

ISSN 0366 - 1296

BAM-BERICHT Nr. 44

DER BUNDESANSTALT FÜR
MATERIALPRÜFUNG (BAM)

BERLIN

**Berechnung von räumlichen,
linear elastischen Systemen, die aus
finiten Stab- und Balkenelementen
zusammengesetzt sind
unter Verwendung des Programms
"Stab-Werk"**

von Dipl.-Ing. W. Matthees

NOVEMBER 1976

Umfang 60 Seiten

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon (030) 8104-1
Telex 01-83 261 bamb d

Inhaltsverzeichnis	Seite
1. Einführung	1
2. Aufgabenstellung	1
I. Teil	
3. Steifigkeitseigenschaften eines Balkenelementes	2
3.1. Längssteifigkeit	3
3.2. Torsionssteifigkeit	4
3.3. Biegesteifigkeit in der x-y-Ebene	5
3.3.1. Biegesteifigkeit des zweiseitig eingespannten Balkens	6
3.3.2. Biegesteifigkeit des einseitig eingespannten Balkens	9
3.4. Schubsteifigkeit in der x-y-Ebene	13
3.4.1. Schubsteifigkeit des zweiseitig eingespannten Balkens ($\gamma_2 = 0$)	13
3.4.2. Schubsteifigkeit des einseitig eingespannten Balkens	17
3.5. Steifigkeitsmatrix des Elementarstabes	20
3.5.1. Steifigkeit des beidseitig eingespannten Stabes	20
3.5.2. Steifigkeit des einseitig eingespannten Stabes	21
3.6. Transformation des Elementarstabkoordinatensystems	23
3.6.1. Transformation der Koordinatensysteme	25
3.6.2. Drehung des Stabkoordinatensystems	28
4. Systemsteifigkeit	32
4.1. Einfaches Steifigkeitsverfahren	32
4.2. Umordnung der Steifigkeitsmatrix	34
4.3. Direktes Steifigkeitsverfahren	35
5. Auflösung nach den unbekanntem Knotendeformationen	36
6. Auflösung nach den unbekanntem Randschnittlasten	37

II. Teil

7. Programmsteuerung	39
7.1. Allgemeines	39
7.2. Parameter zur Programmsteuerung	40
7.2.1. Bezeichnung der Parameter	40
7.2.2. Auswechselbare Anweisungen	40
7.3. Programmablauf	41
7.4. Eingabe der Systemdaten	42
7.4.1. Bezeichnung der Parameter (Parameterliste)	42
7.4.2. Eingabeformalismus zur Dateneingabe	43
7.4.3. Formblatt zur Dateneingabe	45
7.4.4. Beispiel (ebenes Zweibein)	45
7.5. Ausgabe der Daten und Ergebnisse	48
7.5.1. Beispiel einer Netzwerkkuppel	49
7.6. Einschränkungen in der Anwendung des Programms STAB-WERK	57
7.7. Steuerkommandos	58
8. Zusammenfassung	59
9. Literaturverzeichnis	60

Bezeichnungen

u	Elementverformungsvektor im Stabkoordinatensystem
q	Elementbelastungsvektor im Stabkoordinatensystem
k	Elementsteifigkeitsmatrix im Stabkoordinatensystem
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
F	Fläche
J_y	Flächenträgheitsmoment für y -Biegung
J_z	Flächenträgheitsmoment für z -Biegung
J	Torsionsträgheitsmoment
l	Stablänge
σ	Spannung
ϵ	Dehnung
τ	Schubspannung
γ	Schubverformung
x, y, z	kartesisches Stabkoordinatensystem
X, Y, Z	kartesisches Koordinatensystem (Bezugskoordinatensystem)
M	Biegemoment (M_y, M_z), Torsionsmoment (M_x)
S_z	Statisches Moment bezüglich der y -Achse
S_y	Statisches Moment bezüglich der z -Achse
b	Querschnittsbreite (b_y, b_z)
κ	Schubverteilungszahl (κ_y, κ_z)
ϕ	bezogene Schubverteilungszahl (ϕ_y, ϕ_z)
Q	Querkraft (Q_y, Q_z)
v	Elementverformungsvektor im Bezugskoordinatensystem
p	Elementbelastungsvektor im Bezugskoordinatensystem
k_T	Elementsteifigkeitsmatrix im Bezugskoordinatensystem
T	Transformationsmatrix
t	Richtungskosinus (Komponente von T)
0	Nullvektor oder Nullmatrix
e	Einheitsvektor
λ	Vektor
V_T	aneinandergereihter Deformationsvektor
P_T	aneinandergereihter Belastungsvektor
K_T	aneinandergereihte Systemsteifigkeitsmatrix
A	Zuordnungsmatrix

V geordneter Deformationsvektor
P geordneter Belastungsvektor
K geordnete Systemsteifigkeitsmatrix
 Δ Vektor eingepprägter Deformationen
i,j Knotennumerierung
k Stabnumerierung

1. Einführung

Durch die Verfügbarkeit schneller elektronischer Rechneranlagen mit ausreichender Kapazität und Hintergrundspeichern eignet sich besonders die in Matrizenform schematisierbare "Methode der Finiten Elemente" zur Berechnung von Baukonstruktionen beliebiger Größenordnung und Konfiguration. Durch Aufteilung des Systems in eine endliche Anzahl endlich großer, d.h. finiter Elemente, an deren Grenzen Gleichgewicht und Verformungskompatibilität gelten und in deren Bereich das Elastizitätsgesetz bestehen muß, läßt sich das Deformationsverhalten ebener und räumlicher elastischer Systeme beliebig genau erfassen. Übersichtliche Darstellungen dieses Verfahrens sind in [1], [3], [4], [6] und [7] zu finden.

Hier soll nur auf die Anwendung der Deformationsmethode (Stiffness Method) auf durch finite Stab- und Balkenelemente darstellbare Systeme eingegangen werden [5]. Eine kurze Beschreibung des Verfahrens soll im I. Teil die vielfältigen Möglichkeiten aufzeigen, während im II. Teil die manuelle Handhabung beschrieben wird.

2. Aufgabenstellung

Gesucht wird das Deformationsverhalten eines durch Stabelemente darstellbaren räumlichen Systems. Der Verschiebungszustand soll durch die Deformationen der Knoten darstellbar sein, im allgemeinen räumlichen Fall sind 3 voneinander unabhängige Wege und 3 voneinander unabhängige Drehungen je Knoten möglich. Belastungen dürfen nur an den Knoten angreifen: Kräfte, Momente, eingeprägte Wege und eingeprägte Drehungen.

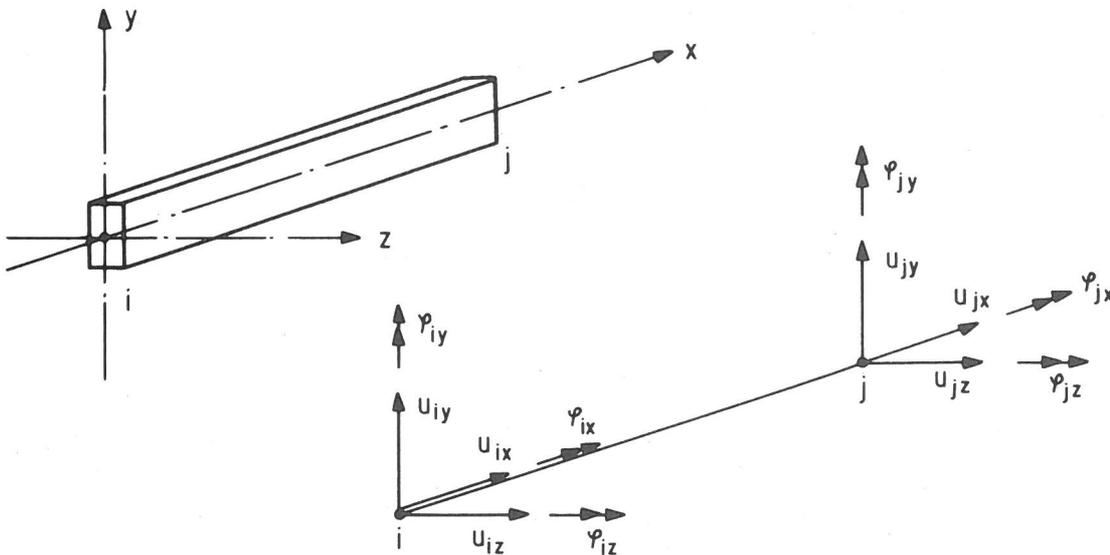
Erfaßt werden elastische Deformationen infolge Biegesteifigkeit, Längssteifigkeit, Torsionssteifigkeit und Schubsteifigkeit der einzelnen Elemente. Die Hauptträgheitsachsen der Elemente können beliebig im Raum orientiert sein, ebenso die Richtung von Biege gelenken.

I. TEIL

3. Steifigkeitseigenschaften eines Balkenelementes

Ein Balkenelement mit den Knoten i und j habe das rechtwinklige Koordinatensystem x, y, z als Hauptachsensystem. Dann treten im allgemeinen Fall folgende 12 unbekanntenen Knotendeformationen auf:

u_{ix}	,	u_{jx}	Weg in x-Richtung am Knoten i, j
u_{iy}	,	u_{jy}	Weg in y-Richtung am Knoten i, j
u_{iz}	,	u_{jz}	Weg in z-Richtung am Knoten i, j
φ_{ix}	,	φ_{jx}	Drehung in x-Richtung am Knoten i, j
φ_{iy}	,	φ_{jy}	Drehung in y-Richtung am Knoten i, j
φ_{iz}	,	φ_{jz}	Drehung in z-Richtung am Knoten i, j

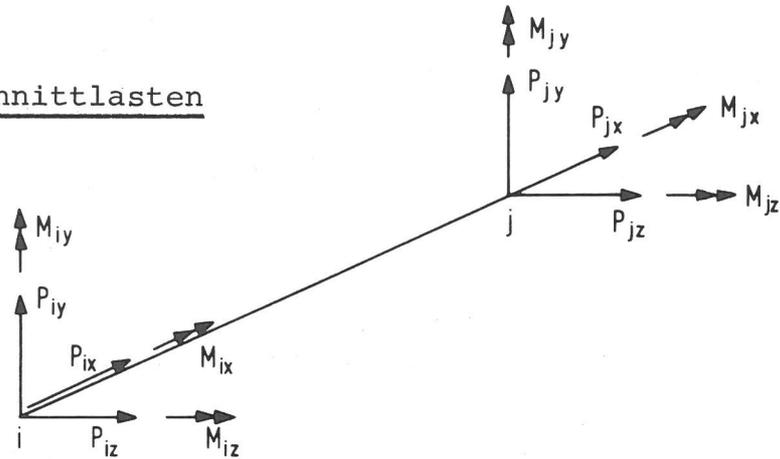


Positivbild der Knotendeformationen

Den Knotendeformationen sind als Randschnittlasten zugeordnet :

P_{ix}	,	P_{jx}	Kraft in x-Richtung am Knoten i, j
P_{iy}	,	P_{jy}	Kraft in y-Richtung am Knoten i, j
P_{iz}	,	P_{jz}	Kraft in z-Richtung am Knoten i, j
M_{ix}	,	M_{jx}	Moment in x-Richtung am Knoten i, j
M_{iy}	,	M_{jy}	Moment in y-Richtung am Knoten i, j
M_{iz}	,	M_{jz}	Moment in z-Richtung am Knoten i, j

Positivbild der Randschnittlasten



Knotendeformation und Randschnittlasten am Element lassen sich zusammenfassen zum Verformungsvektor u

$$u = (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}, u_{jx}, u_{jy}, u_{jz}, \varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz})$$

und zum Belastungsvektor q

$$q = (P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}, M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}, P_{jx}, P_{jy}, P_{jz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}).$$

Es besteht zwischen q und u die lineare Beziehung $q = k \cdot u$, wobei k die Elementsteifigkeitsmatrix darstellt [6].

3.1. Längssteifigkeit

Nach der Energie-Methode ist der Zuwachs der inneren elastischen Energie dW am Volumenelement dV :

$$dW = dV \int_0^{\epsilon(V)} \sigma d\epsilon, \quad dV = F dx$$

und mit dem Hookeschen Gesetz $\sigma = E\epsilon$ durch Integration

$$W = \frac{EF}{2} \int_0^l \epsilon^2(x) dx.$$

Bei Vernachlässigung der Biegedeformation ergibt sich die Dehnung ϵ_{ij} des Elementes ij zu:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\Delta u_{ij}}{l_{ij}} = \frac{1}{l_{ij}} (u_{jx} - u_{ix}).$$

Durch Einsetzen ergibt sich für das Stabelement ij :

$$W_{ij} = \left(\frac{EF}{2l^2} \right)_{ij} \int_0^l (u_{jx} - u_{ix})^2 dx$$

$$= \left(\frac{EF}{2\ell} \right)_{ij} (u_{ix}^2 - 2 u_{ix} u_{jx} + u_{jx}^2).$$

Aus dem Satz von Castigliano folgt:

$$P_{ix} = \frac{\delta W_{ij}}{\delta u_{ix}} = \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij} (u_{ix} - u_{jx}),$$

$$P_{jx} = \frac{\delta W_{ij}}{\delta u_{jx}} = \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij} (-u_{ix} + u_{jx}).$$

In Matrixschreibweise lautet diese Last-Verschiebungsbeziehung:

$$\begin{pmatrix} P_{ix} \\ P_{jx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & -\frac{EF}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & \frac{EF}{\ell} \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{jx} \end{pmatrix} = k_F \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{jx} \end{pmatrix}$$

wobei k_F die Balkenelementsteifigkeitsmatrix für die Normalkraft ist.

k_F läßt sich allgemein darstellen :

$$k_F = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$k_{ii} = \frac{\delta^2 W_{ij}}{\delta u_{ix}^2} = \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij},$$

$$k_{jj} = \frac{\delta^2 W_{ij}}{\delta u_{jx}^2} = \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij},$$

$$k_{ij} = \frac{\delta^2 W_{ij}}{\delta u_{ix} \delta u_{jx}} = - \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij},$$

$$k_{ji} = \frac{\delta^2 W_{ij}}{\delta u_{jx} \delta u_{ix}} = - \left(\frac{EF}{\ell} \right)_{ij}.$$

Da $k_{ij} = k_{ji}$ ist die Steifigkeitsmatrix symmetrisch (Satz von Betti).

3.2. Torsionssteifigkeit

Die elastische Energie ergibt sich entsprechend für Torsionsbeanspruchung zu:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{GJ}{l} \right)_{ij} \Delta \varphi_{ix}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{GJ}{l} \right)_{ij} (\varphi_{ix}^2 - 2 \varphi_{ix} \varphi_{jx} + \varphi_{jx}^2).$$

Aus dem Satz von Castigliano folgt wiederum:

$$M_{ix} = \frac{\delta W_{ij}}{\delta \varphi_{ix}} = \left(\frac{GJ}{l} \right)_{ij} (\varphi_{ix} - \varphi_{jx}),$$

$$M_{jx} = \frac{\delta W_{ij}}{\delta \varphi_{jx}} = \left(\frac{GJ}{l} \right)_{ij} (-\varphi_{ix} + \varphi_{jx}).$$

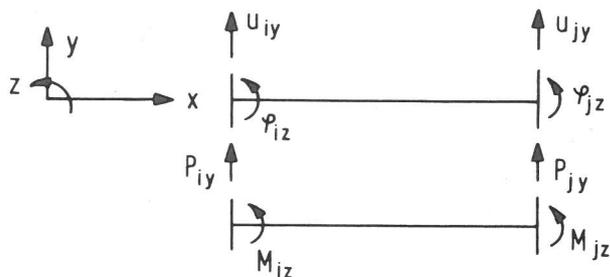
In Matrixschreibweise lautet die Torsion-Verdrillungsbeziehung:

$$\begin{matrix} M_{ix} \\ M_{jx} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{ix} \\ \varphi_{jx} \end{pmatrix} = k_J \begin{pmatrix} \varphi_{ix} \\ \varphi_{jx} \end{pmatrix}$$

wobei k_J die Balkenelementsteifigkeitsmatrix für Torsionsbeanspruchung ist.

3.3. Biegesteifigkeit in der x-y Ebene (z-Drehung)

Der Einfluß der Biegesteifigkeit wird aus der Biegedifferentialgleichung hergeleitet.



Positivbild der x-y Ebene

Die Biegedifferentialgleichung lautet:

$$EJ \frac{v_y''}{z} = P_{iy} \cdot x - M_{iz}.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$EJ \frac{v_y'}{z} = P_{iy} \cdot \frac{x^2}{2} - M_{iz} x + C_1,$$

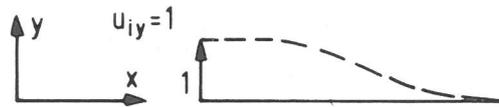
$$EJ \frac{v_y}{z} = P_{iy} \cdot \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

3.3.1. Biegesteifigkeit des zweiseitig eingespannten Balkens

Die 4 möglichen Randverformungen u_{iy} , φ_{iz} , u_{jy} , φ_{jz} entsprechen 4 verschiedenen Balkendeformationszuständen und können getrennt untersucht werden.

Gesucht sind also die Randschnittlasten P_{iy} , M_{iz} , P_{jy} , M_{jz} , welche den Balken in den jeweiligen Deformationszustand überführen.

