

ISSN 0366-1296

# **Forschungsbericht 59**

BUNDESANSTALT FÜR  
MATERIALPRÜFUNG (BAM)

BERLIN

**Ermittlung der Verformungen  
biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit  
der Methode der Finiten Elemente unter  
besonderer Berücksichtigung des  
Verbundes zwischen Beton und Stahl**

von Dr.-Ing. Günther Plauk

---

Juli 1979

I – XIV; 126 Seiten, 65 Bilder, 1 Tafel, 16 Seiten Anhang

Herausgegeben von der  
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)  
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45  
Telefon 030/8104-1  
Telex 01-83 261 bamb d



## V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1970 bis 1974 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) in Berlin und wurde durch die Mitarbeit an einem Forschungsvorhaben des Laboratoriums "Baukonstruktionen des Massivbaues" ermöglicht.

Die Anregung zur Durchführung dieser Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. A. Jaeger gegeben, dem ich hierfür und für die Berichterstattung herzlich danke.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Hees für sein Entgegenkommen und seine Bereitschaft, nach dem Tod von Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Koepcke die Berichterstattung zu übernehmen. Seine wertvollen Anregungen haben zu einer Reihe von Ergänzungen sowie an zahlreichen Stellen zu einer präziseren Formulierung und damit zur endgültigen Fassung der Arbeit geführt.

Herrn Dipl.-Ing. H. Eifler und Herrn Dr.-Ing. K. Brandes danke ich herzlich für ihre Unterstützung und ständige Diskussionsbereitschaft.

Mein Dank gilt außerdem Frau E. Gowin und Frau G. Hillus für das Schreiben des Manuskriptes.

Berlin, im Juni 1979

Günther Plauk



Inhaltsverzeichnis	Seite
<b>Bezeichnungen</b>	IX
<b>1. Einleitung</b>	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Bisher verwendete Methoden zur Untersuchung des nichtlinearen Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken und -rahmen	3
1.2.1 Empirische Methoden	3
1.2.2 Methode der Finiten Elemente	6
1.2.3 Schlußfolgerungen	15
1.3 Ziel und Umfang der durchgeführten Untersuchungen	16
<b>2. Methode der Finiten Elemente – Grundlagen der Spannungs-Verformungsberechnung elastischer Systeme</b>	23
<b>3. Das finite Elementmodell eines Stahlbetonbalkens</b>	30
3.1 Diskretisierung des Stahlbetonbalkens	30
3.2 Darstellung der Querschnittswerte	31
3.3 Steifigkeitsmatrix für Verbundelemente	33
3.4 Steifigkeitsmatrix für Beton- und Bewehrungselemente	35
<b>4. Approximation des nichtlinearen Werkstoffverhaltens</b>	40
4.1 Allgemeines zu den Stoffgesetzen	40
4.2 Beton	41
4.2.1 Stoffgesetz für Beton	41
4.2.2 Arbeitslinie von Beton unter einachsiger Beanspruchung	45
4.3 Bewehrung	46
4.4 Verbund zwischen Beton und Bewehrung	48
4.4.1 Bemerkungen zur Ermittlung von Verbundgesetzen	48
4.4.2 Versuche zur Ermittlung wirklichkeitsnaher Verbundgesetze	50
4.4.3 Stoffgesetze für den Verbund	53
4.5 Grenzbedingungen für den Bruch von Beton und Bewehrungsstahl	58
<b>5. Nichtlineare Berechnung – Entwicklung einer problemkonformen Rechentechnik</b>	61
5.1 Bemerkung zur nichtlinearen Berechnung	61
5.2 Verformungsermittlung bei inkrementeller Belastung des Rechenmodells	62
5.3 Verformungsermittlung im Belastungsintervall infolge Plastizieren der Werkstoffe	66
5.4 Verformungsermittlung im Belastungsintervall infolge Rißbildung	68
<b>6. Finite-Element-Programm zur Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken</b>	71
6.1 Aufbau des Programmsystems	71
6.2 Arbeitsweise des Programmbereichs A	72
6.3 Arbeitsweise des Programmbereichs B	76
6.4 Arbeitsweise der Serviceprogramme	77

<b>7. Durchführung von Rechnungen zur Ermittlung des Verformungsverhaltens biegebeanspruchter Stahlbetonbalken</b>	79
7.1 Allgemeines zu den durchgeführten Rechnungen	79
7.2 Rechnung A – näherungsweise Verbund	80
7.3 Rechnung B – vollständige Approximation des Verbundes	85
<b>8. Rechnerische Ermittlung der Biegesteifigkeit von Stahlbetonbalken im gerissenen Zustand</b>	94
8.1 Biegesteifigkeit und Momenten-Krümmungsbeziehung des Biegebalken	94
8.2 Momenten-Krümmungsbeziehungen von Stahlbetonbalken unter Vernachlässigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone	96
8.3 Momenten-Krümmungsbeziehungen von Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone	100
8.4 Ein einfaches Verfahren zur Ermittlung von Momenten-Krümmungsbeziehungen unter näherungsweise Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone zwischen Rissen	109
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	118
<b>Literaturangaben</b>	122
<b>Anhang:</b> Programmsystem zur Ermittlung des nichtlinearen Verformungsverhaltens biegebeanspruchter Stahlbetonbalken und ebener Stahlbetonkonstruktionen	127

## Zum Inhalt

Eine Anwendung nichtlinearer Berechnungsmethoden im Stahlbetonbau zur Ermittlung von Grenzlastzuständen erfordert die Kenntnis von Schnittlast-Verformungsbeziehungen in Form von Momenten-Krümmungs- oder Momenten-Drehungsgesetzen. Bei der Aufstellung wirklichkeitsnaher Schnittlast-Verformungsbeziehungen ist jedoch vom tatsächlich vorhandenen Trag- und Verformungsverhalten eines Bauteils oder Konstruktionsbereichs auszugehen.

Das Ziel dieser Arbeit bestand daher in der Entwicklung eines leistungsfähigen Rechnerprogrammsystems zur theoretischen Untersuchung des Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken.

Als ein hervorragendes Werkzeug zur Lösung des vorliegenden Problems bot sich die Methode der Finiten Elemente an, die schon verschiedentlich zur Untersuchung von Grundlagenproblemen im Stahlbetonbau herangezogen wurde. Entwickelt wurde ein Finite-Element-Programmsystem zur Riß-Bruchberechnung von Balken, Stützen, Rahmenecken und weiteren ebenen Konstruktionsbereichen.

Die durchgeführten Rechnungen haben gezeigt, daß insbesondere bei Verwendung wirklichkeitsnaher Gesetze für den Verbund eine sehr gute Übereinstimmung mit Versuchswerten zu erzielen ist. Bei einer näherungsweise Einbeziehung des Verbundes in die Rechnung — was bisher in sämtlichen bekannten Arbeiten der Fall war — geht diese Übereinstimmung zumindest im Bereich plastischer Bauteilverformungen vollständig verloren.

## Abstract

Limit design theories or nonlinear methods for reinforced concrete structures require the knowledge of moment-curvature or moment-rotation relationship for any particular section. These fundamental relations, however, must be calculated for the different structural members and for all loading stages with regard to the biaxial or triaxial state of stress and strain in concrete and steel, the crack propagation and the bond between steel and concrete.

The aim of this study was therefore to develop a computer program for the theoretical investigation of the load-deflection behaviour of plane reinforced concrete structures.

An excellent method to solve this problem is the finite element method used already occasionally for the analysis of concrete structures. In the present investigation the finite element concept was used as a basis for the development of an analysis applicable to reinforced concrete beams, columns, beam to column connections etc., and allowing to study the load-deflection behaviour from zero load to ultimate load. The mechanical model takes into account nonhomogeneity, nonlinear material properties, the influence of progressive cracking and nonlinear bond-slip relations.

The computer analysis results show an excellent agreement with experimental data but only if a nonlinear bond-slip relation depending on the range of plastic steel strain is used. A model taking into account only approximately the transfer of stress between concrete and steel can possibly not simulate realistic stress-strain conditions and consequently the load-deflection behaviour.



## Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen

### 1. Bezeichnungen im Zusammenhang mit der Methode der Finiten Elemente

$\{ \}$	Vektor oder Spaltenmatrix
$\{ \}^T$	transponierter Vektor oder transponierte Spaltenmatrix
$[ \ ]$	Matrix
$[ \ ]^T$	transponierte Matrix
$\delta\{ \}$	Vektor oder Spaltenmatrix einer virtuellen Größe
$\delta A_i$	virtuelle innere Arbeit
$\delta A_a$	virtuelle äußere Arbeit
$x, y$	globale Koordinaten
$1, 2$	Hauptachsenrichtungen im Element
$h, v$	lokale Koordinaten bei Verbundelementen
$\{ f \}$	Vektor der Verschiebungen im Element
$u, v$	Verschiebungen eines Punktes im Element in x-, y-Richtung
$[ M ]$	Matrix der Ansatzfunktionswerte nach Einsetzen der Koordinaten der Elementknoten in den Verschiebungsansatz
$[ m ]$	Untermatrix von $[ M ]$
$[ G ]$	Transformationsmatrix aus der invertierten Matrix $[ M ]$ durch Umordnen der Spalten
$[ H ]$	Dehnungsansatz
$[ B ]$	Verzerrungsmatrix
$[ N ]$	Verschiebungsmatrix
$[ C ]$	Matrix der linear unabhängigen Ansatzfunktionen
$\{ \beta \}$	Spaltenmatrix der Freiwerte des Verschiebungsansatzes
$\{ \rho \}$	Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen eines Elementes in der Reihenfolge $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots$
$\{ \hat{\rho} \}$	desgl. in der Reihenfolge $u_1, u_2, \dots; v_1, v_2, \dots$

$\{ \rho_i \}$	Vektor der Verschiebungen des Knotens i
$u_i, v_i$	Verschiebungen des Knotens i in x-, y-Richtung
$\{ \sigma \}$	Vektor der Elementspannungen
$\sigma_x, \sigma_y$	Normalspannungen in x-, y-Richtung
$\tau_{xy}$	Schubspannungen in der xy-Ebene
$\{ \sigma_0 \}$	Vektor der Anfangsspannungen des Elements
$\{ \sigma \}_{Re}$	Vektor der rechnerisch ermittelten Elementspannungen
$\{ \sigma \}_{Sto}$	Vektor der aus dem Stoffgesetz bestimmten Elementspannungen
$\Delta \{ \sigma \}$	Vektor der Differenzspannungen im Element
$\{ \epsilon \}$	Vektor der Elementverzerrungen
$\epsilon_x, \epsilon_y$	Dehnungen in x-, y-Richtung
$\gamma_{xy}$	Gleitung in der xy-Ebene
$\{ \epsilon_0 \}$	Vektor der Anfangsdehnungen
$[ D ]$	Stoffmatrix
$[ L ]$	Transformationsmatrix zur Überführung des Dehnungsvektors vom globalen x-y-Koordinatensystem in ein lokales 1-2-Koordinatensystem
$\{ p \}$	Vektor der Volumenkräfte im Element
$\{ F \}$	Spaltenmatrix der Knotenkräfte am Element
$\{ F_i \}$	Vektor der Knotenkräfte am Knoten i
$\{ F \}_p$	Spaltenmatrix der Knotenkräfte am Element infolge von Volumenkräften
$\{ F \}_{\epsilon_0}$	desgl. infolge von Anfangsdehnungen
$\{ F \}_{\sigma_0}$	desgl. infolge von Anfangsspannungen
$[ k ]$	Steifigkeitsmatrix des Elements
$[ k_{im} ]$	Untermatrix von $[ k ]$
$k_h$	Steifigkeit des Verbundelements in Richtung der Bewehrungsstahlachse
$k_v$	desgl. in Richtung senkrecht zur Bewehrungsstahlachse



$\{ R \}$	globale Spaltenmatrix der äußeren Knotenkräfte
$\{ R^* \}$	desgl. der Korrekturkräfte
$\{ r \}$	globale Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen
$[ K ]$	globale Steifigkeitsmatrix des Systems (Bandmatrix)
$[ K_{im} ]$	Untermatrix von $[ K ]$
$[ K^* ]$	globale Steifigkeitsmatrix bei Simulation des tatsächlichen Verformungsverhaltens eines Systems
$[ K_T ]$	globale Tangentensteifigkeitsmatrix des Systems
$[ K_R ]$	globale Steifigkeitsmatrix des Systems nach Auftreten von Rissen
$\Sigma_e$	Summation über alle Elemente
$A$	Elementfläche
$t$	Elementdicke
$q_y$	äquivalente Quadratfläche eines Bewehrungsstahlquerschnitts
$q_z$	Bewehrungsstahlbreite, bezogen auf den Einheitsquerschnitt
$q_b$	Betonrestbreite in Höhe der Bewehrung, bezogen auf den Einheitsquerschnitt

## 2. Querschnittswerte und geometrische Größen

$b$	Breite des Stahlbetonquerschnitts
$d$	Höhe des Stahlbetonquerschnitts
$h$	Abstand des Bewehrungsschwerpunktes vom gedrückten Rand
$h_x$	Höhe der Betondruckzone
$y_D$	Abstand der Druckkraft im Beton von der neutralen Faser
$F_b$	Fläche des Betonquerschnitts
$d_e$	Bewehrungsstahldurchmesser
$n$	Anzahl der Bewehrungsstäbe im Querschnitt

$U_v$	Umfang der Bewehrungsstähe im Querschnitt
$F_e$	Fläche des Bewehrungsstahls in der Zugzone
$F'_e$	Fläche des Bewehrungsstahls in der Druckzone
$\mu$	Bewehrungsprozentsatz $F_e/F_b$ der Zugzone
$\mu'$	Bewehrungsprozentsatz $F'_e/F_b$ der Druckzone
$I$	Trägheitsmoment des homogenen Querschnitts
$l_v$	Verbundstrecke
$A_v$	Verbundfläche
$a_m$	mittlerer Rißabstand
$l$	Stützweite eines Balkens

### 3. Belastung und Schnittgrößen

$P$	Einzellast
$P_R$	Rißlast
$P_s$	Last bei beginnender plastischer Verformung
$P_u$	Traglast
$q$	Linienlast
$M$	Biegemoment
$N$	Normalkraft
$M_R$	Rißmoment
$M_u$	Bruchmoment
$D_b$	Druckkraft im Beton
$Z_e$	Zugkraft in der Bewehrung
$Z_{e,R}$	Zugkraft in der Bewehrung im Rißquerschnitt
$Z_{eA}$	Abfall der Stahlzugkraft zwischen Rissen
$\bar{Z}_{eA}$	desgl. Mittelwert

### 3. Spannungen, Dehnungen und Deformationen

$\sigma_b$	Betonspannung
$\sigma_{b,o}$	Betonrandspannung in der Druckzone
$\sigma_e$	Stahlspannung
$\bar{\sigma}_e$	mittlere Stahlspannung zwischen Rissen
$\sigma_{e,R}$	Stahlspannung im RiBquerschnitt
$\sigma_{eA}$	Abfall der Stahlspannung zwischen Rissen
$\bar{\sigma}_{eA}$	desgl. Mittelwert
$\epsilon_{Ro}$	Dehnung der oberen Randfaser eines Querschnitts
$\epsilon_{Ru}$	Dehnung der unteren Randfaser eines Querschnitts
$\epsilon_b$	Betondehnung
$\epsilon_{b,o}$	Betonranddehnung in der Druckzone
$\epsilon_e$	Stahldehnung
$\epsilon_e^{pl}$	plastischer Anteil an der Stahldehnung
$\bar{\epsilon}_e$	mittlere Stahldehnung zwischen Rissen
$\epsilon_{e,R}$	Stahldehnung im RiBquerschnitt
$\tau_v$	Verbundspannung
$\tau_{v,max}$	Größtwert der Verbundspannung zwischen Rissen
$\delta_{Ro}, \delta_{Ru}$	Verlängerung der oberen, unteren Randfaser eines Balkenabschnitts der Länge dx
$\varphi$	Neigungswinkel der Balkenachse
w	Durchbiegung der Balkenachse
$\kappa$	Krümmung der Balkenachse
$R_\kappa$	Krümmungsradius
$\theta$	Drehung des plastischen Gelenkes
$s_v$	Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung
$s_{v,R}$	desgl. im RiBquerschnitt
$s_{v,\tau}$	desgl. an der Stelle der maximalen Verbundspannung zwischen Rissen

#### 4. Kennwerte für Festigkeits- und Verformungseigenschaften

$\beta_w$	Würfeldruckfestigkeit des Betons
$\beta_p$	Prismenfestigkeit des Betons
$\epsilon_{bU}$	Bruchstauchung von Betonprismen
$\epsilon_{bZ}$	Bruchdehnung von Beton
$\beta_{bZ}$	Biegezugfestigkeit des Betons
$\beta_Z$	Zugfestigkeit des Stahls
$\epsilon_{eU}$	Bruchdehnung des Stahls
$\dot{\epsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit
$s_{vU}$	Bewehrungsschlupf bei Versagen des Verbundes
$\theta_{kr}$	Drehfähigkeit eines plastischen Gelenkes
E	Elastizitätsmodul
$\nu$	Poissonzahl
G	Schubmodul
$G_{VZ}$	Verzahnungsmodul zur Übertragung von Schubspannungen in Rissen

## 1.0 Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Eine Ermittlung der Schnittgrößen statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahlbeton erfolgt für alle während der Errichtung und im Gebrauch maßgebenden Lastfälle, entsprechend den Vorschriften der DIN 1045 mit Rechenverfahren, die auf der Elastizitätstheorie basieren, d. h. die von einem linear-elastischen Formänderungsverhalten der Baustoffe Beton und Stahl ausgehen. Damit besteht jedoch ebenfalls eine Proportionalität zwischen Belastung und Verformung der Konstruktion. Im allgemeinen wird der Berechnung die Steifigkeit des ungerissenen Querschnitts zugrunde gelegt, nur in Sonderfällen wird der Einfluß der Ribbildung auf die Steifigkeit berücksichtigt.

Die Bemessung der einzelnen Tragglieder erfolgt entweder nach dem vom rechnerischen Bruchzustand ausgehenden Verfahren der zulässigen Biege- und Längskraftbeanspruchung und zwar unter Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens oder nach dem Verfahren der zulässigen Spannungen, das für Querkraft und Torsion unter Ansatz von Gebrauchslasten verwendet wird.

Die rechnerische Ermittlung der tatsächlich vorhandenen Tragfähigkeit einer Konstruktion unter Berücksichtigung des nichtlinearen Formänderungsverhaltens des Verbundbaustoffes "Stahlbeton" bereitet erhebliche Schwierigkeiten und kann in der Regel ohne Verwendung eines Digitalrechners nicht durchgeführt werden. Eine derartige Berechnung hat davon auszugehen, daß infolge von nichtlinearem Werkstoff- und Verbundverhalten sowie infolge von Ribbildung und örtlichen Zerstörungen des Betons plastische Verformungen in der Konstruktion auftreten. Das Entstehen plastizierter Bereiche an Stellen maximaler Momentenbeanspruchung ermöglicht eine Momentenumlagerung und damit eine Mobilisierung noch vorhandener Tragreserven einer Konstruktion.

Eine vereinfachte Tragfähigkeitsberechnung von biegesteifen Stahlbetonstabwerken kann mit der Methode der plastischen Gelenke [1-3] von Stahlbetonplatten mit der Fließgelenklienientheorie vorgenommen werden. Bei diesen Berechnungsverfahren, die in einfacher Weise zu handhaben sind, werden plastische Verformungen lediglich näherungsweise durch eine bleibende Drehung in angenommenen Gelenkpunkten erfaßt. Voraussetzung

für eine Anwendung der Fließgelenk- bzw. Fließgelenklinientheorie im Stahlbetonbau ist, daß die zur Bildung einer kinematischen Kette erforderlichen Drehungen in den plastischen Gelenken die von den Konstruktionsteilen ertragbaren Drehungen - als "Drehfähigkeit plastischer Gelenke" bezeichnet - nicht überschreiten.

Die Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke wird erschwert durch die Vielzahl der vorhandenen Einflußparameter wie Geometrie eines Bauteils, Bewehrungsprozentsatz, Art und Lage der Bewehrung, Betongüte, Momenten-Querkraftverhältnis und Verbundverhalten zwischen Beton und Bewehrung.

Eine Tragfähigkeitsberechnung biegesteifer Stahlbetonstabwerke nach der Schnittlastenmethode [4] oder der Deformationsmethode [5-7], erfordert die Kenntnis der in allen Bereichen der Konstruktion in Abhängigkeit vom Beanspruchungsgrad der Querschnitte tatsächlich vorhandenen Biegesteifigkeit. Die Biegesteifigkeit gerissener Stahlbetontragglieder weicht ganz erheblich von der Biegesteifigkeit des Traggliedes im ungerissenen Zustand ab. Diese Abweichung wird nach Überschreiten des Rißmomentes mit zunehmender Rißbildung und Plastizierung immer größer. Da zwischen Biegesteifigkeit, Biegemoment und Krümmung auch für gerissene Stahlbetontragglieder ein Zusammenhang hergestellt werden kann, läßt sich das Problem der Ermittlung der Biegesteifigkeit auf die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Biegemoment und Krümmung zurückführen.

Eine ausschließlich experimentelle Untersuchung des Einflusses der oben aufgeführten Parameter auf die Biegesteifigkeit oder auf die Drehfähigkeit als einer integralen Größe scheidet wegen des damit verbundenen erheblichen Aufwandes aus. Damit folgte für die vorliegende Arbeit die Aufgabenstellung, ein geeignetes Rechenverfahren zur Durchführung einer "Feinstrukturanalyse" von Traggliedern aus Stahlbeton zu entwickeln. Das Verfahren sollte die Ermittlung von Schnittlast-Verformungsgesetzen zunächst für Stahlbetonbalken, z.B. in Form von Momenten-Krümmungsbeziehungen unter Einbeziehung der Rißbildung und der Tragwirkung des Betons in der Zugzone zwischen Rissen, ermöglichen.

## 1.2 Bisher verwendete Methoden zur Untersuchung des nichtlinearen Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken und -rahmen

---

### 1.2.1 Empirische Methoden

Die Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken und -rahmen unter Verwendung vom Momenten-Krümmungs-Gesetzen für Einzelquerschnitte erfolgte bisher fast ausschließlich unter stark vereinfachenden Annahmen. Den einzelnen Berechnungsverfahren [8-12] ist gemeinsam, daß sie von mehreren der im folgenden genannten Voraussetzungen ausgehen:

- Bernoullische Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte
- Annahmen über die Verteilung der Spannungen in der Druckzone
- Annahme über die Größe der maximal zulässigen Betonstauchung am gedrückten Rand
- Vernachlässigung der Tragwirkung des auf Zug beanspruchten Betons zwischen Rissen
- Annahme elastisch-idealplastischen Stoffverhaltens von Beton und Bewehrungsstahl
- starrer Verbund zwischen Beton und Bewehrung
- Annahme der Länge des sich ausbildenden plastischen Bereichs

Das Verformungsverhalten von Stahlbetonbalken und -rahmen läßt sich jedoch unter Zugrundelegung der genannten Voraussetzungen in vielen Fällen nur unvollständig beschreiben. Dies gilt sowohl für die Berechnung der Verformungen gerissener Stahlbetontragglieder, die sich noch im elastischen Zustand II befinden, als auch für die Berechnung der Verformungen plastizierter Tragwerksbereiche wie z.B. der Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke.

Um zu einer realistischen Spannungs- und Verformungsberechnung vor allen Dingen im Bereich plastischer Bauteilverformungen zu kommen, wurden die empirischen Methoden z.B. durch Einbeziehung des Verbundes in die Rechnung entschieden ver-

bessert. Das trifft für die Arbeiten [13-16] zu, von denen einige im folgenden erläutert werden.

Eine iterative Methode zur Bestimmung der Verformungen von Stahlbetonbalken mit rechteckförmigem bzw. T-förmigem Querschnitt wurde von Rao [14] entwickelt. Der Berechnung liegen die Spannungs-Dehnungslinie des Bewehrungsstahls und ein an Prismen gewonnenes Verformungsgesetz für die Biegedruckzone des Balkenquerschnitts zugrunde. Eine über den Querschnitt geradlinig angenommene Dehnungsverteilung unter Berücksichtigung des Gleichgewichtes zwischen Spannungen und Schnittlasten im Stadium I und II liefert den Verformungswert der Krümmung des Balkens. Eine Korrektur der sonst üblichen Ansätze für die Verformungen eines Stahlbetonbalkens im Stadium II wird vorgenommen durch Einbeziehen der wirksamen Zugzone zwischen zwei Rissen, wobei über Verbundspannungen und Stahldehnungen zwischen Rissen vereinfachende Annahmen getroffen werden. Die auf diese Weise errechneten Werte für die Verformungen werden mit den Resultaten durchgeführter Versuche verglichen. Es zeigte sich dabei, daß die Übertragung der für reine Biegung entwickelten Momenten-Krümmungsbeziehungen auf gleichzeitig durch Moment und Querkraft beanspruchte Querschnitte nur bis zum Erreichen der Streckgrenze der Längsstähle und nur bei kleinen Querkräften möglich ist.

In der Arbeit von Bachmann [15] werden Rechenmodelle für Biegeriß- und Schubrißgelenke entwickelt. Das durch ein reines Moment beanspruchte Biegerißgelenk setzt sich aus einer Anzahl von Elementen mit je einem Riß in der Mitte zusammen. Die Verdrehung der beiden Seitenflächen jedes Elementes kann aus der ermittelten Rißweite und der jeweiligen Rißlänge bestimmt werden. Durch Summation der Relativdrehungen der Seitenflächen  $\Delta\theta$  aller Abschnittselemente ergibt sich der Drehwinkel  $\theta$  eines plastischen Gelenkes. Zur Bestimmung der Rißweiten werden die Stahlspannungen jeweils in Abschnittsmitte geschätzt und die Verschiebungen des Bewehrungsstahls an dieser Stelle gegenüber dem Beton zu Null angenommen. Durch ein iteratives Verfahren können damit unter Verwendung der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie von Stahl und einem Gesetz für den Verbund Stahlspannungen und -dehnungen, Verbundspannungen und Verschiebungen zwischen Stahl und Beton für jeden Teilbereich des plastischen Gelenkes ermittelt werden. Anhand der ent-



wickelten Formeln werden die Einflüsse von Querkraft, Rißabstand, Durchmesser des Bewehrungsstahles, des Verbundes und des Bewehrungsprozentsatzes auf die Drehfähigkeit plastischer Gelenke untersucht. Ein Vergleich zwischen Rechen- und Versuchswerten ergibt, daß die theoretisch ermittelten Werte für die Verdrehung auf der sicheren Seite liegen, jedoch z. T. um einen größeren Prozentsatz von den Versuchswerten abweichen. Für das ähnlich aufgebaute Modell des Schubrißgelenkes ergibt sich ebenfalls der Gelenkwinkel aus der Summe der einzelnen Rißwinkel. Schwierigkeiten bereitet hier jedoch die Bestimmung der inneren Kräfte in den einzelnen Teilelementen des Schubrißgelenkes, die zur Ermittlung der Rißweiten erforderlich sind. Ein Versagen des Schubrißgelenkes durch Zerstörung der Betondruckzone kann ebenfalls nicht in befriedigender Weise erfaßt werden.

Ein im Aufbau ganz ähnliches Verfahren zur Berechnung plastischer Verformungen in Stahlbetonbalken mit einer Gegenüberstellung von Rechen- und Versuchsergebnissen wurde von Eifler und Plauk in [16] veröffentlicht. Eine entscheidende Verbesserung der bisher diskutierten empirischen Methoden erfolgt hier durch Einbeziehung eines das Verbundverhalten realistisch beschreibenden Materialgesetzes in die Rechnung. Anwendung finden die vom gleichen Verfasser in Versuchen [41] ermittelten Verbundgesetze, die nicht nur eine Abhängigkeit der Verbundspannungen von den Verschiebungen des Bewehrungsstahles gegenüber dem Beton beinhalten, sondern ebenfalls die Abhängigkeit der Verbundspannungen vom Stahldurchmesser, der plastischen Stahldehnung sowie von der Lage des Verbundintervalls (an einem Riß oder im Bereich zwischen Rissen). Ermöglicht wird damit eine sehr genaue Spannungs-Verformungsberechnung in der Umgebung der Bewehrung eines Stahlbetonbauteils. Eine Bestimmung der Spannungen in den "Betonzähnen" zwischen Rissen erfolgt hingegen nicht. Zusätzliche Annahmen sind jedoch auch bei diesem Rechenverfahren zu treffen, um die Verteilung der Spannungen und Verformungen der Druckzone eines Bauteils näherungsweise zu erfassen. Die an Balken bzw. Plattenbalken rechnerisch ermittelten Werte für die Drehfähigkeit plastischer Gelenke zeigen eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen.

### 1.2.2 Methode der Finiten Elemente

Wegen der Unzulänglichkeiten empirischer Methoden richten sich neuere Bestrebungen auf die "Feinstrukturanalyse" von Stahlbetonkonstruktionen mittels der Methode der Finiten Elemente.

Die Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes gerissener, durch Einzellasten beanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente erfolgte erstmals durch Ngo und Scordelis [20]. Das verwendete Elementmodell, Bild 1, besteht aus Dreieckelementen mit linearem Verschiebungsansatz für die beiden Komponenten Beton und Stahl und einer Kette von Federelementen zur Berücksichtigung des Verbundes. Vorausgesetzt werden rein elastisches Werkstoffverhalten für Beton und Stahl sowie eine lineare Abhängigkeit der Verbundspannungen von der Verschiebung zwischen Beton und Bewehrung. Die rechnerischen Untersuchungen erfolgen an mehreren Stahlbetonbalken mit einer im Elementmodell vorgegebenen, aber jeweils unterschiedlichen Anzahl von Biege- und Schubrisen (Bild 2). Ermittelt werden die Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe in einzelnen Schnitten längs der Balkenachse und der Verlauf der Verbundspannungen entlang der Balkenachse. Der Einfluß verschieden großer Verbundsteifigkeiten auf die Rißweiten und die Durchbiegung in Balkenmitte wird ebenfalls untersucht.

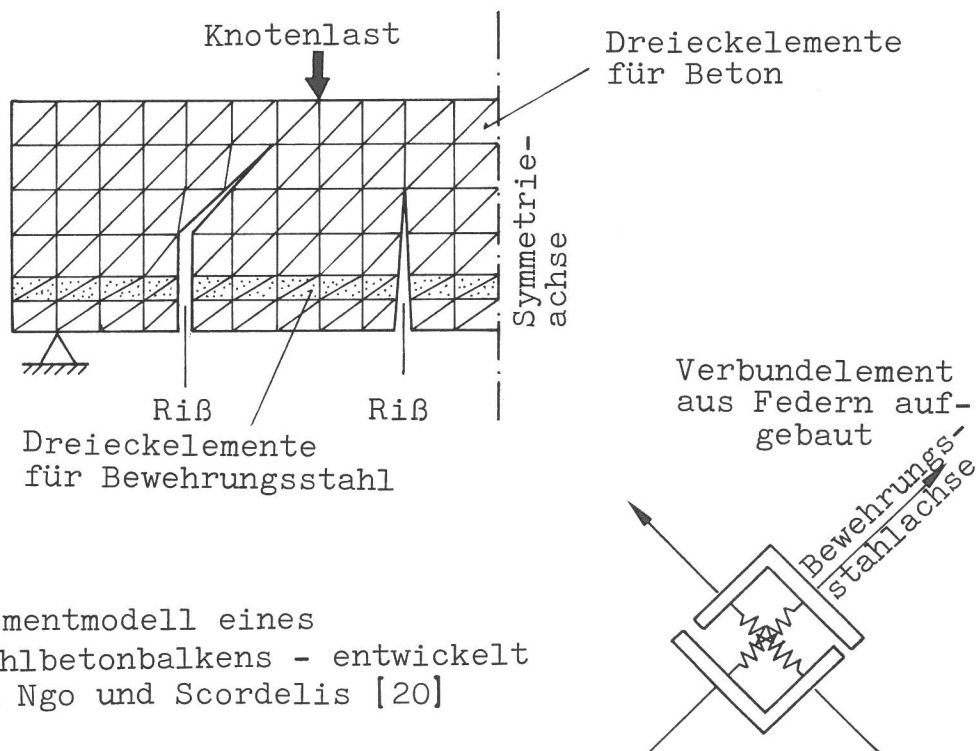


Bild 1: Elementmodell eines Stahlbetonbalkens - entwickelt von Ngo und Scordelis [20]

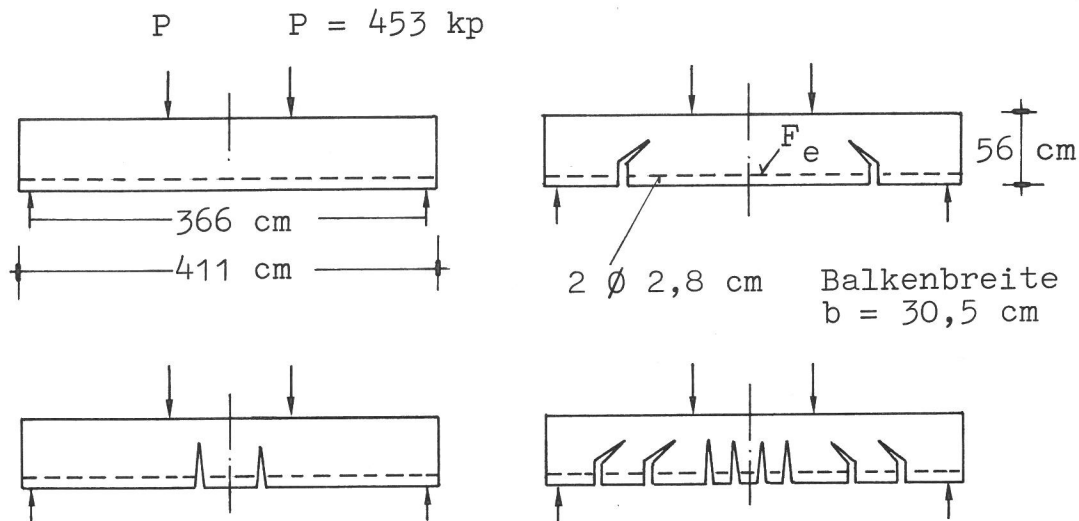


Bild 2: Ermittlung von Spannungen und Verformungen in Stahlbetonbalken mit vorgegebener Risseverteilung durch Ngo und Scordelis [20]

Eine Erweiterung der in [20] entwickelten Rechentechnik erfolgt durch Nilson [21]. Im Gegensatz zu Ngo und Scordelis werden nichtlineares Spannungs-Dehnungsverhalten der Werkstoffe Beton und Stahl sowie ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Verbundspannungen und Bewehrungsschlupf in die Überlegungen einbezogen. Die näherungsweise Approximation des Spannungs-Dehnungsverhaltens von Beton und Stahl erfolgt durch ein "orthotropes" Stoffgesetz. Die Achsen der Orthotropie werden jeweils in den Hauptspannungsrichtungen eines Elementes angenommen. In Abhängigkeit von den Dehnungen in Richtung der Hauptachsen erfolgt die Ermittlung der Tangentenmoduli aus den Arbeitslinien einachsiger beanspruchter Werkstoffe. Die im Stoffgesetz enthaltene Querdehnungszahl wird Null gesetzt. Eine näherungsweise Beschreibung des Verbundverhaltens erfolgt durch ein aus Versuchswerten gewonnenes nichtlineares Gesetz. Die verwendeten Bruchbedingungen beinhalten maximale Spannungs- bzw. Verformungskriterien.

Um die Änderung der Steifigkeit des Elementmodells mit wachsender Belastung erfassen zu können, erfolgt das Aufbringen der Belastung in Teilschritten. In jedem Lastintervall werden die Verschiebungen eines Systems mit linearem Verformungsverhalten bestimmt unter Verwendung der im vorangegangenen Rechenschritt aus den Arbeitslinien ermittelten Stoffkenngrößen. Die Rechnung erfolgt jetzt auch nicht mehr an einem Bauteil mit vorgegebenem Reißbild. Ris-

se und ggf. die örtliche Zerstörung des Verbundes werden durch Entkoppeln einzelner Betonelemente bzw. durch Herausnehmen von Federelementen berücksichtigt. Diese Prozedur wird jedoch von Hand vorgenommen und erfordert eine laufende Unterbrechung der Rechnung, u. U. mehrmals innerhalb eines Lastintervalls. Das Entkoppeln von Elementen, d. h. das Einführen neuer Systempunkte, verändert jedoch das gesamte Rechenmodell. Die Erstellung eines neuen Datensatzes und der Neubeginn der Rechnung sind damit jeweils erforderlich. Dieses von Nilson aufgezeigte Vorgehen, vom Verfasser auf einige Testrechnungen angewendet, ist äußerst mühsam und erfordert erhebliche Rechenzeiten. Die rechnerischen Untersuchungen erfolgen an Betonprismen mit jeweils einem zentrisch oder exzentrisch einbetonierten Bewehrungsstahl. Die Belastung besteht aus Zugkräften, die an den herausstehenden Stahlenden angreifen. Ermittelt werden die Rißbilder (Bild 3), bis ein Zerreißen der Betonprismen in einzelne Blöcke eintritt. Trotz einer teilweisen Zerstörung des Verbundes liegen die Beton- und Stahlspannungen noch innerhalb des elastischen Bereichs der Spannungs-Dehnungslinien beider Werkstoffe.

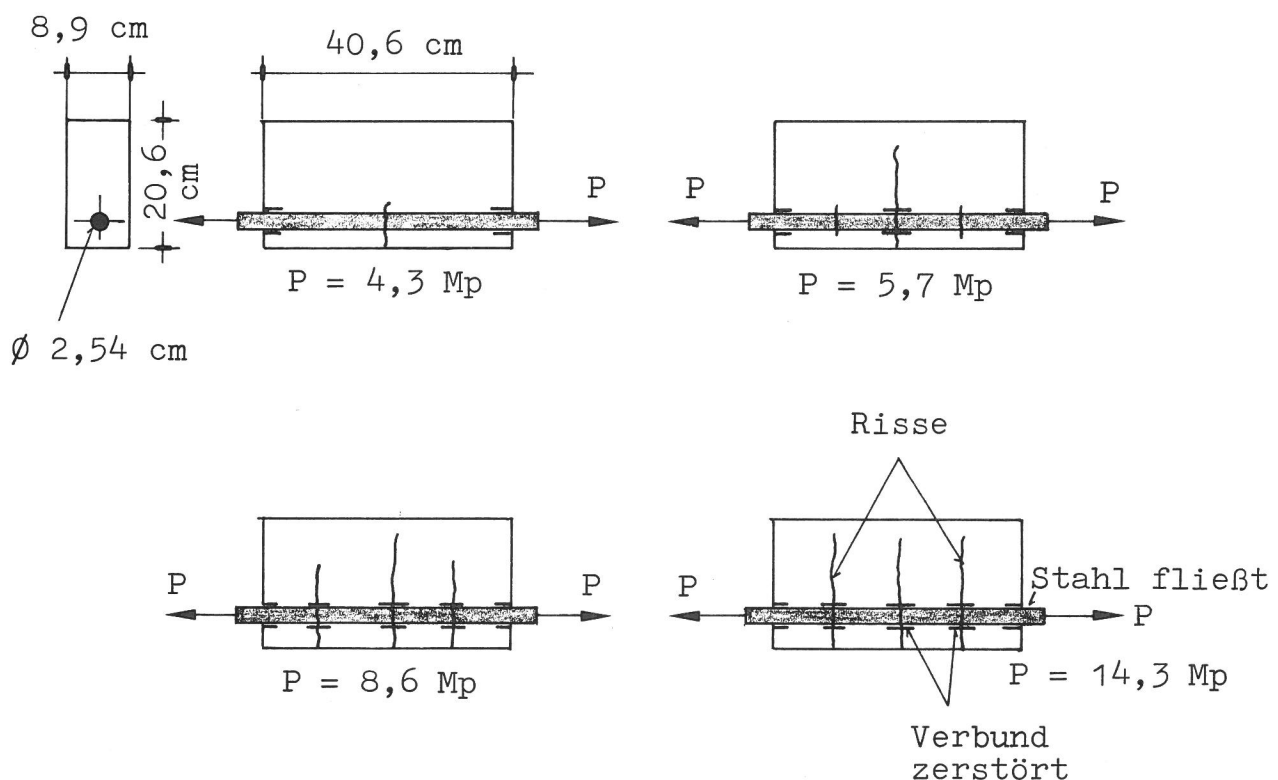


Bild 3: Ermittlung des Rißbildes eines exzentrisch bewehrten Stahlbetonprismas durch Nilson [21]

Der von Franklin [22] veröffentlichte Beitrag zur nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonbalken und -rahmen stellt eine Weiterentwicklung der bereits beschriebenen Arbeiten [20, 21] dar. Franklin verwendet weiterhin Dreieckelemente bzw. aus Dreieckelementen zusammengesetzte Rechteckelemente. Es wird jedoch zusätzlich ein neuer Elementtyp entwickelt, der sich über die gesamte Querschnittshöhe eines Bauteils aus einer Anzahl von Lamellen zusammensetzt, die jeweils verschiedene Werkstoffeigenschaften besitzen können. Für die Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen ist der Querschnitt aus Beton- und Stahllamellen zusammengesetzt. Einzelne Lamellen können zerstört werden beim Überschreiten von Grenzspannungen oder Bruchkriterien. Ungünstig ist, daß der kleinste Rißabstand durch die Elementlänge, die etwa der Querschnittshöhe entspricht, von vornherein festgelegt ist.

Zur Beschreibung des nichtlinearen Stoffverhaltens von Beton wird ein gegenüber [21] modifiziertes "orthotropes" Stoffgesetz benutzt. Die Achsen der Orthotropie verlaufen für ungerissene Elemente in Richtung der Hauptspannungen und für gerissene Elemente parallel bzw. senkrecht zu den Rissen. In das Stoffgesetz wird, und zwar für beide Hauptspannungsrichtungen in gleicher Größe, nur der kleinere der beiden ermittelten Tangentenmoduli eingesetzt. Das Verbundverhalten wird durch ein elastisch-ideal plastisches Stoffgesetz beschrieben. Die verwendete bi-lineare Spannungs-Verschiebungs-Funktion stellt eine Vereinfachung des in [21] enthaltenen Verbundgesetzes dar. Zusätzlich zu den bisher verwendeten maximalen Spannungs- bzw. Verformungskriterien findet das von Bresler und Pister für Beton entwickelte zweiachsige Bruchspannungskriterium Anwendung. Die Ermittlung plastischer Formänderungen erfolgt auf iterativem Wege nach dem Newton-Raphson-Verfahren, wobei die Steifigkeitsmatrix des Elementmodells in jedem Iterationsschritt neu aufgebaut wird. Ein der Arbeit entnommenes Rißbild (Bild 4) zeigt, daß der rechnerische Rißabstand kleiner oder gleich der Elementlänge ist. Eine exakte Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes des Balkens ist dadurch offenbar nicht mehr möglich. Es kommt daher insbesondere im Bereich plastischer Balkenverformungen zu einer starken Abweichung zwischen rechnerisch und experimentell ermittelten Werten. Das Belastungs-Verfor-

Rißkriterien:

Belastung  
P



Zugfestigkeit des einachsigen beanspruchten Betons überschritten



Bruchgrenzkurve für den zweiachsigen Spannungszustand überschritten

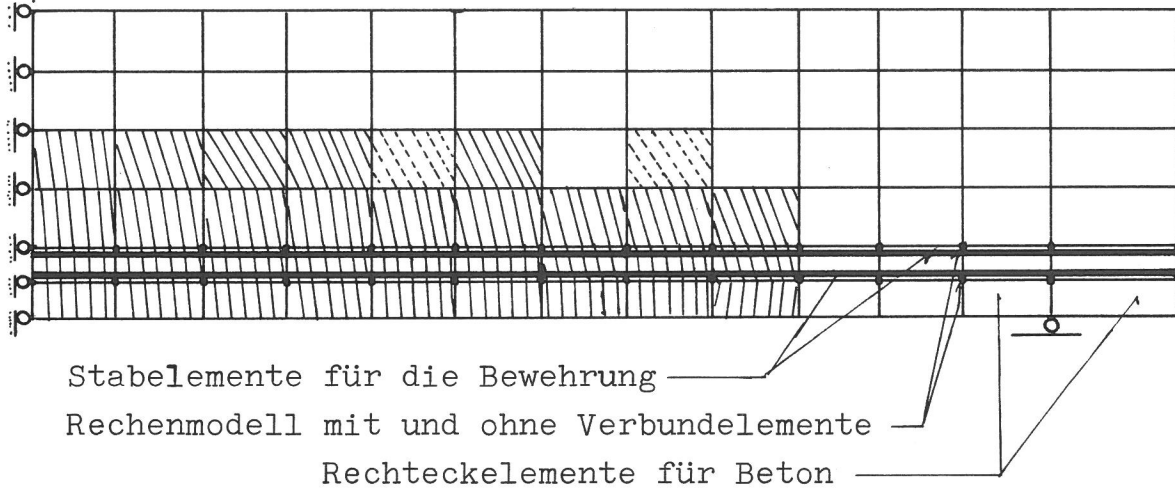


Bild 4: Ermittlung des Rißbildes eines Stahlbetonbalkens durch Franklin [22]

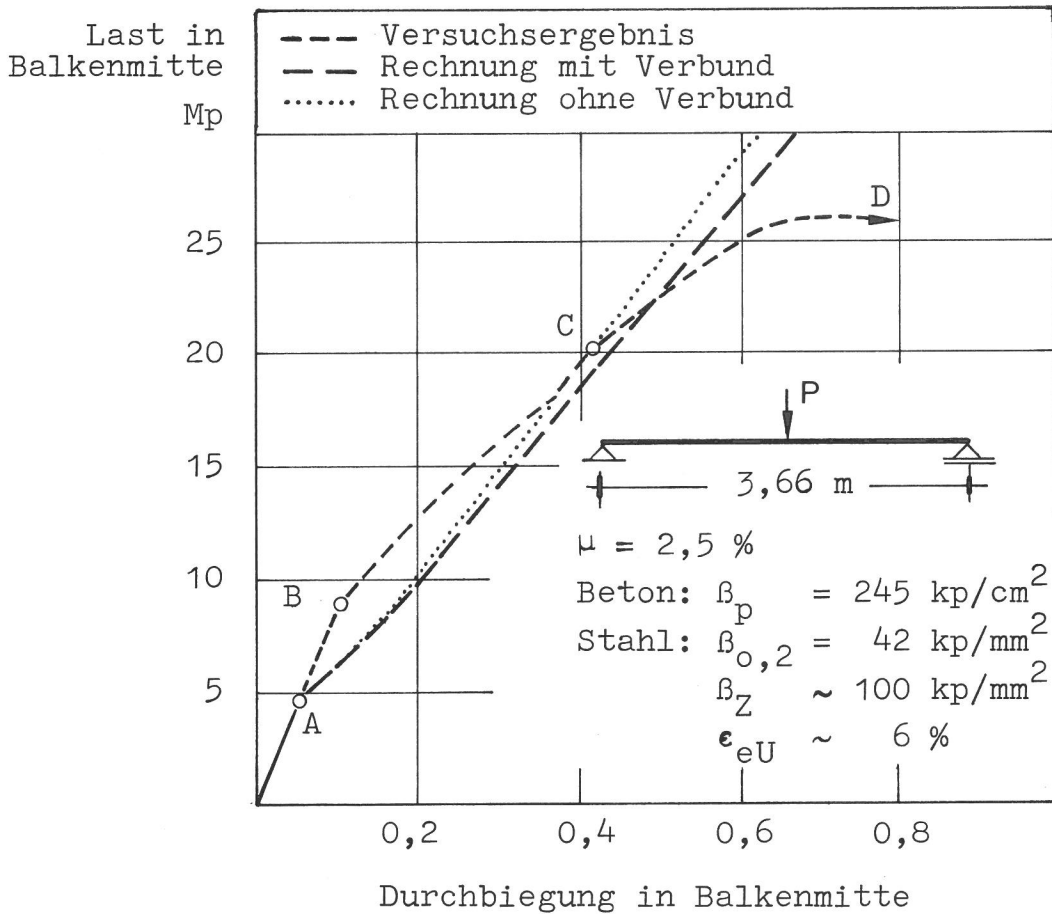


Bild 5: Für das Elementmodell in Bild 4 ermittelte Durchbiegungen (Franklin [22])



mungs-Diagramm (Bild 5) zeigt zwar eine Änderung der Steifigkeit des Elementmodells bei Erreichen einer rechnerisch ermittelten Rißlast an, die Last-Verformungs-Kurve verläuft jedoch von diesem Punkt A an fast linear bis zum Bruch des Balkens weiter. Die bei höheren Belastungen im Versuch auftretenden plastischen Verformungen (Linie C-D) können durch die Rechnung nicht erfaßt werden.

Die Arbeit von Cervenka [23] behandelt die nichtlineare Berechnung von scheibenförmigen, in ihrer Ebene belasteten Bauteilen. Neu ist die Verwendung eines einzigen Elements für Beton und Bewehrung. Die Bewehrung besteht hierbei nicht mehr aus einzelnen Stäben, sondern ist über das Betonelement als gleichmäßig verteilte Schicht "verschmiert", wobei jedoch die Wirkungsrichtung der Bewehrung erhalten bleibt. Die Stoffmatrix des Elements wird durch Addition der Stoffmatrizen für Beton und Stahl gewonnen. Für die einzelnen Bewehrungsschichten sind die Stoffmatrizen dabei jedoch zunächst in einem lokalen Koordinatensystem aufzustellen. Das hier entwickelte Konzept kann damit vorteilhaft zur Berechnung von Scheiben mit netzförmiger Bewehrung eingesetzt werden. In der Rechnung wird elastisch-idealplastisches Stoffverhalten vorausgesetzt. Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton findet keine Berücksichtigung. Es erfolgt eine iterative Ermittlung von Spannungen und Verformungen entsprechend dem Newton-Raphson-Verfahren für eine schrittweise aufgebrachte Belastung. Die für orthogonal bzw. einsinnig bewehrte Scheiben ermittelten Rißbilder und Verformungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Werten. Eine Anwendung des Verfahrens auf die Untersuchung von Stahlbetonbalken ist nicht sinnvoll, da die entwickelte Methode einen starren Verbund zwischen Beton und Bewehrung im Element voraussetzt. Ein weiterer Nachteil des verwendeten Rechenmodells ist darin zu sehen, daß gerissene Elemente keine Schubsteifigkeit mehr besitzen.

In der Arbeit von Lassker [26] läßt sich keine Weiterentwicklung der nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonbauteilen erkennen. In ähnlicher Weise wie bei Franklin [22] erfolgt die Spannungs-Verformungsberechnung an Stahlbetonbalken. Ein Vergleich von Rechenergebnissen mit Versuchsergebnissen wird nicht vorgenommen.

In den Arbeiten von Saugy [24], Saugy und Zimmermann [25] wird Beton näherungsweise als ein "quasi isotroper" Stoff betrachtet. Die Plastizitätstheorie stellt ein Stoffgesetz zur Ermittlung von Spannungen und Verzerrungen eines sich unter mehrachsiger Beanspruchung nichtlinear verformenden isotropen und homogenen Werkstoffes zur Verfügung. Für Beton können die in diesem Stoffgesetz enthaltenen Parameter - Kompressions- und Gleitmodul - nur experimentell bestimmt werden. Das zur Untersuchung von Stahlbetonbalken verwendete Elementmodell enthält jedoch keine Verbundelemente. Die in [24] durchgeführte Rechnung beschränkt sich auf die Spannungs-Verformungsermittlung eines Stahlbetonbalkens, der bis zu einer Last, die 70 % der Traglast entspricht, belastet wird. Nach Erreichen dieser Belastung divergiert das zur nichtlinearen Berechnung eingesetzte Iterationsverfahren.

Eine Kopplung der beiden bekannten Iterationstechniken, die entweder eine variable oder eine konstante Steifigkeit des Rechenmodells während der iterativen Verformungsermittlung im Belastungsintervall vorsehen, erfolgt durch Nam [27]. Die Steifigkeitsmatrix des Elementmodells wird hierbei lediglich beim Auftreten von Rissen neu aufgebaut, bleibt jedoch bei reinem Werkstoffplastizieren unverändert. Die rechnerischen Untersuchungen erfolgen an einem Stahlbetonbalken sowohl nach diesem kombinierten Verfahren als auch nach dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren, das eine konstante Steifigkeit des Elementmodells während der gesamten Iteration vorsieht. Die ermittelten Ergebnisse weichen jedoch nur unwesentlich voneinander ab. Durch die Verwendung inkompatibler isoparametrischer Elemente (isoparametrische Elemente wurden bereits in [25] angewendet) kann die Steifigkeit plastizierter, gerissener Betonelemente lediglich näherungsweise bestimmt werden. Da der Verbund zwischen Bewehrung und Beton im verwendeten Elementmodell nicht enthalten ist, weichen Rechen- und Versuchsergebnisse im Bereich plastischer Balkenverformungen erheblich voneinander ab (Bild 6). Die Unvollständigkeit des Rechenmodells fällt jedoch unter den besonderen Bedingungen des gewählten Rechenbeispiels nicht so sehr ins Auge, da infolge des hohen Bewehrungsprozentsatzes die plastischen Verformungen des untersuchten Balkens relativ klein sind. Im übrigen ist das Verschiebungsdiagramm unvollständig. Erfah-



rungsgemäß treten oberhalb einer Belastung von  $P = 0,9 \cdot P_u$  noch starke plastische Balkenverformungen auf. Die analytisch ermittelte Last-Verschiebungskurve zeigt jedoch die Tendenz, linear weiter bis zum Erreichen der Tragfähigkeit zu verlaufen.

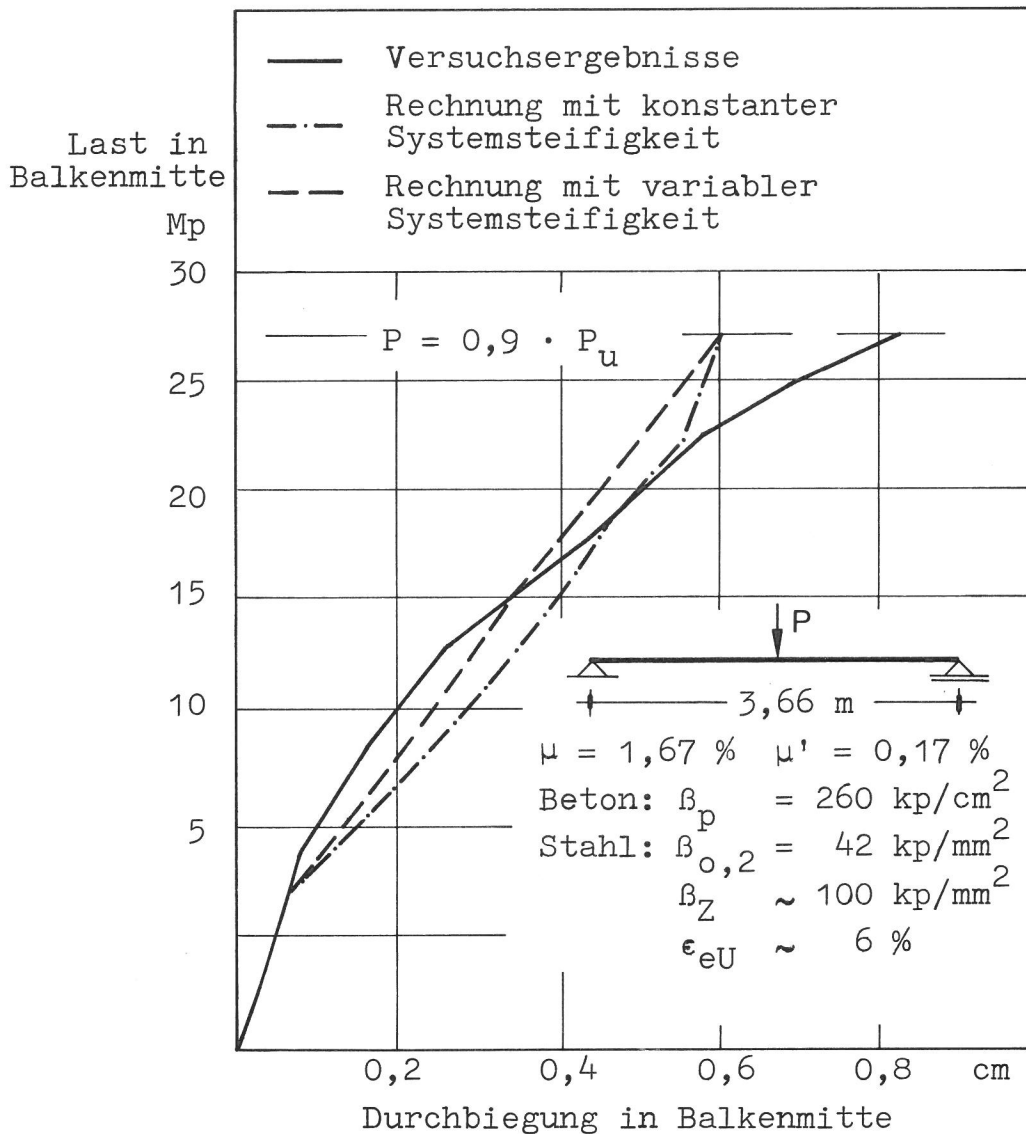


Bild 6: Mit verschiedenen Iterationstechniken ermittelte Abhängigkeit zwischen Belastung und Verschiebung eines Stahlbetonbalkens (Nam [27])

Die Berechnung ebener Flächentragwerke aus Stahlbeton im gerissenen Zustand wird in der Arbeit von Grünberg [42] vorgenommen. Die rechnerischen Untersuchungen konzentrieren sich auf die Ermittlung von Rissen in Balken, Scheiben und Plattenbalken. Die Idealisierung von Balken und Scheibe erfolgt durch rechteckige Scheibenelemente. Der Plattenbalken wird entweder als Scheibe mit abgestufter Dicke oder als Platte mit konstanter Dicke und exzentrisch angeschlossenenem biege-

steifen Stab aufgefaßt. Im zweiten Falle erfolgt die Idealisierung durch rechteckige Platten- bzw. Stabelemente, die ähnlich wie bei [ 22 ] aus einzelnen Lamellen aufgebaut sind. Die Ermittlung von Rissen unter Berücksichtigung des nicht-linearen Werkstoffverhaltens erfolgt iterativ. Angewendet werden die Methode der Sekantenmoduli und die Methode der Anfangslasten. Bei der Methode der Sekantenmoduli erfolgt eine Änderung der Elementsteifigkeiten während der Iteration, wobei Spannungen und Verzerrungen der Elemente durch einen veränderlichen Sekantenmodul miteinander verknüpft sind. Bei der Methode der Anfangslasten hingegen wird die Ausgangssteifigkeit der Elemente während der gesamten Iteration beibehalten. Risse und Werkstoffplastizieren werden durch Eigenspannungszustände berücksichtigt, die aus den sog. Anfangsspannungen und Anfangsknotenlasten der einzelnen Elemente resultieren. Dieses Vorgehen ist weitgehend mit dem Newton-Raphson-Verfahren identisch. Die äußere Belastung kann bei beiden Iterationsverfahren sowohl in voller Höhe als auch stufenweise aufgebracht werden. Der Berechnung wird ein nichtlineares Stoffgesetz für den Beton zugrundegelegt, das einen homogenen isotropen Werkstoff voraussetzt. Die Formulierung der Bruchbedingung für Beton geht von der Mohr'schen Bruchhypothese aus, in die jedoch die Versuchsergebnisse [ 34 ] eingearbeitet werden. Als Stoffgesetz für den Bewehrungsstahl findet die Arbeitslinie des einachsigen beanspruchten Zugstabes Verwendung. Angenommen wird jedoch ein starrer Verbund zwischen Beton und Bewehrung, d. h. Verschiebungen zwischen Beton und Bewehrungselementen sind nicht möglich. Anhand der durchgeführten Beispielrechnungen zeigt sich deutlich, daß die Annahme eines starren Verbundes zum Aufreißen fast der gesamten Zugzone eines Balkens bzw. einer Scheibe führt. Hieraus muß gefolgert werden, daß bei Annahme eines starren Verbundes sowohl die Ermittlung eines realistischen Rißbildes als auch die Ermittlung des tatsächlichen Last-Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken mit Bewehrungsprozentsätzen  $\mu = 0,3 \%$  bis  $1,5 \%$  (diese Bewehrungsprozentsätze ermöglichen die Entstehung "plastischer Gelenke") nicht möglich ist.

### 1.2.3 Schlußfolgerungen

Die den empirischen Rechenverfahren zugrundeliegenden Vereinfachungen ermöglichen in vielen Fällen lediglich eine näherungsweise Ermittlung der tatsächlich auftretenden plastischen Bauteilverformungen. Eine Untersuchung von Balken, in denen sich infolge größerer Querkräfte ein sog. "Schubrißgelenk" bildet, bereitet erhebliche Schwierigkeiten, die nur durch weitere zusätzliche Rechenannahmen, z. B. bezüglich der Schnittlastenverteilung im Bereich des Gelenkes, behoben werden können.

Rechenverfahren, die auf der Methode der Finiten Elemente basieren, sind zweifellos besser geeignet zur Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke, da die Rechenmodelle und Stoffgesetze dem zu lösenden Problem weitgehend angeglichen werden können. Die Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens selbst geometrisch kompliziert aufgebauter Bereiche einer Konstruktion bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die Ergebnisse bisher durchgeführter Verformungsberechnungen an Stahlbetonbalken zeigen jedoch nur eine teilweise Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Werten. Eine gute Übereinstimmung wird erzielt, solange sich der betrachtete Balken elastisch verformt bzw. sich im elastischen Stadium II befindet. Die Änderung der Biegesteifigkeit infolge ausgeprägter Ribbildung wird durch die Rechnung erfaßt. Nicht erfaßt werden jedoch die eigentlichen plastischen Verformungen der jeweils untersuchten Balken. Voraussetzung für eine Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke ist jedoch gerade die möglichst genaue Bestimmung der plastischen Verformungen hoch beanspruchter Bereiche einer Konstruktion.

Zusammenfassend muß festgestellt werden, daß einer Extrapolation von Versuchsergebnissen durch empirische Methoden Grenzen gesetzt sind und die Rechenverfahren auf der Grundlage der Finiten Elemente infolge ihrer bisherigen Unvollkommenheit keine vollständige Lösung des vorliegenden Problems -- Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl -- zulassen.

