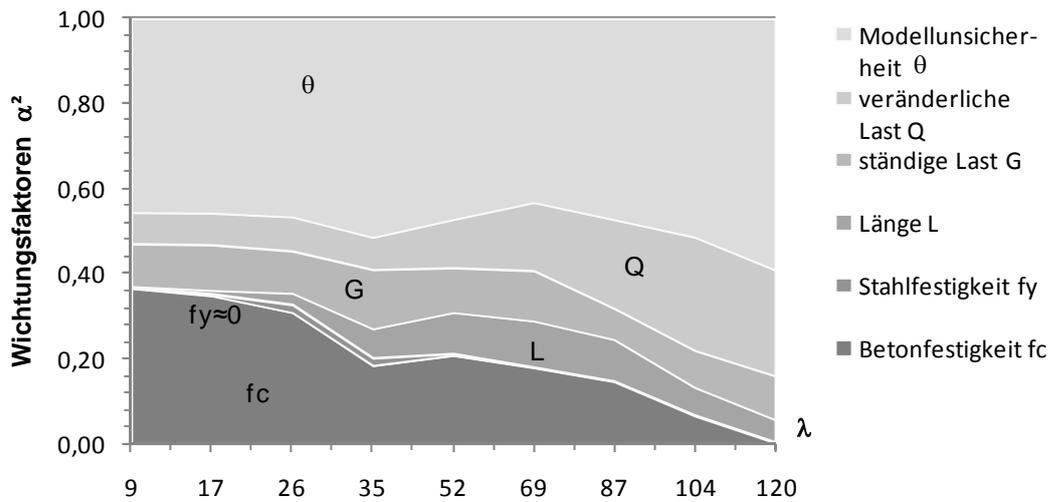


Abb. 9-20: Ergebnisverlauf der Sensitivitätsfaktoren für QS2 mit variabler Schlankheit

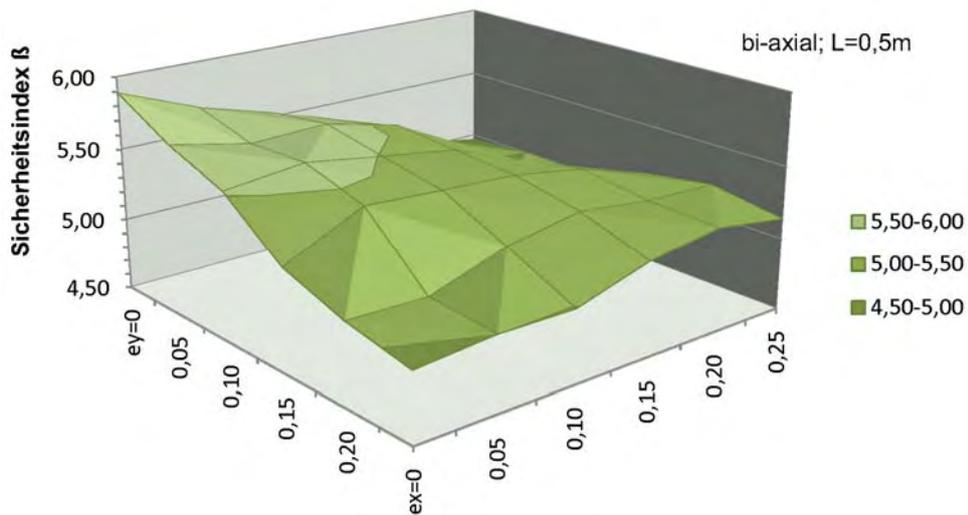


Abb. 9-21: Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit L= 0,5 m

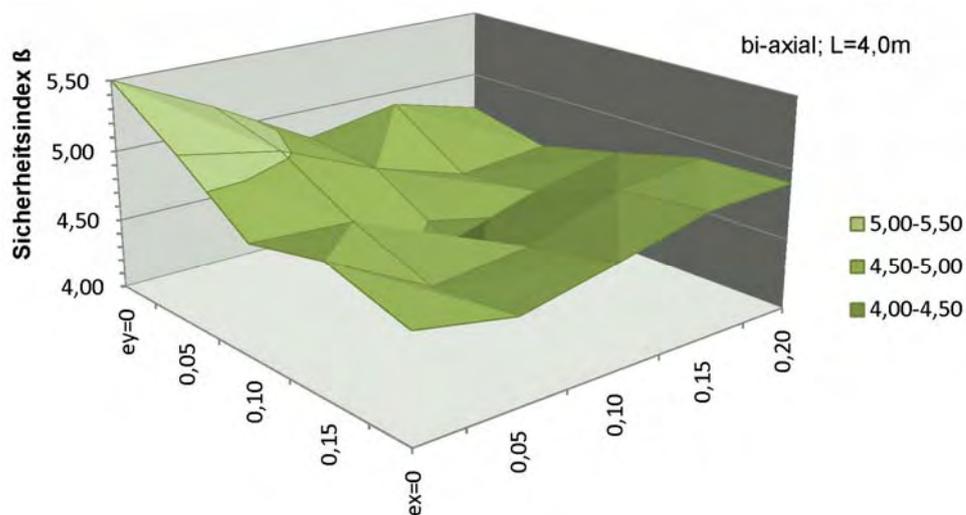


Abb. 9-22: Sicherheitsoberfläche für QS2 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L=4,0$ m

Anlage 7: Zuverlässigkeitsanalyse für QS3

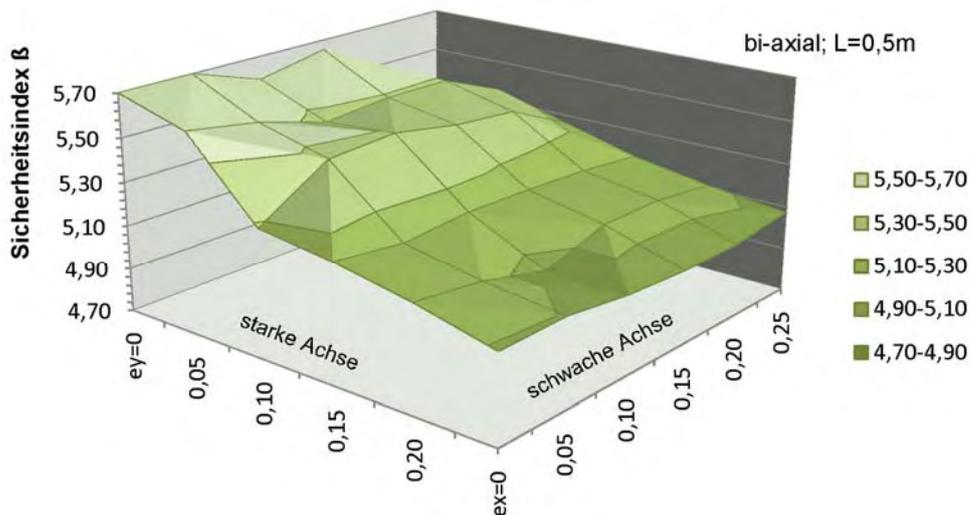


Abb. 9-23: Sicherheitsoberfläche für QS3 unter bi-axialer Beanspruchung mit $L=0,5$ m