Modus 1 $\varphi_{iz} = u_{jy} = \varphi_{jz} = 0$



Folgende Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$\begin{aligned} v_y'(x=0) &= 0, \\ v_y'(x=l) &= 0, \\ v_y(x=l) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$C_1 = 0$$

$$0 = P_{iy} \frac{l^2}{2} - M_{iz} l, \quad M_{iz} = P_{iy} \frac{l}{2}$$

$$0 = P_{iy} \frac{l^3}{6} - M_{iz} \frac{l^2}{2} + C_2, \quad C_2 = M_{iz} \frac{l^2}{2} - P_{iy} \frac{l^3}{6},$$

$$C_2 = P_{iy} \left(\frac{l^3}{4} - \frac{l^3}{6} \right) = P_{iy} \frac{l^3}{12}.$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet dann:

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} + P_{iy} \frac{l^3}{12}.$$

Am Knoten i gilt für $x = 0$:

$$EJ_z v_y(0) = EJ_z u_{iy} = P_{iy} \frac{l^3}{12} \quad \text{d.h.}$$

$$P_{iy} = \frac{12 EJ_z}{l^3} u_{iy} \quad \text{und}$$

$$M_{iz} = \frac{12 EJ_z}{l^3} u_{iy} \cdot \frac{l}{2} = \frac{6 EJ_z}{l^2} u_{iy}.$$

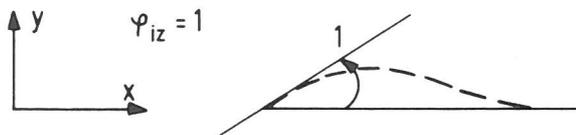
Aus Gleichgewichtsgründen folgt für :

$$P_{jy} = -P_{iy} = -\frac{12 EJ_z}{l^3} u_{iy} \quad ,$$

$$\begin{aligned} M_{jz} &= -M_{iz} + P_{iy} \cdot l \\ &= -\frac{6 EJ_z}{l^2} u_{iy} + \frac{12 EJ_z}{l^3} u_{iy} \cdot l \\ &= +\frac{6 EJ_z}{l^2} u_{iy} \quad . \end{aligned}$$

Modus 2

$$u_{iy} = u_{jy} = \varphi_{jz} = 0$$



Folgende Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$\begin{aligned} v_y(x=0) &= 0 \quad , \\ v_y'(x=l) &= 0 \quad , \\ v_y(x=l) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$C_2 = 0$$

$$0 = P_{iy} \frac{l^2}{2} - M_{iz} \cdot l + C_1 \quad ,$$

$$0 = P_{iy} \cdot \frac{l^3}{6} - M_{iz} \frac{l^2}{2} + C_1 \cdot l \quad .$$

Es ergibt sich:

$$M_{iz} = P_{iy} \frac{2}{3} l \quad \text{und}$$

$$C_1 = P_{iy} \frac{l^2}{6} \quad .$$

Die Gleichung der ersten Ableitung der Biegelinie lautet:

$$EJ_z v_y' = P_{iy} \frac{x^2}{2} - M_{iz} \cdot x + P_{iy} \frac{l^2}{6} \quad .$$

Am Knoten i gilt dann für $x = 0$:

$$EJ_z v_y'(0) = EJ_z \varphi_{iz} = P_{iy} \frac{l^2}{6} \quad \text{d.h.}$$

$$P_{iy} = \frac{6 EJ_z}{l^2} \varphi_{iz} \quad \text{und}$$

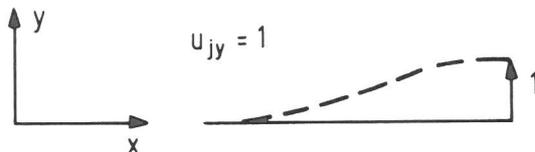
$$M_{iz} = \frac{4 EJ_z}{l} \varphi_{iz} .$$

Aus Gleichgewichtsbedingungen folgt für :

$$P_{jy} = - P_{iy} = - \frac{6 EJ_z}{l^2} \varphi_{iz} ,$$

$$\begin{aligned} M_{jz} &= - M_{iz} + P_{iy} \cdot l \\ &= - \frac{4 EJ_z}{l} \varphi_{iz} + \frac{6 EJ_z}{l^2} \varphi_{iz} \cdot l \\ &= \frac{2 EJ_z}{l} \varphi_{iz} . \end{aligned}$$

Modus 3 $u_{iy} = \varphi_{iz} = \varphi_{jz} = 0$



Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel ergibt sich entsprechend Modus 1:

$$P_{jy} = \frac{12 EJ_z}{l^3} u_{jy} ,$$

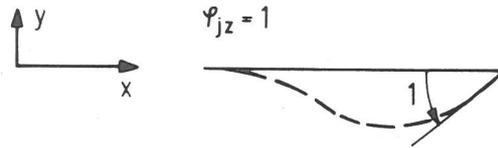
$$M_{jz} = - \frac{6 EJ_z}{l^2} u_{jy} ,$$

$$P_{iy} = - \frac{12 EJ_z}{l^3} u_{jy} ,$$

$$M_{iz} = - \frac{6 EJ_z}{l^2} u_{jy} .$$

Modus 4

$$u_{iy} = \varphi_{iz} = u_{jy} = 0$$



Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel ergibt sich analog Modus 2:

$$P_{jy} = - \frac{6 EJ_z}{l^2} \varphi_{jz} ,$$

$$M_{jz} = \frac{4 EJ_z}{l} \varphi_{jz} ,$$

$$P_{iy} = \frac{6 EJ_z}{l^2} \varphi_{jz} ,$$

$$M_{iz} = \frac{2 EJ_z}{l} \varphi_{jz} .$$

Die vollständige Elementsteifigkeitsmatrix k_{Jz} der Biegung in der x-y Ebene hat somit die Form:

$$\begin{pmatrix} P_{iy} \\ M_{iz} \\ P_{jy} \\ M_{jz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 EJ_z}{l^3} & \frac{6 EJ_z}{l^2} & - \frac{12 EJ_z}{l^3} & \frac{6 EJ_z}{l^2} \\ \frac{6 EJ_z}{l^2} & \frac{4 EJ_z}{l} & - \frac{6 EJ_z}{l^2} & \frac{2 EJ_z}{l^2} \\ - \frac{12 EJ_z}{l^3} & - \frac{6 EJ_z}{l^2} & \frac{12 EJ_z}{l^3} & - \frac{6 EJ_z}{l^2} \\ \frac{6 EJ_z}{l^2} & \frac{2 EJ_z}{l} & - \frac{6 EJ_z}{l^2} & \frac{4 EJ_z}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{iy} \\ \varphi_{iz} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{q}_{Jz} = \mathbf{k}_{Jz} \mathbf{u}_{Jz} .$$

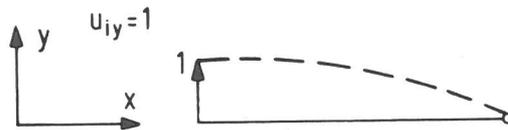
3.3.2. Biegesteifigkeit des einseitig eingespannten Balkens

Fall 1: Einspannung nur am Knoten i

Die 3 möglichen Randverformungen u_{iy} , φ_{iz} , u_{jz} entsprechen den 3 Balkendeformationszuständen:

Modus 1

$$\varphi_{iz} = u_{jy} = 0$$



Folgende Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$v_y'(x=0) = 0,$$

$$v_y(x=l) = 0.$$

Daraus folgt:

$$C_1 = 0,$$

$$0 = P_{iy} \frac{l^3}{6} - M_{iz} \frac{l^2}{2} + C_2.$$

Aus der Momentengleichgewichtsbedingung am Knoten j folgt:

$$M_{iz} = P_{iy} \cdot l.$$

Mit $C_2 = P_{iy} \frac{l^3}{3}$ lautet die Gleichung der Biegelinie dann:

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} + P_{iy} \frac{l^3}{3}.$$

Am Knoten i gilt für $x = 0$:

$$EJ_z v_y(0) = EJ_z u_{iy} = P_{iy} \frac{l^3}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$P_{iy} = \frac{3 EJ_z}{l^3} u_{iy} \quad \text{und}$$

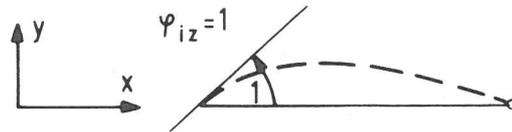
$$M_{iz} = \frac{3 EJ_z}{l^2} u_{iy}.$$

Aus der Kräftegleichgewichtsbedingung folgt:

$$P_{jy} = - \frac{3 EJ_z}{l^3} u_{iy}.$$

Modus 2

$$u_{iy} = u_{jy} = 0$$



Folgende Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$v_y(x=0) = 0,$$

$$v_y(x=l) = 0.$$

Über die Momentengleichgewichtsbedingung folgt:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 = P_{iy} \frac{l^2}{3}, \quad \text{und}$$

$$EJ_z v_y' = P_{iy} \frac{x^2}{2} - M_{iz} x + P_{iy} \frac{l^2}{3}.$$

Am Knoten i gilt dann für $x = 0$:

$$EJ_z v_y'(0) = EJ_z \varphi_{iz} = P_{iy} \frac{l^2}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$P_{iy} = \frac{3 EJ_z}{l^2} \varphi_{iz},$$

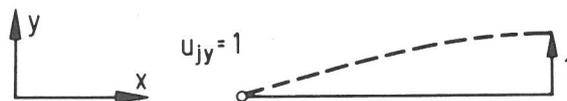
$$M_{iz} = \frac{3 EJ_z}{l} \varphi_{iz}.$$

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt:

$$P_{jy} = - \frac{3 EJ_z}{l^2} \varphi_{iz}.$$

Modus 3

$$u_{iy} = \varphi_{iz} = 0$$



Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel ergibt sich entsprechend Modus 1:

$$P_{jy} = \frac{3 EJ_z}{l^3} u_{jy},$$

$$M_{iz} = - \frac{3 EJ_z}{l^2} u_{jy} ,$$

$$P_{iz} = - \frac{3 EJ_z}{l^3} u_{jy} .$$

Die vollständige Elementsteifigkeitsmatrix k_{Jz_1} der Biegung in der x-y Ebene hat somit die Form:

$$\begin{pmatrix} P_{iy} \\ M_{iz} \\ P_{jy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3 EJ_z}{l^3} & \frac{3 EJ_z}{l^2} & - \frac{3 EJ_z}{l^3} \\ \frac{3 EJ_z}{l^2} & \frac{3 EJ_z}{l} & - \frac{3 EJ_z}{l^2} \\ - \frac{3 EJ_z}{l^3} & - \frac{3 EJ_z}{l^2} & \frac{3 EJ_z}{l^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{iy} \\ \varphi_{iz} \\ u_{jy} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$q_{Jz_1} = k_{Jz_1} u_{Jz_1} .$$

Fall 2: Einspannung nur am Knoten j

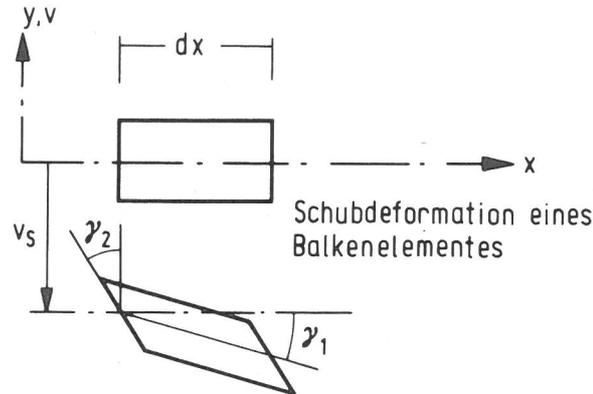
Unter Berücksichtigung der sich ändernden Vorzeichen ergibt sich entsprechend Fall 1:

$$\begin{pmatrix} P_{iy} \\ P_{jy} \\ M_{jz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3 EJ_z}{l^3} & - \frac{3 EJ_z}{l^3} & \frac{3 EJ_z}{l^2} \\ - \frac{3 EJ_z}{l^3} & \frac{3 EJ_z}{l^3} & - \frac{3 EJ_z}{l^2} \\ \frac{3 EJ_z}{l^2} & - \frac{3 EJ_z}{l^2} & \frac{3 EJ_z}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{iy} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$q_{Jz_2} = k_{Jz_2} u_{Jz_2} .$$

3.4. Schubsteifigkeit in der x-y Ebene (z-Drehung)



Am Balkenelement der Länge dx lässt sich die Schubverformung γ in 2 Anteile zerlegen:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = - \frac{dv_s}{dx} + \gamma_2 .$$

Der Schubverformungsanteil v_s lässt sich dann darstellen:

$$\frac{dv_s}{dx} = \gamma_2 - \gamma = \gamma_2 - \frac{\tau}{G} ,$$

wobei τ die im Querschnitt vorhandene Schubspannung ist. Mit der Schubverteilungszahl

$$\kappa = \frac{F}{J_z^2} \int \frac{S_z^2}{b^2} dF$$

lässt sich der Einfluß der Gleitung darstellen

$$\frac{dv_s}{dx} = \gamma_2 - \frac{\kappa Q}{G F} , \quad (Q = \text{Querkraft})$$

Die bezogene Schubverteilungszahl ϕ lautet:

$$\phi_Y = \kappa_Y \frac{12 EJ_z}{G l^2 F} ; \quad \phi_Z = \kappa_Z \frac{12 EJ_Y}{G l^2 F} .$$

3.4.1. Schubsteifigkeit in der x-y Ebene des zweiseitig eingespannten Balkens ($\gamma_2 = 0$)

Die Schubdeformation bewirkt eine gleichbleibende Neigung des Stabes

$$\frac{dv_s}{dx} = v_s' = - \frac{\kappa Q}{G F} = - \frac{\kappa P iy}{GF} .$$

Gesucht werden (vgl. 3.3.1.) die Randschnittlasten, welche den Stab in die 4 möglichen unabhängigen Deformationszustände überführen.

Modus 1 $u_{jy} = 0; \varphi_{iz} = \varphi_{jz} = -\frac{\kappa P_{iy}}{G F}; u_{iy} = 1.$

Die Biegelinie hat die Gleichung:

$$EJ_z v_y' = P_{iy} \frac{x^2}{2} - M_{iz} x + C_1 - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z,$$

durch Integration folgt:

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} + \left(C_1 - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z \right) x + C_2.$$

Folgende Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$v_y' (x = 0) = -\frac{\kappa P_{iy}}{G F},$$

$$v_y' (x = \ell) = -\frac{\kappa P_{iy}}{G F},$$

$$v_y (x = \ell) = 0.$$

Daraus folgt:

$$C_1 = 0,$$

$$M_{iz} = P_{iy} \frac{\ell}{2},$$

$$C_2 = \frac{P_{iy} \ell^3}{12} + \frac{\kappa P_{iy} EJ_z}{G F} \ell.$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet dann:

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} - \frac{\kappa P_{iy} EJ_z}{G F} x + \frac{P_{iy} \ell^3}{12} + \frac{\kappa P_{iy} EJ_z}{G F} \ell.$$

Am Knoten i gilt für $x = 0$:

$$EJ_z v_y(0) = EJ_z u_{iy} = P_{iy} \left(\frac{\ell^3}{12} + \frac{\kappa EJ_z}{G F} \ell \right) \quad \text{d.h.}$$

$$P_{iy} = \frac{12 EJ_z}{\ell^3 + \frac{\kappa 12 EJ_z}{G F} \ell} u_{iy} = \frac{12 EJ_z}{\ell^3 \left(1 + \frac{12 \kappa EJ_z}{G F \ell^2} \right)} u_{iy},$$

$$P_{iy} = \frac{12 EJ_z}{\ell^3 (1 + \phi_Y)}$$

$$\text{mit } \phi_Y = \kappa_Y \frac{12 EJ_z}{G F \ell^2} .$$

Es folgt:

$$M_{iz} = \frac{6 EJ_z}{\ell^2 (1 + \phi_Y)} .$$

Aus Gleichgewichtsgründen folgt für:

$$P_{jy} = - P_{iy} = - \frac{12 EJ_z}{\ell^3 (1 + \phi_Y)} ,$$

$$M_{jz} = - M_{iz} + P_{iy} \ell = \frac{6 EJ_z}{\ell^2 (1 + \phi_Y)} .$$

Modus 2 $\varphi_{iz} = 1, u_{iy} = u_{jy} = 0, \varphi_{jz} = - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} .$

Als Randbedingungen sind zu erfüllen:

$$v_Y (x = 0) = 0 ,$$

$$v_Y (x = \ell) = 0 ,$$

$$v_Y' (x = \ell) = - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} .$$

Daraus folgt:

$$C_2 = 0 ,$$

$$C_1 = P_{iy} \frac{\ell^2}{6} + \frac{\kappa P_{iy}}{G F} (EJ_z + 1) ,$$

$$M_{iy} = P_{iz} \frac{\ell (4 + \phi)}{6} .$$

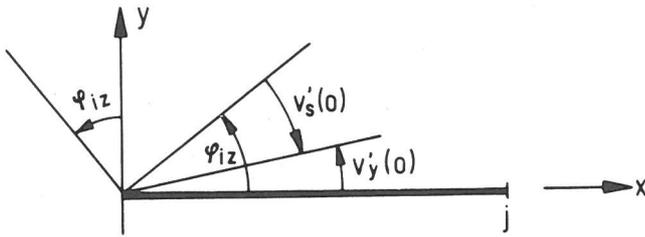
Die Gleichung der ersten Ableitung der Biegelinie lautet:

$$EJ_z v_Y' = P_{iy} \frac{x^2}{2} - M_{iz} x + P_{iy} \frac{\ell^2}{6} + \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z .$$

Am Knoten i gilt dann für $x = 0$:

$$EJ_z v_Y'(0) = P_{iy} \frac{\ell^2}{6} + \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z .$$

Zwischen der Drehung φ_{iz} des Knotens i und der Neigung der Biegelinie am Knoten i besteht die Beziehung:



$$\varphi_{iz} = v'_y(0) - v'_s(0)$$

wobei $v'_s(0)$ die Drehung durch die Schubdeformation ist.