### 1.3 Ziel und Umfang der durchgeführten Untersuchungen

Das Ziel der durchgeführten Untersuchungen besteht in der Entwicklung eines Rechenverfahrens auf der Grundlage der Methode der Finiten Elemente, das eine wirklichkeitsnahe Approximation des nichtlinearen Verhaltens von Konstruktionselementen aus Stahlbeton an Versuchswerte ermöglicht. Das zu erstellende Rechenprogramm soll zunächst die Ermittlung der Verformungen vorwiegend auf Biegung und bis zum Erreichen der Traglast beanspruchter Stahlbetonbalken ermöglichen. Eine Lösung des vorliegenden Problems wird durch die folgenden Verbesserungen der bisher bekannten nichtlinearen Berechnungsmethoden erreicht:

- Verwendung eines in sich weitgehend widerspruchsfreien Rechenmodells
- Entwicklung eines Iterationsverfahrens, das eine nahezu exakte Ermittlung des Spannungs- und Deformationszustandes gerissener, plastizierter Tragwerksbereiche gestattet.
- Wirklichkeitsnahe Approximation des Verbundverhaltens.

Durch einen Vergleich von Rechen- und Versuchsergebnissen wird gezeigt, daß eine mit dem entwickelten Rechenverfahren durchgeführte "Feinstrukturanalyse" sowohl das Verformungsverhalten eines Stahlbetonbalkens im plastischen Bereich als auch die Rißbildung sehr genau simuliert.

Im folgenden werden die oben angeführten, das entwickelte Verfahren kennzeichnenden "Bausteine" eingehend erläutert, womit gleichzeitig eine Abgrenzung gegenüber den in Abschnitt 1.2 beschriebenen Arbeiten erfolgt.

Der Aufbau des finiten Elementmodells erfolgt durch Rechteckelemente mit linearem Verschiebungsansatz für Beton und Bewehrung sowie Federelementen für den Verbund zwischen Beton und Bewehrung. In folgenden Punkten unterscheidet sich das Rechenmodell von den bisher verwendeten Elementmodellen:

- Die Diskretisierung des Balkens in Einzelelemente wird dem zu erwartenden Rißbild angepaßt, d.h.

nach erfolgter Rißbildung müssen zwischen Rissen in der Umgebung der Bewehrung noch eine Anzahl ungerissener Betonelemente verbleiben. Eine derartige Diskretisierung erweist sich als unbedingt erforderlich, da erhebliche Unterschiede hinsichtlich der Verbundsteifigkeit an einem Riß bzw. im Bereich zwischen Rissen oder ungerissenen Zonen eines Balkens bestehen.

- Das Elementmodell enthält Verbundelemente, die sowohl das Spannungs-Verformungsverhalten an einem Riß als auch zwischen Rissen wirklichkeitsnah simulieren.

Daß der Verbund unbedingt in das Rechenmodell mit einbezogen werden muß, zeigen die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen. Eine vollständige Vernachlässigung des Verbundes (Saugy [24], Saugy und Zimmermann [25], Nam [27]), muß daher zwangsläufig zu einem wesentlichen Verlust an Rechengenauigkeit führen.

Die Ermittlung von Spannungen und Verformungen eines Rechenmodells, dessen Steifigkeit sich durch Plastizieren und Reißen einzelner Elemente ständig ändert, ist nur durch Anwendung von Iterationsverfahren möglich. Bei dem in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsverfahren erfolgt die Aufbringung der äußeren Belastung auf das Elementmodell schrittweise (inkrementelle Lastmethode). Innerhalb des einzelnen Lastintervalls werden Risse, Spannungen und Verformungen iterativ durch ein Verfahren bestimmt, das die beiden Newton-Raphson-Methoden (Neuaufbau der Steifigkeitsmatrix des Elementmodells in jedem Iterationsschritt bzw. Steifigkeitsmatrix des Elementmodells unverändert während der gesamten Iteration) miteinander koppelt.

Die in dieser Arbeit eingesetzte Iterationstechnik besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit dem von Nam [27] verwendeten Verfahren, unterscheidet sich jedoch von diesem in einem Punkt ganz wesentlich:

- Das Entstehen neuer bzw. die Fortentwicklung bereits bestehender Risse ist nicht in jedem Iterationsschritt zugelassen. Die Rißentwicklung

wird schrittweise im Belastungsintervall vollzogen.

Nach dem Aufreißen von Betonelementen im Iterationsschritt  $i$  erfolgt ein Neuaufbau der Steifigkeitsmatrix des Elementmodells im Iterationsschritt  $i + 1$ . In mehreren darauffolgenden Iterationsschritten wird bei gleichbleibender Systemsteifigkeit eine Kompatibilität zwischen Elementspannungen und -verformungen hergestellt. Es wird damit erst eine vollkommene Umlagerung der Spannungen gerissener Betonelemente auf die ungerissene Umgebung abgewartet, ehe eine weitere Rißausbreitung erfolgen kann.

Im Gegensatz zu den von Franklin [ 22 ] und Nam [ 27 ] angewendeten Iterationstechniken, die das Entstehen von Rissen in jedem einzelnen Iterationsschritt zulassen, bietet das in dieser Arbeit entwickelte Iterationsverfahren folgende Vorteile:

- Ermittlung eines Rißbildes, aus Einzelrissen bestehend (im Gegensatz zum Rißkontinuum)
- Wirklichkeitsnahe Simulation der Rißbildung in der Umgebung der Balkenbewehrung - damit ist es möglich, den Einfluß des Verbundes auf die plastischen Verformungen des Balkens zu erfassen.

Erstmalig werden in der hier vorgelegten Arbeit bei einer nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonbalken zur Beschreibung des Spannungs-Verformungsverhaltens des Verbundes zwischen Beton und Bewehrung verwendet:

- Verbundgesetze für Verbundelemente an einem Riß
- Verbundgesetze für Verbundelemente in ungerissenen Bereichen
- Berücksichtigung des Einflusses der plastischen Stahldehnung auf die Verbundsteifigkeit.

Bisher verwendete Verbundgesetze beschreiben das Verbundver-

halten recht ungenau. In den Rechnungen erfolgt dadurch meist eine intensive Rißbildung in nebeneinanderliegenden Betonelementen, die sich zunächst auf die Umgebung der Bewehrungsstäb-  
le erstreckt, jedoch schließlich die gesamte Betonzugzone er-  
faßt.

Abschließend wird anhand einer Reihe von Beurteilungskrite-  
rien in den Tafeln 1 ein Vergleich zwischen den bisher ver-  
wendeten mathematisch-mechanischen Modellen und Rechenverfah-  
ren und der in dieser Dissertationsschrift entwickelten Metho-  
de vorgenommen. Durch diese tabellarische Zusammenstellung  
erfolgt eine klare Abgrenzung der hier dargelegten neuen Me-  
thode von den bisherigen theoretischen Entwicklungen anderer  
Autoren.



Fortsetzung

Tafel 1: Vergleichende Darstellung des Vorgehens verschiedener Autoren bei der Ermittlung von Spannungen und Verformungen in Bauteilen aus Stahlbeton

		Empirische Methoden [8-12]	Erweiterte empirische Methoden [15-16]	Finite Element-methode							
				Scordelis u. Ngo [20]	Nilson [21]	Franklin [22]	Saugy [24-25]	Nam [27]	Verfasser		
Beschreibung des Materialverhaltens	Beton	<ul style="list-style-type: none"> <li>Werkstoff homogen und</li> <li>- isotrop</li> <li>- "quasi isotrop"</li> <li>- orthotrop (Achsenrichtung abhängig vom Spannungstensor)</li> <li>Spannungs-Verzerrungsverhalten</li> <li>- elastisch</li> <li>- elastisch-idealplastisch</li> <li>- nichtlinear (entsprechend einachsigen Druck- bzw. Zugversuch)</li> <li>- nichtlinear (entsprechend zweiachsigen Versuchen)</li> </ul>	●	●	●		●	●	●	●	●
	Bewehrungsstahl	<ul style="list-style-type: none"> <li>Werkstoff homogen und</li> <li>- isotrop</li> <li>- orthotrop (Achsenrichtung abhängig vom Spannungstensor)</li> <li>Spannungs-Verzerrungsverhalten</li> <li>- elastisch</li> <li>- elastisch-idealplastisch</li> <li>- nichtlinear (entsprechend einachsigen Zugversuch)</li> </ul>	●	●	●	●	●	●	●	●	
	Verbund	<ul style="list-style-type: none"> <li>Starrer Verbund</li> <li>Konstanter Verbundmodul</li> <li>Näherung für Größe und Verteilung der Verbundspannungen zwischen Rissen</li> <li>Elastisch-idealplastisches Spannungs-Verchiebungsgesetz (gleich für sämtliche Stähle)</li> <li>Nichtlineares vollständiges Gesetz für den Verbund; Parameter: Durchmesser, Oberfläche, Dehnungszustand des Stahls, Lage des Verbundintervalls zum Riß</li> </ul>	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Beschreibung des Bruchverhaltens (Bruchkriterium)	Beton	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bruchstauchung oder Betonzugfestigkeit (aus einachsigen Versuchen)</li> <li>Bruchgrenzkurve für den ebenen Spannungszustand - idealisiert - (aus zweiachsigen Versuchen)</li> <li>Bruchgrenzkurve als Schnittkurve der Bruchhyperfläche (Verwendung der Versuchsergebnisse [33])</li> </ul>	●	●		●	●	●	●	●	
	Bewehrungsstahl	<ul style="list-style-type: none"> <li>Maximale Dehnung (entsprechend einachsigen Zugversuch)</li> </ul>	●	●		●	●			●	
	Verbund	<ul style="list-style-type: none"> <li>Maximaler Ausziehweg</li> <li>Bruchgrenzkurve für den Verbund (entsprechend dem nichtlinearen vollständigen Gesetz s.o.)</li> </ul>		●		●	●			●	



Tafel 1: Vergleichende Darstellung des Vorgehens verschiedener Autoren bei der Ermittlung von Spannungen und Verformungen in Bauteilen aus Stahlbeton

		Empirische Methoden [8-12]	Erweiterte empirische Methoden [15-16]	Finite Elementmethode					
				Scordelis u. Ngo [20]	Nilson [21]	Franklin [22]	Saugy [24-25]	Nam [27]	Verfasser
Rechenmodell	bestehend aus	●	●	●	●	●	●	●	●
	Vereinfachende Annahmen	●	●	●	●	●	●	●	●
	Gleichgewichtsbedingungen	●	●	●	●	●	●	●	●
	Einbeziehung der Rißbildung in das Rechenmodell durch	●	●	●	●	●	●	●	●

Fortsetzung

Tafel 1: Vergleichende Darstellung des Vorgehens verschiedener Autoren bei der Ermittlung von Spannungen und Verformungen in Bauteilen aus Stahlbeton

		Empirische Methoden [8-12]	Erweiterte empirische Methoden [15-16]	Finite Elementmethode					
				Scordelis u. Ngo [20]	Nilson [21]	Franklin [22]	Saugy [24-25]	Nam [27]	Verfasser
Ermittlung von Spannungen und Verformungen plastizierter Konstruktionsbereiche	Technik der inelastischen Berechnung	●	●		●	●	●		●
	Durchgeführte Spannungs-Verformungs-Berechnungen	●	●		●	●	●	●	●

## 2.0 Methode der Finiten Elemente - Grundlagen der Spannungs-Verformungsberechnung elastischer Systeme

Den bereits erläuterten empirischen Methoden ist gemeinsam, daß die Berechnung von Stahlbetontraggliedern im gerissenen Zustand von einer Reihe stark vereinfachender Annahmen ausgeht. Insbesondere wird das Verbundverhalten, eine die Verformungseigenschaften entscheidend beeinflussende Größe, und damit die Tragwirkung des Betons zwischen Rissen entweder gar nicht oder nur durch grobe Näherungsansätze erfaßt. Um den tatsächlich in einem gerissenen Stahlbetontragglied vorhandenen Spannungs- und Verformungszustand rechnerisch ermitteln zu können, ist es jedoch unbedingt notwendig, auf die speziellen Eigenschaften des Verbundbaustoffs Stahlbeton, wie Nichtlinearität der Werkstoffe, das Verbundverhalten und die Rißbildung einzugehen und das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten zu berücksichtigen.

Die Finite Element Methode geht von der Modellvorstellung aus, daß eine beliebig geformte Konstruktion durch gedachte Schnitte in eine endliche Zahl von Teilbereichen, als Elemente bezeichnet, entsprechend Bild 7 zerlegt werden kann.

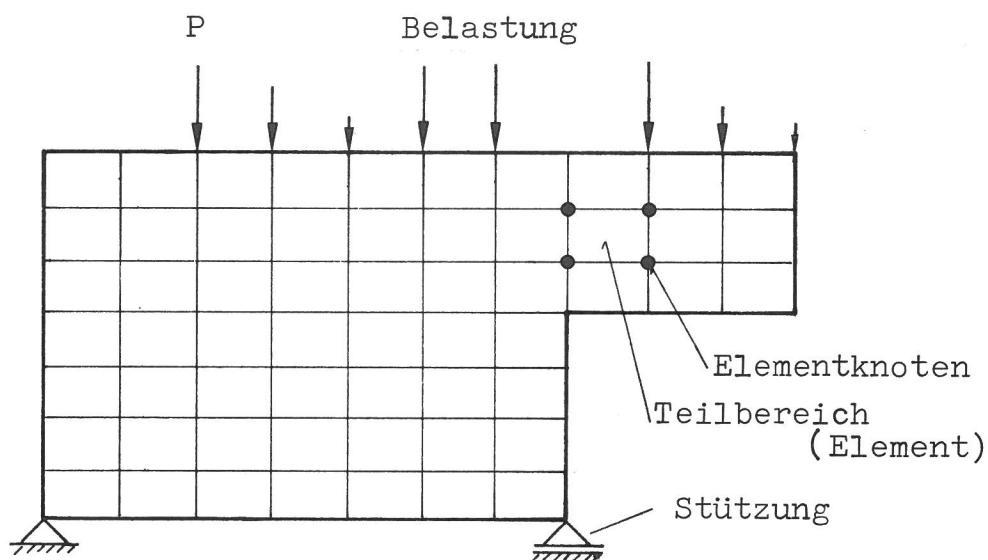


Bild 7: Durch Rechteckelemente diskretisierter wandartiger Träger

Benachbarte Elemente des Rechenmodells sind lediglich an einer bestimmten Anzahl von Knotenpunkten - angeordnet auf den Elementrändern, z. B. an den Elementecken - miteinander verbunden. Die Verschiebungen der Knotenpunkte werden als unbekannte Größen des Problems aufgefaßt. Die Ermittlung der Span-

nungen und Verformungen scheibenförmiger Tragglieder wird i.a. auf die Lösung des ebenen Spannungsproblems zurückgeführt. Wird der abgebildete wandartige Träger (Bild 7) als ebenes Spannungsproblem betrachtet, so müssen ebenfalls für jedes Element der diskretisierten Struktur die Bedingungen des ebenen Spannungszustandes ihre Gültigkeit besitzen. Zwischen den Spannungen und Dehnungen eines Elements besteht dann der Zusammenhang

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (1)$$

wobei die Elementspannungen  $\{\sigma\}$  und die Verzerrungen  $\{\epsilon\}$  an jedem inneren Punkt des Elements wie folgt definiert sind:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2) \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Die Anfangsspannungen  $\{\sigma_0\}$  des Elements resultieren aus dem Vorhandensein von Eigenspannungszuständen, die Anfangsdehnungen  $\{\epsilon_0\}$  können z. B. durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden. In Gl. (3) bezeichnen  $u$  und  $v$  die Verschiebungen im Inneren des Elements in Richtung der Koordinatenachsen  $x$  und  $y$ . Für den isotropen Werkstoff ergibt sich durch Anschreiben des Hook'schen Gesetzes die in Gl. (1) enthaltene Elastizitätsmatrix  $[D]$  zu:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Die Verzerrungen des Elements sind zunächst als unbekannte Größen zu betrachten. Gelingt ihre Ermittlung, so kann der Spannungszustand vollständig beschrieben werden. Da die Elemente des Rechenmodells nur an einzelnen Punkten miteinander verknüpft sind, müssen die Verzerrungen aus den Verschiebungen der Knotenpunkte gewonnen werden. Die Verschiebungen jedes Punktes innerhalb des Elements sind durch den Vektor  $\{f\}$  definiert:

$$\{f\} = [N] \{\rho\} = [N_i, N_j, N_m \dots] \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \rho_j \\ \rho_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5)$$

In diesem Ansatz bezeichnet die Spaltenmatrix  $\{\rho\}$  die Verschiebungen der Elementknoten  $i, j, m$  und der Vektor  $\{\rho_i\}$  die Verschiebungen  $u$  und  $v$  des Knotens  $i$ . Die einzelnen Komponenten der Matrix  $[N]$  sind so zu wählen, daß sie die entsprechenden Knotenverschiebungen liefern, wenn die Koordinaten der betreffenden Knoten in Gl. (5) eingesetzt werden.

Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen  $\{\epsilon\}$  und den Knotenverschiebungen  $\{\rho\}$  des Elements läßt sich mittels Gl. (3) und (5) herstellen.

$$\{\epsilon\} = [B] \{\rho\} \quad (6)$$

Werden zur Bestimmung von  $[N]$  in Gl. (5) lineare Ansatzfunktionen gewählt, so ist die Verzerrungsmatrix  $[B]$  nur von der Geometrie des Elements abhängig. Aus den Beziehungen (1) und (6) folgt dann eine im Element konstante Verteilung der Dehnungen und Spannungen. Bei Dreieckelementen und bei Wahl linearer Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld nach Gl. (5) besteht automatisch Kontinuität zwischen den Randverschiebungen benachbarter Elemente.

Anstelle von Elementrandspannungen, von äußeren oder inneren Kräften, die am Element angreifen, werden statisch äquivalente Knotenkräfte  $\{F\}$  eingeführt. Diese Knotenkräfte ergeben sich auf einfache Weise durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten. Die bei einer virtuellen Verrückung von Knotenkräften und Spannungen geleisteten virtuellen Arbeiten müssen dabei gleich sein.

Dazu werden dem Element virtuelle Verrückungen an den Knoten  $\delta\{\rho\}$  eingeprägt. Die Verschiebungen und Verzerrungen an einem beliebigen Punkt des Elements ergeben sich dann unter Verwendung der Gleichungen (5) und (6) zu:

$$\delta\{f\} = [N] \delta\{\rho\} \quad (7)$$

$$\delta\{\epsilon\} = [B] \delta\{\rho\} \quad (8)$$

Die von den Knotenkräften  $\{F\}$  geleistete virtuelle äußere Arbeit  $\delta A_a$  ist:

$$\delta A_a = \delta \{ \rho \}^T \{ F \} \quad (9)$$

Spannungen  $\{\sigma\}$  und Volumenkräfte  $\{p\}$  leisten die virtuelle innere Arbeit  $\delta A_i$ :

$$\delta A_i = - \delta \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} + \delta \{ f \}^T \{ p \} \quad (10)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit den Gleichungen (7) und (8) umformen zu:

$$\delta A_i = - ([B] \delta \{ \rho \} )^T \{ \sigma \} + ([N] \delta \{ \rho \} )^T \{ p \} \quad (11)$$

oder:

$$\delta A_i = - \delta \{ \rho \}^T ( [B]^T \{ \sigma \} - [N]^T \{ p \} ) \quad (12)$$

Insgesamt muß die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null sein, d. h. wird die äußere Arbeit gleich der negativen inneren Arbeit gesetzt, letztere ist dann noch über das gesamte Volumen  $V$  des Elements zu bilden, so entsteht:

$$\begin{aligned} \delta \{ \rho \}^T \{ F \} = & \delta \{ \rho \}^T \left( \int_V [B]^T \{ \sigma \} dV \right. \\ & \left. - \int_V [N]^T \{ p \} dV \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Da dieser Ausdruck für jeden möglichen Wert einer virtuellen Knotenverschiebung  $\delta \{ \rho \}$  gültig ist, muß die Gleichheit der Faktoren bestehen, so daß die Knotenkräfte gewonnen werden können:

$$\{ F \} = \int_V [B]^T \{ \sigma \} dV - \int_V [N]^T \{ p \} dV \quad (14)$$

In die Gleichung (14) ist Gleichung (1) einzusetzen:

$$\begin{aligned} \{ F \} = & \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{ \rho \} - \int_V [B]^T [D] \{ \epsilon_0 \} dV \\ & + \int_V [B]^T \{ \sigma_0 \} dV - \int_V [N]^T \{ p \} dV \end{aligned} \quad (15)$$

Die einzelnen Glieder der Gl. (15) bezeichnen die Steifigkeitsmatrix des Elements

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (15a)$$

die durch Anfangsdehnungen hervorgerufenen Knotenkräfte

$$\{F\}_{\epsilon_0} = - \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV \quad (15b)$$

die aus Anfangsspannungen resultierenden Knotenkräfte

$$\{F\}_{\sigma_0} = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (15c)$$

sowie Knotenkräfte infolge einer wirkenden Volumenkraft

$$\{F\}_p = - \int_V [N]^T \{p\} dV \quad (15d)$$

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Elementen und der Gesamtkonstruktion ergibt sich durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen für jeden einzelnen Knotenpunkt. Zu beachten ist hierbei, daß jede Komponente der am Knoten  $i$  angreifenden äußeren Kraft  $\{R_i\}$  mit der entsprechenden Summe aller Teilkräfte  $\{F_i\}$  der an diesem Knoten zusammentreffenden Elemente übereinstimmen muß. Es läßt sich damit ein System von Gleichungen erstellen von der Form:

$$\{R\} = [K]\{r\} + \{F\}_{\epsilon_0} + \{F\}_{\sigma_0} + \{F\}_p \quad (16)$$

Hierin ist  $\{R\}$  die Spaltenmatrix der als äußere Belastung aufgebrachten Knotenkräfte und  $\{r\}$  die Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen für das Gesamtsystem. Die einzelnen Untermatrizen der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[K]$  und der Knotenkräfte  $\{F\}$  sind durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} [K_{im}] &= \sum_e [k_{im}] \\ \{F_i\}_{\epsilon_0} &= \sum_e \{F_i\}_{\epsilon_0} \\ \{F_i\}_{\sigma_0} &= \sum_e \{F_i\}_{\sigma_0} \\ \{F_i\}_p &= \sum_e \{F_i\}_p \end{aligned} \quad (17)$$



gegeben und entsprechend den Gleichungen (15) zu bilden. Das Summationszeichen  $\Sigma$  besagt, daß die Summation auf alle Elemente zu erstrecken  $e$  ist. Einen von Null verschiedenen Beitrag leisten jedoch in Gl. (17) nur diejenigen Elemente, die den Knoten  $i$  selbst enthalten.

Das Gleichungssystem (16) hat  $m \cdot n$  Zeilen und Spalten, wobei  $m$  die Anzahl der Systemknoten ist und  $n$  die Anzahl der Freiheitsgrade je Knoten. Im Falle des ebenen Spannungszustandes sind an jedem Knoten die unbekanntes Verschiebungen  $u$  und  $v$  vorhanden. Das Gleichungssystem ist symmetrisch und besitzt Bandstruktur. Durch geschickte Wahl der Knotenpunktnumerierung kann die Bandbreite gesteuert werden.

Zur Lösung des Gleichungssystems ist es notwendig, in dieses die gegebenen Randbedingungen des betrachteten Systems, z. B. in Form von Verschiebungen an Lagern einzusetzen. Um eine kinematische Bewegung des Systems zu verhindern, muß eine Mindestanzahl von Randbedingungen eingeführt werden, andernfalls besitzt die Steifigkeitsmatrix keine Inverse, d. h.  $[K]$  wird singulär.

Nachdem die unbekanntes Knotenverschiebungen berechnet sind, lassen sich mit Hilfe von Gl. (6) und Gl. (1) für jedes Element der Spannungs- und Verzerrungszustand bestimmen. Die Berechnung elastischer Systeme nach der Methode der Finiten Elemente läßt sich wie folgt zusammenfassen:

- Diskretisierung des Traggliedes in eine endliche Anzahl von Elementen
- Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen
- Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den Elementsteifigkeitsmatrizen (Gleichgewichtsbedingungen des Elementmodells)
- Ermittlung der Spaltenmatrix der Knotenkräfte aus der äußeren Belastung
- Ermittlung der unbekanntes Knotenverschiebungen als Lösungsvektor des Systems der Gleichgewichtsbedingungen
- Ermittlung der Elementspannungen und -verzerrungen aus den Verschiebungen der Elementknoten.



Spannungen und Verzerrungen eines Bauteils, das unter einer gegebenen Beanspruchung lediglich elastische Verformungen erleidet, lassen sich damit durch einmaliges Abarbeiten der oben genannten Rechenanweisungen bestimmen. Eine Modifizierung dieses grundlegenden Rechenablaufs ist jedoch erforderlich bei der Berechnung plastischer Verformungen unter Verwendung nichtlinearer Werkstoff- und Verbundgesetze und unter Berücksichtigung der Riß- und Bruchkriterien von Beton.

Eine hervorragende Darstellung der Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten der Methode der Finiten Elemente wird in den Büchern von Zienkiewicz [17], Przemieniecki [18], Holand und Bell [19] u. a. gegeben.

## 3.0 Das finite Elementmodell eines Stahlbetonbalkens

### 3.1 Diskretisierung des Stahlbetonbalkens

Die Spannungs-Verformungsberechnung eines querbelasteten Stahlbetonbalkens geht davon aus, daß sich im Balken selbst in erster Näherung ein ebener Spannungszustand ausbildet. Unter dieser Voraussetzung kann die Ermittlung des sonst räumlichen Spannungs-Verformungszustandes reduziert werden auf die Ermittlung des ebenen Spannungszustandes einer Balkenscheibe der Breite Eins.

Das finite Elementmodell wird aufgebaut aus rechteckigen Stahl- und Betonelementen (Bild 8 und 9). Im Bereich der Bewehrung sind Beton- und Bewehrungselemente übereinanderliegend angeordnet. Der Verbund wird im Rechenmodell durch eine Kette von Federelementen simuliert. Die Anordnung der einzelnen Federelemente ist in Bild 9 b gezeigt. Jeder Eckpunkt eines Bewehrungselementes ist mit zwei Federn, die jeweils parallel und senkrecht zur Bewehrungsstahlachse verlaufen, an ein entsprechendes Betonelement angeschlossen. Ist das Modell noch lastfrei, so liegen die Eckpunkte des Bewehrungselements  $e_1, e_2, e_3, e_4$  und die Eckpunkte des Betonelements  $b_1, b_2, b_3, b_4$  übereinander. Die Länge der Federn ist dann Null. Die Verbundelemente ermöglichen damit eine Verschiebung zwischen der Bewehrung und der unmittelbar angrenzenden Betonschicht.

Sind Balkenabmessungen, Bewehrungsführung und Belastung symmetrisch zur Balkenmitte, so kann anstelle des entsprechend Bild 8 diskretisierten Balkens ein Rechenmodell nach Bild 9 a verwendet werden. Diese Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Stahlbetonbalkens reduziert den Rechenaufwand erheblich.

In den Bildern 8 und 9 a wurde vereinfachend lediglich ein über die Balkenlänge geradlinig verlaufender Bewehrungsstahl in der Zugzone des Balkens angenommen. Prinzipiell ist es jedoch möglich, eine beliebige Bewehrungsführung - Aufbiegung von Längsstählen und Bügeln als Schubbewehrung, Druckbewehrung usw. - im Rechenmodell zu berücksichtigen.

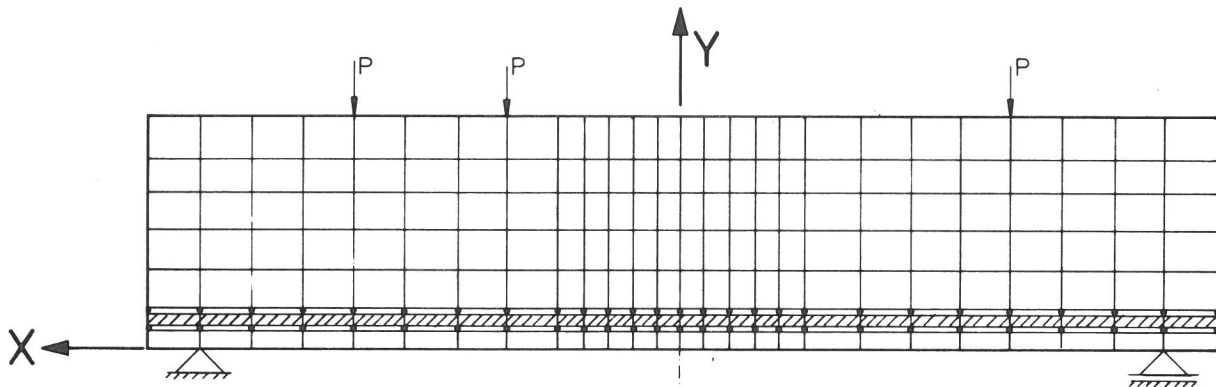


Bild 8: Finites Elementmodell eines querbelasteten Stahlbetonbalkens mit beliebiger Anordnung der Belastung

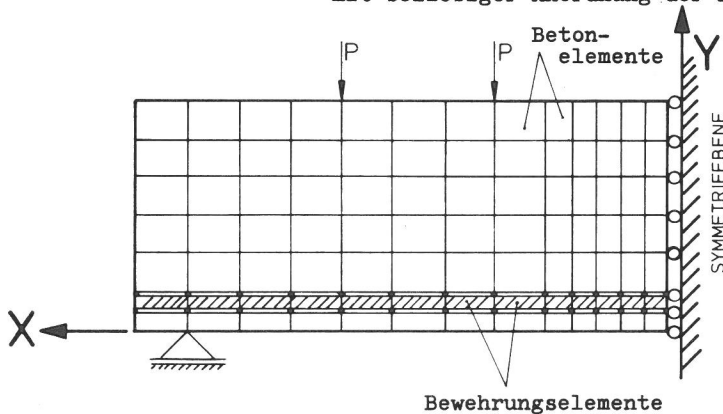


Bild 9a: Finites Elementmodell eines Stahlbeton-Balkens - Abmessungen, Bewehrungsführung und Belastung symmetrisch zur Balkenmitte

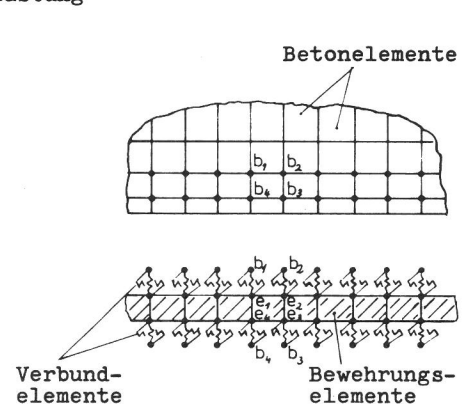


Bild 9b: Verbundelemente zwischen Bewehrung und Beton

### 3.2 Darstellung der Querschnittswerte

Bild 10 zeigt einen Stahlbetonquerschnitt mit  $n$  Bewehrungsstäben des Durchmessers  $d_e$ , die gleichmäßig über die Querschnittsbreite verteilt sind.

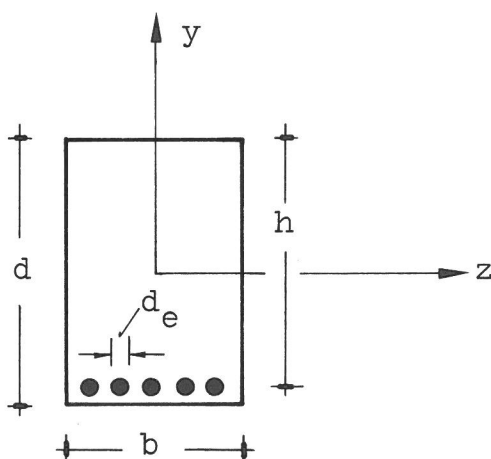


Bild 10: Stahlbetonquerschnitt

Vorausgesetzt wird ein ebener Spannungszustand, d. h. Spannungen  $\sigma_z$ , die normal zur Scheibenebene wirken, werden vernachlässigt. Damit kann die Querschnittsbreite auf die Einheitsbreite (s. Bild 11) reduziert werden.

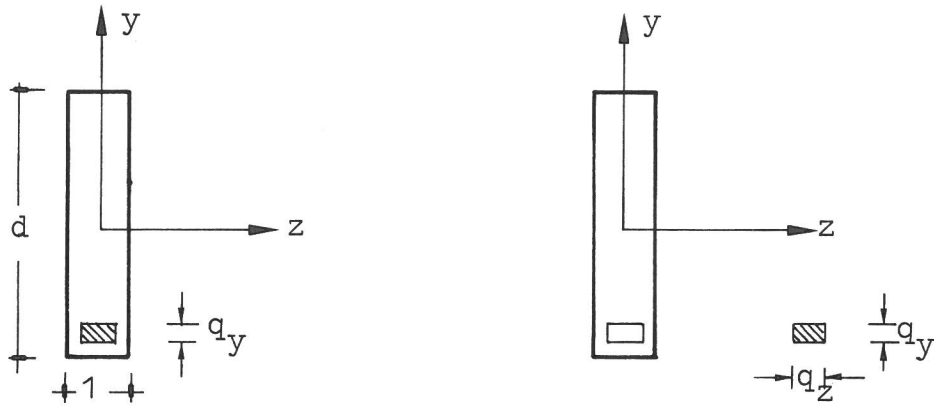


Bild 11: Reduzierte Querschnittsflächen

Die Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabes wird auf eine äquivalente Quadratfläche mit einer Kantenlänge  $q_y$  umgerechnet:

$$q_y = \sqrt{\frac{\pi d_e^2}{4}} = \frac{d_e}{2} \cdot \sqrt{\pi} \quad (18)$$

Bei  $n$  vorhandenen Bewehrungsstäben ergibt sich die Breite  $q_z$  des Bewehrungsquerschnitts, bezogen auf einen Querschnittsstreifen mit einer Breite Eins zu:

$$q_z = \frac{n}{b} \cdot \sqrt{\frac{\pi d_e^2}{4}} = \frac{n \cdot d_e}{2 b} \cdot \sqrt{\pi} \quad (19)$$

Im Bereich der Bewehrung verbleibt damit eine Restbreite  $q_b$  für den Beton von:

$$q_b = 1 - q_z = 1 - \frac{n \cdot d_e}{2 b} \cdot \sqrt{\pi} \quad (20)$$

Die Variation der Elementdicken ist sehr einfach zu realisieren, da die Steifigkeitsmatrix des Elements direkt proportional zur Elementdicke ist.

Bei einer Länge des Verbundintervalls  $l_v$  entfällt auf das einzelne Verbundelement die Verbundfläche

$$A_v = \frac{n \pi d_e}{b} \cdot 0,5 \cdot l_v \quad (21)$$

bezogen auf die Einheitsbreite des Querschnittes.

Der Faktor 0,5 zeigt an, daß jeweils zwei Verbundelemente im Verbundintervall an den Knoten der Bewehrungselemente angebracht werden (Bild 12).

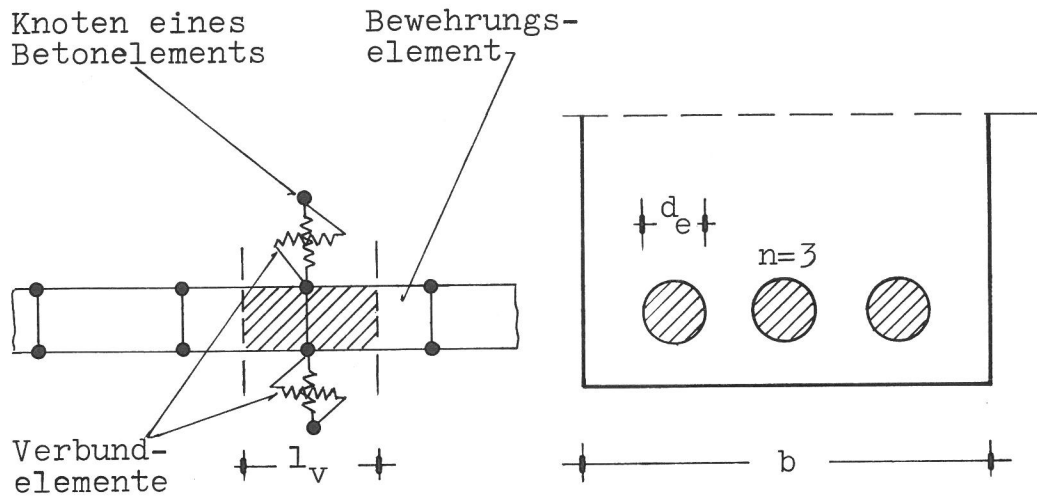


Bild 12: Auf das Verbundelement entfallende Verbundfläche

### 3.3 Steifigkeitsmatrix für Verbundelemente

Jedes Verbundelement wird aus zwei nicht miteinander gekoppelten Federn aufgebaut. Diese Federn sind jeweils parallel und senkrecht zur Achse eines Bewehrungselementes angeordnet, d. h. in Richtung des lokalen h-v-Koordinatensystems (Bild 13).

Die Steifigkeitsmatrix des Verbundelements setzt sich somit aus den beiden Federsteifigkeiten  $k_h$  und  $k_v$  der in h- und v-Richtung angeordneten Einzelfedern zusammen. Bild 13 zeigt ein Bewehrungselement, das um einen Winkel  $\varphi$  gegenüber der Balkenachse (x und y sind die globalen Koordinaten) geneigt ist, mit den dazugehörigen Verbundelementen.

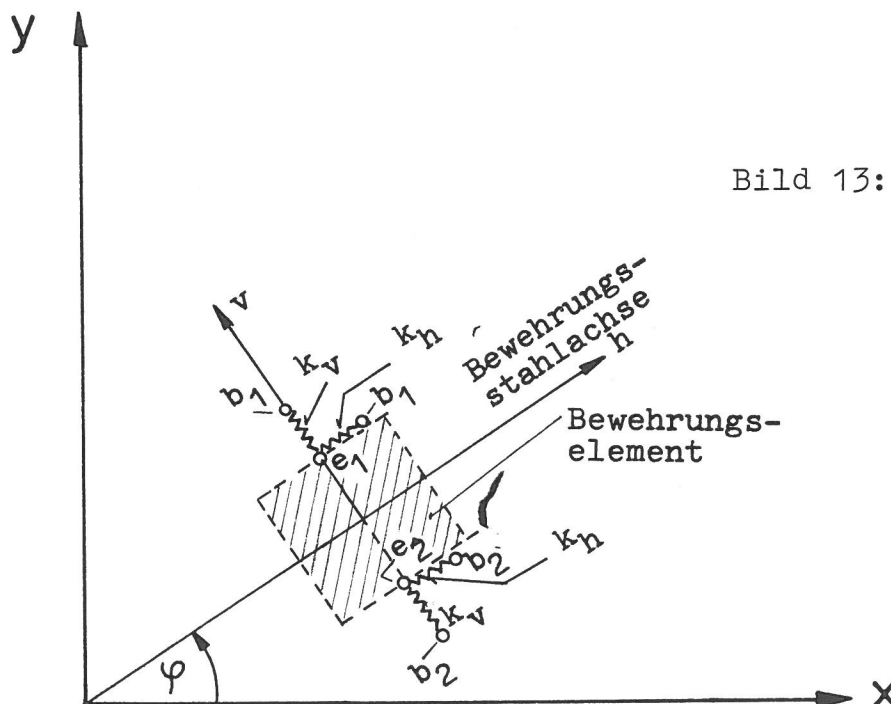


Bild 13: Verbundelemente

Die Abhängigkeit der Federkräfte  $\{F\}$  von den Relativverschiebungen  $\{s\}$  für Verbundelemente zwischen Bewehrung und Beton kann wie folgt beschrieben werden:

$$\left\{ F_{h,v} \right\} = \left[ k_{h,v} \right] \left\{ s_{h,v} \right\} \quad (22)$$

ausgeschrieben:

$$\begin{Bmatrix} F_h \\ F_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_h \\ s_v \end{Bmatrix} \quad (22a)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $[k_{h,v}]$  des Federelements im h-v-Koordinatensystem ist in das übergeordnete x-y-Koordinatensystem zu transformieren.

Diese Transformation der Verschiebungen und Knotenkräfte in das x-y-Koordinatensystem kann auf einfache Weise vorgenommen werden, mit einer Transformationsmatrix  $[L]$

$$\left\{ s_{h,v} \right\} = [L] \left\{ s_{x,y} \right\} \quad (23)$$

$$\left\{ F_{h,v} \right\} = [L] \left\{ F_{x,y} \right\} \quad (24)$$

bzw.

$$\left\{ F_{x,y} \right\} = [L]^T \left\{ F_{h,v} \right\} \quad (24a)$$

Mit den Gleichungen (22), (23), (24a) läßt sich folgender Ausdruck bilden:

$$\left\{ F_{x,y} \right\} = [L]^T [k_{h,v}] [L] \left\{ s_{x,y} \right\} \quad (25)$$

Die Steifigkeitsmatrix des Verbundelementes im x-y-Koordinatensystem ist damit ermittelt:

$$[k_{x,y}] = [L]^T [k_{h,v}] [L] \quad (26)$$

Die zur Transformation benötigte Matrix  $[L]$  läßt sich aus Bild 13 herleiten, indem den Knoten einzelne Wege in x- und y-Richtung eingeprägt werden.

$$[L] = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (27)$$

### 3.4 Steifigkeitsmatrix für Beton- und Bewehrungselemente

Zur Untersuchung zweidimensionaler Probleme werden i. a. Dreieckelemente mit linearem Verschiebungsansatz verwendet. Aus vier Dreiecken läßt sich jedoch entsprechend Bild 14 ein Viereckelement zusammensetzen. Das so gewonnene neue Element besitzt zunächst fünf Knotenpunkte, zehn Freiheitsgrade und seine Steifigkeitsmatrix ist von der Größe  $10 \times 10$ . Unter der Voraussetzung, daß die äußere Belastung lediglich an den Randknoten  $i = 1, 2, 3, 4$  angreift, läßt sich der im Elementinneren liegende Knoten  $i = 5$  eliminieren. Die Steifigkeitsmatrix wird damit auf die Größe  $8 \times 8$  reduziert. Die Verwendung eines aus Dreiecken aufgebauten Viereckelements, dessen Mittelknoten eliminiert wird, führt zu rechentechnischen Vorteilen gegenüber einer direkten Benutzung von Dreieckelementen, da sich die Anzahl der zu ermittelnden unbekanntenen Knotenverschiebungen verringert.

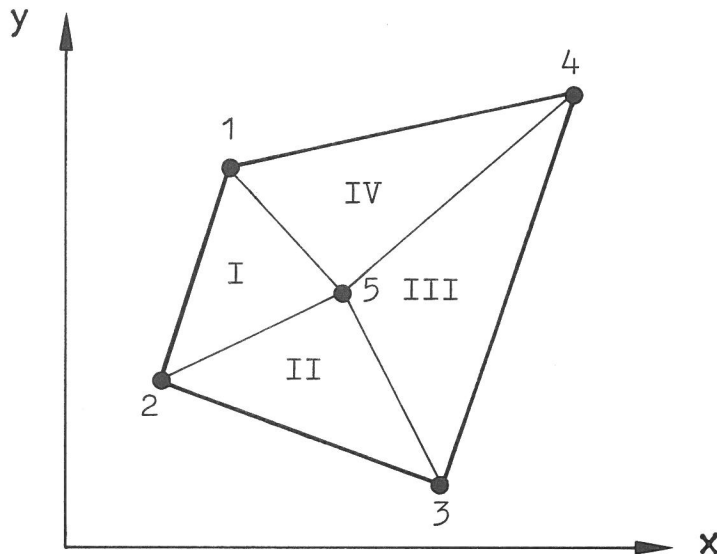


Bild 14: Aus vier Dreieckelementen aufgebautes Viereckelement

In der vorliegenden Arbeit wurde von dem hier aufgezeigten Konzept ausgegangen. Zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix des verwendeten Rechteckelements werden zunächst die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Dreieckelemente benötigt, deren Ableitung im folgenden beschrieben wird.

Bei der Verwendung eines linearen Verschiebungsansatzes folgt für die Verschiebungen in x- und y-Richtung eines Punktes  $P(x,y)$  innerhalb oder auf der Berandung des Dreieckelements:

$$\{ f \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

oder in Matrixform:

$$\{ f \} = [ C ] \{ \beta \} \quad (28a)$$

Werden die Knotenpunkte des Elements mit  $i, j, k$  bezeichnet und die Beziehungen (28) für jeden dieser Knoten angeschrieben, wobei für  $x$  und  $y$  die Knotenkoordinaten und für  $u$  und  $v$  die entsprechenden Knotenverschiebungen einzusetzen sind, so läßt sich das folgende Gleichungssystem zur Ermittlung der Unbekannten  $\beta_1$  bis  $\beta_6$  aufstellen:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & & & \\ 1 & x_j & y_j & & 0 & \\ 1 & x_k & y_k & & & \\ \hline & & & 1 & x_i & y_i \\ & 0 & & 1 & x_j & y_j \\ & & & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Die Größen  $x_i$  und  $y_i$  bzw.  $u_i$  und  $v_i$  bezeichnen hier die Koordinaten bzw. Verschiebungen des Elementknotens  $i$ .

Das Gleichungssystem läßt sich in Matrixform darstellen

$$\{ \hat{\rho} \} = [ M ] \{ \beta \} \quad (29a)$$

wobei  $\{ \hat{\rho} \}$  und  $\{ \beta \}$  Spaltenmatrizen mit einer Reihenfolge der Einzelglieder entsprechend Gl. (29) sind. Nach einer Inversion der Koeffizientenmatrix  $[ M ]$  folgt für die Lösung des Gleichungssystems:

$$\{ \beta \} = [ M ]^{-1} \{ \hat{\rho} \} \quad (30)$$

Die invertierte Matrix  $[ M ]$  hat die Form:



$$[M]^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[ \begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & m \end{array} \right] \quad (31)$$

Die beiden Untermatrizen  $[m]$  können explizit angegeben werden:

$$[m] = \left[ \begin{array}{c|c|c} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{array} \right] \quad (31a)$$

Der Faktor  $\lambda$  lautet:

$$\lambda = x_i (y_j - y_k) + x_j (y_k - y_i) + x_k (y_i - y_j) \quad (31b)$$

Durch Einsetzen des Lösungsvektors  $\{\beta\}$  in Gl. (28) ist das Verschiebungsfeld  $\{f\}$  des Elements bekannt.

Für die weiteren Betrachtungen wird die Beziehung (30) in der Form

$$\{\beta\} = [G] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{array} \right\} = [G] \{\rho\} \quad (32)$$

benötigt. Die Spaltenmatrix  $\{\rho\}$  enthält dabei die Verschiebungen der Elementknoten in der sonst üblichen Reihenfolge. Die Matrix  $[G]$  wird auf einfache Weise durch Umordnen der einzelnen Spalten der Matrix  $[M]^{-1}$  gewonnen.

Zur Ermittlung der Dehnungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und der Gleitung  $\gamma_{xy}$  des Elements werden die Beziehungen (3) und (28) herangezogen

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{array} \right\} \quad (33)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\{\epsilon\} = [H] \{\beta\} \quad (33a)$$

Durch Einsetzen der Spaltenmatrix  $\{B\}$  aus Gl. (32) ergibt sich für den Deformationszustand des Elements:

$$\{e\} = [H][G]\{\rho\} = [B]\{\rho\} \quad (34)$$

Die Steifigkeitsmatrix des Dreieckelements folgt jetzt aus Gleichung (16):

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (35)$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich:

$$[k] = t \cdot A \cdot ([B]^T [D] [B]) \quad (35a)$$

wobei  $t$  die Dicke und  $A$  die Fläche des Dreieckelements sind.

Für jedes der vier Dreieckelemente von Bild 14 wird eine Steifigkeitsmatrix entsprechend Gl. (35a) erstellt. Unter Beachtung der Gl. (17) wird dann die Steifigkeitsmatrix des Viereckelements wie folgt zusammengesetzt:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ \text{sym} & & & k_{44} & k_{45} \\ & & & & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Die Größen  $\{F\}$  und  $\{\rho\}$  sind die Kräfte und Verschiebungen an den Elementknoten 1-5 jeweils in x- und y-Richtung. Gleichung (36) wird zusammengefaßt:

$$\begin{matrix} & & 8 & & 2 & & 1 \\ & & & & & & \\ 8 & \begin{Bmatrix} F_a \\ \text{---} \\ F_b \end{Bmatrix} & = & 8 & \begin{bmatrix} k_{aa} & | & k_{ab} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ k_{ba} & | & k_{bb} \end{bmatrix} & & \begin{Bmatrix} \rho_a \\ \text{---} \\ \rho_b \end{Bmatrix} \\ & & & & & & \end{matrix} \quad (37)$$

Die Ziffern geben jeweils die Zeilen und Spalten der Einzelmatrizen an.

Der mittlere Punkt 5 bzw. b in Gl. (37) des Viereckelements wird eliminiert:

$$\{ F_a \} = [ k_{aa} ] \{ \rho_a \} + [ k_{ab} ] \{ \rho_b \} \quad (38a)$$

$$\{ F_b \} = [ k_{ba} ] \{ \rho_a \} + [ k_{bb} ] \{ \rho_b \} \quad (38b)$$

Gl. (38b) nach  $\{ \rho_b \}$  aufgelöst lautet:

$$\{ \rho_b \} = - [ k_{bb} ]^{-1} [ k_{ba} ] \{ \rho_a \} + [ k_{bb} ]^{-1} \{ F_b \} \quad (38c)$$

in Gl. (38a) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \{ F_a \} &= [ k_{aa} ] \{ \rho_a \} - [ k_{ab} ] [ k_{bb} ]^{-1} [ k_{ba} ] \{ \rho_a \} \\ &\quad + [ k_{ab} ] [ k_{bb} ]^{-1} \{ F_b \} \end{aligned} \quad (38d)$$

Wird vorausgesetzt, daß der mittlere Knoten unbelastet bleibt, d. h. die äußere Belastung in Form von Knotenkräften lediglich auf die Randknoten des Elements verteilt ist, so kann  $\{ F_b \} = 0$  gesetzt werden und aus Gl. (38d) ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\{ F_a \} = ([ k_{aa} ] - [ k_{ab} ] [ k_{bb} ]^{-1} [ k_{ba} ]) \{ \rho_a \} \quad (39)$$

Die Beziehung (39) enthält die Steifigkeitsmatrix  $[ k ]$  des im weiteren für die rechnerischen Untersuchungen an Stahlbetonbalken verwendeten Viereckelements:

$$[ k ] = [ k_{aa} ] - [ k_{ab} ] [ k_{bb} ]^{-1} [ k_{ba} ] \quad (40)$$

## 4.0 Approximation des nichtlinearen Werkstoffverhaltens

### 4.1 Allgemeines zu den Stoffgesetzen

Eine Verformungsberechnung mit der Methode der Finiten Elemente erfordert - es wurde bereits in Abschnitt 2 darauf hingewiesen - die Kenntnis oder Annahme von Gesetzen zur Approximation des Werkstoffverhaltens.

Die hier vorgenommene nichtlineare Berechnung von Stahlbetonbalken erfolgt in einzelnen Teilschritten. Nach der Verformungsermittlung für den Teilschritt N werden für jedes Element des Rechenmodells, in Abhängigkeit vom vorhandenen Spannungs- und Deformationszustand die in den Stoffgesetzen enthaltenen Stoffkennwerte unter Verwendung von Versuchsergebnissen zum Spannungs-Dehnungsverhalten ein- oder mehrachsig beanspruchter Werkstoffe neu bestimmt und der weiteren Rechnung zugrundegelegt. In der Rechnung kann das Bauteilverhalten jedoch nur dann hinreichend genau simuliert werden, wenn die verwendeten Stoffgesetze das Werkstoffverhalten wirklichkeitsnah beschreiben.

Die Formulierung eines allgemeingültigen Stoffgesetzes für den wichtigen Baustoff Beton stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Theoretische Untersuchungen und Versuche, die das Verhalten dieses Werkstoffes unter zwei- oder dreiachsiger Belastung klären könnten, liegen nur in begrenzter Zahl vor [30-36]. Ein zweiachsiges Spannungs-Dehnungsgesetz für Beton wurde bisher nicht entwickelt. Verwendet werden muß daher hier in der Rechnung ein Stoffgesetz, das für zwei zueinander senkrechte Richtungen Stoffkennwerte annimmt, die aus Spannungs-Dehnungslinien einachsig gedrückter Betonprismen gewonnen werden.

Für die im wesentlichen einachsig beanspruchten rechteckigen Bewehrungselemente ist die Verwendung eines Stoffgesetzes für den ebenen Spannungszustand nicht erforderlich. In der Rechnung wird lediglich das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des gezogenen Stabes insbesondere zur Ermittlung des Tangentenmoduls in Hauptzugspannungsrichtung, die fast identisch mit der Richtung der Bewehrungsstahlachse ist, benutzt.

Stoffgesetze für den Verbund zwischen Beton und Bewehrung wurden in einer Forschungsarbeit [41] entwickelt und sind für die

hier durchgeführten theoretischen Untersuchungen hervorragend geeignet.

## 4.2 Beton

### 4.2.1 Stoffgesetz für Beton

Für einen isotropen elastischen Werkstoff wurde der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen bereits in Gleichung (4) angegeben. Wird hingegen bei einem Werkstoff in zwei zueinander senkrechten Richtungen 1 und 2 (Bild 15) ein unterschiedliches Stoffverhalten angenommen, so sind die Elastizitätsgleichungen für den ebenen Spannungszustand entsprechend [22] neu zu formulieren und lauten:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{1,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Aus diesem Gleichungssystem läßt sich durch eine einfache Umformung das Stoffgesetz für den ebenen Spannungszustand bei unterschiedlichem Stoffverhalten in zwei zueinander senkrechten Richtungen gewinnen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E_2}{(1-n \cdot \nu_2^2)} \cdot \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

mit

$$n = E_1/E_2 \quad \text{und} \quad m = G_{1,2}/E_2$$

Die Beziehung (42) läßt sich zusammenfassend auch in der folgenden Form darstellen:

$$\{ \sigma_{1,2} \} = [ D_{1,2} ] \{ \epsilon_{1,2} \} \quad (42a)$$

Die verwendeten Indizes bezeichnen in Gl. (42a) die beiden Richtungen unterschiedlichen Stoffverhaltens.

Die Stoffmatrix  $[D_{1,2}]$  ist symmetrisch aufgebaut. Es gilt in diesem Falle die Bedingung

$$\nu_1 E_1 = \nu_2 E_2 \quad (43)$$

Da der Werkstoff Beton ein nichtlineares Verformungsverhalten besitzt, sind die Stoffkennwerte  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  sowie der aus diesen vier Größen ableitbare Gleitmodul  $G_{1,2}$  vom jeweils vorhandenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustand abhängig. Die Bestimmung der Stoffkennwerte kann bisher jedoch nur auf experimentellem Wege vorgenommen werden. Hierzu ist die Durchführung von Versuchen [34] an zweiachsig beanspruchten Betonprobekörpern erforderlich. Die Beanspruchungsrichtungen im Versuch entsprechen dabei den im Stoffgesetz angegebenen Richtungen 1 und 2, für die ein unterschiedliches Stoffverhalten angenommen wurde. Da die Probekörperbelastung nur aus Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  besteht, sind die Richtungen 1 und 2 Hauptspannungsrichtungen. Aus den Probekörperdehnungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  in Richtung der wirkenden Belastung sowie der Dehnung  $\epsilon_3$  senkrecht zur unbelasteten Scheibenebene, lassen sich für bestimmte Verhältnisse der Normalspannungen  $\sigma_1/\sigma_2$  die im Stoffgesetz der Gleichung (42) enthaltenen Stoffkennwerte ermitteln.

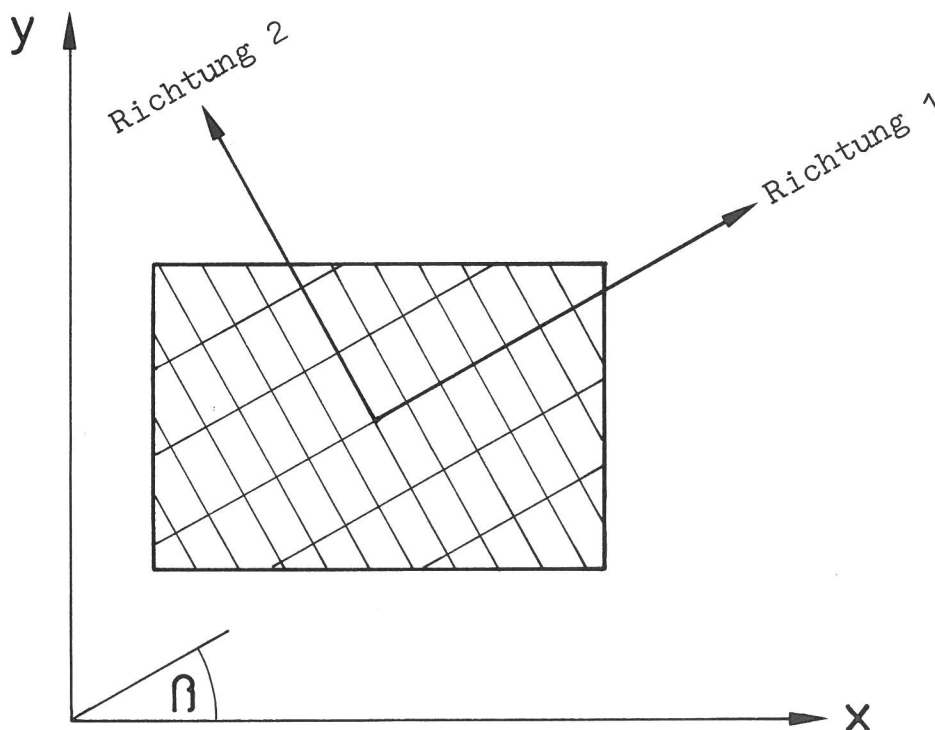


Bild 15: Betonelement mit in zwei Richtungen unterschiedlichem Stoffverhalten

Für den Beton der in Abschnitt 7 rechnerisch untersuchten Stahlbetonbalken konnten derartige Versuche jedoch nicht durchgeführt werden und übertragbare Versuchsergebnisse standen nicht zur Verfügung.

Vereinfachend wurden aus diesem Grund die Stoffkennwerte  $E_1$  und  $E_2$  in Abhängigkeit von den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  den Arbeitslinien einachsrig beanspruchter aus dem Balkenbeton hergestellter Prismen entnommen. Da allein durch Betrachten einachsiger Spannungs-Dehnungszustände die Symmetriebedingung der Gl. (43) nicht erfüllt werden kann, ist in das Stoffgesetz der Gl. (42) für  $E_1$  und  $E_2$  der sich jeweils ergebende kleinere Wert  $E$  sowie für  $\nu_1$  und  $\nu_2$  der Wert  $\nu = 0,25$  eingesetzt worden.

Ein Aufreißen von Betonelementen erfolgt bei Überschreiten der Betonzugfestigkeit. Wird vorausgesetzt, daß entstehende Risse senkrecht zur risseerzeugenden Hauptzugspannung  $\sigma_1$  in Hauptspannungsrichtung 2 verlaufen, so kann das Stoffgesetz für den gerissenen Beton in der folgenden Form angegeben werden:

$$\{\sigma_{1,2}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{VZ} \end{bmatrix} \{\epsilon_{1,2}\} \quad (44)$$

Zur Verknüpfung der Schubspannungen mit den Schubverzerrungen des gerissenen Elements wird der Verzahnungsmodul  $G_{VZ}$  eingeführt. Der Verzahnungsmodul ist im allgemeinen kleiner als der Gleitmodul des homogenen ungerissenen Betons. Über die Größe des anzusetzenden Wertes liegen bisher noch keine ausreichend gesicherten Versuchsergebnisse vor. In der vorliegenden Arbeit wird bei der Berechnung von Stahlbetonbalken, in denen sich vorwiegend Biegerisse ausbilden, der Verzahnungsmodul  $G_{VZ} = 0$  gesetzt.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen  $[k]$  enthalten jeweils eine auf das globale Koordinatensystem  $x$ - $y$  bezogene Stoffmatrix  $[D_{x,y}]$ . Sind die Richtungen ausgezeichneten Werkstoffverhaltens um einen Winkel  $\beta$  gegenüber diesem System verdreht (s. Bild 15), so wird eine Transformation der Stoffgesetze für den ungerissenen bzw. gerissenen Beton in das globale Koordinatensystem

erforderlich. Die Matrix  $[D_{x,y}]$  (die Indizes  $x, y$  werden im folgenden weggelassen) wird durch eine Transformation der Matrix  $[D_{1,2}]$  auf die im folgenden beschriebene Weise gewonnen.

Aus der Invarianz der Arbeiten der inneren Spannungen folgt:

$$\{ \sigma_{1,2} \}^T \{ \epsilon_{1,2} \} = \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} \quad (45)$$

bzw. unter Verwendung der Gleichungen (42a) und (1)

$$\{ \epsilon_{1,2} \}^T [ D_{1,2} ] \{ \epsilon_{1,2} \} = \{ \epsilon \}^T [ D ] \{ \epsilon \} \quad (45a)$$

Die Transformation der Dehnungen erfolgt nach folgendem Ansatz:

$$\{ \epsilon_{1,2} \} = [ L ] \{ \epsilon \} \quad (46)$$

Die Transformationsvorschrift auf Gleichung (45a) angewendet, führt zu:

$$\{ \epsilon \}^T [ L ]^T [ D_{1,2} ] [ L ] \{ \epsilon \} = \{ \epsilon \}^T [ D ] \{ \epsilon \} \quad (47)$$

und damit zur Stoffmatrix  $[ D ]$  im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem

$$[ D ] = [ L ]^T [ D_{1,2} ] [ L ] \quad (47a)$$

Die Transformationsmatrix  $[ L ]$  kann aus [37] entnommen werden und hat die Form:

$$[ L ] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -2 \sin \beta \cos \beta & 2 \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (48)$$



#### 4.2.2 Arbeitslinie von Beton unter einachsiger Beanspruchung

Die theoretische Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke erfolgt für einen Stahlbetonplattenstreifen aus dem Versuchsprogramm [38] in Abschnitt 7. Um eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Verformungswerten zu erzielen, war in der Rechnung die Verwendung der in [38] ermittelten Betonarbeitslinie erforderlich.

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm dieses Betons mit einer Würfeldruckfestigkeit von  $\beta_w = 559 \text{ kp/cm}^2$ , entsprechend einer Prismenfestigkeit von  $\beta_p \approx 0,8 \cdot \beta_w$ , kann der Darstellung des Bildes 16 entnommen werden. Der Verlauf der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie für den Druckbereich wurde an zentrisch gedrückten Prismen mit den Abmessungen 15 cm x 15 cm x 70 cm bestimmt. Die Verformungsgeschwindigkeit betrug dabei  $\dot{\epsilon} = 60 \cdot 10^{-6}/\text{min}$  und entsprach damit größenordnungsmäßig der im Versuch in der Druckzone des Plattenstreifens aufgetretenen Verformungsgeschwindigkeit. Grenzwerte der Arbeitslinie im Druckbereich sind die Prismenfestigkeit  $\beta_p$  und die im mittleren Bereich der Prismen gemessene Bruchstauchung  $\epsilon_{bU}$ .

