

# Ueber den Ausfluss erhitzten Wassers.

Von

**Emil Herrmann,**

Professor der Mechanik an der k. ung. Berg- und Forstakademie in Schemnitz.

Im vorjährigen zweiten Hefte vorliegender Zeitschrift habe ich mit Hilfe von Dr. Zeuner's schönen Versuchen über den Ausfluss von permanenten Gasen nachgewiesen, dass in allen Fällen, wo die Spannung im Ausflussgefässe 1·9mal so gross oder noch grösser ist, als die Spannung in jenem Raume, in welchem das Gas sich ergiesst, das ausfliessende Quantum unabhängig ist von der Aussenspannung und dass die Weisbach'sche Formel nur dann richtige Werthe liefert, wenn man, dem Vorgange Max Herrmann entsprechend, das Maximum des Ausflussgewichtes bestimmt.

Hiebei zeigte es sich auch, dass für eine gegen das Reservoir abgerundete cylindrische Röhre das theoretisch bestimmte Quantum mit dem thatsächlich ausfliessenden Quantum identisch und jede weitere Hypothese überflüssig ist.

In der Abhandlung: „Vollständige Theorie des gesättigten Wasserdampfes“ (vorjähriger Band dieser Zeitschrift, Seite 145 ff.) wies ich nach, dass die von mir aufgestellte Theorie auch für den Ausfluss von gesättigtem Wasserdampf auf ein Maximum der ausfliessenden Masse führe, wenn die Spannung im Reservoir circa 1·761mal so gross ist als die Aussenspannung. Auch hier ist die theoretisch bestimmte Menge identisch mit der thatsächlich beobachteten Ausflussmenge. Es unterliegt demnach keinem Zweifel, dass die von Max Herrmann angeregte Modification der Ausflussformel für alle elastischen Flüssigkeiten giltig und nothwendig ist; es fragt sich nur noch, ob dieselbe nicht auch auf den Ausfluss erhitzter Flüssigkeiten angewendet werden müsse?

Nachdem uns die Zustandsgleichungen der tropfbaren Flüssigkeiten vorläufig noch mangeln, so lässt sich das Problem noch nicht allgemein behandeln, sondern wir müssen uns auf die Untersuchung des Ausflusses der vorgewärmten Flüssigkeiten beschränken.

Ehe ich auf die mathematische Behandlung dieser Frage übergehe, will ich nochmals erklären, was ich unter vorgewärmter Flüssigkeit verstehe und einige Einwürfe besprechen, welche gegen meine Theorie gemacht wurden.

Vorgewärmt nenne ich eine Flüssigkeit, wenn dieselbe von solcher Temperatur, dass die geringste Wärmezufuhr bei constantem Drucke eine continuirliche Dampfentwicklung zur Folge hat. Jede Flüssigkeit, welche mit ihrem eigenen Dampfe in Berührung steht, ist sonach vorgewärmt, während der Dampf unter solchen Umständen gesättigt genannt wird. Ich glaube nun, dass die Temperatur der vorgewärmten Flüssigkeit gleich ist jener des gesättigten Dampfes und dass bei einer ruhigen, oberflächlichen Verdampfung ein wesentlicher Unterschied zwischen den Temperaturen der zwei sich berührenden Aggregatformen nicht bestehen kann.

Die Unterschiede, welche Marcet in der Temperatur des siedenden Wassers und des daraus sich entwickelnden Dampfes beobachtete, rühren meiner Meinung nach von den mehr oder weniger discontinuirlichen und tumultuarischen Vorgängen beim Sieden her. In ähnlicher Weise spricht sich auch Jamin aus. Gay-Lussac mass bei der Bestimmung der Spannkraft der Dämpfe bei niederen Temperaturen nur die Temperatur der Flüssigkeit und hielt jene des Dampfes für identisch mit dieser.

Nicht alle Physiker sind hiernit einverstanden; so z. B. sagt Wüllner nicht ausdrücklich, dass die Temperatur der zur

Verdampfung bereiten Flüssigkeit gleich sei der Temperatur des entstehenden Dampfes, und dass eine weitere Steigerung der Temperatur der Flüssigkeit schon eine unregelmässige Verzögerung der Verdampfung ist. Wüllner sagt nur, dass eine Maximaltemperatur der Flüssigkeit existire, aus welcher Dampf von bestimmter Spannkraft und eventuell niedrigerer Temperatur sich entwickelt. Ich brauche wohl nicht erst zu erwähnen, dass man seither Wasser unter atmosphärischem Drucke selbst bis zu 120° erhitzen konnte, ohne dass es verdampfte, respective in's Sieden gerieth und dass man die Marcet'schen Versuche als einfache Siedeverzüge erkennen lernte. Aehnliche Ansichten wie Wüllner verfocht auch Herr Szily in einigen an mich gerichteten Briefen. Herr Szily bestritt die Gleichheit der Temperatur des vorgewärmten zum Verdampfen unter constantem Drucke bereiten Wassers mit der Temperatur des sich daraus entwickelnden gesättigten Dampfes mit grosser Beharrlichkeit.

Die soeben besprochene Frage ist insoferne von Wichtigkeit, als man nur dann, wenn die Gleichheit der Temperatur des vorgewärmten Wassers und des gesättigten Dampfes bei gleichem Drucke constatirt ist, für beide dieselbe Beziehung zwischen Spannung und Temperatur den Rechnungen zu Grunde legen und beweisen kann, dass die wahre Wärmecapacität unabhängig ist von der Aggregatform des Stoffes.

In der That nehmen weder hervorragende Physiker, wie Gay-Lussac, Regnault und Jamin, noch die Autoren der mechanischen Wärmetheorie, wie Clausius, Zeuner, Rankine und Schmidt einen nothwendigen Temperatur-Unterschied zwischen vorgewärmter Flüssigkeit und gesättigtem Dampfe von gleicher Spannung an, und ich halte mich umso mehr für berechtigt, denselben zu leugnen, als sich sonst der sonderbare Fall ergeben würde, dass die soeben durch Condensation entstandene Flüssigkeit nicht bereit wäre zur Verdampfung, weil ihre Temperatur nur jener des Dampfes gleich wäre.

Eine andere strittige Frage bildet die Grösse der wahren Wärmecapacität der Flüssigkeiten, insbesondere des Wassers.

Clausius spricht auf Seite 267 der ersten Auflage der Sammlung seiner Abhandlungen die Ansicht aus, dass die wahre Wärmecapacität der Körper jene Grenze sei, welcher sich die specifische Wärme bei constantem Volumen mit zunehmender Ueberhitzung nähert. Im Zusatze B zur VI. Abhandlung führt Clausius für Wasserdampf den Werth  $c_v = 0\cdot370$  als specifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes bei constanten Volumen an, woraus man schliessen kann, dass Clausius diese oder doch eine nicht sehr abweichende Zahl als wahre Wärmecapacität des Wassers in allen Aggregatformen anzusehen geneigt ist.

Meine Studien haben mich nicht auf diese Zahl geführt, sondern sie bestätigen die Ansicht Rankine's („A Manual of the Steam Engine and other Prime Movers“), dass die wahre Wärmecapacität des Wassers (in allen Aggregatformen) nahezu gleich sei der durch Versuche bestimmten specifischen Wärme des Wassers bei constantem Drucke. Rankine glaubt freilich, dass die wahre Wärmecapacität nur innerhalb ein und desselben Aggregatzustandes constant sei, für verschiedene Aggregatformen aber verschieden sein könne.

In meiner oben erwähnten Abhandlung (Ergänzungsband 1876, Seite 134 ff.) stelle ich unter der Bedingung, dass für die vorgewärmte Flüssigkeit und den gesättigten Dampf dasselbe

Spannungsgesetz  $p = f(t)$  gelte, für die Energie eines Gemisches die Gleichung auf (Seite 148, Gleichung 9')

$$U = U_0 + \int k dt + A \left( T v \frac{dp}{dt} - p v \right),$$

wenn ich nämlich statt des dort genommenen bestimmten Integrals das allgemeine einführe und die absolute Constante mit  $U_0$  bezeichne.

Die sogenannte Flüssigkeitswärme wird nahezu ausschliesslich zur Erhöhung der Energie verwendet, denn die äussere Arbeit, welche eine Flüssigkeit bei ihrer Erwärmung verrichtet, ist verschwindend klein. Ferner ist der Unterschied zwischen der Flüssigkeitswärme bei constantem Drucke und jener der fortwährend vorgewärmten Flüssigkeit ebenfalls ein verschwindender, weil nach den Experimenten Joul's eine Druckerhöhung von 24·34 Atmosphären eine Erwärmung des Wassers um nur 0·0544° bewirkt.

Man kann daher die Flüssigkeitswärme des fortwährend vorgewärmten Wassers ohne weiteres gleichsetzen mit der von Regnault bestimmten bei constantem Drucke und dieselbe zugleich als Energievermehrung betrachten.

Bezeichnet man mit  $\sigma$  das spezifische Volumen der Flüssigkeit, so wird

$$q = \int_0^t k dt + \sigma A \left( T \frac{dp}{dt} - p \right) - A \sigma_0 \left( a \frac{dp}{dt} - p \right)_0,$$

und

$$\int_0^t k dt = q - A \sigma \left( T \frac{dp}{dt} - p \right) + A \sigma_0 \left( a \frac{dp}{dt} - p \right)_0.$$

Durch Einführung der in der vollständigen Theorie des Wasserdampfes gegebenen Werthe von  $\frac{dp}{dt}$  und des von Regnault gegebenen Werthes von  $q = t + 0\cdot00002 t^2 + 0\cdot0000003 t^3$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{50} \int_0^{50} k dt &= 1\cdot0008, \\ \frac{1}{100} \int_0^{100} k dt &= 1\cdot0020, \\ \frac{1}{150} \int_0^{150} k dt &= 1\cdot0002, \\ \frac{1}{200} \int_0^{200} k dt &= 0\cdot99935, \end{aligned}$$

woraus die Constanz der wahren Wärmecapacität des Wassers, sowie deren Werth = 1 hervorgeht.

Bemerkenswerth ist, dass schon Dr. Zeuner die Bemerkung machte („Grundzüge“, II. Auflage, Seite 349 unten), dass für Wasser die Differenz

$$c - \sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{u} \right) = 1$$

gesetzt werden kann. Differenzirt man die Flüssigkeitswärme nach  $t$ , so erhält man die spezifische Wärme des fortwährend vorgewärmten Wassers. Nachdem Zeuner den Ausdruck

$$A \left( T \frac{dp}{dt} - p \right)$$

mit  $\frac{\rho}{u}$  bezeichnet, so muss

$$c = k + \sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{u} \right)$$

und

$$k = 1 = c - \sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{u} \right)$$

sein.

Implicite rechnet daher Zeuner und selbst Clausius ebenfalls mit einer wahren Wärmecapacität des Wassers gleich der Einheit. Wenn Herr Szily in den „Műgyetemi Lapok“ die Möglichkeit bestreitet, dass die wahre Wärmecapacität des Wassers in allen Aggregatformen gleich der Einheit sei, so leugnet er zugleich die Richtigkeit sämtlicher auf Grundlage der Regnault'schen Versuche aufgebauten Dampftheorien.

Die Untersuchung des Ausflusses vorgewärmten Wassers ist nicht so unwichtig, als es auf den ersten Anblick scheint, weil sie einen Prüfstein bildet für Richtigkeit der einen oder der anderen Anschauung. Stimmen die Resultate meiner Rechnungen mit den leider erst in Zukunft durchzuführenden Versuchen, nun dann ist es auch erwiesen, dass: 1. die Temperatur des vorgewärmten Wassers und des gesättigten Dampfes von gleicher Spannung dieselbe ist oder aber, dass für beide die Spannung durch dieselbe Function der Temperatur bestimmt ist; 2. das für beide Aggregatformen die wahre Wärmecapacität  $k = 1$  ist.

Nachdem ich die wichtigsten Zweifel hervorgehoben und, wie ich glaube, auch entkräftet habe, kann ich ohne weitere Abschweifung das fragliche Problem behandeln.

In der vollständigen Theorie des gesättigten Dampfes gab ich (Seite 189) die drei Hauptgleichungen des adiabatischen Ausflusses eines Gemisches vorgewärmten Wassers und gesättigten Dampfes aus einem Kessel, dessen Querschnitt im Verhältniss zur Ausflussmündung sehr gross ist.

$$\begin{aligned} \log \text{nat} (a + t) + \frac{p v}{C(b + t)(a + t)} &= E_0 \dots 1) \\ w &= \sqrt{\frac{2g}{A} \left[ t_0 + \frac{p_0 v_0}{C(b + t_0)} - \left( t + \frac{p v}{C(b + t)} \right) \right]} \dots 2) \\ G &= \frac{k w}{v} \dots \dots \dots 3). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert das spezifische Volumen der Mischung in der Mündung, wenn die Mündungsspannung  $p$  bekannt ist.

Die zweite Gleichung liefert die Geschwindigkeit des Gemisches in der Mündung und die dritte Gleichung gibt das durch den Querschnitt  $k$  pro Secunde abfliessende Gewicht.

Die Mündungsspannung ist nur bis zu einer gewissen Grenze von der Aussenspannung abhängig und die Verhältnisse sind in der Regel derartig, dass die Mündungsspannung unabhängig ist von der Aussenspannung, so dass in der Regel auch das Ausflussquantum ein von der Aussenspannung unabhängiges Maximum erreicht.

Nimmt man von  $G$  den natürlichen Logarithmus und setzt man  $\frac{dG}{dt} = 0$ , so erhält man als Bedingungsgleichung für das Maximum des Gewichtes und zugleich als Bestimmungsgleichung für die in der Mündungsebene herrschende Temperatur:

$$\frac{dw}{w dt} - \frac{dv}{v dt} = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, dass nach der ersten Gleichung

$$v = [E_0 - \log(a + t)] \frac{C(b + t)(a + t)}{p} \dots 4)$$

und somit

$$\frac{p v}{C(b + t)} = [E_0 - \log(a + t)] (a + t)$$

folgt

$$w = \sqrt{\frac{2g}{A} \left\{ t_0 + \frac{p_0 v_0}{C(b + t_0)} - t - (a + t) [E_0 - \log(a + t)] \right\}} \dots 5).$$

Nimmt man von der 4. und 5. Gleichung die natürlichen Logarithmen und differenziert man hierauf nach  $t$ , so erhält man, durch Substitution in die Bedingung des Maximums:

$$\frac{1}{2} \frac{E_0 - \log(a+t)}{t_0 + \frac{p_0 v_0}{C(b+t_0)} - \{t + (a+t)[E_0 - \log(a+t)]\}} - \frac{1}{(a+t)[E_0 - \log(a+t)]} - \frac{3366 \cdot 48 - 2t}{(a+t)(b+t)} = 0.6).$$

Fliesst reines vorgewärmtes Wasser aus, so ist  
 $v_0 = \sigma = 0.001^{\text{kbm}}$  und

$$E_0 = \log(a+t_0) + \frac{p_0 \sigma}{C(b+t_0)(a+t_0)} \dots 7)$$

$$B_0 = t_0 + \frac{p_0 v_0}{C(b+t_0)} = t_0 + \frac{p_0 \sigma}{C(b+t_0)} = t_0 + \frac{p_0 \sigma}{C(b+t_0)(a+t_0)} (a+t_0) \dots 8).$$

$$\frac{D}{2} - \frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t} - \frac{1}{T_1 D - \Delta t \left(1 - D + \frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t}\right)} - \frac{3366 \cdot 48 - 2(t_1 + \Delta t)}{(a+t_1 + \Delta t)(b+t_1 + \Delta t)} = 0 \dots 10)$$

etwas leichter controliren, als durch eine abermalige ganz neue Berechnung. Ist die Correctur richtig, dann ergibt sich:

$$w = \sqrt{\frac{2g}{A} \left[ B_0 - B_1 - \Delta t \left( D - \frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t} \right) \right]}$$

und

$$v = 2 \left( \frac{D}{2} - \frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t} \right) \frac{C(b+t)(a+t)}{p}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit der Gleichung 10), wenn man berücksichtigt, dass  $T_1$  gewöhnlich grösser als 373 ist, wogegen  $\Delta t < 1$ , so dass  $\log(T_1 + \Delta t)$  bis auf sieben Decimalen genau durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \log(T_1 + \Delta t) &= \log T_1 + 2 \frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t} = \\ &= \log T_1 + \frac{\Delta t}{T_1 + \frac{\Delta t}{2}} \end{aligned}$$

dargestellt werden kann.

Zur Erläuterung des Ganges der Rechnung wähle ich die Temperatur des Wassers im Kessel  $t_0 = 180^\circ$  und bediene mich der II. Tabelle der vollständigen Theorie des Wasserdampfes. Man findet daselbst:

$$\log p_0 = 5.01010; \frac{\sigma p_0}{C(b+t_0)(a+t_0)} = 0.0055587,$$

$$\log(273 + 180) = 6.1158921,$$

somit  $E_0 = 6.1214507$  und

$$B_0 = t_0 + \frac{p_0 \sigma}{C(b+t_0)(a+t_0)} (a+t_0) = 182.5180458.$$

Aus Gleichung 9) folgt:

$$\log p = 4.96360, \text{ weshalb } t_1 = 175.3 \text{ ist.}$$

Man findet nun

$$\log(273 + 175.3) = \log 448 + \frac{0.3}{448 \cdot 15} = 6.1054626,$$

$$D = E_0 - \log T_1 = 0.0159881, B_0 - B = 0.0505806, D T_1 = 7.1674652,$$

$$\frac{1}{2} \frac{E_0 - \log(a+t_1)}{B_0 - B} = 0.158046, \frac{1}{D T_1} = 0.139519,$$

$$\frac{3366 \cdot 48 - 2 t_1}{(a+t_1)(b+t_1)} = 0.018558.$$

Die Bestimmung der Maximal-Ausflussmenge erfordert demnach die Lösung der Gleichung 6), was ohne weitere Anhaltspunkte eine recht missliche Sache ist. Ich überzeugte mich jedoch davon, dass für gewöhnliche Spannungen die Gleichung:

$\log p = 0.10380 + 0.97 \log p_0 \dots 9)$   
 recht gute Annäherungswerthe liefert, wenn  $p$  und  $p_0$  in Kilogr. pro  $\square^m$  verstanden werden. Will man  $p_0$  in Atmosphären substituiren,  $p$  aber in Kilogr. pro  $\square^m$  erhalten, so ist:

$$\log p = 3.99760 + 0.97 \log p_0 \dots 9').$$

Hat man mittelst der Gleichung 9), oder 9') einen angehöhten Werth  $t_1$  der Temperatur ermittelt und die Werthe

$$(a+t_1) = T_1,$$

$$E_0 - \log(a+t_1) = D,$$

$B_0 - t_1 - (a+t_1)[E_0 - \log(a+t_1)] = B_0 - B_1$   
 berechnet, so kann man die Correctur der Temperatur mittelst der Gleichung

Der Werth auf der linken Seite der Gleichung 6) ist daher  
 $0.158046 - 0.158077 = -0.000031$  statt Null.

So oft die Differenz negativ ist, ist aber die Temperatur zu klein.

Nun nehme ich  $\Delta t = 0.1$ , also  $t = 175.4$ , und benütze die Gleichung 10), in welcher

$$\frac{\Delta t}{2 T_1 + \Delta t} = \frac{0.1}{896.6 + 0.1}$$

und erhalte auf der linken Seite:

$$0.160801 - 0.160010 = +0.00071 \text{ statt Null.}$$

Die positive Differenz deutet auf eine zu grosse Temperatur.

Durch Interpolation ergibt sich die wahre Temperatur

$$0.1 : 0.000822 = \Delta t : 0.000031$$

$$\Delta t = 0.004, \text{ d. i. } t = 175.304.$$

Man kann sich jedoch immer mit einer Genauigkeit bis  $0.01$  Grad begnügen, und im vorliegenden Falle mit  $t = 175.30$  weiter rechnen. Es findet sich die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{19.612 \times 423.6 \times 0.0505806} = 20.5^m,$$

das spezifische Volumen

$v = 0.0159881 \times \text{num, } \log(0.29246 - 1) = 0.003135^{\text{kbm}}$ ,  
 das pro Secunde und pro  $\square^m$  ausströmende Gewicht in Kilogr.

$$G = \frac{w}{v} = 6539^{\text{kg}},$$

der spezifische Dampfgehalt in der Mündung

$$x = \frac{0.003135 - 0.001}{0.21195 - 0.001} = 0.0101.$$

Dem Volumen nach besteht das Gemische in unserem Falle aus  $68.1\%$  Dampf und  $31.9\%$  Wasser. Dem Gewichte nach aber aus  $99\%$  Wasser und  $1\%$  Dampf.

Es muss sich das so berechnete Quantum natürlich stark von jenem unterscheiden, welches man erhält, wenn man annimmt, dass in der Mündung des cylindrischen Mundstückes die atmosphärische Pressung herrsche. In der That führt Dr. Zeuner in den Grundzügen, Seite 421, unter der oben erwähnten Annahme die Werthe an:

$$t_0 = 180.41, p_0 = 10 \text{ Atm.}, w = 258.02^m,$$

$$G = 1122.9^k, x = 0.1387,$$

d. h. das ausströmende Gewicht betrüge nur circa  $\frac{1}{6}$  des von mir berechneten.

Würde sich in der Mündungsebene nicht der von mir berechnete Druck von 9.734 Atmosphären à 760<sup>mm</sup> Quecksilber auch beim Ausflusse in die freie Luft einstellen, sondern wie Dr. Zeuner annimmt, nur die äussere Spannung herrschen, so ergäbe sich der sonderbare Umstand, dass der geringere Aussen- druck ein grösseres Hinderniss für den Ausfluss wäre; man könnte dann ohne Veränderung der inneren Spannung und der Ausflussöffnung das Ausflussquantum dadurch vermehren, dass man den Strahl in einen Raum treten liesse, in welchem eine höhere Pressung herrscht als in der Atmosphäre. Dies scheint mir aber widersinnig zu sein.

Man darf indessen den Unterschied zwischen Dr. Zeuner's und meinem Resultate nicht in der abweichenden Form der Gleichungen suchen, denn Dr. Zeuner's Formeln liefern für gleiche Innen- und Mündungsspannungen Ausflussmengen, welche von jenen Mengen, die sich aus meinen Formeln ergeben, nur ganz unwesentlich unterscheiden. Diese Thatsache erweist selbst eine ganz oberflächliche Rechnung. Nach Dr. Zeuner ist (Seite 418):

$$\frac{x r}{T} = \tau - \tau_0,$$

$$A \frac{w^2}{2g} = q_0 - q - T(\tau - \tau_0) + A\sigma(p_0 - p),$$

$$G = \frac{k w}{x u + \sigma}$$

Ist nun  $t_0 = 180^\circ$ ,  $t = 175.3$ , so findet man mittelst Zeuner's Tabelle 1 a und 1 b

$$q_0 = 182.398, \quad q = 177.530, \quad A\sigma(p_0 - p) = 0.025, \\ T(\tau - \tau_0) = 4.846,$$

demnach

$$w = \sqrt{19.612 \times 423.6 (0.047)} = 19.8^m \text{ gegen } 20.5^m.$$

Ferner  $x = 0.0104$  und  $G = 6200^{kg}$  statt  $6539^{kg}$ .

Ausser dem schon angeführten scheinbaren Widerspruch, scheint auch der Umstand die Unstatthaftigkeit von Zeuner's Annahme zu constatiren, dass bei höheren Innenspannungen schon mehr reiner Dampf ausfliessen würde als reines Wasser, was wohl ebenfalls nicht recht denkbar ist.

In der nachstehenden Tabelle sind einige Werthe der Maximalmengen ausfliessenden, vorgewärmten Wassers nach der Theorie von mir und nach Zeuner's Annahme zusammengestellt, überdies ist noch das bei der gleichen Kesselspannung pro Quadratmeter und Secunde ausfliessende grösste Dampfgewicht aufgenommen.

