

ISSN 0172-7613

Forschungsbericht 67

BUNDESANSTALT FÜR
MATERIALPRÜFUNG (BAM)

BERLIN

**Beitrag zur dynamischen Analyse von
vorgespannten und vorbelasteten
Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher
Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung**

von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees

Mai 1980

151 Seiten, 64 Abbildungen, 3 Tabellen

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon 030/8104-1
Telex 01 - 83 261 bamb d

Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung von stoßartig beanspruchten Konstruktionen, deren topologisch variable Systemgliederungen abhängig vom zeitlich veränderlichen Deformationszustand sind. Dieses Verfahren dient der Untersuchung des Prototyps einer Berstschutzkonstruktion für ein Kernkraftwerk unter dynamischer Beanspruchung. Es wird der Nachweis geführt, daß nach einem hypothetischen Versagen des vorgespannten Reaktor-druckbehälters die Tragfähigkeitsgrenze des Reaktorkerns in keinem Gliederungszustand überschritten wird, wodurch die Abschaltbarkeit des Reaktors gewährleistet werden kann.

Das entwickelte Verfahren unterscheidet sich in vier Punkten von bekannten Methoden:

- 1) Entwicklung eines Zusatzlastverfahrens für linear elastisches Verhalten. Das Prinzip des Zusatzlastverfahrens besteht in der Trennung der Deformationsanteile aus statischer Betriebsbeanspruchung (z.B. Innendruck, Vorspannung, Temperatur) und aus dynamischer Beanspruchung (z.B. Bersten einer druckführenden Umschließung). Bei Änderung der Systemgliederung werden gespeicherte Deformationsenergien aus statischer Beanspruchung nicht durch ein Anfangswertproblem sondern durch einen als äußere Belastung wirkenden Zusatzlastvektor erfaßt.
- 2) Erweiterung des Zusatzlastverfahrens auf elastisch-plastisches Verhalten nach der Methode der Anfangsdehnungen. Dem nichtlinearen Werkstoffverhalten, welches bei Stoßproblemen weitgehend auf den Bereich der Stoßstelle beschränkt ist, wird durch eine passende zusätzliche äußere Belastung sowohl für das plastische Verhalten als auch für die Energiedissipation Rechnung getragen. Es wird ein verbesserter Lösungsansatz vorgeschlagen, der die Konvergenz des Verfahrens der Anfangsdehnungen der Konvergenz des Verfahrens der tangentiellen Steifigkeit angleicht.
- 3) Entwicklung eines Fugenmodells, welches Fugen durch Werte fiktiver Steifigkeit für den geöffneten und den geschlossenen Zustand numerisch definiert. Hiermit bleibt die Übersichtlichkeit der Zuordnung zwischen allen Freiheitsgraden für alle Gliederungszustände gewahrt. Durch Anwendung eines modalen Integrationsverfahrens werden mögliche numerische Instabilitäten vermieden.
- 4) Die Diskretisierung von kontinuierlichen Systemen in Finite-Element Darstellungen bedarf bei stoßartigen Beanspruchungen einer Bewertung hinsichtlich der durch die gewählte Modellabbildung erzielbaren Ergebnisgenauigkeit. Dabei ist den beiden gegensätzlichen Forderungen Rechnung zu tragen, daß bei stoßartigen Beanspruchungen einerseits höhere Eigenformen angeregt werden, daß aber andererseits durch die Diskretisierung die höheren Eigenformen zunehmend ungenau ermittelt werden. Es wird ein Verfahren entwickelt, welches den Anteil der höheren Eigenformen am Gesamtverlauf bewertet, wodurch gezeigt werden kann, daß bei feiner werdender Diskretisierung der Anteil der höheren, d.h. ungenauen Moden am Gesamtverlauf abnimmt.

Die Untersuchung der Berstschutzkonstruktion zeigt, inwieweit die maßgebenden Parameter der numerischen Berechnung bei der Diskretisierung des Systems einer kritischen Bewertung zu unterziehen sind.

Abstract

The purpose of this work is the development of a method to analyze structural systems whose topological variable system-arrangements are dependent on temporary varying deformation conditions which are stressed due to impact loads. This method serves to examine the prototype of a dynamic excited burst protection-construction for a nuclear power plant. Evidence is given that in case of hypothetical failure of the prestressed reactor pressure-vessel the maximum load capacity of the reactor core is not exceeded, which in turn guarantees the safe shut-down of the reactor.

The newly developed method differs in four aspects from the conventional method:

- 1) Development of an additional load-method for linear-elastic behaviour. The main principle of the additional loading concept consists in the separation of deformation parts from static operational stress (i.e. interior pressure, pre-stress, temperature) and from dynamic stress (i.e. rupture of a pressurized enclosure). When changing the structural arrangement, stored deformation energies from static stress are not realized through an initial-value problem but through an additional load-vector which is used as external load.
- 2) Extension of the additional load-method for elastic-plastic behaviour in regard to the initial strain method. For non-linear material behaviour, which in case of impact problems is mostly restricted to the impact area, a suitable additional external load for plastic behaviour as well as for energy dissipation will be taken into account. An improved solution is proposed which assimilates the convergence of the initial strain method to the tangential stiffness method.
- 3) Development of a gap-element which numerically defines gaps through values of fictitious stiffness under opened and closed conditions. This way clear distinction of allocated degrees of freedom for all structural arrangements will be maintained. Through application of a modal integration method possible numerical instabilities can be avoided.
- 4) Under dynamic excitation discretizations of continuous systems in finite-element representations require a valuation to the attainable accuracy of results in regard to the chosen model representations. Hereby the two opposite demands have to be considered that with dynamic load on the one hand higher eigen-modes are excited that, however, on the other hand through discretization the higher eigen-modes are increasingly less accurate to compute. A method has been developed which assesses the actual portion of higher eigen-modes in comparison to the complete deformations whereby it can be demonstrated that with increasing accurate discretization the portion of higher, i. e. inaccurate modes decreases in the complete deformation.

The study of the above mentioned burst-protection-construction shows to what extent a critical valuation of the decisive parameters for the numerical computation has to be subjected to when discretizing the structural system.