Die Durchführung einachsiger Zugversuche war hingegen nicht möglich. Bei der Festlegung des Kurvenverlaufs im Zugbereich wurde angenommen, daß die Steigung der Tangenten im Nullpunkt des Diagramms für den Druck- und Zugbereich gleiche Größe besitzt. Vorausgesetzt wurde weiter, daß die Spannungs-Dehnungs-Linie im Zugbereich einen ähnlichen Verlauf besitzt wie im Druckbereich. Ebenfalls an Prismen erfolgte die Ermittlung der Biegezugfestigkeit, die hier als Grenzspannung im Zugbereich betrachtet wird. Als dazugehöriger Verformungswert wurde, gestützt auf Versuchswerte und [34] die Bruchdehnung mit  $\epsilon_{bZ} = 0,1 \cdot \epsilon_{bU}$  angenommen.

Die Verwendung dieser, das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons lediglich unter einachsiger Beanspruchung näherungsweise beschreibende Arbeitslinie, hat in der Rechnung zu keinem erkennbaren Genauigkeitsverlust bei der Verformungsberechnung (es wurden jedoch nur Balken betrachtet) geführt.

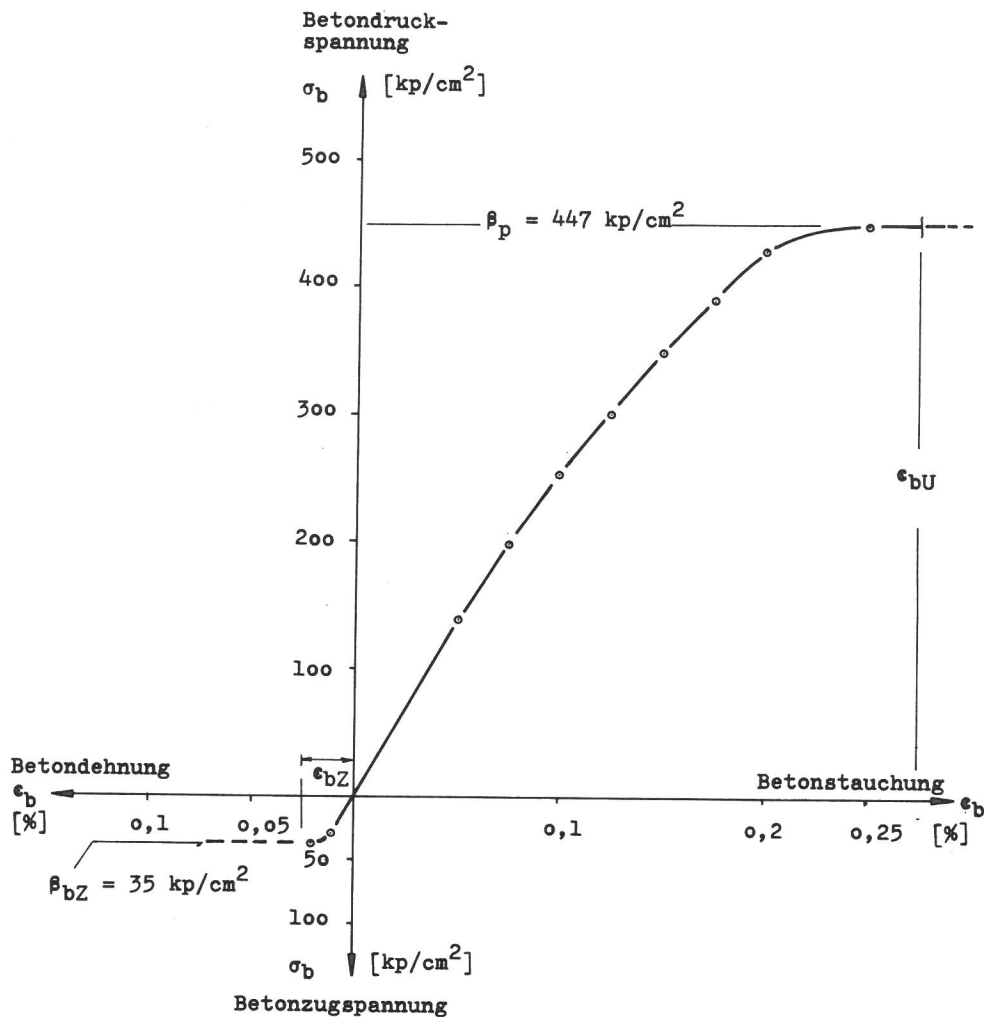


Bild 16: In der Rechnung verwendete Arbeitslinie für den einachsigen beanspruchten Beton

#### 4.3 Bewehrung

Für Bewehrung und Beton werden im Rechenmodell (Bild 8) der gleiche Elementtyp verwendet. Von der Möglichkeit, eindimensionale Stabelemente zur Idealisierung der Bewehrung heranzuziehen, wurde hier kein Gebrauch gemacht. Ein den ebenen Spannungszustand beschreibendes Stoffgesetz steht für den Stahl mit dem Prandtl-Reuß'schen Gesetz zu Verfügung. Für die Verformungsberechnung von Balken mit stabförmigen Bewehrungsstäben ist jedoch die Verwendung dieses Gesetzes nicht zwingend notwendig. Es kann davon ausgegangen werden, daß sich in der Längsbewehrung des Balkens im wesentlichen ein einachsiger Spannungszustand ausbildet. Die Richtung 1 der absolut genommen größten Hauptspannung  $\sigma_1$  weicht gar nicht oder doch nur wenig von der Richtung der Bewehrungsstahlachse ab. Die dazu senkrechten Spannungen  $\sigma_2$  sind hingegen klein und dürften nur von geringem Einfluß auf die Verzerrungen in Richtung 1 sein. Unter Vernachlässigung der Querkontraktion wird die

folgende Beziehung der Spannungs-Verzerrungsermittlung zugrundegelegt:

$$\{ \epsilon_{1,2} \} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \{ \sigma_{1,2} \} \quad (49)$$

Die Stoffkennwerte  $E_1$  und  $E_2$  werden in Abhängigkeit der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  aus der Arbeitslinie des einachsigt beanspruchten Stahls entnommen.

Die Arbeitslinie eines axial gezogenen Bewehrungsstahls BSt 42/50 RK (Rippentorstahl), die in den Rechnungen verwendet wurde, ist in Bild 17 dargestellt.

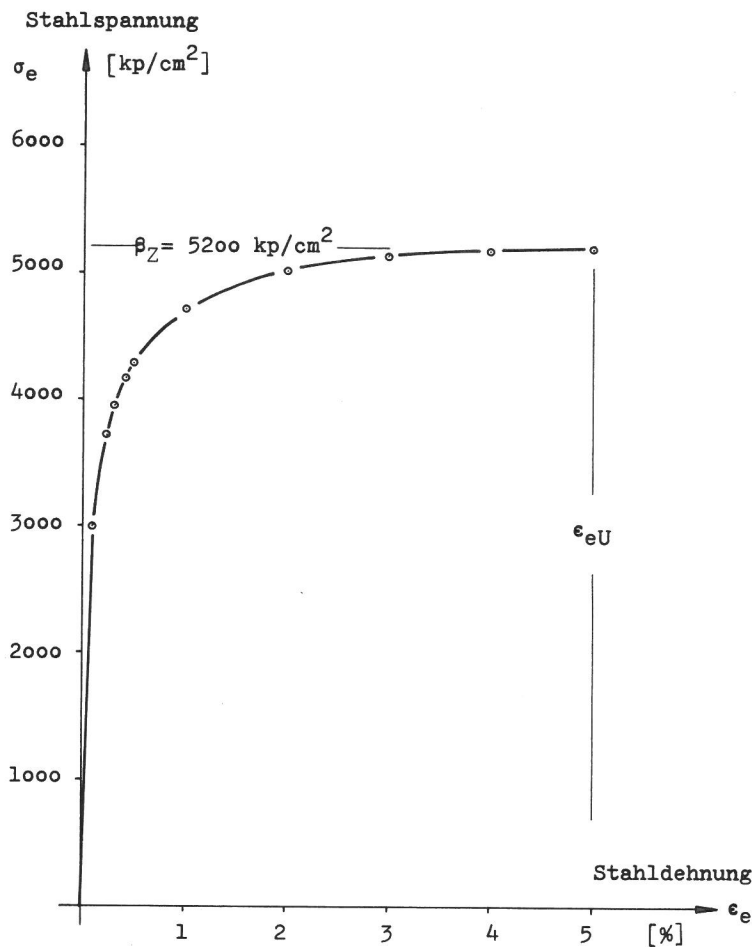


Bild 17: In der Rechnung verwendete Arbeitslinie für Betonstahl BSt 42/50 RK (Rippentorstahl), Stahldurchmesser  $d_e = 16 \text{ mm}$

## 4.4 Verbund zwischen Beton und Bewehrung

### 4.4.1 Bemerkungen zur Ermittlung von Verbundgesetzen

Eine Einbeziehung des Verbundes in die numerische Berechnung von Stahlbetonbauteilen erfordert Spannungs-Verschiebungsgesetze für die Verbundelemente des finiten Elementmodells. Verbundgesetze, die das Spannungs-Verschiebungsverhalten zwischen Beton und Bewehrungsstahl wirklichkeitsnah beschreiben, können nur in Versuchen gewonnen werden. Die Ergebnisse von Verbundversuchen verschiedener Forscher sind i. a. kaum miteinander vergleichbar. Grund hierfür ist, daß das Verbundverhalten durch eine Reihe von Parametern wie

- Art des Probekörpers
- Oberfläche des Stahls (glatt oder gerippt)
- Formgebung der Rippen
- Länge der Verbundstrecke
- Lage des einbetonierten Stahls im Probekörper
- Zusammensetzung des Betons
- Versuchsdurchführung

ganz wesentlich beeinflußt wird, und somit die Ergebnisse durch unterschiedliche Versuchsbedingungen mehr oder weniger stark voneinander abweichen.

Erste grundlegende Untersuchungen zum Verbund zwischen Beton und Bewehrung erfolgten durch die Arbeiten von Rehm [29]. Für Stähle mit unterschiedlichen Festigkeiten, Durchmessern und Profilierungen wurde in Versuchen der Zusammenhang zwischen Verbundspannung und Verschiebung in der Verbundfuge ermittelt. Die verwendeten Betonrippenstähle wurden jedoch z. T. durch Fräsen aus Rundstählen hergestellt.

Häufig verwendete Versuchsanordnungen zur Ermittlung des Verbundverhaltens von Betonstählen sind der "beam-test" und der "pull-out-test". Der überwiegend durchgeführte "pull-out-test" wird im folgenden kurz erläutert. Als Probekörper findet ein Betonwürfel Verwendung, dessen Kantenlänge dem 10-fachen Stabdurchmesser  $d_e$  des zu untersuchenden Betonstahls entspricht. Der zentrisch einbetonierte Stahl befindet sich auf einer Län-

ge von  $5 \cdot d_e$  mit dem Beton im Verbund. Vor der Verbundstrecke ist ein verbundfreier Bereich, dessen Länge ebenfalls  $5 \cdot d_e$  beträgt, vorgesehen. Durch Ausziehen des Stahls aus dem Probekörper wird zunächst die von der Bewehrung auf den Beton übertragbare Kraft in Abhängigkeit von der Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl bestimmt. Unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Verbundspannungen entlang der Verbundstrecke erfolgt dann die Ermittlung einer mittleren Verbundspannung aus der jeweils auf den Stahl aufgebrachten Zugkraft. Anzumerken ist, daß bei einer Verwendung von Probekörpern mit einer Verbundlänge des Betonstahls von  $5 \cdot d_e$  nicht mehr von einer gleichmäßigen Verteilung der Verbundspannungen ausgegangen werden kann. Der errechnete Mittelwert der Verbundspannungen läßt damit keine genaue Aussage über die Größe und Verteilung der tatsächlich in der Verbundstrecke vorhandenen Verbundspannung zu. Sowohl der "pull-out-test" als auch der "beam-test" eignen sich daher nur für vergleichende Untersuchungen zum Verbundverhalten unterschiedlicher Betonstähle.

Bei der Ermittlung von Verbundgesetzen als Grundlage für die Verformungsberechnung ist jedoch im Gegensatz zum "pull-out-test" von den im folgenden genannten, in einem Stahlbetontragglied anzutreffenden Verhältnissen auszugehen:

- Bewehrungsstahl mit geringer Überdeckung
- gleichmäßige Verteilung der Verbundspannungen nur über eine kurze Verbundlänge von ca.  $2 \cdot d_e$
- verminderte Verbundsteifigkeit und -festigkeit in der Nähe von Biegerissen
- verminderte Verbundsteifigkeit und -festigkeit infolge einer plastischen Dehnung des Bewehrungsstahls im Verbundintervall

Das Interesse der hier durchgeführten theoretischen Untersuchungen gilt insbesondere Bauteilen, die mit dem in der Praxis weitgehend verwendeten Rippentorstahl, einem Betonstabstahl der Sorte B St 42/50 RK bewehrt sind. Ausgehend von den oben genannten, in einem Stahlbetonbauteil gegebenen Verhältnissen, wurde für diesen Betonstahl in Versuchen [41] der tatsächlich vorhandene Zusammenhang zwischen Stahlspannung bzw. -dehnung, Verbundspannung und Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl geklärt.

#### 4.4.2 Versuche zur Ermittlung wirklichkeitsnaher Verbundgesetze

Die Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken erfolgt unter Verwendung von Verbundgesetzen, die anhand von Ergebnissen der an Rippentorstählen durchgeführten Versuche [41] aufgestellt wurden. In der genannten Arbeit ist insbesondere der Einfluß folgender Parameter auf das Verbundverhalten von Rippentorstählen untersucht worden:

- Betonierlage des Betonstahls
- Stahldurchmesser
- eingeprägte plastische Stahldehnung
- Verbund in Rißnähe bzw. im ungestörten Bereich zwischen Rissen

Unverändert beibehalten wurden hingegen die Einflußgrößen:

- Stahlsorte
- Verbundlänge
- Betonzusammensetzung
- Betonfestigkeit
- Betonüberdeckung

Die Untersuchungen erfolgten an Probekörpern mit den im Bild 18 angegebenen Abmessungen. Der Betonstahl ist vorwiegend untenliegend mit einer Betondeckung von 15 mm eingebaut worden. Die Länge der in Probekörperlängsrichtung angeordneten Verbundstrecke betrug lediglich  $1,5 d_e$ . Um den Verbund zwischen Betonstahl und Beton außerhalb der kurzen Verbundstrecke zu unterbinden, sind zu beiden Seiten der Verbundstrecke dünnwandige Hüllrohre über den Rippentorstahl gestreift worden. An Probekörpern entsprechend Bild 18 wurden Verbundgesetze zur Beschreibung des Verbundverhaltens von Rippentorstählen in ungerissenen Bereichen eines Bauteils, bzw. bei einer größeren Entfernung des Verbundintervalls zum nächsten BiegeriB ermittelt. Die Untersuchung des Verbundverhaltens von Rippentorstählen in der Nähe von Biegerissen erfolgte an einem entsprechend Bild 19 modifizierten Probekörper. Zur Simulation eines Biegerisses war bei diesem Probekörper vor der Verbundstrecke ein Schlitz senkrecht zur Achse des Betonstahls ange-

ordnet, der weitgehend die Einhaltung der an einem RiB bestehenden Randbedingungen sicherstellte.

Durchgeföhrt wurden zwei umfangreiche Versuchsserien - mit und ohne RiBsimulation - unter Verwendung der beschriebenen Probekörper. Der Zusammenhang zwischen Verbundspannungen und der Relativverschiebung zwischen Beton und Betonstahl ist durch Ausziehen des Bewehrungsstahls aus dem Probekörper bestimmt worden. Die verwendete Versuchseinrichtung ermöglichte eine zwängungsfreie Einleitung der aufzubringenden Zugkraft in den Probekörper. Eine durch den spiralförmigen Verlauf der Längsrippen beim Ausziehen mögliche Drehung des Rippentorstahls wurde durch Anbringen einer Drehfessel im Versuch verhindert. Durch kontinuierliches Messen der aufgebrauchten Zugkraft und der eingetretenen Verschiebung des unbelasteten Betonstahles gegenüber der Endfläche des Probekörpers (Bild 18 bzw. Bild 19) ergab sich unmittelbar während des Versuchs eine Kraft-Verschiebungsbeziehung für das untersuchte Verbundintervall.

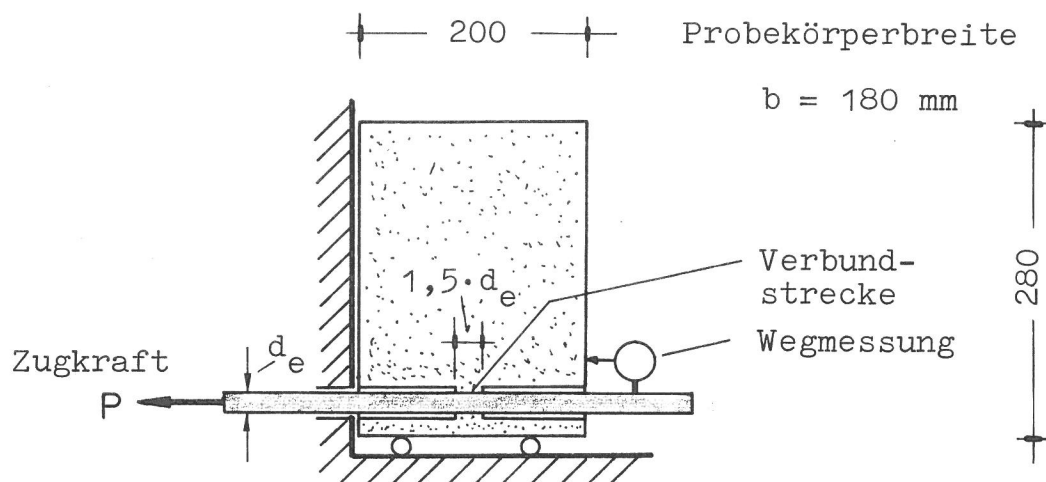


Bild 18: Probekörper zur Ermittlung von Verbundgesetzen für Verbundelemente zwischen Rissen

Wird davon ausgegangen, daß bei der gewählten kurzen Verbundstrecke von  $1,5 \cdot d_e$  die Verbundspannungen in der Verbundfuge gleichmäßig verteilt sind, so läßt sich die im Versuch ermittelte Kraft-Verschiebungsbeziehung sofort in eine Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehung umwandeln. Die aufgebrauchte Zugkraft ist hierbei lediglich durch die vorhandene Verbundfläche zu dividieren.



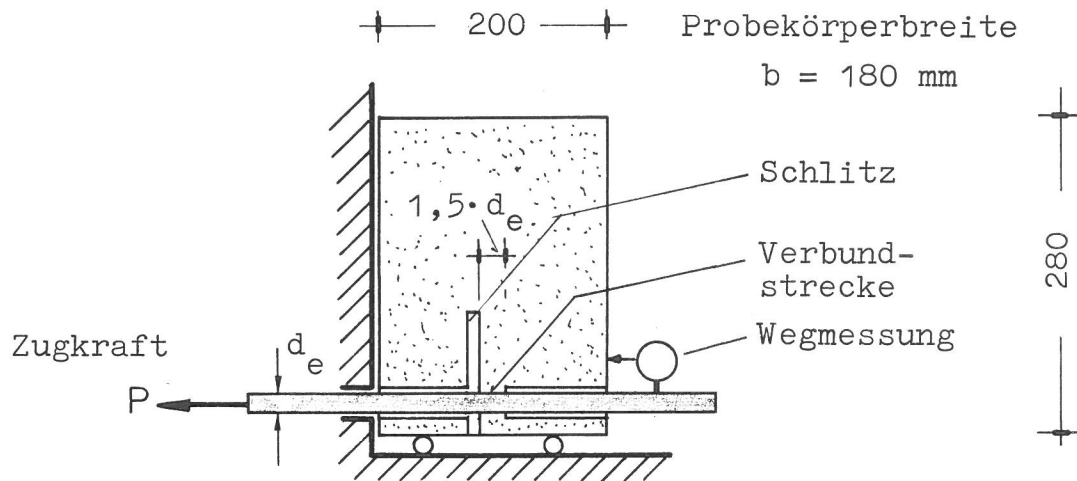


Bild 19: Probekörper zur Ermittlung von Verbundgesetzen für Verbundelemente am Riß

Zur Untersuchung der Einflußgröße plastische Stahldehnung auf das Verbundverhalten mußten die Ausziehversuche in zwei Schritten durchgeführt werden. In einem ersten Schritt wurde dem im Probekörper einbetonierten Betonstahl durch Recken eine definierte plastische Stahldehnung eingeprägt. Hieran anschließend erfolgte in einem zweiten Versuchsschritt der eigentliche Ausziehversuch. Die Größe der eingeprägten plastischen Stahldehnung betrug in den einzelnen Versuchsreihen  $\epsilon_e^{pl} = 0 \%, 0,8 \%, 1,6 \%, 2,4 \%$ .

Die Übertragbarkeit der an Probekörpern gewonnenen Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehungen wurde in [41] überprüft. Hierzu sind Ergänzungsversuche an Betonprismen von 45 cm Länge, 26 cm Breite und 28 cm Höhe und untenliegend einbetoniertem Rippenstahl (Betondeckung 15 mm) erfolgt. Der Betonstahl befand sich über die gesamte Länge des Probekörpers in vollem Verbund mit dem Beton. Ein aus dem Probekörper herausstehendes Stahlglied wurde bis zum Erreichen einer plastischen Stahldehnung von 2,4 % (außerhalb des Probekörpers gemessen) auf Zug beansprucht. Nach dem Belastungsversuch konnte der Verlauf der plastischen Stahldehnungen in dem 45 cm langen einbetonierten Bereich des Rippenstahls mit Hilfe von eingeritzten Meßmarken festgestellt werden. Unter Verwendung der für kleine Verbundstrecken ermittelten Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehungen wurde für die im Versuch aufgebrachte Höchstlast der Verlauf der plastischen Stahldehnungen des einbetonierten Bewehrungsstahls errechnet. Der Vergleich von Versuchs- und Rechenwerten zeigte eine gute Übereinstimmung.



#### 4.4.3 Stoffgesetze für den Verbund

Ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen der Verbundspannung  $\tau_v$ , der Verschiebung  $s_v$  zwischen Beton und Bewehrung sowie der plastischen Stahldehnung  $\epsilon_e^{pl}$  im Bereich eines Verbundintervalls ist durch die in Verbundversuchen [41] gewonnenen Spannungs-Verschiebungsbeziehungen gegeben.

Im Gegensatz zu den Verbundversuchen befindet sich in einem Stahlbetontragglied der zur Aufnahme von Zugspannungen benötigte Bewehrungsstahl über seine gesamte Länge mit dem Beton im Verbund. Die an Probekörpern mit kurzer Verbundlänge ermittelten Gesetzmäßigkeiten lassen sich jedoch durch Aufteilen der vorhandenen Verbundstrecke in eine Vielzahl von Verbundintervallen [16], über deren Länge eine gleichmäßige Verteilung der Verbundspannungen angenommen wird, auf das Bauteil übertragen.

Wird ein einzelnes Verbundintervall des Traggliedes betrachtet, so zeigt Bild 20 die experimentell ermittelte für einen bestimmten Dehnungszustand des Bewehrungsstahls an dieser Stelle gültige prinzipielle Abhängigkeit der Verbundspannungen  $\tau_v$  von den Relativverschiebungen  $s_v$  zwischen Beton und Bewehrung. Das nichtlineare Verhalten des Verbundes kann durch Gefügeänderungen in der Verbundfuge erklärt werden, die auf mechanische Einwirkungen zurückzuführen sind. Deutlich zu erkennen ist das nichtlineare Anwachsen der Verbundspannungen bei kleinem Verschiebungszuwachs bis zu einem Maximalwert bei Punkt A in Bild 20. Ist dieser Größtwert der Verbundspannungen erreicht, so führen von den Rippen des Bewehrungsstahls ausgehende Mikrorisse zu lokalen Zerstörungen des Betons und damit zu größeren Verschiebungen zwischen Beton und Bewehrung. Die Bewehrung gleitet, wobei die Verbundspannung mehr oder weniger stark absinkt. Bei einem maximalen Schlupf  $s_{vU}$ , hier bei Punkt B, ist die Tragfähigkeit des Verbundes erschöpft.

Bei Verbundintervallen, die sich in einiger Entfernung zu einem Biegeriß befinden, erfolgt das Versagen des Verbundes durch Abscheren der zwischen den Rippen befindlichen Betonkonsolen. Der Verbund an einem Biegeißen hingegen wird zerstört, indem sich ein Ausbruchkegel um den Bewehrungsstahl bildet. Der Ausbruchkegel entsteht durch Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons in diesem Bereich.

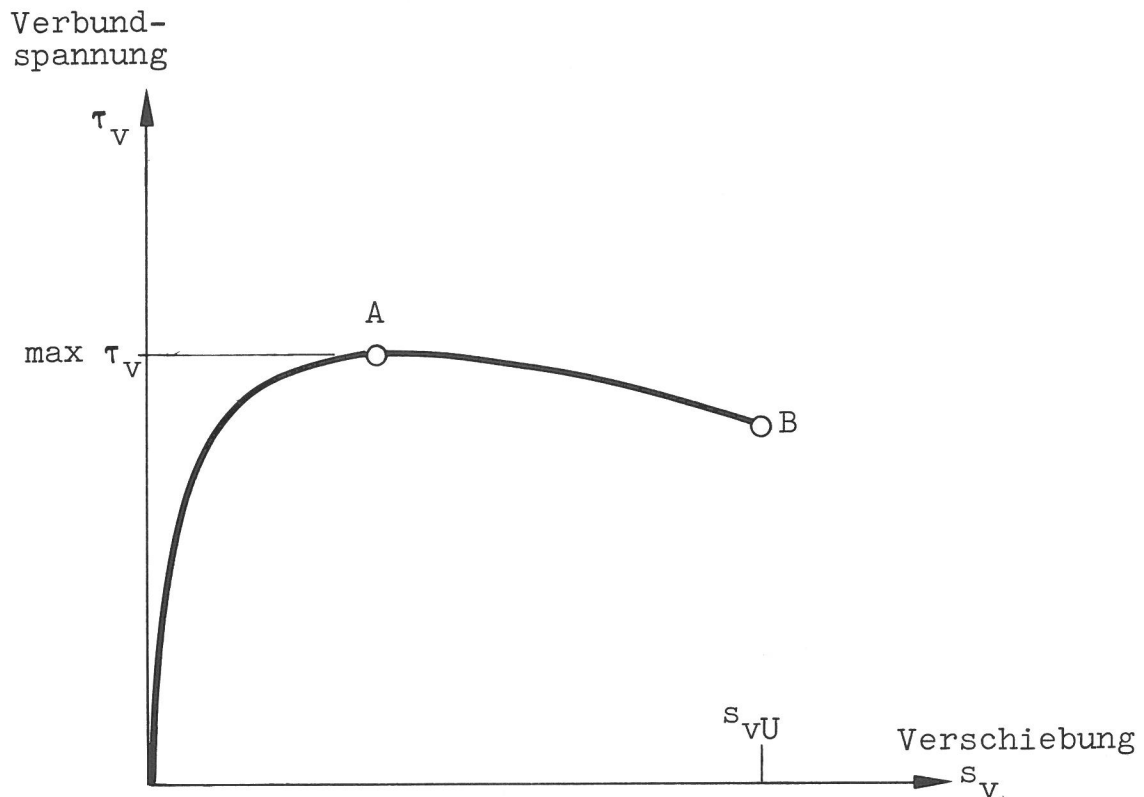


Bild 20: Prinzipielle Abhängigkeit der Verbundspannung von der Verschiebung zwischen Beton und Bewehrungsstahl für ein Verbundintervall

Die durchgeführten Versuche haben gezeigt, daß bei gleicher Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung die Lage des Verbundintervalls an einem Biegeriß oder in einiger Entfernung von einem Biegeriß sowie die an der betrachteten Stelle des Traggliedes vorhandene plastische Stahldehnung von entscheidendem Einfluß auf die Größe der Verbundspannungen sind. Die bisher in Verformungsberechnungen verwendeten Verbundgesetze berücksichtigen diese Unterschiede nicht. Der Durchmesser des Rippentorstahls ist hingegen von sekundärer Bedeutung für das Verbundverhalten.

Die Diskretisierung der Verbundschicht im Rechenmodell in eine Vielzahl voneinander unabhängiger Verbundelemente entspricht der bereits erläuterten Aufteilung einer längeren Verbundstrecke in eine größere Anzahl von Verbundintervallen. Damit wird es jedoch auf einfache Weise möglich, jedem Verbundelement entsprechend seiner Lage zum nächsten Riß eines der beiden Verbundgesetze zuzuordnen (Bild 21). Zu Beginn der Rechnung werden die Steifigkeiten  $k_h$  sämtlicher Verbundelemente unter Verwendung des Verbundgesetzes für den "ungestörten Bereich" ermittelt. Treten bei inkrementeller Belastung nach Erreichen von Bruch-

spannungszuständen Risse auf, so wird bei einer Fortsetzung der Rechnung die Steifigkeit von Verbundelementen, die gerissene Betonelemente mit Bewehrungselementen verbinden, aus dem Verbundgesetz für den "gerissenen Bereich" ermittelt.

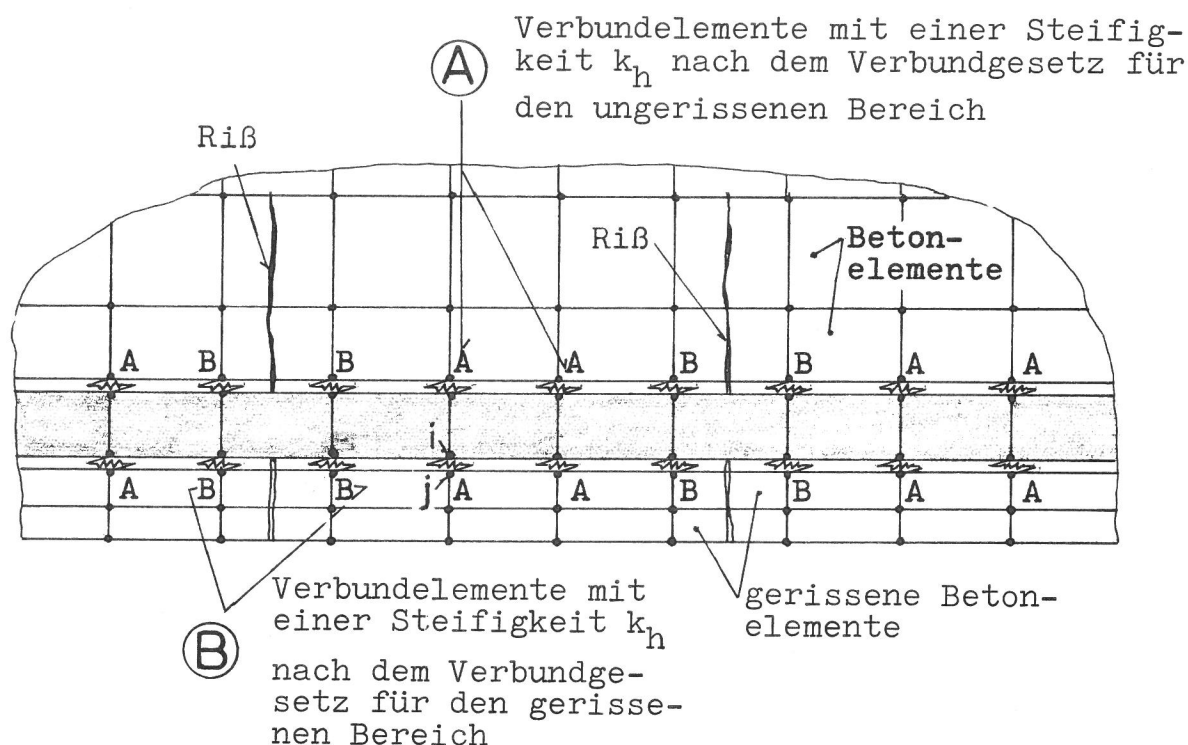


Bild 21: Diskretisierung der Verbundschicht im Rechenmodell-Zuordnung der unterschiedlichen Verbundgesetze

Eine von den Versuchswerten [41] ausgehende mathematische Formulierung der Verbundgesetze ist bisher noch nicht erfolgt. Der Zusammenhang zwischen den Größen Verbundspannung  $\tau_v$ , Verschiebung  $s_v$  und plastischer Stahldehnung  $\epsilon_e^{pl}$  wird daher sowohl für den Verbund im ungestörten Bereich zwischen Rissen als auch für den Verbund direkt an einem RiB jeweils durch eine Fläche im dreidimensionalen  $\tau_v$ - $s_v$ - $\epsilon_e^{pl}$ -Raum hergestellt.

Nach Auswertung erster Ergebnisse [41] zum Verbundverhalten von Rippentorstählen ist hier die Form der beiden Verbundflächen jeweils durch vier Verbundspannungs-Verschiebungskurven in den Schnitten  $\epsilon_e^{pl} = 0\%$ ,  $0,8\%$ ,  $1,6\%$  und  $2,4\%$  festgelegt worden (Bilder 23a und 23b).

Die Steifigkeitsmatrix für Verbundelemente (Gleichung 22a) enthält jeweils zwei Einzelsteifigkeiten  $k_h$  und  $k_v$  für die beiden Federn parallel und senkrecht zur Bewehrungsstahlachse. Bei Aufstellung der Steifigkeitsmatrix wurde bereits erläutert,

daß die Werte  $k_h$  und  $k_v$  als voneinander unabhängig betrachtet werden müssen. Diese Voraussetzung war notwendig, da sämtliche bisher durchgeführten Verbundversuche lediglich den Wert  $k_h$  liefern.

Die Ermittlung der Verbundsteifigkeit  $k_h$  eines zwischen den Knotenpunkten  $i$  und  $j$  in Bild 21 angeordneten Verbundelements erfolgt unter Verwendung der bereits erläuterten für bestimmte Werte der plastischen Stahldehnung aufgestellten  $\tau_v$ - $s_v$ -Schnittkurven der Verbundfläche. Da am Knotenpunkt  $i$  zwei Bewehrungselemente zusammentreffen, ist im weiteren von einer über beide Elemente gemittelten plastischen Stahldehnung auszugehen. Für die gemittelte plastische Dehnung wird durch Interpolation eine Verbundspannungs-Verschiebungskurve als eine weitere Schnittkurve der Verbundfläche bestimmt. Beträgt die Relativverschiebung zwischen den beiden Anschlußknoten des Verbundelements  $i$  und  $j$  in Bild 21  $s_v$ , so kann dieser  $\tau_v$ - $s_v$ -Kurve die Steigung der Tangente im Punkt  $P(\tau_v, s_v)$  entnommen werden. Durch Multiplikation des Wertes  $d\tau_v/ds_v$  mit der auf das Verbundelement entfallenden Verbundfläche  $A_v$  ergibt sich die gesuchte Steifigkeit  $k_h$  zu:

$$k_h = \frac{d\tau_v}{ds_v} \cdot A_v \quad (50)$$

Die Ermittlung der Steifigkeit  $k_h$  für Verbundelemente zwischen Rissen oder direkt am Riß erfolgt jeweils gleichartig, es ist lediglich die entsprechende Verbundfläche zu verwenden.

Hinsichtlich der Größe der vertikalen Verbundsteifigkeit  $k_v$  können keine Angaben gemacht werden, da hierzu keine Versuchsergebnisse vorliegen. In der Rechnung wird daher ein konstanter Wert  $k_v$ , gleich der maximalen Steifigkeit  $k_h$ , benutzt. Der Einfluß von  $k_v$  auf die Größe der Bauteilverformungen kann nur in Testrechnungen nachgewiesen werden.

Im Abschnitt 7 erfolgt am Beispiel eines Plattenstreifens aus Stahlbeton die Ermittlung der Verformungen sowie des Momenten-Drehungs-Verhaltens eines plastischen Gelenkes. Zur Durchführung gelangen zwei Rechnungen, in denen unterschiedliche Verbundgesetze verwendet werden.

In der Rechnung A wird für Verbundelemente des Elementmodells ein Spannungs-Verschiebungsverhalten entsprechend Bild 22 ange-

nommen. Diese einfache Abhängigkeit zwischen Verbundspannungen  $\tau_v$  und den Verschiebungen  $s_v$  in der Fuge zwischen Bewehrung und angrenzendem Beton stellt jedoch eine grobe Näherung des tatsächlichen Verbundverhaltens dar. Ein in ähnlicher Weise vereinfachtes Verbundgesetz wurde in den Arbeiten [21, 22, 26] verwendet.

Die Einbeziehung eines wirklichkeitsnahen Verbundverhaltens in die rechnerische Ermittlung des Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken erfolgt in Rechnung B durch Verwendung der hier für Verbundelemente im ungestörten Bereich zwischen Rissen (Bild 23a) sowie für Verbundelemente an einem Riß (Bild 23b) aufgestellten Verbundgesetze.

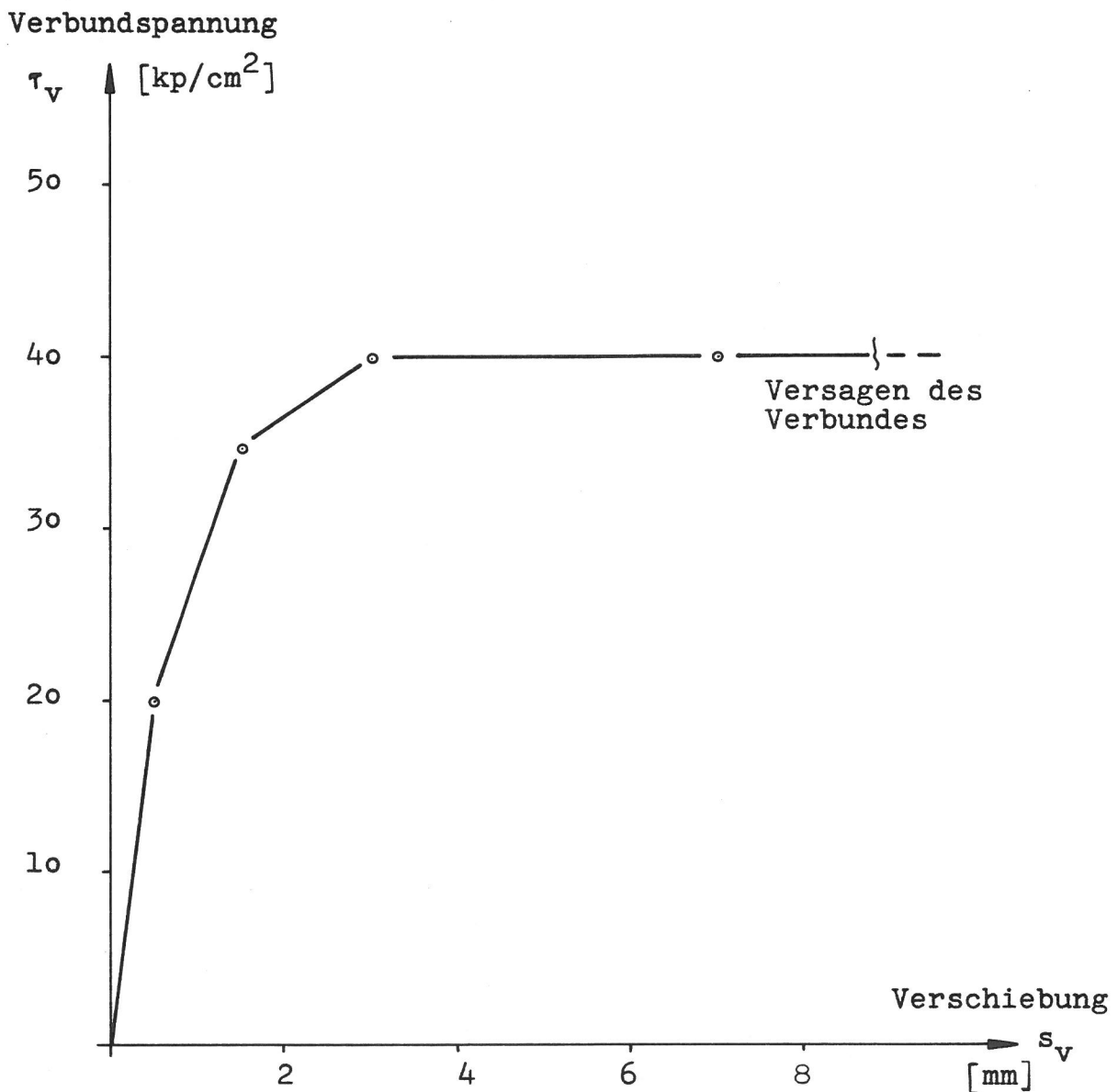


Bild 22: Arbeitslinie für den Verbund (Näherung[21,22,26])  
- verwendet in Rechnung A

Verbundspannung

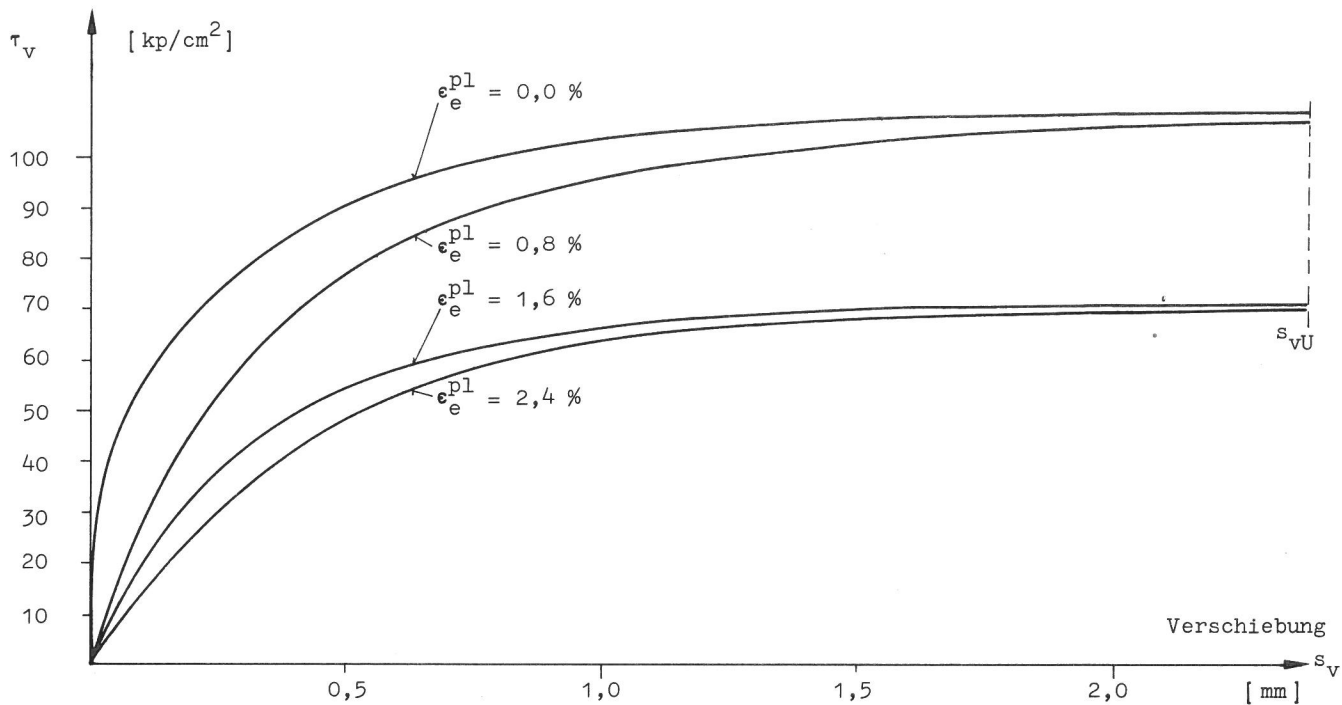


Bild 23a: Arbeitslinien für Verbundelemente zwischen Rissen - verwendet in Rechnung B

Verbundspannung

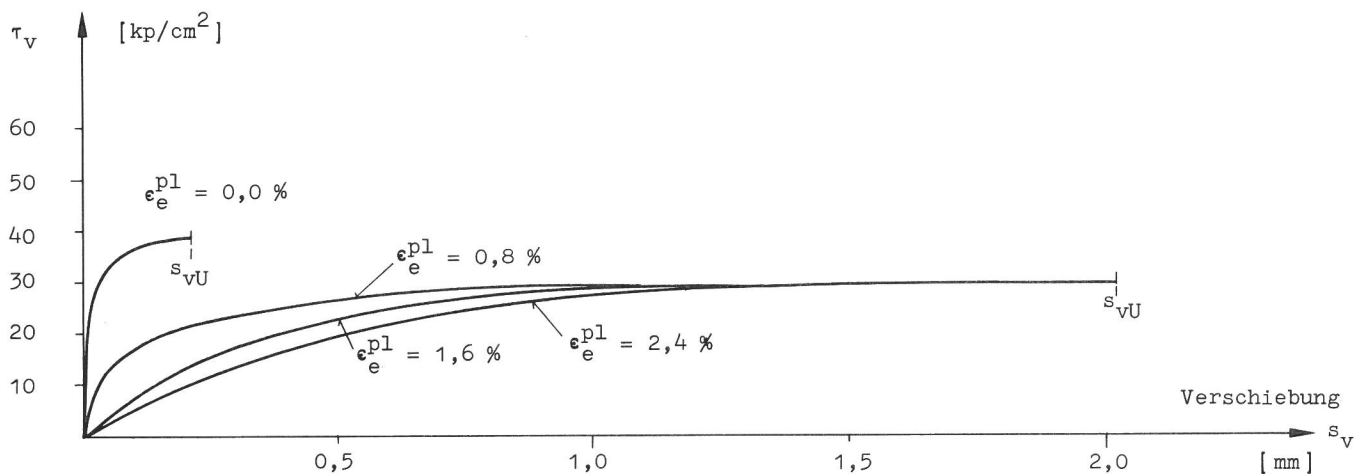


Bild 23b: Arbeitslinien für Verbundelemente am Riß - verwendet in Rechnung B

#### 4.5 Grenzbedingungen für den Bruch von Beton und Bewehrungsstahl

Untersuchungen zur zwei- und dreiaxialen Festigkeit von Beton wurden nur in begrenzter Anzahl durchgeführt [30-36]. Die Versuchsergebnisse weichen zum Teil erheblich voneinander ab. Unterschiedliche Ergebnisse ergeben sich durch die verwendeten verschieden geformten Probekörper wie Würfel, Scheiben, Hohlzylinder und die Art der Krafteinleitung. Das eigentliche Problem bei der Ermittlung der zweiachsigen Festigkeit von Beton liegt in der Schwierigkeit, einen eindeutig definierten zwei-

achsigen Spannungszustand im Probekörper zu erzeugen. In der Arbeit [34] wird versucht, zu einer wirklichkeitsnahen Beurteilung der zweiachsigen Festigkeit von Beton zu gelangen. Die ermittelten Ergebnisse zeigt Bild 24.

Zu erkennen ist, daß eine Erhöhung der Festigkeit bei zweiachsiger Druckbeanspruchung nahezu unabhängig von der Betongüte ist. Gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit beträgt die maximale Festigkeitserhöhung etwa 27 %. Sie tritt bei einem Hauptspannungsverhältnis  $\sigma_1/\sigma_2 = 2$  auf. Für  $\sigma_1 = \sigma_2$  wird eine Festigkeitserhöhung um etwa 16 % ermittelt.

Im Druck-Zug-Bereich nimmt die Festigkeit mit steigendem Zug-Druck-Verhältnis gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit ab.

Im Druck-Zug- und Zug-Zug-Bereich nehmen die auf die Prismenfestigkeit bezogenen Bruchspannungen mit steigender Betongüte ab. Die zweiachsige Zugfestigkeit unterscheidet sich kaum von der einachsigen Zugfestigkeit.

Die in Bild 24 eingetragenen Bruchgrenzkurven für verschiedene Betonfestigkeiten weichen nur geringfügig voneinander ab. Mit guter Näherung kann daher eine gemittelte Grenzkurve als Bruchbedingung für Beton unter zweiachsiger Beanspruchung für die Rechnung angenommen werden.

In der Rechnung selbst wird nach der Spannungsermittlung für eine bestimmte Belastungsstufe festgestellt, ob die Hauptspannungen einzelner Elemente die vorgegebene Bruchbedingung verletzen. Ist das der Fall, verlieren diese Elemente vollständig ihre Steifigkeit und werden in der weiteren Rechnung nicht mehr zur Lastaufnahme herangezogen.

Für Bewehrungsstahlelemente wird zu einer näherungsweisen Erfassung des Bruchs ein Verformungskriterium verwendet. Nach Erreichen einer maximalen Grenzdehnung, die durch den einachsigen Zugversuch ermittelt wird, verliert das Element in Richtung der Hauptzugspannung seine Steifigkeit. - In den durchgeführten Rechnungen wird die Längsbewehrung immer als Zugbewehrung verwendet -. Mit der Erfüllung des genannten Bruchkriteriums ist der Stahl gerissen und kann an der Bruchstelle keine Kräfte mehr übertragen.

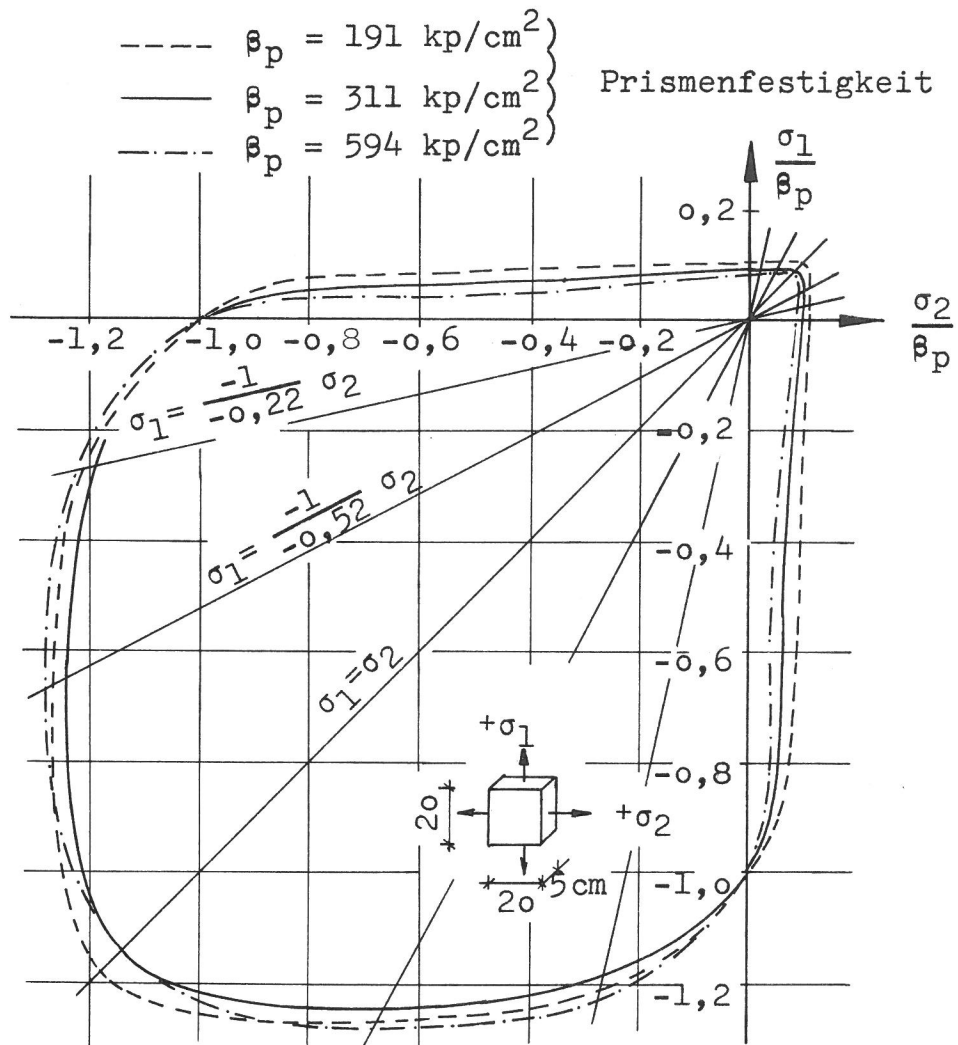


Bild 24: Bruchgrenzkurven für den zweiachsig beanspruchten Beton [34]



## 5.0 Nichtlineare Berechnung - Entwicklung einer problemkonformen Rechentechnik

### 5.1 Bemerkung zur nichtlinearen Berechnung

Wird für einen Stahlbetonbalken die in Versuchen [39] ermittelte Relativdrehung  $\theta$  der Balkenendquerschnitte als Funktion des Biegemoments  $M$  in Balkenmitte aufgetragen, so nimmt das Momenten-Drehungs-Diagramm den in Bild 25 gezeigten charakteristischen Verlauf an. Bis zum Erreichen der Reißlast, bei der erste Risse auftreten, verläuft die  $M$ - $\theta$ -Kurve geradlinig. Die Gerade  $f_I$  kennzeichnet dabei die elastische Balkenverformung nach Stadium I. Bei weiterem Lastanstieg verläuft die Kurve nahezu geradlinig, hat jedoch einen geringeren Anstieg. Die leichte Abweichung von einer Geraden ist auf das Entstehen neuer und die Weiterentwicklung bestehender Biegerisse zurückzuführen. Die Gerade  $f_{II}$  kennzeichnet damit die linearen Verformungen nach Stadium II jedoch unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons auf Zug zwischen Rissen. Erst nach Überschreiten des plastischen Moments  $M_p$  nimmt die Drehung im Bereich  $f_{III}$  bei geringem Lastanstieg rasch zu, bis ein Bruch der Betondruckzone oder des Bewehrungsstahls eintritt. Plastische Drehungen  $\theta_{III}$  werden verursacht durch Plastizieren der Werkstoffe in einem unterschiedlich langen, zur Balkenmitte meist symmetrischen,

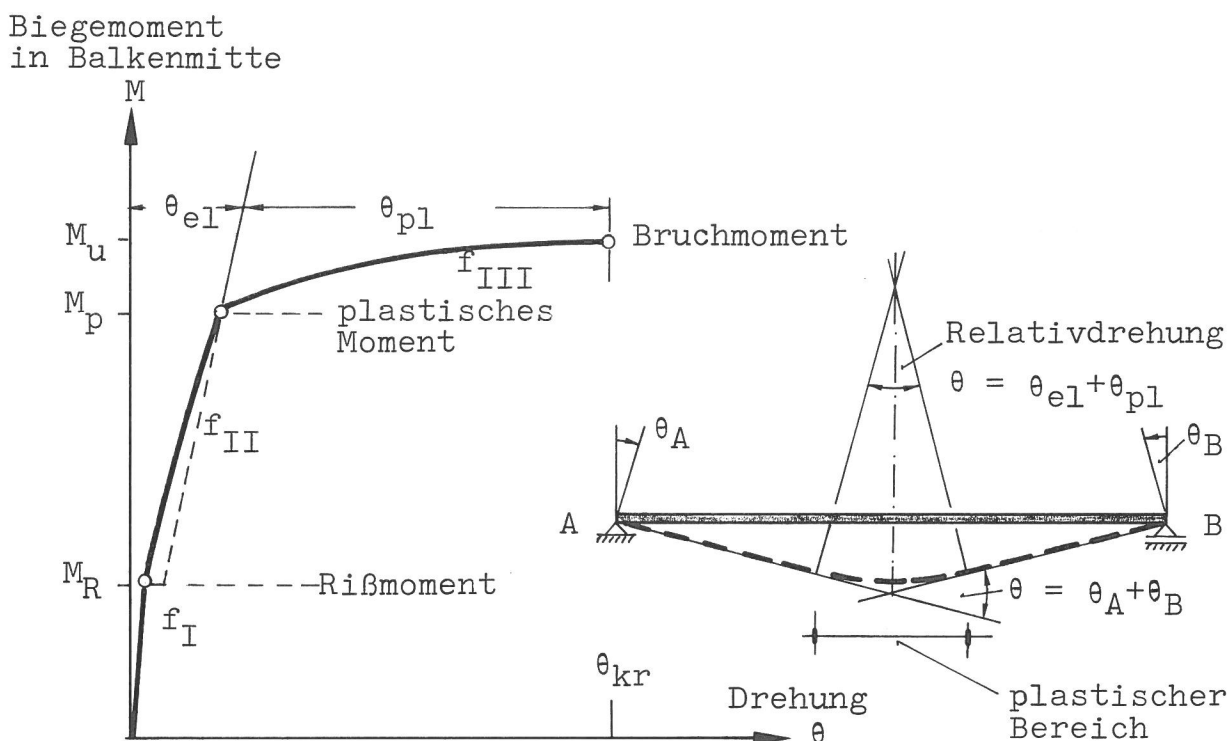


Bild 25: Charakteristischer Momenten-Drehungs-Verlauf für den mittleren Bereich eines Stahlbetonbalkens [39]

plastischen Bereich. Die größte auftretende Drehung  $\theta$  wird als Grenzdrehung  $\theta_{kr}$  bezeichnet. Die Relativedrehung  $\theta$  setzt sich entsprechend Bild 25 aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen. Eine über den plastischen Bereich des Balkens aufsummierte Drehung  $\theta_{pl}$  ist mit der zu ermittelnden Drehfähigkeit des plastischen Gelenkes identisch.

Die rechnerische Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke erfordert nun eine vollständige Simulation des erläuterten Verformungsverhaltens von Traggliedern oder Tragwerksbereichen, die bis zum Bruch belastet werden. Der in Abschnitt 2.0 gezeigte Ablauf eines Rechenprogramms zur Untersuchung elastischer Systeme ist daher so zu erweitern, daß:

- nichtlineares Spannungs-Verzerrungs-Verhalten der Werkstoffe Stahl und Beton
- nichtlineares Spannungs-Verschiebungs-Verhalten des Verbundes
- Ribbildung
- örtliche Zerstörung des Verbundes
- örtliche Zerstörung der Betondruckzone

in die Berechnung mit einbezogen werden können. Die zur Lösung des vorliegenden nichtlinearen Problems entwickelte Rechentechnik sieht eine schrittweise Belastung des Elementmodells vor, wobei die Systemsteifigkeitsmatrix dem jeweils vorhandenen Verformungszustand angepaßt wird, sowie eine iterative Ermittlung des Verschiebungszuwachses im Belastungsintervall infolge Ribbildung und Werkstoffplastizieren.

## 5.2 Verformungsermittlung bei inkrementeller Belastung des Rechenmodells

Im Gegensatz zu Tragwerken aus linear-elastischen Werkstoffen kann das Verformungsverhalten bis zum Versagen beanspruchter Stahlbetonkonstruktionen mit der Methode der Finiten Elemente nicht in einem Rechengang analysiert werden. Die Berechnung kann nur schrittweise unter Berücksichtigung der infolge von Ribbildung und Werkstoffplastizieren eintretenden Steifigkeitsänderungen erfolgen.

Bei monoton anwachsender äußerer Belastung beschreibt die nichtlineare Funktion  $\phi$  in Bild 26 den Zusammenhang zwischen Knotenkräften  $\{R\}$  und Knotenverschiebungen  $\{r\}$  eines entsprechend Abschnitt 3 diskretisierten Stahlbetonbauteils, dessen Werkstoff- und Verbundverhalten durch die in Abschnitt 4 enthaltenen Gesetze definiert ist.

Die Ermittlung der Knotenverschiebungen kann in der Rechnung nur schrittweise erfolgen, indem die nichtlineare Funktion  $\phi$  durch einen Polygonzug approximiert wird. Eine stückweise Linearisierung der Kraft-Verschiebungskurve ist jedoch gleichbedeutend mit der Berechnung einer Anzahl von Systemen mit unterschiedlichem jedoch stets linearem Verschiebungsverhalten für eine Reihe von Lastinkrementen.

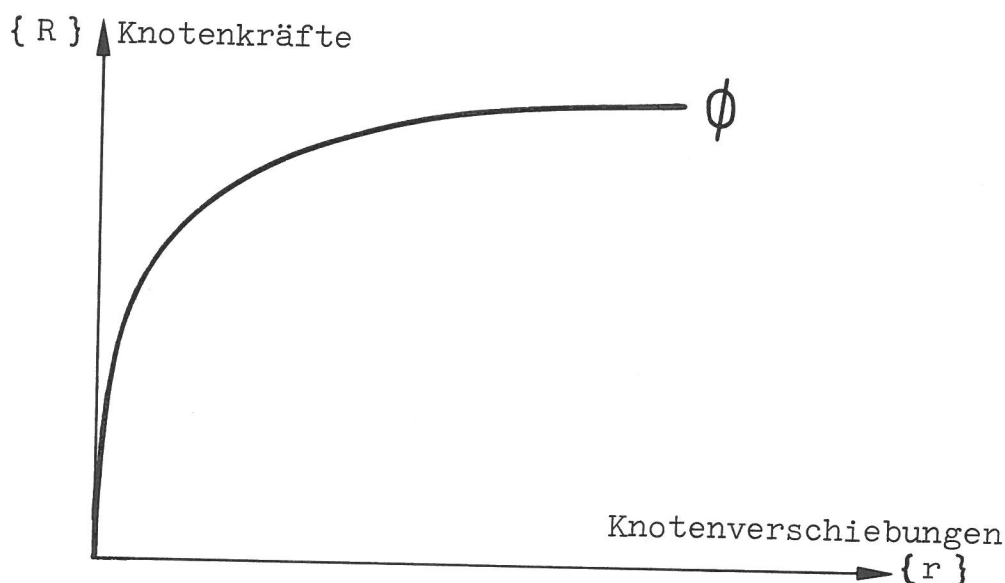


Bild 26: Last-Verschiebungsverhalten des Elementmodells

Wird das Belastungsintervall  $m$  betrachtet, so erfolgt hier zunächst die Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungsincrementes  $\{\sigma_m\}$  und  $\{r_m\}$  an einem Tragsystem, dessen Steifigkeit  $[K_m]$  durch die bis zum Aufbringen der Teillast  $\{R_m\}$  eingetretene Ribbildung und Werkstoffplastizierung bestimmt ist. Bleiben durch die Teillast  $\{R_m\}$  verursachte Steifigkeitsänderungen bei der Bestimmung des Verschiebungsincrementes  $\{r_m\}$  unberücksichtigt, so weichen rechnerisch ermitteltes und tatsächlich vorhandenes Verformungsverhalten des betrachteten Systems voneinander ab (Bild 27).