Im Kessel		In der Mündung		Geschwindigkeit nach		Ausfliessendes Gewicht pr. □ <sup>m</sup>		Ausfliessendes Gewicht reinen Dampfes nach Verfasser
Spannung in Atmosphären à 760 <sup>mm</sup>	Temperatur Grad Cels.	Spannung in Atmosphären à 760 <sup>mm</sup>	Temperatur Grad Cels.	Verfasser	Zeuner	Verfasser	Zeuner	
2	120.65	1.8914	118.89	7.457	69.52	1908	1094	308.3
4	144.07	3.696	141.31	11.752	145.07	3194	1106	605.6
6	159.32	5.480	155.81	15.111	192.98	4420	1113	896.6
8	170.92	7.224	166.74	18.072	228.87	5518	1118	1187
10	180.41	8.963	175.71	20.546	258.02	6591	1123	1481
12	188.54	10.674	183.29	23.011	282.64	7583	1127	1760

Was die Umstände anbelangt, unter welchen Theorie und Experiment am besten übereinstimmen dürften, glaube ich nicht

zu irren, wenn ich annehme, das berechnete Gewicht beziehe sich auf ein kurzes, cylindrisches Rohr, welches mit einer Abrundung an den Kessel ansetzt. Bei einer scharfkantigen Oeffnung wird wahrscheinlich etwas weniger ausfliessen, überhaupt glaube ich, dass auch bei diesem Ausflusse ähnliche Verhältnisse platzgreifen, wie beim Ausfluss eines permanenten Gases. Es steht demnach zu erwarten, dass die Mündungsspannung in jenen Fällen, wo nicht das Maximum ausfliesst, etwas höher sein wird als die Aussen- spannung, und dass aus einer Oeffnung in dünner Wand unter allen Umständen weniger ausfliessen wird, als aus einem cylindrischen abgerundeten Rohr von gleichem Querschnitte.

Jedenfalls ist es der Mühe werth, diesbezüglich Versuche abzuführen, weil wohl kein anderer Ausfluss so sehr geeignet ist, die Richtigkeit des Principes der Maximal-Ausflussmenge so in die Augen springend darzuthun, wie der des vorgewärmten Wassers, auch ist eine sehr grosse Genauigkeit des Experimentes zu erzielen möglich, wenn man, wie Zeuner es vorschlägt, die Ausflussmenge durch das Sinken des Wasserspiegels im Kessel bestimmt.

Uebrigens zweifle ich keinen Augenblick daran, dass die Versuche mit meiner Rechnung vollkommen übereinstimmen werden, den bis nun stimmen meine Formeln mit allen Experimenten in so eminenten Weise, dass ich keinen Grund sehe, fürchten zu müssen, es könne irgend eines dieselben widerlegen.

## Eisenconstruction des Hoch- und Brückenbaues aus Eisenbahnschienen.

Von **Franz Kessler** und **Franz Pfeuffer**, Ingenieure.

(Mit Zeichnungen auf Blatt Nr. 30 und 31.)

Von Jahr zu Jahr häuft sich in den Depôts der verschiedenen Eisenbahn-Gesellschaften und der Eisenwerke immer mehr der Vorrath von Schienen, die für den Eisenbahnbetrieb, beziehungsweise für den Oberbau der Eisenbahnen unbrauchbar geworden sind, und so als ein dem wirthschaftlichen Leben entzogenes brachliegendes Capital zu betrachten sind.

Nur ein geringer Theil davon findet bei Hochbauten wieder in seiner ursprünglichen Form Verwendung oder wird durch Umwalzen einer abermaligen Verwerthung zugeführt.

Für den weitaus grössten Theil dieser Schienen eine rationelle, keinen namhaften Kostenaufwand bedingende industrielle Verwendung zu finden, ist seit langer Zeit das Bestreben der modernen Eisenbahntechnik, jedoch bisher mit geringem Erfolge. Stellt man z. B. aus alten Schienen durch Umwalzen ein anderes Walzprofil dar, so erfordert dies neue Arbeit, folglich neues Capital und die Schiene hat keinen höheren Werth als den des formlosen Materials.

Die Lösung dieser Frage ist also darin zu suchen, die Schienen in ihrer ursprünglichen Form direct der Verwerthung zuzuführen. Dies wird möglich, wenn man die Schiene als gegebene Walzeisenart betrachtet und damit die gewöhnlichen Aufgaben des Eisenconstructeurs zu lösen sucht, indem man die Verbindungen entsprechend modificirt.

Als Walzprofil betrachtet, zeigt die Schiene grosse Knickfestigkeit und verhältnissmässig nicht zu ungünstige Anheftflächen.

Im Folgenden sind nun mehrere der gewöhnlichsten von den oben berührten Aufgaben in der angedeuteten Weise zu lösen versucht worden. Inwieweit diese Constructionen Anspruch auf rationelle Durchführbarkeit und praktischen Werth, sowie auf Viel-

seitigkeit machen können, werden die Zeichnungen auf Tafel Nr. 30 und 31 darthun.

Die Constructionen umfassen sowohl den Hochbau als auch den Brückenbau, und bestehen der Hauptsache nach aus Eisenbahnschienen, deren Verbindungen mit den noch nöthigen anderen Walzeisensorten und untereinander durch Niete und Schrauben bewerkstelligt sind.

Tafel 30, Fig. 1, zeigt die Bildung von Trägern mit einem durchlaufenden Mittelblech. An dieses sind seitlich statt der sonst üblichen Gurtwinkel und Gurtbleche, Gurtschienen in nöthiger Zahl angeietet. Fig. 2, 3 und 6 auf derselben Tafel veranschaulichen die Bildung von Gitterträgern. Zwischen die Gurtungsschienen kommen Streben aus Flacheisen oder Anzugsbleche für Streben aus Schienen zu liegen. Höhere Träger erhalten Druckstreben von widerstandsfähigerem Querschnitte, als: Winkel, T-Eisen und Schienen.

Zur Bildung von Ständern und Pfeilern für Hoch- und Brückenbauten eignen sich die in Fig. 4, 7, 8 und 9 angegebenen Constructionen. Die einzelnen Schienen sind stellenweise durch Winkel, Mittelbleche oder gusseiserne Zwischenlagsstücke verbunden. In Fig. 7 ist eine Construction gegeben, welche als Substitution für die jetzt so häufigen Parterre-Untertheilungen in Eisen mit feuersicheren Decken auf eisernen Pfeilern dienen könnte.

Fig. 8 zeigt die Verwendung der Schienen zur Gerüsterstellung, welche den Vortheil der oftmaligen Wiederverwendung bei bedeutend grösserer Festigkeit hätte; Fig. 9 das constructive Detail von grossen Gitterpfeilern aus Schienen.

Fig. 5 a, b, c, d veranschaulichen die Bildung von feuersicheren Decken und Brückengedecken aus Schienen.

Auf Tafel 31, Fig. 1, ist die Verwendung von Schienen zur Construction krummgurtiger Gitterträger dargestellt, für welche sich das Schienenprofil in Folge der nahezu gleichen Gurtquerschnitte krummgurtiger Träger, namentlich des Parabelträgers, und der durch die grosse Knickfestigkeit des Profiles möglichen Weglassung der Gegenstreben besonders eignet.

Auf Fig. 2 ist die Bildung eines Brückenquerschnittes mit Quer- und Längsträgern und ihrer Verbindung ersichtlich.

Fig. 3 und 4 stellt einen trapezförmigen Dach- oder Brückenträger aus Schienen mit einer Modification der Quer- und Längsträger und ihrer Verbindung, sowie die Anheftung einer oberen Pfettenverbindung dar.

Fig. 5, 6, 7 und 8 geben ein Bild der Verwendung von Schienen zu Dachstühlen der üblichen Constructionssysteme und ihrer Details. Die aus einfachen, gekuppelten oder aus gitterartig ihrer Details. Die aus einfachen, gekuppelten oder aus gitterartig verbundenen Schienen gebildeten Sparren stecken mit den Füßen in entsprechenden Schuhen und sind am Firste durch Deckbleche verbunden. Die Knotenverbindung ist durch Backenbleche und Schraubenbolzen ermöglicht und bietet Platz für die Anheftung von Schienenpfetten.

Die Bildung von Thurmdächern aus Schienen ist in Fig. 7 dargestellt. Hiebei sind die Schienensparren an der Basis und in Höhenabständen durch Querverbindungen gehalten und an der Spitze durch einen mittelst der Helmstange fest angezogenen Gusshelm vereinigt.

Fig. 9 zeigt ein Bogengitterdach auf Gitterpfeilern aus Schienen, Fig. 10 eine Bogenbrücke mit 3 Gelenken. Die Schienen des Bogens stecken am Kämpfer und am Scheitel wieder in Gusschuhen, welche gleichzeitig zur Gelenkbildung dienen. Als Querträger kommen gleichfalls Schienen zur Verwendung.

Nachdem im Vorstehenden und durch die beigegebenen Zeichnungen, allerdings nur skizzenweise, die Möglichkeit einer ziemlich vielseitigen Verwendung des Schienenprofils zu diversen Eisenconstructionen dargethan ist, erübrigt nur noch, die Vortheile dieser Constructionsort besonders hervorzuheben, um die Abweichung von der gewöhnlichen, herkömmlichen Weise Eisenconstructionen aus Blechen, Winkeln und anderen Façonisen herzustellen, gewissermassen zu rechtfertigen.

Diese Vortheile sind folgende: Erstens ist durch die von uns geplante Verwendung der alten Schienen die Möglichkeit geboten, den schon eingangs erwähnten colossalen Vorrath von alten Schienen nutzbringend wieder zu verwerthen, ein bereits todes Capital neuerdings zu beleben und es wieder in den Kreislauf wirthschaftlichen Lebens zu ziehen.

Zweitens stellen sich diese Constructionen in Folge der niederen Preise der alten Schienen um ein Bedeutendes billiger als alle anderen Constructionsorten.

Nehmen wir beispielsweise an, dass Bleche, Winkel, Anzugsbleche etc. bei einer derartigen Construction bis zu 20% des Gesamtgewichtes ausmachen (welcher hohe Percentsatz nur bei Blechbrücken vorkommen wird), ferner den Preis des gewöhnlichen Walzeisens zu fl. 6.— bis fl. 8.—, den der alten Schienen zu fl. 2.— bis fl. 2.50 pro Zoll-Ctr., so kostet der Zoll-Ctr. der Construction mit alten Schienen ohne Bearbeitung:

fl. 2.— ab 20% . . . .	fl. 1.60—	fl. 2.50 ab 20%	fl. 2.—
hiez 20% von fl. 6.—	fl. 1.20—	hiez 20% von fl. 8.—	fl. 1.60
	fl. 2.80		fl. 3.60

dem entgegen steht der Preis des Walzeisens mit fl. 6.— und fl. 8.—, somit ist die Differenz zu Gunsten der Construction mit Schienen pro Ctr. fl. 3.20 bis fl. 4.40.

Der Preis der fertigen gewöhnlichen Construction stellt sich ungefähr auf fl. 12.— bis fl. 15.— pro Zoll-Ctr., wenn die Bearbeitung pro Ctr. mit fl. 6.— bis fl. 7.— gerechnet wird. Die fertige Construction mit Schienen würde sich auf fl. 8.80 bis fl. 10.60 stellen; daher zeigt diese Constructionsort gegen die gewöhnlichen eine Ersparniss von 27 bis 30%. Diese Ersparniss wird sich in manchen Fällen um etwas reduciren, wenn man die schwierigere Anpassung des Schienenprofils an die theoretischen Querschnitte noch berücksichtigt.

Bei Gitterbrücken wird die Ersparniss noch grösser, weil nur ein ganz geringer Theil aus anderen Walzeisensorten hergestellt zu werden braucht.

Was schliesslich die Festigkeit und somit die abermalige Verwendbarkeit der alten Schienen betrifft, so kann man darauf hinweisen, dass von vielen Fachmännern, die mannigfache Versuche mit alten Schienen bezüglich ihrer Festigkeit angestellt haben, jede Aenderung des Gefüges des Materials entschieden perhorrescirt wird und die Versuche sehr günstige Resultate ergeben haben.

Die Anarbeitung ist bei dieser Constructionsort allerdings dadurch erschwert, dass die Nietlöcher gebohrt werden müssen, während sie sonst bei Verwendung anderer Walzeisensorten gestanzt werden können. Dem gegenüber ist zu bemerken, dass bei den vorgeführten Constructionen Vernietungen und Verschraubungen grösstentheils nur an den Knotenpunkten vorkommen, in den übrigen Theilen jedoch zumeist entfallen, während dieselben Constructionen, aus anderen Walzeisensorten zusammengesetzt, der ganzen Länge nach vernietet sein müssen, was darin seinen Grund

hat, dass die Schiene einen bedeutenden Querschnitt besitzt, der, von anderen Walzeisensorten erzeugt, aus mehreren verschiedenen Theilen, Blechen und Winkeln zusammengesetzt, vernietet oder verschraubt sein muss. Dies dürfte aber der Mehrarbeit des Bohrens der Nietlöcher zum Mindesten gleichkommen.

In Betreff der Abnützung muss erwähnt werden, dass, da ja ohnehin nur die besseren Altschienen zu dem besprochenen Zwecke verwendet werden dürften, dieselben höchstens mit  $6 \square^{\text{cm}}$  in Rechnung, d. h. vom nutzbaren Querschnitte in Abzug zu bringen wäre. Theilweise zerfahrene und zerfrante Schienenköpfe wären mit dem Meissel glatt zu arbeiten, gerade so wie die bei Blechen und Winkeln vorkommenden Walzgrate abzunehmen sind.

## Erdtransportwagen mit Seitenkipfung.

Von  
Cornel Schrödl.

(Mit Zeichnungen auf Blatt Nr. 32.)

Die beim Erdbau in Verwendung kommenden Rollwagen (Seitenkipper) und die Arbeitsgeleise unterliegen oft einer unverhältnissmässig grossen Abnützung, was seinen Grund grossentheils nur in einem Constructionsfehler dieser Kippwagen hat.

Dieser Constructionsfehler besteht in der unvollkommenen Auflagerung des Kastens auf das Wagengestelle. Bei den schmalspurigen Seitenkippern sind für den Kasten gewöhnlich vier Auflagsstellen vorhanden. Zwei davon sind die Lagerungen der Kippwelle, also in der Längsachse des Wagens gelegen. Von den übrigen zwei Stützstellen ist je eine in der Mitte der beiden Rahmenlanghölzer angebracht und besteht jene auf der Kippseite aus einem nur lose aufgestellten Klötzchen, welches nur durch die darauf ruhende Last in aufrechter Stellung erhalten wird und vor dem Umkippen des Kastens vom Arbeiter nach Innen hinabgestossen werden muss. Das andere auf der Rückseite angebrachte äussere Auflager hingegen ist fest.

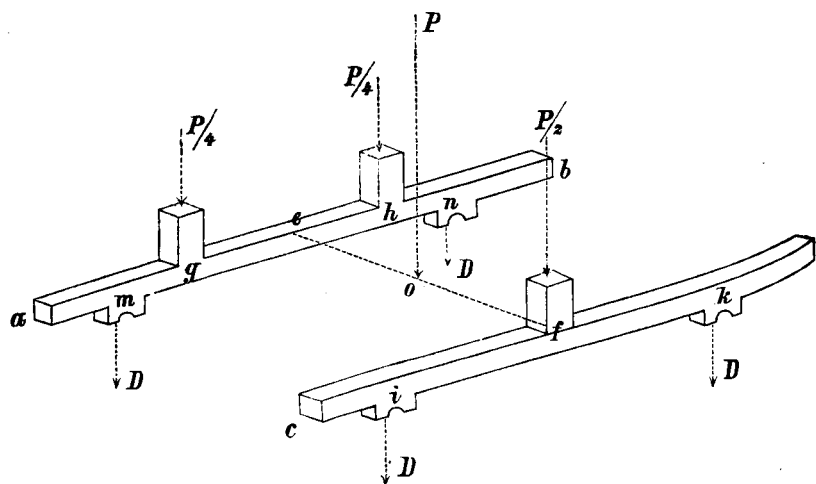
Auf diesen vier Auflagsstellen soll nun der Kasten ruhen. Diese Voraussetzung wird aber in der Praxis nicht erfüllt, weil dazu erforderlich ist, dass die vier Stützstellen stets unveränderlich hoch bleiben, was jedoch nicht der Fall ist.

Die Auflagerung des Kastens ist darum unsicher und veränderlich, wozu auch der Umstand beiträgt, dass dem gefüllten Kasten seitens der Arbeiten durch Mehrladung ein Uebergewicht nach der Kippseite hin gegeben wird, um das Herausfallen des vorerwähnten nur lose aufgestellten Klötzchens zu verhindern und um das Umkippen des Kastens zu erleichtern. Ausserdem sind die Kasten auf der Kippseite etwas breiter gemacht als auf der Rückseite, um die Entleerung zu erleichtern.

Diesen Umständen entsprechend ruht auch der Kasten während des Laufes ausser in den zwei Lagerungen der Kippwelle abwechselnd noch auf einem der zwei äusseren Auflager, oder derselbe oscillirt, von den Wirkungen der Unebenheiten des Geleises beeinflusst, um die Lagerungen der Kippwelle und zwischen den zwei äusseren Auflagern, was die Folge hat, dass die Räder variabel belastet werden, ein Fehler, der den guten Gang des Wagens auch auf guten Geleisen unmöglich macht. Dies äussert sich denn auch sehr deutlich im Verhalten solcher Kippwagen, nämlich durch starke Schwankungen des Kastens und des Wagengestelles während des

Laufes, wobei Wagen und Geleise stark in Anspruch genommen werden, durch öftere Entgleisungen und Achsbrüche, schliesslich in den grossen Kosten für die Erhaltung von Wagen und Geleisen.

Eine Verbesserung in dieser Richtung wird erreicht, wenn der Kasten in der Längsachse des Wagens gar nicht, sondern nur auf drei äusseren Stützstellen gelagert wird. Von diesen drei äusseren Stützstellen ist eine das auf der Kippseite nur lose aufgestellte Klötzchen, die zwei anderen festen Stützstellen sind auf der Rückseite angebracht. Da nun die Lagerungen der Kippwelle nicht als Stützstellen mitbenützt werden sollen, so muss das Klötzchen auf der Kippseite so hoch sein, dass die Zapfen oder Wiegenfüsse der Kippwelle um einige Millimeter von deren Auflagerungen gelüftet sind, wodurch das obenerwähnte Oscilliren des Kastens unmöglich gemacht wird.



Sind  $a b$  und  $c d$  die zwei Rahmenlanghölzer,  $f g$  und  $h$  die drei Auflagsstellen für den Kasten,  $P =$  dem Gesamtgewicht des Wagens und der Ladung, welches in der Mitte wirkt, dann sind, weil  $eo = of$ ,  $eg = eh$  und  $em = en = fi = fk$  ist, die einzelnen Achsendrücke  $D = P/4$  untereinander gleich und constant. Es sind also die Hauptbedingungen für den guten Gang des Wagens erfüllt, die Abnützung desselben sowie der Geleise geringer.

Schliesslich Einiges über die eigentliche Kippvorrichtung. Für dieselbe empfiehlt es sich, die Enden des Kippbaumes nicht als Zapfen, sondern als Wiegenfüsse zu construiren, wie die Figuren 4 und 5 im Detail zeigen. Solche Wiegenfüsse haben vor den Zapfen den Vorzug der grösseren Solidität und den Vortheil, dass das Umkippen des Kastens leichter und ruhiger bewerkstelligt wird. Die Schuhe, mit denen dieselben zu versehen sind, werden am besten aus gewalztem U-Eisen hergestellt. Leichter ist die Beschaffung gusseiserner Schuhe, die aber nicht immer haltbar genug sind. Die Begrenzung des Umkippen des Kastens wird durch zwei kurze, langgliedrige Kettenstücke bewirkt, welche einerseits an der Kippwelle, andererseits an den Stirnhölzern des Untergestelles befestigt sind, wie aus den Figuren 1 bis 5 ersichtlich ist.

Ein Beispiel für die vortheilhafte Anwendung dieser Kippvorrichtung sind die grossen normalspurigen Seitenkipper für Locomotivbetrieb, welche bei den Arbeiten der Donau-Regulirung bei Wien in Verwendung standen.

Die Figuren 6 und 7 zeigen die Wiegenfüsse in einer für die Ausführung derselben ganz aus Eisen modificirten Construction, die aber mehr für grosse normalspurige als für schmalspurige Kippwagen geeignet ist. Der eigentliche Wiegenfuss ist aus Gusseisen, der Untertheil mit den Schlitz für die Führung der beider-

seits des Wiegenfusses vorstehenden Zapfen ist aus Flacheisen, die Führungsrinne ist aus gewalztem U-Eisen.

Bei dieser Ausführung entfällt die Nothwendigkeit der vorerwähnten Ketten, weil das Umkippen des Kastens durch den Aufschlag des Holzstückes ober dem Wiegenfuss begrenzt wird, wie in Fig. 6 punctirt angedeutet ist.

## Ein Beitrag

zur Kenntniss der

### Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter.

Von

Professor Dr. Wilhelm Tinter.

(Schluss.)

Versuche zur Ermittlung der mit Polar-Planimetern zu erreichenden Genauigkeit.

Auch hier sollen am Eingange die aus den bisherigen zu diesem Zwecke gemachten Beobachtungen gezogenen Schlussfolgerungen mitgetheilt werden.

Amsler \*) sagt: „Man betrachtete die Polar-Planimeter als fertig, sobald sie die wirklich umfahrene Fläche bis auf  $\frac{1}{1000}$  genau angaben. Dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polar-Planimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen gänzlich wegfallen, welche das letztere Instrument besitzt . . .“, ferner: „die Beschaffenheit des Papiere, auf welchem die Rolle läuft, übt einen ganz unmerklichen Einfluss auf ihr Spiel aus.“

Jordan \*\*) zieht aus den in der „Bairischen Zeitschrift für Geometer“, Jahrgang 1861, mitgetheilten Resultaten den Schluss, dass der mittlere Fehler „Einer Flächenbestimmung“  $\pm 0.57\%$  der ganzen Fläche sei.

Schweizer \*\*\*) gibt die Genauigkeit des Amsler'schen Polar-Planimeters mindestens auf  $\frac{1}{1000}$  der gemessenen Fläche an; bei 64 Versuchen war der Fehler 49mal kleiner, 13mal gleich und 2mal grösser als  $\frac{1}{1000}$  des wahren Flächeninhaltes.

Cherest Ed. †) hat mit einem Amsler'schen Polar-Planimeter aus 50 Versuchen an Kreisen den mittleren Fehler zu  $\frac{1}{3000}$  des wahren Flächeninhaltes gefunden.

Ein zweites Polar-Planimeter, von einem gewissen G. nach dem Amsler'schen Muster verfertigt, wurde von dem letztgenannten Autor ebenfalls einer gründlichen Prüfung unterzogen, durch welche er zu nicht gut übereinstimmenden Resultaten gelangte. Besonders war es der für die Stellung

\*) „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter“, von J. Amsler. Schaffhausen 1856.

\*\*) „Taschenbuch der praktischen Geometrie“, von W. Jordan. Stuttgart 1873.

\*\*\*) „Les bulletins historiques et philosophiques.“ Tome XVI. 1859, St. Petersburg.

†) „Bulletin de la société industrielle de Mulhouse“, 1863; „Civil-Ingenieur“, zwölfter Band, Leipzig 1866, „Ueber Amsler's Polarplanimeter“ von E. Cherest, Professor.

des Instrumentes: „Pol innerhalb der Figur“ nöthige Werth der Constanten, welcher aus seinen Versuchen, an einem Kreise abgeleitet, mit dem von G. angegebenen Werthe nicht stimmte; die Abweichung betrug 11 Einheiten, während sie bei den Amsler'schen Planimetern nur zwei Einheiten erreichte.

Damit die Rolle bei wiederholten Versuchen nicht immer denselben Weg durchlaufe, wodurch das Papier mehr geglättet wird, die Rolle sich demnach leichter und schneller drehen würde, hat er den Ort des Mittelpunctes des Kreises immer ein wenig geändert.

Cherest liess sich dann zu dem Schlusse verleiten, dass es nicht vortheilhaft sei, die Constante nach dem üblichen Verfahren, Figuren von bestimmtem Flächeninhalte zu umfahren, abzuleiten, sondern, dass es sich empfehle, dieselbe direct aus den Dimensionen des Instrumentes zu bestimmen. Cherest gibt wohl selbst zu, dass die directe Messung der betreffenden Dimensionen (nämlich: Abstand des Poles vom Gelenke ( $R$ ), Abstand des Gelenkes vom Stifte ( $r$ ) und Abstand des Gelenkes von der Drehungsebene der Rolle ( $d$ ) nicht gerade leicht durchzuführen sei, und um noch einen Controlwerth für die Constante

$$k = \pi (R^2 + r^2 + 2dr)$$

zu erhalten, schlägt er auch vor, den Durchmesser  $\delta$  der Rolle zu messen, womit sich dann, wenn Einer Umdrehung der Rolle  $100 \square^{\text{cm}}$  entsprechen, der Werth  $r$  durch die Gleichung

$$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{100}{\delta}$$

bestimmt; da die Entfernung des Stiftes von der Umdrehungsebene der Rolle, d. i.  $s = r + d$  sicherer als jeder Theil für sich gemessen werden kann, so ergibt sich dann mit dem gerechneten Werthe  $r$  aus  $s$  auch  $d$ , mithin die Constante.