Einfluß der Schubdeformation am Knoten i

Es folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{iz} &= P_{iy} \left(\frac{\ell^2}{6 EJ_z} + \frac{\kappa}{GF} \right) + P_{iy} \frac{\kappa}{GF} \\ &= P_{iy} \left(\frac{\ell^2}{6 EJ_z} + \frac{2\kappa}{GF} \right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} P_{iy} &= \frac{1}{\frac{\ell^2}{6 EJ_z} + \frac{2\kappa}{GF}} \varphi_{iz} = \frac{6 EJ_z}{\ell^2 + \frac{12 EJ_z}{GF}} \varphi_{iz} \\ &= \frac{6 EJ_z}{\ell^2 (1 + \phi_Y)} \varphi_{iz} \end{aligned}$$

Aus Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} M_{iz} &= \frac{EJ_z (4 + \phi_Y)}{(1 + \phi_Y)} \varphi_{iz} , \\ P_{jY} &= - \frac{6 EJ_z}{\ell^2 (1 + \phi_Y)} \varphi_{iz} , \\ M_{jz} &= - M_{iz} + P_{iy} \ell = \frac{EJ_z (2 - \phi_Y)}{\ell (1 + \phi_Y)} \varphi_{iz} . \end{aligned}$$

Modus 3

Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel ergibt sich entsprechend Modus 1:

$$P_{jY} = \frac{12 EJ_z}{\ell^3 (1 + \phi_Y)} u_{jY} ,$$

$$M_{jz} = - \frac{6 EJ_z}{l^2 (1 + \phi_Y)} u_{jy} ,$$

$$P_{iy} = - \frac{12 EJ_z}{l^3 (1 + \phi_Y)} u_{jy} ,$$

$$M_{iz} = - \frac{6 EJ_z}{l^2 (1 + \phi_Y)} u_{jy} .$$

Modus 4

Entsprechend Modus 2 ergibt sich:

$$P_{jy} = - \frac{6 EJ_z}{l^2 (1 + \phi_Y)} \varphi_{jz} ,$$

$$M_{jz} = \frac{EJ_z (4 + \phi_Y)}{l (1 + \phi_Y)} \varphi_{jz} ,$$

$$P_{iy} = \frac{6 EJ_z}{l^2 (1 + \phi_Y)} \varphi_{jz} ,$$

$$M_{iz} = \frac{EJ_z (2 - \phi_Y)}{l (1 + \phi_Y)} \varphi_{jz} .$$

3.4.2. Schubsteifigkeit des einseitig eingespannten Balkens

Fall 1: Einspannung am Knoten i

Entsprechend 3.3.2 sind 3 Balkendeformationszustände möglich:

Modus 1 ($\gamma_2 = 0$) $u_{iy} = 1$; $\varphi_{iz} = \frac{\kappa P_{iy}}{G F}$; $u_{jy} = 0$.

Die Randbedingungen der Biegegleichung

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} + \left(C_1 - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z \right) x + C_2$$

lauten:

$$v_y' (x = 0) = - \frac{\kappa P_{iy}}{G F} ,$$

$$v_y (x = l) = 0 .$$

Es folgt:

$$C_1 = 0 ,$$

$$C_2 = - P_{iy} \frac{l^3}{6} + M_{iz} \frac{l^2}{2} + \frac{\kappa P_{iy}}{G F} EJ_z l .$$

Aus der Momentengleichgewichtsbedingung am Knoten i

$$M_{iz} = P_{iy} \ell \text{ folgt:}$$

$$C_2 = P_{iy} \left(\frac{\ell^3}{3} + \frac{\kappa EJ_z}{GF} \ell \right).$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet:

$$EJ_z v_y = P_{iy} \frac{x^3}{6} - M_{iz} \frac{x^2}{2} - \frac{\kappa P_{iy}}{GF} EJ_z x + \frac{P_{iy} \ell^3}{3} \left(1 + \frac{\phi_y}{4} \right).$$

Am Knoten i gilt für $x = 0$:

$$EJ_z v_y(0) = EJ_z u_{iy} = \frac{P_{iy} \ell^3}{3} \left(1 + \frac{\phi_y}{4} \right),$$

$$P_{iy} = \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_y) \ell^3} u_{iy}.$$

Weiter folgt:

$$M_{iz} = \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_y) \ell^2} u_{iy},$$

$$P_{jy} = - \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_y) \ell^3} u_{iy}.$$

$$\text{Modus 2 } (\gamma_1 = 0, \gamma_2 = - \frac{\kappa P_{iy}}{GF})$$

$$\phi_{iz} = 1; u_{iy} = u_{jy} = 0$$

Für die Biegelinie ergibt sich da $\gamma_1 = 0$ die Gleichung identisch mit 3.3.2

$$EJ_z v_y' = P_{iy} \frac{x^2}{2} - M_{iz} x + P_{iy} \frac{\ell^2}{3}.$$

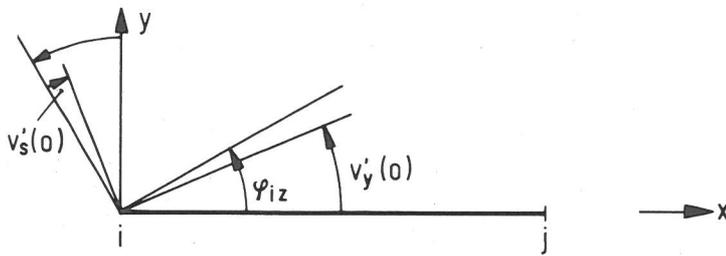
Am Knoten i gilt dann für $x = 0$:

$$EJ_z v_y'(0) = P_{iy} \frac{\ell^2}{3}.$$

Zwischen der Drehung ϕ_{iz} des Knotens i und der Neigung der Biegelinie am Knoten i besteht somit die Beziehung:

$$\phi_{iz} = v_y'(0) - v_s'(0),$$

wobei $v_s'(0)$ die Drehung des Anteils γ_2 der Schubdeformation ist.



Einfluß der Schubdeformation
am Knoten i

Es folgt:

$$\varphi_{iz} = P_{iy} \left(\frac{l^2}{3 EJ_z} + \frac{\kappa}{GF} \right) \quad \text{oder}$$

$$P_{iy} = \frac{1}{\frac{l^2}{3 EJ_z} + \frac{\kappa}{GF}} \varphi_{iz} = \frac{12 EJ_z}{4 l^2 + \frac{12 EJ_z}{GF}} \varphi_{iz}$$

$$= \frac{12 EJ_z}{l^2 (4 + \phi_Y)} \varphi_{iz} \quad ,$$

$$P_{jY} = - \frac{12 EJ_z}{l^2 (4 + \phi_Y)} \varphi_{iz} \quad ,$$

$$M_{iz} = P_{iy} l = \frac{12 EJ_z}{l (4 + \phi_Y)} \varphi_{iz} \quad .$$

Modus 3 ($\gamma_2 = 0$) , $u_{jY} = 1$

$$u_{iy} = 0 ; \varphi_{iz} = - \frac{\kappa P_{iy}}{GF} \quad .$$

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen ergibt sich entsprechend Modus 1:

$$P_{jY} = \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_Y) l^3} u_{jY} \quad ,$$

$$M_{iz} = \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_Y) l^2} u_{jY} \quad ,$$

$$P_{iy} = - \frac{12 EJ_z}{(4 + \phi_Y) l^3} u_{jY} \quad .$$

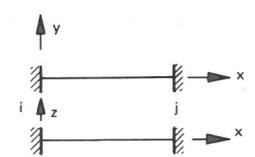
3.5. Steifigkeitsmatrix des Elementarstabes

Unter Berücksichtigung der auf gleiche Weise in der x-z Ebene gewonnenen Steifigkeitsbeziehungen läßt sich die Gesamtsteifigkeit wie folgt in Matrixschreibweise darstellen.

3.5.1. Steifigkeit des beidseitig eingespannten Stabes

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$$

$\mathbf{k} =$	$\frac{EF}{l}$										
	0	$\frac{12 EJ_z}{l^3(1+\phi_y)}$									
	0	0	$\frac{12 EJ_y}{l^3(1+\phi_z)}$								
	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$							
	0	0	$\frac{-6 EJ_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EJ_y}{l(1+\phi_z)}$						
	0	$\frac{6 EJ_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EJ_z}{l(1+\phi_y)}$					
	$-\frac{EF}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{EF}{l}$				
	0	$\frac{-12 EJ_z}{l^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{-6 EJ_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{12 EJ_z}{l^3(1+\phi_y)}$			
	0	0	$\frac{-12 EJ_y}{l^3(1+\phi_z)}$	0	$\frac{6 EJ_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{12 EJ_y}{l^3(1+\phi_z)}$		
	0	0	0	$-\frac{GJ}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$	
	0	0	$\frac{-6 EJ_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(2-\phi_z)EJ_y}{l(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{6 EJ_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EJ_y}{l(1+\phi_z)}$
	0	$\frac{6 EJ_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi_y)EJ_z}{l(1+\phi_y)}$	0	$\frac{-6 EJ_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EJ_z}{l(1+\phi_y)}$



symmetrisch

wobei

$$\phi_y = \frac{\kappa_y EJ_z}{GF l^2}$$

$$\phi_z = \frac{\kappa_z EJ_y}{GF l^2}$$

und \mathbf{q} und \mathbf{u} die vollständigen Stabrandschnittlasten- und Verformungsvektoren sind (vgl. 3.).

Die Steifigkeitsmatrix ohne Einfluß der Schubdeformation ist der Grenzfall der hier dargestellten allgemeinen Steifigkeitsmatrix:

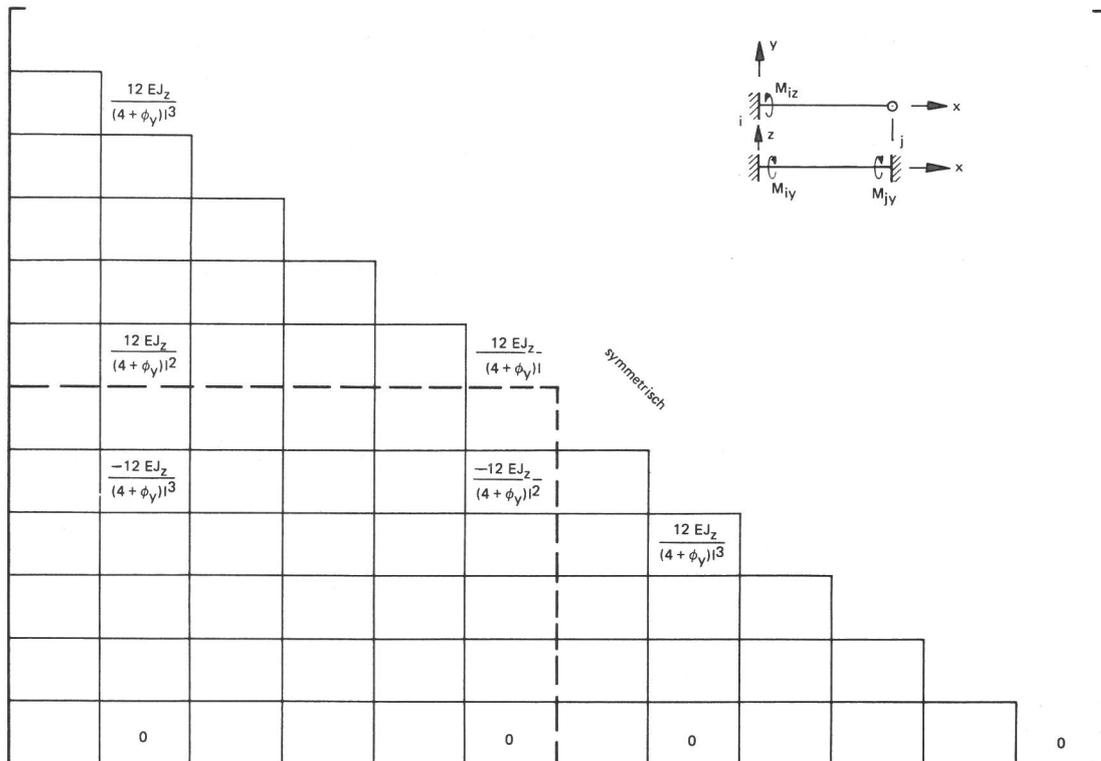
$$\begin{aligned} \mathbf{k} (\phi = 0) &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \mathbf{k} (\phi \neq 0) \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \mathbf{k} (\phi \neq 0) \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die

3.5.2. Steifigkeit des einseitig eingespannten Stabes

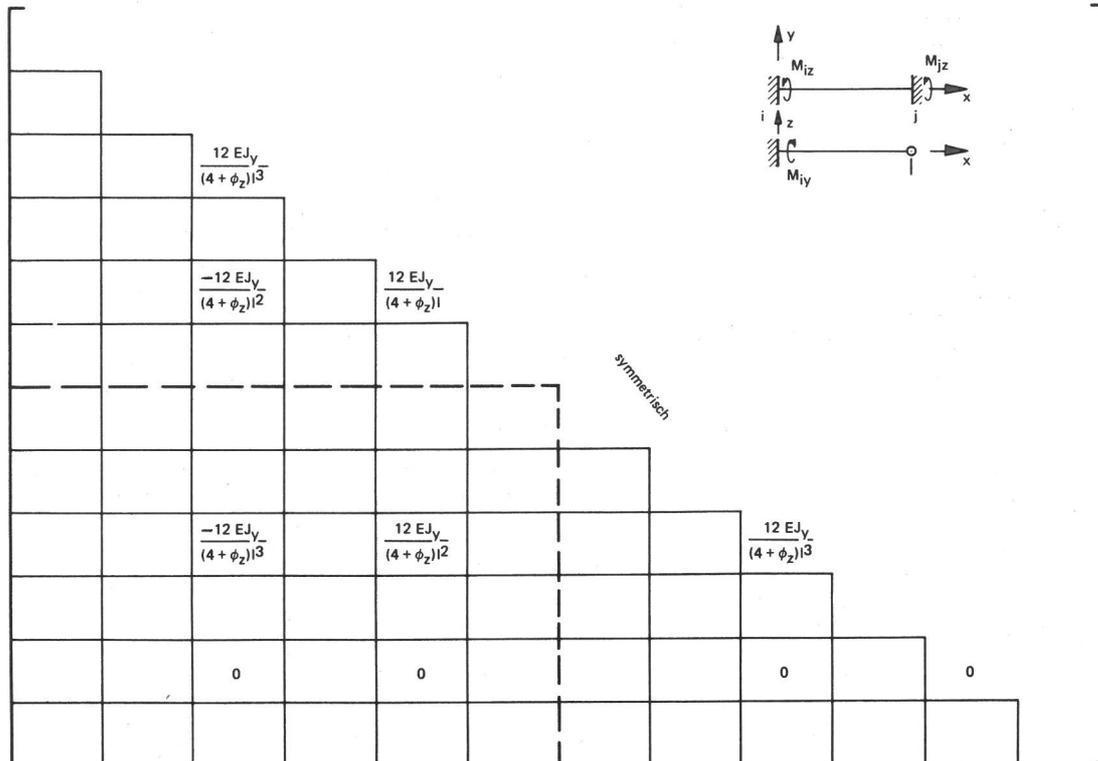
Es existieren 4 voneinander unabhängige Fälle unterschiedlicher Randgelenke, Kombinationen dieser Fälle entstehen durch einfache Überlagerung. In der Steifigkeitsmatrix ändern sich nur die den nicht mehr vorhandenen Randschnittlasten bzw. Einheitsverformungen entsprechende Steifigkeitswerte. Im Folgenden werden deshalb nur diejenigen Steifigkeitswerte der Steifigkeitsmatrix angegeben, die den veränderten Randbedingungen entsprechen, im übrigen Bereich bleibt die Steifigkeitsmatrix unverändert.

Fall 1: Biegegelenk am Knoten j in z -Richtung, d.h. $M_{jz} = 0$



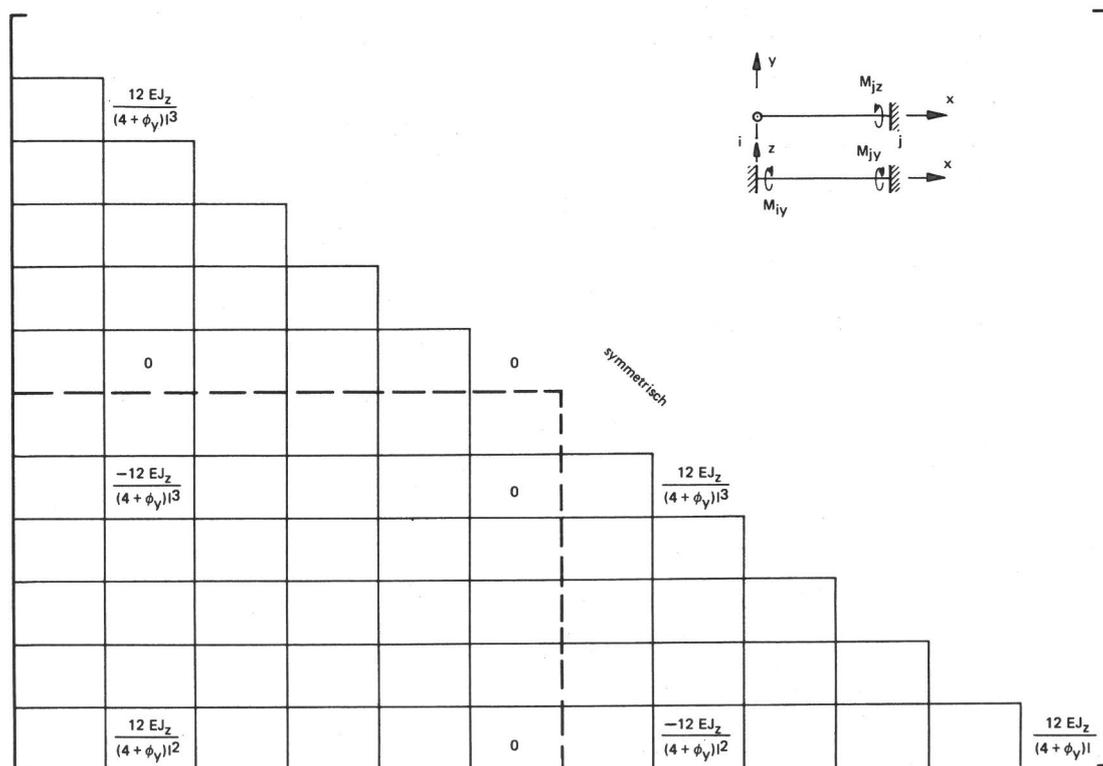
Änderung der k -Matrix nur in den angegebenen Positionen