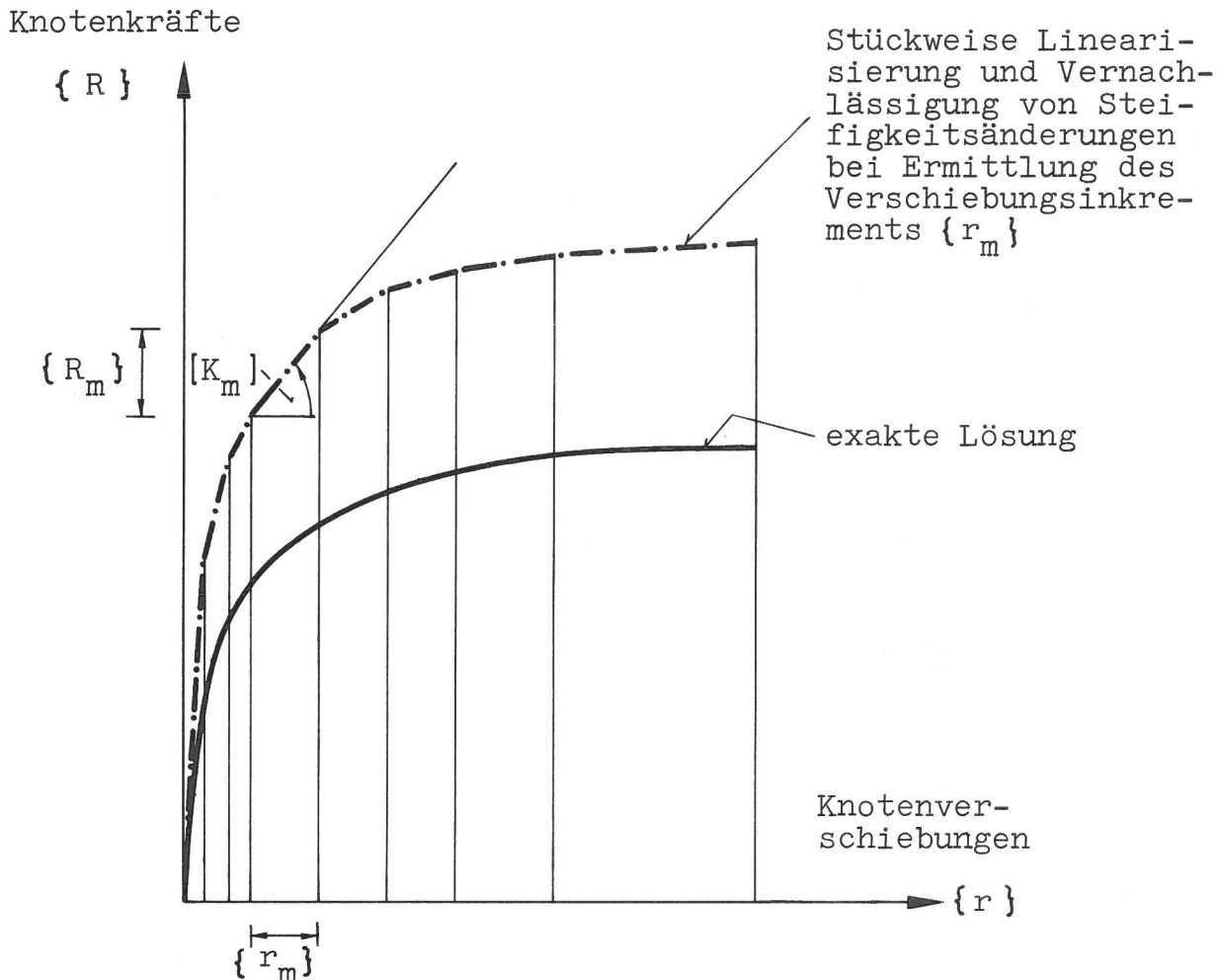


Bild 27: Schrittweise Approximation des Verformungsverhaltens eines Bauteils

In der Rechnung macht sich diese Abweichung durch eine Unverträglichkeit zwischen dem jeweils neu ermittelten Verschiebungszustand und dem dazugehörigen durch die Stoffgesetze bestimmten Spannungszustand bemerkbar. In der vorliegenden Arbeit wird diese Unverträglichkeit durch eine Korrektur des Spannungszustandes beseitigt. Hierzu ist in den einzelnen Elementen die Differenz zwischen den wahren Spannungswerten, wie sie sich aufgrund der herrschenden Deformation einstellen und denjenigen, die der linear "elastischen" Lösung entsprechen, zu bilden. Den Differenzspannungen entsprechende Knotenkräfte können physikalisch als nicht ausgeglichene Knotenkräfte interpretiert werden, die zur Herstellung des Gleichgewichtes am System anzubringen sind.

Wird das Verschiebungsincrement  $\{r_m\}$  unter Verwendung der Steifigkeit  $[K_m]$  ermittelt und beträgt die tatsächlich vorhandene Steifigkeit im Belastungsintervall  $m$   $[K_m^*]$ , so läßt sich der dargestellte Sachverhalt ebenfalls dem Bild 28 entnehmen:

$$\{ R_m \} = [ K_m ] \{ r_m \} = [ K_m^* ] \{ r_m \} + \{ R_m^* \} \quad (51)$$

Werden die Korrekturkräfte  $\{ R_m^* \}$  jeweils im nächsten Belastungsintervall zur äußeren Teillast  $\{ R_{m+1} \}$  addiert, so erfolgt die inkrementelle Berechnung nach der folgenden Prozedur, dargestellt in Bild 28:

$$\begin{aligned} \{ R_1 \} &= [ K_1 ] \{ r_1 \} = [ K_1^* ] \{ r_1 \} + \{ R_1^* \} \\ \{ R_2 \} + \{ R_1^* \} &= [ K_2 ] \{ r_2 \} = [ K_2^* ] \{ r_2 \} + \{ R_2^* \} \\ \cdot &\quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \end{aligned} \quad (52)$$

$$\{ R_m \} + \{ R_{m-1}^* \} = [ K_m ] \{ r_m \} = [ K_m^* ] \{ r_m \} + \{ R_m^* \}$$

Die insgesamt auf das System aufgebrauchte äußere Belastung sowie die aus der Belastung unter Berücksichtigung der Korrekturkräfte resultierenden Knotenverschiebungen ergeben sich jeweils durch Addition der einzelnen Inkremente:

$$\{ R \} = \sum_{j=1}^m \{ R_j \} \quad \text{bzw.} \quad \{ r \} = \sum_{j=1}^m \{ r_j \} \quad (53)$$

Überschreiten die nicht ausgeglichenen Knotenkräfte  $\{ R_m^* \}$  eine festgesetzte Fehlerschranke, so wird eine mehrmalige Korrektur des Spannungszustandes im Belastungsintervall  $m$  selbst erforderlich. Eine Erläuterung des hierzu in der vorliegenden Arbeit entwickelten Iterationsverfahrens erfolgt in den folgenden Abschnitten.

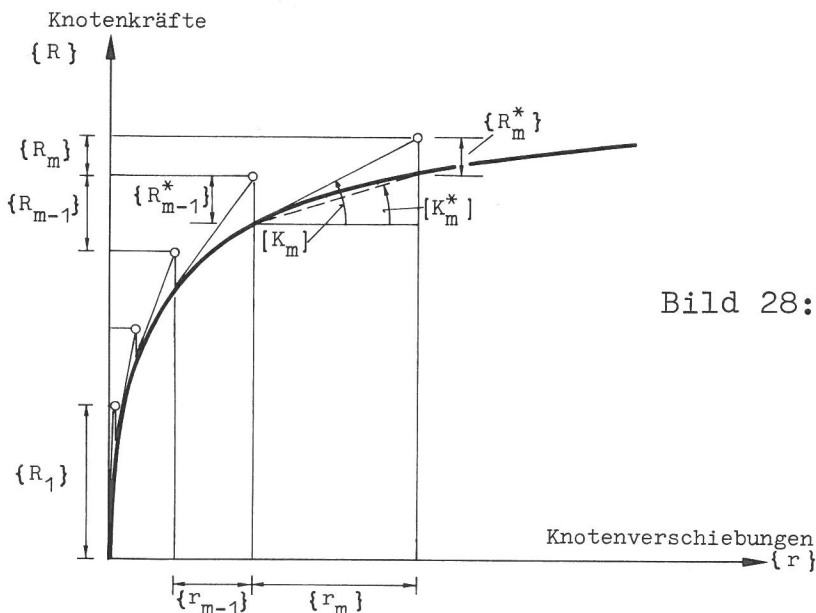


Bild 28: Schrittweise Belastung des Elementmodells mit teilweiser Korrektur des Gleichgewichtszustandes

### 5.3 Verformungsermittlung im Belastungsintervall infolge Plastizieren der Werkstoffe

---

Eine exakte Ermittlung der Knotenverschiebungen im Belastungsintervall  $m$  ist nur auf iterativem Wege möglich. Hierzu sind die Rechenvorschriften (52) noch weiter zu vervollständigen. Zunächst wird die durchzuführende iterative Ermittlung des Verschiebungszuwachses infolge Plastizieren der Werkstoffe erläutert.

Verursacht durch das nichtlineare Stoffverhalten von Beton, Bewehrung und Verbund sind die rechnerisch ermittelten Verzerrungen  $\{\epsilon\}_{Re}$  und die Spannungen  $\{\sigma\}_{Re}$  der einzelnen Elemente nicht miteinander verträglich. Den Arbeitslinien der Werkstoffe bzw. den Verbundgesetzen müssen daher die zu  $\{\epsilon\}_{Re}$  tatsächlich gehörenden Spannungen  $\{\sigma\}_{Sto}$  entnommen werden.

Treten in den Elementen Differenzspannungen

$$\Delta \{\sigma\} = \{\sigma\}_{Re} - \{\sigma\}_{Sto} \quad (54)$$

auf, so existieren entsprechend Abschnitt 5.3 nichtausgeglichene Knotenkräfte und die Gleichgewichtsbedingungen des Rechenmodells sind verletzt.

In der Rechnung erfolgt die Korrektur des Spannungszustandes, falls die Differenzspannungen  $\Delta \{\sigma\}$  eine vorgegebene Größe überschreiten. Der Spannungsausgleich wird durch Addition eines den Differenzspannungen äquivalenten Eigenspannungszustandes vorgenommen, wobei die Elementknoten keine Wege ausführen dürfen. Der Eigenspannungszustand besteht hierbei aus Elementspannungen  $-\Delta\{\sigma\}$  sowie Zwangskräften an den unverschieblich festgehaltenen Elementknoten. Diese in Wirklichkeit nicht vorhandenen Knotenkräfte sind durch entgegengesetzt gleichgroße Korrekturkräfte  $\{R^*\}$  zu löschen, wobei die Fixierung der Knoten wieder aufzuheben ist. Die Korrekturkräfte verursachen einen Verschiebungszuwachs und damit zusätzliche Elementspannungen und -verzerrungen.

Stellt sich heraus, daß Spannungen und Verformungen der Elemente immer noch nicht zueinander passen, so sind in einem weiteren Iterationsschritt Zwangs- bzw. Korrekturkräfte neu zu berechnen und am System anzubringen. Dieses Vorgehen ist so lange zu wiederholen, bis die Differenzspannungen  $\Delta \{\sigma\}$  oder die Korrekturkräfte  $\{R^*\}$  eine festgesetzte Fehlerschranke erreicht haben.

Die durchzuführende Iteration erfolgt bei unverändert beibehaltener globaler Steifigkeitsmatrix des Rechenmodells nach dem folgenden Algorithmus (s. Bild 29):

$$\begin{aligned} \Delta \{r\} &= [K_R]^{-1} \{R_1^* (\{r\})\} && 1. \text{ Iterationsschritt} \\ &+ [K_R]^{-1} \{R_2^* (\{r\})\} && 2. \text{ Iterationsschritt} \\ &\vdots && \vdots \\ &\vdots && \vdots \\ &\vdots && \vdots \\ &+ [K_R]^{-1} \{R_j^* (\{r\})\} && j. \text{ Iterationsschritt} \end{aligned} \quad (55)$$

oder in verkürzter Form:

$$\Delta \{r\} = \sum_{k=1}^j [K_R]^{-1} \{R_k^* (\{r\})\} \quad (56)$$

In der Beziehung (55) bedeuten  $\{r\}$  die Verschiebungen der Elementknoten nach dem Iterationsschritt  $j$ ,  $\Delta \{r\}$  der durch die Spannungskorrektur im Belastungsintervall verursachte Verschiebungszuwachs und  $\{R_j^* (\{r\})\}$  die vom vorhandenen Verschiebungszustand abhängigen Korrekturkräfte. Die einzelnen Summanden in (55) ergeben sich durch mehrmaliges Anschreiben der Gl. (16). Die Korrektur des Spannungszustandes erfolgt an einem System mit der Steifigkeit  $[K_R]$ , die nicht mehr der Steifigkeit  $[K_m]$  bei Aufbringung der Teillast  $\{R_m\}$  entspricht. In der Matrix  $[K_R]$  sind durch die Rißbildung im Belastungsintervall  $m$  verursachte Steifigkeitsänderungen bereits z. T. berücksichtigt. Nähere Erläuterungen hierzu werden in Abschnitt 5.4 gegeben.

Eine vollständige Annäherung der errechneten an die vorhandenen Steifigkeitswerte ist erfolgt, falls die Spaltenmatrix  $\{R^*\}$  in Gleichung (56) die Bedingung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{R_k^*\} \rightarrow 0 \quad (57)$$

erfüllt.

Die als äußere Belastung an den Elementknoten anzubringenden Korrekturkräfte  $\{R^*\}$  werden entsprechend Gl. (15c) gebildet, wobei für die Anfangsspannungen  $\{\sigma_0\}$  die Differenzspannungen  $\Delta \{\sigma\}$  einzusetzen sind.



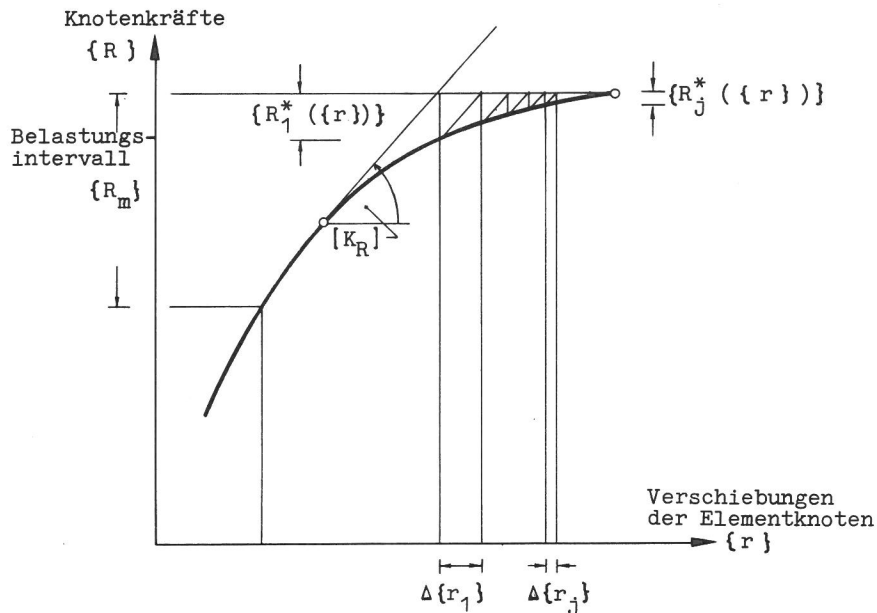


Bild 29: Iterative Ermittlung der Verschiebungen infolge Werkstoffplastizieren im Belastungsintervall m

Die hier vorgenommene iterative Ermittlung des Verschiebungszuwachses  $\Delta \{r\}$  infolge Werkstoffplastizieren ohne Änderung der globalen Steifigkeitsmatrix in den einzelnen Iterationsschritten bietet rechentechnische Vorteile. Da die Rechenanweisungen (56) einem Gleichungssystem mit  $j$ -rechten Seiten entsprechen, ist die Ermittlung der Knotenverschiebungen für jede Spaltenmatrix  $\{R_j^*\}$  auf einfache und zeitsparende Weise möglich. Bei dem im Rechenprogramm verwendeten Auflösungsverfahren sind in diesem Fall lediglich  $j$ -Rücksubstitutionen vorzunehmen. Die Rücksubstitution benötigt jedoch nur einen Bruchteil der Rechenzeit, die jeweils zum Auflösen des gesamten Gleichungssystems erforderlich wäre.

#### 5.4 Verformungsermittlung im Belastungsintervall infolge Rißbildung

Die Teillast  $\{R_m\}$  verursacht im Belastungsintervall m ein Aufreißen weiterer Betonelemente des Rechenmodells, d. h. es entstehen neue Risse oder bereits vorhandene Risse pflanzen sich weiter fort in Richtung Betondruckzone. Da dieser Vorgang im Versuch innerhalb einer bestimmten Zeitspanne abläuft (abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit, mit der die Teillast aufgebracht wird), muß in der Rechnung die Rißbildung ganz analog schrittweise nachvollzogen werden. Ist entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 5.3 im Belastungsintervall m ein kinematisch verträglicher Spannungszustand hergestellt, so



wird die Rechnung mit der Risseermittlung fortgesetzt. Anhand des Rißkriteriums werden diejenigen Betonelemente festgestellt, in denen Risse auftreten können. Da das Rißkriterium meist in einem ganzen Bereich ungerissener Betonelemente erfüllt ist, wird ein Aufreißen jedoch lediglich in Elementen zugelassen, in denen die Hauptzugspannungen einen maximalen Wert annehmen

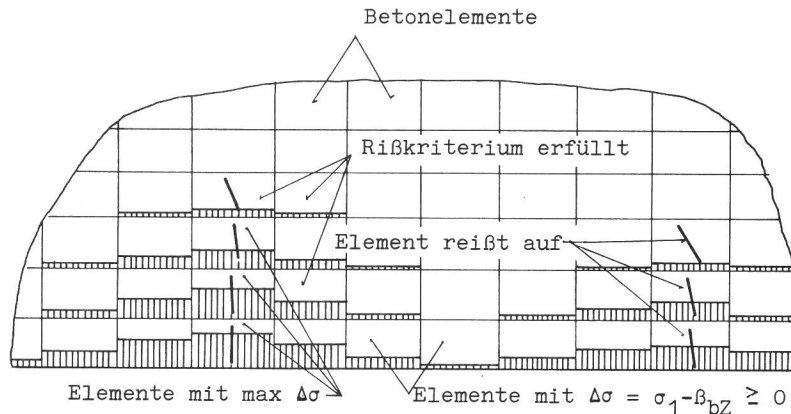


Bild 30: Auswahl von Betonelementen, in denen das Entstehen von Rissen im Iterationsschritt  $j$  zugelassen ist

(Bild 30). Dieses Auswahlkriterium kann in mehreren Elementen des Rechenmodells erfüllt sein.

Die infolge Rißbildung eintretenden Verschiebungen werden an einem Elementsystem mit veränderter, dem Rißbild angepaßter Steifigkeit vorgenommen. Beim Aufbau der Steifigkeitsmatrizen ist jedoch zu beachten, daß neue "Rißelemente" keine Steifigkeit mehr senkrecht zum Riß besitzen. In der Stoffmatrix  $[D_{1,2}]$  dieser Betonelemente wird daher für den Stoffkennwert in der Richtung 1 (senkrecht zum Riß) der Wert Null eingesetzt.

Eine Elimination von Zugspannungen, die neue Risse verursacht haben, erfolgt durch äquivalente Eigenspannungszustände, wobei die Elementknoten unverschieblich festgehalten werden. Da die zu den Eigenspannungszuständen gehörenden Zwangskräfte an den Knoten gerissener Elemente in Wirklichkeit nicht existieren, sind diese Kräfte durch entgegengesetzt gleichgroße Korrekturkräfte  $\{R^*\}$  wieder zu löschen, wobei die Elementknoten jetzt Verschiebungen ausführen können. Durch diesen Rechenschritt wird die Umlagerung der Risse erzeugenden Spannungen auf ungerissene Bereiche des Traggliedes simuliert. Die Darstellung des Bildes 31 verdeutlicht den Ablauf der durchzuführenden Prozedur. Ist  $[K_R]$  die unter Berücksichtigung des Steifigkeitsverlustes gerissener Betonelemente neu aufgebaute Systemsteifigkeits-

↳ Betonelement

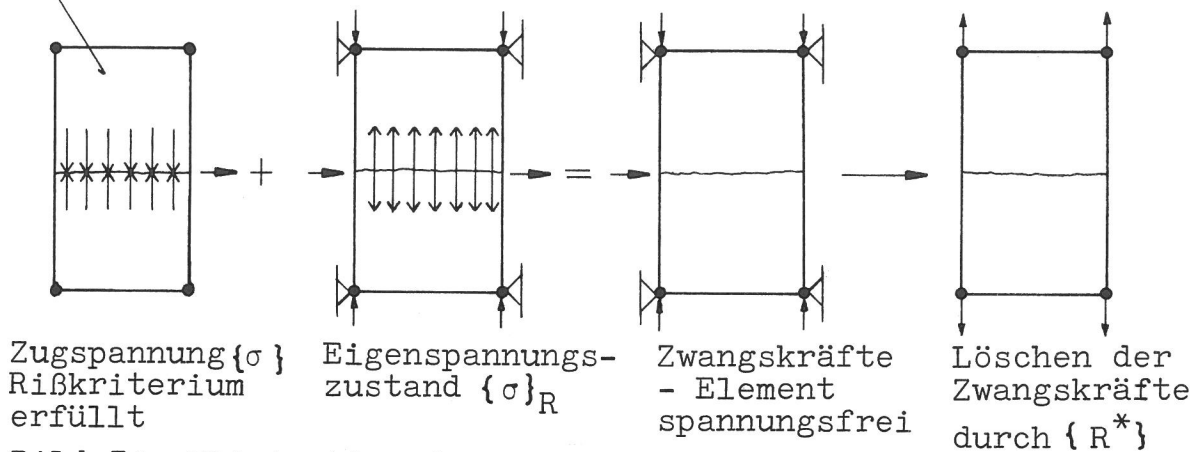


Bild 31: Elimination der Spannungen in einem Betonelement senkrecht zum Riß

matrix und  $\{R_R^*\}$  die zur Spannungsumlagerung erforderliche Spaltenmatrix der Knotenkräfte, so kann die im Belastungsintervall m erfolgende Rißbildung schrittweise durch den folgenden Algorithmus rechnerisch erfaßt werden - wobei  $\Delta\{r\}$  den Verschiebungszuwachs darstellt -:

$$\begin{aligned}
 \Delta\{r\} &= [K_{R,1}]^{-1} \{R_{R,1}^*\} && 1. \text{ Rißphase} \\
 &+ [K_{R,2}]^{-1} \{R_{R,2}^*\} && 2. \text{ Rißphase} \\
 &\cdot && \cdot \\
 &\cdot && \cdot \\
 &\cdot && \cdot \\
 &+ [K_{R,j}]^{-1} \{R_{R,j}^*\} && j. \text{ Rißphase}
 \end{aligned} \tag{58}$$

Zu beachten ist, daß während der Rißbildung ebenfalls plastische Formänderungen infolge einer veränderten Steifigkeit des Traggliedes auftreten, die hier noch zu berücksichtigen sind. Um den genauen Risseverlauf ermitteln zu können, werden nach jeder Rißphase entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 5.3 in einem zwischengeschobenen Iterationszyklus diese noch fehlenden Verschiebungsanteile bestimmt. Der Verschiebungszuwachs, verursacht durch die Rißbildung im Iterationsschritt j ermittelt sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 \Delta\{r_j\} &= [K_{R,j}]^{-1} \{R_{R,j}^*\} \\
 &+ \sum_{k=1}^n [K_{R,j}]^{-1} \{R_k^* (\{r\})\}
 \end{aligned} \tag{59}$$

## 6.0 Finite-Element-Programm zur Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken

### 6.1 Aufbau des Programmsystems

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die theoretischen Grundlagen einer nichtlinearen Berechnung zweidimensionaler Stahlbetonbauteile- bzw. Konstruktionen mit der Methode der Finiten Elemente erläutert.

Ein vollständiges Rechenprogramm zur Durchführung der vorgesehenen theoretischen Untersuchung zum Verformungsverhalten von Stahlbetonbalken stand jedoch nicht zur Verfügung. Die Neuentwicklung eines Finite-Element-Programms zur Riß-Bruchberechnung von Stahlbetonbauteilen erfordert jedoch einen enormen Zeitaufwand. Da Finite-Element-Programme zur Spannungs-Verformungsberechnung ebener elastischer Systeme der Literatur entnommen werden können, stellt die Einbeziehung von Programmteilen aus den Arbeiten [17, 21] in das hier zur nichtlinearen Berechnung entwickelte umfangreiche Programmsystem einen Kompromiß dar. Nach der Umorganisation dieser Programmteile erfolgte die Angliederung neuentwickelter "Bausteine" in Form von Unterprogrammen. Zu diesen, die inelastische Berechnung ermöglichenden Bausteinen gehören im einzelnen:

- NEWSTR      Korrektur des Spannungszustandes bei Rißbildung und Plastizieren der Werkstoffe
- NEWPRO      Ermittlung von Stoffkennwerten aus den Arbeitslinien
- RELEASE    Ermittlung von Korrekturkräften zur Herstellung des Gleichgewichts an den Elementknoten, bzw. zur Spannungsumlagerung
- SEARCH     Ermittlung diskreter Risse in Betonelementen
- FAIL        Ermittlung von Elementen, deren Spannungs- oder Verformungszustand die Bruchbedingungen erfüllen.

Umfangreiche manuelle Arbeiten sind zur Erstellung der Daten für das diskretisierte System erforderlich. In gleicher Wei-

se mühsam gestaltet sich die Auswertung von Ergebnislisten. Es wurden aus diesem Grunde zusätzlich zwei Serviceprogramme erstellt, die eine weitgehend automatische Regenerierung der Netzdaten durchführen und ein Aufbereiten der anfallenden Ergebnisse in Form von graphischen Darstellungen ermöglichen. Diese Programme werden hier bezeichnet als:

- AUTODATE      Datenerstellung für das finite Elementnetz
- PLOKURV      Zeichenprogramm zur graphischen Darstellung von Rechenergebnissen

Anhand eines Blockdiagramms (Bild 32) kann die Arbeitsweise des gesamten Systems auf einfache Weise verfolgt werden.

Als Programmiersprache wurde FORTRAN IV verwendet. Das Auste-  
sten des Programmsystems und die Durchführung der Rechnungen erfolgte auf den Rechenanlagen CDC 3200 und CDC 3300 von Control Data und dem Großrechner TR 440 von Telefunken.

Das Rechenprogramm ist in der Anlage 1 enthalten. Im folgenden werden noch einige weitergehende Erläuterungen zum erstellten Programmsystem gegeben.

## 6.2 Arbeitsweise des Programmbereichs A

Die Ermittlung von Verformungen und Spannungen eines elastischen Systems, belastet durch äußere Lasten oder Korrekturkräfte, erfolgt innerhalb des Programmteils A. Benötigt wird zunächst die Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen für das Rechenmodell. Die globale Steifigkeitsmatrix  $[K]$  besitzt - bei richtiger Numerierung der einzelnen Elementknoten - Bandstruktur und ist zu ihrer Hauptdiagonalen symmetrisch. Zwei Merkmale, die sich im Hinblick auf den benötigten Speicherplatzbedarf sehr günstig auswirken. Da es nur in seltenen Fällen - bei kleinen Systemen - möglich ist, die Gesamtmatrix  $[K]$  innerhalb des Rechnerkernspeichers unterzubringen, erfolgt die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix für die diskretisierte Struktur durch STIFF blockweise. Da jeweils zwei dieser Blöcke im Rechnerkern vorhanden sein müssen, ist die Blockgröße von der zur Verfügung stehenden Kernspeicherstrecke abhängig. Die bereits angesprochene Symmetrie des Gleichungssystems erfor-

dert lediglich die Handhabung des halben Bandes inklusive der Hauptdiagonalglieder. Da die Anzahl der Blöcke lediglich von der Größe des vorhandenen externen Speicherplatzes abhängig ist, können praktisch beliebig große Gleichungssysteme gelöst werden. Die Vorgabe der Bandbreite - d.h. die Differenz der Knotenpunktnummern eines Elements darf eine bestimmte Zahl nicht überschreiten - bedeutet hierbei eine gewisse Einschränkung.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden vom Unterprogramm SUBSTIFF aufbereitet, und zwar jeweils nur für Elemente, die einen Anteil an der Systemsteifigkeit im Bereich des Blocks N bzw. in beiden Blöcken N und N + 1 liefern. Sind keine derartigen Elemente mehr vorhanden, so erfolgt die Einarbeitung der Randbedingungen sowie die Erstellung der Spaltenmatrix der aus den äußeren Lasten resultierenden Knotenkräfte für den Block N. Anschließend findet eine Auslagerung des Blocks N auf eine Platten- oder Banddatei statt und der Block N + 1 rückt an die Stelle des Blocks N. Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß ein zeitraubender Datentransfer zwischen Intern- und Externspeichern (Kern $\leftrightarrow$ Platte bzw. Band) auf ein Minimum an Operationen herabgedrückt wird. - Gleiches gilt in diesem Zusammenhang auch für das Auflösungsverfahren zur Ermittlung der Knotenverschiebungen -.

Das Unterprogramm SUBSTIFF stellt für alle Einzelelemente die Steifigkeitsmatrizen auf. Da die verwendeten Rechteckelemente jeweils aus vier Dreieckelementen zusammengesetzt werden, erfolgt die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix für Dreieckelemente in einem gesonderten Unterprogramm TRISTIFF.

Zur Auflösung des Gleichungssystems steht das Unterprogramm BAND zur Verfügung. BAND ist speziell auf die Behandlung von Gleichungssystemen mit Bandstruktur und symmetrischer positiv definiter Koeffizientenmatrix zugeschnitten. Anwendung findet der Gauß'sche Algorithmus ohne Pivotsuche. Es erfolgt eine Dekomposition der Bandmatrix Block für Block. Anschließend kann beliebig oft eine Rücksubstitution durchgeführt werden. Die Rücksubstitution nimmt dabei lediglich ca. 1/5 der Dekompositionszeit in Anspruch. Damit ist ein schnelles Auflösen des Gleichungssystems für beliebig viele Lastfälle möglich. Dieser Fall tritt ein, wenn iterative Methoden - unter Beibe-

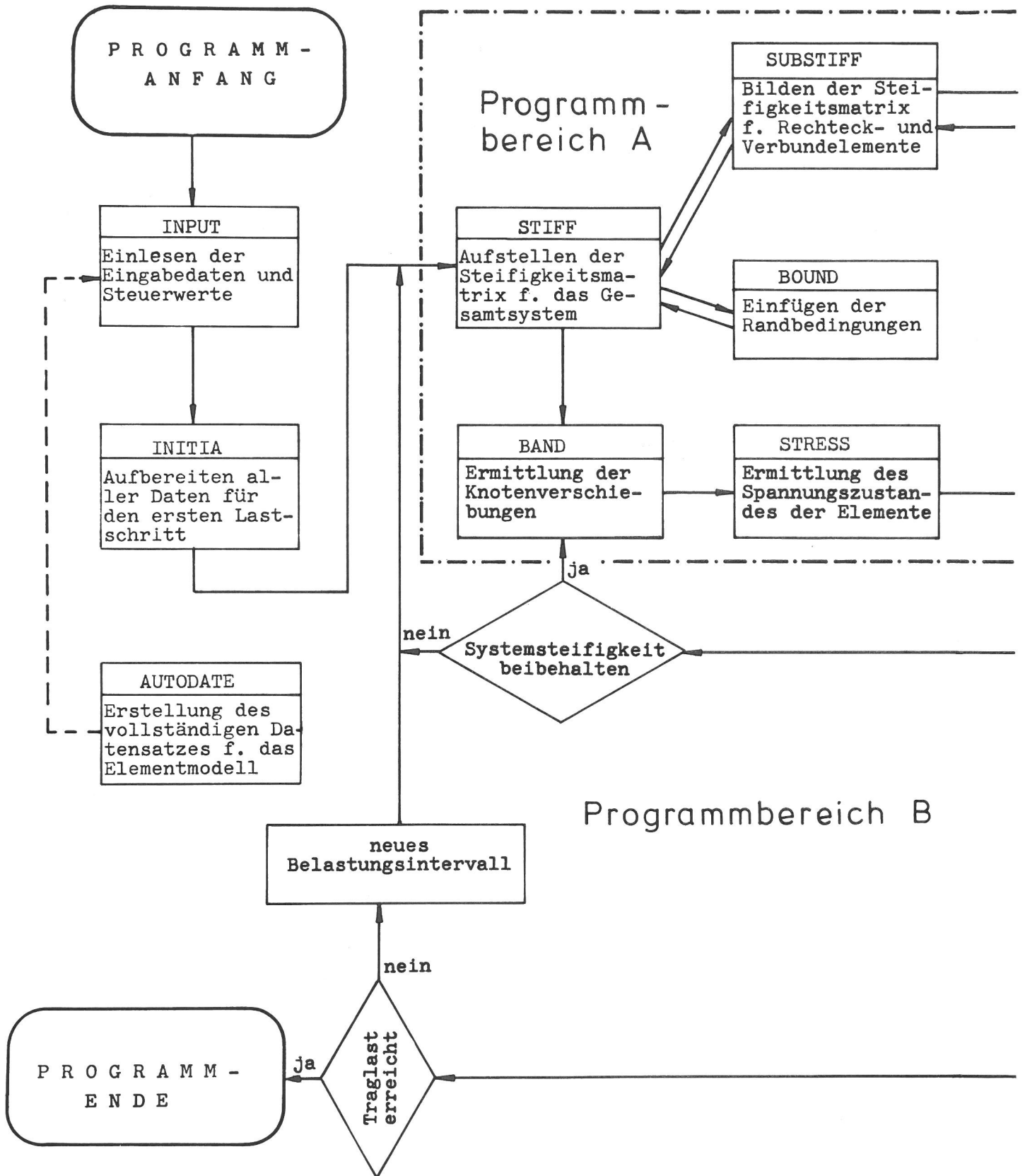
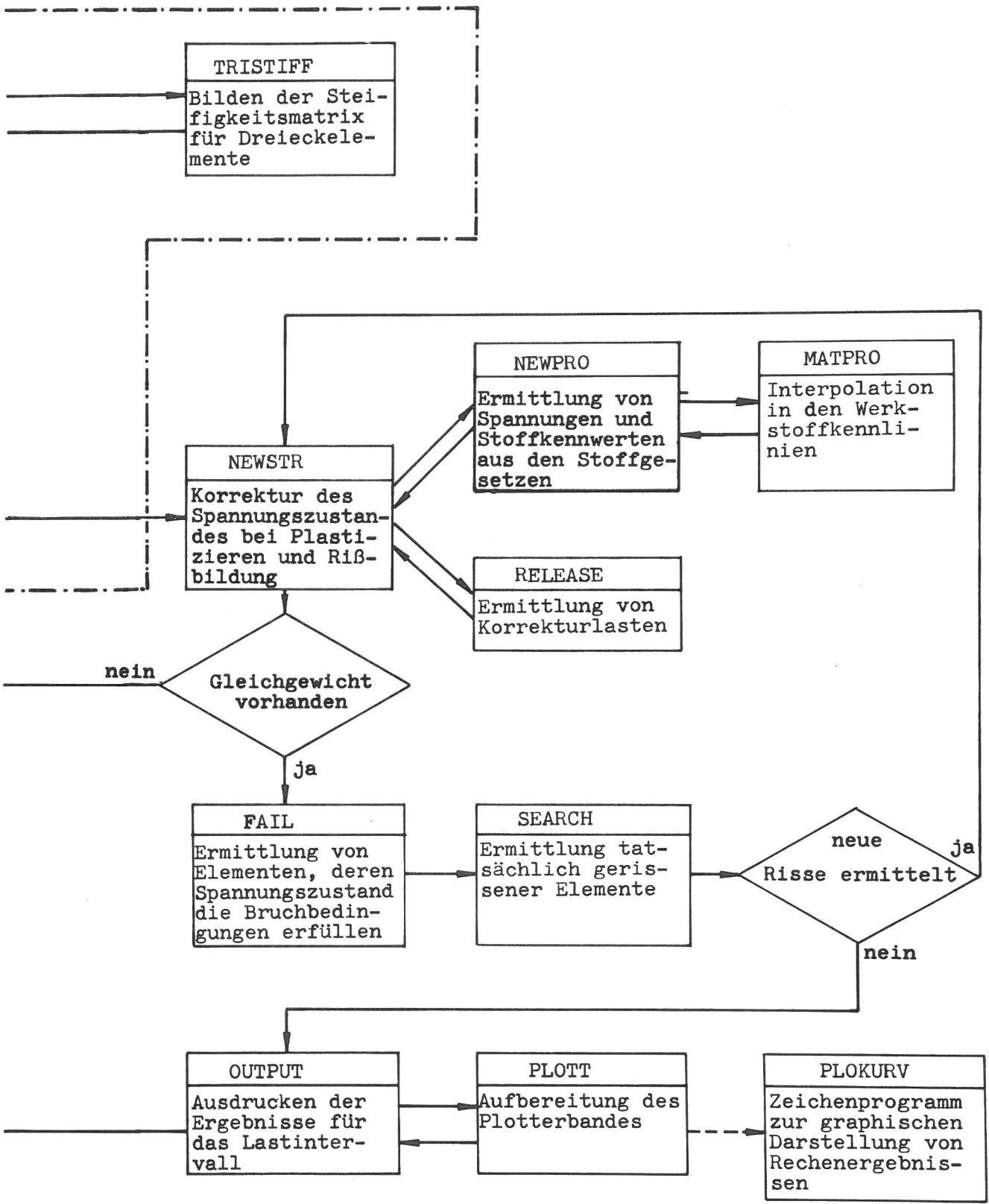


Bild 32: Arbeitsweise des Rechenprogramms zur Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Tragglieder aus Stahlbeton





haltung der Systemsteifigkeit - zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes innerhalb eines Lastintervalls (s. Abschnitt 5.3) herangezogen werden.

Stehen nach Auflösung des Gleichungssystems die Knotenverschiebungen des Rechenmodells zur Verfügung, so kann jetzt mit STRESS die Ermittlung der Elementspannungen und -verzerrungen vorgenommen werden. Für die aus Dreieckelementen zusammengesetzten Rechteckelemente erfolgt zunächst die Bestimmung der konstanten Spannungs- und Verzerrungszustände der einzelnen Dreieckelemente. In der weiteren Rechnung wird jedoch eine mittlere im Rechteckelement konstante Spannung benutzt, die sich aus dem Mittelwert der Verzerrungen der einzelnen Dreieckelemente ergibt. Die Verwendung konstanter Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  entspricht hier einer in Rechteckelementen angestrebten Glättung des Spannungsverlaufs. Für die weitere Rechnung im Programmteil B werden noch die Spannungen und Verzerrungen in den Hauptrichtungen ermittelt. Die Bestimmung der Verbundspannungen  $\tau_v$  erfolgt ebenfalls in STRESS, und zwar in Abhängigkeit der für Verbundelemente aus den Verschiebungen der jeweiligen Anschlußknoten ermittelten Relativverschiebungen  $s_v$ .

### 6.3 Arbeitsweise des Programmbereichs B

Der Programmbereich A enthält bis auf die Ein- bzw. Ausgaberroutinen sämtliche zur Spannungs-Verformungs-Berechnung von Systemen mit linearem Verformungsverhalten (ohne Berücksichtigung der Rißbildung) erforderlichen Rechenoperationen. Ausgangspunkt für die nichtlineare Berechnung sind die im Programmteil A für eine bestimmte Steifigkeitsverteilung innerhalb des Rechenmodells und eine bestimmte äußere Belastung ermittelten Elementspannungen und -verzerrungen. Rißbildung, nichtlineares Werkstoff- und Verbundverhalten, der Bruch von Beton oder das Versagen des Verbundes werden entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 5 im Programmteil B behandelt. Beide Programmbereiche A und B haben nur einige wenige Schnittstellen, ein Umstand, der sich günstig auf das Austesten des gesamten Programmsystems ausgewirkt hat.

Ein wichtiger Baustein des Programmbereichs B ist das Unterprogramm NEWSTR. Hier wird festgestellt, ob die im Rahmen der nichtlinearen Berechnung ermittelten Elementspannungen und -verzerrungen bzw. Verschiebungen miteinander kompatibel sind,



d. h. ob die Gleichgewichtsbedingungen des Systems erfüllt sind. Mit Hilfe von NEWPRO, unter Verwendung von Hilfsroutinen zur Interpolation, werden daher aus den Stoffgesetzen die den rechnerisch ermittelten Dehnungs- bzw. Verschiebungswerten entsprechenden Spannungswerte bestimmt. Stimmen rechnerisch ermittelte Spannungen und aus den Stoffgesetzen bestimmte Spannungen nicht überein, so sind nicht ausgeglichene Knotenkräfte vorhanden und damit die Gleichgewichtsbedingungen des Rechenmodells verletzt. Anhand der vorhandenen Differenzspannungen werden mit RELEASE "Ungleichgewichtskräfte" bestimmt, die zur Wiederherstellung des Gleichgewichts notwendig sind. Die Ermittlung der aus diesen Korrekturkräften resultierenden Knotenverschiebungen erfolgt wieder im Programmbereich A.

Ergibt sich in einem Durchlauf von NEWSTR, daß die Differenzspannungen eine festgesetzte Fehlerschranke nicht überschreiten, so wird in FAIL geprüft, ob die Spannungen in einzelnen Elementen die Bruchkriterien erfüllen. Tritt ein Versagen des Bauteils infolge Zerstörung einzelner Elemente nicht ein, so wird die Rechnung mit der Risseermittlung fortgesetzt.

In FAIL wurde bereits festgestellt, in welchen Betonelementen das Reißkriterium erfüllt ist. Die Auswahl derjenigen Elemente, in denen tatsächlich Risse auftreten, wird in SEARCH vorgenommen. In der hier benutzten Programmversion wird davon ausgegangen, daß nur in Elementen, deren Hauptzugspannung - bei Überschreiten der einachsigen Zugfestigkeit - ein Maximum erreichen, ein Riß auftreten kann. Sind bereits mehrere Risse vorhanden, so wird in einem einzigen Durchlauf von SEARCH die Rißfortpflanzung festgestellt.

Verbunden mit dem Aufreißen von Betonelementen ist die Umlagerung der Risseerzeugenden Zugspannung auf benachbarte ungerissene Elemente des Rechenmodells. Dieses geschieht wiederum mit Hilfe von Korrekturkräften durch das Unterprogramm NEWSTR in der bereits erwähnten Weise. Sind sämtliche Risse im Belastungsintervall ermittelt, so erfolgt die hier beschriebene Prozedur für das nächste Belastungsintervall, beginnend mit der Spannungs-Verformungsberechnung im Programmbereich A.

#### 6.4 Arbeitsweise der Serviceprogramme

Im allgemeinen verursacht die Durchführung einer Rechnung bei

Verwendung von Systemen mit einer größeren Anzahl von Knotenpunkten und Elementen - im vorliegenden Fall erfolgten die Untersuchungen an Netzen mit bis zu 528 Knotenpunkten und 514 Elementen - eine umfangreiche manuelle Arbeit, was die Datenerstellung und die Auswertung der Rechenergebnisse anbelangt. Um hier den Aufwand in erträglichen Grenzen zu halten, wurden zwei Serviceprogramme aufgebaut, nämlich AUTODATE - ein Programm zur Datenerstellung - und PLOKURV - ein Zeichenprogramm zur graphischen Darstellung von Rechenergebnissen -.

AUTODATE ermöglicht unter Verwendung einiger weniger Eingabewerte die Erstellung des kompletten Datensatzes, zu dem im wesentlichen die Koordinaten der Knotenpunkte, deren Belastung oder Randbedingungen sowie die Knotenpunktsummern, geometrische Größen und Stoffeigenschaften der Elemente gehören. Die Anwendung von AUTODATE setzt voraus, daß sämtliche Knotenpunkte des Elementnetzes auf geraden Linien liegen, die nicht notwendigerweise parallel zueinander verlaufen müssen. Setzt sich jede dieser Linien zumindest bereichsweise aus einer Anzahl gleichlanger Intervalle zusammen, so lassen sich unter Angabe der Koordinaten der jeweiligen Endpunkte die Koordinaten der Zwischenpunkte auf einfache Weise ermitteln. Im Sonderfall eines Netzes mit orthogonalen Schnittlinien ergeben sich sämtliche Rasterkoordinaten, wenn Intervallängen und Anzahl der Intervalle gleicher Länge in beiden Schnittlinienrichtungen angegeben werden.

Die Reihenfolge der Knotennummern im Elementnetz kann so gewählt werden, daß sich die Knotennummern für Elemente gleicher Materialeigenschaften - die in einer Reihe oder einem zusammenhängenden Bereich liegen - durch ein einfaches Bildungsgesetz vom Programm ermitteln lassen.

Im Laufe einer Rechnung werden eine Fülle von Ergebnisdaten erstellt, die sich nur mühsam überblicken und auswerten lassen. Eine außerordentliche Hilfe bedeutet in diesem Fall die graphische Darstellung von Spannungs- und Verformungszuständen. Das hierfür erstellte Zeichenprogramm PLOKURV steuert über den Rechner ein Zeichengerät (Plotter). Ausgegeben werden auf diese Weise der Verlauf von Stahlspannungen, Verbundspannungen und Betonspannungen in Balkenlängsrichtung in Form von Diagrammen. Die zum Zeichnen der einzelnen Polygonzüge erforderlichen Daten werden von einer Speicherdatei abgerufen.

## 7.0 Durchführung von Rechnungen zur Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken

### 7.1 Allgemeines zu den durchgeführten Rechnungen

Um zu überprüfen, ob mit den getroffenen Annahmen das Verhalten von Stahlbetonbalken wirklichkeitsnah erfaßt werden kann, wurde ein Stahlbetonplattenstreifen aus dem Versuchsprogramm [38] rechnerisch untersucht. Ausgewählt wurde hierfür der Plattenstreifen 1.2.2 mit einer Stützweite von  $l = 3,00$  m, einer Breite  $b = 0,64$  m und einer Querschnittshöhe von  $d = 0,32$  m. Bei einer Längsbewehrung von  $4 \varnothing 16$  mm Betonstahl BSt 42/50 RK (Rippentorstahl) betrug der Bewehrungsprozentsatz  $\mu = 0,42\%$ . Die Belastung des Plattenstreifens erfolgte im Versuch durch drei Einzellasten.

In zwei Rechnungen, die im weiteren als Rechnung A und Rechnung B gekennzeichnet sind, wurde die Rißbildung, das Last-Verformungsverhalten sowie die durch entstehende Risse und Werkstoffplastizieren verursachte Spannungsumlagerung untersucht.

In Rechnung A erfolgte die Simulation des Bauteilverhaltens an einem System mit grober Elementteilung. Um den Einfluß des Verbundes auf die Rißbildung und die Verformungen aufzeigen zu können, wurde zunächst die in Bild 22 dargestellte einfache Abhängigkeit zwischen Spannungen und Verschiebungen in der Verbundfuge angenommen.

Die in Rechnung A aufgetretenen Unstimmigkeiten führten zu einer verbesserten Analyse unter Verwendung einer feinen Elementteilung und des im Rahmen der Arbeit [41] ermittelten vollständigen Gesetzes für den Verbund. Das Verbundverhalten in Rißnähe bzw. im Bereich zwischen Rissen ist in Rechnung B durch zwei unterschiedliche Gesetze, entsprechend den Bildern 23 a und b, approximiert worden.

Den Plattenstreifen 1.2.2 aus dem Versuchsprogramm [38] zeigt Bild 33 nach Erreichen der Traglast.

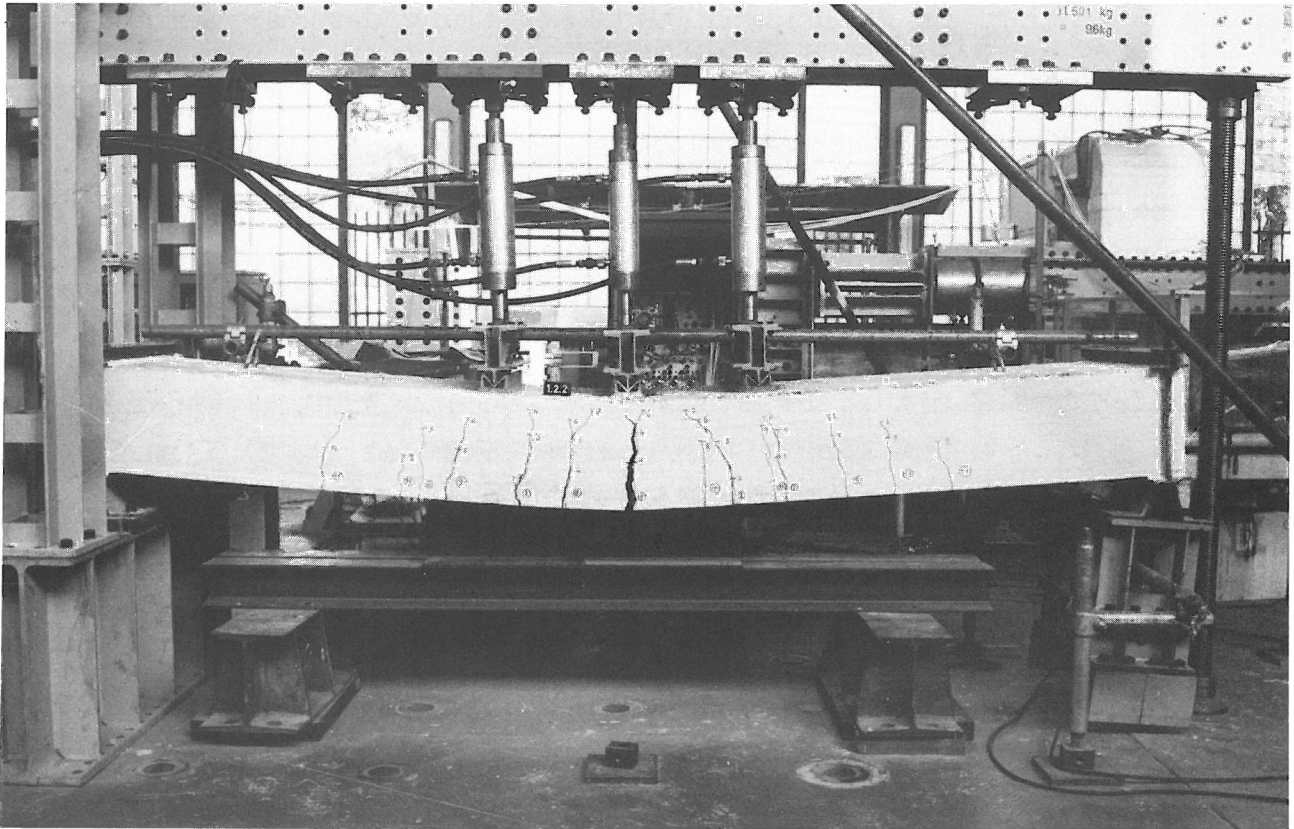


Bild 33: In den Rechnungen A und B untersuchter Stahlbetonplattenstreifen [ 38 ]

## 7.2 Rechnung A - näherungsweise Verbund

Unter Ausnutzung der Symmetrie wurde das in Bild 34 dargestellte System untersucht. Die Diskretisierung des Plattenstreifens erfolgte durch insgesamt 332 Elemente und die Anzahl der Elementknoten betrug 341. Bewehrungselemente und Betonelemente sind übereinanderliegend angeordnet und durch Verbundelemente miteinander verknüpft worden (Pkt.A, Bild 34). Für eine inkrementell aufgebrachte Belastung wurden Spannungen, Verformungen sowie die entstehenden Risse ermittelt. Die Bilder 35a-f geben die fortschreitende Rißentwicklung wieder. Das Biegemoment in Balkenmitte beträgt in Laststufe 1  $M = 2,95$  Mpm und in Laststufe 2  $M = 5,90$  Mpm. Bei Erreichen der Laststufe 2 treten daher rechnerisch, in Übereinstimmung mit dem experimentell gemessenen Rißmoment  $M_R = 3,5$  Mpm, erste Risse auf (Bild 35b). Mit zunehmender Belastung schreitet die Rißbildung bis zum Bruch des Plattenstreifens fort. Anzahl und Abstand der einzelnen, rechnerisch ermittelten Risse decken sich ebenfalls gut mit den experimentellen Werten. Ein Vergleich des Versuchsfotos, aufgenommen nach dem Bruch des Plat-

tenstreifens und dem Reißbild der rechnerischen Laststufe 5 (Bild 35e und 35f) zeigen diese Übereinstimmung deutlich.

In den Bildern 36a-c sind die Spannungen in der Bewehrung, in der äußeren Betonzugfaser und in der Verbundschicht längs der Balkenachse dargestellt, wie sie rechnerisch für die Laststufen 1-4 ermittelt wurden. Kennzeichnend für den Spannungsverlauf in der Bewehrung ist das starke Ansteigen der Stahlspannung in den Rissen. Eine Abnahme der Stahlspannungen im Bereich zwischen Rissen ist auf die Dehnungsbehinderung durch den Verbund mit dem umgebenden Beton zurückzuführen.

Nach Erreichen der rechnerischen Laststufe 5 erfolgte ein Abbruch des Programmlaufs, da in einer Vielzahl von Betonelementen zwischen bereits vorhandenen Rissen das Reißkriterium erfüllt war. Eine Fortsetzung der Rechnung ist unter diesen Umständen nicht mehr möglich gewesen. Als Grund für die in der Rechnung auftretenden Schwierigkeiten kann angeführt werden, daß mit dem verwendeten einfachen Gesetz für den Verbund eine genügend genaue Erfassung des Spannungszustandes zwischen den Rissen nicht mehr möglich ist. Abweichend vom tatsächlichen Bauteilverhalten geht mit dem Aufreißen benachbarter Betonelemente die Tragfähigkeit des Betons in der Zugzone in einem größeren Bereich vollständig verloren. Abhilfe kann hier nur geschaffen werden durch Verwendung eines vollständigen Verbundgesetzes, das eine genauere Approximation des Verbundverhaltens zwischen Beton und Bewehrung durch die Rechnung ermöglicht.

Die als Relativdrehung der Balkenendquerschnitte ermittelte Drehung des sich ausbildenden plastischen Gelenkes wurde in Bild 37 den Versuchswerten aus [ 38 ] gegenübergestellt. Das Momenten-Drehungs-Diagramm zeigt bis zum Bereich beginnender plastischer Verformungen eine befriedigende Übereinstimmung zwischen gerechneten und an drei gleichartigen Plattenstreifen im Versuch gemessenen Drehungen.