Inhaltsverzeichnis	Seite
Kurzbezeichnungen	VII
1.0 Einleitung	1
2.0 Ziel und Umfang der durchgeführten Untersuchungen	2
2.1 Allgemeine Problemstellung	2
2.2 Literaturangaben für bisher verwendete Verfahren	9
3.0 Ermittlung der Zustandsgleichungen eines linear elastischen Systems	16
3.1 Darstellung der Arbeitsgrößen	16
3.2 Betrachtungen zur Energiedissipation	18
4.0 Numerische Darstellung von Fugemechanismen	19
5.0 Sensitivitätsuntersuchungen der Systemdiskretisierung	26
6.0 Erläuterung des Zusatzlastverfahrens für statische Belastungen	31
6.1 Zusatzbelastung aus äußerer Vorbelastung	33
6.2 Zusatzbelastung aus Vorspannung	37
7.0 Modale Analyse diskreter Systeme mit veränderlicher Gliederung im elastisch-plastischen Bereich	40
7.1 Nichtlineare Zustandsgleichungen für das Verfahren der Anfangsdehnungen	41
7.2 Modalanalyse eines Systems mit veränderlicher Gliederung und nichtlinearem Werkstoffverhalten	43
7.3 Berücksichtigung von Dämpfungsmechanismen bei nichtlinearem Werkstoffverhalten	45
8.0 Beispiele	47
8.1 Programmbeschreibung	47
8.2 Einfluß der Diskretisierung eines kontinuierlichen Systems auf das Antwortverhalten unter Impulsbeanspruchung (Beispiel 1)	48
8.3 Untersuchung eines Zweimassenschwingers mit Stoßeffekten unter Berücksichtigung einer statischen Vorbeanspruchung (Beispiel 2)	60
8.3.1 Vorspannung	61
8.3.2 Vorbelastung	64
8.4 Dynamische Berechnung einer Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion im Berstfall (Beispiel 3)	67
8.4.1 Berechnung des Betriebszustandes	67
8.4.2 Grundlegende Voraussetzungen für die Berechnung des Berstzustandes	69
8.4.3 Systemwerte und Belastungsgrößen	70
8.4.4 Sensitivitätseinflüsse bei der Diskretisierung des Berstschutzsystems	74
8.4.4.1 Einfluß der Feinheit der Modellabbildung bei konsistenten Massen und Punktmassen	74
8.4.4.2 Einfluß unterschiedlicher Dimensionierung des Berstschutzsystems	76
8.4.4.3 Einfluß der Lastanstiegszeit der Berstlast	78
8.4.4.4 Einfluß der Dämpfung	79
8.4.4.5 Einfluß der Blattfedersteifigkeit der Zarge in Verbindung mit dem Lastanstieg	79
8.4.4.6 Einfluß der Höhe der Standzarge	81
8.4.4.7 Einfluß der Vorspannung	81
8.4.4.8 Einfluß des Druckaufbaus unter der Standzarge	82
8.4.4.9 Einfluß der mechanisch-mathematischen Gliederung der RDB-Einbauten	83
8.4.4.10 Ermittlung der Spannungsverläufe	85
9.0 Zusammenfassung und Ausblick	103
Literaturangaben	105

	Seite
Anhang A: Darstellung der Elementeigenschaften	113
A 1. Ermittlung des Verschiebungszustandes	113
A 2. Ermittlung der Elementsteifigkeit im lokalen Koordinatensystem	115
A 3. Ermittlung der Elementmasse im lokalen Koordinatensystem	119
A 4. Transformation des Elementarstabkoordinatensystems	121
A 5. Zusammenstellung des Gesamtsystems	122
A 6. Berücksichtigung der Randbedingungen	123
Anhang B: Modale Analyse gedämpfter diskreter Systeme im linear elastischen Bereich	124
B 1. Viskos gedämpfte Einmassenschwinger	124
B 2. Hysteretisch gedämpfte Einmassenschwinger	126
B 2.1 Harmonisch erregtes System	127
B 2.2 Nicht harmonisch erregtes System	128
B 3. Linear viskos gedämpfte Mehrmassensysteme	130
B 4. Modalanalyse gekoppelter Systeme	132
B 4.1 Modalanalyse von Punktmassensystemen	133
B 4.2 Modalanalyse von Systemen mit konsistenter Massenverteilung	134
Anhang C: Einfluß der Massendarstellung auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit	136
Anhang D: Berechnung nicht-linearer elastischer Systeme	141
D 1. Darstellung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens	141
D 2. Integrationsverfahren für nichtlineare Bewegungsgleichungen	146
Tabellen	
I Vergleichende Gegenüberstellung verschiedener Autoren bei der Erfassung von Stoß-Kontakt-Vorgängen an Fugen	149
II Vergleich der Überlagerungen der Deformationen für das Zusatzlastverfahren und für übliche Verfahren	150
III Bemessungswerte des Berstschutzsystems	151

V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit enthält eine vertiefte Fassung von Forschungsvorhaben, die in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) in Berlin durchgeführt wurden.

Die Forschungsvorhaben wurden als SR-Vorhaben zur Sicherheit kerntechnischer Anlagen vom Bundesminister des Innern (BMI) gefördert. Die gute Zusammenarbeit mit dieser Instanz ist hervorzuheben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. A. Jaeger (Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin) und Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Giencke (Fachbereich Verkehrswesen, TU Berlin) sei an dieser Stelle für die vielen wertvollen Anregungen und das der Arbeit entgegengebrachte Interesse, die zur endgültigen Fassung geführt haben, besonders herzlich gedankt.

Berlin, im April 1980

Wolfgang Matthees

Erläuterung der verwendeten Kurzbezeichnungen

1. Bezeichnung der Größen

<u>Abkürzung</u>	<u>Name</u>
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
S	Dichte
V	Volumen
F, O	Fläche
\varnothing	Durchmesser
$\Delta x, l, L$	Länge
δ	Verschiebungsgröße, virtuelle Größe
p	Innendruck
P_b	Berstlast
P_i	Betriebslast
P_v	Vorspannlast
P_D	dynamische Last
P_O	konstante Last
X	statisch unbestimmte Größe
P_c	Dämpfungskraft
S	Schnittlast
pfi	fiktive Last zur Wegtransformation
Δ	Vorspannweg, endliche Differenz
Δv	Längenänderung
$\Delta \dot{u}$	Verschiebung (Lastfall Innendruck)
u	Deformationszustand
v	Deformation eines Freiheitsgrades
\dot{v}	Geschwindigkeit eines Freiheitsgrades
\ddot{v}	Beschleunigung eines Freiheitsgrades
v_S	stationärer Deformationsanteil
v_D	dynamischer Deformationsanteil
v_O	Anfangsdeformation eines Freiheitsgrades
\dot{v}_O	Anfangsgeschwindigkeit eines Freiheitsgrades
t, τ	Zeitabzisse
Δt	Integrationsschrittweite
T	Periode einer Schwingung
ξ	Feinheitsgrad der Elementteilung
ω	Eigenfrequenz
Ω	Erregerfrequenz
M, m	Masse
k	Federsteifigkeit
a	Wellenlänge
c_O	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
y	modale Deformation
\dot{y}	modale Geschwindigkeit
D, D^*	Vergrößerungsfunktion
ν	Verhältniswert
T'	Temperatur