Nach diesen beiden Arten ermittelt er an drei Planimetern von Amsler und an dem Planimeter von G. die Constanten, und findet:

	bei dem Planimeter Nr. 1114	Nr. 2052	Nr. 2054	G.
$C_1$	2070.9	2110.9	2093.4	2118.8
$C_2$	2071.6	2112.6	2098.5	2123.6
Mittel $C_m$	2071.2	2111.7	2095.9	2121.2
vom Mechaniker angegeben: $C'$	2071.0	2108.0	2095.1	2140.1

Auffallend ist, dass die Werthe, denen zur Bestimmung der Durchmesser der Rolle zu Grunde gelegt wurde, immer grösser sind als jene, die sich durch die directe Messung der vorhin genannten drei Entfernungen ergeben haben; Cherest nimmt hierauf keine Rücksicht, und benützt einfach die Mittelwerthe  $C_m$  zur Vergleichung mit den Angaben der Mechaniker, welche mit Ausnahme der vierten ziemlich zufriedenstellend genannt werden können.

Das Planimeter G. hätte eigentlich, meiner Ansicht nach, wenn schon in der vom Mechaniker bezeichneten Unbestimmtheit in den Kreis dieser Untersuchungen mitbezogen, doch nicht zu den gezogenen Schlussfolgerungen verwendet werden sollen; denn, wenn nach Mittheilung von Cherest bei diesem Instrumente zwei Marken für die Angabe von Quadrat-Centimeter bezeichnet waren, so ist schon eine Unbestimmtheit vorhanden, und wenn sich herausgestellt hat, dass keine der diesen Marken entsprechenden Armlängen der Angabe für Quadrat-Centimeter genügt hat, so

kann auch in Folge dessen die auf Grund einer dieser Armlängen ermittelte, vom Mechaniker angegebene und zu weiteren Schlüssen benützte Constante nicht die richtige sein. Ein Vergleich mit dem aus den direct gemessenen Dimensionen des Instrumentes gerechneten Werthe der Constanten wäre erst dann zulässig gewesen, wenn zur Bestimmung der letzteren aus dem Umfahren einer der Fläche nach gegebenen Figur die richtige Armlänge angewendet und auch sonst der Versuch von G. richtig durchgeführt worden wäre.

Cherest hat nach Ermittlung der Constanten Kreise von 5 bis 10<sup>cm</sup>, dann von 12, 14, 15, 16, 18<sup>cm</sup> Halbmesser mit dem Planimeter G., und mit jenem von Amsler, das die Nummer 1114 trägt, umfahren, und unter Zugrundelegung der Constanten 2121, bezüglich 2071, die Flächen ermittelt, diese mit den berechneten Flächeninhalten verglichen und gefunden, dass das Amsler'sche Planimeter die Flächen der Kreise bis 6<sup>cm</sup> Halbmesser zu klein, hingegen die Flächen der Kreise über 6<sup>cm</sup> Halbmesser zu gross gibt, und dass diese Differenz umso grösser wird, je mehr der Halbmesser von 6<sup>cm</sup> abweicht; bei dem G.-Planimeter ist dieser Halbmesser 15<sup>cm</sup>; die Flächen von Kreisen mit kleineren Halbmessern werden zu klein, jene mit grösseren Halbmessern zu gross angegeben. In eine nähere Untersuchung dieser sich gezeigten, jedenfalls durch einen constanten Fehler hervorgerufenen Differenzen geht Cherest nicht ein, und wiederholt nur am Schlusse: er glaubt, dass die Constante nach den Dimensionen des Instrumentes berechnet werden müsse.

Junge \*) hat seine Untersuchungen in der Beziehung weiter ausgedehnt, dass er gerad- und krummlinig begrenzte Figuren von verschiedenem Flächenausmaasse bei Pol ausserhalb und bei Pol innerhalb umfahren hat, freilich nur mit einem Instrumente, das nach Amsler von der mechanischen Werkstätte von Goldschmidt gefertigt worden ist. Die Anzahl der Beobachtungen für jeden Fall war eine geringe, im Maximum vier.

Bei zwei Versuchen an Kreisen sind Messingstäbe von 1<sup>dem</sup>, beziehungsweise 2<sup>dem</sup>, als Radius angewendet worden. (Es entspricht dieses gleichsam Versuchen mit Probelplatten.) Bei zwei Versuchsreihen an Kreisen, sowie bei den Versuchen mit Quadraten sind die Umfangslinien mit dem Fahrstifte mit freier Hand nachgefahren worden.

Die Resultate dieser Untersuchungen, aus zweimaligem Umfahren gefolgert, sind folgende:

Umfahrene Figur	Differenz zwischen dem beobachteten und dem berechneten Flächeninhalte in Procenten	Pol
1. Kreis mit einem Halbmesser von 10 <sup>cm</sup> (Probplatte).....	± 0·11%	Ausserhalb
2. Kreise bis zu 5 <sup>cm</sup> Halbmesser .....	± 0·87%	
3. Kreise von 7 bis 13 <sup>cm</sup> Halbmesser .....	± 0·18%	
4. Quadrate bis 10 <sup>cm</sup> Seitenlänge.....	± 0·46%	
5. Quadrate von 12 bis 25 <sup>cm</sup> Seitenlänge.....	± 0·12%	Innerehalb
6. Kreis mit 20 <sup>cm</sup> Halbmesser (Probplatte) ..	± 0·08%	
7. „ bis zu 9 <sup>cm</sup> .....	± 4·64%	
8. „ von 11 <sup>cm</sup> bis 29 <sup>cm</sup> Halbmesser.....	± 0·23%	
9. Quadrate bis 15 <sup>cm</sup> Seitenlänge.....	± 4·51%	
10. „ von 20 bis 40 <sup>cm</sup> Seitenlänge.....	± 0·17%	

\*) „Eine Versuchsreihe mit dem Amsler'schen Polar-Planimeter.“ Von Dr. August Junge. „Civil-Ingenieur,“ XII. Band, Leipzig 1866.

Es wird gut sein, hiebei zu bemerken, dass Junge die durch die Beobachtung erhaltene Date (zweimaliges Umfahren) mit der durch Rechnung erhaltenen direct verglichen, diese Differenz dem absoluten Werthe nach angegeben und schliesslich in Procenten angesetzt hat; dieses Verfahren ist demnach nicht geeignet, einen Aufschluss über den mittleren, bezüglich wahrscheinlichen Fehler bei Bestimmung einer Fläche mittelst des Planimeters durch einmaliges Umfahren zu geben. In diesen Angaben ist die Wirkung der Fehler wegen der nicht genauen Angabe Einer Rollenumdrehung gegen die anzugebende Fläche und wegen des Fehlers in der zur Untersuchung verwendeten Fläche mit den beim Gebrauche des Planimeters auftretenden zufälligen Beobachtungsfehlern verquickt worden.

Es geht dieses auch schon aus der Vergleichung der Vorzeichen dieser in der Publication von Junge angegebenen Differenzen hervor; so sind in der ersten Versuchsreihe mit dem Kreise von 10<sup>cm</sup> Halbmesser sieben Versuche mit 15 Beobachtungs-Resultaten angeführt; unter diesen sind 10 Differenzen mit positiven, 5 mit negativen Zeichen behaftet; in der dritten Versuchsreihe für Kreise mit 3, 7, 11 und 13<sup>cm</sup> Halbmesser sind alle Differenzen positiv, während jene für den Kreis von 9<sup>cm</sup> Halbmesser negativ sind. Bei Pol innerhalb, vierte Versuchsreihe an Kreisen von 3, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 und 29<sup>cm</sup> Halbmesser sind die Differenzen für die Beobachtungen an den Kreisen mit 3, 5, 7, 9, 10, 13, 27, 29<sup>cm</sup> ausschliesslich negativ, jene für die Beobachtungen an den Kreisen mit 15, 17, 19, 21, 23<sup>cm</sup> ausschliesslich positiv und nur bei dem Versuche am Kreise mit 2·5<sup>cm</sup> Halbmesser findet ein Zeichenwechsel in dieser Differenz statt. Bei der sechsten Versuchsreihe, an Quadraten mit 5, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35<sup>cm</sup> und 40<sup>cm</sup> Seitenlänge sind alle Differenzen, bis auf jene am Quadrate mit 35<sup>cm</sup> Seitenlänge, wo ein Zeichenwechsel stattfindet, negativ. Grund genug für die Annahme vorhandener constanter Fehler.

Schell hat in einer Abhandlung \*) die verschiedenen bis dorthin vorgeschlagenen Methoden über die Bestimmung der Constanten des Polar-Planimeters erörtert; er hat insbesondere den Einfluss des Fehlers, wenn die Ebene der Rolle zum Führungsarme nicht senkrecht steht, oder, was dasselbe ist, wenn die Achse der Rolle dem Führungsarm nicht parallel ist, auf die Bestimmung der Constanten untersucht und gezeigt, dass ein derartiger Fehler von 30 Bogenminuten in der Constanten einen Fehler von 3, bezüglich 21 Einheiten hervorbringen kann, je nachdem das Instrument so adjustirt ist, dass Einer Umdrehung der Rolle 10□“ oder 100□<sup>cm</sup> entsprechen; für ihn ist es auch klar, dass das von Cherest untersuchte Instrument von G. der theoretischen Bedingung, welche früher ausgesprochen worden ist, nicht genügt hat. Würden die Polar-Planimeter zum Durchschlagen eingerichtet sein, d. h. würde man bei einer und derselben Stellung des Poles die Rolle einmal links, das andere Mal rechts bringen, und dann die Figur

\*) „Ueber die Bestimmung der Constanten des Polar-Planimeters“, von Professor Dr. Anton Schell. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften. LVI. Band, 1867.



in demselben Sinne umfahren können, so hätte man ein sicheres Mittel zur Bestimmung der Constanten, unabhängig von dem Fehler in der Stellung der Rollennachse gegen den Führungsarm und auch zur Bestimmung dieses Fehlers selbst. Seine Untersuchungen führen zu dem leicht einsehbaren Schluss, dass die Ermittlung der Constanten eines Polar-Planimeters durch Umfahren der Figuren von bekanntem Flächenausmaasse eine solche Sicherheit bietet, welche durch die andere Methode, die Constante aus den direct gemessenen Dimensionen des Instrumentes zu ermitteln, nicht erreicht werden kann.

Dieses sind die wesentlichsten Daten aus den Publicationen über die Leistungsfähigkeit der Polar-Planimeter.

Eine Reihe von Versuchen mit einem meiner Lehrkancel gehörigen Polar-Planimeter bestimmte mich, die Versuche mit verschiedenen Instrumenten unter gleichen Bedingungen durchzuführen, um dann mit einiger Sicherheit die entsprechenden Schlüsse ziehen zu können.

Für die von mir angestellten Versuche benützte ich folgende Instrumente:

Polar-Planimeter Nr.	1	} Construction nach Miller-Starke. Mechanische Werkstätte Starke und Kammerer.
"	Nr. 295	
"	Nr. 310	
Polar-Planimeter Nr.	3526	} Construction nach Amsler. Mechanische Werkstätte Amsler.
Polar-Planimeter Nr.	6213	
"	Nr. 6553	} Construction nach Amsler. Mechanische Werkstätte Kraft & Sohn.
Polar-Planimeter Nr.	6985	} Construction nach Amsler. Mechanische Werkstätte Kern in Aarau.
Polar-Planimeter Nr.	36	
Polar-Planimeter aus der mechanischen Werkstätte Ertel in München.		

Die Construction der Polar-Planimeter nach Miller-Starke und nach Amsler setze ich als bekannt voraus.

Die Exemplare von Kraft & Sohn, Kern und Ertel sind genaue Nachahmungen der Construction von Amsler; bei dem Instrumente von Ertel ist nur noch eine kleine Arretirvorrichtung an der Rolle hinzugefügt worden, um die Lesung Null bei jeder Flächenbestimmung leicht herstellen zu können, eine Zugabe, welche meiner Ansicht nach nicht zu empfehlen ist.

Ott & Coradi haben die Nadelspitze, als Pol bei Amsler, und das Kugelgelenke, als Pol bei Miller-Starke, durch einen auslösbaren Kugelpol ersetzt, und ausserdem auch die bei den Instrumenten letztgenannter Herren angebrachte Theilung auf dem Fahrstifte angewendet.

Bei den Polar-Planimetern nach Miller-Starke ist nur jene Armlänge angegeben, für welche „Einer Rollenumdrehung“ bei den älteren Instrumenten die Fläche von  $10 \square''$ , bei den neuen Instrumenten die Fläche von  $100 \square^{\text{cm}}$  entspricht. Da der Umfang der an der Rolle angebrachten Trommel in hundert gleiche Theile getheilt ist, so kann man die Stellung des Zeigers, welcher die Theile einer Rollenumdrehung geben soll, gegen den ihm vorangehenden Theilstrich an der Trommel bis auf den zehnten Theil, d. i. auch die Flächenangabe bis auf  $0.01 \square''$ , beziehungsweise auf  $0.1 \square^{\text{cm}}$ , bei einiger Uebung bis auf  $0.005 \square''$ ,  $0.05 \square^{\text{cm}}$  sicher schätzen. Man erhält bei dieser Einrichtung durch die Lesung an der Rolle die Anzahl Quadratzoll, beziehungs-

weise Quadrat-Centimeter, welche bei einem gegebenen Verjüngungsverhältnisse leicht in das wirkliche Flächenmaass umzuwandeln sind.

Bei dem Polar-Planimeter Amsler und den Nachahmungen sind am Führungsarme einige Marken mit gewissen häufig angewendeten Verjüngungsverhältnissen angegeben; nebenbei findet man die Verhältnisszahl, welche bei dem in Betracht gezogenen Verjüngungsverhältnisse dem Werthe Einer durch die Rollablesung bestimmten Einheit entspricht; man bekommt also in diesem Falle die Fläche auch nicht direct, sondern muss erst, um ihren Werth kennen zu lernen, die beim Umfahren einer Figur an der Rolle erhaltenen Einheiten mit dieser Verhältnisszahl multipliciren.

Der Umfang der an der Rolle angebrachten Trommel ist in hundert gleiche Theile getheilt, so dass man direct „Ein Hundertel“ einer Rollenumdrehung bestimmen kann; um den zehnten Theil hiervon, d. i. ein Tausendstel einer Rollenumdrehung sicher lesen zu können, wurde an der Trommel ein Nonius angebracht, dessen Angabe eben einem Zehntel der directen Theilung entsprechen sollte. Bei den in Untersuchung gezogenen Planimetern mit dieser Construction habe ich bei dem Ablesen niemals den Nonius benützt, sondern seinen Nullstrich als Index betrachtet, und dessen Stellung gegen den vorangehenden Theilstrich an der Trommel abgeschätzt; ich that dieses nicht nur wegen Erreichung der Gleichartigkeit mit anderen Constructionen, sondern auch deswegen, weil ich mich überzeugt hatte, dass diese Nonien meist nicht so genau getheilt oder nicht so vollkommen adjustirt waren, wie es der beabsichtigte Zweck gefordert haben würde.

Ich habe nur jene bezeichnete Länge des Führungsarmes benützt, für welche Einer Rollenumdrehung der Werth der Fläche von  $100 \square^{\text{cm}}$  entspricht.

Meine Versuche bezogen sich auf folgende Punkte:

1. Ermittlung des Einflusses der materiellen Beschaffenheit der Unterlage, auf welcher die Rolle ihren Weg machen muss, auf die Abwälzung der Rolle.

2. Ermittlung des Einflusses der Richtung bei dem Umfahren einer Figur, beziehungsweise Ermittlung des Einflusses einer todten Bewegung auf das Resultat.

3. Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Flächenbestimmung“ mit Hilfe des Planimeters, sowohl bei Pol ausserhalb als auch bei Pol innerhalb der Figur.

4. Bestimmung des Werthes der Constanten durch das Umfahren von verschiedenen begrenzten Figuren, deren Flächen genau gekannt sind.

Zu den Versuchen wurden ausser Probeplatten (Kreise) auch gerad- und krummlinig begrenzte Figuren, wie selbe schon theilweise in Fig. 2. und die fehlenden in Fig. 3. dargestellt und näher bezeichnet sind, umfahren, und zwar meistens mit freier Hand; die wenigen Fälle, bei denen das Lineal zu Hilfe genommen wurde, sind angegeben.

Ad 1. Als Unterlage, auf welcher die Rolle ihre Abwälzung vollziehen musste, wählte ich: a) das englische Velinpar, b) das gewöhnliche Maschinenpapier und c) ein Messtischblatt aus Lindenholz. Anfänglich hatte ich auch die Absicht, die Rolle auf weichem Holze laufen zu lassen, ging aber nach den ersten Versuchen wegen der sich

gezeigten bedeutenden Abweichungen hievon ab; es mag aber wenigstens erwähnt sein, dass es einzelne Stellen dieser Unterlage gab, wo ich leidliche Resultate erhielt.

Ad 2. Jede Figur wurde in dem Sinne umfahren, in welchem die Lesungen an der Rolle zunehmen, und dann in derselben Anzahl in dem Sinne, in welchem die Lesungen an der Rolle abnehmen. Ausserdem wurden auch Figuren abwechselnd in dem einen und in dem anderen Sinne aufeinanderfolgend umfahren.

Ad 3. Aus den durch das Umfahren der Figur in dem bezüglichen Sinne erhaltenen Resultaten wurde der

Mittelwerth, mit diesem durch Vergleichung der einzelnen Beobachtungsergebnisse die übrig bleibenden Fehler und mit denselben der wahrscheinliche Fehler „Einer Beobachtung“, dann mit diesem das Fehlerverhältniss und schliesslich der Mittelwerth aus den beiden durch das Umfahren im verschiedenen Sinne gewonnenen Resultaten gebildet.

In den Tabellen 1 bis 10, 15 bis 19, 22 und 23 findet man die sowohl durch die Beobachtung als auch durch die Rechnung erhaltenen Daten; bei allen Beobachtungsreihen, bei denen die materielle Beschaffenheit der Unterlage nicht besonders angegeben wurde, ist Velinpapier benützt worden.

Polar-Planimeter Nr. 1. — Tabelle 1.

Pol	Figur	Ausserhalb											
		Probeplatte $K_3$						Figur $w_1$					
		→		←		→		←		→		←	
		6.86	6.82	6.92	6.88	6.73	6.43	14.91	14.89	14.73	14.74	14.29	14.28
		6.86	6.82	6.90	6.87	6.64	6.44	14.94	14.83	14.76	14.72	14.21	14.26
		6.82	6.86	6.90	6.86	6.74	6.42	14.94	14.89	14.73	14.68	14.24	14.23
		6.87	6.80	6.92	6.87	6.75	6.43	14.91	14.87	14.86	14.74	14.29	14.24
		6.86	6.83	6.88	6.88	6.71	6.41	14.95	14.90	14.62	14.70	14.27	14.25
		6.84	6.86	6.92	6.87	6.74	6.40	14.94	14.90	14.70	14.71	14.34	14.19
Mittel .....		6.85	6.83	6.91	6.87	6.72	6.42	14.93	14.89	14.73	14.72	14.27	14.25
W. F. e. B. ....		+0.013	+0.016	+0.011	+0.005	+0.014	+0.010	+0.012	+0.008	+0.053	+0.018	+0.030	+0.023
Fehlerverhältniss		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Differenz .....		527	427	628	1374	480	642	1244	1862	278	818	476	620
Mittel .....		+0.02		+0.04		+0.30		+0.04		+0.01		+0.02	
		<b>6.84</b>		<b>6.89</b>		<b>6.57</b>		<b>14.91</b>		<b>14.72</b>		<b>14.26</b>	

Tabelle 1a.

Pol	Figur	Ausserhalb									
		Dreieck $\alpha$		Viereck $\delta$		Viereck $\epsilon$		Dreieck $\gamma$		Polygon $\zeta$	
		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
		1.12	1.12	4.85	4.85	7.91	7.88	3.45	3.46	16.22	16.20
		1.12	1.15	4.90	4.85	7.91	7.92	3.45	3.43	16.21	16.23
		1.15	1.15	4.85	4.89	7.93	7.88	3.46	3.47	16.22	16.20
		1.15	1.13	4.89	4.89	7.92	7.92	3.47	3.44	16.23	16.20
		1.14	1.11	4.85	4.85	7.90	7.88	3.48	3.42	16.21	16.16
Mittel .....		1.136	1.132	4.868	4.868	7.914	7.896	3.462	3.444	16.218	16.198
W. F. e. B. ....		+0.010	+0.012	+0.019	+0.015	+0.007	+0.015	+0.009	+0.014	+0.006	+0.017
Fehlerverhältniss..		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Differenz .....		114	94	256	325	1131	526	385	246	2703	953
		+0.004		+0.000		+0.018		+0.018		+0.020	
		<b>1.134</b>		<b>4.868</b>		<b>7.905</b>		<b>3.454</b>		<b>16.208</b>	
		Summe aus $\delta, \epsilon, \gamma$ : $S = 16.227$ gegen $16.215$ ; $\Delta = 0.012$ , d. i. $0.07\%$ d. Fl.									
		Differenz: $S - P = 0.019$ , d. i. $0.12\%$ der Fläche.									
										$P = 16.208$ gegen $16.215$	
										$\Delta = 0.007$ d. i. $0.04\%$ d. Fl.	

Polar-Planimeter Nr. 290 A. — Tabelle 2.

Pol	Figur	Ausserhalb									
		Probeplatte $K_4$						Dreieck $\alpha$		Dreieck $\gamma$	
		→		←		→		←		→	←
		19.09	19.13	19.04	19.12	19.22	19.15	1.14	1.13	3.45	3.44
		19.09	19.12	19.08	19.12	19.20	19.15	1.16	1.15	3.40	3.46
		19.10	19.11	19.08	19.14	19.20	19.14	1.12	1.13	3.43	3.47
		19.11	19.10	19.08	19.11	19.18	19.16	1.15	1.14	3.43	3.45
		19.21	19.09	19.06	19.11	19.20	19.17	1.14	1.15	3.42	3.47
		19.14	19.10	19.07	19.11	19.20	19.14	1.11	1.12	3.42	3.45
Mittel .....		19.23	19.108	19.068	19.118	19.200	19.152	1.142	1.137	3.425	3.457
W. F. e. B. ....		+0.031	+0.010	+0.011	+0.008	+0.009	+0.025	+0.009	+0.009	+0.011	+0.008
Fehlerverhältniss..		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Mittel .....		617	1911	1734	2390	2153	766	127	127	311	432
		<b>19.115</b>		<b>19.093</b>		<b>19.176</b>		<b>1.139</b>		<b>3.441</b>	

Polar-Planimeter Nr. 290 A. — Tabelle 2a.

Pol	A u s s e r h a l b										
	Viereck $\delta$		Viereck $s$		Summe aus		Vieleck $\varphi$		Fig. $w_1$		
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	
	4·90	4·93	7·90	7·83	$\gamma$	3·425	3·457	16·22	16·26	14·90	14·83
	4·93	4·91	7·88	7·84	$\delta$	4·903	4·913	16·21	16·23	14·92	14·82
	4·88	4·90	7·90	7·84	$s$	7·895	7·843	16·26	16·21	14·91	14·85
	4·92	4·90	7·90	7·84	$S =$	16·223   16·213		16·21	16·25	14·90	14·83
	4·87	4·93	7·90	7·84		16·218		16·23	16·23	14·89	14·82
	4·92	4·91	7·89	7·87		+ 0·018		16·24	16·22	14·92	14·82
Mittel .....	4·903	4·913	7·895	7·843	F.V.	1		16·228	16·233	14·907	14·828
W. F. e. B. ....	+ 0·016	+ 0·009	+ 0·006	+ 0·009	$\Delta = S - F =$	901		+ 0·013	+ 0·013	+ 0·008	+ 0·007
Fehlerverhältniss..	$\frac{1}{306}$	$\frac{1}{546}$	$\frac{1}{1316}$	$\frac{1}{871}$	0·003		1	4	1	1	1
Mittel .....	4·908		7·869		d. i. 0·001% der Fläche		1248	1249	1863	2118	14·867
							$M = 16·230$				
							$F = 16·215$				
							$\Delta = 0·015$				
							d. i. 0·003% d.Fl.				
							$M - S = 0·012$				

Polar-Planimeter Nr. 295. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 3.