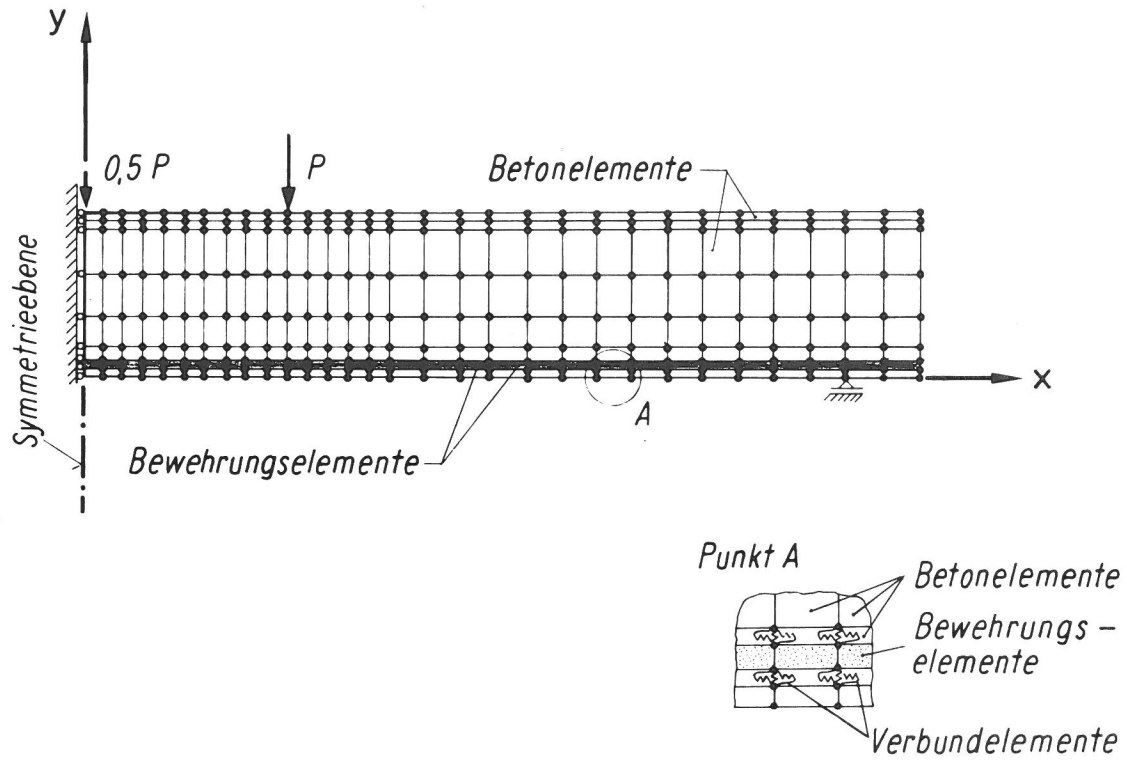


Bild 34: Rechnung A - Plattenstreifen - Diskretisiertes System

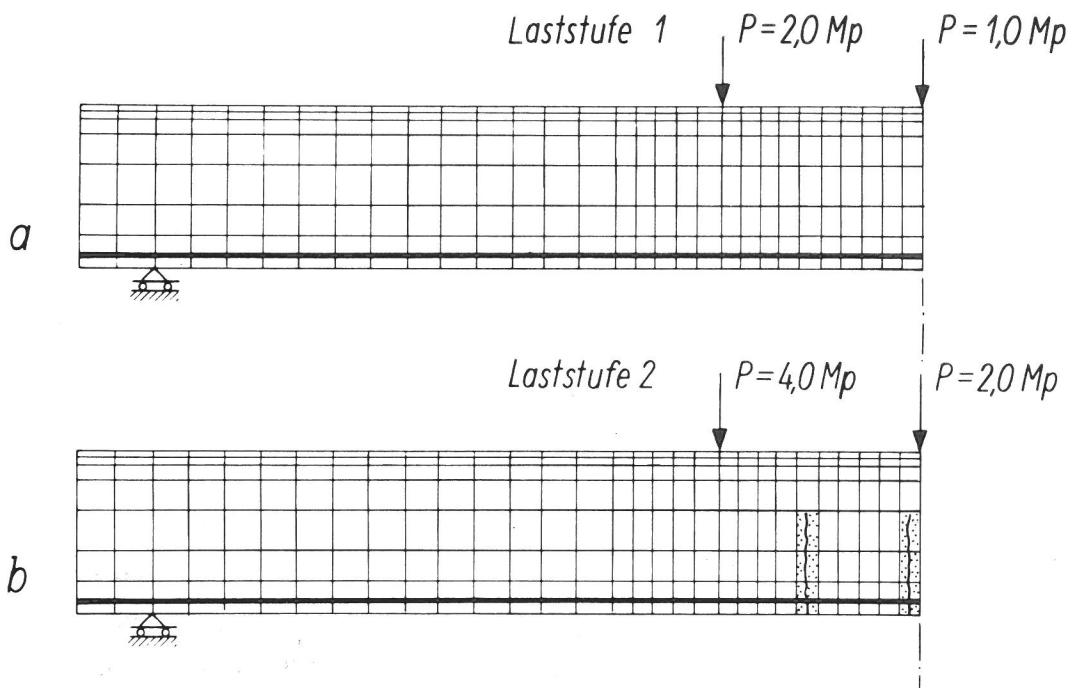


Bild 35a-b: Rißbildung in den Laststufen 1 und 2



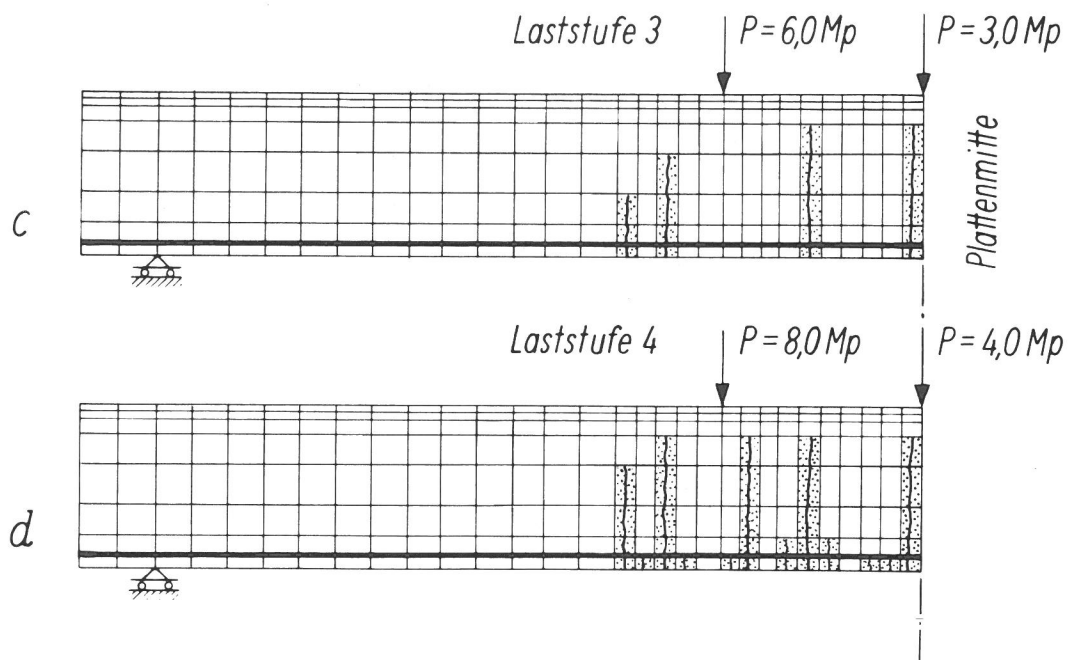
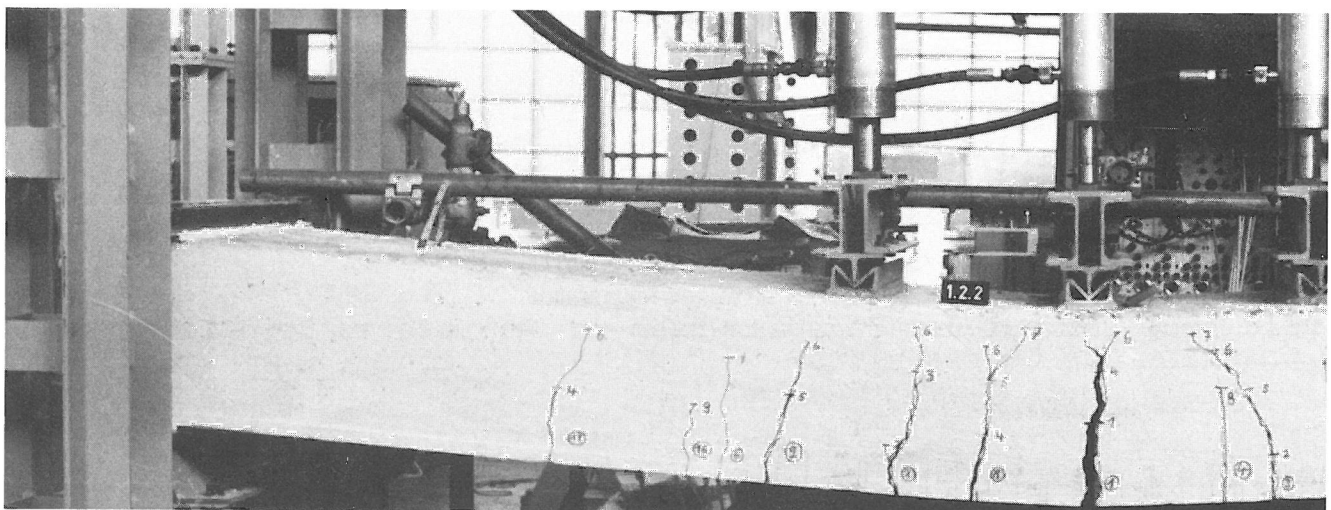
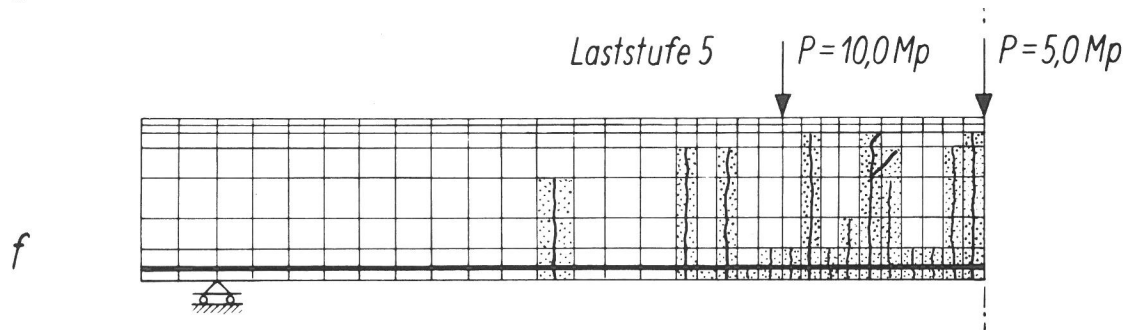


Bild 35c-d: Rißbildung in den Laststufen 3 und 4



e



f

Bild 35e: Rißbild des Plattenstreifens 1.2.2 nach dem Bruch [ 38 ]

Bild 35f: Rißbild des Plattenstreifens nach Aufbringen der rechnerischen Laststufe 5

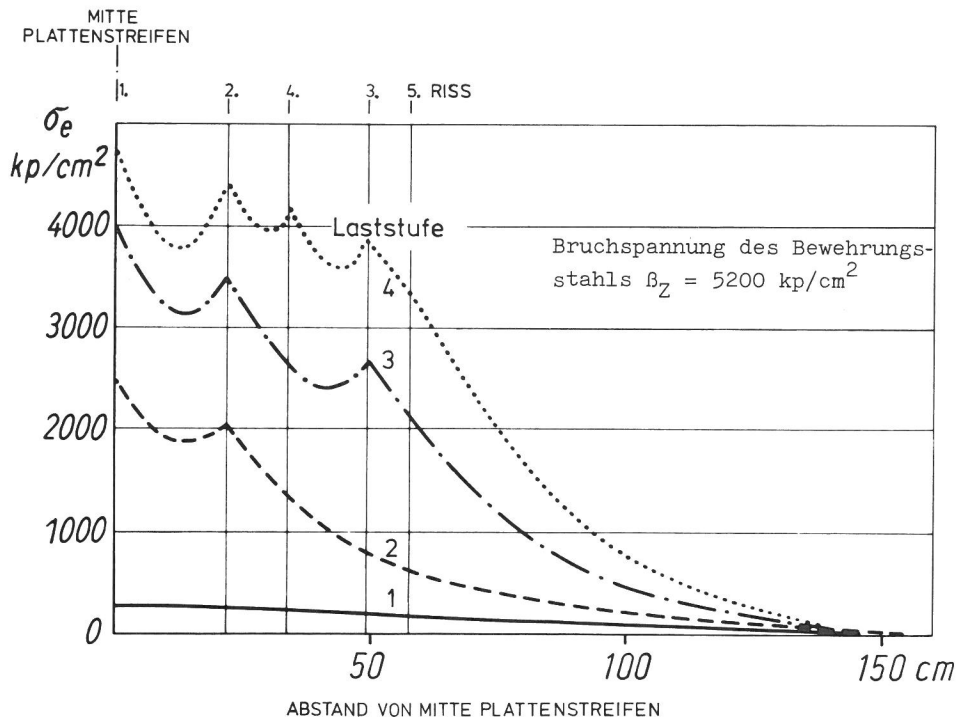


Bild 36a: Verlauf der Zugspannungen in der Bewehrung

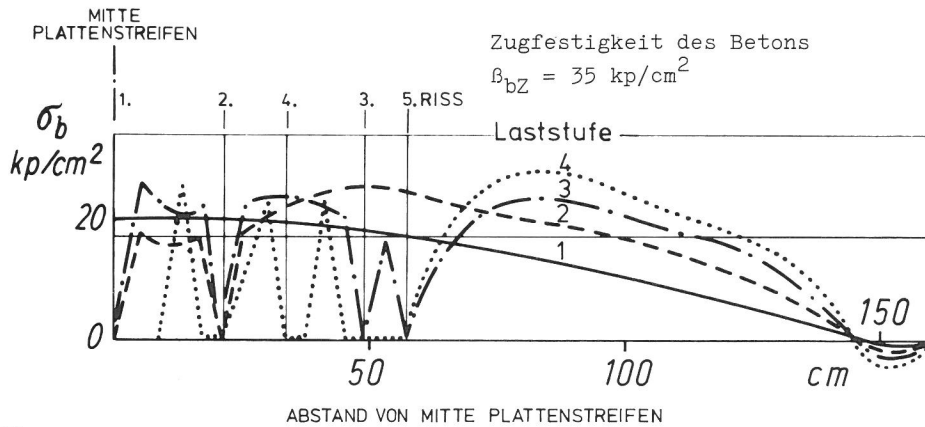


Bild 36b: Verlauf der Zugspannungen in der unteren Betonfaser des Querschnitts

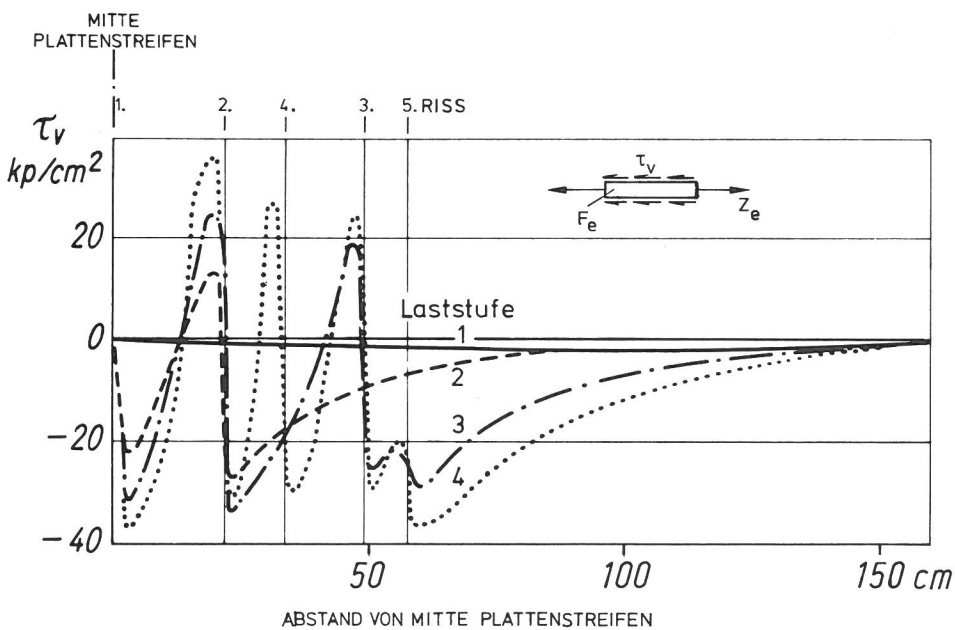


Bild 36c: Verlauf der Verbundspannungen zwischen Bewehrung und Beton



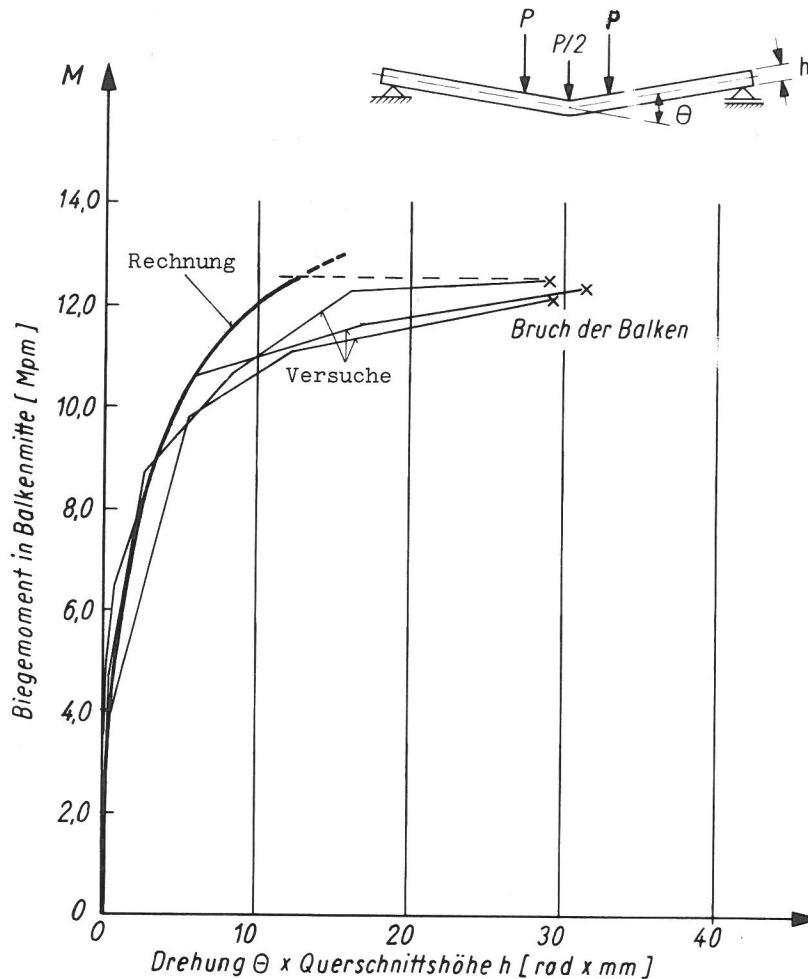


Bild 37: Vergleich der ermittelten Drehungen aus Rechnung A mit Versuchswerten [38]

### 7.3 Rechnung B - vollständige Approximation des Verbundes

Eine verbesserte Analyse wird mit einer feineren Elementteilung durchgeführt. Das Rechenmodell (Bild 39) enthält jetzt 514 Elemente und 528 Knotenpunkte. Im Gegensatz zu dem in der Rechnung A verwendeten Näherungsgesetz für den Verbund ermöglichen die in den Bildern 23a und b enthaltenen vollständigen Verbundgesetze eine realistischere Erfassung von Spannungen und Verschiebungen in der Verbundschicht.

Das in Rechnung A aufgetretene Reißen unmittelbar benachbarter Betonelemente in der Zugzone des Plattenstreifens kann jetzt vermieden werden, da zwei unterschiedliche Gesetze für den Verbund zur Verfügung stehen. Verbundelementen, die gerissene Betonelemente mit Stahlelementen verbinden, wird das Gesetz für den gestörten Bereich (Verbund an Rissen, Bild 23b) zugeordnet. Das Spannungs-Verschiebungsverhalten von nicht "unmittelbar" am Riß befindlichen Verbundelementen beschreibt das

Gesetz für den Verbund ungestörter Bereiche (Bild 23a). Die Verwendung unterschiedlicher Verbundgesetze erfordert jedoch, daß zwischen entstehenden Rissen sich noch möglichst viele ungerissene Betonelemente befinden - eine Forderung, die aus rechen-technischen und wirtschaftlichen Gründen meist nur schwer zu erfüllen ist.

Die über die Querschnittshöhe erfolgte feinere Elementteilung wurde vorgenommen, um das Hochwandern der Risse besser verfolgen zu können.

In Abhängigkeit einer schrittweise aufgebrachten äußeren Belastung wird in den Bildern 40 bis 42 die rechnerisch ermittelte Reißverteilung für einige Laststufen angegeben. Das Reißbild kurz vor Erreichen der Bruchlast zeigt im Gegensatz zu den Ergebnissen der Rechnung A nur diskrete Einzelrisse, die sich im oberen Plattenbereich verzweigen. Eine Verästelung von Rissen wird im Versuch ebenfalls beobachtet und erfolgt damit in Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Bauteilverhalten. Die hier erfolgte Ermittlung diskreter Einzelrisse zeigt an, daß in der vorliegenden Rechnung eine wirklichkeitsnahe Approximation des Verbundes zwischen Beton und Bewehrung erfolgt ist. Als interessante Teilergebnisse werden in den Bildern 40 bis 42 Größe und Verlauf der Betonspannungen in der äußersten Zugfaser des Querschnitts, der Stahlspannungen in der Bewehrung und der Verbundspannungen dargestellt. Die Länge des plastischen Bereichs kann aus Bild 42b - Verlauf der Stahlspannungen im Bruchzustand des Plattenstreifens - abgegriffen werden. Die Kopplung eines Zeichengerätes an den Rechner ermöglichte hier auf einfache Weise die Ergebnisauswertung durch eine graphische Darstellung von Spannungsverläufen. Allerdings war die Entwicklung des speziellen Zeichenprogramms PLOKURV hierfür erforderlich.

Einen Vergleich zwischen rechnerisch und experimentell ermittelter Drehung des plastischen Gelenkes ermöglicht Bild 43. Sowohl im Bereich elastischer Verformungen (Stadium I und II) des Plattenstreifens als auch im Bereich plastischer Verformungen zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten aus [38]. Der rechnerische Grenzwert für die Drehung erreicht allerdings nicht vollständig den experimentell ermittelten Wert für die Drehfähigkeit des plastischen Gelenkes. Die Gründe hierfür werden im folgenden aufgeführt. Tritt ein Versagen des Bauteils

durch Reißen der Bewehrungsstäbe ein, - das ist bei dem untersuchten Plattenstreifen im Versuch der Fall -, so bildet sich vor dem endgültigen Bruch des plastischen Gelenkes im Druckbereich des mittleren Plattenquerschnitts eine "Betonbrücke" aus. Oberhalb dieses noch tragfähigen Restquerschnitts ist die Betondruckzone bereits zerstört. Dieser spezielle Versagensfall eines Bauteils wird vom Rechenprogramm in seiner jetzigen Version nicht erfaßt. Zur Zeit erfolgt ein Abbruch der Rechnung, sobald in den Randelementen der Druckzone die Bruchbedingung für den zweiachsig beanspruchten Beton erfüllt ist. Da Betonelemente in der Reihe unter den zerstörten Randelementen jedoch noch tragfähig sind, könnte die Rechnung ohne Schwierigkeiten bis zum Bruch des Restdruckquerschnitts fortgesetzt werden.

Mit einer auf diese Weise modifizierten Rechnung erfolgt mit Sicherheit eine nahezu vollständige Übereinstimmung von theoretisch und experimentell ermittelten Werten für die Drehfähigkeit eines plastischen Gelenkes.

Die Bilder 38a-b vergegenwärtigen nochmals die oben beschriebene Situation kurz vor dem Bruch der Bewehrung. Die in der extrem beanspruchten Druckzone des Plattenstreifens vorhandene Betonbrücke wird im Elementmodell durch die Rechnung vollständig simuliert.

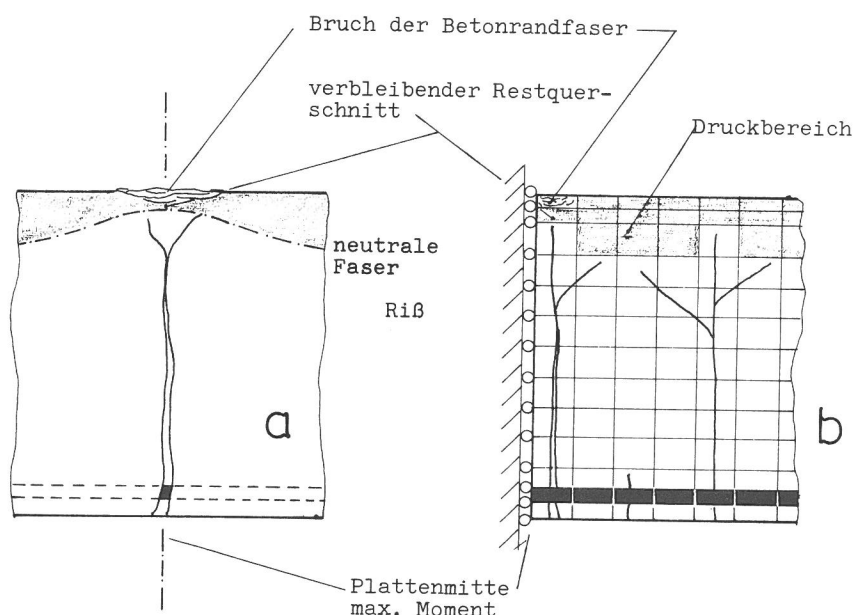


Bild 38: Ausbildung einer Betonbrücke im Druckquerschnitt vor dem Bruch  
a. im Versuchskörper  
b. im Elementmodell

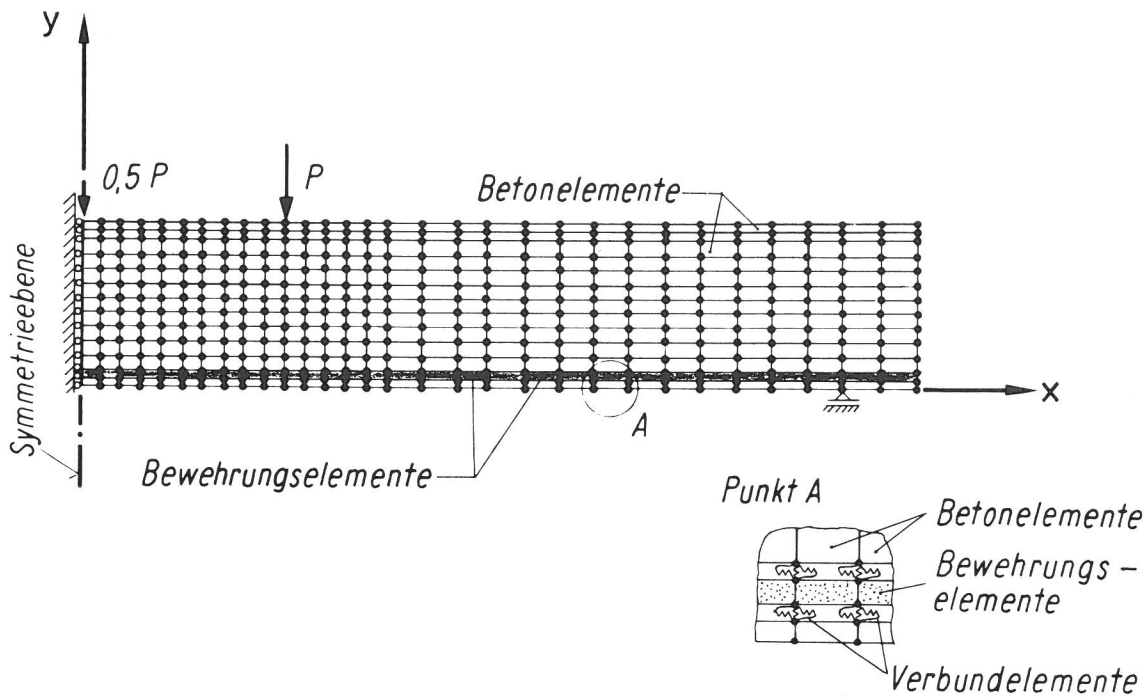


Bild 39: Rechnung B - Plattenstreifen - Diskretisiertes System

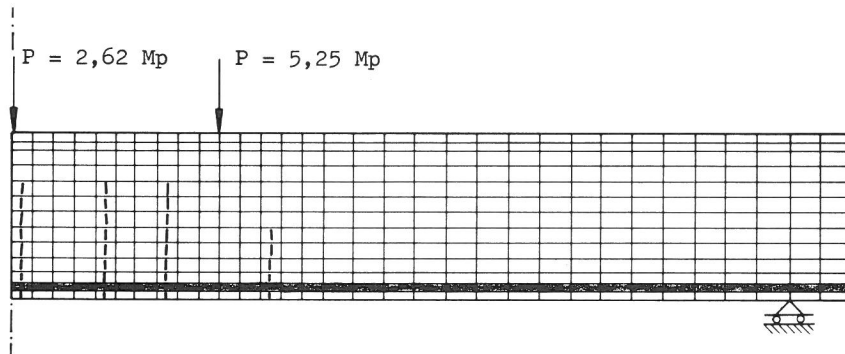


Bild 40a: Laststufe 2 - Rißbild des Plattenstreifens

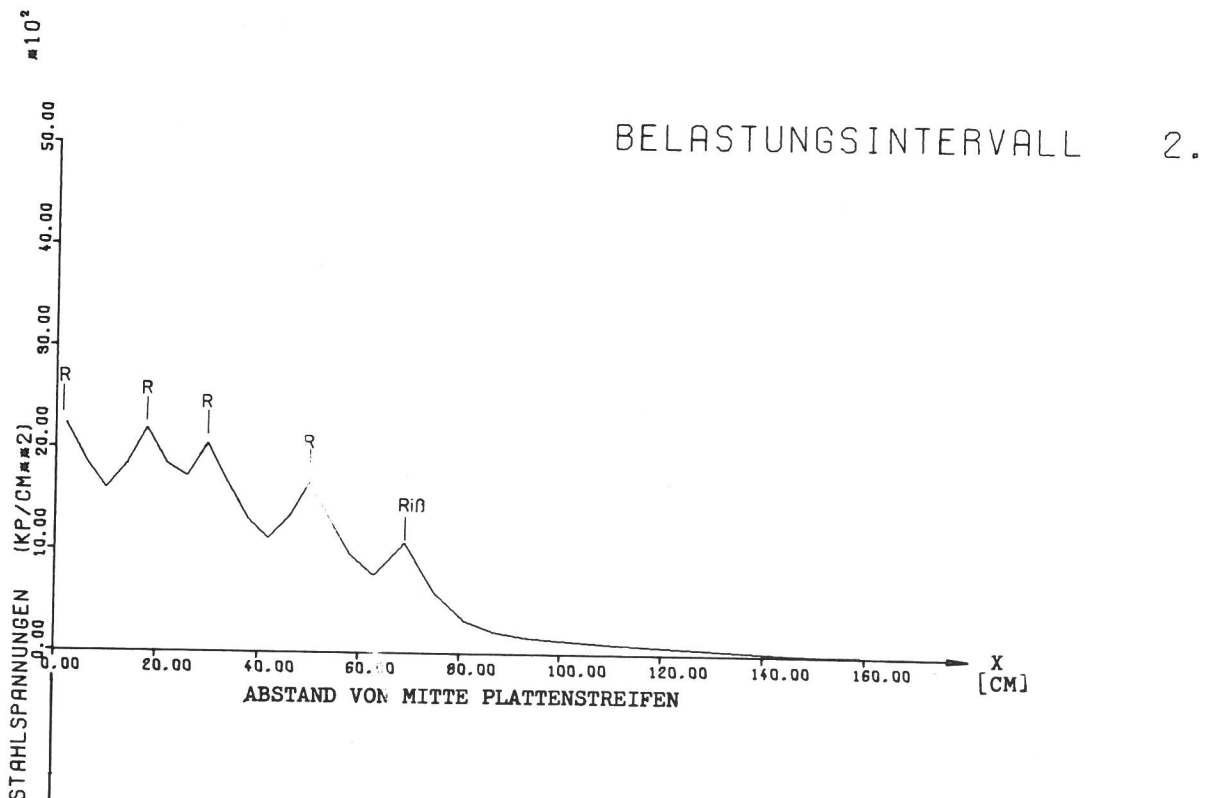


Bild 40b: Laststufe 2 - Verlauf der Zugspannungen in der Bewehrung

BELASTUNGSINTERVALL 2.

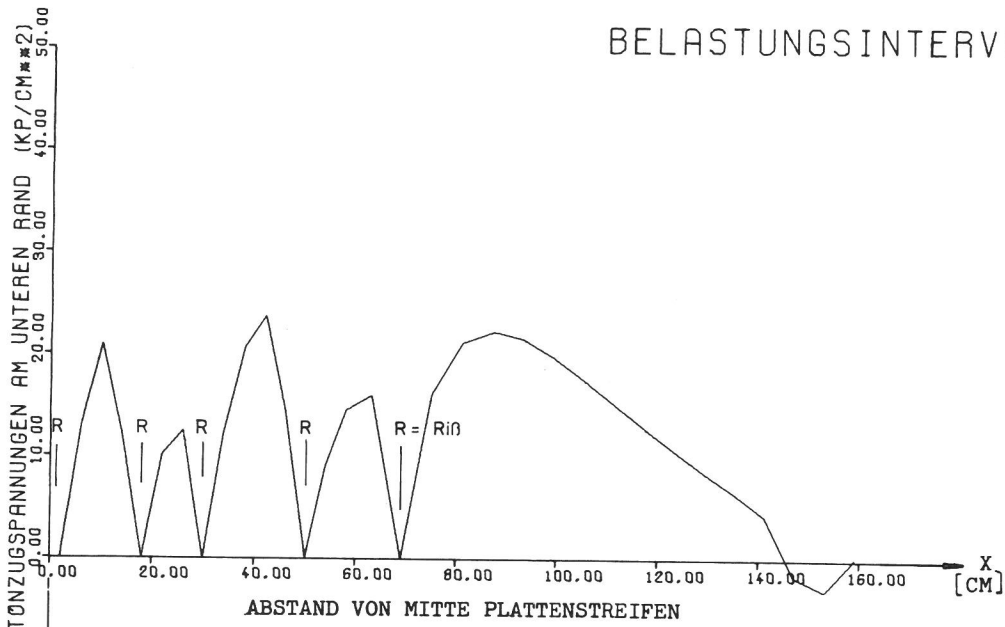


Bild 40c: Laststufe 2 - Verlauf der Betonzugspannungen am unteren Querschnittsrand

BELASTUNGSINTERVALL 2.

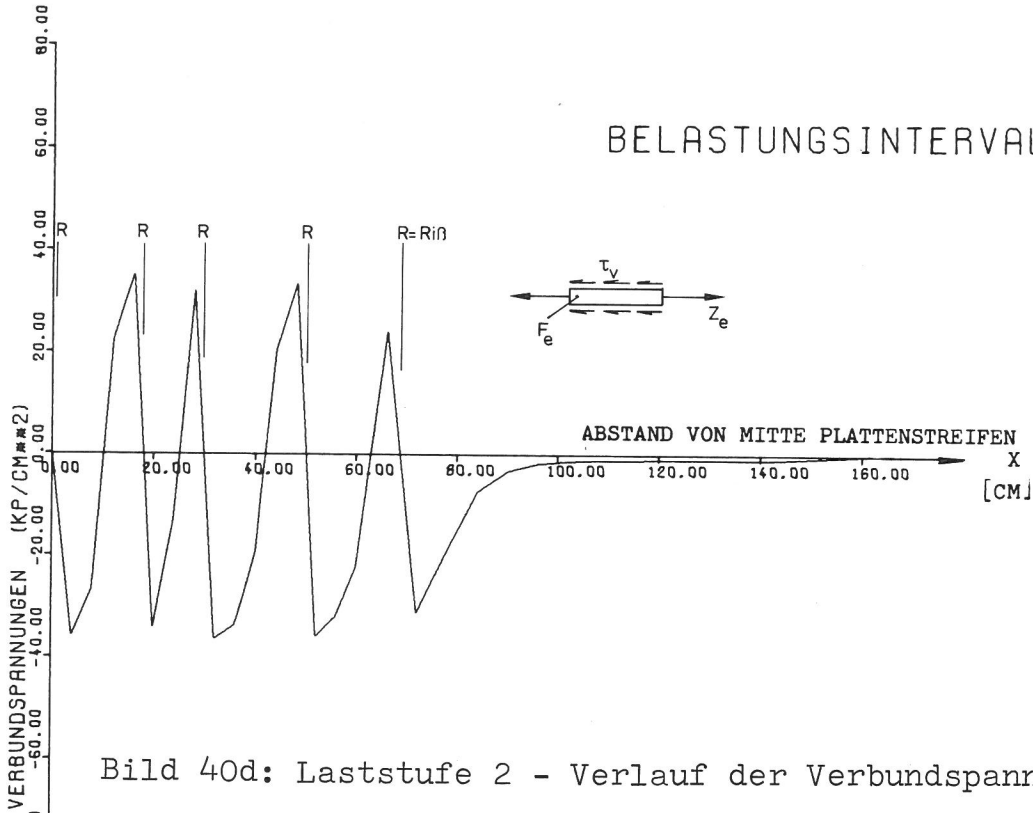


Bild 40d: Laststufe 2 - Verlauf der Verbundspannungen

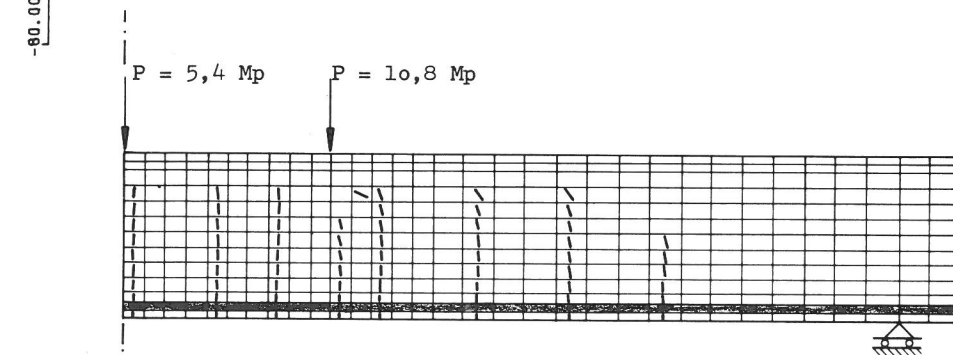


Bild 41a: Laststufe 4 - Rißbild des Plattenstreifens

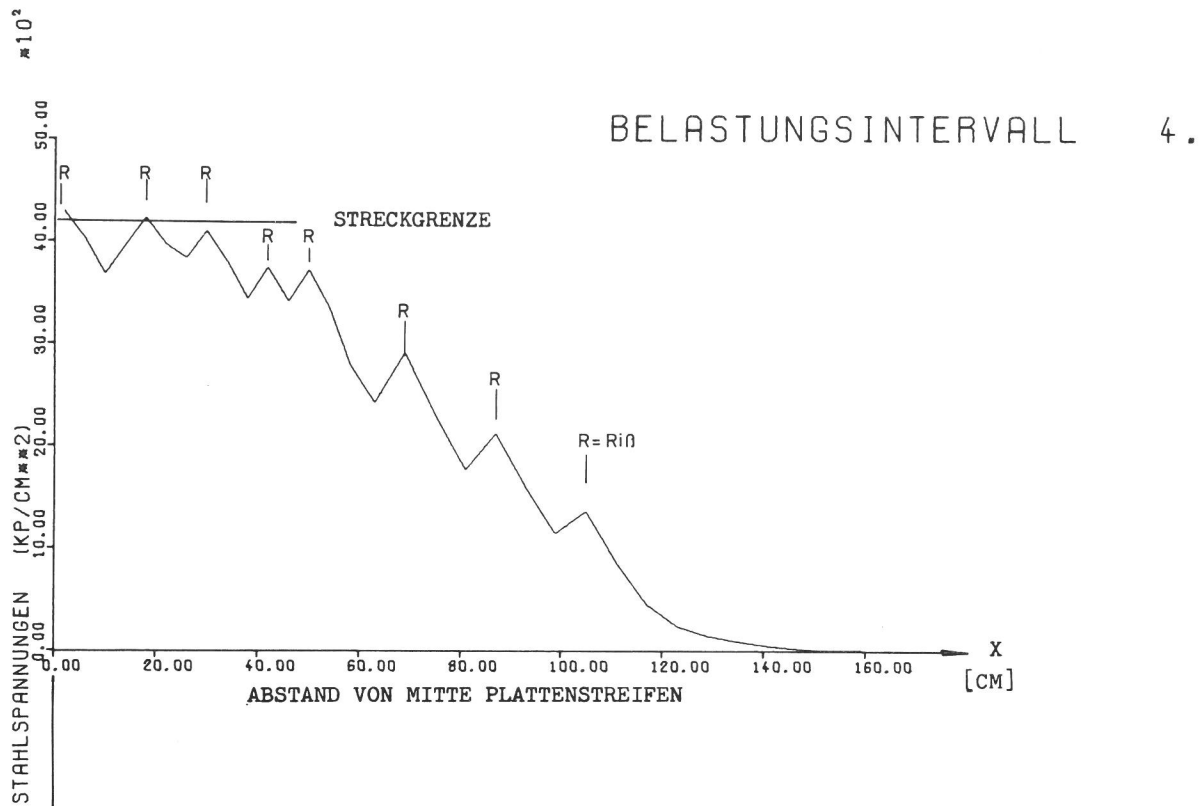


Bild 41b: Laststufe 4 - Verlauf der Zugspannungen in der Bewehrung

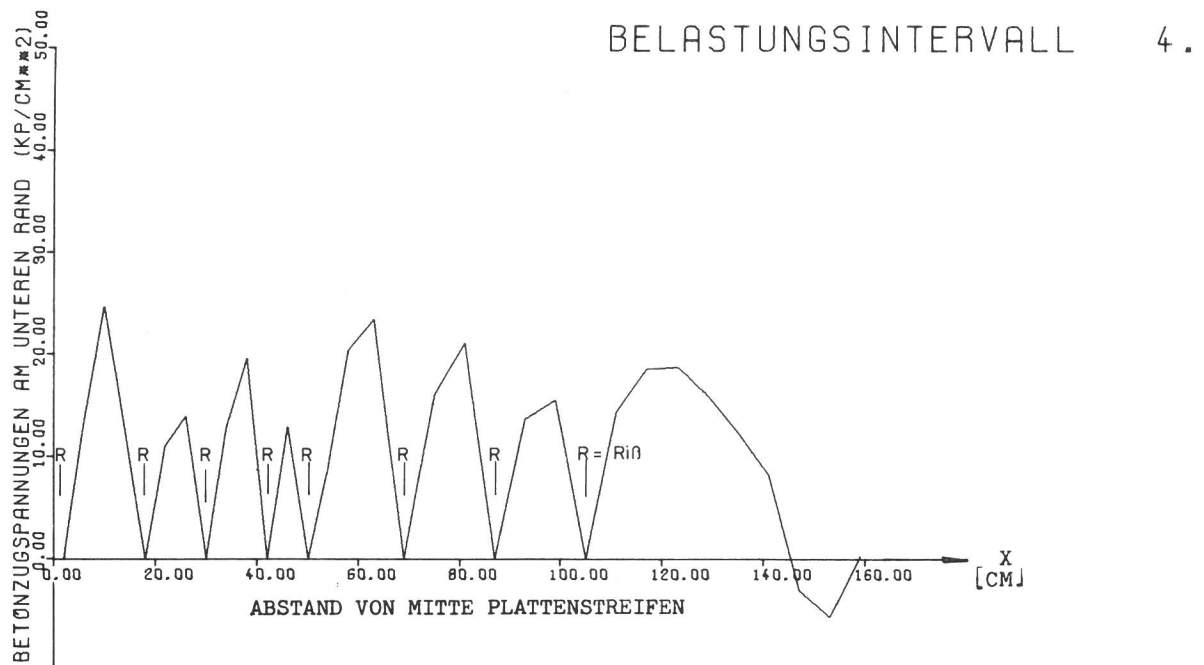


Bild 41c: Laststufe 4 - Verlauf der Betonzugspannungen am unteren Querschnittsrand

BELASTUNGSINTERVALL 4

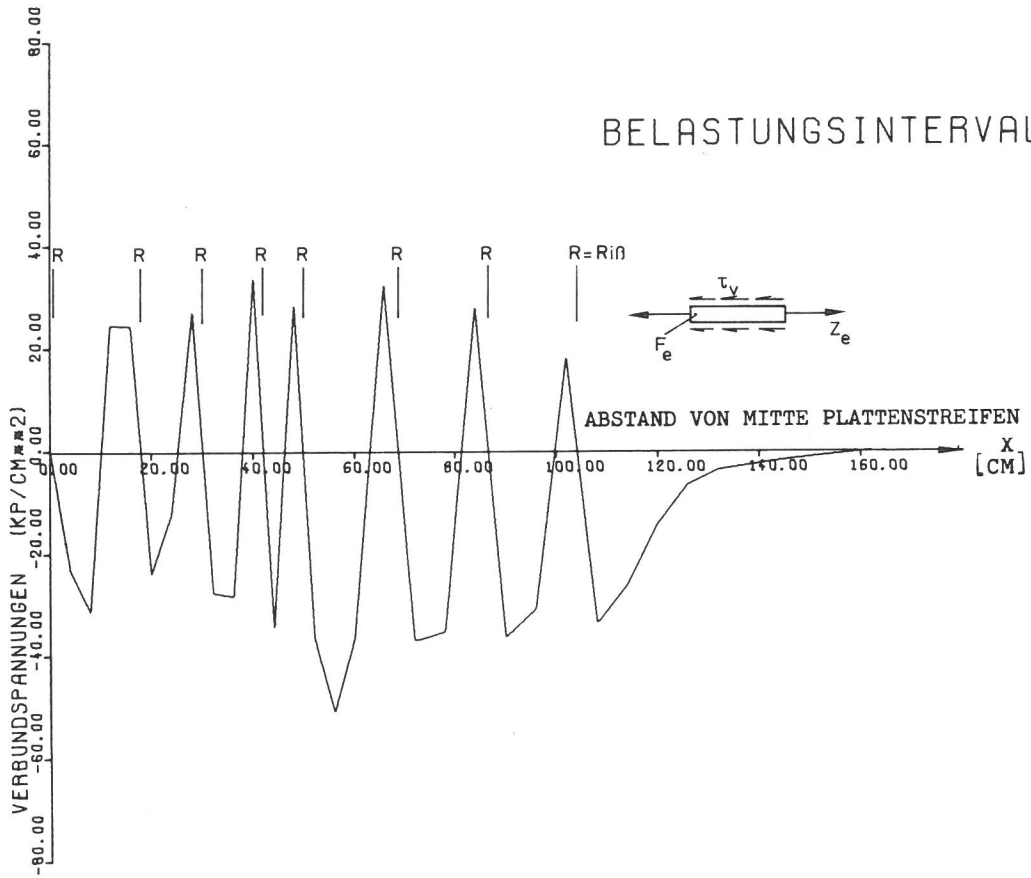


Bild 41d: Laststufe 4 - Verlauf der Verbundspannungen

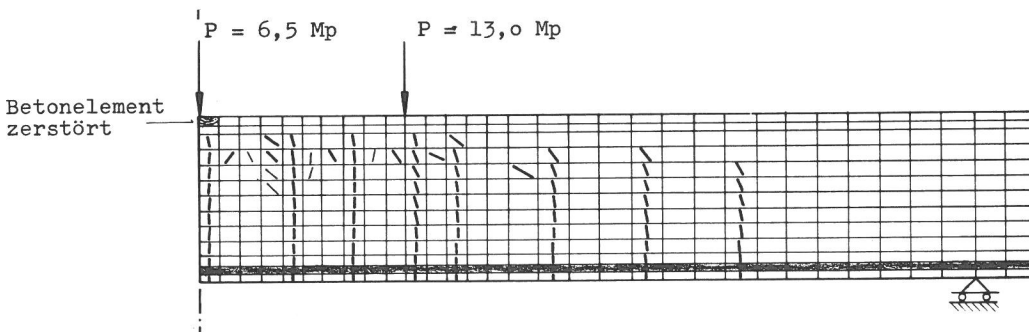
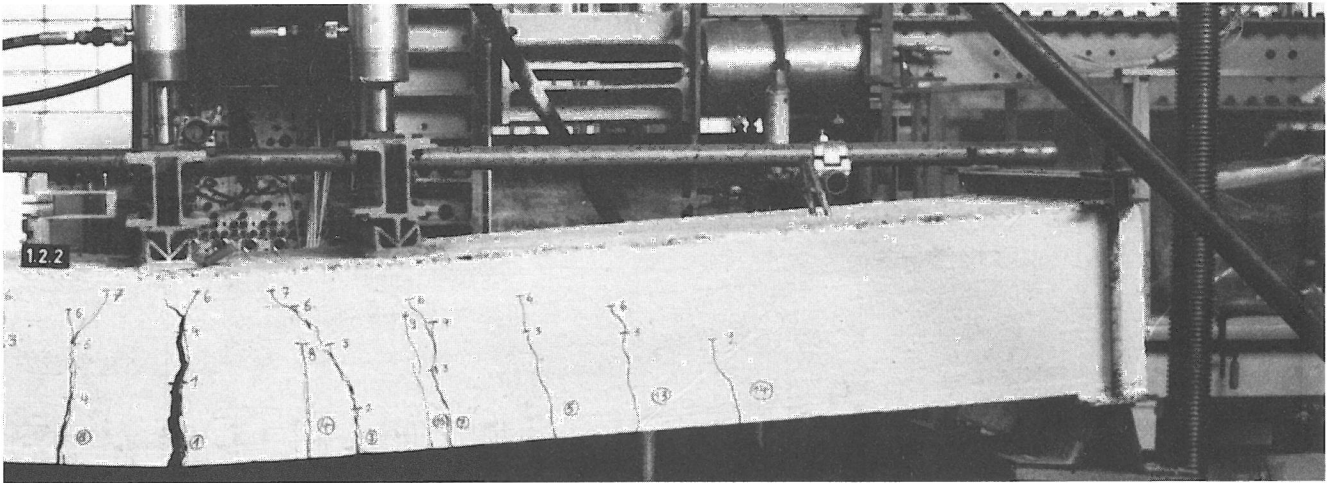


Bild 42a: Laststufe 8 - Reißbild des Plattenstreifens bei Erreichen der Traglast

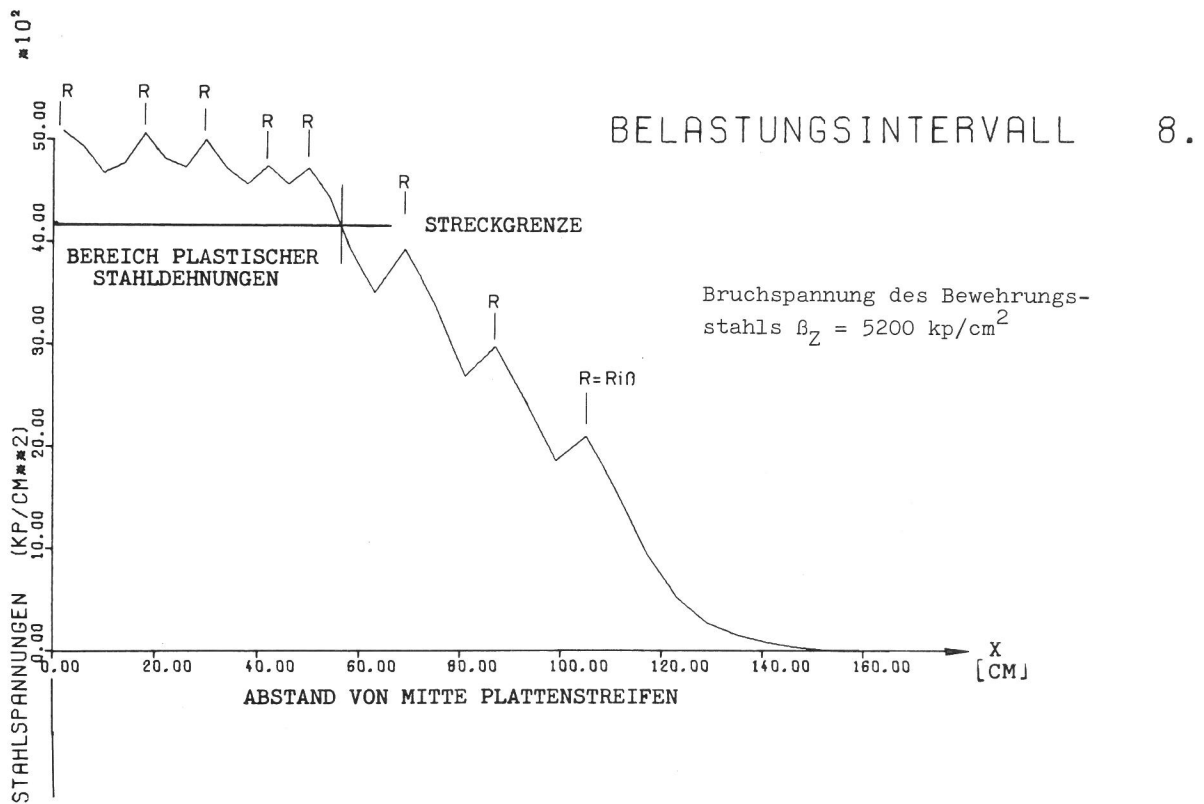


Bild 42b: Laststufe 8 - Verlauf der Zugspannungen in der Bewehrung bei Erreichen der Traglast

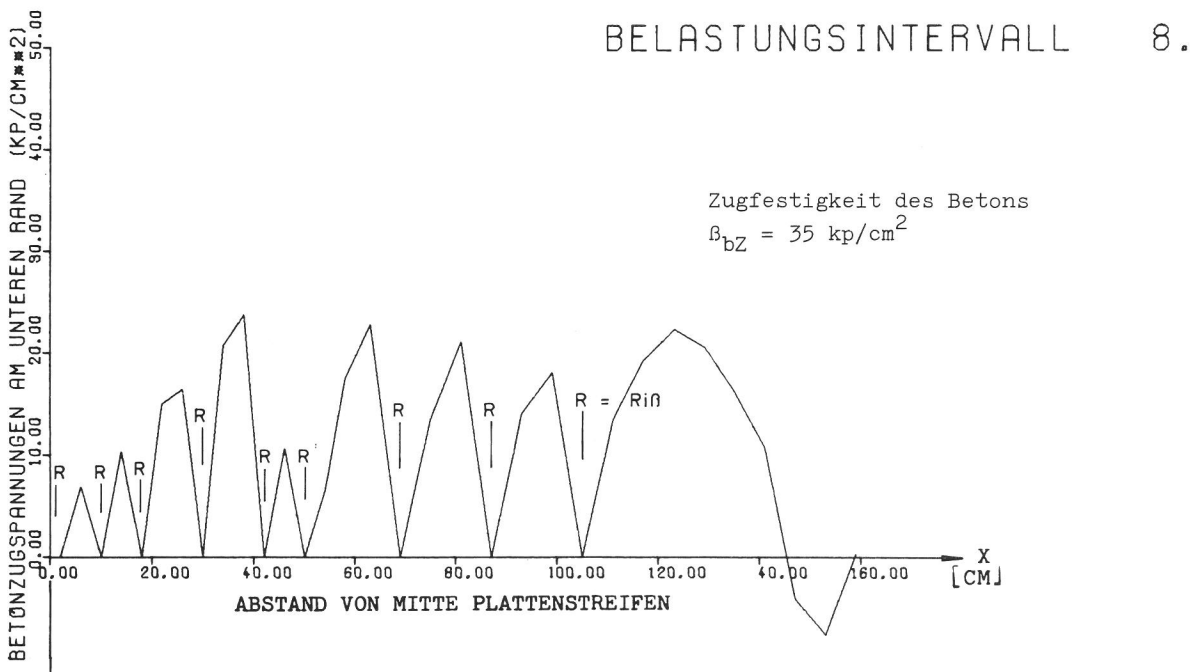


Bild 42c: Laststufe 8 - Verlauf der Betonzugspannungen am unteren Querschnittsrand bei Erreichen der Traglast



BELASTUNGSINTERVALL 8.

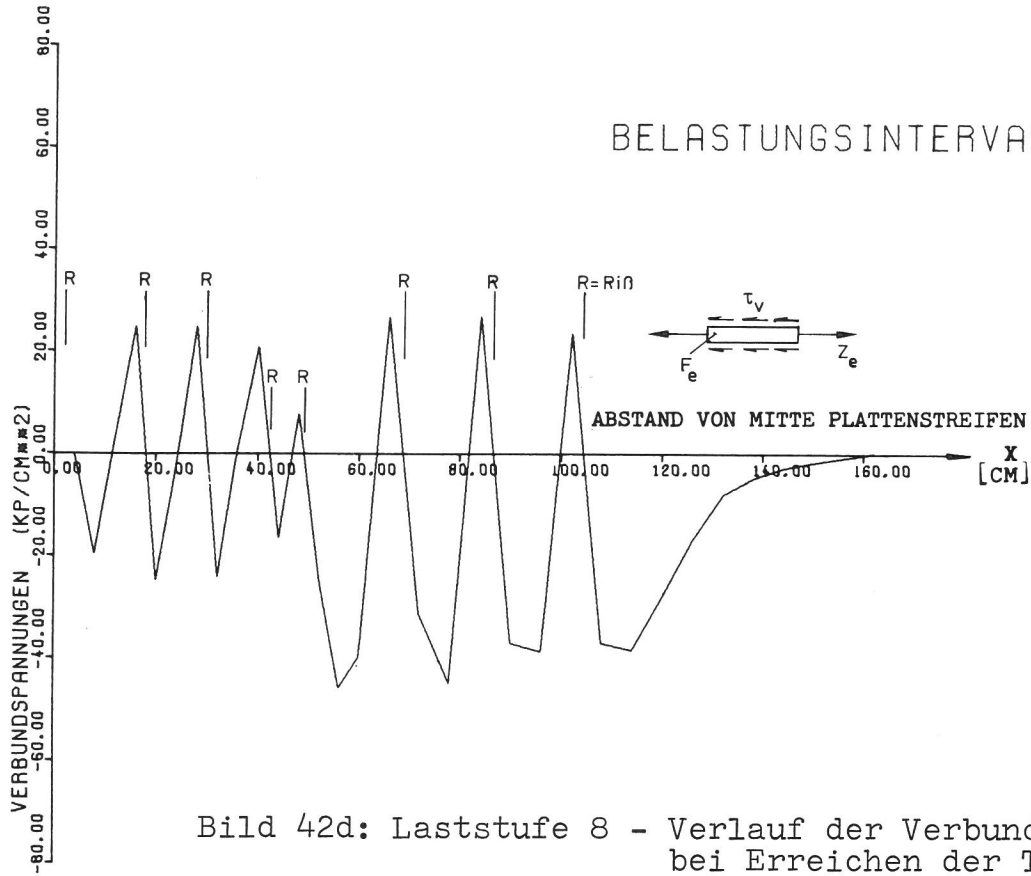


Bild 42d: Laststufe 8 - Verlauf der Verbundspannungen bei Erreichen der Traglast

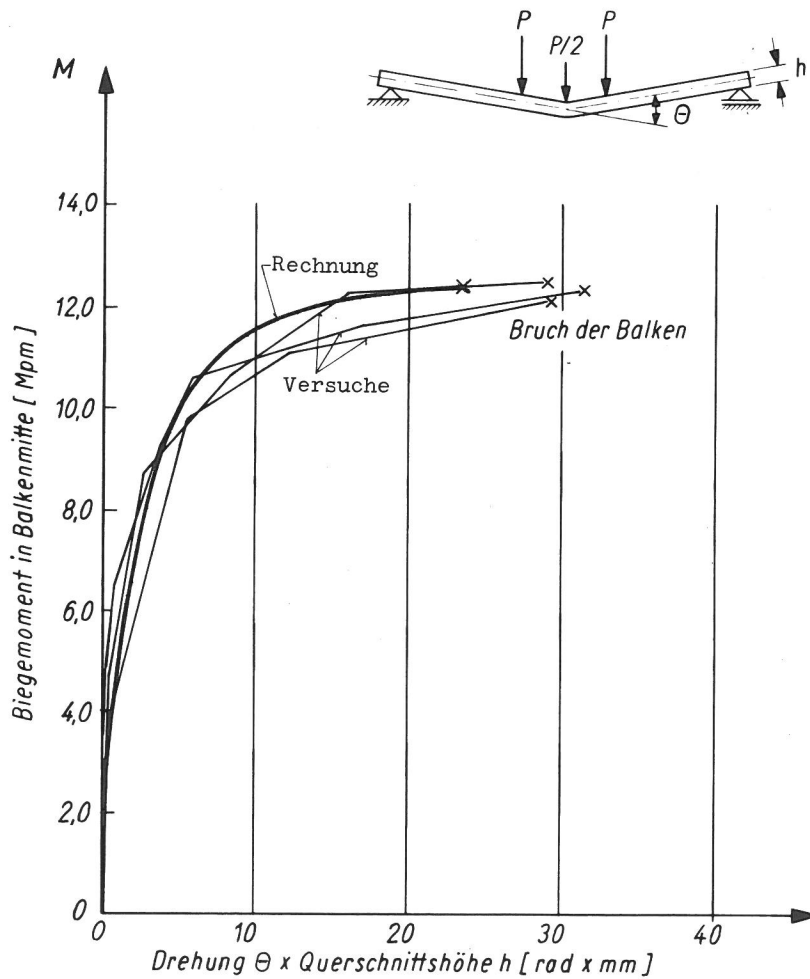


Bild 43: Vergleich der ermittelten Drehungen aus Rechnung B mit Versuchswerten [38]

## 8.0 Rechnerische Ermittlung der Biegesteifigkeit von Stahlbetonbalken im gerissenen Zustand

### 8.1 Biegesteifigkeit und Momenten-Krümmungsbeziehung des Biegebalkens

Zur Ermittlung von Schnittlasten und Verformungen querbelasteter auf Biegung beanspruchter Balken stehen zwei Differentialgleichungen zur Verfügung. Der Zusammenhang zwischen Biegemoment  $M$  und Belastung  $q$  wird durch die Beziehung

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (60)$$

und der Zusammenhang zwischen Durchbiegung  $w$  und Krümmung  $\kappa$  der Balkenachse durch die Beziehung

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\kappa(x) \quad (61)$$

beschrieben. Wird vorausgesetzt, daß der Balken aus einem homogenen, isotropen Material besteht und die Querschnitte bei einer Biegebeanspruchung eben bleiben, jedoch um einen Winkel  $d\varphi$  geneigt sind, so ergibt sich aus Bild 44 für die Krümmung der Balkenachse:

$$\kappa(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{R_\kappa(x)} \quad (62)$$

In dieser Beziehung ist  $R_\kappa(x)$  der Krümmungsradius.

Biegemoment und Balkenkrümmung werden durch das Momenten-Krümmungs-Gesetz miteinander verknüpft. Unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes, das die Linearität zwischen Spannungen und Dehnungen beinhaltet, erhält man für die Krümmung des elastisch verformten Balkens mit konstantem Trägheitsmoment  $I$ :

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{E I} \quad (63)$$

Das Produkt aus Elastizitätsmodul  $E$  und Trägheitsmoment  $I$  ist die Biegesteifigkeit des Balkens.

Besteht zwischen Spannungen und Dehnungen infolge Plastizieren des Werkstoffes kein linearer Zusammenhang mehr, so ist die Biegesteifigkeit eine vom Beanspruchungsgrad des Querschnitts abhängige Größe. Wird auch bei einer plastischen Verformung der Fasern vorausgesetzt, daß die Querschnitte eben bleiben, so läßt sich der Neigungswinkel  $d\varphi$  der Schnittflächen eines Balkenelementes aus den Dehnungen der Randfasern ermitteln.

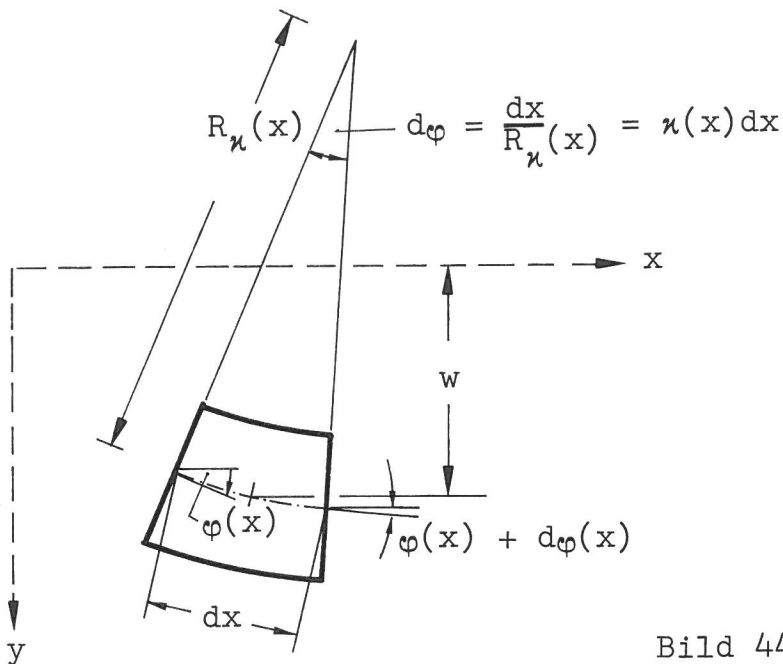


Bild 44: Verformtes Balkenelement

Bezeichnet

$$\delta_{Ro} = \epsilon_{Ro} \cdot dx \quad (64a)$$

die Verkürzung der oberen Randfaser und

$$\delta_{Ru} = \epsilon_{Ru} \cdot dx \quad (64b)$$

die Verlängerung der unteren Randfaser bei der Biegebeanspruchung eines Balkenelements (Bild 45), so beträgt die Neigung  $d\varphi$  der Schnittflächen

$$d\varphi = \frac{dx}{R_{\kappa}} = \frac{\epsilon_{Ru} - \epsilon_{Ro}}{d} dx \quad (64c)$$

und die Krümmung entsprechend Gl. (62):

$$\kappa = \frac{\epsilon_{Ru} - \epsilon_{Ro}}{d} \quad (65)$$

Die in den Schnittflächen des Balkenelements wirkenden Spannungen lassen sich aus dem Spannungs-Dehnungs-Gesetz des verwendeten Werkstoffes errechnen. Damit ist jedoch auch das Moment der inneren Kräfte bekannt und der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung bzw. Biegemoment und Biegesteifigkeit hergestellt.

Ist das nichtlineare Momenten-Krümmungs-Gesetz rechnerisch oder experimentell ermittelt, so kann die Biegesteifigkeit des Balkens an der Stelle  $x$  in Abhängigkeit vom Biegemoment  $M(x)$  als Neigung der Tangente im Punkt  $P(M; \kappa)$  der Momenten-Krümmungslinie entnommen werden.

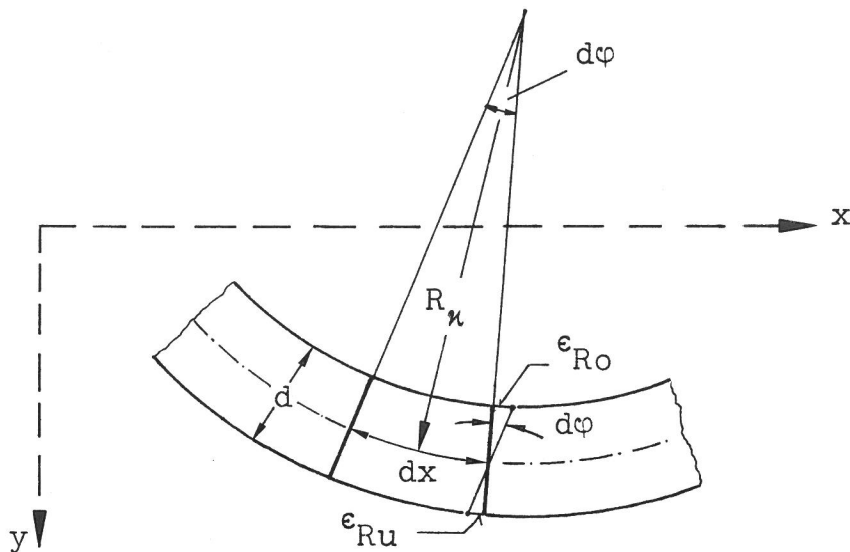


Bild 45: Zusammenhang zwischen der Krümmung und den Querschnittsrandverformungen

### 8.2 Momenten-Krümmungsbeziehungen von Stahlbetonbalken unter Vernachlässigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone

Treten in einem Stahlbetonbalken Risse auf, so muß an diesen Stellen die gesamte innere Zugkraft vom Bewehrungsstahl allein getragen werden. Der Einfluß der zwischen Nulllinie und Rißwurzel vorhandenen Betonzugkraft wird hierbei vernachlässigt. Wird die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen Rissen ebenfalls vernachlässigt, so bestehen die Querschnitte eines gerissenen Stahlbetonbalkens lediglich aus dem Beton der Druckzone und der Bewehrung der Zugzone.

Vorausgesetzt wird, daß auch ein derartiger Querschnitt bei einer Biegebeanspruchung des Stahlbetonbalkens eben bleibt. Die Verteilung der Spannungen und Dehnungen in einem gerissenen Stahlbetonquerschnitt ist in Bild 46 dargestellt.