λ_T	Wärmeausdehnungskoeffizient
σ	Spannung
σ_{eff}	Vergleichsspannung
σ_p	plastischer Spannungsanteil
σ_o	Fließspannung
ε	Dehnung, Restitutionskoeffizient
ε_e	elastischer Dehnungsanteil
ε_{eff}	Vergleichsdehnung
ε_p	plastischer Dehnungsanteil
ε_o	Fließdehnung
Λ, λ	Eigenwert
l, j	Funktion von
$ $	Betrag einer Größe
J	Torsionsträgheitsmoment
J_y, J_z	Flächenträgheitsmoment
α_y, α_z	Schubverteilungszahl
ϕ_y, ϕ_z	bezogene Schubverteilungszahl
S_y, S_z	statisches Moment
b	Querschnittsbreite
x, y, z	Elementkoordinatensystem
X, Y, Z	Systemkoordinatensystem
η	Verlustfaktor
c	Dämpfung
c_{kr}	kritische Dämpfung
c_{eq}	äquivalente viskose Dämpfung
β	bezogenes, kritisches Dämpfungsverhältnis
ζ	hysteretischer Dämpfungskoeffizient
δ_o	logarithmisches Dekrement
R	Coulombscher Reibungskoeffizient
κ	Verfestigungsparameter
$d\lambda$	Proportionalitätsparameter
H', E_T, E_p	nichtlinearer Spannungs-Dehnungsparameter
A_a	Arbeit der äußeren Kräfte
A_i	Arbeit der inneren Kräfte
A_c	Dissipationsenergie
W	Formänderungsarbeit
K	Arbeit der Trägheitskräfte
d, δ	Differentialgröße
E_p	potentielle Energie
E_k	kinetische Energie

2. Bezeichnungen der Matrizen und Vektoren

$[k]$	Stabsteifigkeitsmatrix
$[K]$	Systemsteifigkeitsmatrix
$[m]$	Stabmassenmatrix
$[M]$	Systemmassenmatrix
$[\phi]$	Eigenvektormatrix
$[\phi_1], [\phi_2], [\phi_n], [\phi_\Lambda]$	normierte Eigenvektormatrix
$[\Lambda]$	Eigenwertmatrix
$[F], [A], [T]$	Transformationsmatrix

$[I]$	Einheitsmatrix
$[L]$	Matrix der dynamischen Lastfaktoren
$[P]$	Belastungsmatrix (knotenweise angeordnet)
$[C], [D_p], [D_{ep}], [E_p], [E_{ep}]$	Matrizen der nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehungen
$[K_I], [K_{II}], [K_{III}], [K_S]$	initiale Matrizen
$[K_t], [K_{ep}]$	tangentiale Steifigkeitsmatrix
$[K_1], [K_0]$	Übertragungsmatrix
$[]^{-1}$	Inverse einer Matrix
$[]'$	Transponierte einer Matrix
$[]$	Diagonalmatrix
$[], []$	untere, obere Dreiecksmatrix
$[N], [n]$	Matrix des Verschiebungsfeldes
$[B], [b]$	Matrix des Dehnungsfeldes
$[D], [d]$	Elastizitätsmatrix
$[C], [c]$	Dämpfungsmatrix
(v)	Deformationsvektor
(\dot{v})	Geschwindigkeitsvektor
(\ddot{v})	Beschleunigungsvektor
(x)	modaler Deformationsvektor
(y)	modaler Deformationsvektor
(\dot{x})	modaler Geschwindigkeitsvektor
(\dot{y})	modaler Geschwindigkeitsvektor
(Φ)	Eigenvektor
(P_{pt})	Ersatzlastvektor für die plastischen Dehnungen
(P)	Belastungsvektor (fortlaufend numeriert)
(F_t)	Schnittlastenzustand zum Zeitpunkt t
(P_{Ft})	Residuum des inneren Gleichgewichtes
(P_{ct})	nichtlineare Dämpfungskraft
$(v)_p, (v)_c$	dynamischer Deformationsverlauf, anteilig den nichtlinearen plastischen u. Dämpfungsanteilen zugeordnet
$(\dot{v})_c$	Geschwindigkeitsvektor dem nichtlinearen Dämpfungsglied zugeordnet
$(v)_R$	Deformationsvektor dem Reibungsglied zugeordnet
$()'$	transponierter Vektor

3. Bezeichnung der Indizes

i	nichtdynamischer Vorbelastungszustand, Ordnungszahl einer Eigenform
k	Knotennummer, Nummer eines Freiheitsgrades
n	Nummer des Zeitschrittes
N	Anzahl der Elemente
ex	exakter Wert
min	minimaler Wert
max	maximaler Wert
K	Konsistente Massenabbildung
L	Punktmassenabbildung
r	maximale Anzahl benutzter Eigenformen
t	Zeitindex einer veränderlichen Größe
$G_1, G_2, C_1, C_2, D_1, D_2, a_0, a_1$: Koeffizienten

4. Bezeichnungen des Zusatzlastverfahrens

$(P)_i$	Vorbelastungsvektor (gegeben durch äußere, statische Vorbelastung)
$(v)_i$	zu $(P)_i$ gehörender (statischer) Deformationsvektor ⁱ
$(P)_{iR}$	vollständiger resultierender Belastungsvektor nach Eintreten des Berstens infolge Vorbelastung
$(P)_{i\Delta}$	dynamischer Belastungsvektor nach Eintreten des Berstens infolge Vorbelastung (Zusatzlastverfahren)
$(P)_{iz}$	bei Änderung der Systemgliederung zusätzlich wirksam werdender Fugen-Schnittlastvektor infolge Vorbelastung (Zusatzlastverfahren)
$(v)_\tau$	vollständiger resultierender Deformationsvektor zum Zeitpunkt τ infolge Vorbelastung
$(v)_{\tau\Delta}$	reduzierter Deformationsvektor infolge Vorbelastung (Zusatzlastverfahren)
$(v)_v$	bei Systemänderung unter Vorspannung zusätzlich anzusetzender Anfangsdeformationsvektor
$(P)_v$	bei Systemänderung unter Vorspannung zusätzlich anzusetzender Vorbelastungsvektor (Zusatzlastverfahren)
$\tilde{t} = t_e$	Zeitspanne bis zur Änderung der mechanischen Gliederung
$(v)_\varepsilon$	initialer Deformationsvektor aus Vorspannung
$(\varepsilon)_v$	initialer Dehnungsvektor aus Vorspannung

1.0 Einleitung

Im Gegensatz zur Bemessung konventioneller Baukonstruktionen werden Kernkraftwerkskonstruktionen auch gegen solche extremen Lastfälle ausgelegt, die einerseits eine sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen, die aber andererseits die Konstruktion bis zur Grenze ihrer Tragfähigkeit beanspruchen dürfen. Deshalb genügt hier eine quasistatische Berechnung bei Auftreten von zeitlich veränderlichen Beanspruchungen in keinem Fall den gewünschten Sicherheitsanforderungen; es sind dynamische Analysen durchzuführen.