Pol	A u s s e r h a l b															
	Probeplatte $K_3$							Figur $w_1$							Probeplatte $K_4$	
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
	47·6	47·5	47·7	47·6	48·1	47·7	104·2	104·0	103·3	103·3	105·1	103·6	133·9	133·5		
	47·6	47·6	47·5	47·8	48·2	47·8	104·1	104·2	103·3	103·1	104·6	103·7	133·4	133·4		
	47·7	47·7	47·8	47·6	48·3	47·9	104·4	104·1	103·4	103·3	105·0	103·3	133·6	133·6		
	47·5	47·5	47·6	47·6	48·2	48·0	104·4	104·0	103·2	103·3	104·9	103·4	133·9	133·7		
	47·6	47·7	47·6	47·8	48·2	47·7	104·2	104·0	103·2	103·0	104·8	103·4	133·8	133·3		
	47·7	47·7	47·6	47·5	48·1	47·8	104·4	104·0	103·2	103·1	104·5	103·3	133·7	133·8		
Mittel	47·6	47·6	47·6	47·7	48·2	47·8	104·3	104·1	103·3	103·2	104·8	103·5	133·7	133·6		
W.F.e.B.	+ 0·05	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·09	+ 0·05	+ 0·08	+ 0·09	+ 0·07	+ 0·06	+ 0·07	+ 0·16	+ 0·12	+ 0·13	+ 0·13		
Fehlerv.	$\frac{1}{952}$	$\frac{1}{680}$	$\frac{1}{680}$	$\frac{1}{530}$	$\frac{1}{964}$	$\frac{1}{598}$	$\frac{1}{1159}$	$\frac{1}{1486}$	$\frac{1}{1722}$	$\frac{1}{1474}$	$\frac{1}{655}$	$\frac{1}{863}$	$\frac{1}{1028}$	$\frac{1}{1028}$		
Mittel	47·60		47·65		48·00		104·20		103·25		104·15		133·65			

Mit der adjustirten Armlänge. — Tabelle 3 a.

Pol	A u s s e r h a l b													
	Probeplatte $K_3$		Probeplatte		Probeplatte $K_6$		Dreieck $\alpha$		Viereck $\delta$		Polygon $\varphi$		Figur $w_1$	
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
	47·2	47·1	66·4	66·3	173·9	173·9	7·9	7·9	33·9	34·1	112·2	112·5	103·3	103·2
	47·2	47·1	66·4	66·4	173·9	173·9	8·1	8·0	33·9	33·7	112·4	112·2	103·1	103·0
	47·2	47·2	66·3	66·3	173·9	173·7	8·0	8·1	34·2	33·9	112·5	112·2	103·1	403·3
	47·1	47·1	66·5	66·2	173·8	174·0	8·0	8·2	34·0	34·1	112·4	112·4	103·1	103·0
	47·2	47·2	66·3	66·4	173·8	173·7	8·0	8·0	33·9	33·9	112·2	112·4	103·1	103·0
	47·3	47·1	66·4	66·4	173·9	174·0	8·0	8·8	34·1	33·9	112·5	112·3	103·0	103·1
Mittel	47·20	47·15	66·38	66·33	173·85	173·87	8·00	8·03	34·00	33·93	112·36	112·33	103·13	103·10
W.F.e.B.	+ 0·04	+ 0·04	+ 0·05	+ 0·06	+ 0·04	+ 0·09	+ 0·04	+ 0·07	+ 0·09	+ 0·10	+ 0·09	+ 0·08	+ 0·07	+ 0·08
Fehlerv.	$\frac{1}{1180}$	$\frac{1}{1179}$	$\frac{1}{1328}$	$\frac{1}{1106}$	$\frac{1}{4346}$	$\frac{1}{1932}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{115}$	$\frac{1}{378}$	$\frac{1}{339}$	$\frac{1}{1248}$	$\frac{1}{1404}$	$\frac{1}{1473}$	$\frac{1}{1290}$
Mittel	47·18		66·35		173·86		8·01		33·97		112·35		103·11	

Polar-Planimeter Nr. 310. Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 4.

Pol	A u s s e r h a l b													
	Probeplatte							Dreieck $\alpha$				Dreieck $\gamma_1$		
	mit dem Lineal		mit freier Hand		mit dem Lineal		mit dem Lineal		mit dem Lineal		mit dem Lineal			
	47·2	47·1	47·2	47·1	47·4	47·0	8·2	8·1	8·2	8·1	32·0	32·2		
	47·0	47·2	47·0	47·1	47·6	47·0	8·1	8·2	8·2	8·2	32·0	32·1		
	47·1	47·1	47·1	47·0	47·5	46·9	8·3	8·3	8·3	8·2	32·0	32·0		
	47·1	47·3	47·0	47·3	47·6	46·8	8·2	8·2	8·2	8·3	32·1	32·0		
	47·2	47·1	47·1	47·2	47·3	46·9	8·2	8·2	8·2	8·2	32·1	32·3		
	47·1	47·2	47·0	47·0	47·7	46·9	8·2	8·1	8·2	8·2	32·1	32·0		
Mittel	47·12	47·17	47·07	47·12	47·52	46·92	8·20	8·18	8·22	8·20	32·1	32·1		
W.F.e.B.	+ 0·05	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·08	+ 0·10	+ 0·05	+ 0·04	+ 0·05	+ 0·03	+ 0·04	+ 0·05	+ 0·08		
Fehlerv.	$\frac{1}{942}$	$\frac{1}{786}$	$\frac{1}{785}$	$\frac{1}{589}$	$\frac{1}{475}$	$\frac{1}{938}$	$\frac{1}{205}$	$\frac{1}{164}$	$\frac{1}{274}$	$\frac{1}{205}$	$\frac{1}{642}$	$\frac{1}{401}$		
Differenz Mittel	- 0·05		- 0·05		+ 0·60		+ 0·02		+ 0·02		+ 0·00			
	67·14		47·09		47·22		8·19		8·21		32·10			

Nr. 310. — Tabelle 4 a.

Pol	A u s s e r h a l b														
	Figur	Dreieck $\gamma$ mit freier Hand		Polygon $\varphi$				Polygon mit dem Lineal		Kreis $K_7$		Figur $w_1$		Gemischt geb. Polygon	
		Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
		32·0	32·1	113·0	113·0	113·2	113·2	175·8	176·0	50·3	50·4	103·4	103·4	139·6	139·8
		32·3	32·0	113·2	113·3	113·2	113·2	175·7	175·7	50·5	50·3	103·3	103·3	139·8	139·6
		32·1	32·3	113·0	113·4	113·2	113·0	175·7	175·8	50·5	50·4	103·1	103·5	139·5	139·6
		32·0	32·1	113·0	113·3	113·0	113·2	175·9	175·9	50·3	50·5	103·1	103·5	139·4	139·8
		32·2	32·2	113·0	113·2	113·0	113·2	175·9	175·9	50·5	50·5	103·3	103·3	139·5	139·5
		32·0	32·0	113·3	113·3	113·2	113·0	175·9	175·9	50·4	50·4	103·4	103·4	139·5	139·7
Mittel .....		32·1	32·1	113·1	113·2	113·1	113·1	175·8	175·9	50·4	50·4	103·3	103·4	139·6	139·7
W. F. e. B. ....		+ 0·08	+ 0·08	+ 0·09	+ 0·10	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·05	+ 0·09	+ 0·06	+ 0·10	+ 0·09
Fehlerverh. ....		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Differenz .....		408	408	1257	1132	1616	1616	2511	2513	720	1008	1148	1723	1396	1552
Mittel .....		+ 0·00	+ 0·00	- 0·10	- 0·10	+ 0·00	+ 0·00	- 0·01	- 0·01	+ 0·00	+ 0·00	- 0·10	- 0·10	- 0·10	- 0·10
		<b>32·10</b>		<b>113·15</b>		<b>113·10</b>		<b>175·85</b>		<b>50·40</b>		<b>103·35</b>		<b>139·65</b>	

Polar-Planimeter Nr. 3526. — Adjustirte Armlänge. — Tabelle 5.

Pol	A u s s e r h a l b														
	Figur	Probepatte								Figur $w_1$					
		Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
		47·1	47·1	47·1	47·0	48·1	48·1	103·4	103·3	103·3	103·0	106·2	104·9		
		47·1	47·2	47·9	47·2	48·2	48·1	103·5	103·2	103·4	103·0	106·4	104·8		
		47·0	47·0	47·0	47·2	48·1	48·2	103·6	103·6	103·4	102·9	106·2	104·8		
		47·1	47·0	47·0	47·2	48·2	48·1	103·6	103·6	103·6	103·0	106·2	104·8		
		46·9	47·1	47·1	47·0	48·2	48·2	103·5	103·5	103·5	103·0	106·2	104·8		
		47·1	47·0	47·1	47·2	48·2	48·1	103·6	103·5	103·5	103·2	106·1	105·1		
Mittel .....		47·05	47·07	47·03	47·13	48·17	48·13	103·53	103·54	103·45	103·02	106·23	104·88		
W. F. e. B. ....		+ 0·06	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·07	+ 0·04	+ 0·04	+ 0·06	+ 0·13	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·08		
Fehlerverhältniss .....		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Differenz .....		784	785	781	886	1204	1203	1725	796	1478	1472	1518	1311		
Mittel .....		- 0·02	- 0·02	- 0·10	- 0·10	+ 0·04	+ 0·04	- 0·01	- 0·01	+ 0·43	+ 0·43	+ 1·25	+ 1·25		
		<b>47·06</b>		<b>47·08</b>		<b>48·15</b>		<b>103·53</b>		<b>103·23</b>		<b>105·55</b>			

Nr. 3526. — Tabelle 5 a.

Pol	A u s s e r h a l b																
	Figur	Probepatte $K_4$				Dreieck $\alpha$				Viereck $d$		Viereck $e$		Polygon $\varphi$			
		Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
		132·5	132·6	7·9	8·0	8·1	8·0	34·0	33·7	54·6	54·6	112·6	112·5	112·7	112·9		
		132·6	132·5	8·0	7·9	7·9	7·9	34·0	33·9	54·7	54·5	112·4	112·4	112·4	112·4		
		132·6	112·5	8·0	7·9	8·0	8·0	33·9	33·7	54·9	54·8	112·4	112·7	112·5	112·5		
		132·5	132·6	8·0	7·9	8·0	8·0	33·8	33·7	54·6	54·6	112·4	112·5	112·6	112·5		
		132·6	132·4	8·0	8·0	7·9	7·9	33·9	33·7	54·8	54·5	112·4	112·6	112·4	112·4		
		132·5	132·6	8·0	7·9	8·0	8·0	33·8	33·8	54·7	54·6	112·6	112·5	112·5	112·4		
Mittel .....		132·55	132·53	7·98	7·93	7·98	7·97	33·90	33·75	54·72	54·60	112·47	112·53	112·52	112·43		
W. F. e. B. ....		+ 0·04	+ 0·05	+ 0·03	+ 0·03	+ 0·05	+ 0·03	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·08	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·08	+ 0·03		
Fehlerverhältniss .....		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Differenz .....		3314	2651	266	264	160	266	565	563	684	780	1607	1608	1407	3748		
Mittel .....		+ 0·02	+ 0·02	+ 0·05	+ 0·05	+ 0·01	+ 0·01	+ 0·15	+ 0·15	+ 0·12	+ 0·12	- 0·06	- 0·06	+ 0·09	+ 0·09		
		<b>132·54</b>		<b>7·95</b>		<b>7·97</b>		<b>33·82</b>		<b>54·66</b>		<b>112·50</b>		<b>112·47</b>			

Polar-Planimeter Nr. 36. — Adjustirte Armlänge. — Tabelle 6.

Pol	A u s s e r h a l b																
	Figur	Probepatte $K_4$				Probepatte $K_6$				Dreieck $\alpha$							
		Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
		132·6	132·3	132·6	132·7	133·5	132·1	173·9	173·8	174·0	174·0	174·4	173·3	8·2	7·9	8·0	8·0
		132·7	132·6	132·7	132·6	133·4	132·0	174·0	174·0	174·0	174·0	174·3	173·0	8·0	8·0	8·2	7·9
		132·7	132·4	132·7	132·6	133·5	131·9	174·0	173·7	174·2	174·0	174·3	172·9	8·0	7·9	8·0	7·9
		132·7	132·5	132·7	132·6	133·3	132·0	173·9	173·8	174·0	173·9	174·3	173·1	8·0	8·2	8·0	8·0
		132·5	132·5	132·6	132·5	133·4	132·1	173·9	173·7	174·1	173·9	174·3	173·2	8·1	8·0	8·2	8·1
		132·7	132·5	132·7	132·6	133·3	132·0	174·0	173·9	174·2	173·7	174·2	173·0	8·0	7·9	8·1	8·0
Mittel .....		132·65	132·47	132·67	132·60	133·40	132·03	173·95	173·80	174·08	173·92	174·30	173·08	8·05	7·98	8·10	7·98
W. F. e. B. ....		+ 0·06	+ 0·07	+ 0·03	+ 0·04	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·04	+ 0·10	+ 0·07	+ 0·08	+ 0·04	+ 0·10	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·05
Fehlerverh. ....		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Differenz .....		2214	1893	4322	3315	2223	2200	4349	1738	2487	2174	4357	1731	134	133	135	160
Mittel .....		+ 0·18	+ 0·18	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·15	+ 0·15	+ 0·16	+ 0·16	+ 1·22	+ 1·22	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·12	+ 0·12
		<b>132·51</b>		<b>132·63</b>		<b>132·71</b>		<b>173·87</b>		<b>174·00</b>		<b>173·69</b>		<b>8·02</b>		<b>8·04</b>	

Nr. 36. Tabelle 6a.

Pol	A u s s e r h a l b																			
	Figur	Dreieck				Viereck d		Viereck s		Polygon φ				Polygon	Gemischt gebrochene Fig.	Kreis		Fig. $w_1$		
		mit freier Hand	mit dem Lineale			→	←	→	←	mit fr. Hand	mit d. Lineale			mit d. Lineale	→	←	→	←	→	←
Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B. Fehlervh. Differenz Mittel	32·1	32·2	32·0	32·1	34·1	33·8	55·1	54·9	112·8	112·9	112·9	112·7	175·2	175·0	138·2	138·0	50·4	50·4	103·3	103·0
	32·1	32·0	32·2	32·0	34·0	33·8	55·0	54·9	112·9	112·7	113·0	112·8	175·3	175·3	138·0	137·9	50·4	50·3	103·3	103·3
	32·1	32·0	32·0	31·9	33·9	33·8	55·0	54·7	112·9	112·9	112·8	112·8	175·5	175·0	138·0	138·0	50·4	50·3	103·3	103·1
	32·0	32·0	32·1	32·0	33·9	34·0	55·0	54·9	112·9	112·9	113·0	112·7	175·3	175·2	138·0	138·0	50·4	50·3	103·3	103·3
	32·2	32·1	32·2	32·0	34·0	33·8	55·0	54·8	112·7	112·9	112·7	112·7	175·5	175·1	138·0	137·9	50·3	50·2	103·2	103·2
	32·1	32·0	32·1	31·9	33·9	34·1	54·8	54·7	113·0	112·7	113·0	112·7	175·3	175·1	138·1	137·9	50·4	50·4	103·2	103·3
	32·1	32·0	32·1	32·0	33·97	33·88	54·98	54·82	112·9	112·8	112·9	112·7	175·4	175·1	138·0	137·9	50·4	50·3	103·3	103·2
	+ 0·04	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·05	+ 0·06	+ 0·09	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·09	+ 0·04	+ 0·09	+ 0·08	+ 0·07	+ 0·05	+ 0·03	+ 0·05	+ 0·04	+ 0·08
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	802	533	535	640	566	376	785	783	1613	1611	1254	2818	1950	2189	1971	2758	1680	1006	2582	1290
	+ 0·10		+ 0·10		+ 0·09		+ 0·16		+ 0·10		+ 0·20		+ 0·30		+ 0·10		+ 0·10		+ 0·10	
	<b>32·05</b>		<b>32·05</b>		<b>33·92</b>		<b>54·96</b>		<b>112·85</b>		<b>112·80</b>		<b>175·25</b>		<b>137·95</b>		<b>50·35</b>		<b>103·25</b>	

Polar-Planimeter Nr. 6213. — Tabelle 7.

Pol	A u s s e r h a l b												
	Figur	Probepatte										Fig. $w_1$	
		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B. Fehlervh. Differenz Mittel	47·2	47·4	47·0	46·8	133·6	133·7	133·8	133·4	134·2	133·7			
	47·0	47·3	46·8	46·7	133·8	133·5	133·4	133·3	134·1	133·4			
	47·1	47·2	46·9	46·9	133·7	133·6	133·7	133·5	134·2	133·4			
	47·0	47·4	46·9	46·7	133·8	133·5	133·6	133·4	134·3	133·6			
	47·2	47·3	47·0	46·6	133·7	133·7	133·5	133·2	134·2	133·5			
	47·1	47·3	47·0	46·7	133·7	133·4	133·6	133·4	134·0	133·5			
	47·1	47·3	46·9	46·7	133·7	133·7	133·6	133·4	134·2	133·5			
	+ 0·06	+ 0·05	+ 0·06	+ 0·08	+ 0·05	+ 0·13	+ 0·09	+ 0·07	+ 0·07	+ 0·08			
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
	785	946	782	584	2674	1029	1485	1906	1917	1669			
		- 0·20	+ 0·20		+ 0·00		+ 0·20		+ 0·70				
	<b>47·20</b>		<b>46·80</b>		<b>133·70</b>		<b>133·50</b>		<b>133·85</b>				

Nr. 6553. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 8.

Pol	A u s s e r h a l b								
	Figur	Probepatte $K_4$						Fig. $w_1$	
		→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B. Fehlervh. Differenz Mittel	132·9	132·9	132·6	132·6	134·4	132·0			
	133·0	132·7	132·5	132·5	134·5	131·9			
	132·8	132·8	132·4	132·6	134·1	132·2			
	132·8	132·8	132·4	132·4	134·5	132·0			
	133·1	132·9	132·6	132·6	134·5	132·1			
	132·8	132·7	132·5	132·6	134·3	132·0			
	132·7	132·9	132·5	132·5	134·3	132·2			
	132·9	132·8	132·5	132·5	134·4	132·1			
	+ 0·10	+ 0·05	+ 0·06	+ 0·06	+ 0·10	+ 0·08			
	1	1	1	1	1	1			
	1329	2656	2208	2208	1344	1651			
	+ 0·10		+ 0·00		+ 0·30				
	<b>132·85</b>		<b>132·50</b>		<b>133·25</b>				

Nr. 6985. — Tabelle 9.

Pol	A u s s e r h a l b										
	Figur	Probepatte $K_4$								Fig. $w_1$	
		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B. Fehlervh. Differenz Mittel	132·9	132·8	132·9	133·0	132·5	133·7					
	133·0	133·1	132·8	132·9	132·7	133·9					
	132·9	132·9	132·9	132·9	132·7	133·7					
	133·0	133·0	132·8	133·0	132·8	133·8					
	133·1	132·8	132·9	132·9	132·8	133·8					
	132·7	132·8	132·8	133·0	132·8	133·9					
	132·9	132·9	132·9	133·0	132·7	133·8					
	+ 0·10	+ 0·09	+ 0·05	+ 0·05	+ 0·07	+ 0·06					
	1	1	1	1	1	1					
	1329	1477	2658	2660	1896	2230					
	+ 0·00		- 0·10		- 0·10						
	<b>132·90</b>		<b>132·95</b>		<b>132·75</b>						

Polar-Planimeter. Ausgeführt von Ertel. — Tabelle 10.

Pol	A u s s e r h a l b												
	Figur	Probepatte						Figur $w_1$					
		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←		
Mittel W. F. e. B. Fehlervh. Differenz Mittel	47·7	47·8	47·5	47·6	47·3	50·5	116·7	116·9	119·9	125·8			
	47·6	47·3	47·5	47·6	47·2	50·5	117·0	117·0	119·9	126·3			
	47·2	47·6	47·5	47·6	47·4	50·3	116·7	117·1	119·7	126·2			
	47·7	47·5	47·6	47·5	47·7	50·7	117·0	117·1	119·9	126·9			
	47·4	47·6	47·5	47·7	47·5	50·7	116·6	117·0	120·1	126·7			
	47·4	47·6	47·7	47·6	47·7	50·7	116·80	117·02	119·90	126·4			
	47·7	47·4	47·5	47·5	47·5	50·6	+ 0·13	+ 0·06	+ 0·07	+ 0·22			
	47·6	47·5	47·5	47·6	47·6	50·9	1	1	1	1			
	47·5	47·5	47·5	47·6	47·5	50·6	898	1950	1713	575			
	+ 0·13	+ 0·12	+ 0·05	+ 0·04	+ 0·12	+ 0·12	- 0·20		- 6·50				
	1	1	1	1	1	1							
	365	396	792	1190	396	422	<b>116·91</b>		<b>123·15</b>				
	+ 0·00		- 0·10		- 3·1								
	<b>47·50</b>		<b>47·55</b>		<b>49·05</b>								

Nach diesen Daten ist der Schluss gerechtfertigt, dass die materielle Beschaffenheit der Unterlage, auf welcher die Rolle sich abwälzt, wohl einen Einfluss auf die Abwälzung derselben ausübt; es gibt sich dieses in den nach beiden Richtungen beim Umfahren erhaltenen Resultaten, in den Werthen des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“ und in dem absoluten Werthe der gesuchten Grösse selbst zu erkennen.

Während die Daten, erhalten für die beiden Arten Papier als Unterlage, nicht besonders weit von einander abweichen, ergeben sich für Lindenholz als Unterlage geradezu oft erschreckende Differenzen; dass dieser Umstand nicht immer gehörig gewürdigt zu sein scheint, geht daraus hervor, dass ich bei meinen Untersuchungen Planimeter mit einem beigegebenen Werthe der Constanten fand, wie er gerade für Lindenholz als Unterlage gefunden wurde, welcher Werth aber von jenem, wie er sich mit Papier als Unterlage ergeben hat, um mehrere Einheiten (Quadrat-Centimeter) abweichend war. Es hat Holz als Unterlage noch den anderen bedeutenden Nachtheil, dass die Gleichförmigkeit des Materiales in der Ausdehnung eines Zeichenbrettes nicht zu erlangen ist, in Folge dessen auch die Resultate verschiedenartig ausfallen, wenn die Figur so gelegt wird, dass die Rolle an anderer Stelle der Unterlage ihre Abwälzung vollziehen muss; sehr ungünstig wirken breite glatte Streifen im Holze. Meinen gemachten Erfahrungen zu Folge sollte man bei dem Gebrauche eines Planimeters die Rolle niemals auf dem ledigen Holze ihre Abwälzung geschehen lassen.

Weit geringer, in vielen Fällen kaum nennenswerth, ist der Unterschied in den Resultaten, je nachdem bei der Abwälzung der Rolle Velinpapier oder Maschinenpapiere (glatte Seite) als Unterlage gedient hat; während der Werth des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“, abgeleitet aus den Beobachtungen, wenn die Abwälzung der Rolle sich auf Velinpapier vollzieht, mit dem Werthe, aus den Beobachtungen abgeleitet, wenn Maschinenpapier als Unterlage gedient hat, nahezu übereinstimmt, weichen doch die für beide Arten der Unterlage ermittelten Flächen um mehr als die wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung ab. Da aber hier für dieselbe Art der Unterlage wegen der Gleichförmigkeit der Materie, derselbe Reductions-factor, d. i. der Werth der Fläche für Eine Umdrehung der

Rolle, beziehungsweise die Länge des Führungsarmes, für eine der vollen Umdrehung der Rolle entsprechende Fläche constant bleibt, so kann in diesem Falle einem Fehler leicht begegnet werden.

Hat man als Unterlage für die Abwälzung der Rolle Velin- oder Maschinenpapier gewählt, so ist bei den Polar-Planimetern der Einfluss der verschiedenen Richtung beim Umfahren der Figuren auf die Grösse der Fläche nicht so hervortretend wie bei den Linear-Planimetern, aber bei Maschinenpapier im Allgemeinen etwas grösser als bei Velinpapier.

Der Mittelwerth aus den bei dem Umfahren nach beiden Richtungen erhaltenen Resultaten ist jedenfalls der Wahrheit mehr entsprechend, und sollte auch bei diesen Instrumenten der Reductions-factor, beziehungsweise die Länge des Führungsarmes demgemäss bestimmt, und auch angegeben werden, welche Art Papier bei dieser Bestimmung als Unterlage gedient hat.

In der Tabelle A sind die Werthe des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“ für die Stellung: „Pol ausserhalb“, und in der Tabelle B für die Stellung: „Pol innerhalb“ zusammengestellt.