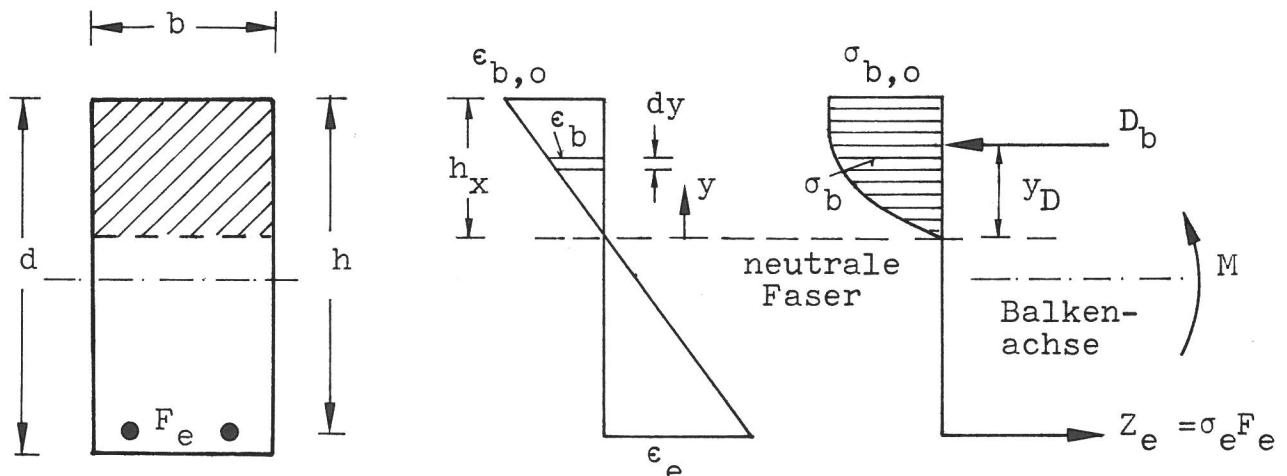


Bild 46: Querschnittsabmessungen, Dehnungs- und Spannungsverteilung in einem gerissenen Stahlbetonquerschnitt

Werden in Gl. (65) für die Dehnungen  $\epsilon_{Ru}$  und  $\epsilon_{Ro}$  der Randfasern die Dehnung des Bewehrungsstahles  $\epsilon_e$  und die Stauchung der oberen Randfaser  $\epsilon_{b,o}$  der Betondruckzone eingesetzt, wobei anstelle der Querschnittshöhe  $d$  jetzt die wirksame Höhe des Querschnitts  $h$  zu verwenden ist, so ergibt sich die Krümmung der Balkenachse zu:

$$\kappa = \frac{\epsilon_e - \epsilon_{b,o}}{h} \quad (66)$$

Die Höhe der Betondruckzone  $h_x$  läßt sich aus Bild 46 ablesen und beträgt:

$$h_x = \frac{-\epsilon_{b,o}}{\epsilon_e - \epsilon_{b,o}} \cdot h \quad (67)$$

Aus dem Spannungs-Dehnungs-Gesetz für Beton lassen sich die in der Betondruckzone wirkenden Spannungen  $\sigma_b$  ermitteln. Durch Integration der Druckspannungen erhält man die im Querschnitt wirkende resultierende Druckkraft  $D_b$ :

$$D_b = \int_{y=0}^{y=h_x} \sigma_b \cdot b \cdot dy \quad (68)$$

Der Abstand der Druckkraft von der neutralen Faser beträgt:

$$y_D = \frac{1}{D_b} \int_{y=0}^{y=h_x} \sigma_b \cdot b \cdot y \cdot dy \quad (69)$$

Bei Biegung ohne Längskraft folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für die Normalkräfte  $\Sigma N = 0$  die Zugkraft  $Z_e$  in der Bewehrung

$$Z_e = -D_b = \sigma_e F_e \quad (70)$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung für die Biegemomente  $\Sigma M = 0$  das Schnittmoment:

$$M = -D_b \left( \frac{d}{2} - h_x + y_D \right) + Z_e \left( h - \frac{d}{2} \right) \quad (71)$$

Die rechnerische Ermittlung der Momenten-Krümmungsbeziehung für den Versuchsbalken (Bild 33), unter Vernachlässigung der Mitwirkung des Betons auf Zug, wird unter Verwendung der experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungslinien von Beton (Bild 16) und Stahl (Bild 17) vorgenommen. Um für jeden Wert des Biegemoments die dazugehörige Krümmung bestimmen zu können, ist zu einer vorgegebenen Randdehnung  $\epsilon_{b,o}$  die Höhe der Betondruckzone und die aus den Spannungen im Querschnitt resultierende Druck- und Zugkraft iterativ zu bestimmen.

Die Iteration wird wie folgt vorgenommen:

1. Schritt : Vorgabe der Betonrandstauchung  $\epsilon_{b,0}$
2. Schritt : Schätzung der Stahldehnung  $\epsilon_e$  und Ermittlung der Höhe der Betondruckzone  $h_x$  aus Gl. (67).
3. Schritt : Ermittlung der Betonspannungen  $\sigma_b$  aus der Spannungs-Dehnungslinie für die bekannte Verteilung der Dehnungen  $\epsilon_b$ . Berechnung der resultierenden Druckkraft  $D_b$  aus Gl. (68).
4. Schritt : Ermittlung der Spannung  $\sigma_e$  für die geschätzte Stahldehnung  $\epsilon_e$  (Schritt 2) aus der Spannungs-Dehnungslinie des Stahls.  
Berechnung der Zugkraft  $Z_e$  aus Gl.(70).
5. Schritt : Kontrolle des Gleichgewichts  $\Sigma N = 0$

Ist die Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma N = 0$  nicht erfüllt, so sind die Rechenschritte 2-5 für einen veränderten Wert der Stahldehnung  $\epsilon_e$  zu wiederholen. Sind Zug- und Druckkraft betragsmäßig gleich, so kann das Moment der inneren Kräfte bestimmt werden. Die Krümmung ist mit den zuletzt verwendeten Werten von  $\epsilon_{b,0}$  und  $\epsilon_e$  aus Gl. (66) zu ermitteln.

Für verschiedene Werte der Betonrandstauchung  $\epsilon_{b,0}$  wurden Krümmung und zugehöriges Biegemoment mit Hilfe des beschriebenen Iterationsverfahrens berechnet und so die in Bild 47 aufgetragene Momenten-Krümmungslinie punktweise bestimmt. Unter Verwendung dieser Momenten-Krümmungsbeziehung erfolgte für den Versuchsbalken die rechnerische Ermittlung der Drehung des plastischen Gelenkes. In Bild 48 ist die Krümmung entlang der Balkenachse bei Erreichen der Bruchlast aufgetragen worden. Die Integration der Krümmungen über die Balkenlänge ergibt die Drehung  $\theta$  des plastischen Gelenkes.

Die rechnerisch ermittelte Drehung  $\theta_{\text{Rechnung}} = 139,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  ist wesentlich größer als die im Versuch erreichte Drehung  $\theta_{\text{Versuch}} = 90,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .

Das Verhältnis beider Werte beträgt somit:

$$\theta_{\text{Rechnung}} / \theta_{\text{Versuch}} = 1,55$$

Der Vergleich der Drehungen zeigt, daß bei einer Vernachlässigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone die Verformungsfähigkeit von Traggliedern aus Stahlbeton erheblich überschätzt werden kann.

Biegemoment

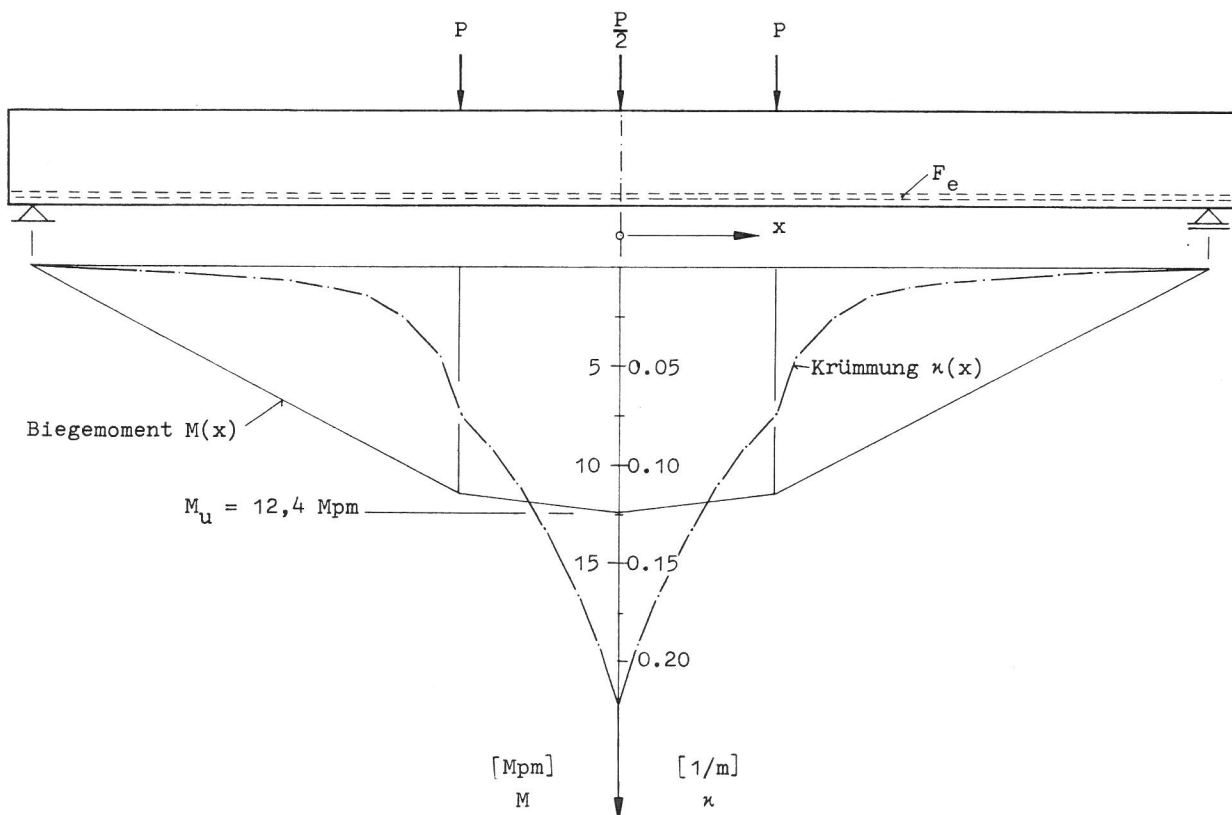
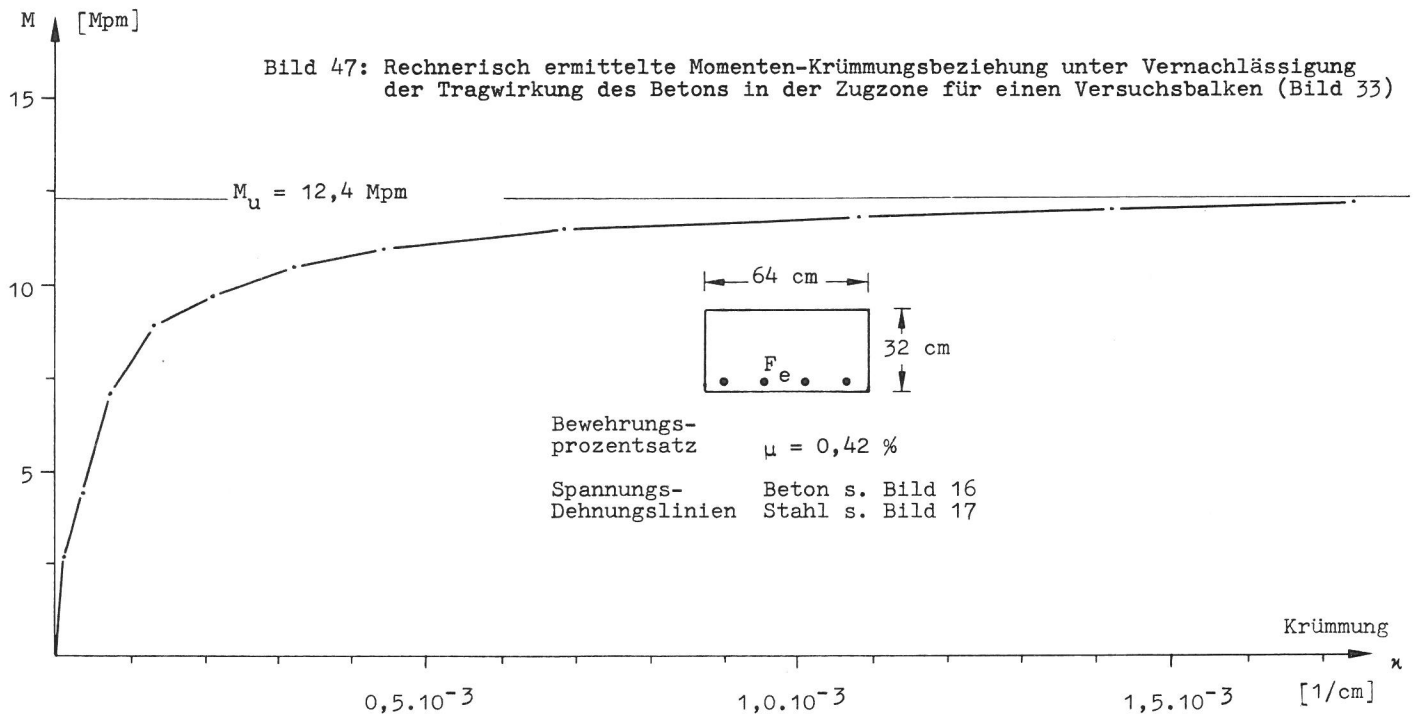


Bild 48: Verlauf von Biegemoment und Krümmung entlang der Balkenachse bei Erreichen der Bruchlast unter Vernachlässigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone

### 8.3 Momenten-Krümmungsbeziehungen von Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone

Die in Abschnitt 7.3 unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone durchgeführte wirklichkeitsnahe Berechnung eines Stahlbetonbalkens ermöglicht es, sowohl für Rißquerschnitte als auch für Querschnitte im ungerissenen Bereich zwischen Rissen den Verlauf der Spannungen und Dehnungen über die Querschnittshöhe anzugeben.

Für einen zwischen zwei Rissen liegenden Bereich des Balkens (Bild 49) wurden die Elementspannungen und Elementdehnungen in Abhängigkeit von der Größe der aufgetragenen äußeren Belastung in den Bildern 50 bis 59 aufgetragen.

Bei einer Belastung unterhalb der Rißlast sind Spannungen und Dehnungen entsprechend den Bildern 50 und 51 über den Querschnitt verteilt. Spannungen und Dehnungen verlaufen geradlinig über die Querschnittshöhe. Im Bereich des Bewehrungsstahls weisen Stahl- und Betondehnungen den gleichen Wert auf. Bei ungerissenen Stahlbetonbalken besitzt damit die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte ihre volle Gültigkeit.

Wird die Belastung des Balkens erhöht, so erfolgt bei Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons die Rißbildung. Die zwischen Rissen befindlichen "Betonzähne" sind in die Druckzone des Balkens eingebunden und durch den Bewehrungsstahl in der Zugzone miteinander verbunden. Nach Überschreiten der Rißlast stellt sich zunächst in Rißquerschnitten ein linearer Spannungsverlauf ein, wobei zwischen Rißwurzel und neutraler Faser noch ein auf Zug beanspruchter Betonbereich verbleibt (Bild 52). Entsprechend dem Verlauf der Betonspannungen ist der Verlauf der Betondehnungen oberhalb der Rißwurzel geradlinig (Bild 53). Zwischen Rissen geht jedoch der geradlinige Verlauf von Betonspannungen (Bild 52) und Betondehnungen (Bild 53) vollständig verloren. Da der Verbund zwischen Bewehrung und Beton ein Gleiten des Bewehrungsstahls ermöglicht, stellt sich in jedem Querschnitt in Höhe der Stahlfaser eine Unstetigkeitsstelle im Dehnungsverlauf ein. Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte verliert damit für Querschnitte zwischen Rissen ihre Gültigkeit. Folge der Rißbildung ist außerdem ein Hochwandern der neutralen Faser. Aus Bild 52 ist zu ersehen, daß die Höhe der Betondruckzone sich im Bereich zwischen Rissen ändert. In Rißnähe



ist die Höhe der Betondruckzone wesentlich kleiner als in der Mitte zwischen Rissen. In der Randfaser der Betondruckzone befindet sich oberhalb von Rissen ein Maximum der Dehnungen.

Der Verlauf von Spannungen und Dehnungen in einzelnen Querschnitten des betrachteten Balkenbereichs, ist für einige weitere Laststufen aus den Bildern 54 bis 59 zu ersehen.

Den Bildern 55 und 57 ist zu entnehmen, daß bei wachsender äußerer Belastung die Dehnungen des Bewehrungsstahls in Rißquerschnitten wesentlich größer sind als im Bereich des ungerissenen Betons zwischen Rissen. Die Behinderung der Stahldehnungen durch den Verbund wird selbst bei Erreichen der Bruchlast durch das Entstehen weiterer Anrisse in der Betonzugzone (Bilder 58 und 59) nicht spürbar abgemindert.

Die Formulierung einer Momenten-Krümmungsbeziehung für den gerissenen Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone zwischen Rissen, erfolgt näherungsweise unter Verwendung der in den Bildern 50 bis 59 für einige Belastungsstufen dargestellten Querschnittsdehnungen.

Betrachtet werden hierzu fiktive Querschnitte, die bei einer Biegebeanspruchung des Stahlbetonbalkens eben bleiben und deren Neigungen sich entsprechend Gl. (64) aus den Randdehnungen des Betons in der Druckzone und den unter Mitwirkung des Verbundes zwischen Beton und Bewehrung ermittelten Stahldehnungen ergeben. Die Lage der fiktiven Querschnitte stimmt mit der Lage der bisher diskutierten Querschnitte überein. Unter Verwendung dieser Modellvorstellung lassen sich für den Balkenabschnitt aus Bild 49 mit nahezu konstantem Biegemomentenverlauf die Neigungswinkel dieser fiktiven Querschnitte ermitteln. Die Neigungswinkel der Verbindungsgeraden zwischen den Dehnungen  $\epsilon_{b,0}$  und  $\epsilon_e$  (Bilder 50 bis 59) entsprechen dabei jeweils den Neigungswinkeln der fiktiven Querschnitte. Den Bildern 50 bis 59 ist zu entnehmen, daß bei konstantem Biegemoment die Neigungswinkel mit zunehmender Entfernung vom Riß abnehmen und in der Mitte zwischen Rissen ihren kleinsten Wert erreichen. Hier wird die unterschiedliche Tragwirkung des Betons in der Zugzone zwischen den Rissen deutlich, die ganz wesentlich von der noch vorhandenen "Güte" des Verbundes zwischen Bewehrung und Beton abhängt. Werden die unterschiedlich großen Neigungs-

winkel gemittelt, so läßt sich aus dem Mittelwert entsprechend Gl. (66) ein mittlerer Krümmungswert errechnen.

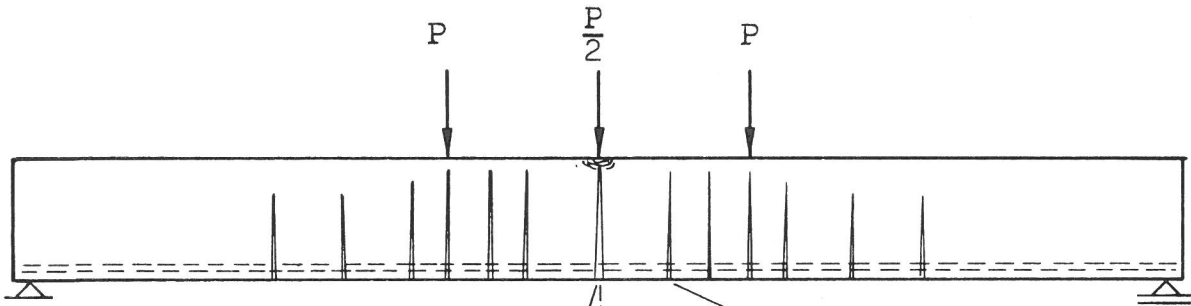
Für eine Reihe von Belastungsstufen ist unter Verwendung der Bilder 50 bis 59 die mittlere Krümmung bestimmt und in Bild 60 in Abhängigkeit vom Biegemoment aufgetragen worden. Dieser Momenten-Krümmungsbeziehung kann die Biegesteifigkeit eines Stahlbetonbalkens in Abhängigkeit der in Schnitten senkrecht zur Balkenachse wirkenden Biegemomente entnommen werden, wobei Rißbildung und Tragwirkung des Betons der Zugzone berücksichtigt sind.

Zum Vergleich wurde die allein aus dem Neigungswinkel des Rißquerschnitts - unter Verwendung der Randdehnung  $\epsilon_{b,0}$  der Betondruckzone und der Stahldehnung  $\epsilon_e$  im Riß - ermittelte Momenten-Krümmungsbeziehung ebenfalls in Bild 60 eingetragen. Die Momenten-Krümmungsbeziehung für gerissene Querschnitte stimmt weitgehend mit der nach Abschnitt 8.2 für einen Stahlbetonbalken unter Vernachlässigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone errechneten Momenten-Krümmungsbeziehung (Bild 47) überein.

Aus Bild 60 ist zu ersehen, daß bei gleich großem Biegemoment die "mittlere" Krümmung wesentlich kleiner ist, als die für gerissene Querschnitte ermittelte Krümmung. Die Abweichung beider Momenten-Krümmungslinien macht sich insbesondere mit fortschreitender plastischer Dehnung der Querschnittsfasern, d. h. nach Überschreiten des "plastischen Moments" des Querschnitts bemerkbar.

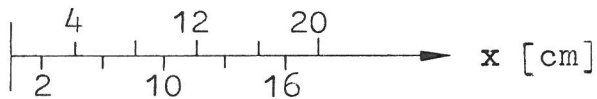
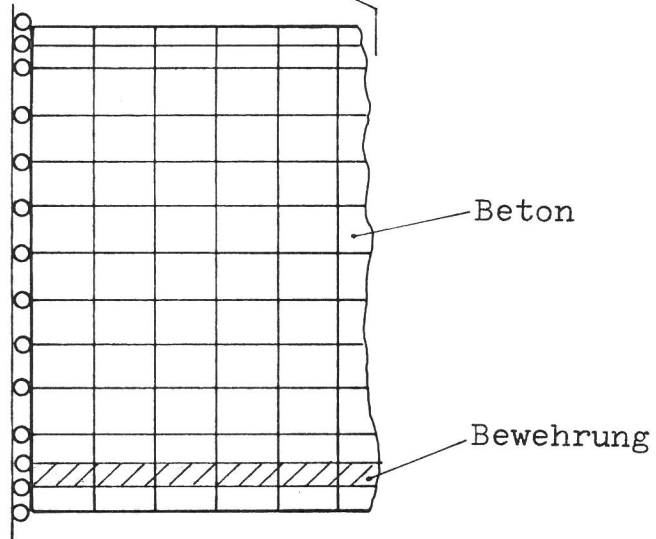
Für den bereits in Abschnitt 8.2 betrachteten Versuchsbalken wurde unter Verwendung der "mittleren" Momenten-Krümmungsbeziehung (Bild 60) die Krümmung entlang der Balkenachse bei Erreichen der Bruchlast in Bild 61 aufgetragen.

Zum Vergleich ist in Bild 61 ebenfalls der Krümmungsverlauf entsprechend Abschnitt 8.2, Bild 48 eingezeichnet worden. Der Unterschied zwischen dem Krümmungsverlauf bei Berücksichtigung der Tragwirkung der Betonzugzone zwischen Rissen und dem Krümmungsverlauf bei vollständiger Vernachlässigung der Betonzugzone ist insbesondere im mittleren hochbeanspruchten Bereich des Stahlbetonbalkens erheblich und nicht zu vernachlässigen.



In Abschnitt 7.3 ermitteltes  
 Reißbild eines Stahlbeton-  
 balkens (schematisiert)

Zur Formulierung einer  
 Momentenkrümmungs-Beziehung  
 betrachteter Abschnitt des  
 finiten Elementmodells



Querschnitte für die der  
 Spannungs-Dehnungsverlauf  
 in den Bildern 50 bis 59  
 aufgetragen wurde

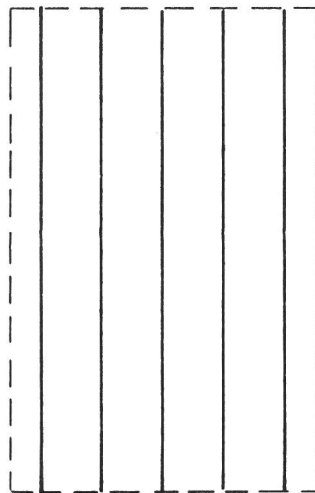


Bild 49: Zur Ermittlung einer Momenten-Krümmungsbeziehung unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone betrachteter Abschnitt eines Stahlbetonbalkens

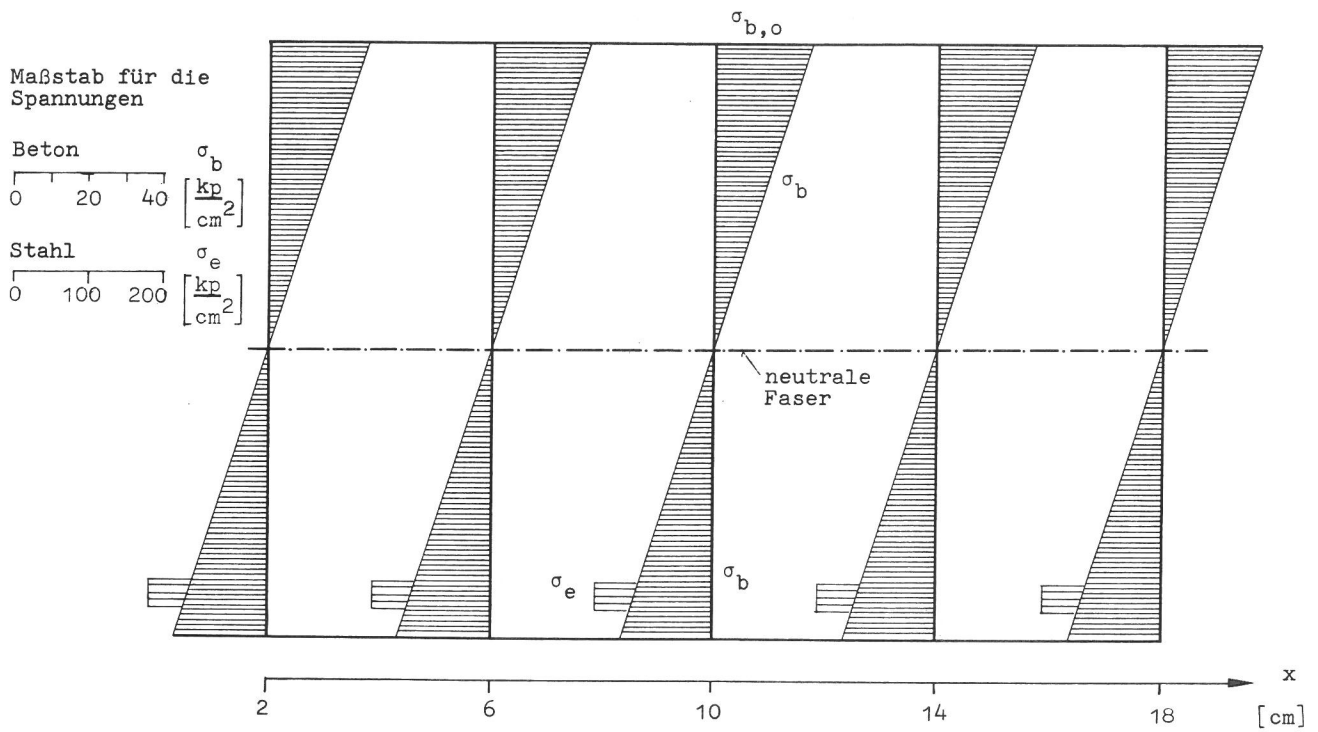


Bild 50: Spannungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.24$  (Laststufe 1)

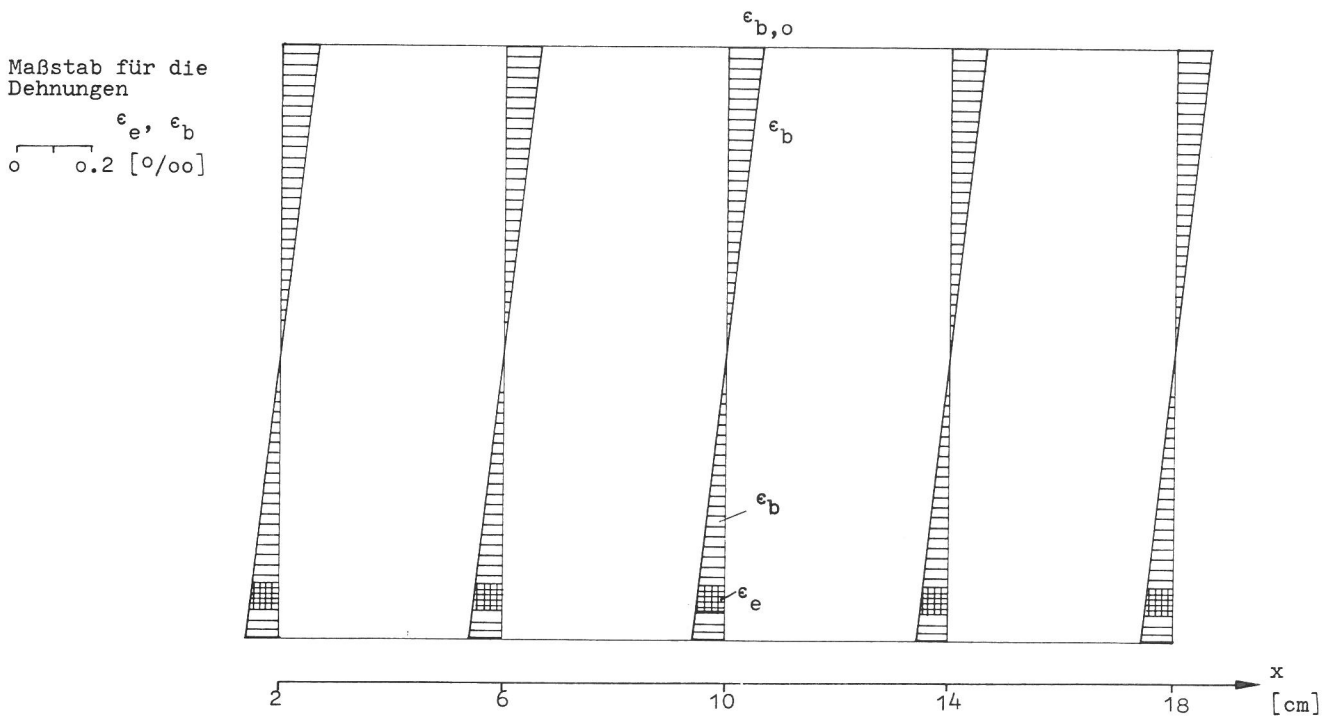


Bild 51: Dehnungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.24$  (Laststufe 1)

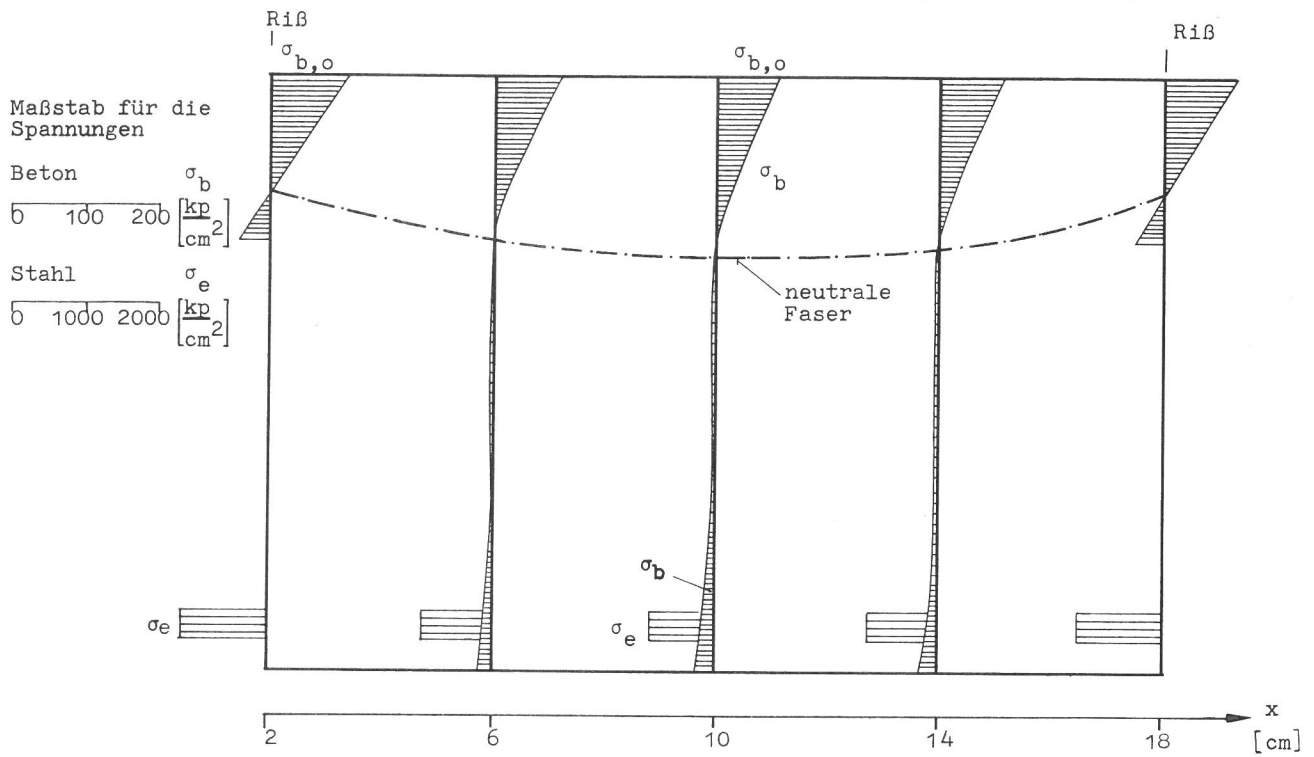


Bild 52: Spannungsverlauf in einzelnen Querschnitten einen Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.42$  (Laststufe 2)

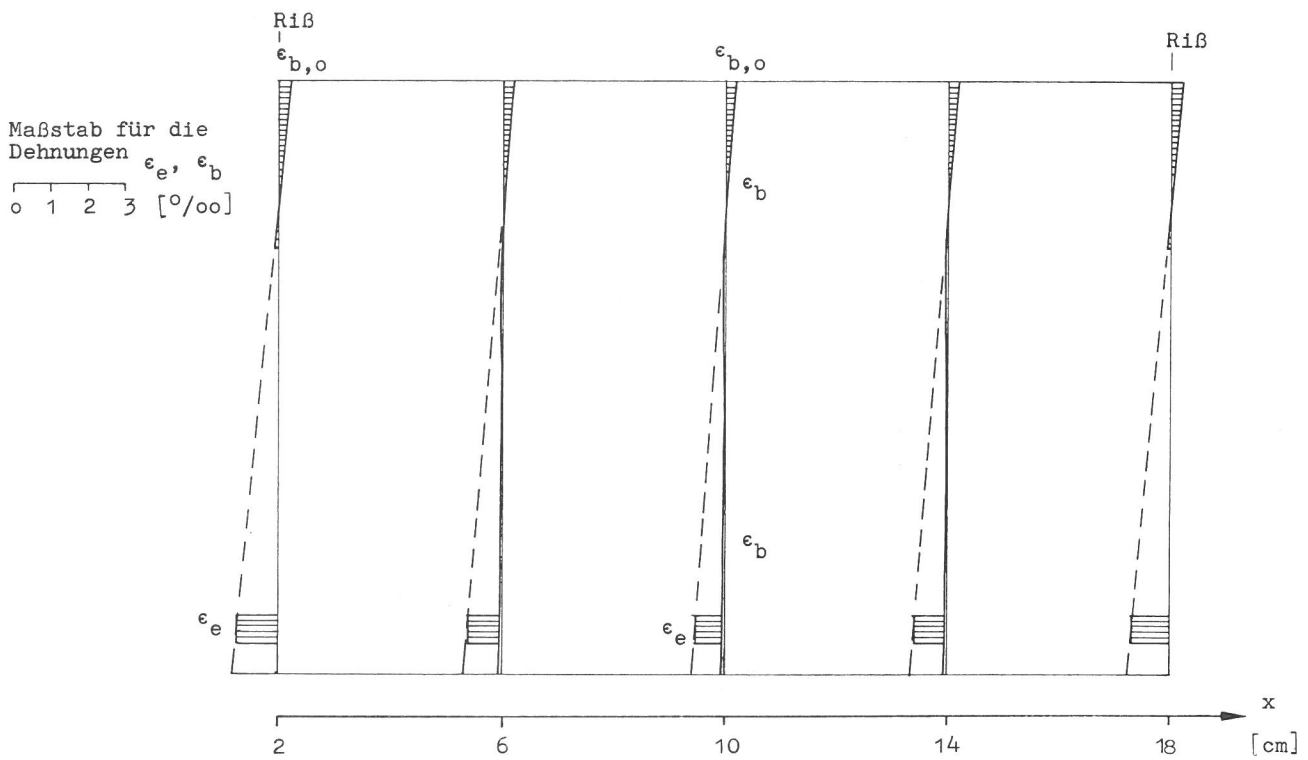


Bild 53: Dehnungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.42$  (Laststufe 2)

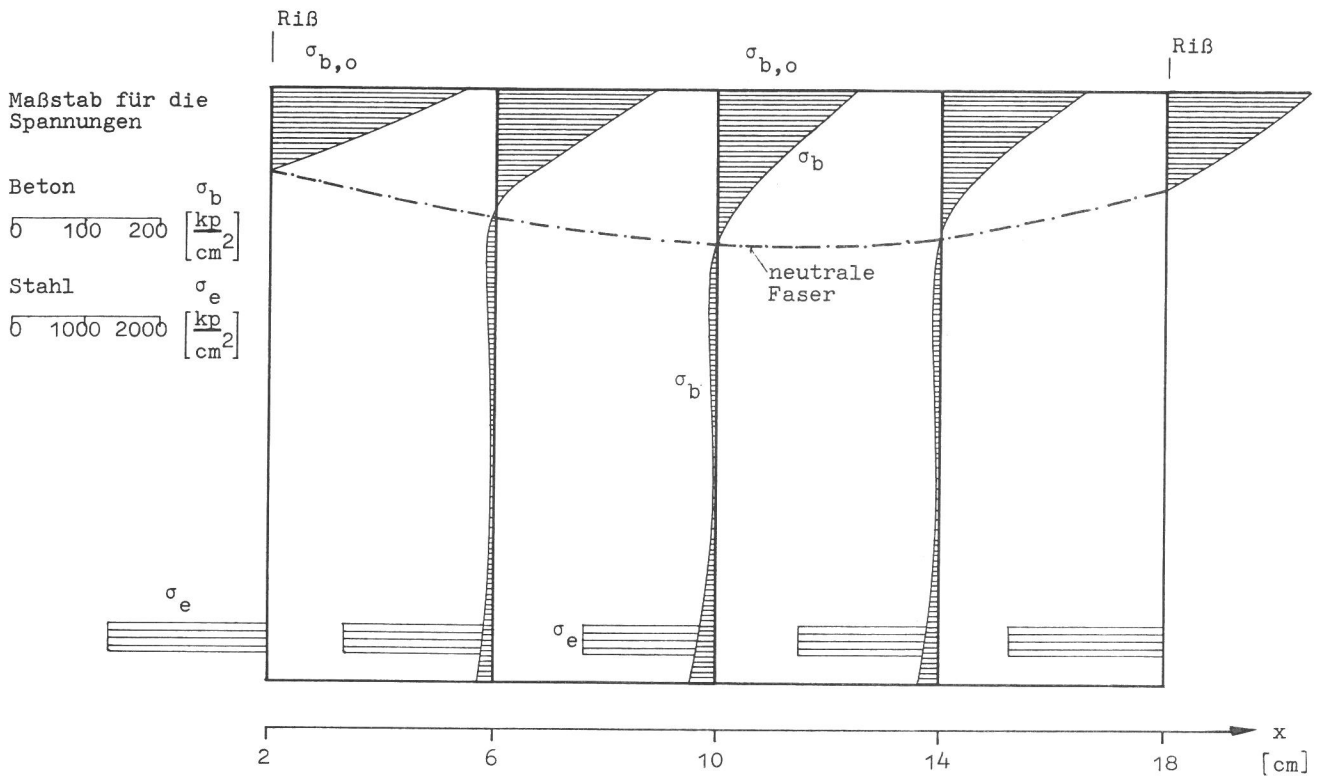


Bild 54: Spannungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.82$  (Laststufe 4)

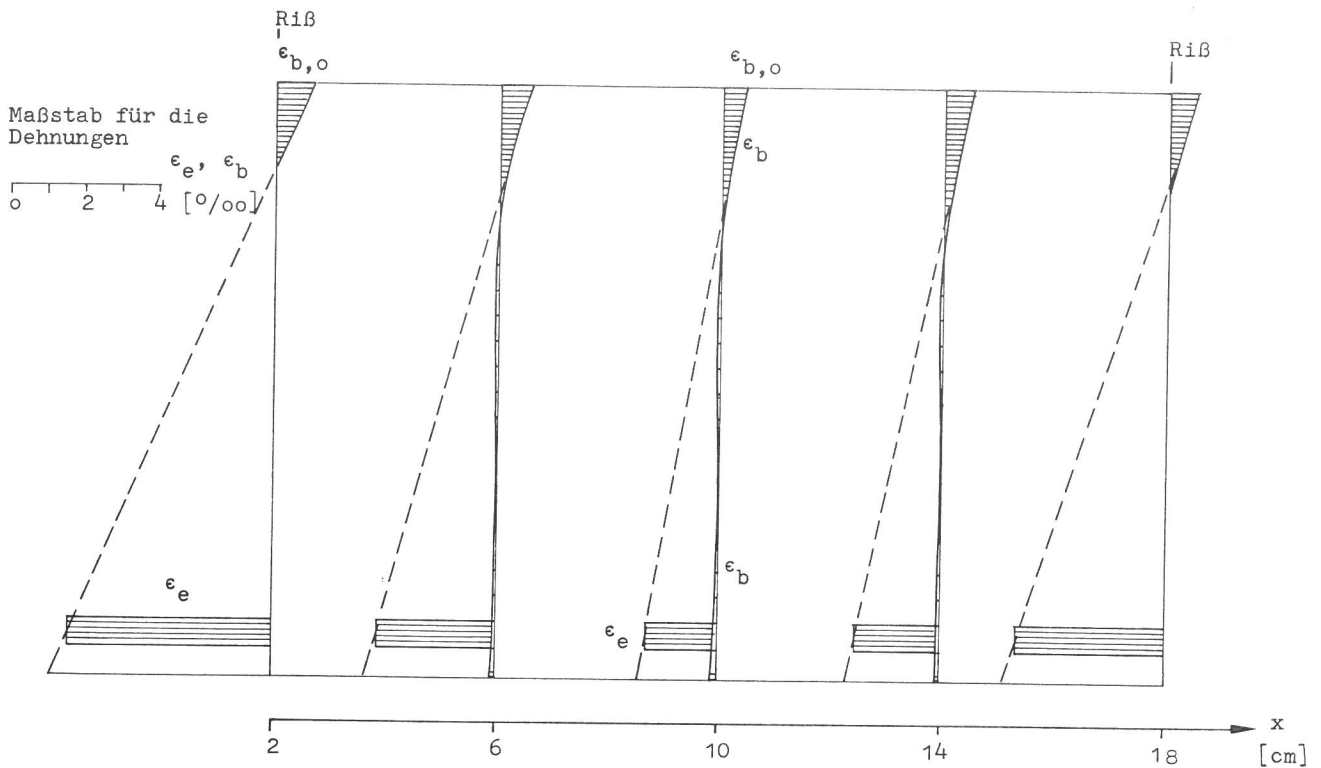


Bild 55: Dehnungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.82$  (Laststufe 4)

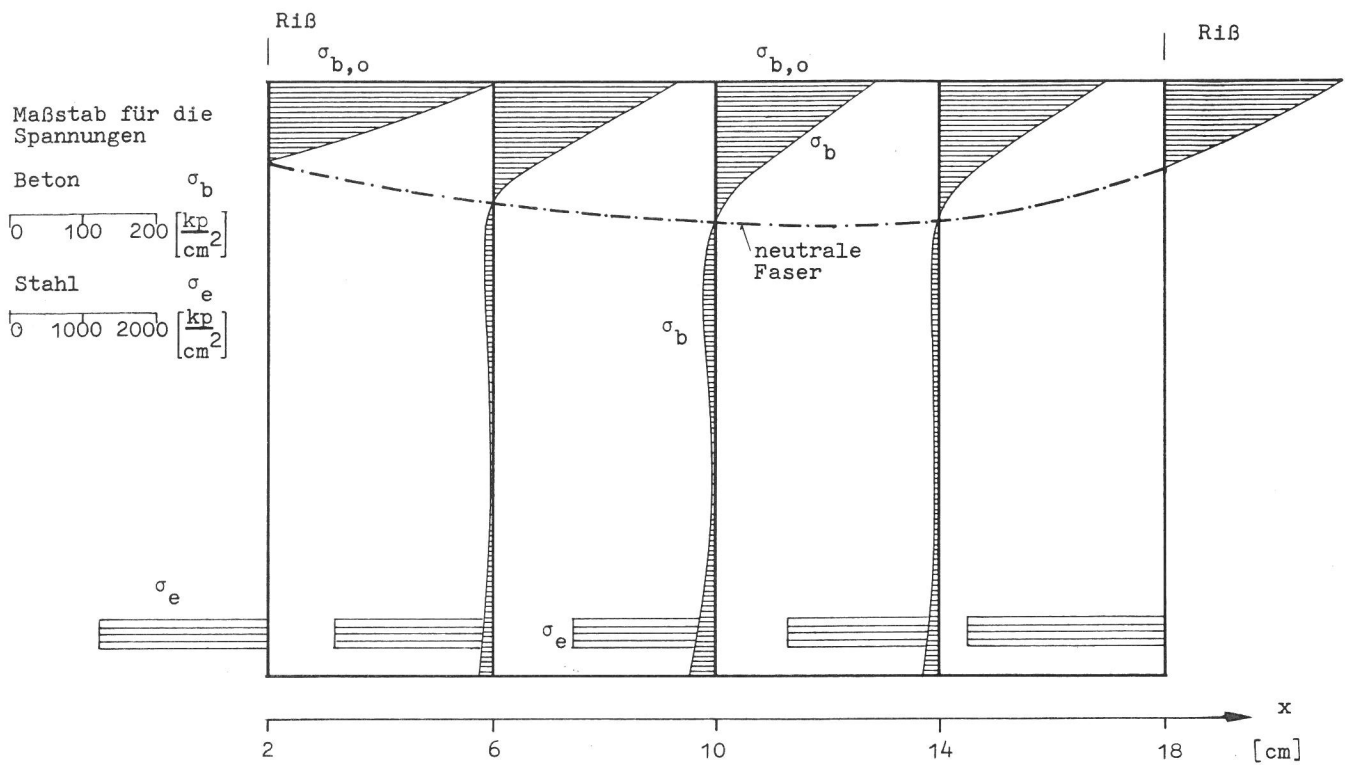


Bild 56: Spannungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.87$  (Laststufe 7)

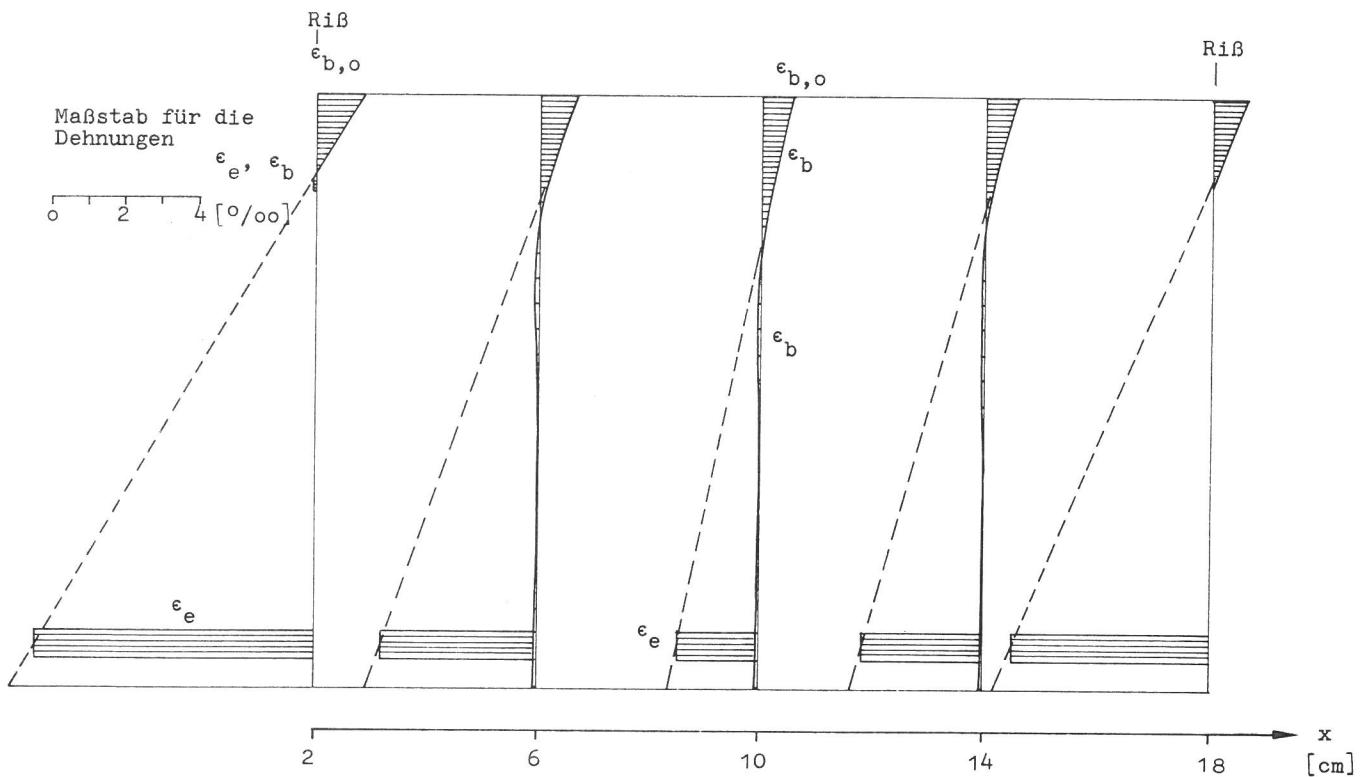


Bild 57: Dehnungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M/M_u = 0.87$  (Laststufe 7)

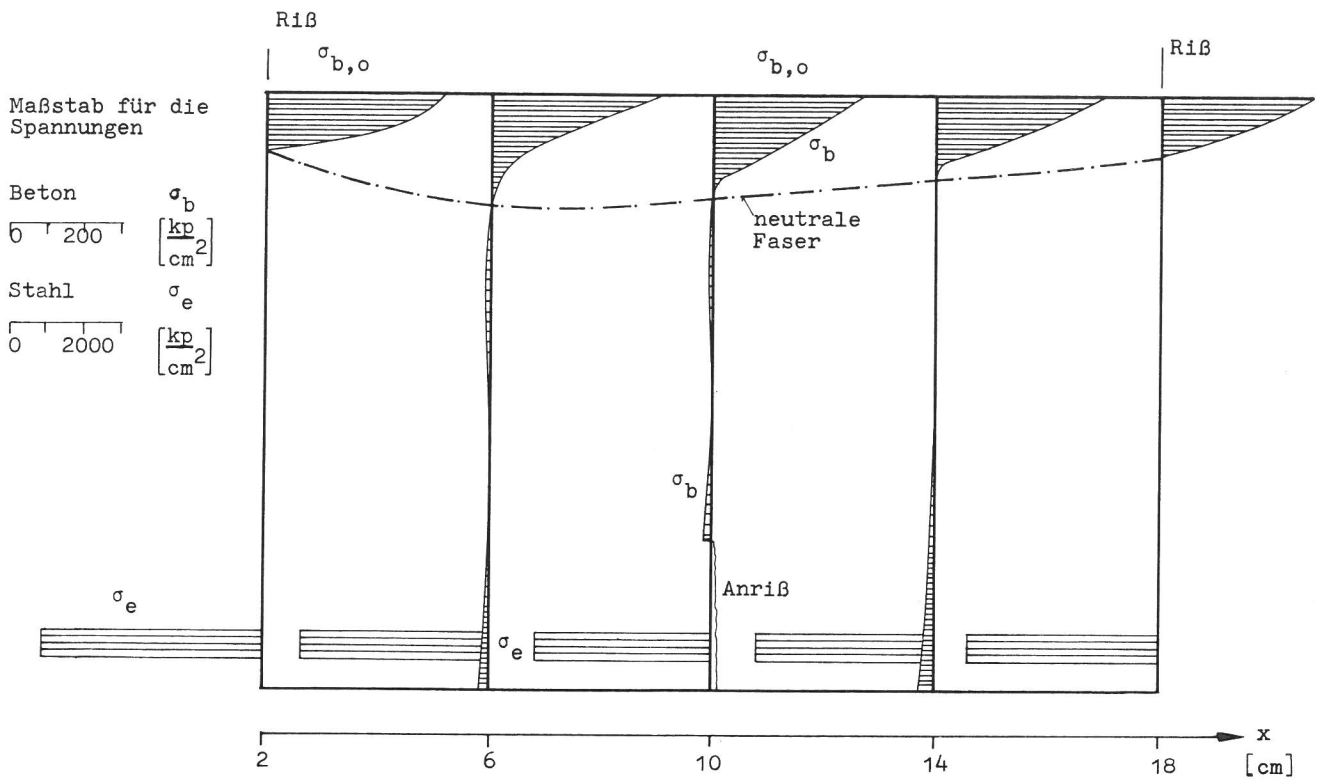


Bild 58: Spannungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M_u$  (Laststufe 8)

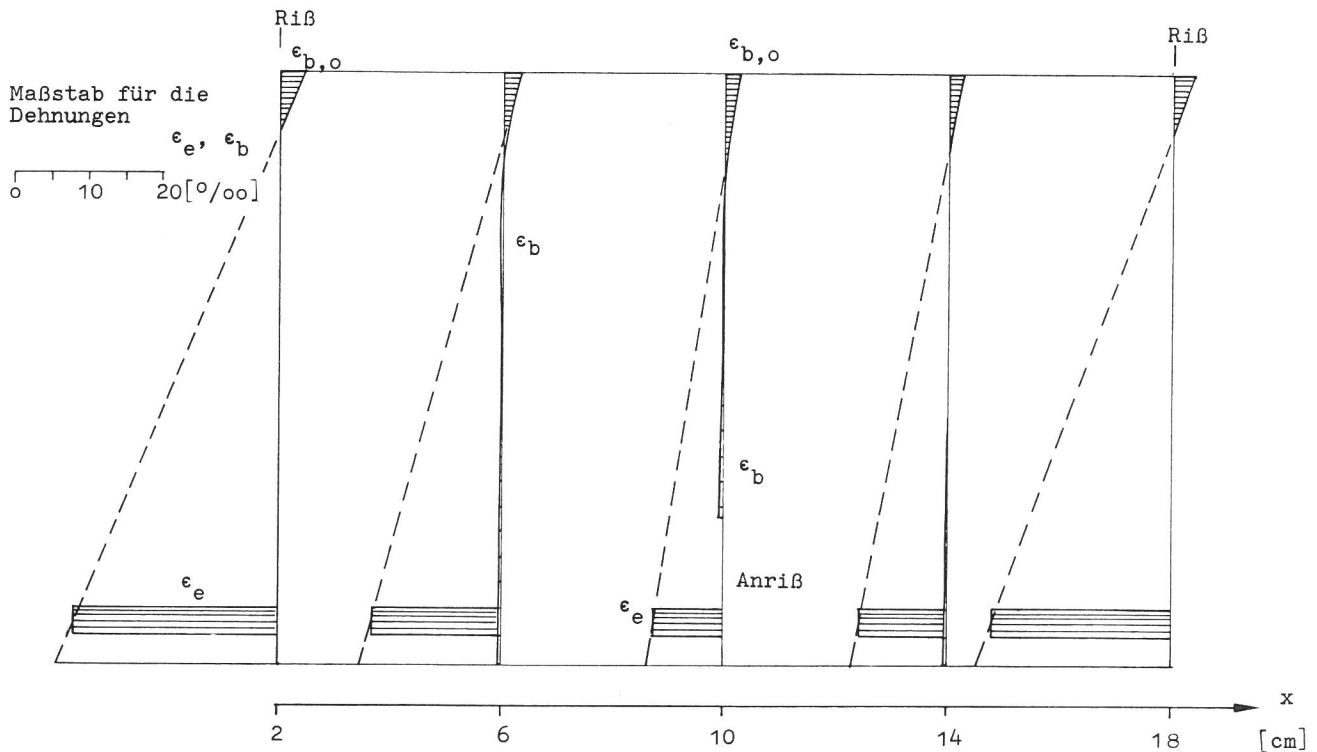


Bild 59: Dehnungsverlauf in einzelnen Querschnitten eines Balkenabschnitts mit näherungsweise konstantem Biegemoment  $M_u$  (Laststufe 8)



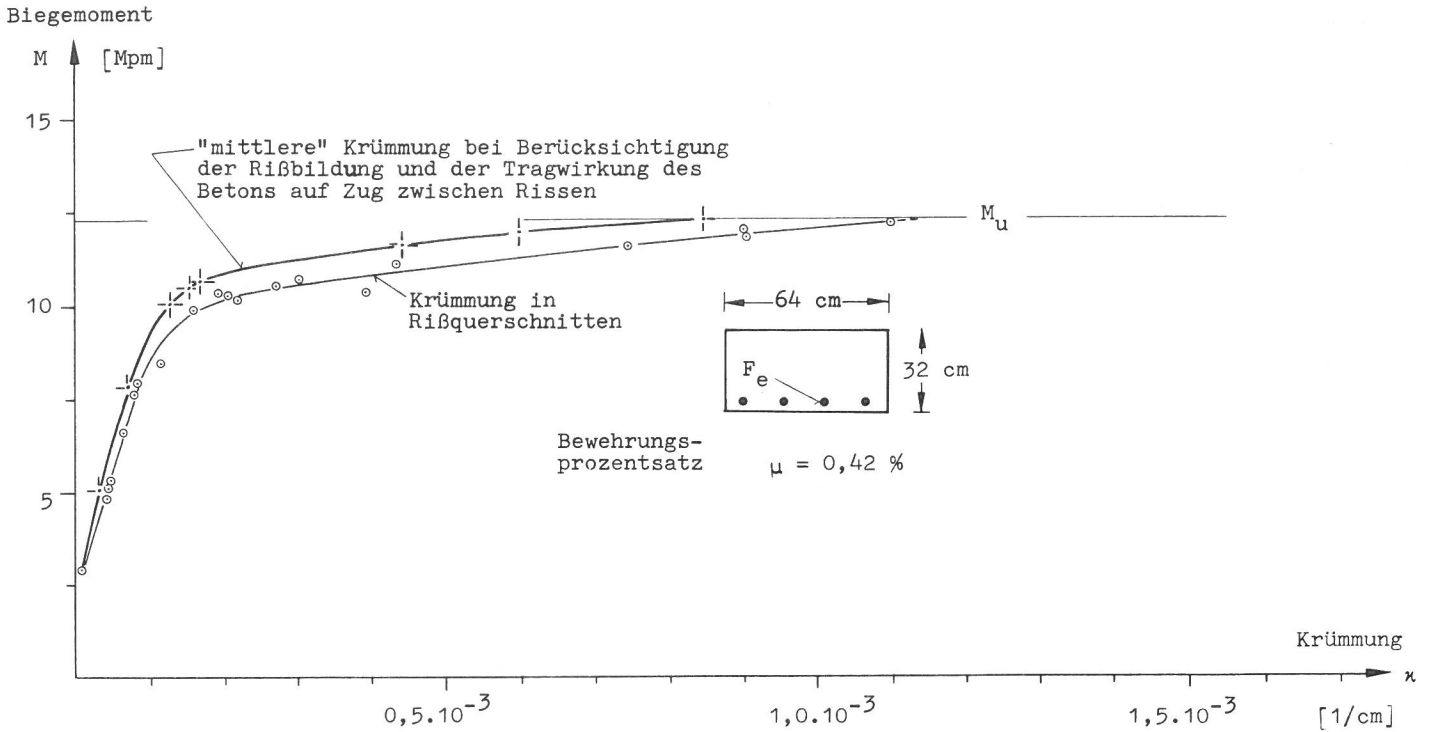


Bild 60: Rechnerisch ermittelte Momenten-Krümmungsbeziehung für einen Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone zwischen Rissen

Die Integration der "mittleren" Krümmung ergibt die Drehung  $\theta$  des plastischen Gelenkes in Balkenmitte

$$\theta_{\text{Rechnung}} = 79,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Das Verhältnis zwischen rechnerisch ermittelter Drehung und im Versuch erreichter Drehung  $\theta_{\text{Versuch}} = 90,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  des plastischen Gelenkes beträgt jetzt

$$\theta_{\text{Rechnung}} / \theta_{\text{Versuch}} = 0,87$$

Der aus Mittelwerten der Krümmungen zwischen Rissen unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons auf Zug errechnete Verformungswert ist zwar kleiner als der Versuchswert, liegt jedoch auf der sicheren Seite.