Neben der im Rahmen des Genehmigungsverfahrens notwendigen dynamischen Analyse des Gesamtsystems unter seismischer Erregung steht dabei die dynamische Untersuchung von nichtstationär beanspruchten Komponenten, wie z.B. von Rohrleitungen oder Brennelementen, deren dynamische Erregung aus Berstvorgängen druckführender Umschließungen resultiert, im Vordergrund. Die zur Lösung dieser Problemstellungen in rechenintensive und teilweise unübersichtliche Rechenprogramme mündenden theoretische Verfahren können aufgrund der Komplexität des Gesamtsystems nur Näherungen sein. Je nach Grad der gewünschten Genauigkeit beinhalten diese Lösungen auch nichtlineare Ansätze, wie beispielsweise nichtlineare geometrische Beziehungen oder nichtlineare Werkstoffgesetze und erlauben somit den Anforderungen gemäß die Ermittlung von sowohl konservativen als auch von wirtschaftlichen Ergebnissen. Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, daß sie das zu untersuchende System diskretisieren, d.h. in eine für die Berechnung ausreichende endliche Anzahl von Systemfreiheitsgraden, welche das Systemverhalten kennzeichnen, unterteilen.

Von besonderer Bedeutung für den Nachweis dynamisch beanspruchter Systemteile sind die mit der Änderung der Systemgliederung verbundenen und durch Impulsübertragung gekennzeichneten stoßartigen Beanspruchungen. Diese Stoßbeanspruchungen können durch wechselseitiges Aufschlagen von Rohrleitungen oder von Brennelementen entstehen. In diesen Fällen sind zusätzliche, vom jeweiligen Verformungszustand abhängige Nichtlinearitäten zu berücksichtigen. Der Lösungsansatz kann für den Bereich der Kontaktstellen (Fugen) zusätzliche Mechanismen für die durch plastisches Werkstoffverhalten hervorgerufene Energiedissipation enthalten.

Anlaß für die Durchführung der theoretischen Untersuchungen zu dieser Arbeit war die Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung der in Abb. 1.0 dargestellten sicherheitsrelevanten Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion.

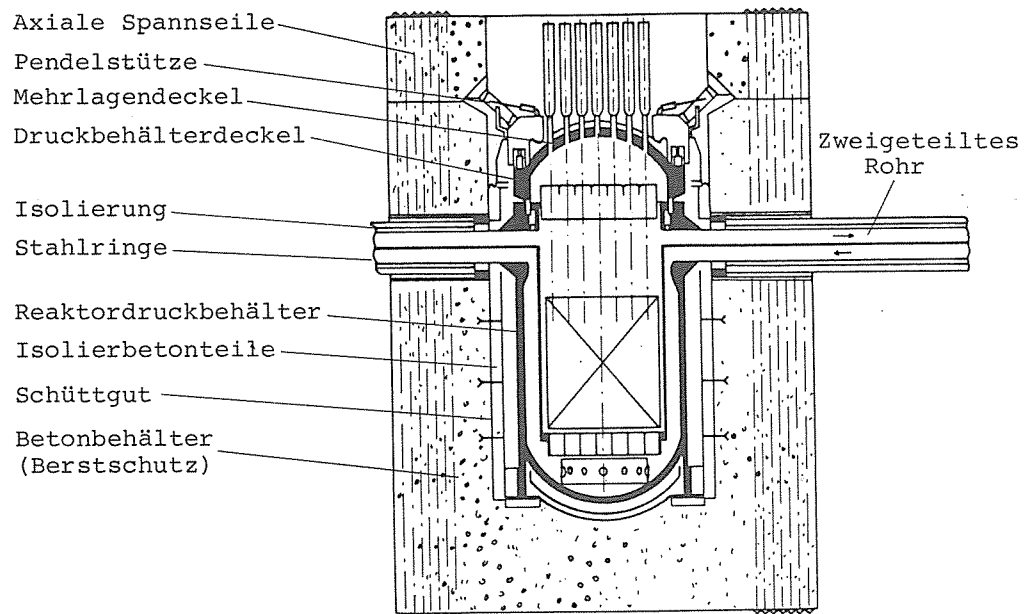


Abb. 1.0 Vereinfachte Anordnung einer Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion

2.0 Ziel und Umfang der durchgeführten Untersuchungen

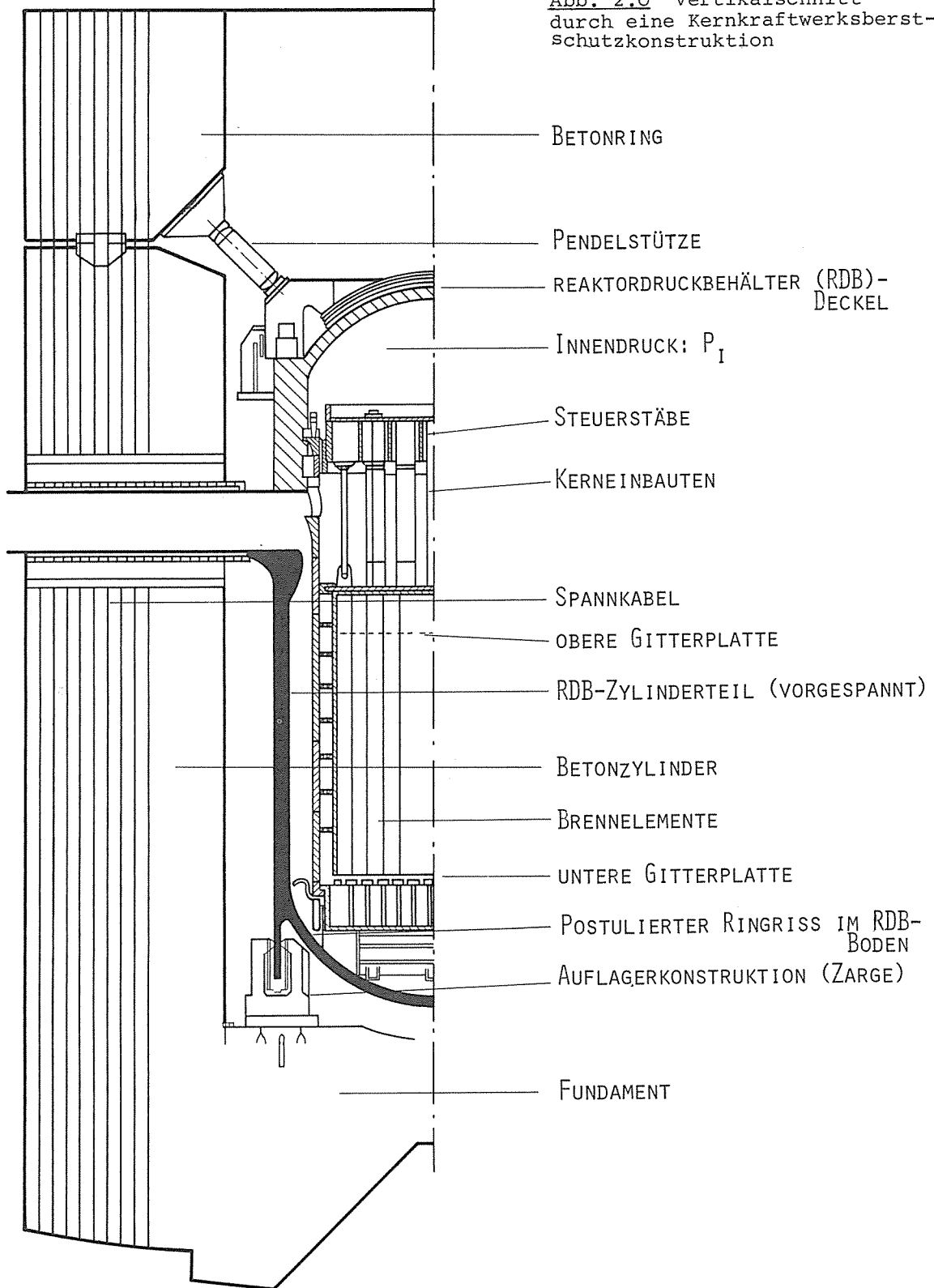
2.1 Allgemeine Problemstellung

Das Ziel der durchgeführten Untersuchungen ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung von dynamisch beanspruchten Reaktorschutzkonstruktionen, deren topologisch variable Systemgliederungen abhängig vom zeitlich veränderlichen Deformationszustand sind. Mit dem entwickelten Verfahren ist der Nachweis für die Integrität des Reaktorkerns zu führen, d.h. es ist u.a. nachzuweisen, daß der Reaktor nach einem Störfall sicher abgeschaltet werden kann.

Das besondere Merkmal der betrachteten Kernkraftwerks (KKW) - Konstruktion ist ein in sich geschlossenes Berstschutzsystem. Es besteht aus einem zylindrischen Reaktordruckbehälter, der über seinen oberen Deckel nach Abb. 2.0 mit Spannkabeln auf der Fundamentkonstruktion verankert ist. Den eigentlichen Berstschutz bildet eine dickwandige, den Reaktordruckbehälter umgebende Zylinderschale aus Beton. Als mögliche Versagensursache des Druckbehälters wird ein Bersten der Bodenkalotte postuliert. Durch die plötzliche Änderung des Belastungszustandes kann sich der Druckbehälter von seiner Auflagerung abheben, und unter stoßartiger Beanspruchung auf die Auflagerkonstruktion zurückprallen.

Die Aufgabe besteht also in der Analyse des Stoßvorganges für den Bereich der Druckbehälterauflagerung, für den Bereich der Kräfteeinleitung in die Spannkabel und für die Kernkonstruktion im Reaktordruckbehälter. Für den Kern muß der Nachweis geführt werden, daß die im Reaktordruckbehälter zwischen oberer und unterer Gitterplatte (s.Abb. 2.0) angeordneten und vorgespannten Brennstäbe - auch hier ist

Abb. 2.0 Vertikalschnitt durch eine Kernkraftwerksberst-Schutzkonstruktion



eine Änderung der mechanischen Gliederung nach Überwinden der lokalen Vorspannung möglich - nicht durch Überschreiten ihrer Tragfähigkeitsgrenze die Abschaltbarkeit des Reaktors gefährden.

Durch die Anordnung der hochfesten Spannseile und die Art der dynamischen Impulsbeanspruchung, die mit hohen Dehnungsgeschwindigkeiten erfolgt und deshalb die im plastischen Materialverhalten liegenden Sicherheiten bei konservativer Betrachtungsweise kaum zu berücksich-

tigen gestattet, wird ein Verfahren vorgeschlagen, welches das Systemverhalten im linearelastischen Bereich erfaßt. Weiter wird vorausgesetzt, daß eine eindimensionale Betrachtungsweise der longitudinal beanspruchten, rotationssymmetrischen Konstruktion ausreicht. Die zylindrischen Teile der Behälter dürfen mit ausreichender Genauigkeit eindimensional abgebildet werden.

Die Aufgabe besteht also darin, ein Verfahren zu entwickeln, mit dessen Hilfe Systeme, bei denen Stoßvorgänge und Systemschwingungen voneinander abhängen und sich wechselseitig beeinflussen, berechnet werden können. Dazu sind folgende Bedingungen einzuhalten:

- linear elastisches Materialverhalten (nichtlineare geometrische Beziehungen liegen nicht vor, da große Deformationen bei Longitudinaldeformation nicht relevant sind und Biegeschwingungen nur lokal begrenzt auftreten),
- eindimensionale Wellenausbreitung,
- Möglichkeit der Änderung der mechanisch-mathematischen Gliederung des Systems. Die Änderung der Systemgliederung ist durch das Öffnen und Schließen von Systemfugen, die über spezielle Steifigkeitseigenschaften verfügen, gekennzeichnet,
- beliebige Anfangsdeformations- und geschwindigkeitszustände sowie beliebige Belastungsverläufe in allen Systempunkten,
- Definition beliebiger Vorspann- und Vorbelastungszustände. Diese den Betriebszustand definierenden statischen Belastungen sind bei Änderung der Systemgliederung als zusätzliche Anfangswertprobleme zu berücksichtigen.

Die Besonderheit des für die Problemstellung zu entwickelnden Fugenmodells ist die alternierend starre oder freie Fugencharakteristik; die Fuge ist nur für zwei Positionen: offen oder geschlossen definiert.