Fall 2: Biegegelenk am Knoten j in y -Richtung, d.h. $M_{jy} = 0$



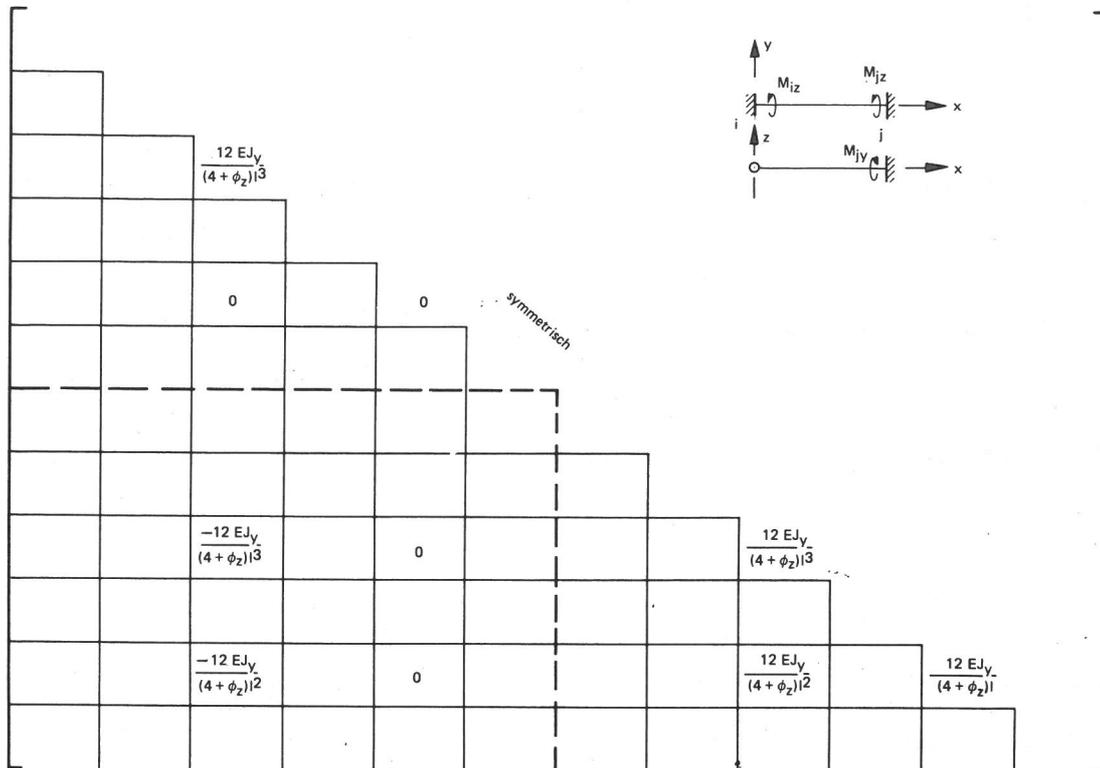
Änderung der k -Matrix nur in den angegebenen Positionen

Fall 3: Biegegelenk am Knoten i in z -Richtung, d.h. $M_{iz} = 0$



Änderung der k -Matrix nur in den angegebenen Positionen

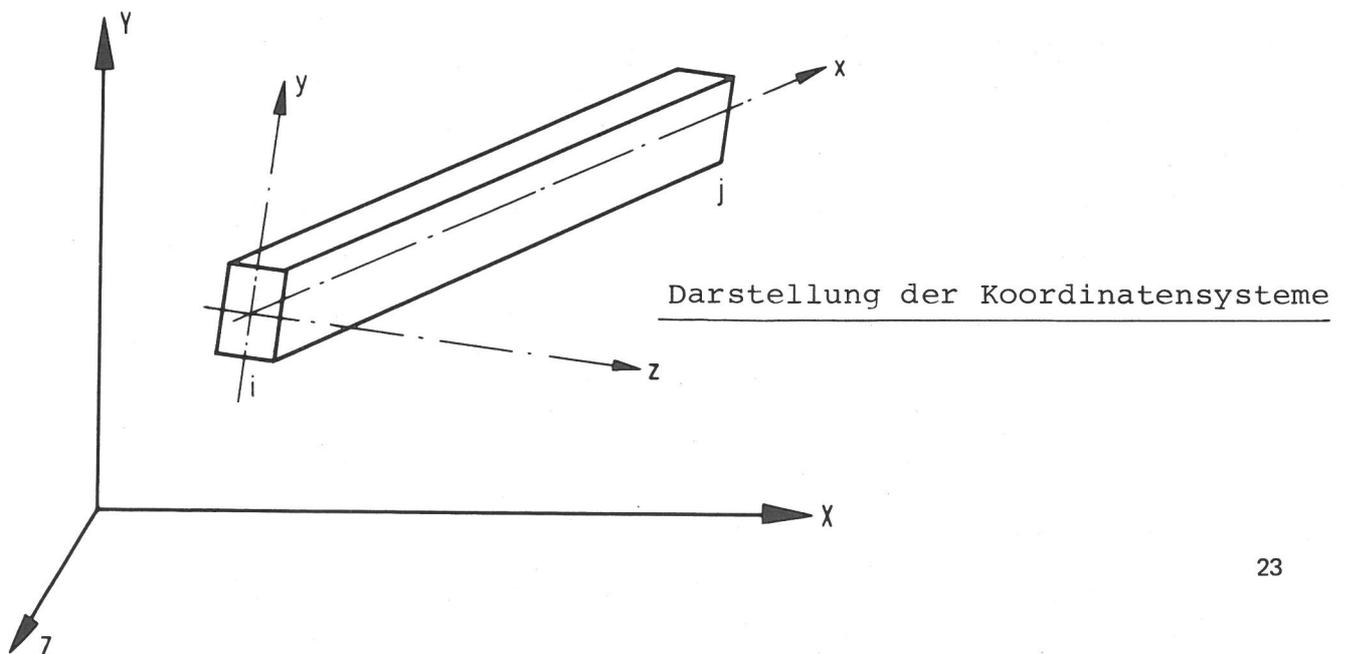
Fall 4: Biegegelenk am Knoten i in y -Richtung, d.h. $M_{iy} = 0$



Änderung der k -Matrix nur in den angegebenen Positionen

3.6. Transformation des Elementarstabkoordinatensystems

Die im allgemeinen räumlichen Falle unterschiedlichen mitlaufenden Koordinatensysteme x, y, z der Hauptträgheitsachsen der Elementarstäbe sind auf ein raumfestes Bezugskoordinatensystem X, Y, Z zu beziehen. Dadurch wird erreicht, daß sich die Randschnittlasten mehrerer in einem Knoten zusammentreffender Stäbe einfach überlagern lassen. Die Lage des Bezugssystems selbst ist beliebig. Da im vorliegenden Fall nur gerade Stäbe erlaubt sind, müssen gekrümmte Stäbe gegebenenfalls durch eine Kette gerader Stabelemente angenähert werden.



Gesucht wird also diejenige Transformationsmatrix T , die das Stabkoordinatensystem in ein raumfestes Koordinatensystem überführt, so daß

$$u = T \cdot v$$

wobei v der auf das Bezugssystem X, Y, Z projizierte Stabrandverformungsvektor ist. Die Elemente der Transformationsmatrix T entsprechen dem Richtungscosinus der entsprechenden Komponente. Für die virtuelle Verschiebung δv gilt:

$$\delta u = T \cdot \delta v .$$

Da die geleistete virtuelle Arbeit unabhängig vom Koordinatensystem sein muß, gilt

$$A = \delta v^T \cdot p = \delta u^T \cdot q ,$$

wobei p der auf das Bezugssystem X, Y, Z projizierte Stabbrandschnittlastenvektor ist.

Durch Einsetzen ergibt sich :

$$\delta v^T \cdot (p - T^T \cdot q) = 0 ,$$

0 ist die Nullmatrix. Da die virtuelle Verschiebung δv beliebig ist, gilt :

$$p - T^T \cdot q = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$p = T^T \cdot q .$$

Durch Einsetzen in die Randschnittlast-Deformationsbeziehung am Elementarstab ergibt sich :

$$p = T^T \cdot k \cdot u = T^T \cdot k \cdot T \cdot v$$

$$= k_T \cdot v$$

wobei $k_T = T^T \cdot k \cdot T$ die auf das Hauptsystem bezogene Elementsteifigkeitsmatrix ist.

Die Transformationsmatrix T eines Stabelementes wird durch die Richtungscosinusse t in folgende Form gebracht:

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{iz} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \\ \varphi_{jx} \\ \varphi_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x & 0 & 0 & 0 \\ t_y & 0 & 0 & 0 \\ t_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_x & 0 & 0 \\ 0 & t_y & 0 & 0 \\ 0 & t_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_x & 0 \\ 0 & 0 & t_y & 0 \\ 0 & 0 & t_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 0 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \vartheta_{ix} \\ \vartheta_{iy} \\ \vartheta_{iz} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{jz} \\ \vartheta_{jx} \\ \vartheta_{jy} \\ \vartheta_{jz} \end{bmatrix}$$

Die Richtungskosinusse t sind Einheitsvektoren, sie bestehen wie der Nullvektor $\mathbf{0}$ aus 3 Komponenten. Die Komponenten der Vektoren t gliedern sich in:

$$\begin{aligned}
 t_x &= (X_L, X_M, X_N), \\
 t_y &= (Y_L, Y_M, Y_N), \\
 t_z &= (Z_L, Z_M, Z_N).
 \end{aligned}$$

Durch die Richtungskosinusse t können die Stabsteifigkeiten beliebig im Raum gerichtet sein. Die Ermittlung von t geschieht in 2 Schritten:

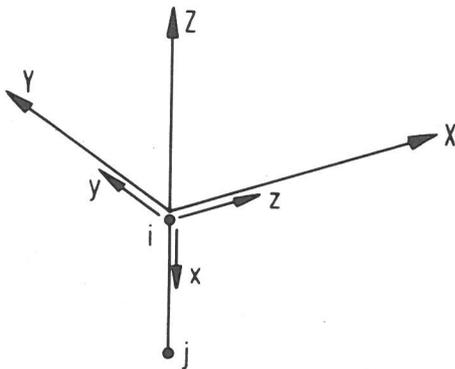
Schritt 1: Die Stabachse x ist die Systemlinie des Stabes und beginnt im Knoten i . Der Knoten i bildet auch den Ursprung für die Stabhauptträgheitsachsen y und z . Für die Lage der Hauptträgheitsachse y wird vereinbart, daß y in der X - Y -Ebene des Bezugskordinatensystems liegen muß.

Schritt 2: Um der y -Achse eine beliebige Lage im Raum geben zu können, ist eine Drehung des Stab-Hauptachsensystems um den Winkel α in Richtung der Stab- x -Achse möglich.

3.6.1. Transformation der Koordinatensysteme

Bei der Durchführung von Schritt 1 sind folgende Fälle zu beachten:

Sonderfall I: x-Achse in -Z-Richtung. In diesem Fall liegt die y-Achse in der X-Y Ebene und ist identisch mit der +Y-Achse.



Sonderfall I

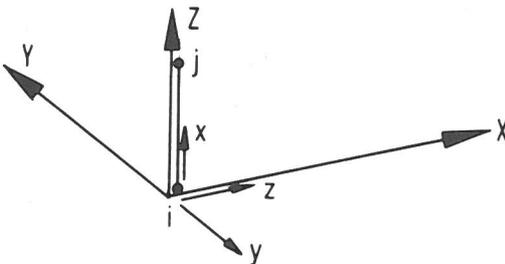
Die Vektoren t haben die Komponenten:

$$XL = 0, \quad XM = 0, \quad XN = (z_j - z_i) / \ell = -1,$$

$$YL = 0, \quad YM = 1, \quad YN = 0,$$

$$ZL = 1, \quad ZM = 0, \quad ZN = 0.$$

Sonderfall II: x-Achse in +Z-Richtung. Die y-Achse ist identisch mit der -Y-Achse.



Sonderfall II

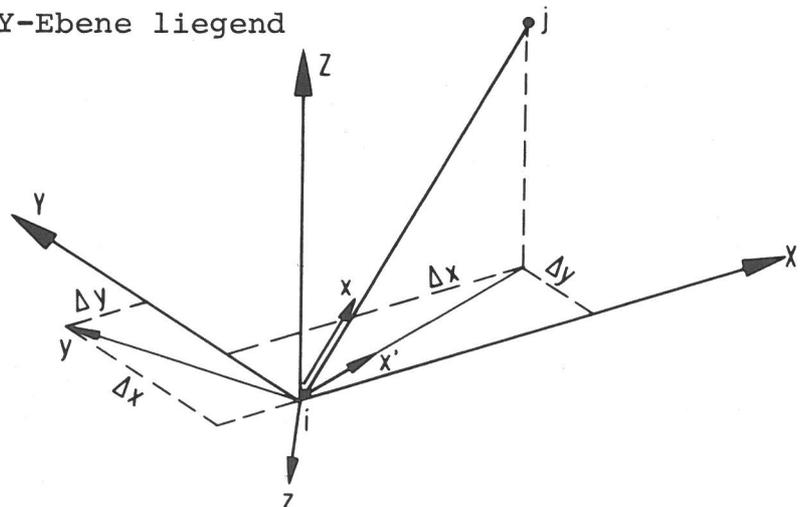
Die Vektoren t haben die Komponenten:

$$XL = 0, \quad XM = 0, \quad XN = (z_j - z_i) / \ell = 1,$$

$$YL = 0, \quad YM = -1, \quad YN = 0,$$

$$ZL = 1, \quad ZM = 0, \quad ZN = 0.$$

Normalfall: y-Achse in der X-Y-Ebene liegend



Normalfall

Der Vektor \mathbf{t}_x hat die Komponenten

$$XL = (x_j - x_i) / \ell, \quad XM = (y_j - y_i) / \ell, \quad XN = (z_j - z_i) / \ell.$$

Der Vektor \mathbf{t}_y wird durch folgende Beziehungen ermittelt:

$$1. \text{ Orthogonalität: } \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{t}_y = 0, \\ (XL, XM, XN) (YL, YM, YN) = 0$$

2. y-Achse liegt in der X-Y-Ebene:

$$YN = 0$$

$$3. \text{ Orthogonalität: } \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_y = \mathbf{e}_z = (0, 0, 1).$$

Daraus folgt mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{e}_x = \left(\frac{\Delta x}{\ell}, \frac{\Delta y}{\ell}, 0 \right),$$

$$\ell' = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

$$\Delta x = x_j - x_i,$$

$$\Delta y = y_j - y_i:$$

$$\frac{\Delta x}{\ell} YM - \frac{\Delta y}{\ell} YL = 1 \quad \text{oder}$$

$$YM = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\ell} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x \ell}} = \frac{\ell'}{\Delta x + \frac{\Delta y^2}{\Delta x}} = \frac{\ell' \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{d.h.}$$

$$YM = \frac{\Delta x}{\ell} \quad \text{und}$$

$$YL = -YM \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta y}{\ell}. \quad \text{Es folgt weiter:}$$

$$\mathbf{t}_y = \left(-\frac{y_j - y_i}{\ell}, \frac{x_j - x_i}{\ell}, 0 \right).$$

Die Komponenten des Vektors \mathbf{t}_z werden über Orthogonalitätsbeziehungen ermittelt:

$$\mathbf{t}_z = \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{t}_y \quad \text{d.h.:}$$

$$\begin{aligned} ZL &= - XN \cdot YM + XM \cdot YN , \\ ZM &= XN \cdot YL - XL \cdot YN , \\ ZN &= XL \cdot YM - XM \cdot YL . \end{aligned}$$

Mit $YN = 0$ bleibt für:

$$t_z = (- XN \cdot YM , XN \cdot YL , XL \cdot YM - XM \cdot YL) \quad \text{oder}$$

$$t_z = \left(\frac{z_j - z_i}{l} \frac{x_j - x_i}{l} , - \frac{z_j - z_i}{l} \frac{y_j - y_i}{l} , \frac{(x_j - x_i)^2}{l l} + \frac{(y_j - y_i)^2}{l l} \right) ,$$

$$t_z = \left(\frac{z_j - z_i}{l} \frac{x_j - x_i}{l} , - \frac{z_j - z_i}{l} \frac{y_j - y_i}{l} , \frac{l}{l} \right) .$$

3.6.2. Drehung des Stabkoordinatensystems

Es kann nun eine Drehung der Systemachse x um den Winkel α erfolgen; $\alpha > 0$ bedeutet, daß α in $+x$ -Richtung positiv orientiert ist. Damit werden die Transformationseinheitsvektoren t_y, t_z verändert:

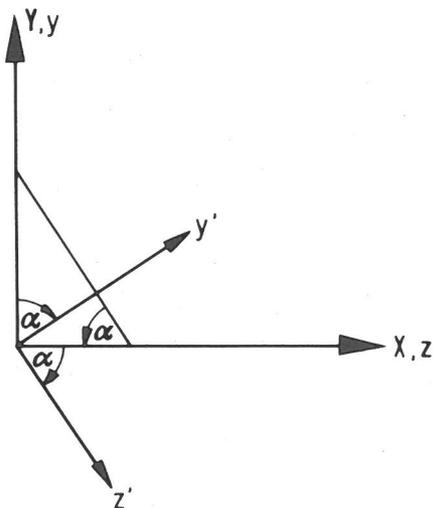
$$YL' = YL \text{ (neu)} = YL \text{ (alt)} \cdot \cos \alpha + ZL \text{ (alt)} \sin(\alpha)$$

$$YM' = YM \text{ (neu)} = YM \text{ (alt)} \cdot \cos \alpha + ZM \text{ (alt)} \sin(\alpha)$$

$$YN' = YN \text{ (neu)} = ZN \text{ (alt)} \cdot \sin \alpha .$$

Die Drehung der in 3.6.1 dargestellten Fälle geschieht folgendermaßen:

Darstellung von Sonderfall I:



$$y' = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

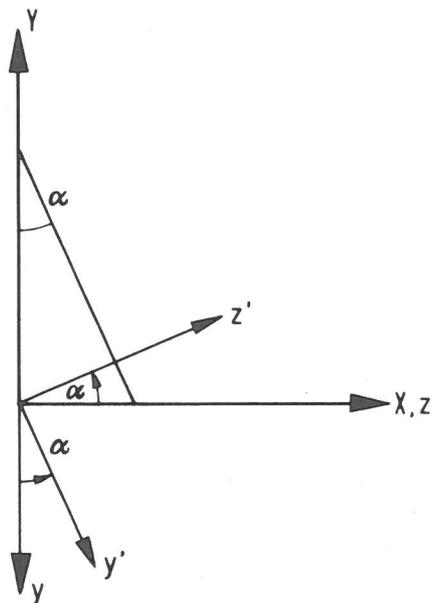
$$z' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$$

oder:

$$y' = z \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

Darstellung von Sonderfall II:



$$y' = X \sin \alpha - Y \cos \alpha$$

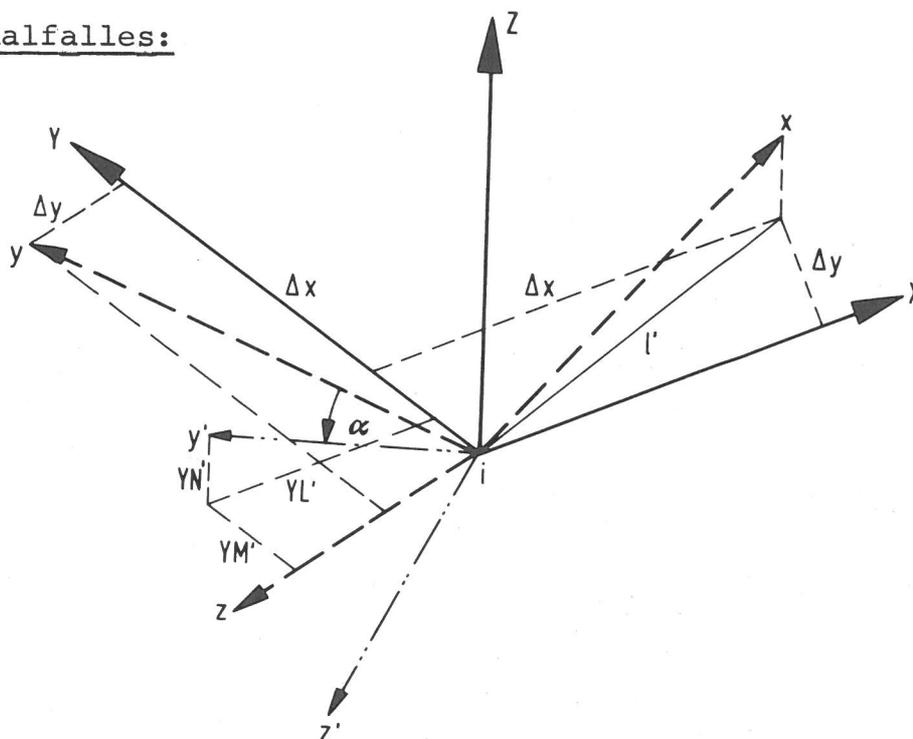
$$z' = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$$

oder:

$$y' = z \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

Darstellung des Normalfalles:



Die Komponenten des Vektors $t_{y'} = (Y_L', Y_M', Y_N')$ infolge des um den Winkel α gedrehten Vektors t_y ergeben sich durch folgende 3 vektorielle Beziehungen:

$$1. t_y \cdot t_{y'} = \cos \alpha$$

also

$$Y_L' \frac{\Delta y}{l} + Y_M' \frac{\Delta x}{l} = \cos \alpha$$

d.h.

$$Y_L' = Y_M' \frac{\Delta x}{\Delta y} - \cos \frac{l}{\Delta y}$$

$$2. \mathbf{t}_y' \cdot \mathbf{t}_x = 0$$

also

$$Y_L' \frac{\Delta x}{l} + Y_M' \frac{\Delta y}{l} + Y_N' \frac{\Delta z}{l} = 0$$

d.h.

$$Y_N' = - Y_L' \frac{\Delta x}{\Delta z} - Y_M' \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

3a. $\mathbf{t}_y \times \mathbf{t}_y' = \lambda_x$, wobei λ_x ein Vektor der Länge $\sin \alpha$ in x-Richtung ist:

$$\lambda_x = \left(Y_N' \frac{\Delta x}{l}, Y_N' \frac{\Delta y}{l}, - Y_M' \frac{\Delta y}{l} - Y_L' \frac{\Delta x}{l} \right).$$

$$3b. \lambda_x \cdot \mathbf{t}_x = \sin \alpha.$$

Es folgt:

$$\sin \alpha = Y_N' \frac{\Delta x}{l} \frac{\Delta x}{l} + Y_N' \frac{\Delta y}{l} \frac{\Delta y}{l} - Y_M' \frac{\Delta y}{l} \frac{\Delta z}{l} - Y_L' \frac{\Delta x}{l} \frac{\Delta z}{l}.$$

Mit $\Delta x^2 + \Delta y^2 = l'^2$ folgt:

$$\sin \alpha = Y_N' \frac{l'}{l} - Y_M' \frac{\Delta y \Delta z}{l l'} - Y_L' \frac{\Delta x \Delta z}{l l'}.$$

Einsetzen von 2. ergibt:

$$\sin \alpha = - Y_L' \frac{\Delta x}{\Delta z} \frac{l'}{l} - Y_M' \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{l'}{l} - Y_M' \frac{\Delta y \Delta z}{l l'} - Y_L' \frac{\Delta x \Delta z}{l l'}.$$

Einsetzen von 1. ergibt:

$$-\sin \alpha + \cos \alpha \left(\frac{l'}{\Delta y} \frac{\Delta x}{\Delta z} \frac{l'}{l} + \frac{l'}{\Delta y} \frac{\Delta x \Delta z}{l l'} \right) = Y_M' \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \frac{l'}{l} \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x \Delta z}{l l'} \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{l'}{l} + \frac{\Delta y \Delta z}{l l'} \right).$$

Nach Multiplikation mit $\Delta y \Delta z l l'$ ergibt sich:

$$-\sin \alpha \Delta y \Delta z l l' + \cos \alpha (l'^3 \Delta x + \Delta x \Delta z l') = Y_M' (\Delta x^2 l'^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta y^2 \ell'^2 + \Delta y^2 \Delta z^2) \\
& = YM' (\ell'^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2) + \Delta z^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2)) \\
& = YM' (\ell'^4 + \Delta z^2 \ell'^2) .
\end{aligned}$$

Division durch ℓ'^2 ergibt:

$$\begin{aligned}
YM' (\ell'^2 + \Delta z^2) &= - \sin \alpha \Delta y \Delta z \frac{\ell}{\ell'} + \cos \alpha \left(\ell' \Delta x + \frac{\Delta x \Delta z^2}{\ell'} \right) \text{ d.h.} \\
YM' &= - \sin \alpha \frac{\Delta y \Delta z \frac{\ell}{\ell'}}{\ell'^2 + \Delta z^2} + \cos \alpha \frac{\ell' \Delta x + \frac{\Delta x \Delta z^2}{\ell'}}{\ell'^2 + \Delta z^2} .
\end{aligned}$$

Mit $\ell^2 = \ell'^2 + \Delta z^2$ folgt :

$$YM' = - \sin \alpha \frac{\Delta y \Delta z}{\ell \ell'} + \cos \alpha \frac{\Delta x}{\ell'} \frac{\ell'^2 + \Delta z^2}{\ell'^2 + \Delta z^2} \quad \text{oder}$$

$$YM' = \sin \alpha ZM + \cos \alpha YM .$$

Es folgt für :

$$\begin{aligned}
YL' &= - \sin \alpha \frac{\Delta y \Delta z}{\ell \ell'} \frac{\Delta x}{\Delta y} + \cos \alpha \frac{\Delta x}{\ell'} \frac{\Delta x}{\Delta y} - \cos \alpha \frac{\ell'}{\Delta y} \\
&= - \sin \alpha \frac{\Delta x \Delta z}{\ell \ell'} + \cos \alpha \frac{1}{\Delta y \ell'} (\Delta x^2 - \ell'^2) \\
&= - \sin \alpha \frac{\Delta x \Delta z}{\ell \ell'} + \cos \alpha \frac{1}{\Delta y \ell'} (- \Delta y^2) \\
&= - \sin \alpha \frac{\Delta x \Delta z}{\ell \ell'} - \cos \alpha \frac{\Delta y}{\ell'} \\
&= \sin \alpha ZL + \cos \alpha YL .
\end{aligned}$$

Weiter folgt für:

$$YN' = \sin \alpha \frac{\Delta x \Delta z}{\ell \ell'} \frac{\Delta x}{\Delta z} + \cos \alpha \frac{\Delta y}{\ell'} \frac{\Delta x}{\Delta z} + \sin \alpha \frac{\Delta y \Delta z}{\ell \ell'} \frac{\Delta y}{\Delta z} - \cos \alpha \frac{\Delta x}{\ell'} \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

Da aber im Verformungsvektor V_T entsprechend der Stabanordnung mehrfach dieselben unbekanntenen Knotendeformationen auftreten, ist eine Umordnung dergestalt notwendig, daß die Verformungsgrößen nur einmal auftreten. In der Steifigkeitsmatrix K_T geschieht diese Umordnung in Abhängigkeit von den Verformungsgrößen durch Addition der entsprechenden Steifigkeitswerte.

Es gilt:

$$V_T = A V ,$$

V ist der gesuchte Deformationsvektor und

A ist eine rechteckige Zuordnungsmatrix, die nur in wenigen Positionen den Wert 1 hat, sonst aber aus Nullgliedern besteht.

Der dem Vektor V zugeordnete Belastungsvektor P ergibt sich durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Die virtuelle Verrückung :

$$\delta V_T = A \delta V$$

erzeugt die virtuelle Arbeit :

$$\delta W = \delta V^T P .$$

Da aber die Reihenfolge der Summierung keinen Einfluß auf die geleistete virtuelle Arbeit habendarf, gilt:

$$\delta W = \delta U = \delta V_T^T P_T = \delta V^T P .$$

Es folgt :

$$\delta V^T (P - A^T P_T) = 0 , \quad \text{also}$$

$$P = A^T P_T .$$

Die gegliederte Systemsteifigkeitsmatrix K ergibt sich aus:

$$P = A^T K_T V_T$$

$$= A^T K_T A V$$

$$= K V \quad \text{d.h.}$$

$$K = A^T K_T A .$$

4.2. Umordnung der Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix K repräsentiert die Steifigkeitsverhältnisse eines freien Systems, also ohne Auflager. Das setzt voraus, daß der Belastungsvektor P ein Gleichgewichtssystem bilden muß. Bei einer endlichen Anzahl von beliebigen Belastungskomponenten wird also eine bestimmte Anzahl von abhängigen Belastungen (Reaktionen) vorausgesetzt, die mit dem beliebigen Belastungssystem ein Gleichgewichtssystem bilden. Diese abhängigen Reaktionen bestehen im räumlichen Fall aus mindestens 6 Komponenten und entsprechen den 6 Festkörperfreiheitsgraden. Diese Abhängigkeiten lassen K singulär werden und müssen deshalb eliminiert werden.

Der Belastungsvektor P wird deshalb in einen Lastvektor P_L für eingeprägte Lasten und in einen Reaktionsvektor für Auflagerlasten P_R geordnet, desgleichen K und V :

$$\begin{pmatrix} P_L \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für die auf die wirkliche Anzahl reduzierten unbekanntenen Knotenverformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_L &= K_{LL} V && \text{d.h.} \\ V &= K_{LL}^{-1} P_L . \end{aligned}$$

Die Auflagerreaktionen ergeben sich dann aus :

$$P_R = K_{RL} V - K_{RL} K_{LL}^{-1} P_L .$$

Für bekannte, d.h. eingeprägte Knotendeformationen gilt ähnliches:

$$\begin{pmatrix} P_L \\ P_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{L\Delta} \\ K_{\Delta L} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix} ,$$

Δ ist der Vektor der eingepprägten Knotendeformationen,

P_Δ der dazugehörige Belastungsvektor. Die eingepprägten Deformationen können an Auflagern oder beliebigen Systemknoten auftreten. Die unbekanntenen Knotendeformationen ergeben sich dann aus:

$$K_{LL} V = P_L - K_{L\Delta} \Delta .$$

$K_{L\Delta} \Delta$ ist ein fiktiver Belastungsvektor, der am Restsystem die eingepprägten Deformationen simuliert.

Eine weitere Reduktion der Steifigkeitsmatrix, verbunden mit einem Rechenzeitgewinn, wird dann möglich, wenn der Belastungsvektor nicht in allen Positionen besetzt ist:

$$\begin{pmatrix} P_L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LO} \\ K_{OL} & K_{OO} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_L \\ V_O \end{pmatrix}.$$

V_L ist der gesuchte Deformationsvektor, der mit dem Belastungsvektor P_L korrespondiert, in Richtung des Deformationsvektors V_O greifen keine Lasten an. Es ergibt sich für :

$$V_O = - K_{OO}^{-1} K_{OL} V_L .$$

Auflösen nach P_L führt auf:

$$\begin{aligned} P_L &= K_{LL} V_L - K_{LO} K_{OO}^{-1} K_{OL} V_L \\ &= (K_{LL} - K_{LO} K_{OO}^{-1} K_{OL}) V_L \\ &= K_O V_L . \end{aligned}$$

$K_O = K_{LL} - K_{LO} K_{OO}^{-1} K_{OL}$ ist die kondensierte Steifigkeitsmatrix des Systems. Somit wird

$$V_L = K_O^{-1} P_L ,$$

V_O ergibt sich durch Rückeinsetzen.

Der Hauptgrund dieser Kondensation ist, die Größe der zu invertierenden Matrizen gering zu halten, um somit das Problem der Speicherplatzkapazität, die auch bei modernen schnellen Rechenanlagen einen Engpaß darstellt, zu umgehen und größere Systeme bearbeiten zu können.

4.3. Direktes Steifigkeitsverfahren

Das direkte Steifigkeitsverfahren vermeidet die Multiplikation großer Zuordnungsmatrizen und ordnet die Glieder der transformierten Elementsteifigkeitsmatrizen direkt in das Schema der Systemsteifigkeitsmatrix ein, indem die sich überlappenden Terme addiert werden. Es werden nur die schon transformierten Elementsteifigkeitsmatrizen benutzt, so daß die Elementenddeformationen mit den Knotendeformationen koinzidieren.

Ein Programmschema zur Erzeugung der Gesamtsteifigkeitsmatrix wird durch folgenden FORTRAN-Programmabschnitt umrissen:

```

DO 10 K = 1, NUMEL                                1
I = STABCODE (K,1)                                2
J = STABCODE (K,2)                                3
CALL STAB (I, J, S)                                4
LM (1) = 6 . I - 6                                 5
LM (2) = 6 . J - 6                                 6
DO 20 M1 = 1,2                                     7
DO 20 M2 = 1,6                                     8
I1= LM (M1) + M2                                   9
J1= 6 . M1 - 6 + M2                               10
DO 20 N1 = 1,2                                     11
DO 20 N2 = 1,6                                     12
I2= LM (N1) + N2                                   13
J2= 6 . N1 - 6 + N2                               14
K (I1, I2) = K (I1, I2) + S (J1, J2)             15
20 CONTINUE                                        16
10 CONTINUE-----17-----

```

NUMEL = Anzahl der Elemente (1)
I, J = Knotennummer des Stabes K (2,3)
STAB = SUBROUTINE zur Erzeugung der transformierten Elementsteifigkeitsmatrix S (12, 12) (4)
LM = Zählgröße für die 6 Freiheitsgrade je Knoten (5,6)
K = Systemsteifigkeitsmatrix (15)

5. Auflösung nach den unbekanntenen Knotendeformationen

Das Auflösungsverfahren wird so gewählt, daß Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden schnell und unter optimaler Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Speicherplatzes berechenbar sind. Es wird deshalb bei der Aufstellung der Systemsteifigkeitsmatrix von ihrem Bandcharakter Gebrauch gemacht. Das Band in der Steifigkeitsmatrix entsteht dadurch, daß sich nur Deformationen benachbarter Knoten beeinflussen. Durch geschickte Reihenfolge der Knotennummern läßt sich ein enges Band herstellen; die Bandweite ist proportional der Differenz der benachbarten Knotennummern.

Die halbe Bandbreite MBAND ist definiert durch die maximale Anzahl der Matrixelemente einer Reihe, gezählt von der Diagonalen bis zum äußersten Element, welches ungleich Null ist. Da die Steifigkeits-

matrix symmetrisch ist, wird aus Gründen der Speicherplatzersparnis nur die obere Hälfte der Matrix benutzt, das zu untersuchende Band kann sich somit auf die halbe Bandbreite beschränken. Die in Bandform geschriebene Steifigkeitsmatrix K nimmt dann z.B. folgende Form an:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45}^T & K_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{33} & K_{34} & 0 \\ K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{55} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



 halbe Bandbreite = MBAND

wobei $K_{11} \dots K_{55}$ Untermatrizen sein können. Die Auflösung des Gleichgewichtssystems erfolgt mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Dieses Verfahren ermöglicht keine Matrixinversion, bedarf aber nur geringen Aufwandes. Sein Prinzip besteht darin, daß durch Elimination sukzessive immer kleinere Gleichungssysteme erzeugt werden, die dann durch Rückeinsetzung der schon bekannten Glieder gelöst werden.

Eine weitere Optimierung hinsichtlich des notwendigen Speichers im Rechnerkern wird dann möglich, wenn man beachtet, daß das System zeilenweise bearbeitet wird und daß die miteinander korrespondierenden Deformationsgrößen (angezeigt durch Bandwerte ungleich Null) durch die Bandbreite begrenzt werden. Deshalb ist es ausreichend, im Kernspeicher mit einer quadratischen Matrix der Dimension MBAND zu operieren. Nur die jeweils benötigten Teile der Matrix werden in den Kern transferiert, während die Restmatrix in Hintergrundspeichern aufbewahrt wird.

6. Auflösung nach den unbekanntem Randschnittlasten

Nachdem die Knotendeformationen V aus der Beziehung $K \cdot V = P$ ermittelt sind, können die Randschnittlasten q bestimmt werden. Aus

$$q = k \cdot u \quad \text{folgt mit} \quad u = T \cdot v$$

$$q = k \cdot T \cdot v .$$

Dazu werden elementweise die Matrizenprodukte $k \cdot T$ mit den zugehörigen Knotendeformationsvektoren v multipliziert.

Bei Stabelementen, die eine zusätzliche Belastung zwischen den Knoten aufweisen, ist zu beachten, daß sich der vollständige Betrag der Randschnittlasten des Stabes durch Überlagerung der Randschnittlasten q und der Starrenschnittlasten ergibt.

Die Starreinspannschnittlasten sind identisch mit den Werten des Belastungsvektors P . Die Starrendmomente X_i, X_j ergeben sich beispielsweise je nach Lastfall aus der Beziehung:

$$X_i = \frac{4}{l} \left(\frac{\alpha_j}{2} - \alpha'_i \right),$$

$$X_j = \frac{4}{l} \left(\frac{\alpha_i}{2} - \alpha'_j \right),$$

wobei α_i und α_j die jeweiligen Knotenverdrehungen bei gelenkiger Lagerung sind. Die Starreinspannmomente für einige häufig vorkommende Lastfälle sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle von Starreinspannmomenten

	$\alpha'_i = EJ \alpha_i$ $\alpha'_j = EJ \alpha_j$
	$\alpha'_i = P \cdot b(l^2 - b^2)/(6I)$ $\alpha'_j = P \cdot a(l^2 - a^2)/(6I)$
	$\alpha'_i = pbc [4a(b+l) - c^2]/(24I)$ $\alpha'_j = pbc [4b(a+l) - c^2]/(24I)$
	$\alpha'_i = -M(3b^2 - l^2)/(6I)$ $\alpha'_j = -M(l^2 - 3a^2)/(6I)$
	$\alpha'_i = pl^3 \gamma [270(\alpha - \alpha^3) - \gamma^2 (45 - 2\gamma)] / 3240$ $\alpha'_j = pl^3 \gamma [270(\beta - \beta^3) - \gamma^2 (45 + 2\gamma)] / 3240$

II. TEIL

7. Programmsteuerung

7.1. Allgemeines

Das Programm STAB-WERK ist so konzipiert, daß es auch in mittelgroßen Rechenanlagen sinnvoll verwendet werden kann. Bewertet man das Programm allein nach seiner Fähigkeit, statische Systeme mit vielen Unbekannten zu lösen, so ist seine Leistungsfähigkeit nur begrenzt durch die Geschwindigkeit und die Speichermöglichkeit des Rechners.

Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix erfordert nur einen Bruchteil der gesamten Rechenzeit, der Hauptanteil wird beim Lösen des Gleichungssystems benötigt. Das Auflösungsverfahren, welches das Produkt $K^{-1}P$ erzeugt, arbeitet relativ schnell. So wird ein System von ca. 1000 Unbekannten bei einer halben Bandbreite von 54 auf einer Telefunken-Anlage TR 440 in weniger als 2 min gelöst. Das Verfahren arbeitet ohne Pivotsuche, Nullzeilen werden kommentarlos übersprungen. Deshalb ist vom Programm her auch keine sichere Fehlerkontrolle möglich. Als Fehler können auftreten:

- Ungenauigkeiten bei der Auflösung von schlecht konditionierten Matrizen infolge kinematisch labiler Systeme und
- Fehler bei der topologischen Beschreibung des Systems incl. fehlerhafter Dateneingabe.

Die Speichermöglichkeit eines Rechners ist gegeben durch die Kapazität von Kern- und Hintergrundspeicher. Im Hintergrundspeicher müssen alle im Kern jeweils nicht benötigten Daten Platz finden. Der Rechnerkern selbst begrenzt nur über die Bandbreite die Anzahl der Systemfreiheitsgrade, er sollte so ausgelegt sein, daß eine Matrix der Dimension: halbe Bandbreite x Bandbreite = (MBAND . 2 . MBAND) vollständig im Kern verfügbar ist.

Durch geschickte Knotennumerierung (die maximale Knotennummerndifferenz zweier beliebiger Nachbarknoten soll ein Minimum ergeben) läßt sich gegebenenfalls ein größeres System erfassen. Die halbe Bandbreite ergibt sich aus der Knotennummerndifferenz multipliziert mit der Anzahl der Freiheitsgrade der Knoten, hier 6 (im ebenen Fall oder bei räumlichen Gelenksystemen werden die Speicherplätze zwar benutzt, aber nur durch Nullen belegt und bei der Auflösung übersprungen). Überschläglich ergeben sich die Grenzen

des maximal berechenbaren Systems bezüglich des zur Verfügung stehenden Rechnerkernspeichers aus folgender Tabelle:

Knotennummerndifferenz	halbe Bandbreite	Kernspeicherbedarf
9	54	ca. 6K
20	120	ca. 30K
30	180	ca. 65K
40	240	ca. 115K
50	300	ca. 180K.

Hinweis: Das Programm STAB-WERK verfügt über eine interne Bandbreitenoptimierung, welche durch Minimierung der Knotennummern-differenz nach [10] vorgenommen wird.

7.2. Parameter zur Programmsteuerung

Das Programm ist in der problemorientierten Sprache FORTRAN IV formuliert, deshalb ist keine echte dynamische Feldvereinbarung möglich, um die von statischen Systemen bedingte Datenmenge auf die Kapazität des Rechners auszurichten.

Es ist aber vorgesehen, das Programm je nach Problemstellung an den zur Verfügung stehenden Rechner anzupassen. Dazu sind die entsprechenden Anweisungen zur Erzeugung der Parameter im Programm selbst zu verändern.

7.2.1. Bezeichnung der Parameter

NELE maximale Anzahl von Elementen
NKNO maximale Anzahl von Knoten
KNGL maximale halbe Bandbreite
KNBL maximale Bandbreite

7.2.2. Auswechselbare Anweisungen

Im Rechenprogramm sind je nach Bedarf des zu untersuchenden Problems bzw. nach Kapazität des verfügbaren Rechners Anweisungen (Befehle) austauschbar. Es ist zu beachten, daß die Parameter NELE, NKNO, KNGL, KNBL nur die obere Grenze einer Datenmenge angeben. Sollten die aktuell erforderlichen Systemdaten also kleinere Grenzen erfordern, so ist die Änderung dieser Parameter nicht notwendig.

Falls eine Änderung der oberen Feldgrenzen erforderlich wird, sind im Einzelnen folgende Befehle (Anweisungen) auszutauschen (nur die voreingestellten Zahlenwerte werden geändert):

α) Im Hauptprogramm

$\alpha.1$ COMMON A (180,90), B (180)

$\alpha.2$ DIMENSION X (60), Y (60), ... , N CODE (60,6)

1 IX (100,2), ... , N U E (100)

2 AF (100) , ... , R (200)

$\alpha.3$ NELE = 100

$\alpha.4$ NKNO = 60

$\alpha.5$ KNGL = 90

β) Im Unterprogramm STIFF

$\beta.1$ COMMON A (180,90), B (180)

γ) Im Unterprogramm BOUND

$\gamma.1$ COMMON A (180,90)

δ) Im Unterprogramm STRESS

$\delta.1$ COMMON B (180), A (180,90)

ϵ) Im Unterprogramm BANSOL

$\epsilon.1$ COMMON B (180), A (180,90)

Mit den hier aufgeführten Werten sind beispielsweise Systeme folgender maximaler Größerordnung zu erfassen:

Anzahl der Knoten \leq 60

Anzahl der Elemente \leq 100

halbe Bandbreite \leq 90

Es ist zu beachten, daß die Dimensionen der Felder A im Verhältnis 2:1 stehen müssen.

7.3. Programmablauf

Vom Hauptprogramm werden nacheinander folgende Unterprogramme aufgerufen:

DATEN: Einlesen sämtlicher Systemdaten

STIFF: Erzeugen und Abspeichern der Systemsteifigkeitsmatrix

BANSOL: Auflösen nach den unbekanntem Deformationsgrößen
(keine Inversion)

STRESS: Ermittlung der Schnittlasten (Momente, Kräfte)

Im Unterprogramm STIFF werden folgende Unterprogramme aufgerufen:

BOUND: Verarbeiten der Randbedingungen

STAB: Erzeugen der Elementsteifigkeitsmatrix

MATMUL: Matrizenmultiplikation

7.4. Eingabe der Systemdaten

7.4.1. Bezeichnung der Parameter (Parameterliste)

NUMNP (NP)	Anzahl aller Knotenpunkte (1 ... NP)
NUMEL (EL)	Anzahl aller Elemente (1 ... EL)
NUMRA (RA)	Anzahl aller Knoten mit Randbedingungen (1 ... RA) (d.h.: eingeprägte Belastung oder eingeprägte Deformation)
N	Knotennummer
XN	X-Koordinate
YN	Y-Koordinate
ZN	Z-Koordinate
C1	Belastungsbedingung in X-Richtung
C2	Belastungsbedingung in Y-Richtung
C3	Belastungsbedingung in Z-Richtung
C4	Belastungsbedingung in DREH-X-Richtung
C5	Belastungsbedingung in DREH-Y-Richtung
C6	Belastungsbedingung in DREH-Z-Richtung (d.h.: C = 1 : festes Auflager C = 0 : eingeprägte Belastung oder Deformation)
CF	additive Konstante für: Fläche
CIY	additive Konstante für: Trägheitsmoment IY
CIZ	additive Konstante für: Trägheitsmoment IZ
CIT	additive Konstante für: Torsionsträgheitsmoment IT
CE	additive Konstante für: Elastizitätsmodul E
CKAY	additive Konstante für: Schubverteilungszahl κ_y
CKAZ	additive Konstante für: Schubverteilungszahl κ_z
CNUE	additive Konstante für: Querdehnungszahl μ
CAF	additive Konstante für: Verdrehung der Querschnittsträgheitsachsen
NE	Elementnummer
N1	Knotennummer des Elements
N2	Knotennummer des Elements
F	Element-Fläche
IY	Element-Trägheitsmoment IY
IZ	Element-Trägheitsmoment IZ
IT	Element-Torsionsträgheitsmoment
E	Element-Elastizitätsmodul
KAY	Element-Schubverteilungszahl κ_y
KAZ	Element-Schubverteilungszahl κ_z

NUE	Element-Querdehnungszahl μ
AF	Element-Verdrehung der Querschnittsträgheitsachsen
PX	Knotenlast in X-Richtung
PY	Knotenlast in Y-Richtung
PZ	Knotenlast in Z-Richtung
T	Knotenmoment in X (Torsion)
MY	Knotenmoment in Y Richtung
MZ	Knotenmoment in Z Richtung

7.4.2. Eingabeformalismus zur Dateneingabe (vgl. Formblatt 7.4.3 und Beispiel 7.4.4)

1. Überschrift (max. 72 Alphanumerische Zeichen)
2. Eingabe der Anzahl der Knotenpunkte NP / der Elemente EL/ der Knoten mit Randbedingungen RA /. Knoten mit Randbedingungen sind Knoten mit eingepprägten Belastungen oder mit eingepprägten Deformationen.

FORMAT: 3 I 4 // (NP, EL, RA)

3. Eingabe der Knotendaten: Knotennummer N / X-Koordinaten X(N) / Y-Koordinate Y(N) / Z-Koordinate Z(N) / Knotencode in X (Kraft oder Weg) C1 / Knotencode in Y (Kraft oder Weg) C2 / Knotencode in Z (Kraft oder Weg) C3 / Knotencode in X (Moment oder Drehung) C4 / Knotencode in Y (Moment oder Drehung) C5 / Knotencode in Z (Moment oder Drehung) C6 /

Es ist zu beachten, daß die Knotennummern fortlaufend von 1 bis NP zu nummerieren sind. Die Knotencodes C1, ..., C6 können die Werte 1, 0 bzw. Blank, -1 annehmen. Für die jeweilige Belastungsrichtung bedeutet

- 1 \triangle eingepprägte Deformation (Auflagerbedingung)
- 0 \triangle eingepprägte Belastung
- 1 \triangle Biegegelenk (gilt nur für C4, C5, C6: je nach Koordinatensystem)

FORMAT: 3 I 4 , 3 F 10.2, 6 I 2 // N, ID, ID, X, Y, Z, C1, C2, C3, C4, C5, C6

ID wird nur formal benutzt, es können beliebige Werte eingegeben werden.

Es müssen NP Eingabekarten oder -zeilen mit Knotendaten vorliegen.

4. Eingabe von konstanten Elementdaten

In dieser Zeile werden konstante Elementdaten eingelesen:
Flächenkonstante CF / konstantes Trägheitsmoment in Y: CIY /

konstantes Trägheitsmoment in Z: CIZ / konstantes Torsions-
trägheitsmoment CIT / Elastizitätsmodulkonstante CE / Schub-
verteilungskonstante für Wege in Y: CKAY / Schubverteilungskon-
stante für Wege in Z: CKAZ / Querdehnungskonstante CNUE / Quer-
schnittsverdrehungskonstante CAF (vgl. 7.6) /

FORMAT: 3 I 4, 5 F 10.2, 3 F 4.2, F 6.2 // I1, I2, I3, CF,
CIY, CIZ, CIT, CE, CKAY, CKAZ, CNUE, CAF

I1, I2, I3 werden nur formal benutzt und können durch beliebige
Werte dargestellt werden.

5. Eingabe der Elementdaten

Es müssen EL Eingabekarten oder -zeilen mit Elementdaten vor-
liegen.

Eingelesen wird jeweils:

Elementnummer NE / Elementknotennummer N1 / Elementknotennummer N2 /
Fläche F / Trägheitsmoment IY / Trägheitsmoment IZ / Torsions-
trägheitsmoment IT / Elastizitätsmodul E / Schubverteilungszahl
für Wege in Y: KAY / Schubverteilungszahl für Wege in Z: KAZ /
Querdehnungszahl NUE / Querschnittsverdrehung AF (vgl. 7.6) /

Nicht benötigte Werte werden durch Null oder Blank übersprungen.

FORMAT: 3 I 4, 5 F 10.2, 3 F 4.2, F 6.2 // NE, N1, N2, F,
IY, IZ, IT, E, KAY, KAZ, NUE, AF

Für die Elementdaten F, ..., AF sind nur dann Zahlenwerte an-
zugeben, wenn sie sich von den jeweiligen konstanten Werten
CF, ..., CAF unterscheiden. Die jeweiligen Querschnittsdaten
werden dann aus der Summe der konstanten Elementdaten (Einga-
be Nr. 4) und der Querschnittsdaten (Eingabe Nr. 5) gebildet,
d.h. bei der Eingabe Nr. 5 sind nur Differenzwerte einzulesen.

Nicht benötigte Werte werden durch Null bzw. Blank übersprungen.

6. Eingabe der Belastungen und der Deformationen

Es müssen RA Eingabekarten oder -zeilen mit Belastungen bzw. De-
formationen vorliegen. Eingelesen wird jeweils:

Knotennummer N / Knotenlast oder -weg in X: PX / Knotenlast oder
-weg in Y: PY / Knotenlast oder -weg in Z: PZ / Knotenmoment oder
-drehung in X: T / Knotenmoment oder -drehung in Y: MY / Knoten-
moment oder -drehung in Z: MZ /

FORMAT: 3 I 4, 6 F 10.2 // N, ID, ID, PX, PY, PZ, T, MY, MZ

ID wird nur formal benutzt, es können beliebige Werte eingege-

ben werden. Nicht vorhandene Belastungswerte werden durch Null bzw. Blank übersprungen.

Ob eine eingeprägte Knotenbelastung oder -deformation vorliegt, hängt vom jeweils maßgeblichen Knotencode C1, ..., C6 ab. Hat der maßgebende Knotencode den Wert 0 liegt eine Belastung vor, hat er den Wert 1 liegt eine Deformation vor.

Für starre Auflager muß der Knotencode den Wert 1 (Eingabe Nr. 3) und die Deformation den Wert 0 (Eingabe Nr. 6) haben.

7.4.3

Schreibweise von Buchstaben und Ziffern: **ABCDEFGHIJKLMNØPQRSTU VWXYZ** **0123456789**

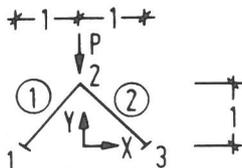
BAM-BERLIN		Ablochliste Formblatt										Code:			
	bearbeitet/Telefon	gelocht	geprüft	Aufgabe:										Liste besteht aus Blatt	
Name				Eingabe Programm STAB-WERK										Blatt Nr.:	
Datum															
1	UEBERSCHRIFT														
2	NP	EL	RA												
3.1	N	±	XN ±	YN ±	ZN	C1	C2	C3	C4	C5	C6				
3.NP	NP														
4			CF	CIY	CIZ	CIT	CE	C.KAY	C.KAZ	C.NUE	C.AF				
5.1	NE	N1	N2	F	IY	IZ	IT	E	KAY	KAZ	NUE	AF			
5.EL	NE	N1	N2	F	IY	IZ	IT	E	KAY	KAZ	NUE	AF			
6.1	N			PX	PY	PZ	T	MY		MZ					
6.RA	NRA			PX	PY	PZ	T	MY		MZ					

BAM 3162

7.4.4. Beispiel (ebenes Zweibein)

Als Beispiel zur Dateneingabe dient ein ebenes Zweibein in 4 verschiedenen Systemversionen:

System 1

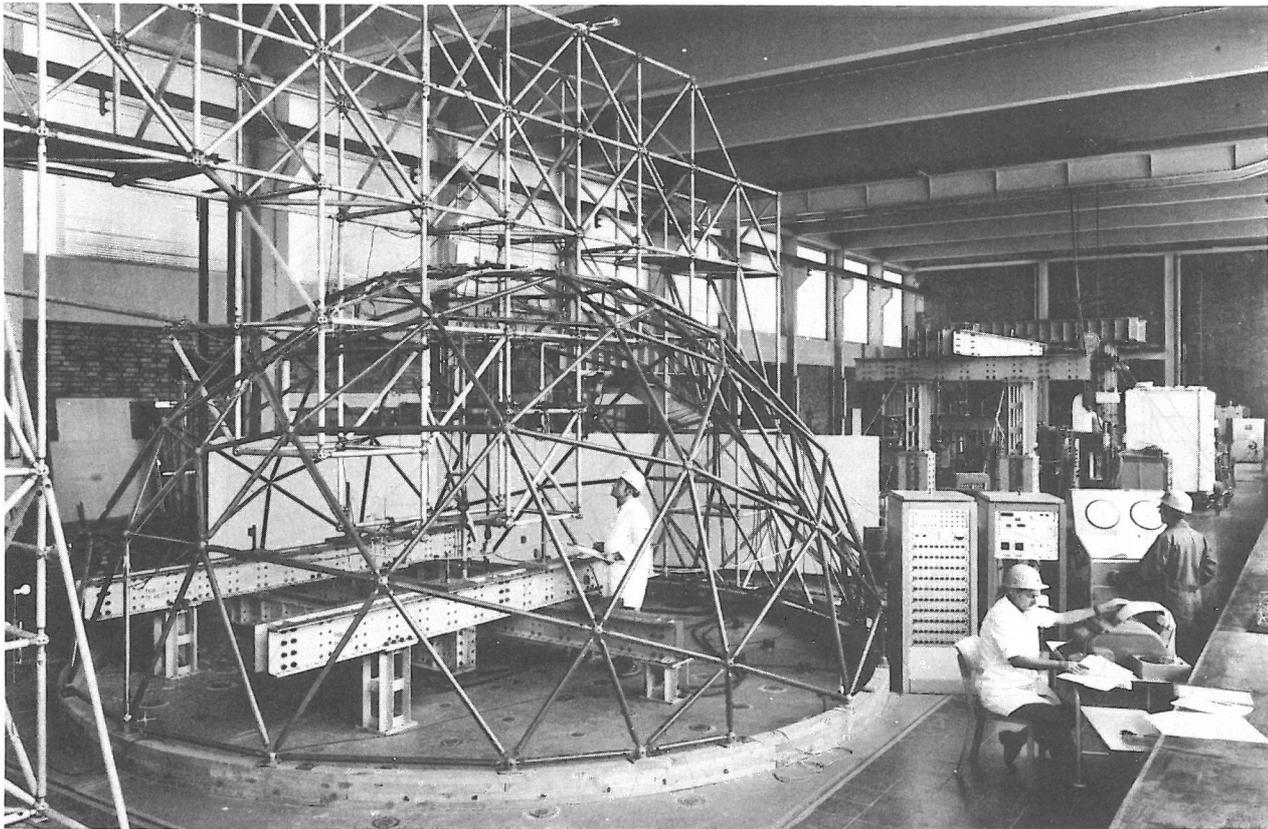


$$\begin{aligned}
 E &= 2\,100\,000 \text{ kp/cm}^2 \\
 F &= 10 \text{ cm}^4 \\
 IZ &= 0 \text{ cm} \\
 P &= 1\,000 \text{ kp}
 \end{aligned}$$

System 1 ist identisch mit einem ebenen Gelenkzweibein.