#### 8.4 Ein einfaches Verfahren zur Ermittlung von Momenten-Krümmungsbeziehungen unter näherungsweise Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone zwischen Rissen

Für einen gerissenen Stahlbetonbalken wurde in Abschnitt 8.2 die Momenten-Krümmungsbeziehung unter vollständiger Vernachlässigung der Betonzugzone und unter Annahme eines linearen Dehnungsverlaufs über die Querschnittshöhe ermittelt. Anhand

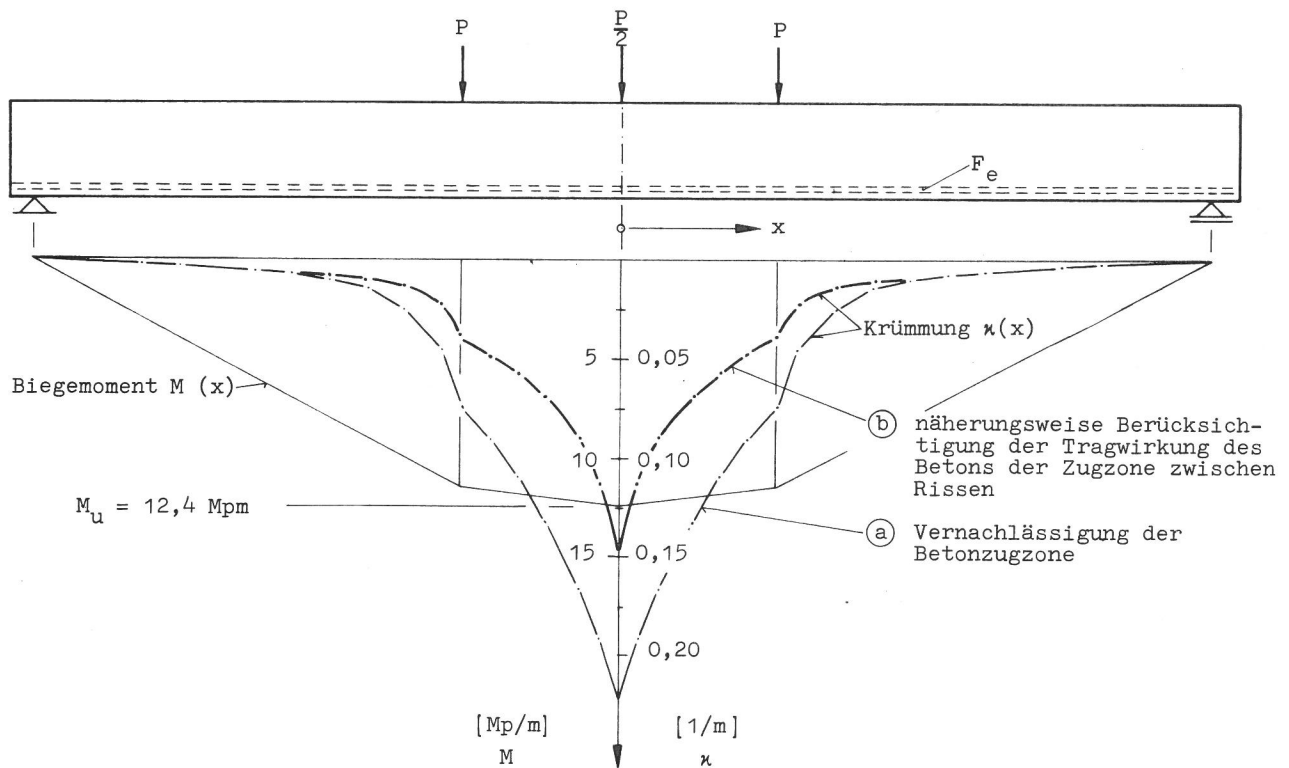


Bild 61: Verlauf der Krümmung entlang der Balkenachse bei Erreichen der Bruchlast.  
 a. bei vollständiger Vernachlässigung der Betonzugzone (Abschnitt 8.2)  
 b. bei näherungsweise Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone zwischen Rissen.

von Ergebnissen einer "Feinstrukturanalyse" dieses Stahlbetonbalkens erfolgte in Abschnitt 8.3 die Aufstellung einer wirklichkeitsnahen Momenten-Krümmungsbeziehung unter Berücksichtigung des Verbundes zwischen Bewehrung und Beton und damit unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons auf Zug zwischen Rissen. Die hierbei gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen jedoch eine wesentliche Verbesserung des in Abschnitt 8.2 beschriebenen und im allgemeinen zur Ermittlung von Momenten-Krümmungsbeziehungen verwendeten Verfahrens. Die Verbesserung des Verfahrens besteht in einer näherungsweise Berücksichtigung des Verbundes zwischen Bewehrung und Beton und der daraus resultierenden Dehnungsbehinderung des Bewehrungsstahls zwischen Rissen.

Im folgenden werden die zur Entwicklung des Näherungsverfahrens führenden Ergebnisse des Abschnitts 8.3 kurz zusammengefaßt. Den Bildern 50 bis 59 kann entnommen werden, daß Zugspannungen unterhalb der neutralen Faser nur in Reißquerschnitten vernachlässigbar klein sind. Im Bereich zwischen Rissen wird jedoch ein Teil der Zugkraft des Verbundquerschnitts durch den

Beton aufgenommen. Die Beanspruchung des Betons auf Zug führt dabei zwischen Rissen zu einer Abnahme der Spannungen und Dehnungen im Bewehrungsstahl. Von wesentlicher Bedeutung für die Ermittlung von Momenten-Krümmungsbeziehungen ist, daß bereits die Aufnahme "vernachlässigbar" kleiner Zugkräfte durch den Beton und die sich daraus ergebende geringe Änderung der Stahlgzugkraft zu einer erheblichen Abnahme der Stahldehnungen zwischen Rissen führen kann. Ein nichtlinearer Verlauf der Stahldehnungen zwischen Rissen hat jedoch unterschiedlich große Neigungen der einzelnen Querschnitte zur Folge. Werden die Neigungswinkel gemittelt, so läßt sich eine mittlere Querschnittsneigung und somit eine mittlere Krümmung für den betrachteten Bereich bestimmen. Die mittlere Krümmung kann jedoch ebenfalls aus Gl. (66) durch Einsetzen der mittleren Stahldehnung und der mittleren Dehnung am oberen Rand der Betondruckzone zwischen zwei Rissen bestimmt werden.

In den Bildern 62 und 63 ist der Verlauf der Dehnungen über die Querschnittshöhe nochmals jedoch in größerem Maßstab dargestellt. Aus Bild 62 ist zu ersehen, daß in Rißquerschnitten unabhängig von der Größe der Beanspruchung die Dehnungen geradlinig über die Betondruckzone verlaufen. Für Querschnitte zwischen Rissen kann näherungsweise ein geradliniger Verlauf der Betondehnungen über die Druckzone angenommen werden. Die in Bild 63 eingetragene gestrichelte Linie deutet die Neigung eines gedachten ebenen Querschnitts an, die sich aus der oberen Randdehnung der Betondruckzone und der Dehnung des Bewehrungsstahls ergibt.

Aus den Ergebnissen des Abschnitts 8.3 kann somit gefolgert werden, daß bei einer Aufstellung von Momenten-Krümmungsbeziehungen von einem Ebenbleiben der fiktiven Querschnitte ausgegangen werden kann. Die Tragwirkung des Betons zwischen Rissen muß jedoch zumindest durch Verwendung der im Bereich zwischen Rissen vorhandenen mittleren Stahldehnung berücksichtigt werden.

Ausgehend von dieser Forderung wird im folgenden ein einfaches Modell zur näherungsweisen Ermittlung der mittleren Stahldehnung zwischen Rissen entwickelt. Betrachtet wird hierzu der querkraftfreie Bereich eines Stahlbetonbalkens. Nach erfolgter Rißbildung beträgt der mittlere Abstand zwischen Rissen  $a_m$  (Bild 64a). In den einzelnen Rißquerschnitten wirken gleich-

große als bekannt vorauszusetzende Biegemomente. Der im Rißquerschnitt vorhandene Spannungs-Dehnungsverlauf läßt sich in Abhängigkeit von der Größe des Biegemoments nach Abschnitt 8.2 bestimmen. Vereinfachende Annahmen müssen hinsichtlich des Verlaufs der Stahl- und Verbundspannungen zwischen Rissen getroffen werden. Gestützt auf die Ergebnisse der genauen Spannungsanalyse eines Stahlbetonbalkens (Bilder 40 bis 42) wird ein jeweils zur Mitte des ungerissenen Bereichs antimetrischer Verlauf der Verbundspannungen angenommen und durch zwei quadratische Parabeln entsprechend Bild 64 b angenähert.

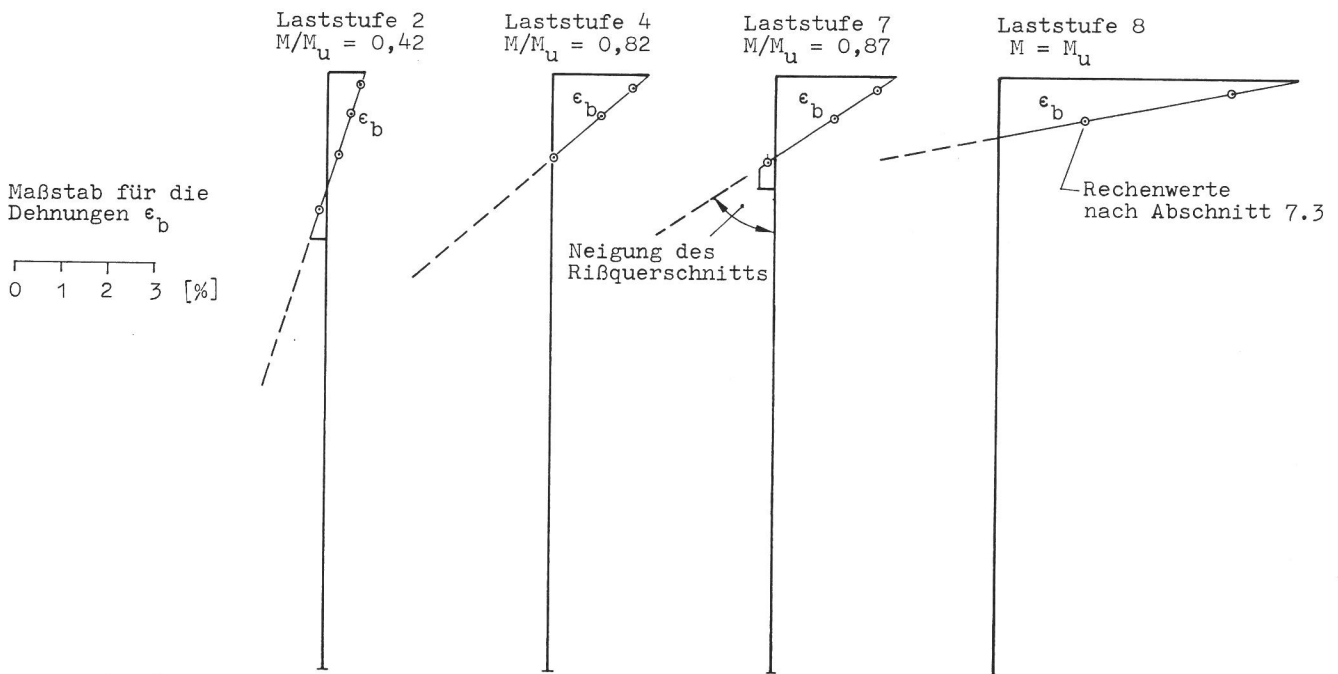


Bild 62: Verlauf der Betondehnungen über die Druckzone des gerissenen Querschnitts in Balkenmitte für verschiedene Laststufen (zusammengestellt aus den Bildern 50 bis 59)

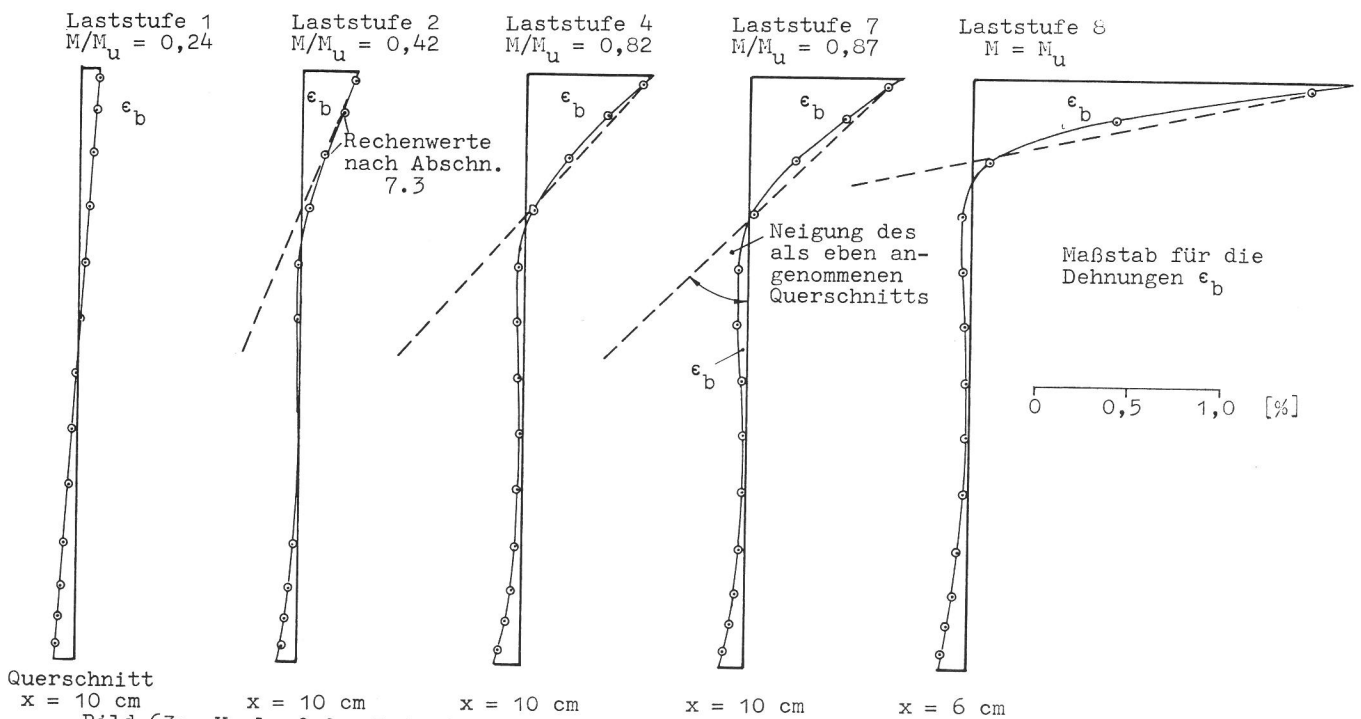


Bild 63: Verlauf der Betondehnungen über den Querschnitt in der Mitte zwischen Rissen für verschiedene Laststufen (zusammengestellt aus den Bildern 50 bis 59)

Bild 64a:  
 Querkraftfreier Bereich eines Stahlbetonbalkens  
 Schnittlasten und Spannungen in RiBquerschnitten

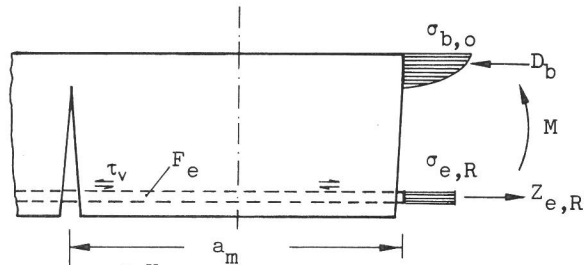


Bild 64b:  
 Angenommener Verlauf der Verbundspannungen zwischen Rissen

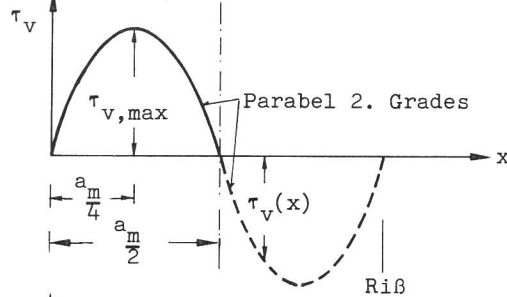


Bild 64c:  
 Abnahme der Stahlzugkraft zwischen Rissen

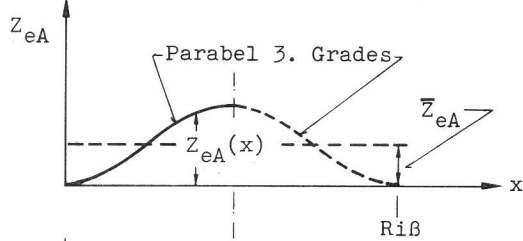


Bild 64d:  
 Verlauf der Stahlspannungen zwischen Rissen

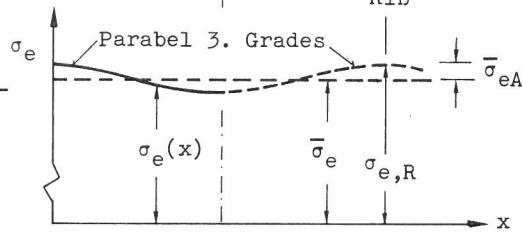
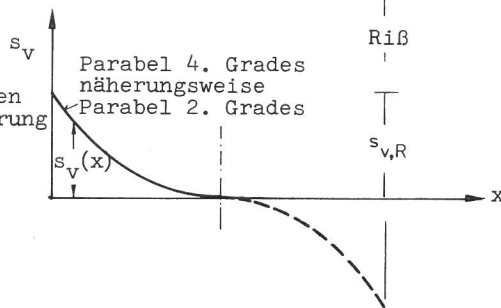


Bild 64e:  
 Verlauf der Verschiebungen zwischen Beton und Bewehrung



Die Abnahme der Stahlzugkraft  $Z_{eA}(x)$  in einer Entfernung  $x$  vom RiBufer kann aus der Bedingung, daß eine entsprechende Zugkraft längs dieser Strecke durch Verbundspannungen  $\tau_v(x)$  in den Beton eingeleitet werden muß, ermittelt werden. Beträgt der Umfang aller Bewehrungsstähe im Querschnitt  $U_v$ , so führt diese Bedingung zu der folgenden Gleichung

$$Z_{eA}(x) = U_v \int_0^x \tau_v(x) dx \quad (72)$$

und mit der vorgeschlagenen Näherung für  $\tau_v(x)$  zu dem in Bild 64c angegebenen Verlauf von  $Z_{eA}(x)$ .

Die mittlere Abnahme der Stahlzugkraft  $\bar{Z}_{eA}$  im Bereich zwischen zwei Rissen ergibt sich zu

$$\bar{Z}_{eA} = \frac{1}{a_m/2} \int_0^{a_m/2} Z_{eA}(x) dx \quad (73)$$

und nach Einsetzen von Gl. (72) zu:

$$\bar{Z}_{eA} = \frac{U_v}{a_m/2} \int_0^{a_m/2} \int_0^x \tau_v(x) dx dx \quad (73a)$$

Sind die Verbundspannungen  $\tau_v(x)$  zwischen zwei Rissen näherungsweise entsprechend Bild 64b verteilt, wobei das Maximum der Verbundspannungen  $\tau_{v,max}$  in einer Entfernung  $x = a_m/4$  vom Riß liegt, so folgt aus der Integration von Gl. (73a) für die mittlere Abnahme der Stahlzugkraft der Wert:

$$\bar{Z}_{eA} = \frac{1}{6} a_m U_v \tau_{v,max} \quad (74)$$

Die Stahlspannung  $\sigma_e(x)$  zwischen Rissen läßt sich ausgehend von der Spannung im Riß  $\sigma_{e,R}$  mit Hilfe der Stahlzugkraftabnahme  $Z_{eA}(x)$  bestimmen. Der Verlauf der Stahlspannungen  $\sigma_e(x)$  in Bild 64d entspricht dabei dem in Abschnitt 7.3 (Bilder 40 bis 42) ermittelten Spannungsverlauf - nach Ausrundung der dort vorhandenen Spannungsspitzen.

Die im folgenden benötigte mittlere Stahlspannung  $\bar{\sigma}_e$  im Bereich zwischen Rissen ergibt sich aus der Differenz zwischen der Stahlspannung im Riß  $\sigma_{e,R}$  und der mittleren Abnahme der Stahlspannungen  $\bar{\sigma}_{eA}$  (Bild 64d):

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_{e,R} - \bar{\sigma}_{eA} \quad (75)$$

Die mittlere Abnahme der Stahlspannung folgt aus Gl. (74) und beträgt:

$$\bar{\sigma}_{eA} = \frac{1}{6} \frac{a_m U_v}{F_e} \tau_{v,max} \quad (76)$$

Durch Einsetzen der Spannung  $\bar{\sigma}_e$  in das Deformationsgesetz des Stahls läßt sich die mittlere Dehnung zwischen Rissen  $\bar{\epsilon}_e$  und deren plastischer Anteil  $\bar{\epsilon}_e^{pl}$  bestimmen.

Die in Gl. (76) einzusetzende Verbundspannung  $\tau_{v,max}$  wird aus dem Deformationsgesetz für den Verbund im ungestörten Bereich

entnommen. In Abschnitt 4.4, Bild 23a wurde gezeigt, daß die Verbundspannung  $\tau_v$  eine Funktion der plastischen Stahldehnung  $\epsilon_e^{pl}$  und der Verschiebung  $s_v$  zwischen Bewehrung und Beton ist.

Zur Ermittlung der Verbundspannung  $\tau_{v,max}$  in einer Entfernung  $x = a/4$  vom Rißufer, muß daher noch eine Annahme hinsichtlich des Verlaufs des Bewehrungsschlupfes getroffen werden.

Aus dem angenommenen symmetrischen Verlauf der Stahlspannungen zwischen Rissen (Bild 64d) folgt, daß an der Stelle  $x = a_m/2$ , d. h. in Blockmitte, keine Verschiebungen zwischen Bewehrung und Beton auftreten. Unter Verwendung der Spannungs-Dehnungsbeziehung für den Bewehrungsstahl läßt sich ein dem Spannungsverlauf  $\sigma_e(x)$  (Bild 64d) ähnlicher Verlauf der Stahldehnungen  $\epsilon_e(x)$  gewinnen. Der Bewehrungsschlupf ergibt sich dann durch Integration der Dehnungen als Parabel 4. Grades. Dieser Verschiebungsverlauf  $s_v(x)$  läßt sich jedoch mit ausreichender Genauigkeit durch eine quadratische Parabel approximieren (Bild 64e). Beträgt der maximale Wert des Bewehrungsschlupfes am Rißufer  $s_{v,R}$ , so kann unter dieser Voraussetzung die Verschiebung  $s_{v,\tau}$  zwischen Bewehrung und Beton in einer Entfernung  $x = a_m/4$  vom Riß zu

$$s_{v,\tau} = 0,25 \cdot s_{v,R} \quad (77)$$

bestimmt werden. Die am Rißufer vorhandene Verschiebung  $s_{v,R}$  ist durch Integration der Stahldehnungen  $\epsilon_e(x)$  im Bereich  $x = 0$  bis  $x = a_m/2$  zu ermitteln.

Bei dieser Integration kann jedoch ebenfalls von dem zwischen Rissen vorhandenen Mittelwert der Stahldehnungen  $\bar{\epsilon}_e$  ausgegangen werden, so daß für die Verschiebung  $s_{v,\tau}$  mit Gl. (77) folgt:

$$s_{v,\tau} = 0,125 a_m \bar{\epsilon}_e \quad (78)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (75) bis (78) wurde ein einfach zu handhabendes Iterationsverfahren entwickelt, das die Ermittlung von Momenten-Krümmungsbeziehungen unter näherungsweise Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons der Zugzone zwischen Rissen ermöglicht.

Die Iteration wird wie folgt durchgeführt:

1. Schritt : Ermittlung von Biegemoment und Krümmung für den Stahlbetonquerschnitt

im Stadium II ("Rißquerschnitt") bei vollständiger Vernachlässigung der Betonzugzone entsprechend Abschnitt 8.2 Folgende Größen stehen damit zur Verfügung:

$$M, \kappa, \sigma_{e,R}, \epsilon_{e,R}, \epsilon_{e,R}^{pl}, \epsilon_{b,o}$$

Als Anfangswerte für die mittleren Stahldehnungen  $\bar{\epsilon}_e$  und  $\bar{\epsilon}_e^{pl}$  werden zunächst die Rißdehnungen  $\epsilon_{e,R}$  und  $\epsilon_{e,R}^{pl}$  verwendet.

2. Schritt : Ermittlung des Bewehrungsschlupfes  $s_{v,\tau}$  an der Stelle der max. Verbundspannung aus Gl. (78).
3. Schritt : Bestimmung der maximalen Verbundspannung  $\tau_{v,max} = \tau_v(s_{v,\tau}; \bar{\epsilon}_e^{pl})$  aus dem Gesetz für den Verbund im ungestörten Bereich (Bild 23a).
4. Schritt : Berechnung der mittleren Abnahme der Stahlspannungen  $\bar{\sigma}_{eA}$  aus Gl. (76).
5. Schritt : Ermittlung der mittleren Stahlspannung  $\bar{\sigma}_e$  zwischen zwei Rissen aus Gl. (75) und Bestimmung der mittleren Stahldehnungen  $\bar{\epsilon}_e$  und  $\bar{\epsilon}_e^{pl}$  aus dem Deformationsgesetz für den Bewehrungsstahl.
6. Schritt : Berechnung der Krümmung nach Gl. (66) unter Verwendung der Randdehnung  $\epsilon_{b,o}$  der Betondruckzone des Rißquerschnitts und der mittleren Dehnung  $\bar{\epsilon}_e$  des Bewehrungsstahls im Bereich zwischen Rissen.

Die Rechenschritte 2-6 sind so oft zu wiederholen, bis sich der Wert der mittleren Dehnung  $\bar{\epsilon}_e$  und damit der Wert der mittleren Krümmung nicht mehr ändert.

Die in Abschnitt 8.2 für einen Stahlbetonquerschnitt im Stadium II ermittelte Momenten-Krümmungsbeziehung wurde mit Hilfe des erläuterten Verfahrens verbessert. In der Regel brauchte



für jeden der betrachteten Werte  $M$ ,  $\kappa$  lediglich zwei Iterationsschritte durchgeführt zu werden. Beide Momenten-Krümmungsbeziehungen wurden in Bild 65 eingetragen.

Eine nochmalige Ermittlung der Drehung des plastischen Gelenkes durch Integration der Krümmungen entlang der Balkenachse entsprechend Bild 48 lieferte bei Verwendung der verbesserten Momenten-Krümmungsbeziehung den Wert  $\theta_{\text{Rechnung}} = 68,4 \cdot 10^{-3}$  rad.

Das Verhältnis zwischen rechnerisch und experimentell ermittelter Drehung des plastischen Gelenkes beträgt jetzt

$$\theta_{\text{Rechnung}} / \theta_{\text{Versuch}} = 0,76$$

Die rechnerisch für den betrachteten Stahlbetonbalken ermittelte Drehung des plastischen Gelenkes ist zwar kleiner als die im Versuch erreichte Drehung, liegt jedoch im Gegensatz zu dem im Abschnitt 8.2 bestimmten Wert auf der sicheren Seite.

Das hier vorgeschlagene Verfahren ermöglicht daher, die bisher im allgemeinen für gerissene Stahlbetonquerschnitte verwendeten Momenten-Krümmungsbeziehungen auf einfache Weise zu verbessern. Im Hinblick auf die begrenzte Verformungsfähigkeit der Stahlbetonquerschnitte ist die Verwendung "sicherer" Momenten-Krümmungsbeziehungen für die Tragfähigkeitsberechnung im Stahlbetonbau von wesentlicher Bedeutung.

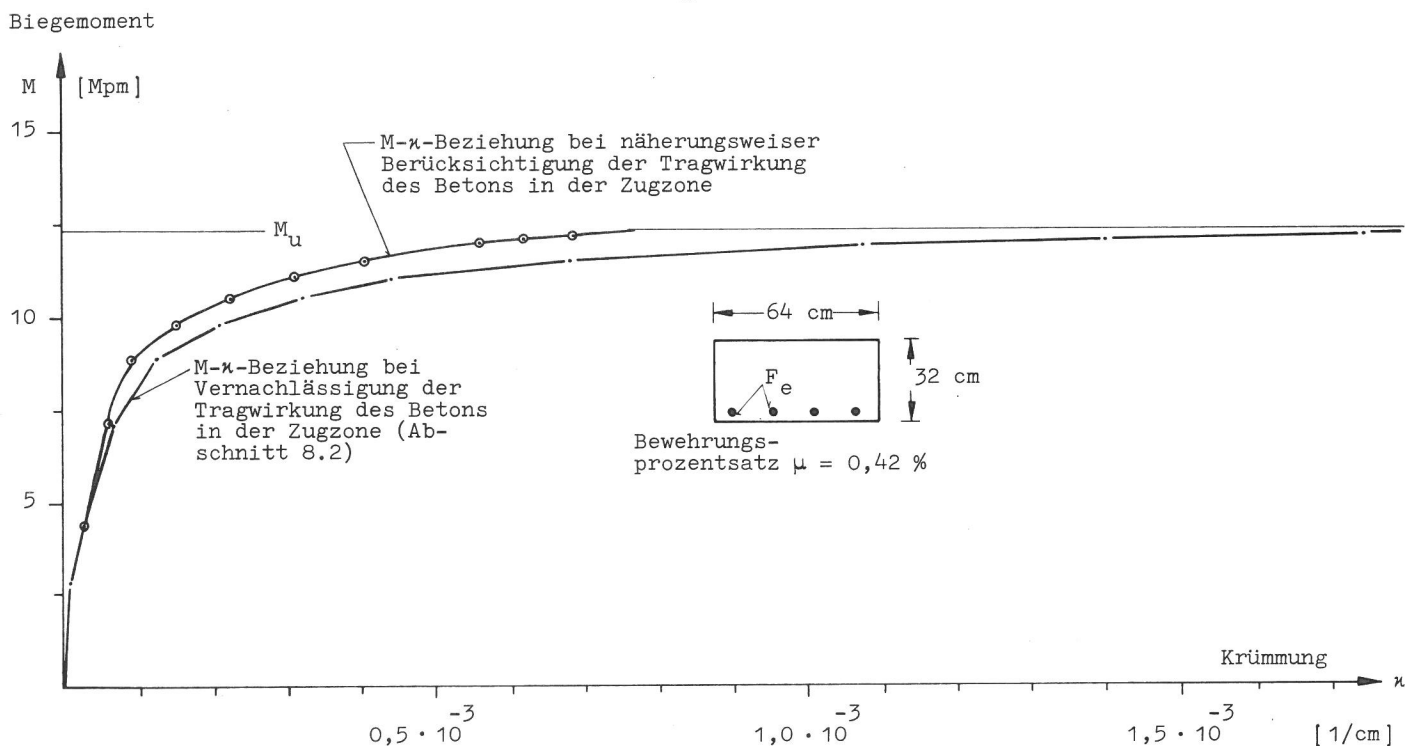


Bild 65: Momenten-Krümmungsbeziehung für einen Stahlbetonbalken bei näherungsweise Berücksichtigung der Dehnungsbehinderung des Bewehrungsstahls zwischen Rissen.

## 9.0 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Anwendung nichtlinearer Berechnungsmethoden im Stahlbetonbau zur Ermittlung von Grenzlastzuständen erfordert die Kenntnis von Schnittlast-Verformungsbeziehungen in Form von Momenten-Krümmungs- oder Momenten-Drehungsgesetzen. Bei der Aufstellung wirklichkeitsnaher Schnittlast-Verformungsbeziehungen ist jedoch vom tatsächlich vorhandenen Trag- und Verformungsverhalten eines Bauteils oder Konstruktionsbereichs auszugehen.

Das Ziel dieser Arbeit bestand daher in der Entwicklung eines leistungsfähigen Rechnerprogrammsystems zur theoretischen Untersuchung des Verformungsverhaltens von Stahlbetonbalken. (Die Ermittlung des Verformungsverhaltens von Traggliedern in Abhängigkeit sämtlicher interessierender Parameter allein auf experimentellem Wege dürfte aus wirtschaftlichen Gründen kaum möglich sein).

Eine exakte theoretische Ermittlung von Schnittlast-Verformungsbeziehungen erfordert jedoch die vollständige rechnerische Simulation des Last-Verformungsverhaltens von Traggliedern und Konstruktionsbereichen (Balken, Stütze, Rahmenecke), von der Belastung Null ausgehend bis zum Erreichen der Traglast. Das Rechenergebnis hängt ganz wesentlich davon ab, ob lokale Steifigkeitsänderungen der Struktur, hervorgerufen durch Plastizieren der Werkstoffe, nichtlineares Verbundverhalten, Rißbildung und begrenzte Zerstörung von Druckbereichen usw. rechnerisch erfaßt werden können.

Als ein hervorragendes Werkzeug zur Lösung des vorliegenden Problems bot sich die Methode der Finiten Elemente an, die schon verschiedentlich zur Untersuchung von Grundlagenproblemen im Stahlbetonbau herangezogen wurde.

Ausgehend von einem Elementprogramm zur Spannungs-Verformungsberechnung ebener elastischer Systeme mit isotropem Stoffverhalten erfolgte die Entwicklung eines Finite-Element-Programmsystems zur Riß-Bruchberechnung von Balken, Stützen, Rahmen-ecken und weiteren Konstruktionsbereichen.

Die Diskretisierung eines Stahlbetontraggliebes erfolgt durch rechteckige Beton- und Stahlelemente, die jeweils vier Knotenpunkte besitzen. Das hier verwendete Rechteckelement wird aus

vier Dreieckelementen mit konstantem Spannungs- und Verzerrungsverlauf zusammengesetzt. Eine Elimination des im Elementinnern liegenden gemeinsamen Knotenpunktes führt zu einer Reduzierung der Anzahl der Freiheitsgrade dieses Elements. Der Verbund zwischen Beton- und Bewehrungselementen wird im Modell durch spezielle zweidimensionale Verbundelemente hergestellt.

Die Beschreibung des Spannungs-Verzerrungszustandes von Beton- und Stahlelementen erfolgt näherungsweise unter Verwendung aktueller Arbeitslinien des einachsig beanspruchten Werkstoffs. Anwendung finden die auf experimentellem Wege ermittelten Gesetze für den Verbund in Rißnähe bzw. im ungestörten Bereich zwischen Rissen. Erstmals erfolgt damit die Einbeziehung wirklichkeitsnaher Werte für den Verbund in die Feinstrukturanalyse. Das Bruchverhalten von Betonelementen wird durch die bekannte Bruchgrenzkurve des zweiachsig beanspruchten Betons erfaßt. Als Rißkriterium gilt das Überschreiten der Betonzugfestigkeit in einer der beiden Hauptspannungsrichtungen.

Die Durchführung der nichtlinearen Berechnung erfolgt schrittweise, wobei jeder Teilschritt einem Belastungssinkrement entspricht. Für jede Teillast wird in mehreren Iterationsschritten die Ermittlung der Knotenverschiebungen und Elementspannungen unter Berücksichtigung des Werkstoffplastizierens, der Rißbildung und Rißausbreitung sowie den örtlichen Zerstörungen des Betons oder des Verbundes, vorgenommen.

Mit Hilfe des entwickelten Programmsystems erfolgte die Untersuchung des Verformungsverhaltens eines Stahlbetonplattenstreifens. Ermittelt wurde für eine schrittweise aufgebrachte äußere Belastung der vollständige Spannungs-Verschiebungszustand des als Balken betrachteten Plattenstreifens sowie die Drehung des plastischen Gelenkes mit dem Grenzwert der Drehfähigkeit.

Die durchgeführten Rechnungen haben gezeigt, daß bei Verwendung wirklichkeitsnaher Gesetze für den Verbund eine sehr gute Übereinstimmung mit Versuchswerten zu erzielen ist. Bei einer näherungsweise Einbeziehung des Verbundes in die Rechnung - was bisher in sämtlichen bekannten Arbeiten der Fall war - geht diese Übereinstimmung zumindest im Bereich plastischer Bauteilverformungen vollständig verloren.

Die Ergebnisse der nichtlinearen Spannungs-Verformungsberech-

nung ermöglichten ebenfalls die Aufstellung einer wirklichkeitsnahen Momenten-Krümmungsbeziehung für den untersuchten Plattenstreifen. Hierzu wurde der Dehnungszustand eines zwischen zwei Rissen liegenden Bereichs des Traggliedes betrachtet. Aus den unterschiedlich großen Neigungswinkeln einer Anzahl fiktiver Querschnitte dieses Bereichs konnte eine mittlere Momenten-Krümmungsbeziehung gewonnen werden. Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, daß diese unter Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons in der Zugzone zwischen Rissen ermittelte Momenten-Krümmungsbeziehung ganz erheblich von der allein für Rißquerschnitte (Querschnitt im Zustand II) gültigen Momenten-Krümmungsbeziehung abweicht. Den Ergebnissen der Verformungsberechnung mit der Methode der Finiten Elemente kann entnommen werden, daß diese Abweichung insbesondere auf die durch den Verbund verursachte Dehnungsbehinderung des Bewehrungsstahls zwischen Rissen zurückzuführen ist.

Als Ziel zukünftiger Arbeiten kann die systematische Ermittlung von Schnittlast-Verformungsbeziehungen unter Verwendung der hier erarbeiteten Grundlagen genannt werden. Anzustreben ist eine parametrische Studie, die eine Aufstellung von Momenten-Krümmungsgesetzen und Momenten-Drehungsgesetzen zunächst an Stahlbetonbalken in Abhängigkeit folgender Einflußgrößen vorsieht:

- Querschnittsgeometrie
- Bewehrungsprozentsatz
- Bewehrungsanordnung
- Stahlart und Betongüte
- Momenten-Querkraft-Verhältnis
- Längskraft

Die vom Verfasser parallel zur vorliegenden Arbeit durchgeführten Versuche an Stahlbetonbalken [40] können zur Festlegung des Umfangs parametrischer Untersuchungen herangezogen werden. Um die Fließgelenktheorie zur Ermittlung der Tragfähigkeit von Rahmenkonstruktionen einsetzen zu können, ist die Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke als einer integralen Größe für die Verformungsfähigkeit in Abhängigkeit

der o. a. Einflußgrößen für die folgenden Tragwerksbereiche durchzuführen:

- Stützen- und Feldbereiche von Durchlaufträgern (Schubriß- und Biegerißgelenke)
- Stützen auf Biegung und Längskraft beansprucht
- Anschlußstellen von Riegeln und Stützen an Rahmenknoten.

Eine wirklichkeitsnahe rechnerische Ermittlung von Schnittlast-Verformungsbeziehungen, unter Berücksichtigung des tatsächlich vorhandenen Verformungsverhaltens der betrachteten Tragglieder, bildet eine notwendige Voraussetzung für die Untersuchung der infolge Rißbildung und Werkstoffplastizieren in der Konstruktion eintretenden Kräfteumlagerung und ist damit Grundlage für eine realistische Einschätzung der vorhandenen Sicherheit eines Bauwerks.

## Literaturverzeichnis

- [ 1 ] Baker, A.L.L.  
The Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames.  
Concrete Publications Ltd. London 1956.
- [ 2 ] Baker, A.L.L.  
Ultimate Load Theory for Concrete Frame Analysis.  
Journal of the Structural Division  
Vol. 85, No. ST 9, pp. 1-29 (1959).
- [ 3 ] Baker, A.L.L.  
The Inelastic Space Frame.  
Concrete Publications Ltd. London 1970.
- [ 4 ] Hees, G.  
Die Berechnung von Biegeträgern bei nichtlinearen Momenten-Krümmungs-Beziehungen.  
Fortschritt-Berichte VDI-Z. Reihe 4, Nr. 15, Juli 1969.
- [ 5 ] Ferry-Borges, J.; Arantes e Oliveira, E.R.  
Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures.  
Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau,  
Vol. 23, S. 51-70 (1963).
- [ 6 ] Bubenheim, H.J.  
Ein Beitrag zur Berechnung von Rahmensystemen mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz.  
Dissertation Darmstadt 1969.
- [ 7 ] Beck, H.; Bubenheim, H.J.  
Ein Verfahren zur optimalen Bemessung ebener Stahlbetonrahmen.  
Der Bauingenieur 47, Heft 6, S. 192-198 (1972).
- [ 8 ] Yamada, M.  
Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken.  
Beton- und Stahlbetonbau 57, H. 4, S. 85-91 (1958).
- [ 9 ] Yamada, M.; Kawamura, H.  
Elasto-plastische Biegeformänderung der Stahlbetonsäulen und -balken (einseitige Biegung unter Axiallast).  
IVBH Vol. 28-1, S. 193-220 (1968).
- [ 10 ] Bark, H.  
Die Verdrehung plastischer Zonen.  
Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, 1966.

- [ 11] Mattock, A.H.  
Rotational capacity of hinging regions in reinforced concrete beams.  
Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium, Miami, Fla., Nov. 1964, pp. 143-181.
- [ 12] Beck, H.  
Der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung für den Stahlbeton-Rechteckquerschnitt.  
Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, Festschrift Rüsck.  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1969.
- [ 13] Priestley, M.J.N.; Park, R.; Lu, F.P.S.  
Moment-curvature relationships for prestressed concrete in constant-moment zones.  
Magazine of Concrete Research, Vol. 23, No. 75-76, pp. 69-78 (1971).
- [ 14] Rao, P.S.  
Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerung der Schnittkräfte.  
Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, H. 177 (1966).
- [ 15] Bachmann, H.  
Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken.  
Juris Druck-Verlag, Zürich 1967.
- [ 16] Eifler, H.; Plauk, G.  
Zwei Verfahren zur Berechnung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen.  
Materialprüfung Bd. 14, Nr. 8, S. 256-259, Aug. 1972.
- [ 17] Zienkiewicz, O.C.  
The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.  
McGraw-Hill Ltd., London 1967.
- [ 18] Przemieniecki, J.S.  
Theory of Matrix Structural Analysis.  
McGraw-Hill Book Company 1968.
- [ 19] Holand, I.; Bell, K.  
Finite Element Methods in Stress Analysis.  
Tapir 1969.
- [ 20] Ngo, D.; Scordelis, A.C.  
Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.  
Journal of the ACI Vol. 64, No. 3, p. 152-163, March 1967.



- [ 21 ] Nilson, A.H.  
Finite Element Analysis of Reinforced Concrete  
Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering,  
University of California, Berkeley, 1967.
- [ 22 ] Franklin, H.A.  
Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames  
and Panels.  
SESM Report No. 70-5, University of California,  
Berkeley, March 1970.
- [ 23 ] Cervenka, V.  
Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced  
Concrete Panels under In-Plane Loads.  
Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering,  
University of Colorado, 1970.
- [ 24 ] Saugy, B.  
Contribution à l'étude théorique de comportement non  
linéaire des structures massives en béton armé sous  
charges rapides.  
Bulletin Technique de la Suisse Romande No. 22, Nov. 1969.
- [ 25 ] Saugy, B.; Zimmermann, Th.  
Analyse non linéaire des structures massives.  
Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des  
Travaux Publics No. 292 Avril 1972.
- [ 26 ] Lassker, A.J.  
Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Beams  
by the Finite Element Method.  
Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering,  
Oklahoma, State University, 1972.
- [ 27 ] Nam, C.H.  
A Finite Element Study on the Nonlinear Behavior  
of Reinforced Concrete Flexural Members due to  
Short-Time Loading.  
Ph.D. Thesis, Civil and Environmental Engineering,  
University of Wisconsin, 1973.
- [ 28 ] Eifler, H.; Plauk, G.  
Theoretische und experimentelle Ermittlung der Dreh-  
fähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonkonstruk-  
tionen unter besonderer Berücksichtigung des Verbund-  
verhaltens.  
Wissenschaftlicher Sammelband der Bundesanstalt für  
Materialprüfung (BAM), Berlin 1973.
- [ 29 ] Rehm, G.  
Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl  
und Beton.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138 (1961).



- [30] Weigler, H.; Becker, G.  
 Untersuchungen über das Bruchverhalten von Beton  
 bei zweiachsiger Beanspruchung.  
 Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 157 (1963).
- [31] Reimann, H.  
 Kritische Spannungszustände des Betons bei mehrachsiger,  
 ruhender Kurzzeitbelastung.  
 Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 175 (1965).
- [32] Hilsdorf, H.  
 Die Bestimmung der zweiachsigen Festigkeit des Betons.  
 Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 173 (1965).
- [33] Kupfer, H.; Hilsdorf, K.; Rüsç, H.  
 Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses.  
 Journal of the ACI Vol. 66, No. 8 (1966).
- [34] Kupfer, H.  
 Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung.  
 Lehrstuhl für Massivbau TH München.  
 Bericht Nr. 78, 1969.
- [35] Hansson, V.; Schimmelpfennig, K.  
 Concrete Strength in Multiaxial Stress States.  
 American Concrete Institute Seminar, Concrete for  
 Nuclear Reactors, Berlin 1970.
- [36] Launay, P.; Gachon, H.  
 Strain and Ultimate Strength of Concrete under  
 Triaxial Stress.  
 American Concrete Institute Seminar, Concrete for  
 Nuclear Reactors, Berlin 1970.
- [37] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N.  
 Theory of Elasticity.  
 Mc.Graw-Hill Ltd., Third Edition 1970.
- [38] Eifler, H.  
 Bericht über Vorversuche für die Ermittlung des Werkstoff-  
 und Verbundverhaltens im Bereich plastischer  
 Gelenke von Stahlbetonplatten bei statischer Belastung.  
 Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), Berlin 1969.  
 Aktenzeichen: 2.2/11 931<sup>1</sup>.
- [39] Eifler, H.; Plauk, G.  
 Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten  
 Stahlbetonkonstruktionen.  
 Bericht Teil A:  
 Experimentelle Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer  
 Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonbalken.  
 Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), Berlin 1974,  
 Aktenzeichen: Vh 221.2.221

- [ 40 ] Plauk, G.  
Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen.  
Bericht Teil B:  
Theoretische Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen.  
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), Berlin 1974,  
Aktenzeichen: Vh 221.2.221
- [ 41 ] Eifler, H.  
Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen.  
Bericht Teil C:  
Verbunduntersuchungen an Rippentorstahl unter bauteilähnlichen Verhältnissen als Grundlage zur theoretischen Ermittlung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonkonstruktionen.  
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), Berlin 1974,  
Aktenzeichen: Vh 221.2.221.
- [ 42 ] Grünberg, J.  
Berechnung von ebenen Stahlbetonflächentragwerken im gerissenen Zustand mit der Methode der Finiten Elemente.  
Werner Verlag, Düsseldorf, 1974.

# A N H A N G

---

Programmsystem zur Ermittlung des nichtlinearen Verformungsverhaltens biegebeanspruchter Stahlbetonbalken und ebener Konstruktionsbereiche.

## I. Parameterliste

NUMNP	Anzahl der Knotenpunkte
NUMEL	Anzahl der Elemente
NUMINC	Anzahl der Belastungsinkremente
MTYPE	Materialbezeichnung Beton = 1, Stahl = 2, Verbund = 3
NU	Poissonzahl
FCO	max. Druckspannung
FCF	Bruchspannung
EPF	Bruchstauchung
FTP	Zugfestigkeit
EIN	Anfangs-E-Modul der Arbeitslinie des einachsig beanspruchten Werkstoffs
XP 1, YP 1	Arbeitslinie des Betons
XP 2, YP 2	Arbeitslinie des Bewehrungsstahls
XP 3, YP 3	Arbeitslinien für den Verbund zwischen Rissen
XP 4, YP 4	Arbeitslinien für den Verbund in Rißnähe
N	Knotennummern
X, Y	Koordinaten der Knotenpunkte
UX, UY	Belastung oder Verschiebung der Knoten- punkte in X- bzw. Y-Richtung
CODE	Kennzeichnung, ob UX bzw. UY als Last oder Verschiebung zu werten sind

M	Elementnummer
IX (M, 1...4)	Elementeckpunkte I, J, K, L
IX (M, 5)	Angabe des Materials Beton = 1, Stahl = 2, Verbund = 3
T	Elementdicke
Q	Neigung des Verbundelements
SUR	Verbundfläche

## II. Eingabekarten für das Programm

1.) 2 Titelkarten (18 A 4)

2.) Kontrollkarte (3 I 5)

Spalte 1-5	Anzahl der Knotenpunkte
6-10	Anzahl der Elemente
11-15	Anzahl der Belastungsinckremente

3.) Werkstoffkennwerte (I 5, 6F 10.3)

Spalte 1-5	Beton (MTYPE = 1)
6-15	Poissonzahl
16-25	max. Druckspannung
26-35	Druckfestigkeit
36-45	Bruchstauchung
46-55	Zugfestigkeit
56-65	Anfangsmodul $E_0$

4.) Werkstoffkennwerte (I 5, 4 F 15.3)

Spalte 1-5	Bewehrungsstahl (MTYPE = 2)
6-20	Anfangsmodul $E_0$ im Druckbereich
21-35	Poissonzahl
36-50	-
51-65	Zugfestigkeit

5.) Arbeitslinie, 4 Karten (I 5, 6 F 12.5)

Spalte 1-5	Beton (MTYPE = 1)	
6-17	Dehnung	} Punkt Nr. 1
18-29	Spannung	
30-41	Dehnung	} Punkt Nr. 2
42-53	Spannung	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	

6.) Arbeitslinie, 4 Karten (I 5, 6 F 12.5)

Spalte 1-5	Stahl (MTYPE = 2)	
6-17	Dehnung	} Punkt Nr. 1
18-29	Spannung	
30-41	Dehnung	} Punkt Nr. 2
42-53	Spannung	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	

7.) Verbund zwischen Rissen, Arbeitslinien für vier verschiedene plastische Stahldehnungen

Kontrollkarte (I 5, F 12.5)

Spalte 1-5	Verbund (MTYPE = 3)
6-17	plastische Stahldehnung

Arbeitslinie, 4 Karten (I 5, 6 F 12.5)

Spalte 1-5	Verbund (MTYPE = 3)	
6-17	Verschiebung	} Punkt Nr. 1
18-29	Verbundspannung	
30-41	Verschiebung	} Punkt Nr. 2
42-53	Verbundspannung	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	

8.) Verbund in Rißnähe, Arbeitslinien für vier verschiedene plastische Stahldehnungen

(s. Eingabe 7)

9.) Koordinaten der Knotenpunkte, 1 Karte für jeden Knoten des Elementrasters (2 I 5, 4 F 12.3)

Spalte 1-5	Knotennummer
5-10	Anzeige, ob UX und UY als Last oder Verschiebung zu betrachten sind
11-22	X-Koordinate
23-34	Y-Koordinate
35-46	UX
47-58	UY

für die Kennung CODE in Spalte 1-5 ist zu setzen:

- |   |   |
|---|---|
| 0 | dann ist UX die X-Last<br>UY die Y-Last                 |
| 1 | dann ist UX die X-Verschiebung<br>UY die Y-Last         |
| 2 | dann ist UX die X-Last<br>UY die Y-Verschiebung         |
| 3 | dann ist UX die X-Verschiebung<br>UY die Y-Verschiebung |

10.) Elementkarten, 1 Karte für jedes Element (6, I 5, 3 F 12.3)

Spalte 1-5	Elementnummer
6-10	Knoten I
11-15	Knoten J
16-20	Knoten K
21-25	Knoten L
26-30	Materialkennzeichnung
	1 = Betonelement
	2 = Bewehrungsstahlelement
	3 = Verbundelement
31-42	Elementdicke
43-54	Neigung des Verbundelements
55-62	Verbundfläche

# III. Programmliste

```

PRUTUKULL
C *****
C
C NDNLINER FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE
C TWO-DIMENSIONAL STRUCTURES
C
C
C PROGRAMMED ON TR 440 BY GUENTHER PLANK
C BUNDESANSTALT FUER MATERIALPRUEFUNG (BAM)
C BERLIN 1972
C
C *****
C
C COMMON/INF,NUMNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HED(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
C 1,INDEX,EIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HED1(18),FTS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYS/EX(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1,CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2,SR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSIGR(3),
C 3,SGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
C COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C 1,YY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),FH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C 2,H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C 3,ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/MAT/XP1(12),YP1(12),XP2(12),YP2(12),XP3(12,4),YP3(12,4),
C 1,2P3(12,4),XP4(12,4),YP4(12,4),ZP4(12,4),AK1(12,4),AK2(12,4)
C COMMON/BAND/MBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C 1A(10,54),R(2000),NBL(54),R(108)
C COMMON/SEA/NUMELC(100),SIGMAC(100),NEWCRA,R(15,10),NLR
C COMMON/DUT/NREGIN,NLOAD
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C *****
C
C METHOD = 3
C
C *****
C READ ALL INPUT DATA
C *****
C CALL ENTRY(1)
C IF(NLOAD.GT.0) GOTO 192
C CALL INPUT
C
C *****
C INITIALIZE INPUT DATA FOR THE FIRST STEP OF ANALYSIS
C *****
C
C INDEX = 1
C NCYCLE = 0
C ITAG = 0
C 192 CALL INITIA
C IINC = INDEX
C WRITE(61,1000) KKK,NLOAD,INDEX,NCYCLE
C 1000 FORMAT(5X,'KKK,NLOAD,INDEX,NCYCLE')
C
C *****
C
C CALL FAIL
C IF(NLR.LE.3) GOTO 370
C GOTO 300
C 370 KKK = 0
C GOTO 300
C
C *****
C SEARCH CRACKS IN CONCRETE STRUCTURE
C *****
C
C 390 CALL SEARCH
C
C *****
C RELEASE STRESSES IN CRACKED ELEMENTS
C *****
C
C IF(NEWCRA.EQ.0) GOTO 300
C CALL NEWSTR
C
C *****
C PRINT ALL RESULTING ELEMENTAL DATA
C *****
C
C 300 CALL OUTPUT
C WRITE(61,1000) KKK,NLOAD,INDEX,NCYCLE
C *****
C FAILURE CRITERION FOR THE WHOLE STRUCTURE
C *****
C
C IF(ITAG.400,501,400)
C 400 WRITE(61,2013)
C STOP
C 501 CONTINUE
C
C IF(NEWCRA.EQ.0) GOTO 365
C KKK = 0
C GOTO(192,380,390,192),METHOD
C 365 IF(KKK.EQ.1) GOTO 356
C GOTO 500
C 356 GOTO(357,357,380,380),METHOD
C
C *****
C READ CONTROL INFORMATION
C *****
C
C 500 CONTINUE
C
C 2013 FORMAT(49H0EXECUTION TERMINATED, FAILURE CRITERION EXCEEDED)
C
C END

```

```

C THE SYSTEM IS LOADED INCREMENTALLY
C *****
C
C DU 500 INDEX=INIC,NUMINC
C
C *****
C FORM OVERALL STIFFNESS MATRIX
C *****
C
C ITAG=0
C IF(NLOAD.LT.INDEX) NLOAD= INDEX
C
C 380 CALL STIFF
C
C METHOD = IABS(METHOD)
C 397 CONTINUE
C
C ITERATION OF TOTAL STIFFNESS IN LOAD INCREMENT
C
C NCYCLE = NCYCLE + 1
C
C *****
C SOLVE FOR NODAL DISPLACEMENTS
C *****
C
C CALL BAND
C
C DU 360 N=1,NUMNP
C BB(2*N-1)=BB(2*N-1)+B(2*N-1)
C BB(2*N) =BB(2*N) +B(2*N)
C 360 CONTINUE
C
C *****
C CALCULATE ELEMENTAL FORCES AND STRESSES
C *****
C
C CALL STRESS
C
C *****
C APPROXIMATION OF THE REAL STATE OF ELEM. STRESSES
C *****
C
C CALL NEWSTR
C
C IF(KKK.EQ.1) GOTO 300
C
C *****
C CHECK THE STATE OF STRESS AND DEFORMATION FOR
C ELEMENTAL FAILURE
C *****
C
C SUBROUTINE INPUT
C
C SUBROUTINE READS AND PRINTS INPUT DATA
C
C *****
C LEGEND
C *****
C
C NUMNP NUMBER OF NODAL POINTS
C NUMEL NUMBER OF ELEMENTS
C NUMINC NUMBER OF LOADING CYCLES
C
C MTYPE = 1 CONCRETE
C NU POISSON'S RATIO
C FCO COMPRESSIVE STRENGTH
C FCF COMPRESSION FAILURE STRENGTH
C EPF COMPRESSION FAILURE STRAIN
C FTP TENSION FAILURE STRENGTH
C
C MTYPE = 2 STEEL
C D(2,1) E-MODULUS DIRECTION 1
C D(2,2) NU
C D(2,3) E-MODULUS DIRECTION 2
C FTS TENSION FAILURE STRAIN
C
C MTYPE = 3 BOND BETWEEN CONCRETE AND STEEL
C VK VERTICAL LINKAGE STIFFNESS
C DHLIM LINKDISPLACEMENT AT PEAK BOND STRESS
C SDHLIM MAXIMUM OF BOND SLIP
C D(3,1) TANGENTSLOPE OF BOND CURVE FOR FIRST STEP
C D(3,2) ELEMENT NEAR CRACK SURFACE
C D(3,3) VERTICAL STIFFNESS VK
C *****
C
C COMMON/INF,NUMNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HED(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
C 1,INDEX,EIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HED1(18),FTS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYS/EX(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1,CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2,SR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSIGR(3),
C 3,SGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
C COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C 1,YY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),FH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C 2,H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C 3,ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/MAT/XP1(12),YP1(12),XP2(12),YP2(12),XP3(12,4),YP3(12,4),
C 1,2P3(12,4),XP4(12,4),YP4(12,4),ZP4(12,4),AK1(12,4),AK2(12,4)
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C REAL NU
C *****
C READ CONTROL INFORMATION
C *****
C
C READ(60,1000) HED, HED1,NUMNP,NUMEL,NUMINC
C WRITE(61,2000) HED, HED1,NUMNP,NUMEL,NUMINC
C *****
C
C READ MATERIAL PROPERTIES

```

```

C *****
C
C CONCRETE
READ(60,1005) MTYPE, NU, FCD, FCF, EPF, FTP, EIN
O(1,1)=EIN
O(1,2)=NU
O(1,3)=EIN
WRITE(61,2010) MTYPE, FCD, FCF, EPF, FTP, (O(1,1), I=1,3)

C
C STEEL
READ(60,1001) MTYPE, (O(2,1), I=1,3), FTS
WRITE(61,2011) MTYPE, FTS, (O(2,1), I=1,3)

C
C BOND
READ(60,1005) MTYPE, DHLIM, SDHLIM, (O(3,1), I=1,3)
O(3,3)=1, E+10
VK=O(3,3)
WRITE(61,2014) MTYPE, VK, DHLIM, SDHLIM

C
C *****
C
C READ PROPERTIES FOR STRESS-STRAIN RELATIONSHIP CURVES
C *****
C
C CONCRETE
WRITE(61,2006)
I1=1
I2=3
DO 30 K=1,4
READ(60,1007) MTYPE, (XP1(I), YP1(I), I=1,12)
I1=I1+3
I2=I2+3
30 WRITE(61,2005) (XP1(I), YP1(I), I=1,12)

C
C STEEL
WRITE(61,2007)
I1=1
I2=3
DO 35 K=1,4
READ(60,1007) MTYPE, (XP2(I), YP2(I), I=1,12)
I1=I1+3
I2=I2+3
35 WRITE(61,2005) (XP2(I), YP2(I), I=1,12)

C
C LINKAGE
WRITE(61,2008)
DO 40 L=1,4
READ(60,1008) MTYPE, PLSTR
WRITE(61,2018) PLSTR
I1=1
I2=3
DO 45 K=1,4
READ(60,1007) MTYPE, (XP3(I,L), YP3(I,L), I=1,12)

```

```

I1=I1+3
I2=I2+3
45 WRITE(61,2005) (XP3(I,L), YP3(I,L), I=1,12)
DO 46 I=1,12
46 ZP3(I,L) = PLSTR
40 CONTINUE
CALL BONDSU (XP3, YP3, ZP3, AK1)
WRITE(61,2019)
DO 49 L=1,4
READ(60,1008) MTYPE, PLSTR
WRITE(61,2018) PLSTR
I1=1
I2=3
DO 50 K=1,4
READ(60,1007) MTYPE, (XP4(I,L), YP4(I,L), I=1,12)
I1=I1+3
I2=I2+3
50 WRITE(61,2005) (XP4(I,L), YP4(I,L), I=1,12)
DO 51 I=1,12
51 ZP4(I,L) = PLSTR
49 CONTINUE
CALL BONDSU (XP4, YP4, ZP4, AK2)

C
C *****
C
C READ NODAL POINT DATA OF THE STRUCTURE
C *****
C
C
C DO 53 N=1,1000
UX(N)=0.0
UY(N)=0.0
53 CONTINUE
KZEILE=0
WRITE(61,2004)
L=0
60 READ(60,1002) N, CODE(N), X(N), Y(N), UX(N), UY(N)
NL=L+1
ZX=N-L
IF(L.EQ.0)GOTO 70
DX=(X(N)-X(L))/ZX
DY=(Y(N)-Y(L))/ZY
70 L=L+1
IF(N-L)100,90,80
80 CODE(L)=0.0
X(L)=X(L-1)+DX
Y(L)=Y(L-1)+DY
UX(L)=0.0
UY(L)=0.0
GO TO 70
90 DO 91 K=NL,N
KZEILE=KZEILE+1
IF (KZEILE,LT,40)GOTO 91
WRITE(61,2004)
KZEILE=1
91 WRITE(61,2002) K, CODE(K), X(K), Y(K), UX(K), UY(K)
IF(NUMNP-N)100,110,60
100 WRITE(61,2009)N
STOP
110 CONTINUE
C
C *****

```

```

C
C READ ELEMENT PROPERTIES OF THE STRUCTURE
C *****
C
C KZEILE=0
WRITE(61,2001)
N=0
130 READ(60,1003) M, (IX(M), I=1,5), T(M), Q(M), SUR(M)
140 N=N+1
IF(M-N)170,170,150
150 IX(N,1)=IX(N-1,1)+1
IX(N,2)=IX(N-1,2)+1
IX(N,3)=IX(N-1,3)+1
IX(N,4)=IX(N-1,4)+1
IX(N,5)=IX(N-1,5)
T(N)=T(N-1)
Q(N)=Q(N-1)
SUR(N)=SUR(N-1)
170 KZEILE=KZEILE+1
IF (KZEILE,LT,42)GOTO 171
WRITE(61,2001)
KZEILE=1
171 WRITE(61,2003) N, (IX(N,I), I=1,5), T(N), Q(N), SUR(N)
IF(M-N)180,180,140
180 IF(NUMEL-N)190,190,130
190 CONTINUE

C
C *****
C
1000 FORMAT(18A4/, 18A4/3I5)
1001 FORMAT(15,4F15,3)
1002 FORMAT(15,15, 4F12,3)
1003 FORMAT(6I5,3F12,3)
1005 FORMAT(15,6F10,3)
1007 FORMAT(15,6F12,5)
1008 FORMAT(15,F12,5)
2000 FORMAT(1H1 18A4/, 18A4/
130H0 NUMBER OF NODAL POINTS----- I3 /
230H0 NUMBER OF ELEMENTS----- I3 /
330H0 MAX NUMBER OF INCREMENTS---- I3)
2001 FORMAT(1H1/ 15X,
1 85H ELEMENT NO. I J K L MATERIAL REL
1THICK LINK SLOPE BOND SURF./ 16X,84(1H=))
2002 FORMAT(5X, 112,112,2F12,3,2E24,7)
2003 FORMAT(15X, 113,416,112,3F12,4)
2004 FORMAT(1H1/ 5X,
1 96H NODAL POINT TYPE X-ORDINATE Y-ORDINATE X LDA
1D OR DISPLACEMENT Y LOAD OR DISPLACEMENT./ 6X,95(1H=))
2005 FORMAT( 6X, 2(5X, E13,6,3X,E13,6))
2006 FORMAT(1H0, 'CONCRETE STRESS-STRAIN-CURVE' / / 5X,
1 2(9X, 'STRAIN',10X,'STRESS ')/
2 6X, 2(24X,'(KP/CM**2)'))
2007 FORMAT(1H0, 'STEEL STRESS-STRAIN-CURVE' / / 5X
1 2(9X, 'STRAIN',10X,'STRESS ')/
2 6X, 2(24X,'(KP/CM**2)'))
2008 FORMAT(1H0, 'LINKAGE BOND-SLIP THREE-DIMENSIONAL SURFACE'//5X
1 2(9X,'SLIP (CM)',7X,'STRESS ')/
2 6X, 2(24X,'(KP/CM**2)'))
2009 FORMAT(26H0NODAL POINT CARD ERROR N= 15)
2010 FORMAT(1H0 'CONCRET MATERIAL TYPE = 1 15
1/ 20X 'ULT,STRESS IN COMPRESSION = 'F10.2 ' KP/CM**2'
2/ 20X 'FAIL,STRESS IN COMPRESSION = 'F10.2 ' KP/CM**2'