Aus der gesichteten Literatur, die in Tabelle I vergleichend gegenübergestellt ist, sind zwei Verfahren bekannt, mit denen Systeme mit veränderlicher Gliederung analysiert werden können:

- Änderung der Steifigkeitsmatrix entsprechend der veränderten mechanischen Gliederung,
- Änderung der rechten Seite der Differentialgleichung (äußeres Belastungsglied) entsprechend der veränderten Systemgliederung: bei geschlossener Fuge werden die Kontaktkräfte als zusätzliche äußere Belastung interpretiert.

Beide Verfahren finden Anwendung bei Fugenverhalten, die keine starr-freie, sondern elastisch-freie oder plastisch-freie Kennlinien haben. Das erste Verfahren wird dann bevorzugt bei direkten Integrationsverfahren angewendet, wenn auch das Gesamtsystemverhalten nichtlinear ist und die Änderung der Steifigkeitsmatrix durch die geänderten Fugeneigenschaften in gleicher Weise vorgenommen

werden kann. Modale Integrationsverfahren werden für diesen Fall nur angewendet, wenn eine Änderung der Steifigkeitsmatrix nicht häufig auftritt.

Das zweite Verfahren ist besonders geeignet zur modalen Analyse, da bei nicht veränderter Steifigkeitsmatrix die Eigenformen erhalten bleiben.

Bei Fugenverhalten mit starr-freier Kennlinie sind aus der gesichteten Literatur nur Verfahren bekannt, bei denen unter Veränderung der Anzahl und der Zuordnung der Freiheitsgrade sowohl die Steifigkeitsmatrix als auch die rechte Seite geändert werden. Wenn Fugen unter Druckbeanspruchung stehen, ist eine Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade vorzunehmen.

Im Gegensatz zu diesem Verfahren wird bei dem vorliegend entwickelten Verfahren zur Simulation des starr-freien Verhaltens die Anzahl der Systemfreiheitsgrade für den Rechenablauf konstant gehalten; die Anzahl und die Zuordnung der Freiheitsgrade bleiben somit auch für die Fugenbereiche unverändert. Der Mechanismus der Fugen wird durch besondere Fugenelemente endlicher Steifigkeit numerisch definiert: Anstelle der offenen, d.h. freien Fuge ist die Fuge schlaff, d.h. sie hat eine sehr kleine Steifigkeit. Die geschlossene Fuge mit starrer Charakteristik wird durch eine Fuge sehr großer Steifigkeit angenähert. Diese numerischen Ersatzsteifigkeiten der Fugenelemente werden der Systemsteifigkeitsmatrix zugeordnet. Diese Vorgehensweise beinhaltet eine Modifikation des ersten Verfahrens für nicht-starre Kennlinien (Änderung der Steifigkeit). Die Anwendung des zweiten Verfahrens wird deshalb ausgeschlossen, weil durch das Auftreten der sehr großen Kontaktkräfte als äußere Belastung, die das Schließen bei starrer Kennlinie simulieren, im zeitlichen Integrationsablauf Unstetigkeiten auftreten können.

Da für die vorliegende Arbeit ein modales Integrationsverfahren benutzt wird, ist bei jeder Änderung der mechanischen Systemgliederung erneut ein Eigenwertproblem zu lösen. Ein Nachteil durch diesen möglichen höheren numerischen Aufwand ist hier aber nicht gegeben, da

- durch die Ermittlung einer begrenzten Anzahl von Eigenwerten, also durch die Beschränkung auf die wesentlichen, am stärksten angeregten Eigenformen die Lösung der Differentialgleichung vereinfacht wird (Vergrößerung der Zeitschrittweite, Reduktion der Anzahl der Unbekannten),
- die Fugen über eine große Anzahl von Zeitintervallen unverändert bleiben und deshalb eine Änderung der Systemgliederung gemessen an der Anzahl der benutzten Integrationszeitintervalle nur selten eintritt,
- die bei stoßartiger Beanspruchung mit angeregten höheren Eigenformen, welche durch die diskrete Abbildung des Systems

ungenau ermittelt werden, ausgeblendet werden können und somit gegenüber direkten Integrationsverfahren eine Steigerung der Rechengenauigkeit gegeben ist.

Darüberhinaus liegt der Vorteil der Eigenwertanalyse in der Möglichkeit der Bewertung der qualitativen Abbildung des Systems in ein mechanisches Modell (Federn und Massen). Diese Kontrolle der durch die diskretisierende Systemabbildung entstehenden numerischen Sensitivitäten ist besonders bei der dynamischen Analyse von Systemen unter stoßartiger Beanspruchung von außerordentlicher Bedeutung. Aus ungenauen, d.h. zu stark vereinfachenden Systemabbildungen folgen ungenaue modale Eigenschaften. Durch Fehlerfortpflanzung resultieren dann bedingt aus diesen ungenau ermittelten lokalen Systemwerten auch in der diskreten zeitlichen Integration der Differentialgleichung falsche Deformationsverläufe.

Bei jedem Wechsel eines Fugen-Zustandes wird die laufende Integration der Bewegungsgrößen abgebrochen und die zum Zeitpunkt vorhandenen Deformationsgrößen werden als Anfangswerte in die - mit neu berechneten modalen Werten - gestartete Integrationsprozedur eingebracht. Als Integrationsoperator wird ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung benutzt. Die Berechnung zeigt, daß eine Schrittweite von ein fünftel der bei der Integration benutzten kleinsten Eigenperiode konsistente Ergebnisverläufe erzeugt, d.h. auch bei noch kleiner werdender Schrittweite kann kein - hierzu, oder zum Deformationsverlauf von Beispielen, für die eine analytische Lösung möglich ist - abweichender Verlauf ermittelt werden.

Die Wahl eines modalen Verfahrens als Integrationsoperator ist auch von Bedeutung hinsichtlich des Steifigkeitsverhaltens der Fugenelemente. Die modale Integration der Bewegungsgleichungen vermeidet durch das Ausblenden der fiktiven modalen Werte von quasistarren Fugenelementen numerische Instabilitäten, wie sie bedingt durch lokal große Steifigkeiten bei direkten Integrationsverfahren auftreten. Vergleichsrechnungen zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen der Ergebnisverlauf von Systemen, in denen Fugenelemente benutzt werden, identisch ist mit Ergebnisverläufen von Systemen, in denen keine Fugenelemente benutzt werden, sondern in denen die Zuordnungen der Systemtopologie genau eingehalten werden.