Es ergibt sich hieraus nicht nur die schöne Uebereinstimmung des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“ für dieselbe Figur bei den verschiedenen Instrumenten, sondern auch die gewiss befriedigende Thatsache, dass bei der Stellung: „Pol ausserhalb“ der Werth des wahrscheinlichen Fehlers einer Flächenbestimmung nie den Werth des tausendsten Theiles einer Rollenumdrehung, also wenn dieser eine Flächenangabe von  $100 \square^{cm}$  entspricht, auch nie ein  $0.1 \square^{cm}$  erreicht. Bei den kleineren Figuren ist dieser Fehler wohl ein wenig kleiner als bei den grösseren Figuren gefunden worden; unterdessen ist der Unterschied so gering, dass man den wahrscheinlichen Fehler einer Flächenbestimmung constant, und zwar nach den Daten in Tabelle A zu  $0.075 \square^{cm}$  annehmen kann; es werden mit diesem Werthe die Fehlverhältnisse für die in der Tabelle A angeführten Figuren, beziehungsweise:

$$\frac{1}{107}, \frac{1}{320}, \frac{1}{452}, \frac{1}{728}, \frac{1}{1500}, \frac{1}{1375}, \frac{1}{628}, \frac{1}{1768}, \frac{1}{2318}$$

gegen:

$$\frac{1}{125}, \frac{1}{338}, \frac{1}{394}, \frac{1}{780}, \frac{1}{1424}, \frac{1}{1452}, \frac{1}{628}, \frac{1}{1637}, \frac{1}{2595}$$

Pol ausserhalb. — Tabelle A.

Wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung für

Planimeter	F i g u r								
	a	$\gamma_1$	d	s	$\varphi$	$\omega_1$	$K_3'$	$K_3$	$K_2$
Nr. 1	$\pm 0.070$	$\pm 0.083$	$\pm 0.118$	$\pm 0.079$	$\pm 0.083$	$\pm 0.070$	$\pm 0.075$	.	.
" 290 A	$\pm 0.060$	$\pm 0.070$	$\pm 0.083$	$\pm 0.055$	$\pm 0.090$	$\pm 0.050$	.	.	.
" 295	$\pm 0.055$	.	$\pm 0.095$	.	$\pm 0.085$	$\pm 0.075$	$\pm 0.060$	$\pm 0.130$	$\pm 0.065$
" 310	$\pm 0.035$	$\pm 0.080$	.	.	$\pm 0.070$	$\pm 0.075$	$\pm 0.055$	.	.
" 3526	$\pm 0.040$	.	$\pm 0.060$	$\pm 0.075$	$\pm 0.060$	$\pm 0.095$	$\pm 0.060$	$\pm 0.045$	.
" 36	$\pm 0.060$	$\pm 0.050$	$\pm 0.075$	$\pm 0.070$	$\pm 0.070$	$\pm 0.060$	.	$\pm 0.065$	$\pm 0.070$
" 6213	.	.	.	.	.	.	.	$\pm 0.090$	.
" 6553	.	.	.	.	.	.	.	$\pm 0.075$	.
Ertel	.	.	.	.	$\pm 0.095$	.	.	$\pm 0.075$	.
Mittel	$\pm 0.064$	$\pm 0.071$	$\pm 0.086$	$\pm 0.070$	$\pm 0.079$	$\pm 0.071$	$\pm 0.075$	$\pm 0.081$	$\pm 0.067$
Fläche	$8.0 \square^{cm}$	24.0	33.9	54.6	112.5	103.1	47.1	132.6	173.9
Fehlverhältniss	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fehler in Percent	0.80	0.30	0.25	0.13	0.07	0.07	0.16	0.06	0.04

Pol innerhalb. — Tabelle B.

Wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung für											
Planimeter	F i g u r										
	$K_4$	$K_6$	$K_7$	$K_8$	$K_9$	$K_{10}$	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$
Nr. 1	$\pm 0.215$	$\pm 0.210$	.	.	.	$\pm 0.195$	.	$\pm 0.222$	.	$\pm 0.260$	$\pm 0.152$
" 290 A	$\pm 0.076$	.	.	$\pm 0.076$	.	$\pm 0.042$	.	.	$\pm 0.076$	$\pm 0.190$	$\pm 0.084$
" 295	$\pm 0.120$	.	$\pm 0.180$	$\pm 0.115$	$\pm 0.100$	$\pm 0.095$	.	.	.	$\pm 0.140$	$\pm 0.065$
" 310	$\pm 0.120$	$\pm 0.060$	.	.	.	.	$\pm 0.095$	.	.	$\pm 0.100$	.
" 3526	$\pm 0.220$	.	$\pm 0.275$	$\pm 0.125$	$\pm 0.135$	$\pm 0.095$	$\pm 0.145$	.	.	$\pm 0.140$	.
" 36	$\pm 0.230$	$\pm 0.120$	$\pm 0.130$	$\pm 0.065$	$\pm 0.080$	$\pm 0.090$	$\pm 0.100$	.	.	$\pm 0.140$	$\pm 0.080$
" 6213	$\pm 0.220$	$\pm 0.190$	.	.	.	.	.	$\pm 0.165$	.	$\pm 0.170$	.
" 6553	$\pm 0.230$	$\pm 0.068$	.	.	.	.	.	$\pm 0.125$	.	$\pm 0.095$	.
" 6985	$\pm 0.220$	$\pm 0.140$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ertel	$\pm 0.215$	$\pm 0.185$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Mittel	$\pm 0.187$	$\pm 0.139$	$\pm 0.195$	$\pm 0.095$	$\pm 0.105$	$\pm 0.103$	$\pm 0.113$	$\pm 0.171$	$\pm 0.076$	$\pm 0.154$	$\pm 0.072$
Fläche	132.6	173.9	136.5	267.2	438.6	589.2	195.5	201.6	255.8	400.3	624.7
Fehlerverhältniss	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	709	1250	700	2812	4177	5720	1730	1170	3366	2600	3676
Fehler in Percent	0.14	0.08	0.14	0.04	0.02	0.02	0.06	0.08	0.03	0.04	0.012

Wie aus der Zeichnung, Fig. 2 zu ersehen ist, sind viele Arten von Figuren in die Untersuchung einbezogen worden, von dem Dreiecke und dem in der Probeplatte gravirten Kreise angefangen bis zum Polygone ( $\varphi$ ) und der krummlinig begrenzten Figur  $w_1$ ; es dürfte demnach das Zusammentreffen dieser Resultate auch für die verschiedenen Instrumente wohl nicht mehr zufällig genannt werden können, sondern obige Annahme des wahrscheinlichen Fehlers auch gerechtfertigt erscheinen.

Was den wahrscheinlichen Fehler Einer Flächenbestimmung mittelst des Planimeters bei Pol innerhalb betrifft, so ist derselbe nach Tabelle B im Allgemeinen grösser als bei der Stellung, Pol ausserhalb; nur tritt hier das Umgekehrte ein, dass nämlich für die kleineren Flächen der wahrscheinliche Fehler grösser ist, als bei den grösseren Flächen; es ist dieses dadurch zu erklären, dass bei kleineren Flächen der Weg der Rolle ein längerer, also die Zahl der Umdrehungen derselben eine grössere ist, als bei den grösseren Figuren; derselbe Fehler, wenn man beim Umfahren nicht genau bis zur Ausgangsstelle zurückkehrt, wird demnach auch verschiedenartig in der Angabe der Rolle sein, und zwar bei kleinen Figuren grösser als bei kleineren. Wegen der beträchtlichen Grösse der Figuren, welche die Stellung des Planimeters: Pol innerhalb bedingen, ist das Fehlerverhältniss im Allgemeinen doch kleiner, als bei der Stellung: Pol ausserhalb, selbst wenn man das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers zur Fläche, wie in Tabelle B, und nicht, wie in den Tabellen 11 bis 18, das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers zu der Rollenangabe (Beobachtungsgrösse) in Betracht ziehen würde.

Ad 4. Zur Ermittlung der Constanten habe ich den gewöhnlichen Weg eingeschlagen, nämlich: Figuren (Kreise und Quadrate) von bestimmtem Flächenmaasse umfahren. Die Kreise sind auf Metallplatten gravirt, und haben folgenden Inhalt:

Probeplatte:

$K_4$	$K_6$	$K_7$
19.11 $\square$ "(192.58 $\square$ cm),	25.07 $\square$ "(173.90 $\square$ cm),	19.67 $\square$ "(136.47 $\square$ cm),
$K_8$	$K_9$	$K_{10}$
38.51 $\square$ "(267.18 $\square$ cm),	63.22 $\square$ "(438.62 $\square$ cm),	84.93 $\square$ "(589.24 $\square$ cm).

Die Quadrate sind auf das Papier gezeichnet und ihre Flächeninhalte aus genauen Abmessungen ermittelt worden; sie hatten im Durchschnitte folgendes Ausmaass:

Quadrat:

$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$
28.39 $\square$ "(196.00 $\square$ cm),	29.06 $\square$ "(201.62 $\square$ cm),	36.90 $\square$ "(235.42 $\square$ cm),
$\square_4$	$\square_5$	
57.699 $\square$ "(400.32 $\square$ cm),	90.041 $\square$ "(624.7 $\square$ cm).	

Die Quadrate sind mit freier Hand umfahren worden.

Mein Augenmerk war natürlich darauf gerichtet, zu erfahren, ob denn der Werth der Constanten für ein und dasselbe Instrument nach dieser Methode ermittelt, für verschieden grosse Figuren derselben Art und für verschieden begrenzte Figuren wirklich so differirend ausfällt, wie es oft angegeben wird, und wodurch auch der Name „berichtigte Constante“ gerechtfertigt wäre. Ich sehe hier von den bereits unter 1), 2) und 3) erörterten Fehlerquellen ab, und benütze jetzt wieder nur die Resultate, wie sich selbe durch Abwälzung der Rolle auf Velinpapier ergeben haben.

Schon bei dem ersten zur Untersuchung verwendeten Planimeter Nr. 1 fand ich bei der vom Mechaniker angegebenen Armlänge, dass der Werth der Constanten kleiner wurde, je grösser die zur Ermittlung derselben zu Grunde gelegte Fläche war. Bei den Planimetern Nr. 295, Nr. 3526, Nr. 36, und Nr. 6533 wiederholten sich bei der Annahme der gegebenen Armlängen ähnliche Erscheinungen; es überraschte mich dieses Resultat umsomehr, als die Planimeter vorher auf jene beiden Fehler untersucht worden waren, welche dieses Resultat hätten hervorrufen können, nämlich: 1. Die nicht genau senkrechte Stellung der Rollenachse zum Führungsarme und 2. die nicht genaue Länge des Führungsarmes für die geforderte Flächenangabe Einer Rollenumdrehung. Eine nochmalige Prüfung ergab kein günstigeres Resultat; nur bei einem Planimeter erfuhr ich hierbei, dass die auf der Probeplatte angegebene Fläche etwas fehlerhaft war.

Die Tabellen 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 und 18 enthalten die nöthigen Daten.

Die den Polar-Planimetern beigegebenen Probeplatten haben geringe Ausdehnung, und umfassen selten mehr als

50 □<sup>cm</sup>. Bei der Untersuchung über die richtige Länge des Führungsarmes wird man sich zufrieden geben, wenn die vom Planimeter ermittelte Fläche von jener auf der Probeplatte angegebenen Fläche um eine Grösse abweicht, welche etwa dem wahrscheinlichen Fehler 0.075 □<sup>cm</sup> gleichkommt. Bei den Amsler'schen Planimetern wird dieses für

die Fläche von 50 □<sup>cm</sup> schon statthaben, wenn die Länge des Führungsarmes bis auf 0.24<sup>mm</sup>, bei den Starke'schen Polarplanimetern für Metermaass, wenn die Länge des Führungsarmes bis auf 0.22<sup>mm</sup> richtig getroffen ist. (Es folgt dieses aus der Gleichung:  $F = r \cdot v$ , in welcher  $F$  die Fläche,  $r$  die Länge des Führungsarmes und  $v$  den an der Rolle

Nr. 1. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 11.

Pol	Innerhalb								
	Fig.	Probeplatten							
		$K_4$		$K_5$		$K_9$		$K_{10}$	
		→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel Fläche	169.29	169.23	149.72	149.53	124.61	124.35	102.71	102.39	
	169.24	169.22	149.73	149.32	124.63	124.33	102.67	102.40	
	169.32	169.11	149.74	149.49	124.63	124.34	102.68	102.33	
	169.24	169.10	149.74	149.50	124.64	124.30	102.60	102.35	
	169.25	169.16	149.75	149.48	124.62	124.30	102.78	102.32	
Constante	188.38	188.27	188.25	188.01	187.85	187.54	187.62	187.29	
Differenz $C_m$	+ 0.11 <b>188.32</b>		+ 0.24 <b>188.13</b>		+ 0.31 <b>187.69</b>		+ 0.33 <b>187.45</b>		

Nr. 295. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 12.

Pol	Innerhalb								
	Figur	Probeplatte							
		$K_7$		$K_8$		$K_9$		$K_{10}$	
		→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B.	1727.7	1727.1	1595.9	1595.6	1423.6	1422.5	1272.6	1271.5	
	1727.4	1727.4	1596.2	1595.4	1423.7	1422.6	1272.7	1271.8	
	1727.4	1726.9	1596.2	1596.2	1423.6	1422.8	1272.7	1271.2	
	1727.2	1726.5	1596.2	1595.4	1423.7	1422.4	1272.8	1271.1	
	1727.8	1726.7	1596.2	1595.3	1423.5	1422.6	1272.7	1271.0	
Constante	1864.1	1863.5	1863.4	1862.6	1862.2	1861.1	1861.9	1860.6	
Differenz $C_m$	+ 0.15 <b>1863.8</b>		+ 0.21 <b>1863.0</b>		+ 0.13 <b>1861.6</b>		+ 0.11 <b>1861.2</b>		

Nr. 310. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 13.

Pol	Innerhalb																
	Fig.	Probeplatte $K_4$								Probeplatte $K_6$							
		→				←				→				←			
		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel W. F. e. B.	1751.8	1751.3	1752.0	1752.4	1756.5	1754.9	1711.4	1711.2	1711.6	1711.5	1716.1	1714.5	1689.5	1689.7	1485.3	1485.0	
	1751.4	1751.3	1752.2	1751.2	1756.4	1755.1	1711.2	1711.3	1711.5	1711.1	1715.8	1714.6	1689.8	1689.6	1485.3	1484.7	
	1751.6	1751.6	1752.3	1752.2	1756.1	1755.6	1711.3	1711.1	1711.1	1711.7	1715.8	1714.6	1689.9	1689.5	1485.4	1484.6	
	1751.2	1751.2	1751.3	1751.9	1756.1	1754.2	1711.3	1711.3	1711.4	1711.5	1715.9	1714.6	1689.7	1689.5	1485.3	1484.7	
	1751.3	1751.4	1751.5	1751.3	1755.8	1755.1	1711.3	1711.2	1711.5	1711.0	1715.5	1715.0	1689.6	1689.5	1485.3	1484.4	
Constante	1884.1	1884.1	1884.6	1884.6	1888.9	1887.7	1885.2	1885.1	1885.2	1885.3	1889.7	1888.5	1885.7	1885.5	1885.4	1884.7	
Differenz $C_m$	+ 0.14 <b>1884.1</b>				+ 0.33 <b>1884.6</b>				+ 0.16 <b>1888.3</b>				+ 0.06 <b>1885.15</b>				

Nr. 3526. — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 13 a.

Pol.	Innerhalb								
	Fig.	Probeplatten							
		$K_7$		$K_8$		$K_9$		$K_{10}$	
		→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel Fläche	1943.2	1942.6	1809.3	1809.1	1634.8	1634.8	1483.1	1482.5	
	1943.3	1942.8	1809.6	1809.1	1635.0	1634.9	1483.0	1482.4	
	1943.3	1943.0	1810.2	1809.4	1635.3	1634.6	1483.0	1482.7	
	1943.2	1942.5	1809.7	1809.1	1635.0	1634.2	1482.8	1482.5	
	1943.2	1942.8	1809.7	1809.0	1634.6	1634.5	1482.7	1482.6	
Constante	2079.7	2079.2	2076.9	2076.3	2073.5	2073.2	2071.1	2071.7	
Differenz $C_m$	+ 0.08 <b>2079.45</b>		+ 0.09 <b>2076.60</b>		+ 0.04 <b>2073.35</b>		+ 0.06 <b>2071.90</b>		

Nr. 36. Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 14.

Pol	Innerhalb								
	Figur	$P_p K_7$		$P_p K_8$		$P_p K_9$		$P_p K_{10}$	
		→	←	→	←	→	←	→	←
		→	←	→	←	→	←	→	←
Mittel Fläche	2029.9	2029.9	1899.0	1898.6	1727.1	1726.4	1576.2	1575.7	
	2029.9	2029.2	1799.1	1898.5	1727.1	1726.5	1576.2	1575.8	
	2029.9	2029.6	1899.3	1898.6	1726.9	1726.5	1576.3	1575.6	
	2029.7	2029.4	1899.0	1898.7	1727.3	1726.6	1576.2	1575.8	
	2030.0	2029.7	1899.0	1898.6	1727.1	1726.6	1576.2	1575.6	
Constante	2166.4	2166.1	2166.3	2165.8	2165.7	2165.1	2165.4	2164.9	
Differenz $C_m$	+ 0.08 <b>2166.25</b>		+ 0.09 <b>2166.05</b>		+ 0.04 <b>2165.40</b>		+ 0.06 <b>2165.15</b>		



abgewickelten Bogen bedeutet, durch Differentiation, nämlich:

$$dF = v \cdot dr \text{ oder } dr = \frac{dF}{v} = \frac{dF}{F} \cdot r.$$

Bei den Amsler'schen Planimetern ist r nahe 15·7<sup>cm</sup>, bei den Starke'schen nahe 14·8<sup>cm</sup>. Nun wird aber durch solch einen Fehler in der Länge des Führungsarmes bei einer

zu ermittelnden Fläche von 150<sup>cm</sup> bei Pol ausserhalb der Fehler in der Fläche nach Gleichung  $dF = \frac{F \cdot dr}{r}$

schon 0·225<sup>cm</sup>, also weit grösser, als der zulässige Fehler in der Flächenbestimmung. Hätte man aber bei der anfänglichen Untersuchung, beziehungsweise bei der Richtigestellung

Mit der angegebenen Armlänge.

**Polar-Planimeter Nr. 6213.** — Tabelle 15.

Angegebene Constante: 2104·1.

Pol	Innerhalb																	
	Figur		Probepatte K <sub>4</sub>				Probepatte K <sub>5</sub>				Probepatte K <sub>6</sub>		□'₂		□'₄			
	Richtig.	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	
Mittel W. F. e. B. Fehlerv. Fläche Constante Mittel	1967·5	1967·3	1968·1	1967·7	1972·9	1973·4	1925·9	1925·7	1925·9	1925·3	1930·5	1932·0	1926·2	1926·3	1898·0	1898·1	1690·1	1690·4
	1967·6	1967·8	1967·3	1966·9	1972·2	1972·9	1926·1	1926·1	1925·5	1925·1	1931·2	1931·2	1926·6	1926·3	1898·9	1898·3	1690·0	1690·6
	1967·6	1967·5	1968·3	1967·1	1972·6	1973·5	1926·6	1925·9	1926·4	1925·5	1930·8	1932·4	1926·6	1926·0	1898·4	1898·1	1690·0	1690·5
	1967·1	1967·9	1967·3	1967·2	1972·5	1973·1	1926·0	1926·0	1925·3	1925·6	1930·2	1931·1	1926·3	1926·0	1898·4	1898·1	1690·4	1689·8
	1968·2	1967·3	1967·0	1967·0	1972·9	1973·0	1926·4	1926·2	1925·9	1925·3	1930·8	1932·0	1926·2	1926·1	1898·6	1898·0	1690·4	1689·8
	1967·6	1967·6	1967·6	1967·6	1972·0	1973·5	1926·3	1925·6	1925·9	1925·0	1931·1	1931·6	1926·6	1926·2	1898·6	1897·8	1690·2	1690·1
	1967·9	1967·0	1967·8	1966·6	1972·6	1973·5	1926·5	1925·9	1925·9	1925·3	1930·1	1932·0	1926·6	1926·2	1898·4	1897·9	1690·5	1690·3
	1967·6	1967·5	1967·6	1967·2	1972·5	1973·3	1926·3	1926·1	1925·8	1925·30	1930·7	1931·8	1926·4	1926·2	1898·5	1898·0	1690·2	1690·3
	± 0·23	± 0·21	± 0·32	± 0·26	± 0·23	± 0·18	± 0·18	± 0·20	± 0·24	± 0·20	± 0·29	± 0·32	± 0·14	± 0·09	± 0·20	± 0·13	± 0·14	± 0·20
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8555	9369	6149	7570	8575	10963	10702	9631	8024	9626	6658	6037	13760	21402	9492	14600	12073	8452	
132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	201·6	201·6	408·4	408·4	
2100·3	2100·2	2100·3	2099·9	2105·2	2106·0	2100·2	2099·0	2099·7	2099·2	2101·6	2105·7	2100·3	2100·1	2100·1	2099·6	2098·6	2098·7	
2100·25		2100·10		2105·6		2099·6		2099·47		2105·15		2100·20		2099·85		2098·65		

Mit der angegebenen Armlänge.

**Nr. 6553.** — Tabelle 16.

Angegebene Constante: 2079·2.

Pol	Innerhalb															
	Figur		Probepatte K <sub>4</sub>				Probepatte K <sub>5</sub>				Probepatte K <sub>6</sub>		□'₂		□'₄	
	Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
Mittel W. F. e. B. Fehlerv. Fläche Constante Mittel	1944·7	1945·1	1944·3	1944·5	1948·6	1950·5	1903·3	1903·0	1903·6	1903·2	1908·4	1908·3				
	1945·5	1945·2	1944·3	1944·9	1949·9	1950·2	1903·5	1903·0	1903·6	1903·1	1907·9	1908·5				
	1944·9	1944·8	1945·7	1944·5	1949·8	1950·6	1903·5	1903·3	1904·2	1903·9	1908·0	1908·5				
	1945·0	1944·9	1944·8	1944·3	1948·6	1950·2	1903·4	1903·0	1903·8	1903·9	1908·0	1908·3				
	1945·5	1944·6	1945·0	1944·6	1949·5	1950·0	1903·3	1903·2	1903·7	1903·9	1908·1	1908·5				
	1945·3	1945·0	1944·8	1945·4	1949·2	1950·9	1903·6	1903·1	1903·9	1903·5	1907·9	1908·4				
	1945·2	1945·2	1945·1	1944·5	1949·2	1950·8	1903·2	1903·0	1903·8	1903·1	1908·4	1908·4				
	1945·30	1945·0	1944·9	1944·7	1949·3	1950·3	1903·40	1903·1	1903·80	1903·4	1908·1	1908·4				
	± 0·23	± 0·15	± 0·33	± 0·25	± 0·35	± 0·23	± 0·10	± 0·08	± 0·14	± 0·29	± 0·15	± 0·06				
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
8457	12967	5893	7779	5569	8480	19034	23789	13599	6564	12721	31807					
132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9					
2078·0	2077·7	2077·6	2077·4	2082·0	2083·2	2077·3	2077·0	2077·7	2077·3	2082·0	2082·32					
2077·85		2077·50		2082·60		2077·15		2077·50		2082·16						

**Nr. 6985.** — Mit der angegebenen Armlänge. — Tabelle 17.

Pol	Innerhalb															
	Figur		Probepatte K <sub>4</sub>				Probepatte K <sub>5</sub>				Probepatte K <sub>6</sub>		□'₂		□'₄	
	Richtung	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→
Mittel W. F. e. B. Fehlerv. Fläche Constante Mittel	1944·5	1945·1	1944·2	1944·5	1949·6	1951·7	1903·4	1903·5	1903·1	1902·8	1908·7	1909·0				
	1945·4	1944·6	1945·3	1944·2	1949·3	1951·2	1903·6	1903·2	1903·6	1902·9	1908·1	1909·0				
	1944·2	1944·5	1945·1	1944·5	1949·5	1950·4	1903·4	1903·3	1903·4	1903·2	1907·9	1908·8				
	1944·8	1944·7	1944·8	1944·4	1949·4	1951·1	1903·4	1903·1	1903·0	1902·9	1908·5	1908·8				
	1945·3	1944·9	1944·5	1944·0	1949·9	1950·9	1902·9	1903·0	1803·3	1902·9	1907·9	1909·4				
	1944·8	1944·7	1945·3	1944·7	1949·9	1950·9	1903·0	1903·3	1903·6	1902·9	1908·1	1908·8				
	1944·6	1944·6	1944·8	1945·2	1950·0	1950·8	1903·2	1903·4	1903·4	1903·1	1907·9	1908·8				
	1944·8	1945·0	1944·3	1944·7	1949·9	1950·8	1903·0	1903·0	1903·2	1902·9	1908·2	1908·9				
	1944·8	1944·8	1944·7	1944·5	1949·7	1951·0	1903·2	1903·2	1903·3	1902·9	1908·2	1908·9				
	± 0·27	± 0·15	± 0·31	± 0·24	± 0·19	± 0·27	± 0·17	± 0·11	± 0·15	± 0·10	± 0·22	± 0·15				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
7203	12965	6273	8102	10262	7226	11195	17302	12689	19029	8674	12726					
132·6	132·6	132·6	132·6	132·6	132·6	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9					
2077·4	2077·4	2077·3	2077·1	2082·3	2083·6	2077·1	2077·1	2077·2	2076·9	2082·1	2082·8					
2077·4		2077·2		2083·0		2077·10		2077·05		2082·45						

Polar-Planimeter. Ausgeführt von Ertel. — Tabelle 18.