7.5.1. Beispiel einer Netzwerkkuppel

Als Beispiel zur Ausgabe von Daten und Ergebnissen soll eine Netzwerkkuppel in MERO-Bauweise dienen.

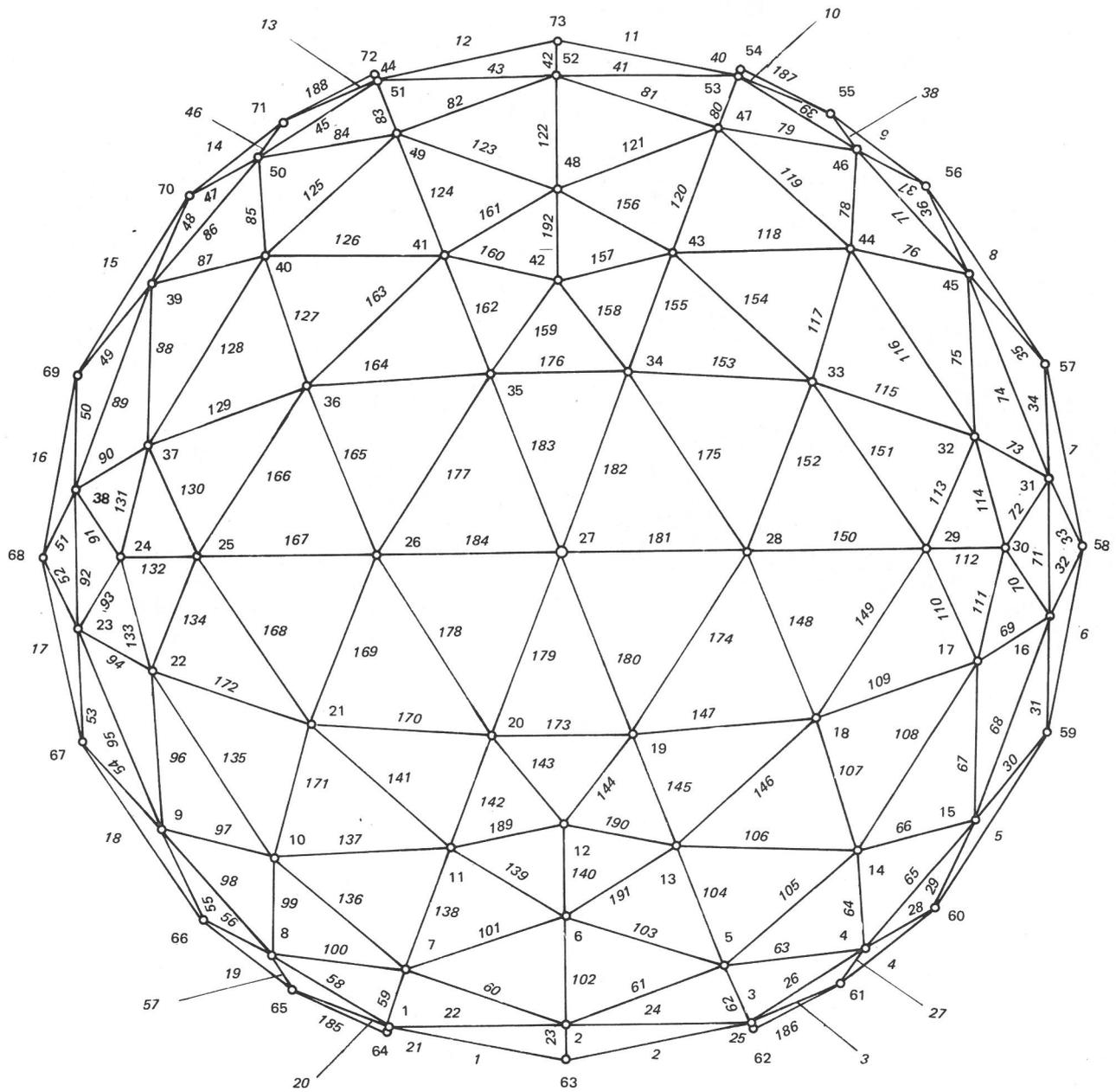


Experimentelle Untersuchung einer Netzwerkkuppel
in der BAM

Da alle 73 Knoten des Systems auf einer Kugelfläche liegen, werden die Lasten durch Normalkräfte bzw. Membrankräfte abgetragen. Die Netzkuppel wurde in der BAM experimentell untersucht, für einige Lastfälle wurde ein Vergleich mit den berechneten Werten durchgeführt. Die Zuordnung (Topologie) der 73 Knoten und 192 Stäbe geht aus einer Grundrißdarstellung des Systems hervor:

Knotennummer 1, 2, 3, 4 ...

Stabnummer 1, 2, 3, 4 ...



Grundriß und Topologie einer Netzwerkkuppel

Es folgt die Ausgabe der Eingabewerte:

BERECHNUNG EINER NETZWERKKUPPEL *****
 ANZAHL DER KNOTENPUNKTE----- 73
 ANZAHL DER ELEMENTE-----192
 ANZAHL DER KNOTEN M. RANDBED.-- 1

KNOTEN NR.	X-KOORDINATE (CM)	Y-KOORDINATE (CM)	Z-KOORDINATE (CM)	RANDBEDINGUNGEN (U= FESSEL)			IN RICHTUNG		
				X	Y	Z	PHIX	PHIY	PHIZ
1	-123.740	-323.970	47.270	0	0	0	0	0	0
2	0.0	-326.960	124.890	0	0	0	0	0	0
3	123.740	-323.970	47.270	0	0	0	0	0	0
4	200.020	-276.700	76.480	0	0	0	0	0	0
5	108.170	-283.160	175.000	0	0	0	0	0	0
6	0.0	-247.490	247.490	0	0	0	0	0	0
7	-108.170	-283.160	175.000	0	0	0	0	0	0
8	-200.220	-276.700	76.480	0	0	0	0	0	0
9	-283.160	-175.000	108.170	0	0	0	0	0	0
10	-202.070	-202.070	202.070	0	0	0	0	0	0
11	-76.480	-200.220	276.700	0	0	0	0	0	0
12	0.0	-184.010	297.730	0	0	0	0	0	0
13	76.480	-200.220	276.700	0	0	0	0	0	0
14	202.070	-202.070	202.070	0	0	0	0	0	0
15	283.160	-175.000	108.170	0	0	0	0	0	0
16	323.970	-47.270	123.740	0	0	0	0	0	0
17	276.700	-76.480	200.220	0	0	0	0	0	0
18	175.000	-108.170	283.160	0	0	0	0	0	0
19	47.270	-123.740	323.970	0	0	0	0	0	0
20	-47.270	-123.740	323.970	0	0	0	0	0	0
21	-175.000	-108.170	283.160	0	0	0	0	0	0
22	-276.700	-76.480	200.220	0	0	0	0	0	0
23	-323.970	-47.270	123.740	0	0	0	0	0	0
24	-297.730	0.0	184.010	0	0	0	0	0	0
25	-247.490	0.0	247.490	0	0	0	0	0	0
26	-124.890	0.0	326.960	0	0	0	0	0	0
27	0.0	0.0	350.000	0	0	0	0	0	0
28	124.890	0.0	326.960	0	0	0	0	0	0
29	247.490	0.0	247.490	0	0	0	0	0	0
30	297.730	0.0	184.010	0	0	0	0	0	0
31	323.970	47.270	123.740	0	0	0	0	0	0
32	276.700	76.480	200.220	0	0	0	0	0	0
33	175.000	108.170	283.160	0	0	0	0	0	0
34	47.270	123.740	323.970	0	0	0	0	0	0
35	-47.270	123.740	323.970	0	0	0	0	0	0
36	-175.000	108.170	283.160	0	0	0	0	0	0
37	-276.700	76.480	200.220	0	0	0	0	0	0
38	-323.970	47.270	123.740	0	0	0	0	0	0
39	-283.160	175.000	108.170	0	0	0	0	0	0

KNOTEN NR.	X-KOORDINATE (CM)	Y-KOORDINATE (CM)	Z-KOORDINATE (CM)	RANDBEDINGUNGEN (U= FESSEL)			IN RICHTUNG		
				X	Y	Z	PHIX	PHIY	PHIZ
40	-202.070	202.070	202.070	0	0	0	0	0	0
41	-76.480	200.220	276.700	0	0	0	0	0	0
42	0.0	184.010	297.730	0	0	0	0	0	0
43	76.480	200.220	276.700	0	0	0	0	0	0
44	202.070	202.070	202.070	0	0	0	0	0	0
45	283.160	175.000	108.170	0	0	0	0	0	0
46	200.220	276.700	76.480	0	0	0	0	0	0
47	108.170	283.160	175.000	0	0	0	0	0	0
48	0.0	247.490	247.490	0	0	0	0	0	0
49	-108.170	283.160	175.000	0	0	0	0	0	0
50	-200.220	276.700	76.480	0	0	0	0	0	0
51	-123.740	323.970	47.270	0	0	0	0	0	0
52	0.0	326.960	124.890	0	0	0	0	0	0
53	123.740	323.970	47.270	0	0	0	0	0	0
54	124.890	326.960	0.0	1	1	1	1	1	1
55	184.010	297.730	0.0	1	1	1	1	1	1
56	247.490	247.490	0.0	1	1	1	1	1	1
57	326.960	124.890	0.0	1	1	1	1	1	1
58	350.000	0.0	0.0	1	1	1	1	1	1
59	326.960	-124.890	0.0	1	1	1	1	1	1
60	247.490	-247.490	0.0	1	1	1	1	1	1
61	184.010	-297.730	0.0	1	1	1	1	1	1
62	124.890	-326.960	0.0	1	1	1	1	1	1
63	0.0	-350.000	0.0	1	1	1	1	1	1
64	-124.890	-326.960	0.0	1	1	1	1	1	1
65	-184.010	-297.730	0.0	1	1	1	1	1	1
66	-247.490	-247.490	0.0	1	1	1	1	1	1
67	-326.960	-124.890	0.0	1	1	1	1	1	1
68	-350.000	0.0	0.0	1	1	1	1	1	1
69	-326.960	124.890	0.0	1	1	1	1	1	1
70	-247.490	247.490	0.0	1	1	1	1	1	1
71	-184.010	297.730	0.0	1	1	1	1	1	1
72	-124.890	326.960	0.0	1	1	1	1	1	1
73	0.0	350.000	0.0	1	1	1	1	1	1

STAB NR.	KNOTENPUNKTE		FLAECHE (CM**2)	TRAEGERITSMOMENTE			E-MODUL (KP/CM**2)	NUJ	ROT.	KAY	KAZ
				IY	IZ (CM**4)	IT					
1	1	63	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
2	3	63	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
3	3	61	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
4	60	61	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
5	60	59	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
6	59	58	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
7	58	57	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
8	57	56	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
9	56	55	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
10	55	53	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
11	53	73	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
12	73	51	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
13	51	71	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
14	71	70	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
15	70	69	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
16	69	68	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
17	68	67	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
18	67	66	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
19	66	65	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
20	65	1	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
21	1	64	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
22	1	2	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
23	2	63	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
24	2	3	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
25	3	62	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
26	3	4	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
27	4	61	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
28	4	60	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
29	15	60	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
30	15	59	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
31	16	59	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
32	16	58	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
33	31	58	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
34	31	57	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
35	45	57	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
36	45	56	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
37	46	56	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
38	46	55	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
39	46	53	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
177	26	35	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
178	20	26	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
179	20	27	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
180	19	27	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
181	27	28	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
182	27	34	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
183	27	35	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
184	26	27	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
185	64	65	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
186	61	62	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
187	54	55	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
188	71	72	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
189	11	12	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
190	12	13	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
191	6	13	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0
192	42	48	2.04	0.0	0.0	0.0	2100000.00	0.300	0.0	0.0	0.0

Die Knotendeformationen und die in 3. vorzeichenmäßig definierten Stabbrandschnittlasten werden für eine senkrechte Belastung des Zenitknotens bei einer Last von 1000 kp ausgegeben:

KNOTENNR.	PX---VX		KNOTENLASTEN PY---VY		ODER KNOTENVERSCHIEBUNGEN PZ---VZ		MX---PHIX		MY---PHIY		MZ---PHIZ	
	L=		L=		L=		L=		L=		L=	
27	L=	0.0	L=	0.0	L=	-1000.000L=	L=	0.0	L=	0.0	L=	0.0

KNOTEN NR.	WEGE (CM)			DREHUNGEN		
	WEG-X	WEG-Y	WEG-Z	DREH-X	DREH-Y	DREH-Z
1	-0.001942	-0.005304	-0.000226	0.0	0.0	0.0
2	-0.000001	-0.009054	-0.000943	0.0	0.0	0.0
3	0.001938	-0.005292	-0.000227	0.0	0.0	0.0
4	0.003986	-0.006546	-0.000099	0.0	0.0	0.0
5	0.003341	-0.012556	-0.000508	0.0	0.0	0.0
6	-0.000000	-0.016099	-0.000817	0.0	0.0	0.0
7	-0.003341	-0.012557	-0.000509	0.0	0.0	0.0
8	-0.003974	-0.006524	-0.000112	0.0	0.0	0.0
9	-0.002098	-0.001989	-0.000974	0.0	0.0	0.0
10	-0.001989	-0.006036	-0.003274	0.0	0.0	0.0
11	-0.002949	-0.017226	-0.001826	0.0	0.0	0.0
12	0.0	-0.013979	-0.007437	0.0	0.0	0.0
13	0.002949	-0.017225	-0.001827	0.0	0.0	0.0
14	0.001997	-0.006043	-0.003264	0.0	0.0	0.0
15	0.002085	-0.001981	-0.000977	0.0	0.0	0.0
16	0.004646	-0.000673	-0.000555	0.0	0.0	0.0
17	-0.000167	-0.000538	-0.004579	0.0	0.0	0.0
18	-0.002382	-0.003077	-0.012430	0.0	0.0	0.0
19	0.005710	-0.021633	-0.002476	0.0	0.0	0.0
20	-0.005710	-0.021633	-0.002476	0.0	0.0	0.0
21	0.002381	-0.003077	-0.012429	0.0	0.0	0.0
22	0.000167	-0.000539	-0.004580	0.0	0.0	0.0
23	-0.004645	-0.000675	-0.000556	0.0	0.0	0.0
24	-0.004295	0.000001	-0.001811	0.0	0.0	0.0
25	-0.009159	0.000001	0.000282	0.0	0.0	0.0
26	-0.013667	0.000001	-0.009678	0.0	0.0	0.0
27	-0.000000	0.000001	-0.249562	0.0	0.0	0.0
28	0.013666	0.000001	-0.009678	0.0	0.0	0.0
29	0.009159	0.000002	0.000283	0.0	0.0	0.0
30	0.004294	0.000001	-0.001810	0.0	0.0	0.0
31	0.004646	0.000676	-0.000556	0.0	0.0	0.0
32	-0.000167	0.000541	-0.004580	0.0	0.0	0.0
33	-0.002382	0.003079	-0.012429	0.0	0.0	0.0
34	0.005710	0.021635	-0.002477	0.0	0.0	0.0
35	-0.005710	0.021635	-0.002477	0.0	0.0	0.0
36	0.002381	0.003079	-0.012430	0.0	0.0	0.0
37	0.000167	0.000540	-0.004581	0.0	0.0	0.0
38	-0.004646	0.000675	-0.000556	0.0	0.0	0.0
39	-0.002099	0.001990	-0.000974	0.0	0.0	0.0
40	-0.001989	0.006038	-0.003274	0.0	0.0	0.0
41	-0.002949	0.017228	-0.001827	0.0	0.0	0.0
42	-0.000000	0.013982	-0.007438	0.0	0.0	0.0

KNOTEN NR.	WEGE (CM)			DREHUNGEN		
	WEG-X	WEG-Y	WEG-Z	DREH-X	DREH-Y	DREH-Z
43	0.002948	0.017228	-0.001827	0.0	0.0	0.0
44	0.001989	0.006038	-0.003274	0.0	0.0	0.0
45	0.002099	0.001990	-0.000974	0.0	0.0	0.0
46	0.003975	0.006526	-0.000112	0.0	0.0	0.0
47	0.003341	0.012559	-0.000510	0.0	0.0	0.0
48	-0.000000	0.016101	-0.000819	0.0	0.0	0.0
49	-0.003341	0.012559	-0.000510	0.0	0.0	0.0
50	-0.003975	0.006526	-0.000112	0.0	0.0	0.0
51	-0.001943	0.005306	-0.000226	0.0	0.0	0.0
52	0.0	0.009056	-0.000944	0.0	0.0	0.0
53	0.001943	0.005306	-0.000226	0.0	0.0	0.0
54	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
55	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
56	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
57	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
58	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
59	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
60	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
61	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
62	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
63	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
64	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
65	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
66	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
67	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
68	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
69	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
70	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
71	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
73	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