Zur Berücksichtigung des Einflusses von Betriebsbelastungen (Vorbelastung, Vorspannung) auf die Änderung der Systemgliederung wird ein Verfahren, nachfolgend als Zusatzlastverfahren bezeichnet, vorgeschlagen, welches die Deformationsanteile aus nichtdynamischer und dynamischer Belastung getrennt ausweist. Zur vollständigen Deformationsanalyse sind anschließend

die getrennt ermittelten Beanspruchungsgrößen zu überlagern. Auf diese Weise kann bezogen auf die Nullage des Systems, die identisch mit der durch Vorbelastung und Vorspannung definierten Betriebsnullage ist, der Deformationsverlauf aus einer dynamischen Belastung, die - z.B. als Impulsbeanspruchung hervorgerufen durch Berstvorgänge - stufenartig angreifen kann, gesondert betrachtet werden.

Bei Änderung der mechanischen Gliederung wird die durch Vorspannung und statische Vorbelastung gespeicherte Deformationsenergie freigesetzt und ist als zusätzliches Anfangswertproblem zu berücksichtigen. Dieses zusätzliche Anfangswertproblem wird bei den aus der gesichteten Literatur bekannten Verfahren durch einen Anfangsdeformationsvektor dargestellt, der dem momentanen, aus der vorangegangenen dynamischen Berechnung ermittelten Deformationszustand zu überlagern ist. Der zusätzliche Anfangsdeformationsvektor ist für alle unterschiedlichen Konfigurationen verschieden und ist im Normalfall in allen Freiheitsgraden besetzt.

Da die Ermittlung der je nach Änderungsvorgang unterschiedlichen Anfangsdeformationsvektoren besonders für den Anteil Vorspannung - gekennzeichnet durch die jeweilige Änderung der Systemnullage - einen erheblichen Rechenaufwand erfordert, wird für das Zusatzlastverfahren ein anderer Weg beschritten.

Anders als bei den sonst üblichen Verfahren wird als dynamischer Belastungsvektor nicht der resultierende Belastungsvektor, sondern ein fiktiver, zur Gleichgewichtserzeugung des Schnittlastenzustandes notwendiger Restlastvektor, definiert. Ferner wird kein zusätzlicher Anfangsdeformationsvektor bei Änderungen von Systemgliederungen vorgegeben. Dieser Anfangsdeformationsvektor wird ersetzt durch einen als äußere Belastung wirkenden Zusatzlastvektor, dessen Komponenten bis auf zwei, den jeweiligen Fugeneinsteckstellen zugeordneten Anteilen gleich Null sind. Die im Betriebszustand ermittelten Fugenschnittlasten werden auf diese Weise als äußere Belastung aufgeprägt. Durch die einmalige Festlegung eines zusätzlichen, aber vom jeweiligen Änderungszustand unabhängigen Belastungsvektors, wird eine wesentliche Vereinfachung der dynamischen Analyse erzielt.

Ein weiterer Vorteil des Zusatzlastverfahrens ist dadurch gegeben, daß bei Variation von Systembemessungsgrößen im Rahmen von Sensitivitätsuntersuchungen im Gegensatz zu üblichen Verfahren bei Änderung der mechanisch-mathematischen Gliederung nicht jedesmal ein neuer, dem jeweiligen System angepaßter Anfangsdeformationszustand ermittelt werden muß.

Ein allgemeiner, in modaler Schreibweise geführter Nachweis zeigt die Identität beider Verfahren. Dabei wird sowohl für den

Vorspann- als auch für den Vorbelastungszustand die einfachere Handhabung des Zusatzlastverfahrens für die Anwendung auf komplexe Tragwerkskonstruktionen sichtbar. An einem einfachen, relevanten Modell wird die manuelle Anwendung des Verfahrens demonstriert.

Das Zusatzlastverfahren wird anschließend zur dynamischen Berechnung der in Abb. 2.0 dargestellten Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion bei einer Belastung, die durch den hypothetischen Störfall "Bersten des Druckbehälters" definiert ist, angewendet. Zur Veranschaulichung von Sensitivitätseinflüssen, die durch die Darstellung des kontinuierlichen Systems als diskretes mechanisch-mathematisches Modell mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden entstehen, wird für die Berstschutzkonstruktion eine Parameterstudie durchgeführt.

Anschließend wird die Erweiterung des für den linear elastischen Bereich entwickelten und schematisierten Zusatzlastverfahrens auf nichtlineares Materialverhalten hergeleitet. Nichtlinear elastisches Systemverhalten kann numerisch entweder durch

- das Verfahren der tangentialen Steifigkeit oder
- das Verfahren der Anfangsdehnungen (initial strain bzw. initial stress)

beschrieben werden. Beide Verfahren werden auch für plastisches Materialverhalten angewendet.

Durch die Veränderlichkeit der Steifigkeitsmatrix kann bei Anwendung der tangentialen Steifigkeit die Formulierung im dynamischen Bereich inkrementell, d.h. stückweise linear durchgeführt werden. Bei der Methode der Anfangsdehnungen hingegen bleibt die Steifigkeitsmatrix unverändert, dem plastischen Materialverhalten wird durch eine zusätzliche äußere Belastung Rechnung getragen. Diese Vorgehensweise der Darstellung eines Deformationszustandes durch einen passenden Belastungsvektor entspricht der Konzeption des Zusatzlastverfahrens. Deshalb wird bei der Erweiterung des Zusatzlastverfahrens auf linear elastisches, linear plastisches Materialverhalten (bilinear) die Methode der Anfangsdehnungen angewandt.

Für die Lösung der Differentialgleichung wird ein entsprechend dem Verfahren der tangentialen Steifigkeit formulierter, iterativer Lösungsweg vorgeschlagen.

Der durch die Materialhysterese dissipierten Energie wird durch eine zusätzliche Dämpfungskraft, die nur im Bereich plastischen Materialverhaltens auftritt, Rechnung getragen.

Die dem entwickelten Zusatzlastverfahren zugrundeliegende Idee der Gleichwertigkeit von Deformationen und äußeren Belastungen an einem beliebigen diskreten System ermöglicht eine lineare

Berechnung nicht linearer Systeme mit bereichsweiser Plastifizierung und beliebiger Dämpfung. Der Vorteil der modalen Schreibweise bleibt deshalb auch für nichtlineares Materialverhalten erhalten.