Pol	Innerhalb																														
	Probeplatte $K_4$							Probeplatte $K_6$																							
Figur																															
Richtung	→		←						→		←																				
	1718·0	1718·5	1719·6	1718·7	1716·1	1718·3	1678·7	1677·5	1677·5	1677·9	1675·3	1675·7	1717·3	1718·0	1718·7	1719·5	1717·1	1717·9	1678·1	1677·5	1677·7	1677·7	1675·4	1675·5							
	1717·7	1717·4	1719·2	1719·4	1716·9	1717·1	1678·9	1677·8	1677·4	1677·6	1675·6	1675·9	1717·8	1718·0	1718·9	1719·7	1717·7	1718·4	1678·5	1677·9	1677·4	1677·6	1675·6	1675·9							
	1717·9	1718·1	1719·2	1719·2	1717·7	1718·0	1678·5	1677·9	1677·4	1677·6	1675·3	1675·7	1717·5	1718·2	1719·2	1719·2	1717·7	1718·4	1679·1	1677·8	1677·5	1677·6	1675·7	1675·7							
	1717·5	1718·2	1719·2	1719·4	1717·5	1718·8	1678·3	1677·8	1677·8	1677·9	1675·1	1675·6	Mittel.....	VP	1717·7	1718·0	MP	1719·30	1719·30	LH	1717·2	1718·1	LH	1678·6	1677·7	MP	1677·6	1677·7	VP	1675·4	1675·7
W. F. e. B.	+ 0·18	+ 0·25	+ 0·20	+ 0·23	+ 0·31	+ 0·39	+ 0·25	+ 0·12	+ 0·12	+ 0·10	+ 0·15	+ 0·11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Fehlerverh.	9543	6872	9596	7475	5540	4406	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Fläche.....	132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	132·7	173·9	173·9	13980	16777	11169	15197	1850·4	1850·8	1852·0	1852·0	1849·9	1850·8	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9	173·9							
Constante....	1850·4	1850·8	1852·0	1852·0	1849·9	1850·8	1852·5	1851·6	1851·5	1851·6	1849·3	1849·6	Mittel.....	1850·6	1852·0	1850·35	1852·05	1851·55	1849·45	1850·4	1850·8	1852·5	1851·6	1851·5	1851·6	1849·3	1849·6				

der Länge des Führungsarmes die Fläche von  $150 \square \text{cm}$  zu Grunde gelegt, und nunmehr auch verlangt, dass die Fläche bis auf  $0\cdot075 \square \text{cm}$  angegeben werde, so hätte die Länge des Führungsarmes bei den erstgenannten Planimetern bis auf  $0\cdot078 \text{mm}$ , bei dem zweitgenannten bis auf  $0\cdot074 \text{mm}$  richtig angegeben sein müssen.

Weit abweichender müssen demnach sich auch die Unterschiede in der Flächen-, beziehungsweise in der Constanten-Bestimmung für verschieden grosse Flächen ergeben, wenn bei Pol innerhalb beobachtet wird, in welchem Falle die Anzahl der Rollenumdrehungen meist eine beträchtlich grosse wird, um so grösser, je kleiner die zu Grunde gelegte Fläche ist.

Meines Erachtens sollte die Richtigstellung eines Polar-Planimeters derart erfolgen, dass man mit einer kleinen Probeplatte (wegen der Stellung: Pol nahe und Pol entfernt) zuerst die Prüfung auf die Richtigkeit der Stellung der Rollenebene gegen den Führungsarm bei annähernd richtiger Länge des letzteren, und

dann mit einer möglichst grossen Probeplatte bei Pol ausserhalb die Ausmittlung der richtigen Länge des Führungsarmes für eine bestimmte Flächenangabe der Rolle für eine Umdrehung derselben vornimmt.

Welche Resultate man nach diesem Vorgange bei der Constanten-Bestimmung erreicht, zeigen die Tabellen 19, 20, 21, 22, 23; es wird hierdurch auf das bestimmteste widerlegt, dass Figuren derselben Form aber verschieden grosser Flächen, und Figuren verschiedener Form, solche abweichende Werthe für die Constante geben, dass selbe den Namen „berüchtigt“ verdient; der wahrscheinliche Fehler in dem Werthe einer Constanten-Bestimmung ist nach den angezogenen Tabellen:

$$\pm 0\cdot55 \square \text{cm} (0\cdot080 \square \text{cm}), \pm 0\cdot64 \square \text{cm} (0\cdot093 \square \text{cm}),$$

$$\pm 0\cdot31 \square \text{cm}, \pm 0\cdot27 \square \text{cm}, \pm 0\cdot34 \square \text{cm},$$

also im Mittel

$$\pm 0\cdot42 \square \text{cm},$$

gewiss ein befriedigendes Ergebniss.

Polar-Planimeter Nr. 1. — Tabelle 19.

Pol	Innerhalb																														
	Probeplatte $K_4$							Probeplatte $K_6$																							
Figur																															
Richtung	→		←						→		←																				
	169·34	169·35	169·57	169·25	169·54	169·54	163·58	163·44	163·51	163·27	163·74	163·50	169·31	169·40	169·43	169·31	169·49	169·49	163·57	163·49	163·55	163·30	163·69	163·54							
	169·32	169·42	169·54	169·32	169·49	169·49	163·61	163·34	163·57	163·26	163·76	163·58	169·27	169·42	169·42	169·37	169·58	169·58	163·61	163·34	163·57	163·26	163·76	163·58							
	169·24	169·31	169·48	169·23	169·58	169·56	163·50	163·42	163·50	163·42	163·78	163·47	169·36	169·43	169·51	169·28	169·56	169·62	163·52	163·44	163·62	163·50	163·81	163·48							
	169·36	169·43	169·51	169·23	169·62	169·56	163·54	163·42	163·58	163·42	163·81	163·48	Mittel.....	VP	169·31	169·39	MP	169·49	169·29	LH	169·58	169·56	VP	163·55	163·43	MP	163·57	163·34	LH	163·76	163·49
W. F. e. B.	+ 0·030	+ 0·032	+ 0·040	+ 0·034	+ 0·042	+ 0·029	+ 0·028	+ 0·033	+ 0·026	+ 0·065	+ 0·029	+ 0·034	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
Fehlerverh.	5644	5293	4237	4979	4037	5847	5841	4952	6291	2514	5647	4808	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
Fläche.....	19·11	19·11	19·11	19·11	19·11	19·11	25·07	25·07	25·07	25·07	25·07	25·07	188·42	188·50	188·60	188·40	188·69	188·67	188·62	188·50	188·64	188·44	188·83	188·56							
Constante....	188·42	188·50	188·60	188·40	188·69	188·67	188·62	188·50	188·64	188·44	188·83	188·56	Mittel.....	188·46	188·50	188·68	188·56	188·54	188·69	188·42	188·50	188·62	188·50	188·64	188·44	188·83	188·56				

Nr. 1. — Tabelle 19 a.

Pol	Innerhalb										Resultate der Constante aus		
	Probepatte $K_{10}$		$\square_2$				$\square_5$						
	Richtung												
	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$K_6$	188·42	188·50
											$K_5$	188·62	188·50
											$K_{10}$	188·55	188·29
											$\square_2$	188·44	188·26
											$\square_3$	188·56	188·30
											Mittel	188·52	188·37
Mittel											$C = 188.445$		
W. F. e. B.											$\pm 0.080$		
Fehlerverhältniss													
Fläche													
Constante													
Differenz													
Mittel													

Nr. 290 A. Tabelle 20.

Pol	Innerhalb										Resultate der Constanten aus		
	Probepatte $K_4$		Probepatte $K_5$		Probepatte $K_{10}$		$\square_3$		$\square_5$				
	Richtung												
	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$K_4$	189·445	189·425
											$K_5$	189·715	189·660
											$K_{10}$	189·548	189·493
											$\square_3$	189·365	189·197
											$\square_5$	189·498	189·263
Mittel											$189.514   189.408$		
W. F. e. B.											$\pm 0.088   \pm 0.125$		
Fehlerverhältniss											$189.461$		
Fläche											$\pm 0.093$		
Constante													
Mittel													

Nr. 295. Tabelle 21.

Pol	Innerhalb										Resultate der Constanten aus		
	Probepatte $K_7$		Probepatte $K_8$		Probepatte $K_9$		Probepatte $K_{10}$		$\square_6$				
	Richtung												
	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$K_7$	1866·14	1865·84
											$K_8$	1866·55	1865·76
											$K_9$	1866·90	1866·00
											$K_{10}$	1866·76	1866·01
											$\square_6$	1867·05	1866·34
Mittel											$1866.68   1865.99$		
W. F. e. B.											$C = 1866.33$		
Fehlerverhältniss											$\pm 0.31$		
Fläche													
Constante													
Mittel													

Nr. 3526. Tabelle 22.

Pol	Innerhalb														Resultate der Constanten aus				
	Probepatte $K_4$				Probepatte $K_7$				Probepatte $K_8$		Probepatte $K_{10}$		$\square_1$						
	Richtung																		
	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$K_4$	2083·24	2083·00
																	$K_7$	2082·60	2082·57
																	$K_8$	2082·40	2081·76
																	$K_{10}$	2082·64	2081·94
																	$\square_1$	2082·89	2082·64
Mittel																	Mittel	2082·75	2082·48
W. F. e. B.																	$C = 2082.46$		
Fehlerverh.																	$\pm 0.27$		
Fläche																			
Constante																			
Mittel																			

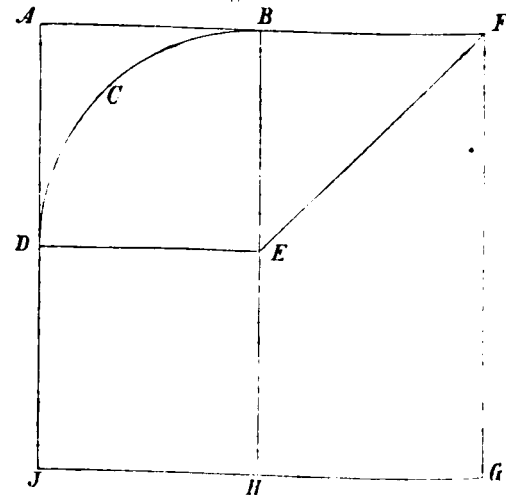
Nr. 36. — Tabelle 23.

Pol	Innerhalb															
	Probepalte $K_4$							Probepalte $K_6$								
	→		←		→		←		→		←		→		←	
Mittel.....	2032.9	2032.1	2032.4	2032.4	2031.7	2031.6	2031.9	2031.0	2036.9	2036.0	1992.2	1991.6	1991.5	1991.0	1997.0	1995.3
W. F. e. B.	± 0.20	± 0.26	± 0.18	± 0.29	± 0.23	± 0.18	± 0.12	± 0.12	± 0.12	± 0.12	± 0.13	± 0.06	± 0.09	± 0.16	± 0.09	± 0.16
Fehlerverh...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fläche.....	10161	7817	132.57	132.57	11287	7006	132.57	132.57	8857	11312	16599	16597	15319	33185	22183	12483
Constante...	2165.04	2164.84	2164.19	2164.12	2164.19	2164.12	2169.7	2168.8	2169.7	2168.8	2115.89	2165.53	2165.35	2164.98	2170.7	2169.6
Mittel.....	2164.94		2164.15		2169.25		2165.73		2165.16		2170.17					

Nr. 36. — Tabelle 23a.

Pol	Innerhalb										Resultate der Constanten aus			
	Probepalte $K_{10}$				Quadrat $\square_1$		Quadrat $\square_3$							
	→		←		→		←		→		←			
Mittel.....	1576.1	1575.2	1576.0	1575.5	1970.7	1970.4	1540.1	1539.7	$K_4$	2165.04	2164.84			
W. F. e. B.	± 0.07	± 0.20	± 0.10	± 0.10	± 0.07	± 0.09	± 0.07	± 0.09	$K_6$	2165.89	2165.58			
Fehlerverhältniss	1	1	1	1	1	1	1	1	$K$	2165.17	2164.89			
Fläche.....	22513	7378	19709	19705	24859	17110	624.85	624.85	$\square_1$	2166.14	2165.81			
Constante.....	2165.17	2164.89	2166.14	2165.81	2164.98	2164.80	2165.44	2165.18	$\square_3$	2164.98	2164.80			
Mittel.....	2165.03		2165.97		2164.89				Mittel	2165.44	2165.18			
									$C =$	2165.31	0.31			

Figur 3.



Um schliesslich zu erforschen, ob denn für ein und dieselbe Figur die Werthe ihrer Fläche, ermittelt bei Pol ausserhalb und bei Pol innerhalb, so weit von einander abweichen, dass man letztere Stellung niemals zur Anwendung, sondern immer empfiehlt, die Figur zu theilen, und dann die einzelnen Theilfiguren der Fläche noch bei Pol ausserhalb zu bestimmen, habe ich, ein Quadrat ( $\square_1$ ) Fig. 3 in das Segment  $t_1$ , in das Dreieck  $t_2$ , in den Quadranten  $t_3$ , in das Quadrat  $t_4$ , in das Trapez  $t_5$  zerlegt, und jede dieser Flächen nach der ersten und zweiten Art bei Pol ausser-

halb, und dann die Fläche des Quadrates  $\square_3$  bei Pol innerhalb bestimmt; die Beobachtungs-Resultate sind in den Tabellen 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 u. 32 enthalten.

Nr. 1. Tabelle 24.

Pol	Ausserhalb													Innen		Diff. d. Fläche	
	Segment $t_1$		Dreieck $t_2$		Quadrant $t_3$		Quadrat $t_4$		Trapez $t_5$		Summe		Mittel		Quadrat		
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→		←
Mittel	3.06	3.03	7.22	7.20	11.27	11.25	14.40	14.37	21.79	21.71	3.053	3.037	57.676	130.72	130.56		
	3.05	3.05	7.25	7.18	11.31	11.24	14.42	14.38	21.81	21.71	7.243	7.183	gegen	130.67	130.56		
	3.05	3.03	7.26	7.17	11.27	11.21	14.30	14.36	21.83	21.76	11.283	11.233	$F = 57.600$	130.69	130.51		
	3.053	3.037	7.243	7.183	11.283	11.233	14.403	14.370	21.810	21.737	14.403	14.370	$\Delta = 0.076$	136.69	130.55		
											21.810	21.737	d. i. 0.13%				
											57.792	57.560	od. $\frac{1}{758}$				
											57.68		d. Fläche				
													Mittel				
													Quadrat				
													Pol innen				
													Pol aussen				
													$\Delta = 0.14$				
													d. i. 0.21%				
													od. $\frac{1}{411}$				
													der Fläche				
													$M = 130.62$				
													$C = 188.44$				
													$F = 57.82$				
													gegen 57.60				
													$\Delta = 0.22$				
													d. i. 0.38%				
													od. $\frac{1}{263}$				
													d. Fl.				



Nr. 3526. — Tabelle 29.

Pol	A u s s e r h a l b											I n n e r h a l b				Fläche des Quadrates aus Pol			
	Segment $t_1$		Dreieck $t_2$		Quadrant $t_3$		Quadrat $t_4$		Trapez $t_5$		Summe aus		Quadrat						
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←					
Mittel	21·4	21·8	49·8	49·6	78·1	77·8	99·9	99·8	150·6	150·6	Segment Dreieck Quadrat Trapez Quadrat Mittel gegen $\Delta =$ d. i.	21·58	21·67	Constante Fläche Mittel gegen $\Delta =$ d. i.	1683·0	1683·0	ausen 399·77 innen 399·55 Differenz 0·22 d. i. 0·06% oder $\frac{1}{1818}$ der Fläche		
	21·7	21·5	50·0	49·7	78·0	77·6	100·0	100·1	150·8	150·7		49·83	49·70		1682·9	1682·9			
	21·5	21·7	49·7	49·8	77·7	77·8	99·9	100·1	150·5	150·5		77·93	77·73		1682·8	1682·9			
	21·53	21·67	49·83	49·70	77·93	77·73	99·93	100·00	150·63	150·60		99·93	100·00		1682·90	1682·93			
												150·63	150·60		399·85	399·70		2082·46	2082·46
															399·77	399·53		399·56	399·53
												400·00	400·10	400·10	400·10				
												0·33	0·55	0·55	0·55				
												0·09%	0·14%	0·14%	0·14%				
												$\frac{1}{1211}$	d. Fläche	$\frac{1}{727}$	der Fläche				

Nr. 3526. — Tabelle 30.

Pol	Richtung	A u s s e r h a l b						I n n e r h a l b		Differenz der Fläche Pol innen gegen Pol aussen	
		Segment $t_1$	Dreieck $t_2$	Quadrant $t_3$	Quadrat $t_4$	Trapez $t_5$	Summe aus	Quadrat			
Mittel aus..... " "..... " ".....	→	21·5	49·8	78·4	100·1	150·6	$t_1$	21·53	Constante Fläche gegen $\Delta =$ d. i. oder	1680·9	$\Delta = 1·71$ i. d. 0·42% oder $\frac{1}{234}$ der Fläche
	←	21·5	49·7	78·3	100·1	150·4	$t_2$	49·77		1680·5	
	→	21·6	49·9	78·4	100·1	150·5	$t_3$	78·31		1680·7	
	←	21·4	49·7	78·1	100·0	150·3	$t_4$	100·03		1680·7	
	→	21·7	49·9	78·4	100·1	150·5	$t_5$	150·43		1680·8	
	←	21·5	49·6	78·3	99·9	150·3	$S =$	400·07		1680·5	
	→	21·60	49·87	78·40	100·10	150·53	gegen	400·10		1680·80	
	←	21·47	49·67	78·23	99·97	150·33	$\Delta =$	0·03		1680·56	
	→	21·53	49·77	78·31	100·03	150·43	d. i.	0·01%		1680·68	
							oder	$\frac{1}{13327}$		2082·46	
								401·78	1·68 0·42% $\frac{1}{239}$		
								400·10			

Nr. 36. — Tabelle 31.

Pol	Figur	Richtung	A u s s e r h a l b										I n n e r h a l b		Differenz der Fläche Pol aussen gegen Pol innen		
			Segment $t_1$		Dreieck $t_2$		Quadrant $t_3$		Quadrat $t_4$		Trapez $t_5$		Summe			Quadrat	
			→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←		→	←
Mittel .....			21·6	21·6	50·1	49·9	78·8	78·5	100·3	100·0	150·4	150·2	400·99	400·53	1766·1	1766·0	1·47 <sup>cm</sup> d. i. 0·37% oder $\frac{1}{272}$ der Fläche
			21·7	21·5	50·1	50·0	78·7	78·9	100·2	100·3	150·3	150·3	Mittel 400·76	1765·9	1765·9		
			21·6	21·4	49·9	49·9	78·7	78·8	100·2	100·0	150·4	150·3	Fläche 400·32	1766·2	1766·0		
			21·63	21·50	50·03	49·93	78·73	78·73	100·23	100·10	150·37	150·27	$\Delta = 0·44$ d. i. 0·11% oder $\frac{1}{910}$	1766·07	1765·97		
" .....			21·56	49·98	78·73	78·73	100·16	100·10	150·37	150·32	d. i. 0·11%	2165·31	2165·31				
												399·24	399·34	399·24	399·34		
												Mittel 399·29	Fläche 400·32	$\Delta = 1·03$ d. i. 0·26% oder $\frac{1}{388}$	1763·4	1763·4	

Nr. 36. — Tabelle 32.

Pol	Richtung	A u s s e r h a l b							I n n e r h a l b		Differenz der Fläche Pol aussen und Pol innen	
		Segment $t_1$	Dreieck $t_2$	Quadrant $t_3$	Quadrat $t_4$	Trapez $t_5$	Quadrat	Summe aus	Quadrat			
Mittel aus " " " "	→	21·7	50·2	79·0	99·9	150·3	400·4	$t_1$	21·58	Constante Fläche gegen $\Delta =$ d. i. oder	1763·5	1·53 d. i. 0·38% oder $\frac{1}{262}$ der Fläche
	←	21·6	50·1	78·8	99·9	150·1	400·3	$t_2$	50·10		1763·5	
	→	21·5	50·1	78·9	99·9	150·3	400·2	$t_3$	78·88		1763·5	
	←	21·5	50·1	78·9	100·0	150·2	400·3	$t_4$	99·95		1763·3	
	→	21·6	50·1	78·9	100·0	150·3	400·2	$t_5$	150·24		1763·8	
	←	21·6	50·0	78·8	100·0	150·2	400·3	$S$	400·75		1763·4	
	→	21·60	50·13	78·93	99·93	150·30	400·27	gegen	400·32		1763·60	
	←	21·57	50·07	78·83	99·97	150·17	400·30	$\Delta =$	0·43		1763·40	
	→	21·58	50·10	78·88	99·95	150·24	400·28	d. i.	0·11%		1763·50	
								gegen	400·32		2165·31	
							$\Delta =$	0·04	401·86			
							d. i.	0·01%	400·32			
							oder	$\frac{1}{10008}$	1·49			
							d. F.	10008	0·37%			
									$\frac{1}{268}$	1		

Es folgt hieraus der Fehler in der Fläche bei:

Polar-Planimeter	Nr.	1. Art	Pol ausserhalb	Pol innerhalb	Differenz der Fläche bei Pol ausser gegen Pol innen	
					cm	cm
	1	1. Art	0.76	1.53	0.76	cm
		2. Art	1.39	0.49	0.91	"
"	Nr. 290A	1. Art	0.27	1.98	1.71	"
		2. Art	0.08	1.98	1.87	"
"	Nr. 295	1. Art	0.42	0.32	0.74	"
"	Nr. 3526	1. Art	0.33	0.55	0.22	"
		2. Art	0.03	1.68	1.71	"
"	Nr. 36	1. Art	0.44	1.03	1.47	"
		2. Art	0.43	1.49	1.53	"
		Mittel	0.46	1.23	1.21	cm
		das ist	0.11%	0.31%	0.30%	
		oder	$\frac{1}{870}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{330}$	d. F.

Wie man hieraus entnimmt, ist es mit der Anwendung des Planimeters bei Pol innerhalb denn doch nicht so arg bestellt, als gewöhnlich angenommen wird; die Genauigkeit für die Stellung bei Pol ausserhalb wird natürlich schon aus dem Grunde grösser sein müssen, weil für dieselbe der Werth der Constanten nicht gebraucht, also auch das Resultat von dem der Constanten noch immer anhaftenden Fehlerwerthe frei sein wird. Es sind die hier gewonnenen Daten wieder ein neuer Beweis für die Richtigkeit der früher angegebenen wahrscheinlichen Fehlerwerthe Einer Flächenbestimmung bei Pol aussen und bei Pol innen.

Man muss eben von den Planimetern auch nicht das Unmögliche verlangen; bei jeder Gattung von Beobachtungen mit entsprechenden Instrumenten ist eine gewisse Grenze gesetzt, also auch hier. Wenn bei den Polar-Planimetern bei Pol innerhalb die Länge des an der Rolle abgewickelten Bogens, beziehungsweise des von ihr zurückgelegten Weges, bei einer 15- bis 20maligen Umdrehung derselben, bis auf 0.0015 des Umfanges, d. i. bei den gewöhnlichen Dimensionen der Rolle bis auf 0.025cm = 0.25mm angezeigt wird, so ist das ein Resultat, welches nicht nur für die Anwendbarkeit dieser Instrumente, sondern auch für die sorgfältige Ausführung derselben spricht.

Wie man aus den mit verschiedenen Instrumenten erhaltenen Versuchsreihen entnehmen wird, kann man, was Genauigkeit anbelangt, keiner der in Betracht gezogenen Constructionen den Vorzug geben; was nun den praktischen Gebrauch anbelangt, so ziehe ich den Kugelpol der Nadelspitze als Pol vor; bei letzterer habe ich zu dem kleinen beigegebenen Gewichte, welches auf das Ende des Armes, das die Nadelspitze trägt, aufgelegt wird, noch immer ein zweites Gewicht hinzufügen müssen, um nur einigermaßen die Sicherheit zu haben, dass sich die Nadelspitze beim Umfahren der Figuren nicht hebt. Auch ist es bequemer, statt des Knopfes am Ende des Fahrstiftes einen kurzen senkrecht zum Führungsarme gestellten Arm zu haben. Es wären dieses Aenderungen, welche bei dem Polar-Planimeter Amsler recht leicht auf Kosten des Nonius zum Ablesen an der Rolle gemacht werden könnten.