ELEM. NR.	KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)		KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)	
		NX	QY	QZ	T	MY	MZ		NX	QY	QZ	T	MY	MZ
1	1	-22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	63	22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
2	3	-21.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	63	21.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
3	3	-7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	61	7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
4	60	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	61	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
5	60	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	59	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
6	59	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	58	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
7	58	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	57	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
8	57	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	56	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
9	56	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	55	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
10	55	-7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	53	7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
11	53	-22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	73	22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
12	73	-22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	51	22.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
13	51	-7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	71	7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
14	71	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	70	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
15	70	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	69	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
16	69	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	68	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
17	68	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	67	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
18	67	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	66	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
19	66	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	65	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
20	65	-7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	1	7.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
21	1	55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	64	-55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
22	1	-39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	2	39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
23	2	87.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	63	-87.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
24	2	-39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	3	39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
25	3	55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	62	-55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
26	3	-48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	4	48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
27	4	53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	61	-53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
28	4	3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	60	-3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
29	15	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	60	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
30	15	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	59	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
31	16	27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	59	-27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
32	16	37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	58	-37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
33	31	37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	58	-37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
34	31	27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	57	-27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
35	45	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	57	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
36	45	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	56	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
37	46	3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	56	-3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
38	46	53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	55	-53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
39	46	-48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	53	48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
40	53	55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	54	-55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
41	52	-39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	53	39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0

ELEM. NR.	KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)		KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)	
		NX	QY	QZ	T	MY	MZ		NX	QY	QZ	T	MY	MZ
42	52	87.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	73	-87.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
43	51	-39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	52	39.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
44	51	55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	72	-55.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
45	50	-48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	51	48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
46	50	53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	71	-53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
47	50	3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	70	-3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
48	39	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	70	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
49	39	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	69	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
50	38	27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	69	-27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
51	38	37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	68	-37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
52	23	37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	68	-37.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
53	23	27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	67	-27.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
54	9	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	67	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
55	9	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	66	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
56	8	3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	66	-3.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
57	8	53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	65	-53.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
58	1	-48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	8	48.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
59	1	83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	7	-83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
60	2	-61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	7	61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
61	2	-61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	5	61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
62	3	83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	5	-83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
63	4	-14.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	5	14.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
64	4	73.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	14	-73.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
65	4	-65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	15	65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
66	14	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	15	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
67	15	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	17	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
68	15	-65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	16	65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
69	16	40.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	17	-40.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
70	16	23.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	30	-23.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
71	16	-61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	31	61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
72	30	23.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	31	-23.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
73	31	40.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	32	-40.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
74	31	-65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	45	65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
75	32	41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	45	-41.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
76	44	26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	45	-26.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
77	45	-65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	46	65.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
78	44	73.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	46	-73.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
79	46	-14.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	47	14.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
80	47	83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	53	-83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
81	47	-61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	52	61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
82	49	-61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	52	61.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0
83	49	83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	51	-83.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0

ELEM. NR.	KN. NR.	KRAEFTE (KP)			MOMENTE (KP*CM)			KN. NR.	KRAEFTE (KP)			MOMENTE (KP*CM)		
		NX	QY	QZ	T	MY	MZ		NX	QY	QZ	T	MY	MZ
84	49	-14.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	50	14.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
85	40	73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	50	-73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
86	39	-65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	50	65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
87	39	26.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	40	-26.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
88	37	41.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	39	-41.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
89	38	-65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	39	65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
90	37	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	38	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
91	24	23.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	38	-23.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
92	23	-61.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	38	61.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
93	23	23.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	24	-23.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
94	22	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	23	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
95	9	-65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	23	65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
96	9	41.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	22	-41.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
97	9	26.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	10	-26.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
98	8	-65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	9	65.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
99	8	73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	10	-73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
100	7	-14.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	8	14.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
101	6	-90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	7	90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
102	2	109.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	6	-109.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
103	5	-90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	6	90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
104	5	120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	13	-120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
105	5	-87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	14	87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
106	13	7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	14	-7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
107	14	92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	18	-92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
108	14	-107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	17	107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
109	17	81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	18	-81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
110	17	1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	29	-1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
111	17	-99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	30	99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
112	29	73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	30	-73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
113	29	1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	32	-1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
114	30	-99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	32	99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
115	32	81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	33	-81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
116	32	-107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	44	107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
117	33	92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	44	-92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
118	43	7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	44	-7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
119	44	-87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	47	87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
120	43	120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	47	-120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
121	47	-90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	48	90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
122	48	109.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	52	-109.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
123	48	-90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	49	90.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
124	41	120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	49	-120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
125	40	-87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	49	87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	

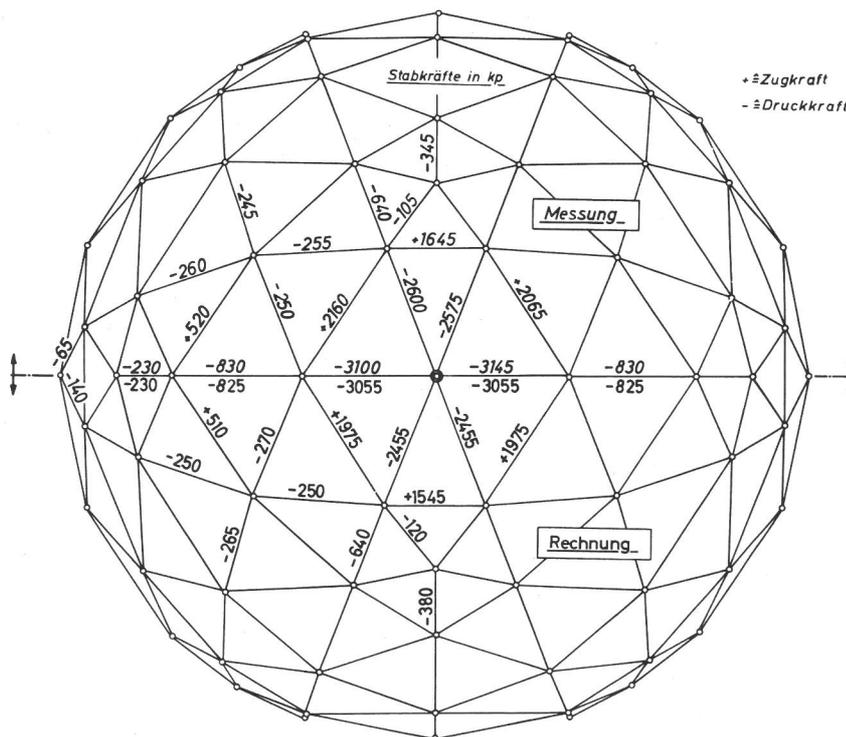
ELEM. NR.	KN. NR.	KRAEFTE (KP)			MOMENTE (KP*CM)			KN. NR.	KRAEFTE (KP)			MOMENTE (KP*CM)		
		NX	QY	QZ	T	MY	MZ		NX	QY	QZ	T	MY	MZ
126	40	7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	41	-7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
127	36	92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	40	-92.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
128	37	-107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	40	107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
129	36	81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	37	-81.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
130	25	1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	37	-1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
131	24	-99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	37	99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
132	24	73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	25	-73.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
133	22	-99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	24	99.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
134	22	1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	25	-1.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
135	10	-107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	22	107.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
136	7	-87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	10	87.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
137	10	7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	11	-7.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
138	7	120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	11	-120.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
139	6	-68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	11	68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
140	6	129.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	12	-129.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
141	11	-167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	21	167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
142	11	215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	20	-215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
143	12	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	20	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
144	12	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	19	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
145	13	215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	19	-215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
146	13	-167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	18	167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
147	18	80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	19	-80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
148	18	93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	28	-93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
149	18	-168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	29	168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
150	28	270.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	29	-270.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
151	29	-168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	33	168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
152	28	93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	33	-93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
153	33	80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	34	-80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
154	33	-167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	43	167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
155	34	215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	43	-215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
156	43	-68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	48	68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
157	42	-105.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	43	105.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
158	34	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	42	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
159	35	40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	42	-40.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
160	41	-105.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	42	105.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
161	41	-68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	48	68.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
162	35	215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	41	-215.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
163	36	-167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	41	167.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
164	35	80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	36	-80.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
165	26	93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	36	-93.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
166	25	-168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	36	168.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	
167	25	270.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	0.0	26	-270.	0.	0. 0.0	0.0	0.0	

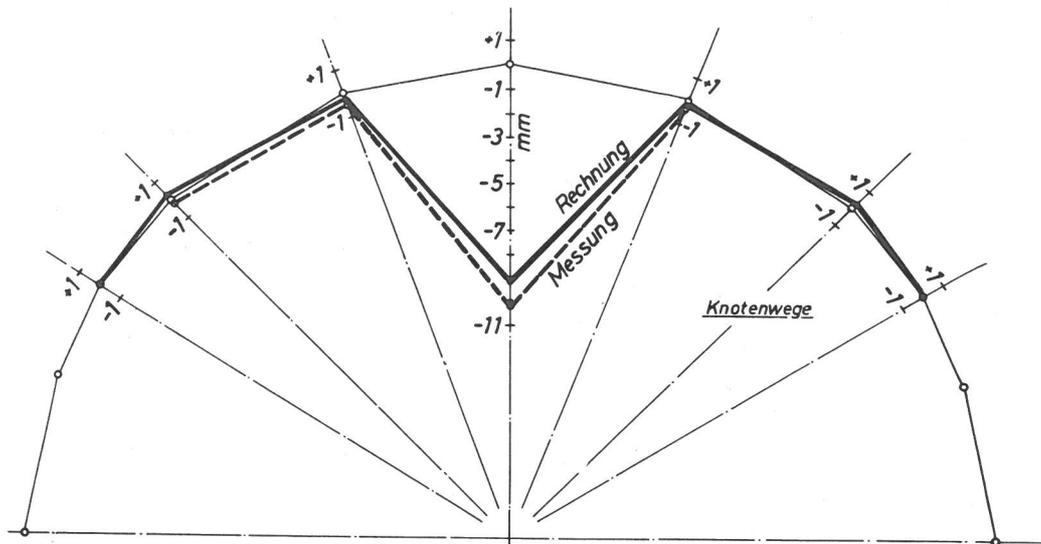
ELEM. NR.	KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)			KN. NR.	KRAEFTE (KP)				MOMENTE (KP*CM)		
		NX	QY	QZ	T	MY	MZ	NX		QY	QZ	T	MY	MZ		
168	21	-168.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	25	168.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
169	21	93.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	26	-93.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
170	20	80.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	21	-80.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
171	10	92.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	21	-92.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
172	21	81.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	22	-81.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
173	19	-517.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	20	517.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
174	19	-657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	28	657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
175	28	-657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	34	657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
176	34	-517.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	35	517.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
177	26	-657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	35	657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
178	20	-657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	26	657.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
179	20	819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	27	-819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
180	19	819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	27	-819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
181	27	1015.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	28	-1015.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
182	27	819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	34	-819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
183	27	819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	35	-819.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
184	26	1015.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	27	-1015.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
185	64	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	65	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
186	61	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	62	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
187	54	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	55	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
188	71	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	72	0.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
189	11	-105.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	12	105.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
190	12	-105.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	13	105.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
191	6	-68.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	13	68.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	
192	42	129.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	48	-129.	0.	0.	0.0	0.0	0.0	0.0	

GAEENDERT: ESTUDB,NRED (0001.00)
GAEENDERT: ESTUDB,NDRG (0001.00)
GAEENDERT: ESTUDB,NRND (0001.00)
STOP

ENDE STDHP 69.47

Der Vergleich der berechneten Werte mit den Versuchswerten, die bei einer Belastung des Zenitknotens von $P = 3000$ kp aufgenommen wurden, zeigt sowohl für die Knotenwege als auch für die Stabkräfte gute Übereinstimmung, vgl. nachfolgende Abbildungen (die berechneten Werte können auch aus dem Ausgabeprotokoll abgelesen werden):





Vergleich von berechneten und experimentell gemessenen Stabkräften und Knotenwegen

Die vorliegende Programmversion benutzt zur Dimensionierung von Kräften usw. die Einheit kp. Da die Kräfteeinheiten im SI-System nur durch einen Faktor vom alten System abweichen, unterscheiden sich die Ergebnisse des Programms bei Benutzen von SI-Eingabewerten auch nur durch einen Faktor von den Ergebnissen des alten Maßsystems. Das Umsetzen des Programms auf das SI-System erfordert deshalb nur die Umbenennung der kp-Bezeichnungen in den Ausgabetafeln.

7.6. Einschränkungen in der Anwendung des Programms STAB-WERK

Die Kapazität des Programms richtet sich zunächst nach dem verfügbaren Rechner hinsichtlich des im Rechnerkern maximal verarbeitbaren Blockes halber Bandbreite (vgl. 7.1).

Nicht berechnet werden die Belastungen der Widerlager, welche aber manuell durch Gleichgewichtsbeziehungen der Randknoten ermittelt werden können. Gegebenenfalls können Widerlagerbelastungen durch die Schnittlasten von entsprechend zusätzlich angeordneten Randstabelementen, die eine viel größere Steifigkeit als die Systemelemente besitzen müssen, simuliert werden (analog zur Systemberechnung mit elastischen Widerlagern).

Weitere Einschränkungen sind:

Vernachlässigung endlich großer Deformationen,
rein elastische Materialkennwerte,

geradlinige Stabelemente (gekrümmte Stäbe können stückweise durch gerade Stäbe simuliert werden),

Querschnittsgrößen müssen über die jeweilige Stablänge konstant sein (veränderliche Größen können stückweise durch entsprechende Stabelemente simuliert werden),

Vernachlässigung der Stablängenänderung infolge Biegung,

Vernachlässigung der Wölbkrafttorsion.

Bei der Darstellung von statischen Systemen im gewählten räumlichen Bezugssystem (X,Y,Z) sind folgende Bedingungen zu beachten (vgl. 3.6.1): Die Richtung der Stablängsachse (x) im Raum ist beliebig, auch die Richtung des Stabhauptachsensystems (y-z) kann jeden beliebigen Wert annehmen. Bei der Eingabe wird die Richtung der Stablängsachse x direkt durch die zugehörigen Knotenkoordinaten bestimmt, bei der Eingabe der Hauptträgheitsachsen y-z ist jedoch zu beachten, daß die y-Achse um den Winkel α (Bezeichnung in der Parameterliste AF) bezüglich ihrer Ausgangslage in der X-Y-Ebene zu drehen ist. Bei der Eingabe wird also zunächst angenommen, die y-Achse liegt in der X-Y Ebene. Dann wird der Winkel AF so bestimmt, daß die y-Achse durch Drehung dieses Winkels um die x-Achse ihre wirkliche räumliche Lage einnimmt. Der Positivsinn für die Drehung folgt aus Eingabe 5 (vgl. 7.4.2) in der Weise, daß die x-Achse vom Knoten N1 zum Knoten N2 gerichtet ist.

Für den Sonderfall, daß die x-Achse mit der \pm Z-Achse identisch ist, besteht für die Ausgangslage (vor der Drehung um den Winkel AF) der y-Achse Identität mit der \mp Y-Achse (vgl. 3.6.1).

7.7. Steuerkommandos

Da das Programm über eine Konsole des GRZ Berlin abrufbar ist, wird hier nur die Kommandofolge für die Anlage Telefunken TR 440 angegeben. Die Kommandos können lauten:

BEN = BAM - 2203 MATTHEES / ZUST, KSB = 60, TSB = 100,
PSB = 500, DRS = 100, RZS = 5 .

LFAN., STAB-WERK' DATEN

DATEI, NORG, SEQ, U6, U 10000 W, TR. = P

DATEI, NRED, SEQ, U6, U 10000 W, TR. = P

DATEI, NBAND, SEQ, U6, U 15000 W, TR. = P

UE., STAB, VA. = GR' D

MO.

STARTE, DN. = 61 U 6, DATEI = 60 - DATEN'

1 - NRED' 2 - NORG' 3 - NBAND, DU. = F - NEST .

XEG .

Je nach Bedarf und Dimensionierung der Steuerdaten (vgl. 7.2.2) sind die Zahlenwerte für

Kernspeicherbedarf	KSB,
Trommelspeicherbedarf	TSB,
Plattenspeicherbedarf	PSB,
Druckseiten	DRS,
Rechenzeit (min.)	RZS

zu wählen.

In der Datei DATEN sind die Daten langfristig gespeichert. Wenn die Kommandofolge über Lochkarten eingegeben wird, können die Daten nach Veränderung der Kommandofolge ebenfalls über Lochkarten eingelesen werden.

Die Hilfsdateien NORG, NRED, NBAND dienen sequentiell als Zwischenspeicher und sind nach Rechnungsende verloren. Ihre Dimensionierung ist je nach Problemstellung zu verändern.

Sollte der Operatorlauf durch einen Rechenfehler enden, wird auf das Ablaufprotokoll ein DUMP ausgegeben.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über ein in der BAM entwickeltes Rechenverfahren, welches Baukonstruktionen beliebiger Größenordnung und Konfiguration, die durch Stab- und Balkenelemente darstellbar sind, im linear elastischen Bereich statisch berechnet. Das als Rechenprogramm niedergelegte Verfahren ist direkt über eine BAM-Konsole im GRZ-Berlin abrufbar.

Teil I vermittelt die theoretischen Grundlagen des mittels Finiter Elemente schematisierten Verfahrens. Teil II erläutert die manuelle Handhabung des Rechenprogramms für den Benutzer unter Verwendung von Beispielen.

An dieser Stelle sei gedankt Herrn Dipl.-Ing. P. Wegener und seinen Mitarbeitern für die in 7.5.1 zur Verfügung gestellten experimentel-

len Untersuchungsergebnisse der Netzwerkkuppel sowie Herrn Dipl.-Ing. G. Plauk für die Unterstützung bei der Rechenprogrammaufstellung.

9. Literaturverzeichnis

- [1] R.K. Livesley
Matrix Methods of Structural Analysis
Pergamon Press (1969)
- [2] H.I. Laursen
Structural Analysis
McGraw-Hill (1969)
- [3] K. Chobot
Matrizenrechnung in der Baumechanik
Springer (1970)
- [4] W.M. Jenkins
Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis
McGraw-Hill (1969)
- [5] A. Zimmer, P. Groth
Elementmethode der Elastostatik
Oldenbourg (1970)
- [6] J.S. Przemieniecki
Theory of Matrix Structural Analysis
McGraw-Hill (1968)
- [7] O.C. Zienkiewicz
The Finite Element Method in Engineering Science
McGraw-Hill (1971)
- [8] W.C. Hurty, M.F. Rubinstein
Dynamics of Structures
Prentice-Hall (1964)
- [9] E.L. Wilson
Computer Program LSTRN
University of California (1969)
- [10] R.J. Collins
Bandwidth Reduction by automatic renumbering
Int.J.Num.Meth.Engrg. 6, S. 345-356, (1973)