```

```

3/ 20X 'FAIL,STRAIN IN COMPRESSION = 'F10.2
4/ 20X 'FAIL,STRESS IN TENSION = 'F10.2 ' KP/CM**2'
5/ 4X 'INITIAL VALUES '
6/ 20X 'E-MODUL IN COMPRESSION = 'F10.2 ' KP/CM**2'
7/ 20X 'POISSON S RATIO = 'F10.2
8/ 20X 'E-MODUL IN TENSION = 'F10.2 ' KP/CM**2'
2011 FORMAT(1H0 'STEEL MATERIAL TYPE = 1 15
1/ 20X 'FAIL,STRESS IN TENSION = 'F10.2 'KP/CM**2'
2/4X 'INITIAL VALUES'
3/ 20X 'E-MODUL IN COMPRESSION = 'F10.2 'KP/CM**2'
4/ 20X 'POISSON S RATIO = 'F10.2
5/ 20X 'E-MODUL IN TENSION = 'F10.2 'KP/CM**2' )
2014 FORMAT(26H0LINKAGE MATERIAL TYPE=15,3X 20HVERTICAL STIFFNESS=
1E13,6/ 31X 39H LINK DISPLACEMENT AT PEAK BOND STRESS=F10,6,3X
321HFAILURE DISPLACEMENT=F10,6)
2018 FORMAT(1H0 'PLASTIC STEEL STRAIN = ' F6,4 )
2019 FORMAT(1H0, 'LINKAGE BOND-SLIP THREE-DIMENSIONAL SURFACE (BETWE
IN CRACKS)' // 5X
2 2(9X,'SLIP (CM)',7X,'STRESS ')/
3 6X, 2(24X,'(KP/CM**2)'))

C
C RETURN
END

```



```

SUBROUTINE BONDSU (XP,YP,ZP,AK)
C
C
C MATERIAL PROPERTIES FOR LINKAGE ELEMENTS
C CALCULATE MATRIX OF AK-VALUES FOR BONDSTRESS POLYNOMIALS
C
C DIMENS(04) XP(12,4),YP(12,4),ZP(12,4),AK(12,4),Z(3,3),A(3,3)
C L,AD(3,3),AK(12,4),CD(3)
C REAL NDET
C
C XP BONDSTRESS
C YP BONDSTRESS
C ZP PLASTIC STEELSTRAIN
C
C CALCULATE COEFFICIENTS OF POLYNOMIALS
C Y = A1 + A2*Z + A3*Z**2 + A4*Z**3
C
C Z(1,1) = ZP(1,2)
C Z(2,1) = ZP(1,3)
C Z(3,1) = ZP(1,4)
C Z(1,2) = Z(1,1)**2
C Z(2,2) = Z(2,1)**2
C Z(3,2) = Z(3,1)**2
C Z(1,3) = Z(1,1)**3
C Z(2,3) = Z(2,1)**3
C Z(3,3) = Z(3,1)**3
C
C DO 10 I=1,3
C DO 10 K=1,3
C 10 A(I,K) = Z(I,K)
C
C CALL DETER(A,DET)
C
C NDET = DET
C
C FOR X = 0
C DO 15 I=1,4
C 15 AK(I,1) = 0.0
C
C DO 50 L=2,12
C AK(L,1) = YP(L,1)
C CD(1) = YP(L,2) - YP(L,1)
C CD(2) = YP(L,3) - YP(L,1)
C CD(3) = YP(L,4) - YP(L,1)
C DO 40 I=1,3
C DO 30 KK=1,3
C DO 30 K=1,3
C IF(K,L,I) GO TO 20
C AD(KK,K) = Z(KK,K)
C GO TO 30
C 20 AD(KK,K) = CD(KK)
C 30 CONTINUE
C
C CALL DETER(AD,DET)
C 40 AK(L,I+1) = + DET/NDET
C
C 50 CONTINUE
C
C RETURN
C END
C
C 205 IF(NOWRIT, EQ, 0) GO TO 207
C KZEILE=KZEILE+1
C IF(KZEILE.LT.57) GO TO 206
C WRITE(61,2015)IND
C KZEILE=1
C 206 WRITE(61,2015)N,IXN,(E(N,I),I=1,3)
C 207 CONTINUE
C
C *****
C DETERMINE BAND WIDTH OF STIFFNESS MATRIX
C *****
C
C J=0
C DO 340 N=1,NUMEL
C DO 340 I=1,4
C DO 325 L=1,4
C KK=IABS (IX(N,I)-IX(N,L))
C IF(KK-J)325,325,320
C 320 J=KK
C 325 CONTINUE
C 340 CONTINUE
C Mband=2*J+2
C NEQB = 54
C NEQ = 2*NUMNP
C NSB = NEQB*Mband
C NRED = 1
C NDRG = 2
C NEWCRA=0
C KKK = 0
C
C *****
C INITIALIZE ACCUMULATIVE DISPLACEMENTS, STAINS, STRESSES, FORCES
C FOR THE FIRST STEP
C *****
C
C DO 347 N=1,NUMNP
C BB(2*N-1)=0.0
C 347 BB(2*N)=0.0
C DO 350 N=1,NUMEL
C DO 348 I=1,3
C 348 SXX(N,I)=0.0
C DO 349 I=1,7
C 349 SSI(N,I)=0.0
C IF(CRACK(N),EQ,1) GO TO 350
C EPS(N)=0.0
C 350 CONTINUE
C 600 CONTINUE
C
C 2015 FORMAT(2110,3(4X,E13.6))
C 2017 FORMAT(1H1/ 45H0 MATERIAL PROPERTIES FOR LOAD INCREMENT NO,15/
C 1/ 3X
C 168HELEMENT MATERIAL E-MODUL 1 UK POISS,RATIO DR E-MODUL
C 32 DR, / 24X 45HLINKAGE HK LINKAGE DH LINKAGE VK, /
C 43X 68(1H-))
C
C RETURN
C END

```

```

SUBROUTINE INITIA
C
C
C SUBROUTINE FOR INITIALIZING INPUT DATA FOR ANALYSIS
C
C
C COMMON/INF/NUMNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HEQ(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
C I,INDEX,EIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HEU1(18),FPTS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYSTE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1,CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2,SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSI(3),
C 3,SGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
C COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C 1,YYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C 2,H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C 3,ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/BANARG/MBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C 1A(108,54),B(2000),NBL(54),R(108)
C COMMON/SEA/NUMELC(100),SIGMAC(100),NEWCRA,RISS(15,10),NLR
C COMMON/DUT/NBEGIN,NLOAD
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C REAL NU
C IF(NLOAD,GT,0,AND,METHOD,EQ,2) GO TO 600
C IF(NLOAD,GT,0,AND,METHOD,EQ,3) GO TO 600
C IF(NLOAD,EQ,0) GO TO 100
C INDEX = 1
C 100 IF(NLOAD,GT,1) GO TO 192
C DO 191 N=1,NUMEL
C 191 CRACK(N) = 0
C NDRUCK = 1
C 192 CONTINUE
C DO 193 N=1,1000
C BREL(2*N) = 0.0
C BREL(2*N-1) = 0.0
C 193 CONTINUE
C
C *****
C ASSIGN ELEMENT MATERIAL PROPERTIES OF THE STRUCTURE
C *****
C
C NOWRIT = 0
C IND=1
C IF(NOWRIT, EQ, 0) GO TO 199
C KZEILE=0
C WRITE(61,2017)IND
C 199 DO 207 N=1,NUMEL
C IXN=IX(N,5)
C GO TO(195,200,201),IXN
C 201 E(N,1)=0(3,1)*SUR(N)
C IF(NLOAD,GT,0) GO TO 202
C E(N,2)=0(3,2)
C 202 E(N,3)=U(3,3)
C GO TO 205
C 195 E(N,1)=0(1,1)
C E(N,2)=0(1,2)
C E(N,3)=0(1,3)
C GO TO 205
C 200 E(N,1)=0(2,1)
C E(N,2)=0(2,2)
C E(N,3)=0(2,3)
C
C
C SUBROUTINE STIFF
C
C COMMON/INF/NUMNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HEQ(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
C I,INDEX,EIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HEU1(18),FPTS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYSTE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1,CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2,SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSI(3),
C 3,SGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
C COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C 1,YYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C 2,H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C 3,ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/BANARG/MBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C 1A(108,54),B(2000),NBL(54),R(108)
C COMMON/SEA/NUMELC(100),SIGMAC(100),NEWCRA,RISS(15,10),NLR
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C
C
C INITIALIZATION
C
C REWIND NDRG
C REWIND NRED
C NB=27
C NU=2*NB
C ND2=2*ND
C STOP=0.0
C NUMBLK=0
C
C DO 10 N=1,2000
C 10 B(N)=0.0
C DO 50 N=1,ND2
C R(N)=0.0
C DO 50 M=1,ND
C 50 A(N,M)=0.0
C
C FORM STIFFNESS MATRIX IN BLOCKS
C
C 60 NUMBLK=NUMBLK+1
C NH=NB*(NUMBLK+1)
C NM=NH-NB
C NL=NM-NB+1
C KSHIFT=2*NL-2
C
C DO 210 N=1,NUMEL
C
C IF(IX(N,5))210,210,65
C 65 DO 80 I=1,4
C IF(IX(N,I)-NL)80,70,70
C 70 IF(IX(N,I)-NM)90,90,80
C 80 CONTINUE
C GO TO 210
C
C 90 CALL SUBSTI
C
C IX(N,5)=-IX(N,5)
C
C IF(VOL)142,142,144
C 142 WRITE(61,2003)N
C STOP=1.0
C 144 IF(IX(N,3)-IX(N,4))145,165,145
C 145 DO 150 I=1,9

```

```

C1=S(I1,10)/S(10,10)
P(I1)=P(I1)-C1*P(10)
DO 150 JJ=1,9
150 S(I1,JJ)=S(I1,JJ)-C1*S(10,JJ)
C
DO 161 I1=1,8
C1=S(I1,7)/S(9,9)
P(I1)=P(I1)-C1*P(9)
DO 160 JJ=1,8
160 S(I1,JJ)=S(I1,JJ)-C1*S(9,JJ)
161 CONTINUE
C
ADD ELEMENT STIFFNESS TO TOTAL STIFFNESS
C
165 DO 166 I=1,4
166 LM(I)=2*IX(N,1)-2
C
DO 200 I=1,4
DO 200 K=1,2
II=LM(I)+K-KSHIFT
KK=2*I-2+K
R(II)=R(II)+P(KK)
DO 200 J=1,4
DO 200 L=1,2
JJ=LM(J)+L-II+1-KSHIFT
LL=2*J-2+L
IF(JJ,200,200,175)
175 IF(ND-JJ)180,195,195
180 WRITE(61,2004)N
STOP=1.0
GO TO 210
195 A(II,JJ)=A(II,JJ)+S(KK,LL)
200 CONTINUE
IF(N,LT,65) GO TO 210
IF(N,GT,64) GO TO 210
WRITE(61,1000) N
WRITE(61,1001) ((S(KK,LL),LL=1,10),KK=1,10)
1000 FORMAT(3X,'ELEMENT NR. = ',15)
1001 FORMAT(1X,10E13,6)
210 CONTINUE
C
ADD CONCENTRATED FORCES WITHIN BLOCK
C
FAC = 1.00
IND = 1
IF(METHOD,4) IND = 1
DO 300 IL = 1,IND
IF(IND,GT,4) FAC = 0.150
DO 250 N=NL,NM
IF(N,GT,NUMNP) GO TO 250
K = 2*N - KSHIFT
KQ=CODE(N)
IF(KQ)260,261,260
260 GO TO (264,263,250),KQ
261 R(K)=R(K)+UY(N)* FAC
263 R(K-1)=R(K-1)+UX(N)* FAC
GO TO 250
264 R(K)=R(K)+UY(N)* FAC
250 CONTINUE
300 CONTINUE

```

DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS

SUBROUTINE SUPSTI

```

COMMON/INT/NUMNP,NUMEL,N,VOL,HTYPE,HED(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
INDEX,EIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLM,FCF,HEU(18),ETS
2/METHOD,NURUCK
COMMON/SYSTE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
ICRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
2SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSIGR(3),
3SIGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
COMMON/ARG/Q(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
1YYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
2H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),X(10),EE(7),FF(2),SPX(2),DI(6,6),
3ALPHA,DUHMI(8),SPX2(2),LSA
COMMON/BANARG/HBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NURG,NRED,NCYCLE,
1A(108,54),B(2000),MBL(54),R(108)
INTEGER CODE,CPACK,RISS,CRACKL
DEFINEFILE 4 (1000,1500,U,KSA)

```

NODAL POINTS OF ELEMENT

```

I=IX(N,1)
J=IX(N,2)
K=IX(N,3)
L=IX(N,4)
HTYPE=IX(N,5)
C
DO 50 II=1,10
P(II)=0.0
DO 50 JJ=1,10
50 S(II,JJ)=0.0
IF(IX(N,2)-IX(N,4))81,60,81
C
FORM LINKAGE STIFFNESS
C
60 CCC=CUS(Q(N))
SSS=SI(Q(N))
C
61 HK=E(N,1)
63 S(1,1)=HK*CCC*CCC+VK*SSS*SSS
S(1,2)=HK*SSS*CCC-VK*CCC*SSS
S(1,3)=-S(1,1)
S(1,4)=-S(1,2)
S(2,2)=HK*SSS*SSS+VK*CCC*CCC
S(2,3)=-S(1,2)
S(2,4)=-S(2,2)
S(3,3)=S(1,1)
S(3,4)=S(1,2)
S(4,4)=S(2,2)
DO 62 KK=1,4
DO 62 LL=1,4
62 S(LL,KK)=S(KK,LL)
VOL=1.0
MMM=IX(N,1)
XXX(5)=X(MMM)
YYY(5)=Y(MMM)

```

```

WRITE LINKAGE PROPERTIES ON TAPE
C
KSA = N

```

```

C
DO 400 M=NL,NH
IF(M-NUMNP)315,315,400
315 U=UX(M)
N=2*M-1-KSHIFT
IF(CODE(M))390,400,316
316 IF(CODE(M)-1)317,370,317
317 IF(CODE(M)-2)318,390,318
318 IF(CODE(M)-3)390,380,390
370 CALL BOUND(ND2,N,U)
GO TO 400
380 CALL BOUND(ND2,N,U)
390 U=UY(M)
N=N+1
CALL BOUND(ND2,N,U)
400 CONTINUE
C
WRITE BLOCK OF EQUATIONS ON TAPE AND SHIFT UP LOWER BLOCK
C
WRITE(NDRG) ((A(N,M),N=1,ND),M=1,MBAND)
C
DO 420 N=1,ND
K=N+ND
NN=N+KSHIFT
B(NN) = R(N)
R(N) = R(K)
R(K) = 0.0
DO 420 M=1,ND
A(N,M) = A(K,M)
420 A(K,M) = 0.0
C
CHECK FOR LAST BLOCK
C
IF(NM-NUMNP)60,480,480
480 CONTINUE
C
COMPILED STIFFNESS MATRIX ON TAPE
C
IF(NEWCRA,GT,0,OR,KKK,EQ,1)GO TO 371
DO 485 N=1,NEQ
485 B(N) = B(N) + BREL(N)
WRITE(NRED) (B(N),N=1,NEQ)
C
371 CONTINUE
KKK = 0
IF(STOP)490,500,490
490 STOP
500 RETURN
C
2003 FORMAT (26HNEGATIVE AREA ELEMENT NO, I4)
2004 FORMAT (29HOBAND WIDTH EXCEEDS ALLOWABLE I4)
END

```

```

WRITE(4,KSA)HK,VK,XXX(5),YYY(5)
GO TO 130

```

FORM PLANE ELEMENT STIFFNESS

```

81 IF(E(N,3),EQ,0.0) E(N,3) = 100.0
DO 105 KK=1,3
105 EE(KK)=E(N,KK)

```

E(N,1) , E(N,3) E-MODUL IN THE TWO PRINCIPAL DIRECTIONS UNCRACKED ELEMENTS

```

VV=EE(1)/EE(3)
COMM=EE(3)/(1-VV*EE(2)**2)
DO 83 L1=1,3
DO 83 L2=1,3
83 C(L1,L2)=0.0
IF(CRACK(N),EQ,1) GO TO 85
C(1,1)=COMM*VV
C(1,2)=COMM*EE(2)*VV
C(1,3)=0.0
C(2,1)=C(1,2)
C(2,2)=COMM
C(2,3)=0.0
C(3,1)=0.0
C(3,2)=0.0
C(3,3)=5*EE(3)/(1+EE(2))
GO TO 87

```

E-MODUL IN DIRECTION 1 IS EQUAL ZERO

```

85 EE(1) = 1.0E+02
C(2,2)=EE(3)
C(1,1)=EE(1)
C(3,3)= EE(1)/(2.*(1+EE(2)))

```

```

87 SS=SIN(EPS(N))
C1=COS(EPS(N))
S2=SS*SS
C2=C1*C1
SC=SS*C1

```

```

D(1,1)=C2
D(1,2)=S2
D(1,3)=+SC
D(2,1)=S2
D(2,2)=C2
D(2,3)=-SC
D(3,1)=-2.*SC
D(3,2)=+2.*SC
D(3,3)=-S2+C2

```

```

DO 88 II=1,3
DO 88 JJ=1,3
H(II,JJ)=0.0
DO 88 KK=1,3
88 H(II,JJ) = H(II,JJ)+C(II,KK)*D(KK,JJ)

```

```

DO 89 II=1,3
DO 89 JJ=1,3
C(II,JJ)=0.0

```

```

      DD 89 KK=1,3
      *9 C(II, JJ)=C(II, JJ)+D(KK, II)*H(KK, JJ)
C
C      FORM QUADRILATERAL STIFFNESS MATRIX
C
      XXX(5)=(X(I)+X(J)+X(K)+X(L))/4.0
      YYY(5)=(Y(I)+Y(J)+Y(K)+Y(L))/4.0
      DD 94 M=1,4
      MM=IX(N,M)
      XXX(M)=X(MM)
      YYY(M)=Y(MM)
C
      DD 95 II=1,10
      DD 95 JJ=1,6
      *95 HH(JJ, II)=0.0
      DD 119 II=1,4
      JJ=IX(N, II)
      119 ANGLE(II)= ARS( CODE(JJ)/57.3 )
C
      VOL=0.0
C
      IF(IX(N,3)-IX(N,4))125,120,125
      120 CALL TRISTI (1,2,3)
      XXX(5)=(XXX(1)+XXX(2)+XXX(3))/3.0
      YYY(5)=(YYY(1)+YYY(2)+YYY(3))/3.0
      GO TO 130
C
      125 CALL TPISTI (4,1,5)
      CALL TRISTI (1,2,5)
      CALL TRISTI (2,3,5)
      CALL TRISTI (3,4,5)
C
      DD 140 II=1,6
      DD 140 JJ=1,10
      140 HH(II, JJ)=HH(II, JJ)/4.0
C
      WRITE CONCRETE OR STEEL PROPERTIES ON TAPE
C
      KSA= N
      WRITE(4, KSA)S, HH, XXX(5), YYY(5), C, VOL
C
      130 RETURN
C
      END

```

```

      SUBROUTINE TRISTI (II, JJ, KK)
C
      COMMON/INP/NUMNP, NUMEL, N, VOL, MTYPE, HED(18), HK, VK, NUMINC, DHLIM,
      IINDEX, EIN, EPO, FTP, ITAG, SDHLIM, FCF, HED1(18), FTS
      2, METHOD, NDRUCK
      COMMON/SYST/X(1000), Y(1000), UX(1000), UY(1000), CODE(1000),
      1CRACK(1000), CRACKL(1000,2), IX(1000,3), EPS(1000), Q(1000), T(1000),
      2SUR(1000), SSG(1000,7), E(1000,3), SXX(1000,5), BB(2000), SSGR(3),
      3SIGP(3), SIGH(3,2), DSIG(3), BREL(2000), DSIGH(2)
      COMMON/ARG/D(3,3), ANGLE(4), CH(4), CV(4), CC(3), SIG(10), XXX(5),
      1YYY(5), S(10,10), P(10), LM(4), DD(3,3), MH(6,10), XX(4), YY(4), C(3,3),
      2H(6,10), D(6,6), F(6,10), TP(6), XI(10), EE(7), FF(2), SPX1(2), DI(6,6),
      3ALPHA, DUMMI(8), SPX2(2), LSA
      INTEGER CODE, CRACK, RISS, CRACKL
C
      1. INITIALIZATION
C
      LM(1)=II
      LM(2)=JJ
      LM(3)=KK
C
      XX(1)=XXX(II)
      XX(2)=XXX(JJ)
      XX(3)=XXX(KK)
      XX(4)=XXX(II)
      YY(1)=YYY(II)
      YY(2)=YYY(JJ)
      YY(3)=YYY(KK)
      YY(4)=YYY(II)
C
      *85 DD 100 I=1,6
      DD 90 J=1,10
      F(I, J)=0.0
      90 H(I, J)=0.0
      DD 100 J=1,6
      100 D(I, J)=0.0
C
      3. FORM INTEGRAL (G)T*(C)*(G)
C
      COMM=XX(2)*(YY(3)-YY(1))+XX(1)*(YY(2)-YY(3))+XX(3)*(YY(1)-YY(2))
      XI(1)=T(N)*COMM/2.0
      104 VOL=VOL+XI(1)
C
      D(2,2)=XI(1)*C(1,1)
      D(2,3)=XI(1)*C(1,3)
      D(2,5)=XI(1)*C(1,3)
      D(2,6)=XI(1)*C(1,2)
      D(3,3)=XI(1)*C(3,3)
      D(3,5)=XI(1)*C(3,3)
      D(3,6)=XI(1)*C(3,2)
      D(5,5)=XI(1)*C(3,3)
      D(5,6)=XI(1)*C(3,2)
      D(6,6)=XI(1)*C(2,2)
C
      108 DD 110 I=1,6
      DD 110 J=1,6
      110 D(J, I)=D(I, J)
C
      4. FORM COEFFICIENT-DISPLACEMENT TRANSFORMATION MATRIX

```

```

C
      DD(1,1)=(XX(2)*YY(3)-XX(3)*YY(2))/COMM
      DD(1,2)=(XX(3)*YY(1)-XX(1)*YY(3))/COMM
      DD(1,3)=(XX(1)*YY(2)-XX(2)*YY(1))/COMM
      DD(2,1)=(YY(2)-YY(3))/COMM
      DD(2,2)=(YY(3)-YY(1))/COMM
      DD(2,3)=(YY(1)-YY(2))/COMM
      DD(3,1)=(XX(3)-XX(2))/COMM
      DD(3,2)=(XX(1)-XX(3))/COMM
      DD(3,3)=(XX(2)-XX(1))/COMM
C
      DD 120 I=1,3
      J=2*LM(I)-1
      H(1, J)=DD(1, I)
      H(2, J)=DD(2, I)
      H(3, J)=DD(3, I)
      H(4, J+1)=DD(1, I)
      H(5, J+1)=DD(2, I)
      120 H(6, J+1)=DD(3, I)
C
      ROTATE UNKNOWN'S IF REQUIRED
C
      DD 125 J=1,2
      I=LM(J)
      IF(ANGLE(I)) 122,125,125
      122 SINA =SIN (ANGLE(I))
      COSA=COS (ANGLE(I))
      IJ=2*I
      DD 124 K=1,6
      TEM=H(K, IJ-1)
      H(K, IJ-1)=TEM*COSA+H(K, IJ)*SINA
      124 H(K, IJ)= -TEM*SINA+H(K, IJ)*COSA
      125 CONTINUE
C
      5. FORM ELEMENT STIFFNESS MATRIX (H)T*(D)*(H)
C
      DD 130 J=1,10
      DD 130 K=1,6
      IF(H(K, J))128,130,128
      128 DD 129 I=1,6
      129 F(I, J)=F(I, J)+D(I, K)*H(K, J)
      130 CONTINUE
C
      DD 140 I=1,10
      DD 140 K=1,6
      IF(H(K, I))138,140,138
      138 DD 139 J=1,10
      139 S(I, J)=S(I, J)+H(K, I)*F(K, J)
      140 CONTINUE
C
      FORM STRAIN TRANSFORMATION MATRIX
C
      DD 410 I=1,6
      DD 410 J=1,10
      410 HH(I, J)=HH(I, J)+H(I, J)
C
      RETURN
C
      END

```

```

      SUBROUTINE BOUND(ND2, N, U)
C
      COMMON/BANARG/PBAND, NUMBLK, NEQ, NEQB, NSB, KKK, NORG, NRED, NCYCLE,
      IA(108,54), B(2000), NBL(54), R(108)
C
      DD 250 M=2, MBAID
      K=N+M+1
      IF(K)235,235,230
      230 R(K)=R(K)-A(K, M)*U
      A(K, M)=0.0
      235 K=N+M-1
      IF(ND2-K)250,240,240
      240 R(K)=R(K)-A(N, M)*U
      A(N, M)=0.0
      250 CONTINUE
      A(N, 1)=1.0E+04
      R(N)=U
C
      RETURN
C
      END

```

```

SUBROUTINE BAND
C
C
C *****
C OUT OF CORE BANDSOLVER FOR SYMMETRIC, POSITIVE DEFINITE MATRIX
C RESTRICTION BANDWIDTH=MBAND, LT, NEQB = THE NUMBER OF EQUATIONS
C PER BLOCK. SPARSITY IS ACCOUNTED FOR BY SKIPPING INNERMOST DO-
C LOOP EITHER IF MULTIPLIER C(I,K)=0 WITHIN BAND OR IF A(I,J)=0
C AT THE EDGE OF THE BAND BY VARYING THE BAND WIDTH WITH 45 DEGR
C SHAPES, IF PIVOT=0 ALGORITHM SKIPS ASSOCIATED EQUATION
C *****
C A(NSB) LEADING BLOCK OF RECTIFIED BANDMATRIX (IN SINGLE
C SUBSCRIPYS) - OVERWRITTEN BY REDUCED A
C AA(NSB) TRAILING BLOCK OF RECTIFIED BANDMATRIX (IN SINGLE
C SUBSCRIPYS), PART OF IT IS OVERWRITTEN BY
C REDUCTION OF A
C B(NEQ) TOTAL LOADVECTOR, ONE AT A TIME, IS OVERWRITTEN
C BY SOLUTION VECTOR
C NBL(NEQB) VARIABLE BAND VECTOR FOR LEADING BLOCK
C NEQ TOTAL NUMBER OF EQUATIONS
C NEQB NUMBER OF EQUATIONS PER BLOCK
C MBAND MAXIMUM WIDTH OF HALF BAND
C NSB=NEQB*MBAND STORAGE PER BLOCK
C NUMBL=(NEQ-1)/NEQB+1 NUMBER OF BLOCKS
C KKK,LE,1 REDUCTION OF A AND B WITH BACKSUBSTITUTION
C KKK,EQ,1 REDUCTION OF B WITH BACKSUBSTITUTION
C FILES
C NDRG FILE FOR ORIGINAL MATRIX A, OVERWRITTEN BY
C SOLUTION VECTOR AND LOAD VECTORS FOR CASES,GT,1
C NRED FILE WITH FIRST LOAD VECTOR, OVERWRITTEN BY
C REDUCED MATRIX A DURING DECOMPOSITION
C COMMON/BANARG/MBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C IA(2916),AA(2916),B(2000),NBL(54),R(108)
C
C *****
C INITIALIZATION
C
C MB=MBAND-1
C INC=NEQB-1
C IF(KKK,EQ,1) GOTO 800
C
C DECOMPOSITION OF MATRIX A BLOCK BY BLOCK
C
C REWIND NDRG
C REWIND NRED
C READ(NDRG)(A(N),N=1,NSB)
C READ(NRED)(B(N),N=1,NEQ)
C REWIND NRED
C
C DO 700 N=1,NUMBLK
C
C DO 300 I=1,NEQB
C D = A(I)
C IF(D) 120,300,130
C 120 M=NEQB*(N-1)+I
C WRITE(A(1),1000)M,D
C 1000 FURHAT(// 204 PIVOT IS NEGATIVE /
C * 26 H DIAGONAL TERM OF EQUATION 16,8H EQUALS 1PE(2,5/)

```

```

C ESTABLISH VARIABLE BANDWIDTH
C
C 130 DO 140 J=NEQB,NSB,NEQB
C K11 = NSB -J+1
C IF( A(K11) )NE,0,0) GOTO 150
C 140 CONTINUE
C 150 NBL(I)= NSB-J+1
C
C JL = I+1
C MAX = NBL(I)
C JH = (MAX-1)/NEQB+1
C II = I
C**
C DO 200 J=JL,JH
C II = II+NEQB
C C = A(II)/D
C IF(C,EQ,0,0) GOTO 200
C IF(J,GT,NEQB) GOTO 220
C KK = J
C**
C DO 100 JJ=II,MAX,NEQB
C A(KK) = A(KK)-C*A(JJ)
C 100 KK = KK+NEQB
C 220 A(II) = C
C 200 CONTINUE
C 300 CONTINUE
C
C STORE REDUCED BLOCK ON TAPE NRED
C
C WRITE(NRED)A,NBL
C
C REDUCTION OF TRAILING BLOCK
C IF(N,EQ,NUMBLK) GOTO 800
C READ(NDRG)(AA(N5),N5=1,NSB)
C***
C NE = NEQB-MB
C IL = NSB-MB
C DO 600 I=1,MB
C NE = NE+1
C IL = IL+1
C II = IL
C**
C DO 500 J=NE,NEQB
C C = A(II)*A(J)
C IF(C,EQ,0,0) GOTO 500
C MAX = NBL(J)
C KK = I
C**
C DO 400 JJ=II,MAX,NEQB
C AA(KK) = AA(KK)-C*A(JJ)
C 400 KK = KK+NEQB
C 500 II = II+INC
C 600 CONTINUE
C
C REPLACE LEADING BLOCK BY TRAILING BLOCK
C
C DO 650 I=1,NSB
C 650 A(I) = AA(I)
C 700 CONTINUE

```

```

C REDUCTION OF SINGLE LOADS - TOTAL LOADVECTOR IN CORE
C
C 800 REWIND NRED
C IF(KKK,LT,1) GOTO 810
C REWIND NDRG
C READ(NDRG)(B(N),N=1,NEQ)
C
C REDUCE LOADING BLOCK BY BLOCK
C
C 810 CONTINUE
C DO 820 N=1,NUMBLK
C READ(NRED)A,NBL
C IN = (N-1)*NEQB
C***
C DO 840 I=1,NEQB
C IN = IN+1
C IF(A(I),EQ,0,0) GOTO 840
C JL = I+1
C II = I
C JH = (NBL(I)-1)/NEQB+1
C IF(IN-NEQ) 830,850,840
C 830 JN = IN
C C = B(IN)
C IF(C,EQ,0,0) GOTO 840
C***
C DO 860 J=JL,JH
C II = II+NEQB
C JN = JN+1
C 860 B(JN) = B(JN)-C*A(II)
C 850 B(IN) = B(IN)/A(II)
C 840 CONTINUE
C 820 CONTINUE
C
C BACKSUBSTITUTION - TOTAL SOLUTION IN CORE
C
C DO 900 N=1,NUMBLK
C BACKSPACE 1
C READ(NRED)A,NBL
C BACKSPACE 1
C NQB = (NUMBLK-N+1)*NEQB+1
C NE = NEQB+1
C***
C DO 920 I=1,NEQB
C JI = NE-I
C IF(A(JI),EQ,0,0) GOTO 920
C IL=JI+NEQB
C MAX = NBL(JI)
C KNI = NQB-I
C JNI = KNI+1
C IF(JNI,GT,NEQ) GOTO 920
C C = B(KNI)
C***
C DO 930 II=IL,MAX,NEQB
C C = C-A(II)*B(JNI)
C 930 JNI = JNI+1
C B(KNI) = C
C 920 CONTINUE
C 900 CONTINUE
C REWIND NDRG
C WRITE(NDRG) B
C**
C RETURN END

```

```

SUBROUTINE STRESS
C
C COMMON/INF/NUHNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HED(18),HK,VK,NUMINC,DHLLIM,
C 1INDEX,EIN,EPO,FTP,ITAG,SDHLLIM,FCF,HED1(18),FTS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYSTEX(X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,3),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SIGCR(3),
C 3SIGP(3),SIGCH(3,2),NSIG(3),BREL(2000),USIGH(2)
C COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C 1YYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C 2H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C 3ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/BANARG/MBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C 1A(108,54),B(2000),NBL(54),R(108)
C COMMON/SEA/NUMELC(100),SIGMAC(100),NEWCRA,RISS(15,10),NLR
C DIMENSION RFORCE(10),B1(3,6),BST(3,10),BSTT(10,3),YM(2),SEMUC(2)
C DIMENSION SS(3)
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C
C DEFINEFILE 4 (1000,1500,U,KSA)
C REWIND NDRG
C DO 2 I=1,2000
C BREL(I) = 0,0
C DO 1 NCR=1,50
C SIGMAC(NCR)=0,0
C 1 NUMELC(NCR)=0
C NLR=0
C KKK= 0
C NEWCRA = 0
C
C KUNTRD = 1
C DO 300 N=1,NUMEL
C
C IX(N,5) = IABS(IX(N,5))
C MTYPE=IX(N,5)
C
C NODAL DISPLACEMENTS
C
C DO 5 I=1,4
C II=2*I
C JJ=2*I*(N,1)
C P(II-1)=B(JJ-1)
C 5 P(II)=B(JJ)
C P(9) = 0,0
C P(10) = 0,0
C DO 10 I=1,6
C 10 SIG(I)=0,0
C DO 15 I=1,2
C 15 FF(I)=0,0
C
C IF(IX(N,2)=IX(N,4))90,20,90
C
C BOND CHARACTERISTICS
C
C SSIG(N,1) = LINKAGEDISPLACEMENT STEP N=1
C SSIG(N,2) = HORIZONTAL FORCE
C SSIG(N,3) = VERTICAL LINKFORCE
C SSIG(N,4) = TOTAL BONDSTRESS
C SSIG(N,5) = TOTAL LINKDISPLACEMENT

```

```

C      SSIG(N,6) = POINT XXX(5)
C      SSIG(N,7) = POINT YYY(5)
C
C      COMPUTE INCREMENTAL LINKAGE DISPLACEMENT AND FORCE
C
20  CCC=CUS (Q(N))
   SSS=SI*(Q(N))
   DH=-CCC*P(1)-SSS*P(2)+CCC*P(3)+SSS*P(4)
   DV= SSS*P(1)-CCC*P(2)-SSS*P(3)+CCC*P(4)
   SSIG(N,1) = SSIG(N,5)
   SSIG(N,5)=SSIG(N,5)+DH
   KSA= N
   READ(4,KSA)HK,VK,SSIG(N,6),SSIG(N,7)
   FF(1)=HK*DH
   FF(2)=VK*DV
   DJ 50 I=2,3
30  SSIG(N,1)= SSIG(N,1)+ FF(1-1)
   SSIG(N,4)= SSIG(N,2)/SUR(N)
   GOTD 300
C
C      COMPUTE TWO DIMENSIONAL ELEMENT STRESSES
C
C      READ STORED ELEMENTAL PROPERTIES
C
C      PLANE ELEMENT PROPERTIES
C
C      SSIG(N,1) = SIGMA X
C      SSIG(N,2) = SIGMA Y
C      SSIG(N,3) = TAU XY
C      SSIG(N,4) = PRINCIPAL STRESS DIR. 1
C      SSIG(N,5) = PRINCIPAL STRESS DIR. 2
C      SSIG(N,6) = POINT XXX(5)
C      SSIG(N,7) = POINT YYY(5)
C
90  KSA= N
   READ(4,KSA)S,HH,SSIG(N,6),SSIG(N,7),C,VOL
   DD 150 I=1,2
   XX(1)=P(I+8)
   DD 150 K=1,8
130 XX(1)=XX(1)-S(I+8,K)*P(K)
C
   CUMM=S(9,9)*S(10,10)+S(9,10)*S(10,9)
   IF(CUMM)135,160,155
135 P(9)=(S(10,10)*XX(1)-S(9,10)*XX(2))/CUMM
   P(10)=(S(10,9)*XX(1)+S(9,9)*XX(2))/CUMM
C
160 DD 170 I=1,6
   TP(I)=0,0
   DD 170 K=1,10
170 TP(I)=TP(I)+HH(I,K)*P(K)
C
C      CALCULATE INCREMENTAL ACCUMULATIVE STRAIN AND STRESS
C
C      XX      STAIN EPS X, EPS Y, GAMMA XY IN LOAD INCREMENT
C      SAX     TOTAL STRAIN NOW REACHED
C
C      SIG     STRESS SIGMA X, SIGMA Y, TAU XY IN LOAD INCREMENT
C      SSIG    TOTAL STRESS NOW REACHED
C
C      XX(1)=TP(2)
C      XX(2)=TP(6)

```

```

XX(3)=TP(3)+TP(5)
DD 180 I=1,3
SIG(I)=0,0
DD 179 K=1,3
179 SIG(I)=SIG(I)+C(I,K)*XX(K)
SSIG(N,I)=SSIG(N,I)+SIG(I)
SXX(N,I)=SXX(N,I)+XX(I)
180 CONTINUE
   IF(CRACK(N),EQ,1) GOTD 185
C
C      CALCULATE PRINCIPAL STRESSES
C
C      BR=(SSIG(N,1)-SSIG(N,2))/2,0
C      QUD=SSIG(N,3)/BR
C      EPS(N)=ATAN (QUD)/2,0
C
C      CALL FOR TRANSFORMATION MATRIX
C
185 CONTINUE
   ALPHA= EPS(N)
   CALL TRANS
   DD 200 I=1,2
   SIGP(I)= 0,
   DD 200 II=1,3
   SIGP(I)= SIGP(I)+DI(I,II)*SSIG(N,II)
200 CONTINUE
   SIGH(1,1)= SIGP(1)
   SIGH(2,1)= SIGP(2)
   IF(CRACK(N),EQ,1) GOTD 202
C
C      MAX SIGMA IN PRINCIPAL DIRECTION 1
C
   IF(SIGP(1),LT,SIGP(2)) GOTD 201
   GOTD 202
201 SIGH(1,1) = SIGP(2)
   SIGH(2,1) = SIGP(1)
   EPS(N) = EPS(N)+ 1,5708
   ALPHA = EPS(N)
   CALL TRANS
202 CONTINUE
   SSIG(N,4) = SIGH(1,1)
   SSIG(N,5) = SIGH(2,1)
C
C      COMPUTE STRAIN IN PRINCIPAL DIRECTION
C
C      DD 365 I=1,2
C      SXX(N,I+3) = 0,0
C      DD 365 J=1,3
365 SXX(N,I+3) = SXX(N,I+3) + D(J,I)*SXX(N,J)
C
C      300 CONTINUE
C
C      RETURN
C
C      END

```

```

C      SUBROUTINE NEWSTR
C
C      SUBROUTINE CALCULATES THE CORRECT STATE OF STRESS
C
C      COMMON/INF/NUMEL,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HED(14),HK,VK,NUMINC,DH,LM,
C      LINDEX,EIN,EPO,FTP,ITAG,SDH,LM,FCF,HED1(18),FTS
C      Z,METHOD,NDRUCK
C      COMMON/SVSTE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C      ICRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C      ZSUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),RB(2000),SSIGR(3),
C      S(10,10),SIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),USIGH(2)
C      COMMON/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C      1YYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C      2H(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX(2),DI(6,6),
C      3ALPHA,UNMI(8),SPX2(2),LSA
C      COMMON/BANAKG/HBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C      LA(108,54),R(2000),NBL(54),R(108)
C      COMMON/SEA/NUMELC(100),SIGMAC(100),NEWCR,RISS(15,10),NLR
C      DIMENSION SS(3)
C      INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C
C      KONTRD =1
C      IF(NEWCR,GT,0) GOTD 500
510 DD 500 N= 1,NUMEL
   MTYPE = IX(N,5)
   IF(NEWCR,EQ,0) GOTD 503
   IF(MTYPE,EQ,3,AND,E(N,2),EQ,2,) GOTD 501
   GOTD 503
503 GOTD(502,502,501), MTYPE
C
C      CALCULATE THE CORRECT STATE OF STRESS FOR LINKAGE ELEMENTS
C
501 CONTINUE
   SS5= SSIG(N,1)
   SS1 = SSIG(N,5)
   SS2 = SSIG(N,2)
   SS4 = SSIG(N,4)
   HK =E(N,1)
C
C      CALCULATE REDUCED BONDSTRESS
C      AND NEW LINKAGE STIFFNESS HK
C
   LSA=0
   IF( SIG(1,SS5)-NE,SIG(1,SS1)) LSA= 1
   CALL NEWPRD
C
C      DIFFERENCE IN THE STATE OF STRESS
   DSIG(1) = SSIG(N,4)- SIGH(1,2)
C
C      REDUCED REAL BONDSTRESS AND LINKAGE FORCE
C
   DEL = 0,
   SSIG(N,2) = SIGH(1,2)*SUR(N)
   SSIG(N,4) = SIGH(1,2)
   DEL= ABS(DSIG(1))
   IF(DEL,GT,2,0) GOTD 51
   GOTD 500

```

```

C      COMPUTE RELEASE FORCES
C
C
51  CALL RELEAS
   KKK = 1
   IF(KONTRD ,EQ,0) GOTD 500
   DH =SSIG(N,5) - SSIG(N,1)
   FF(1) = HK*DH
   WRITE(6,2011)N,DH,SSIG(N,5),FF(1),SS2,SS4,DSIG(1),SSIG(N,2),
   SSIG(N,4),DEL
2011 FORMAT(1X,' L.NR.',I3, 9P10,5)
   GOTD 500
502 CONTINUE
C
C      CALCULATE THE CORRECT STATE OF STRESS FOR STEEL AND CONCRETE
C      ELEMENTS
C
C      SS(1) = SSIG(N,1)
C      SS(2) = SSIG(N,2)
C      SS(3) = SSIG(N,3)
C      SIGH(1,1) = SSIG(N,4)
C      SIGH(2,1) = SSIG(N,5)
C      CALL NEWPROP FOR
C      REDUCED PRINCIPAL STRESSES
C      REDUCED ELASTICITY MODULUS
C
C      CALL NEWPRD
C
C      SSIG(N,4) = SIGH(1,2)
C      SSIG(N,5) = SIGH(2,2)
C      ALPHA= EPS(N)
C      CALL TRANSMAT
C
C      BACKTRANSFORMATION OF REDUCED PRINCIPAL STRESSES
C
C      CORRECT STATE OF STRESS IN X-Y
C
   DD 265 I=1,3
   SSIGR(I)= 0,0
   DD 265 II=1,2
   SSIGR(I)= SSIGR(I)+D(I,II)*SIGH(II,2)
265 CONTINUE
C
C      RESEDUAL STRESSES
C
   DD 266 I=1,3
   DSIG(I)= SSIG(N,I)-SSIGR(I)
266 SSIG(N,I)= SSIGR(I)
C
C      DIFFERENCE IN PRINCIPAL STATE OF STRESS
C
   DEL =0,
   DD 267 I=1,2
   DSIGH (I)= SIGH(I,1)-SIGH(I,2)
   DEL = ABS(DSIGH(I))
   GOTD (210,211),MTYPE
210 IF(DEL ,GT,2,0) GOTD 268
   GOTD 267
211 IF(DEL,GT,20,) GOTD 268
267 CONTINUE

```



```

2001 FORMAT (I7,2F8,2,5E11,3,1F7,2, E11,3,1E13,3,15)
2002 FORMAT(1H1// 10X
125H LIST OF CRACKED ELEMENTS// 10X 80H ELEMENT NO, I J
1 K L MATERIAL DIRECTION OF CRACK LOAD INCREMENT//
210X,85(1H-))
2003 FORMAT(121,1X,4(6,112,F15,3,113,16)
2004 FORMAT( 40HOLDCATE VERSAGT IN STRESS BEI ELEMENT N=15)
2006 FORMAT (1H1// 15X
1 39H DISPLACEMENTS AFTER LOAD INCREMENT NO, 13/
A 15X 20H ITERATION CYCLE NR, 15 /
2 15X 12H N.P. NUMBER 18X 2HUX 18X 2HUY, / 16X,51(1H-))
2007 FORMAT(15X,112,2E20,7)
C
C
C RETURN
C END

SUBROUTINE DETER(A,DET)
C
C SOLVING
C SUBROUTINE FOR SOLVING A 3*3 DETERMINATE
C
C DIMENSION A(3,3)
C
C DET = A(1,1)*(A(2,2)*A(3,3) - A(3,2)*A(2,3))
1 -A(2,1)*(A(1,2)*A(3,3) - A(3,2)*A(1,3))
2 + A(3,1)*(A(1,2)*A(2,3) - A(2,2)*A(1,3))
C
C RETURN
C END

SUBROUTINE NEWPRD
C
C CALCULATE NEW MATERIAL PROPERTIES FROM PRINCIPAL STRAINS
C FOR THE NEXT STEP
C
C COMMON/INF/NUMHP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HEU(18),HK,VK,NUMINC,DHLM,
C INDEX,FIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLM,FCF,HEU1(18),ETS
C 2,METHOD,NDRUCK
C COMMON/SYS/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C 1CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,3),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
C 2SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSIGR(3),
C 3SIGP(3),SIGH(3,2),DSIG(3),BKEL(2000),DSIGH(2)
C COMMON/ARG/U(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C LYYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C ZH(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2), SPX1(2),DI(6,6),
C 3ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
C COMMON/MAT/ XP1(12),YP1(12),XP2(12),YP2(12),XP3(12,4),YP3(12,4),
C 1ZP3(12,4),XP4(12,4),YP4(12,4),ZP4(12,4),AK1(12,4),AK2(12,4)
C DIMENSION RFI(10),B1(3,6),BST(3,10),BSTT(10,3),YM(2),SEMO(2)
C 1,TI(2,3),NSE(2)
C INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C
C IXN=MTYPE
C GU TO (362,362,368),MTYPE
362 CONTINUE
TM(1,1) = C2
C
C SXX = STRAIN NOW REACHED
C SPX1 = STRAIN NOW REACHED IN PRINCIPAL DIRECTION
C
C SPX1(1) = SXX(N,4)
C SPX1(2) = SXX(N,5)
C
C IF(CRACK(N),EQ,1) GOTO 363
C
C SEE FRANKLIN
C
C AN = E(N,2)
C AN2 = 1 - AN**2
C SPX2(1) = (SPX1(1) + AN*SPX1(2)) / AN2
C SPX2(2) = (SPX1(2) + AN*SPX1(1)) / AN2
C GOTO 364
363 SPX2(1)=0,0
C SPX2(2) = SPX1(2)
364 GU TO(366,367),IXN
C
C CONCRETE PROPERTIES
C
366 CALL MATPRD (XP1,YP1,SPX2,YM,IXN,SEMU)
E(N,1) = SEMO(1)
E(N,3) = SEMO(2)
GOTO 395
C
C STEEL PROPERTIES
C
367 CALL MATPRD (XP2,YP2,SPX2,YM,IXN,SEMU)

```

SUBROUTINE TRANSM

```

COMMON/ARG/U(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
LYYY(5),S(10,10),P(10),LM(4),DD(3,3),HH(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
ZH(6,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2), SPX1(2),DI(6,6),
3ALPHAH,DUMMI(8),SPX2(2),LSA
CALCULATE STSTRESS TRANSFORMATION MATRIX

```

```

S1 = SIN(ALPHAH)
C1 = COS(ALPHAH)
S2 = S1*S1
C2 = C1*C1
SC = S1*C1

```

ROTATION OF X-Y-SYSTEM

```

DI(1,1) = C2
DI(1,2) = S2
DI(1,3) = 2,*SC
DI(2,1) = S2
DI(2,2) = C2
DI(2,3) = -2,*SC
DI(3,1) = -SC
DI(3,2) = SC
DI(3,3) = C2-S2

```

BACKROTATION

```

D(1,1) = C2
D(1,2) = S2
D(1,3) = -2,*SC
D(2,1) = S2
D(2,2) = C2
D(2,3) = D(1,3)
D(3,1) = SC
D(3,2) = -SC
D(3,3) = C2-S2
RETURN
END

```

```

E(N,1) = SEMO(1)
E(N,3) = SEMO(2)
GOTO 395

```

LINKAGE PROPERTIES

LINKAGE PROPERTIES

```

368 IF(CRACK(N),EQ,1) GOTO 380
SPX1(1) = SSIG(N,5)
SIGMAX = 0
EPSMAX = 0
NSE(1) = 0
NSE(2) = 0
NST = 1
DO 400 NT = 1,NUMEL
IF(IX(NT,5),NE,2) GOTO 400
DO 410 NL = 1,2
DO 410 NS = 1,4
IF(IX(NL,NS),EQ,IX(NT,NS))GOTO 420
410 CONTINUE
GOTO 400
420 NST = NST + 1
IF(EPSMAX,GT,SXX(NT,4)) GOTO 390
EPSMAX = SXX(NT,4)
SIGMAX = SSIG(NT,4)
390 IF(NST,GT,2) GOTO 450
400 CONTINUE
450 CONTINUE

```

EPSPL IS THE PLASTIC STEEL STRAIN IN PRINCIPAL DIRECTION  
O(2,1) IS THE INITIAL E-MODUL OF STEEL  
E(N,2) = 1 MEANS , THAT LINKAGE ELEMENT IS SITUATED NEAR A CRACK  
CRACK SURFACE

```

EPSPL = EPSMAX - SIGMAX/D(2,1)
IF(E(N,2),EQ,2,0) E(N,2) = 1,0
IF( E(N,2),EQ,1,) GOTO 460
CALL MATLIN(XP3,YP3,ZP3,AK1,SPX1,EPSP, YM,SEMO)
GOTO 480

```

LINKAGE ELEMENT IS NEAR A CRACK

```

460 CALL MATLIN(XP4,YP4,ZP4,AK2,SPX1,EPSP, YM,SEMO)
480 CONTINUE
E(N,1) = SEMO(1)*SUR(N)
YM(2) = 0,0
IF(LSA,EQ,1) E(N,1) = O(3,1)*SUR(N)
GOTO 395
380 YM(1) = 0,0
YM(2) = 0,0

```

VALUES OF PRINCIPAL STRESSES , CALCULATED FROM STRESS-  
STRAIN OR STRESS-DISPLACEMENT RELATIONS

```

395 SIGH(1,2) = YM(1)
SIGH(2,2) = YM(2)

```

RETURN END

```

C      SUBROUTINE MATPRO (XP,YP,XM,YM,IXN,SEMO)
C      C
C      C      CALCULATE MATERIAL PROPERTIES
C      C
C      DIMENSION XP(12),YP(12),XM(2),YM(2),SEMO(2)
C      C
C      XM AND YM ARE TWO POINTS OF THE STRESS-STRAIN POLYNOMIA
C      C
C      DO 2 K=1,2
C      IF(XM(K),EQ,0,0,AND,IXN,GT,1) GOTO 20
C      GOTO 21
C 20 SEMO(K)=(YP(2)-YP(1))/(XP(2)-XP(1))
C      YM(K)=0.0
C      GOTO 2
C 21 NEG=0
C      IF(IXN,EQ,1) GOTO 5
C      IF(XM(K),LT,0,)GOTO 4
C      GOTO 5
C 4 XM(K) = -XM(K)
C      NEG = -1
C 5 DO 1 J=1,12
C      IF(XM(K),LT,XP(J))GOTO 3
C 1 CONTINUE
C      C
C      C      XM(K) IS SITUATED BETWEEN THE TWO POINTS J AND J-1
C      C      YM(K) IS SITUATED ON A LINE BETWEEN J-1 AND J
C      C
C 3 A=(YP(J)-YP(J-1))/(XP(J)-XP(J-1))
C      YM(K)=A*(XM(K)-XP(J-1))+YP(J-1)
C      C
C      C      SLOPE OF STRESS-STRAIN CURVE
C      SEMO(K)= A
C      IF(NEG,EQ,-1) GOTO 6
C      GOTO 7
C 6 YM(K) = -YM(K)
C 7 IF(IXN,EQ,3) GOTO 10
C 2 CONTINUE
C 10 CONTINUE
C      C
C      C      RETURN
C      END

```

```

C      SUBROUTINE MATLIN(XP,YP,ZP,AK,XM,EPSP,YM,SEMO)
C      C
C      C      SUBROUTINE CALCULATES LINKAGE PROPERTIES FOR THREE-DIMENSIONAL
C      C      RELATIONSHIP BETWEEN LINKAGE DISPLACEMENT, STEEL STRAIN
C      C      AND BOND STRESS
C      C      XM LINKAGE DISPLACEMENT
C      C      EPSP PLASTIC STEEL STRAIN
C      C      YM BOND STRESS OF LINKAGE ELEMENT
C      C      SEMO SECANT MODULUS OF LINKAGE STIFFNESS
C      C
C      DIMENSION XP(12,4),YP(12,4),ZP(12,4),AK(12,4),SPX1(2),YM(2),
C      1SEMO(2),ZQ(2),XM(2)
C      C
C      VOR = 1.
C      IF(XM(1),LT,0,)GOTO 4
C      GOTO 5
C 4 XM(1) = -XM(1)
C      VOR = -1.
C 5 DO 10 J =1,12
C      IF(XM(1),LT,XP(J,1)) GOTO 3
C 10 CONTINUE
C      C
C      C      XM IS SITUATED BETWEEN THE TWO CURVES J AND J-1
C      C
C 3 L = J -1
C      DO 15 K=1,2
C      ZQ(K) = AK(L,1) + AK(L,2)*EPSP + AK(L,3)*EPSP**2
C      1 + AK(L,4)*EPSP**3
C 15 L = L+1
C      SEMO(1) = (ZQ(2) - ZQ(1)) / (XP(J,1) - XP(J-1,1))
C      YM(1) = (SEMO(1)*(XM(1) - XP(J-1,1)) + ZQ(1)) * VOR
C      C
C      C      WRITE(61,50) XP(J-1,1),XM(1),XP(J,1),ZQ(1),ZQ(2),EPSP,
C      1YM(1),SEMO(1)
C      50 F0RMA7(5X, 'MATLIN = ' 7(3X,F10,5),3X E10,3)
C      C
C      C      RETURN
C      END

```

```

C      SUBROUTINE RELEAS
C      C
C      C      CALCULATE NODAL RELEASE FORCES TO ESTABLISH EQUILIBRIUM
C      C      CUMMND/INF/NUMHP/NUMEL,N,VOL,M,TYPE,HEU(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
C      C      LINDEX,FIN,EPD,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HEU1(18),FTS
C      C      Z,METHOD,NORUCK
C      C      CUMMND/SYSTE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CODE(1000),
C      C      ICRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,5),EPS(1000),R(1000),T(1000),
C      C      ZSUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),BB(2000),SSIGR(3),
C      C      DSIGP(3),DSIGH(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
C      C      CUMMND/ARG/D(3,3),ANGLE(4),CH(4),CV(4),CC(3),SIG(10),XXX(5),
C      C      LYY(5),S(10,10),PP(10),LM(4),DD(3,3),HM(6,10),XX(4),YY(4),C(3,3),
C      C      ZH(5,10),D(6,6),F(6,10),TP(6),XI(10),EE(7),FF(2),SPX1(2),DI(6,6),
C      C      ALPHAI,DIUMMI(8),SPX2(2),LSA
C      C      CUMMND/GANAKG/HBAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
C      C      IA(10,54),B(2000),NBL(54),R(108)
C      C      DIMENSION RFORCE(10),B1(3,6),BST(3,10),BSTT(10,3),YM(2),SEMO(2)
C      C      INTEGER CODE,CRACK,RISS,CRACKL
C      C
C      FAC = 1.0
C      IF(MTYPE,EQ,3) GOTO 10
C      C
C      C      STRAIN TRANSFORMATION MATRIX BST = B1*HH
C      C      DO 1 I=1,3
C      C      DO 1 II=1,6
C      1 B1(I,II) = 0.0
C      B1(1,2) = 1.0
C      B1(2,6) = 1.0
C      B1(3,3) = 1.0
C      B1(3,5) = 1.0
C      DO 2 I=1,3
C      DO 2 II=1,10
C      BST(I,II) = 0.0
C 2 BST(I,II) = BST(I,II) + B1(I,K)*HH(K,II)
C      C
C      C      TRANSPOSE OF MATRIX BST = BSTT
C      C      DO 3 I=1,3
C      C      DO 3 II=1,10
C      3 BSTT(II,I) = BST(I,II)
C      C
C      C      RELEASE FORCES RFORCE = VOL*BSTT*DSIG
C      C      DO 4 I=1,10
C      C      RFORCE(I) = 0.0
C      C      DO 4 K=1,3
C      4 RFORCE(I) = RFORCE(I) + VOL*BSTT(I,K)*DSIG(K)*FAC
C      GOTO 20
C      C
C      C      RELEASE FORCE FOR LINKAGE ELEMENTS
C      C
C 10 Q1 = Q(N)
C      CCC = COS(Q1)
C      SSS = SIN(Q1)
C      PD = DSIG(1)*SUR(N)*FAC
C      RFORCE(1) = -CCC*PD
C      RFORCE(2) = -SSS*PD
C      RFORCE(3) = -RFORCE(1)

```

```

RFORCE(4) = -RFORCE(2)
DO 11 I=5,10
11 RFORCE(I) = 0.0
20 CONTINUE
C      C
C      C      TOTAL VECTOR OF RELEASE FORCES
C      C
C      WRITE(61,100) N,(RFORCE(I),I=1,10)
C      100 F0RMA7(15,10E11,4)
C      DO 5 K=1,4
C      IXN = IX(N,K)
C      LPT = IXN * 2
C      KD = CODE(IXN)
C      IF(KD)6,7,6
C 6 GOTO(8,9,5),KD
C 7 BREL(LPT) = BREL(LPT) + RFORCE(2*K)
C 9 BREL(LPT-1) = BREL(LPT-1) + RFORCE(2*K-1)
C      GOTO 5
C 8 BREL(LPT) = BREL(LPT) + RFORCE(2*K)
C 5 CONTINUE
C      C
C      C      RETURN
C      END

```





```

GOTO 115
120 E(NP,2) = 2.0
115 CONTINUE
C
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PLOTT1
C
C
COMMON/INF/NUMNP,NUMEL,N,VOL,MTYPE,HED(18),HK,VK,NUMINC,DHLIM,
INDEX,EIN,EPO,FTP,ITAG,SDHLIM,FCF,HED1(18),FTS
2,METHOD,NUPUCK
COMMON/SYS/STE/X(1000),Y(1000),UX(1000),UY(1000),CUDE(1000),
1,CRACK(1000),CRACKL(1000,2),IX(1000,3),EPS(1000),Q(1000),T(1000),
2SUR(1000),SSIG(1000,7),E(1000,3),SXX(1000,5),HB(2000),SSIGR(3),
3SIGP(3),SIGHC(3,2),DSIG(3),BREL(2000),DSIGH(2)
COMMON/BANARG/BAND,NUMBLK,NEQ,NEQB,NSB,KKK,NDRG,NRED,NCYCLE,
1A(108,54),B(2000),NBL(54),R(108)
DIMENSION XARRAY(100),YARRAY(100)
INTEGER CODE,CPACK,RISS,CRACKL
C
C SUBROUTINE FOR PLOTTING STRESSES IN
C CONCRETE ELEMENTS
C STEEL ELEMENTS
C LINKAGE ELEMENTS
C
C PLOTTERFILE -- UNIT 70
C *****
C CONCRETE STRESSES
C *****
DU 5 N = 1,100
XARRAY(N) = 0.
YARRAY(N) = 0.
5 CONTINUE
NPTS = 0
YPO = 0.80
MTYPE = 1
DO 10 N = 1,NUMEL
DIF = ABS(SSIG(N,7)-YPO)
IF(IX(N,5),EQ,1,AND,DIF,LE, 0.01 ) GOTO 20
GOTO 10
20 NPTS = NPTS + 1
XARRAY(NPTS) = SSIG(N,6)
YARRAY(NPTS) = SSIG(N,1)
10 CONTINUE
WRITE(70)MTYPE,NPTS,XARRAY,YARRAY ,INDEX,NCYCLE
C *****
C STEEL STRESSES
C *****
NPTS = 0
YPO = 2.30
MTYPE = 2
DO 25 N = 1,100
XARRAY(N) = 0.
YARRAY(N) = 0.
25 CONTINUE
DO 30 N = 1,NUMEL
DIF = ABS(SSIG(N,7)-YPO)
IF(IX(N,5),EQ,2,AND,DIF,LE, 0.01 ) GOTO 40
GOTO 30
40 NPTS = NPTS + 1
XARRAY(NPTS) = SSIG(N,6)
YARRAY(NPTS) = SSIG(N,1)
30 CONTINUE
WRITE(70)MTYPE,NPTS,XARRAY,YARRAY ,INDEX,NCYCLE
C *****
C LINKAGE STRESSES
C *****

```

```

C *****
NPTS = 0
YPO = 1.59
MTYPE = 3
DO 45 N = 1,100
XARRAY(N) = 0.
YARRAY(N) = 0.
45 CONTINUE
DO 50 N = 1, NUMEL
DIF = ABS(SSIG(N,7)-YPO)
IF(IX(N,5),EQ,3,AND,DIF,LE, 0.50 ) GOTO 60
GOTO 50
60 NPTS = NPTS + 1
XARRAY(NPTS) = SSIG(N,6)
YARRAY(NPTS) = SSIG(N,4)
50 CONTINUE
WRITE(70)MTYPE,NPTS,XARRAY,YARRAY ,INDEX,NCYCLE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ENTRY(NPPOINT)
C
C FOR THE NEXT STEP OF ITERATION WRITE ALL DATA
C ON TAPE NBEGIN = 3
C
C
COMMON/INF/ DUM1(60)
COMMON/SYS/ DUM2(36020)
COMMON/ARG/ DUM3(480)
COMMON/MAT/ DUM4(440)
COMMON/BANARG/ DUM5(8010)
COMMON/SEA/ DUM6(360)
COMMON/OUT/ DUM7(2)
DIMENSION IDUM7(2)
EQUIVALENCE(DUM7, IDUM7)
C
C
C SUMMATION OF COMMON IS 46K
C
C
NBEGIN = 3
REWIND NBEGIN
IF(NPPOINT,EQ,2) GOTO 40
READ(NBEGIN) NLOAD
IDUM7(1) = NBEGIN
IDUM7(2) = NLOAD
IF(NLOAD,EQ,0) GOTO 50
READ(NBEGIN) DUM1,DUM2,DUM3,DUM4,DUM5,DUM6,DUM7
REWIND 1
WRITE(1) (DUM2(I), I=34016,36020)
GOTO 50
40 WRITE(NBEGIN) IDUM7(2)
WRITE(NBEGIN) DUM1,DUM2,DUM3,DUM4,DUM5,DUM6,DUM7
C
C
C
50 REWIND NBEGIN
RETURN
C
C
END

```