Die mit Polar-Planimetern zu erreichende Genauigkeit ist geringer, als die durch die Linear-Planimeter gewährte; eine Vergleichung der Tabelle VI mit A gibt dieses für die

einzelnen Figuren in schöner Uebereinstimmung zu erkennen, und zwar ist der wahrscheinliche Fehler Einer Flächenbestimmung mittelst der Linear-Planimeter fast der dritte Theil von jenem, wie er mittelst der Polar-Planimeter gefunden wurde, daher auch die Genauigkeit der ersteren beinahe dreimal so gross angenommen werden kann als die der letzteren.

### Versuche mit dem Integrator.

Der Vollständigkeit wegen habe ich auch mit dem Integrator (Momenten-Planimeter) von Amsler\*) Versuche angestellt; genanntes Instrument dient bekanntermassen nicht nur zur Ermittlung des Flächeninhaltes, sondern auch zur Bestimmung des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes beliebig begrenzter Figuren. Bei den beiden mir durch die Freundlichkeit der Herren Professoren C. Jenny und Dr. E. Winkler zur Verfügung gestellten Integratoren ist die Anordnung derart getroffen, dass, wenn  $v_1, v_2, v_3$  die beim Umfahren einer Figur erhaltenen Werthe der Lesungen an den bezüglichen Rollen sind, die Fläche durch  $F = v_1$ , das statische Moment durch  $S = 0.6 v_2$ , und das Trägheitsmoment durch  $T = v_1 - 0.4 v_3$  gegeben ist.

Ich habe hier absichtlich mehrere kleine und nicht günstig begrenzte Figuren gewählt, um darthun zu können, wie sich das Instrument, dessen Bewegung nicht einfach zu nennen ist, beim Umfahren verhält.

Anfänglich wollte ich auch die Untersuchungen mit diesem Instrumente auf verschiedenartig beschaffene Unterlagen ausdehnen; allein nach den ersten Versuchen, bei denen die Rollen auf einem Brett aus Lindenholz liefen, erkannte ich aus den Angaben der Rollen, dass dieses hauptsächlich wegen der unvollkommenen Ebene nicht angeht, und wählte als Unterlage zu den Versuchen auf einem Brette gespanntes Velinpapier. Das Umfahren der Figuren wurde in ähnlicher Weise wie bei den Polar-Planimetern vollzogen; die Resultate der Angabe der ersten Rolle zur Ermittlung der Fläche sammt den anderen zu Schlussfolgerungen durch die Rechnung erhaltenen Daten sind in den Tabellen 33 und 34 angegeben.

Da Einer Umdrehung der Rolle 100cm entsprechen, an der Trommel 0.001 des Umfanges, also 0.1cm sicher geschätzt werden kann, so sollten bei dieser Art Instrumente auch gleiche Fehlerwerthe resultiren, wie bei den Polar-Planimetern, wenn sie dem Zwecke eben so vollkommen, wie diese, dienen sollen.

Der wahrscheinliche Fehler Einer Flächenbestimmung ist für:

Figur	Inhalt cm	Integrator Nr. 16	Integrator Nr. 19
τ-förmig . . . . .	1.01	± 0.06	± 0.04
Dreieck I. . . . .	2.00	± 0.07	± 0.05
Quadrat . . . . .	8.00	± 0.05	—
Rechteck . . . . .	55.50	± 0.06	± 0.09
Halbkreis . . . . .	39.27	± 0.08	± 0.10
Schienenprofil . . . . .	37.5	± 0.09	± 0.09

\*) „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren.“ Von Jacob Amsler. Schaffhausen 1856. „Ueber das Momenten-Planimeter von Amsler.“ Von Dr. E. Winkler („Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines“, 1870).

Integrator Nr. 16. — Tabelle 33.

Figur	r-förm. Fig.		Dreieck I		Quadrat I*		Rechteck		Quadrat II		Halbkreis		Schienenprofil		Figur	r-förm. Fig.	Dreieck I	Quadrat I	Halbkreis	Schienenprofil	Rechteck
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←							
	1·1	1·0	1·9	2·1	8·0	8·1	55·5	55·5	63·8	63·6	38·9	38·9	37·5	37·7	Richtung	1·0	1·9	8·3	39·0	37·9	55·4
	1·2	1·0	1·9	2·0	8·2	8·0	55·4	55·4	63·7	63·4	39·1	39·3	37·9	38·0	→	1·3	1·9	8·1	39·2	37·7	55·5
	1·0	1·0	2·1	1·9	8·1	8·1	55·5	55·5	63·6	63·6	39·1	39·2	37·8	37·6	←	1·1	2·1	8·2	39·0	37·7	55·4
	1·0	1·1	1·9	1·8	8·0	8·1	55·5	55·5	63·8	63·7	39·2	39·2	37·8	37·9	→	1·1	1·9	8·3	39·1	37·7	55·6
	1·0	1·0	1·9	2·1	8·0	8·1	55·3	55·6	63·7	63·4	39·1	39·1	37·9	37·8	←	1·2	2·0	8·2	39·0	37·8	55·4
	0·9	1·1	2·1	1·9	8·1	8·1	55·3	55·5	63·5	63·5	39·1	39·3			→	1·2	2·1	8·3	39·3	37·8	55·5
Mittel	1·03	1·03	1·97	1·97	8·07	8·08	55·42	55·50	63·68	63·53	39·08	39·17	37·78	37·80		1·15	1·98	8·23	39·10	37·77	55·47
W. F. e. B.	+0·07	+0·04	+0·07	+0·08	+0·06	+0·03	+0·07	+0·04	+0·08	+0·08	+0·07	+0·10	+0·11	+0·11		+0·06	+0·07	+0·06	+0·08	+0·06	+0·06
Fehlerv.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Mittel	15	26	28	25	135	269	792	1388	796	794	557	392	344	344		19	28	137	489	629	925
	<b>1·030</b>		<b>1·97</b>		<b>8·075</b>		<b>55·46</b>		<b>63·60</b>		<b>39·12</b>		<b>37·79</b>								

Integrator Nr. 19. — Tabelle 34.

Figur	r-förm. Figur		Dreieck I		Dreieck II*		Rechteck		Halbkreis		Schienenprofil		Figur	r-förm. Fig.	Dreieck I	Halbkreis	Schienenprofil
	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←	→	←					
	1·1	1·0	2·0	1·9	28·4	28·4			39·1	39·1	37·8	37·7	Richtung	1·1	1·9	39·3	37·6
	1·1	1·1	2·0	2·0	28·4	28·1	56·1	55·8	39·4	39·2	37·7	37·6	→	1·0	1·9	39·4	37·8
	1·1	1·1	1·9	2·1	28·2	28·0	56·3	56·0	38·9	39·1	38·0	38·0	←	1·1	1·9	39·3	37·7
	1·1	1·0	2·1	2·0	28·0	28·4	56·3	56·2	39·2	38·9	37·9	37·9	→	1·0	1·9	39·2	37·9
	1·1	1·0	2·1	2·0	28·1	28·2	56·2	56·1	39·4	39·4	37·6	37·7	←	1·0	2·0	39·2	37·7
	1·1	1·1	1·9	1·9	28·3	28·2	56·0	56·0	39·4	39·3	37·8	37·7	→	1·1	1·9	39·3	37·9
Mittel	1·07	1·05	2·00	1·98	28·23	28·22	56·18	56·02	39·23	39·27	37·80	37·77		1·05	1·92	39·28	37·77
W. F. e. B.	+0·04	+0·04	+0·06	+0·05	+0·11	+0·11	+0·09	+0·10	+0·14	+0·11	+0·09	+0·10		+0·04	+0·03	+0·05	+0·08
Fehlerv.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1
Mittel	27	26	33	40	257	257	624	560	280	356	420	378		26	64	792	472
	<b>1·06</b>		<b>1·99</b>		<b>28·225</b>		<b>56·10</b>		<b>39·20</b>		<b>37·78</b>						

gefunden worden; wie man entnimmt, ergaben sich solche Werthe, wie bei den Polar-Planimetern. Es kann daher der Integrator trotz seiner nicht mehr so einfachen Construction ebensogut zur Flächenbestimmung verwendet werden, wie das Polar-Planimeter.

Diese Daten sprechen wohl auch deutlich für die äusserst vollkommen mechanische Ausführung derartiger Instrumente.

Obwohl die Anwendung des Integrators zur Ermittlung des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes dem Geodäten etwas ferner liegt, so habe ich, weil keine Daten über die Leistungsfähigkeit des Apparates für diese Anwendung vorliegen, auch die Rollen abgelesen, durch deren Angabe das statische Moment, beziehungsweise das Trägheitsmoment ermittelt werden kann.

Nimmt man den hundertsten Theil des Umfanges der Rolle als Einheit an, so hat sich der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung ergeben:

Figur	Integrator Nr. 16		Integrator Nr. 19	
	für statis. M.	für Träg.-M.	für statis. M.	für Träg.-M.
r-förmig. . . .	± 0·08	± 0·07	± 0·06	± 0·07
Dreieck I. . . .	± 0·07	± 0·07	± 0·05	± 0·08
Quadrat. . . .	± 0·04	± 0·07	± 0·06	± 0·08
Rechteck. . . .	± 0·08	± 0·09	± 0·07	± 0·07
Halbkreis. . . .	± 0·09	± 0·07	± 0·10	± 0·10
Schienenprofil	± 0·04	± 0·10	± 0·07	± 0·10

Auch diese Resultate zeigen zur Genüge, dass die bei Anwendung des Integrators auftretenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler so klein sind, dass man seine Verwendbarkeit nur empfehlen kann. Auf die absolute Werthbestimmung des statischen und des Trägheitsmomentes aus den Angaben der Rollen bin ich nicht weiter eingegangen.

Zum Schlusse stattete ich Allen, welche mein Streben nach Klarheit in den angeregten Fragen durch leihweise Ueberlassung der Instrumente gefördert haben, den verbindlichsten Dank ab.



Fig. 1.

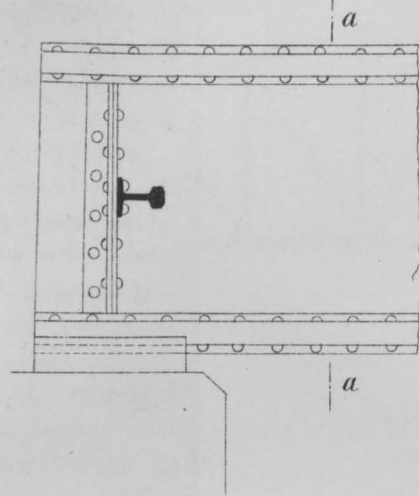


Fig. 1<sup>a</sup>

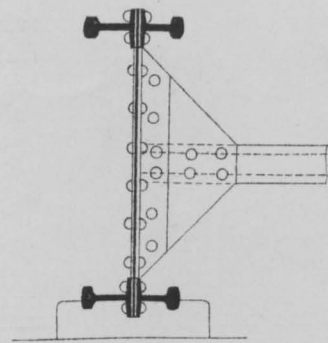


Fig. 1<sup>b</sup>

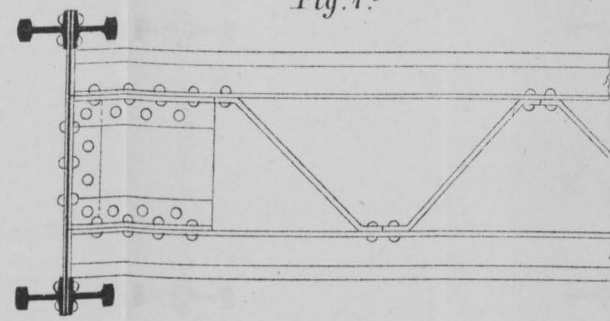


Fig. 2.

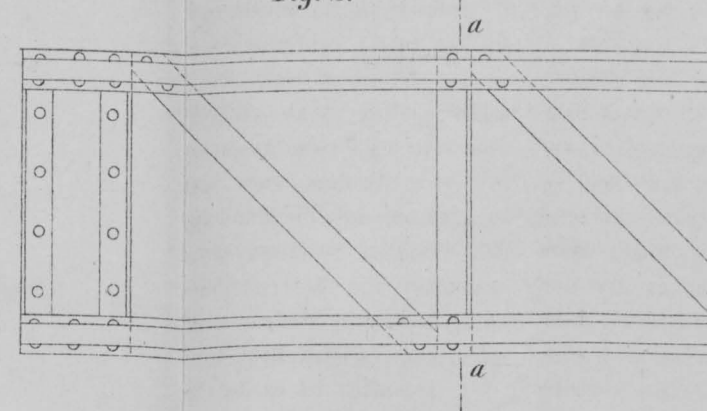


Fig. 2<sup>a</sup>

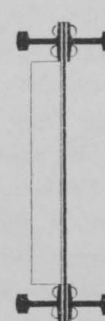


Fig. 3.

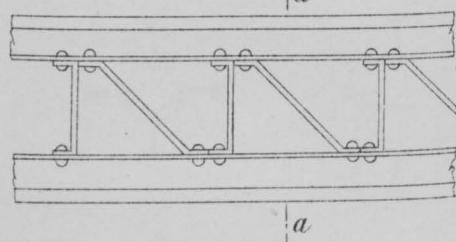
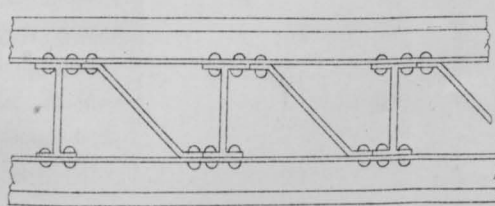


Fig. 3<sup>a</sup>

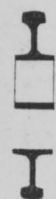


Fig. 4.

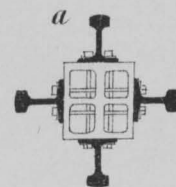
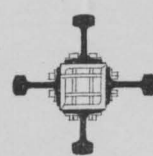


Fig. 4<sup>a</sup>

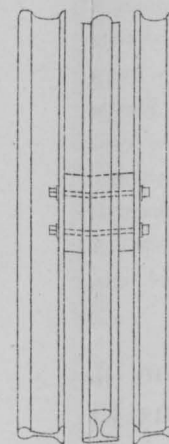
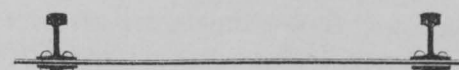


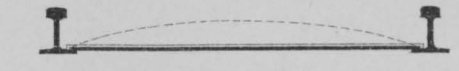
Fig. 5 a



" b



" c



" d

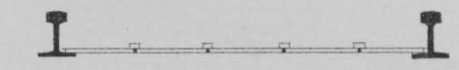


Fig. 6.

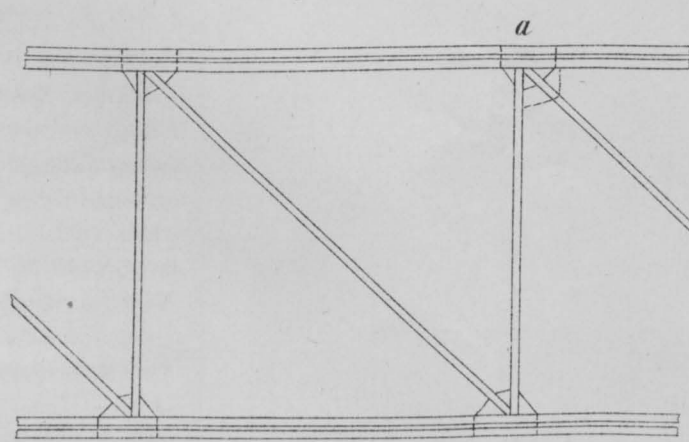


Fig. 6<sup>b</sup>

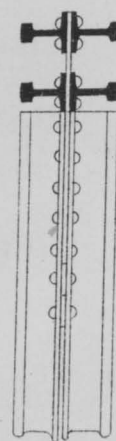


Fig. 6<sup>a</sup>

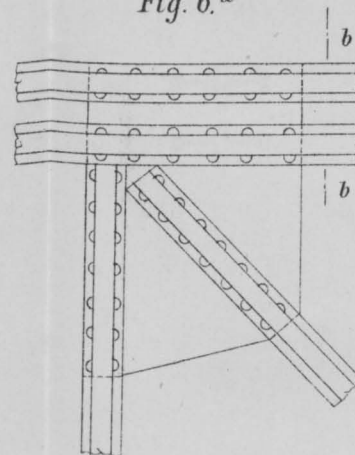


Fig. 9.

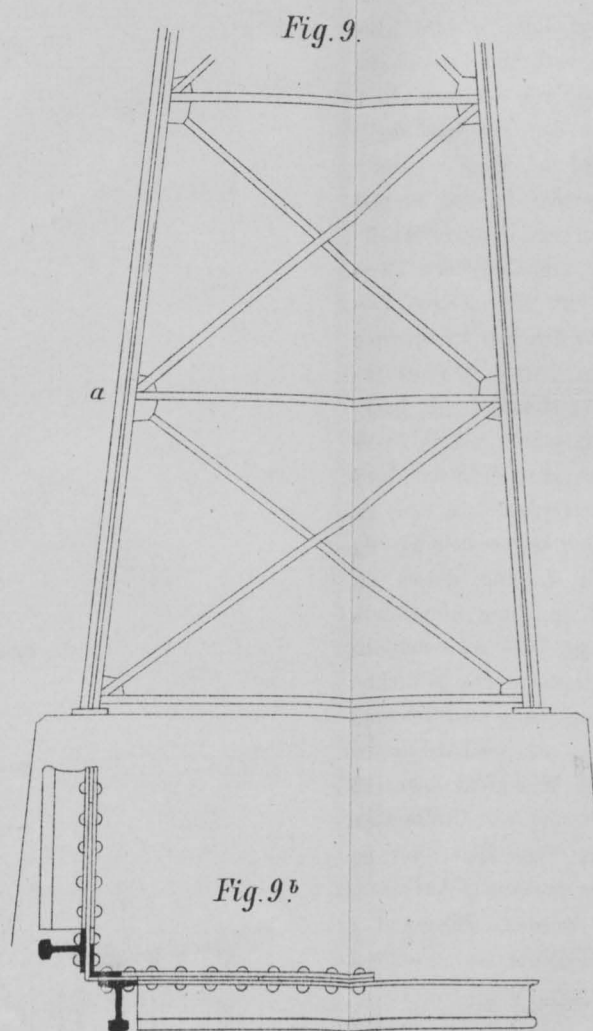


Fig. 9<sup>a</sup>

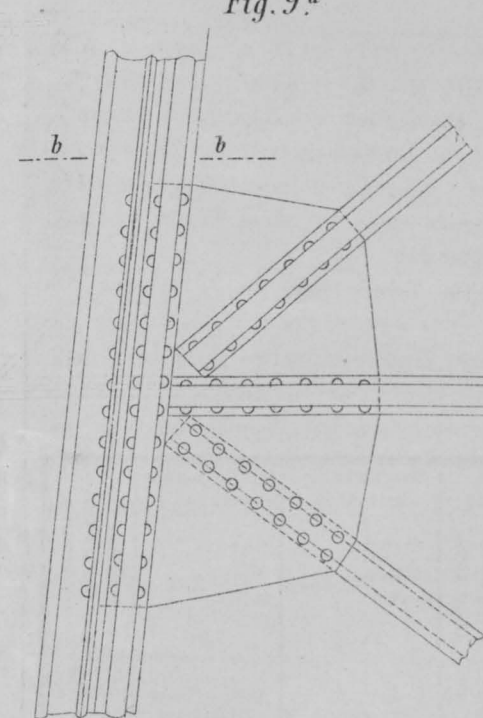


Fig. 9<sup>b</sup>

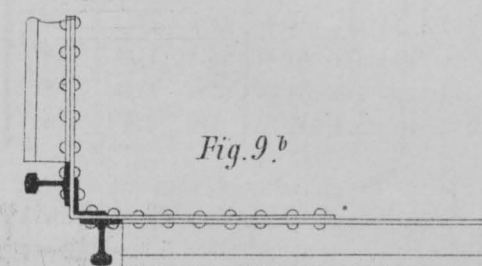


Fig. 7.

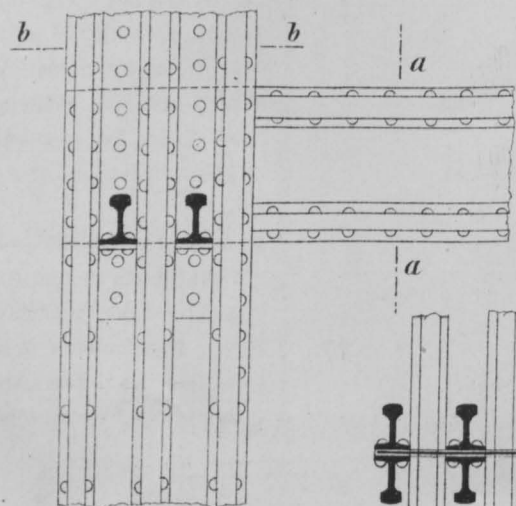


Fig. 7<sup>a</sup>



Fig. 7<sup>b</sup>

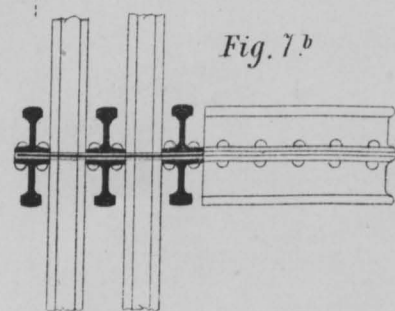


Fig. 8.

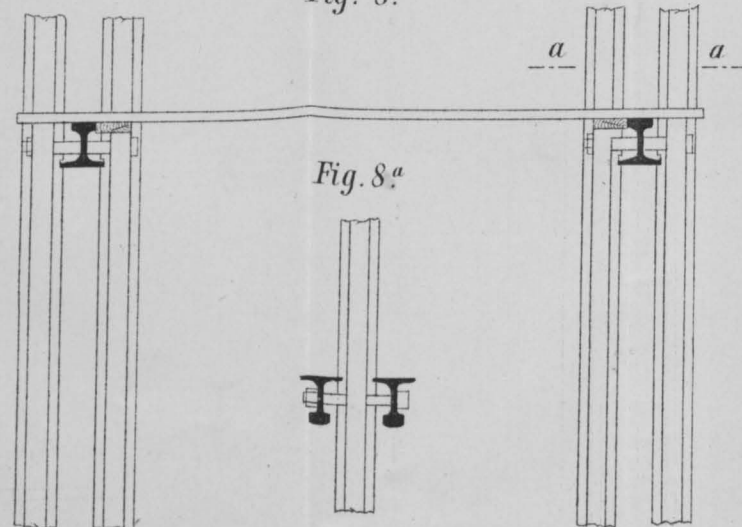
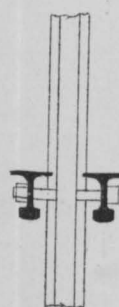


Fig. 8<sup>a</sup>



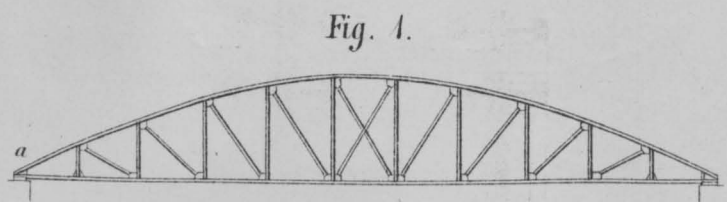


Fig. 1.

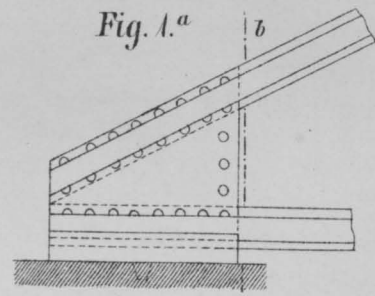


Fig. 1.a

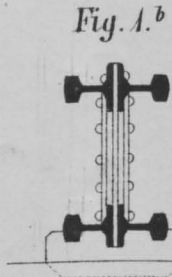


Fig. 1.b

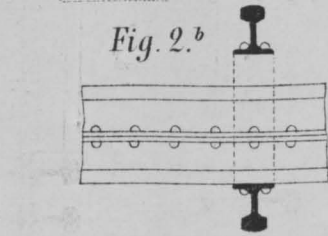


Fig. 2.

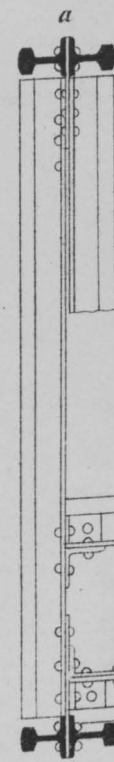


Fig. 2.a

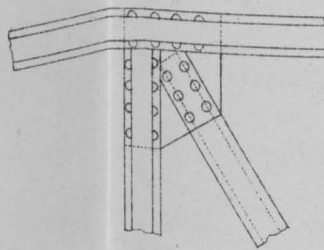


Fig. 2.b

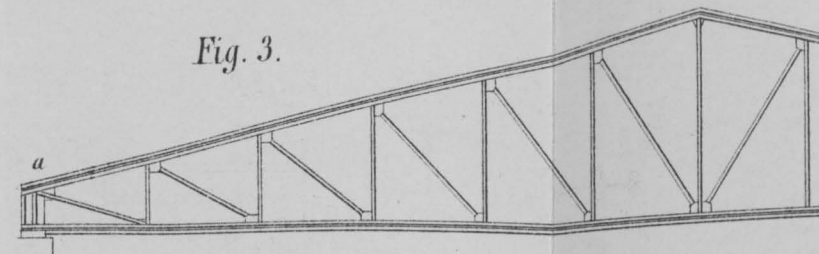


Fig. 3.

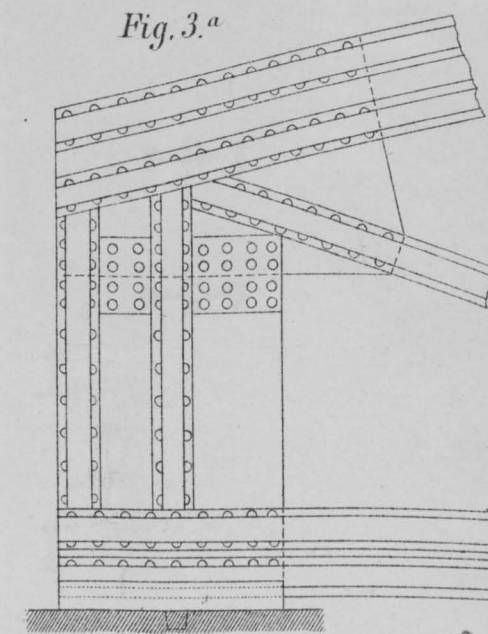


Fig. 3.a

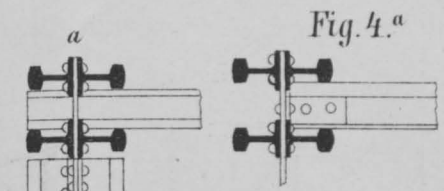


Fig. 4.a

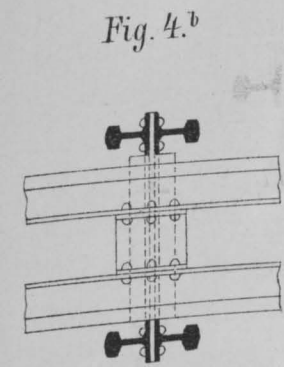


Fig. 4.b

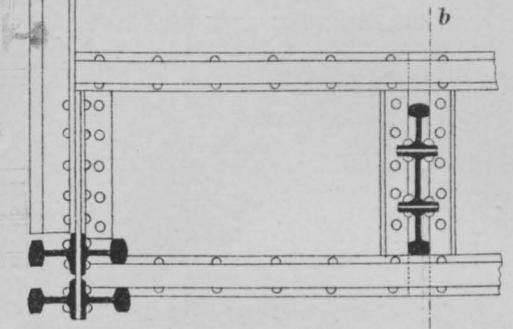


Fig. 4.

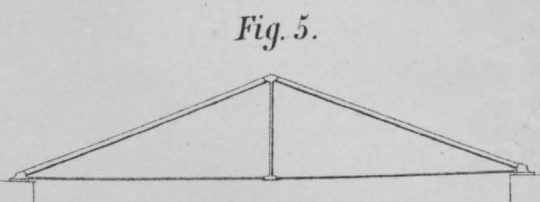


Fig. 5.

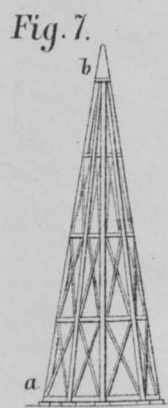


Fig. 6.

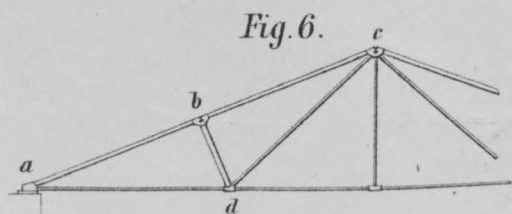


Fig. 6.a

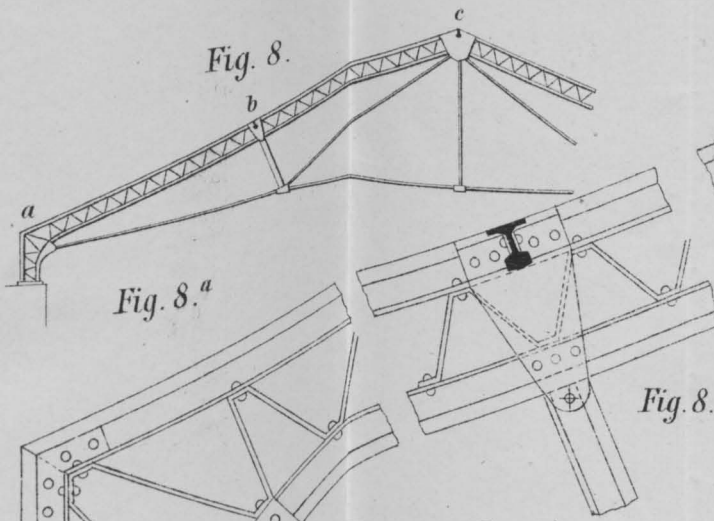


Fig. 7.

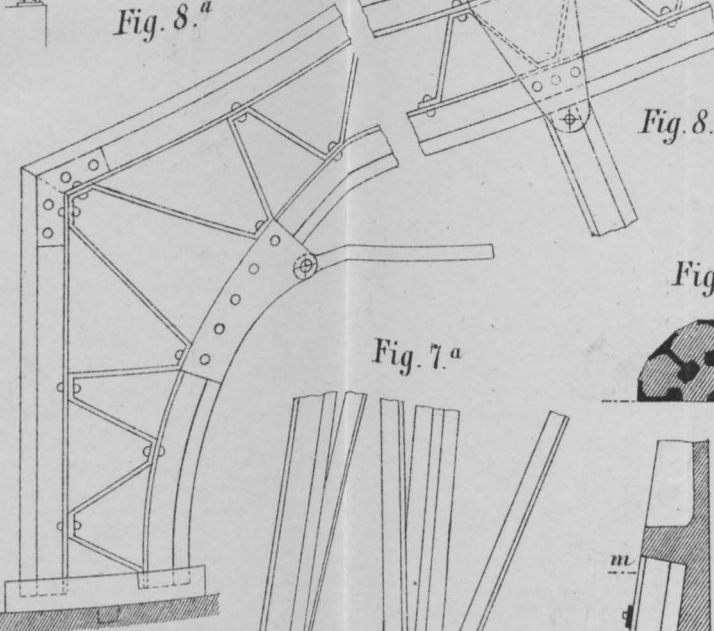


Fig. 7.a

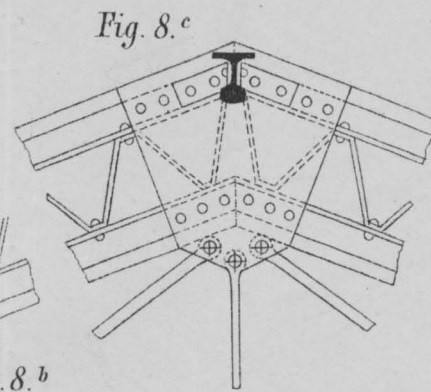


Fig. 8.

Fig. 8.a

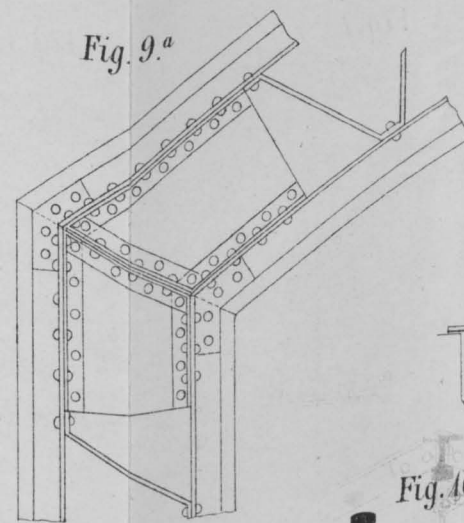


Fig. 9.

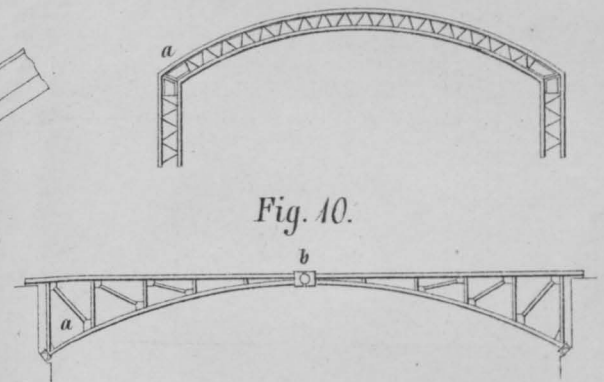


Fig. 10.

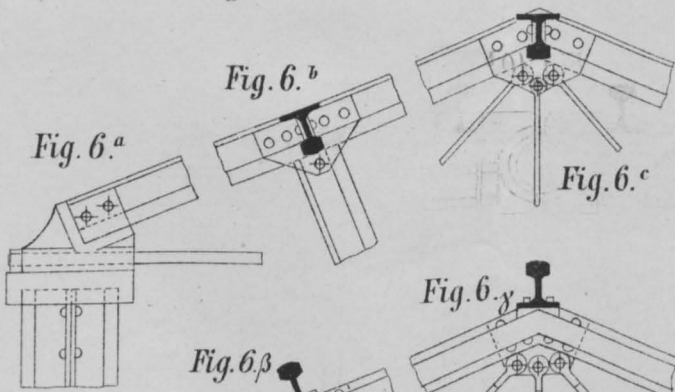


Fig. 6.b

Fig. 6.c

Fig. 6.d

Fig. 6.e

Fig. 6.f

Fig. 6.g

Fig. 6.h

Fig. 7.b

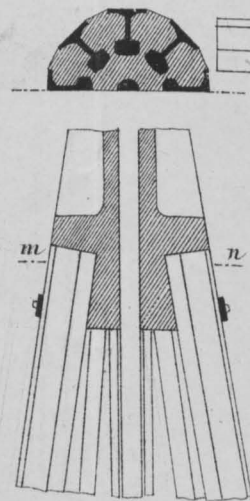


Fig. 7.c

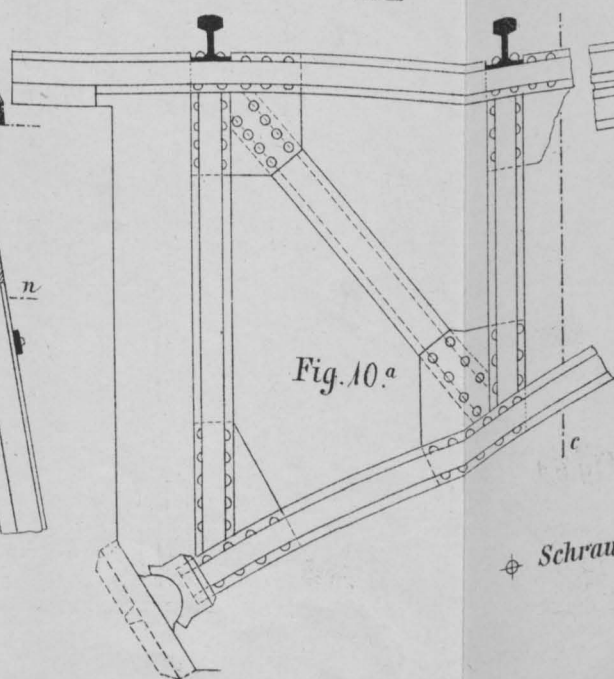


Fig. 10.a

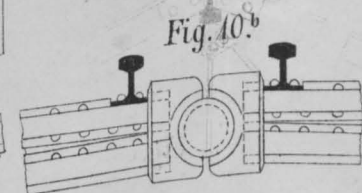


Fig. 10.b

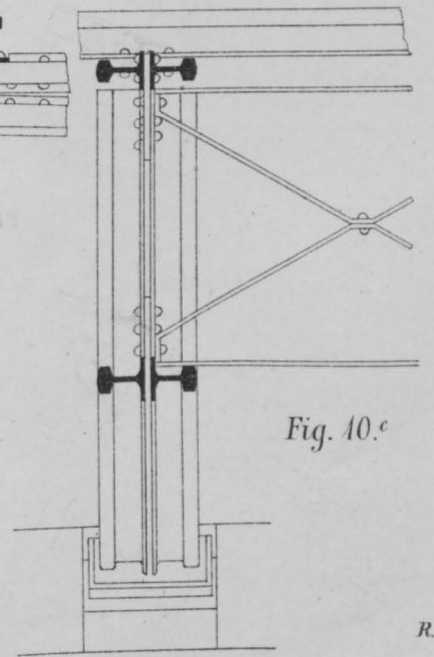


Fig. 10.c

Schraubenbolzen



# ERDTRANSPORTWAGEN MIT SEITENKIPPUNG

von Cornel Schrödl.

Spurweite 0.70<sup>m</sup> Fassungsraum 1.5<sup>cbm</sup> Kippwinkel 45 Grad.

Fig. 2.  
Stirnan sicht.

Fig. 1.  
Längensicht  
von der

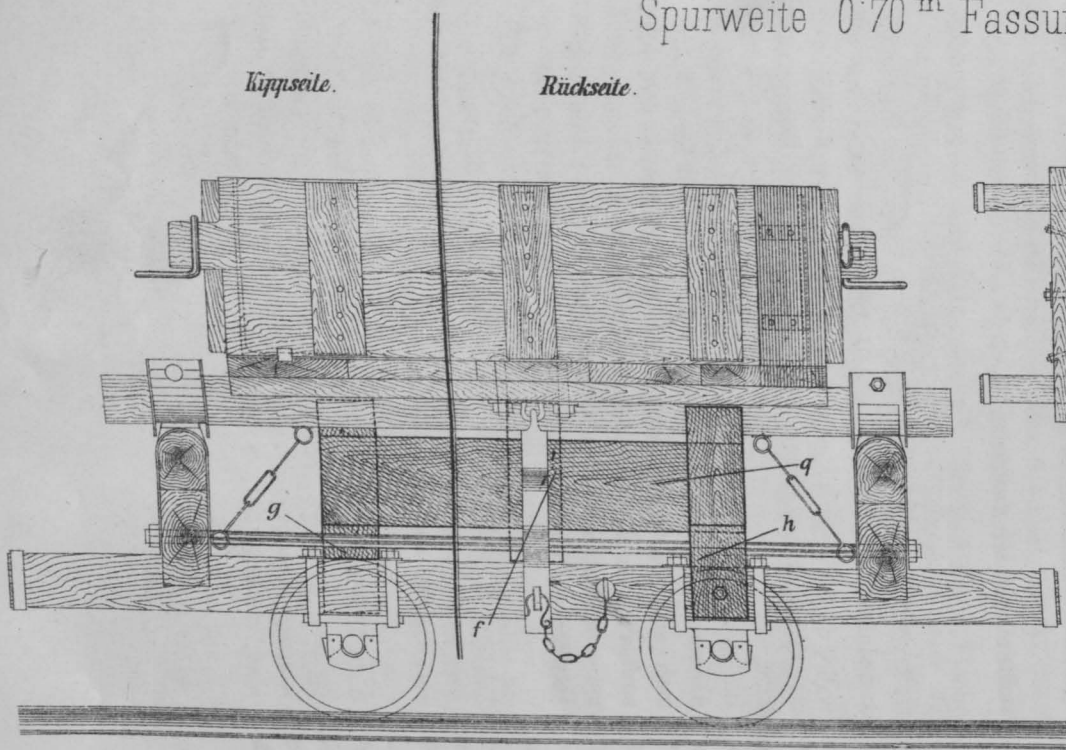
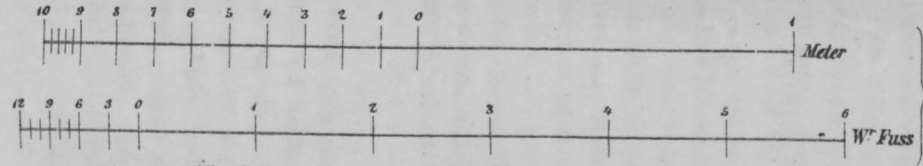
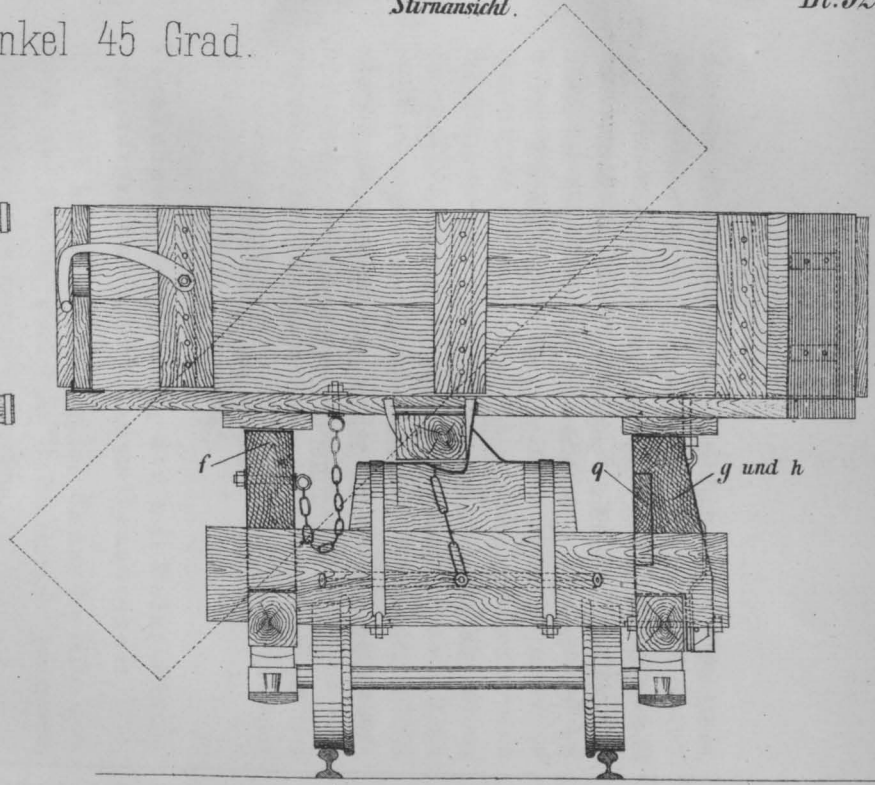
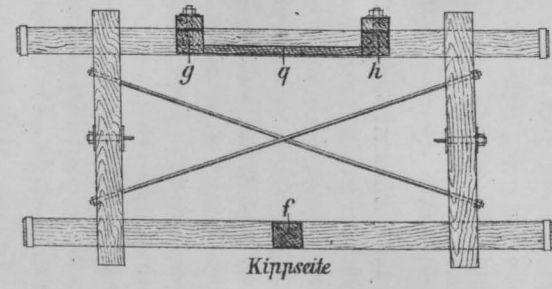


Fig. 3.  
Rückseite



1/20 natürl. Grösse.  
(zu Fig. 1 u. 2.)

Fig. 6.

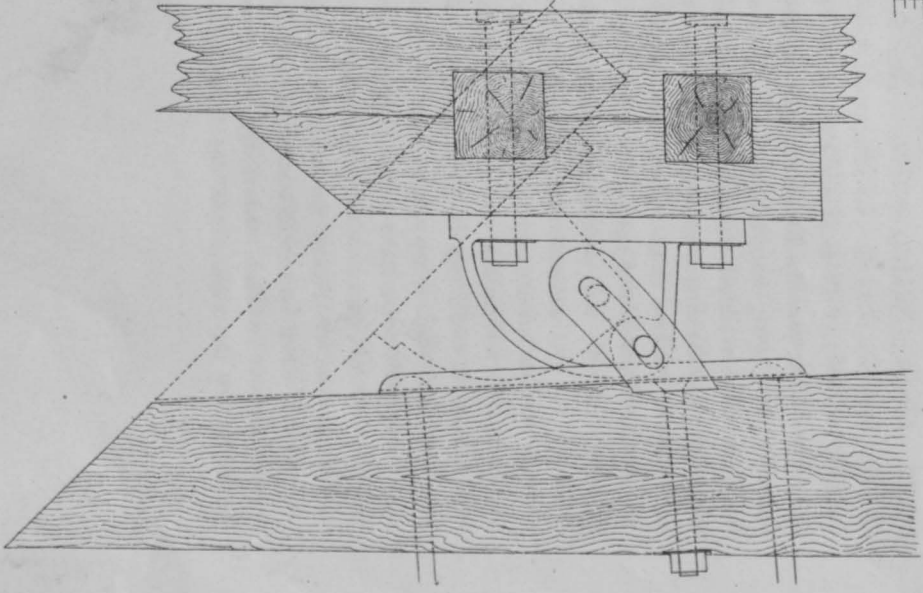


Fig. 7.

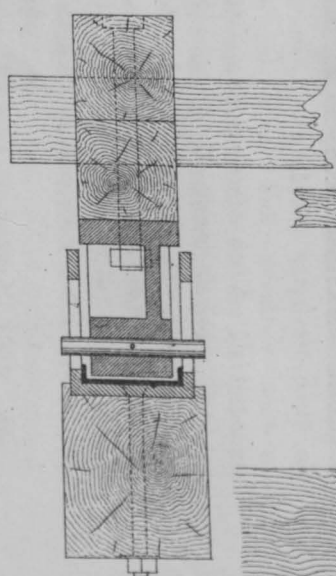


Fig. 4.

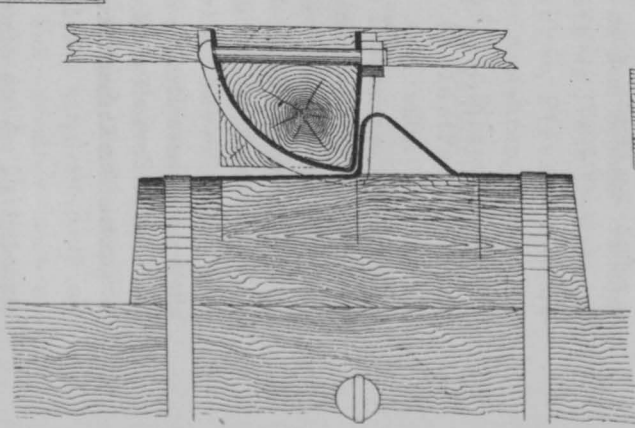
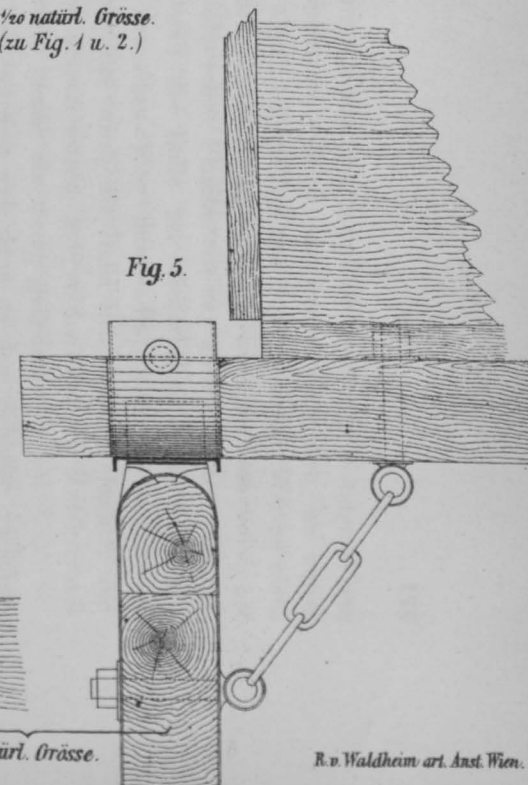


Fig. 5.



1/10 natürl. Grösse.

1/10 natürl. Grösse.