2.2 Literaturangaben für bisher verwendete Verfahren

Grundlagen und Lösungsansätze der dynamischen Strukturanalyse

Die grundlegenden Gleichungen und Lösungsansätze zur Ermittlung der Ausbreitung von Spannungswellen in Medien und der dynamischen Analyse von Strukturen sind den Werken der Fachliteratur [1-20] zu entnehmen. In LOVE, TIMOSHENKO, SZABÓ [1-3] werden die Grundlagen der Elastizitätstheorie mathematisch formuliert, während in PRZEMIENIECKI, ZIENKIEWICZ, COOK, BATHE [4-7] die numerische Lösung für diskrete und kontinuierliche Körper dargestellt ist. Spezifische Problemstellungen dynamisch erregter Strukturen sind in [8-15] zu finden. Den Schwerpunkt hinsichtlich der mathematisch-numerischen Lösung bzw. der programmtechnischen Formulierung der Lösungsalgorithmen ist ACHENBACH [16] bzw. FENVES, PILKEY [17-19] zu entnehmen. Klassische und analytische Lösungen spezieller Stoßprobleme gibt GOLDSMITH [20].

Spezielle Lösungsansätze für die Theorie der Wellenausbreitung

Die der anwendungsbezogenen Lösung von Stoßproblemen zugrundeliegenden Ansätze für einfache Vergleichsbeispiele zeigen RÜHL, DeJUHASZ, DONELL [21-23] für eindimensional, longitudinal beanspruchte Körper im linearen Bereich. Die Charakteristik dieser sogenannten elementaren Lösung der Stoßtheorie ist ein sprunghafter Anstieg für Spannung und Geschwindigkeit mit konstantem oder linearem Verlauf, bedingt durch das Fehlen von harmonischen Eigenschaften.

Verfahren für mehrdimensionale longitudinale Wellenausbreitungsvorgänge nach der klassischen Theorie sind in [24-34] zu finden, die exakten Lösungen und Näherungsansätze für zwei- und mehrdimensionale Probleme ergeben sich im linearen Bereich analytisch. Der Unterschied zur elementaren Theorie besteht in der Kopplung der Längsschwingungen mit Radial- und Schubdeformationen, charakteristisch sind dabei oszillierende Verläufe. Die Extremalwerte für die Spannungsverläufe und die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit weichen von den Werten nach der elementaren Lösung ab. Die Anwendung exakter Lösungen der klassischen Theorie ist nur unter idealisierten Bedingungen bei speziellen Konfigurationen möglich. Der Einfluß des Ansatzes auf die Wellenausbreitungsge-

schwindigkeit wird bei HUTCHINSON [24], MINDLIN [25], BERTHOLF [33], REISMANN [34] diskutiert, longitudinale Systeme unter stoßartiger Beanspruchung werden in SPILLERS [27], SKALAK [28], MIKLOWITZ [31], FOLK [32] untersucht. Für schlanke Körper konvergiert die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der klassischen Theorie auf den Wert der elementaren Theorie, ebenso entsprechen die Mittelwerte der Spannungsordinaten der klassischen Theorie den Werten der elementaren Theorie. Für die zu untersuchende Problemstellung ist die vereinfachende Darstellung der Struktur als eindimensionales Problem zutreffend, der rechnerische Aufwand für die Lösung bleibt deshalb der Aufgabe angemessen.

Einfache lineare Lösungsansätze für diskrete Systeme

Das Diskretisieren kontinuierlicher Systeme bewirkt, daß anstelle der durch die geradlinigen Geschwindigkeitsverläufe gekennzeichneten elementaren Lösung für impulsartige Beanspruchung eine Näherungslösung mit oszillierendem Charakter entsteht. Die numerisch-mathematische Behandlung derartiger Näherungsansätze wird in [35-43] für die Methode der Finiten Elemente und in [44-46] für das Differenzenverfahren veranschaulicht. CLOUGH [37] gibt einige grundlegende Ansätze und Beispiele für direkte und modale Integrationsverfahren, während ARCHER [35] eine konsistente Finite Elementschreibweise, in der die Deformationsansätze der in der Massenmatrix aufsummierten Trägheitskräfte konsistent mit den statischen Deformationsansätzen der in der Steifigkeitsmatrix aufsummierten Formänderungskräfte sind, formuliert. ARCHER verläßt somit erstmalig das Konzept der Punkt-massenabbildung. CAUGHEY [36] definiert die Bedingungen, unter denen ein System mit linear viskoser Dämpfung - auch als proportionale Dämpfung bezeichnet - als klassisches Eigenwertproblem behandelt werden darf. SCHOLL [38] bzw. MATTHEES [43] diskutieren den Lösungsverlauf dynamisch erregter Stabsysteme bzw. den Einfluß der Diskretisierung auf kontinuierliche Systeme unter Impulsbeanspruchung, während GLADWELL [40], KAMATT [42] lediglich das Eigenschwingungsverhalten spezieller Stabelemente untersuchen. TALBOT [39] beschreitet durch Wahl der Finiten Elemente einen der klassischen Theorie zugehörigen Weg. Das Diskretisieren kontinuierlicher Systeme mittels Ortskoordinaten in finite Differenzen enthält ebenfalls die Möglichkeit der Darstellung beliebiger Randbedingungen. Die Beschreibung der Systemtopologie komplexer Strukturen jedoch erfordert einen im Vergleich zum Verfahren der Finiten Elemente höheren Aufwand. PRITCHARD [44], LAWRENCE [45] diskutieren Lösungsansätze für elastische, eindimensionale Wellenausbreitungsprobleme durch das Differenzenverfahren, während ONDRACEK [46] einen für spezielle elastisch-plastische, eindimensionale Wellenausbreitungsprobleme geeigneten Differenzenoperator entwickelt.

Die Integration der Bewegungsgleichung kann direkt, d.h. gekoppelt, oder modal, d.h. entkoppelt vorgenommen werden. Bei McCALLEY [47] werden nicht invariante modale Beteiligungsfaktoren für Masse und Belastung infolge seismischer Erregung definiert. Invariant, d.h. unabhängig von der Normierung der modalen Werte, erscheint lediglich das Produkt aus modalem Beteiligungsfaktor und zugehörigem Eigenvektor. HORII [48] wendet das Modalverfahren auf nichtlineare Systeme dergestalt an, daß in jedem Zeitintervall eine Modalanalyse durchgeführt wird, deren Werte für den folgenden Integrationsschritt als konstant vorausgesetzt werden. Die Dämpfung in Form der geschwindigkeitsbehafteten viskosen Dämpfung wird hier für den Fall nichtlinearen Materialverhaltens vernachlässigt. Lokal unterschiedliche viskose Dämpfung führt bei YAMADA [49] zum komplexen Eigenwertproblem. NEUBERT [50] entwickelt Elemente höherer Ordnung, deren Massendarstellung die Näherungslösung der punktförmigen oder konsistenten Massenabbildung verbessern soll, und diskutiert die ermittelten spektralen Werte dieser Elemente im Hinblick auf die spektralen Eigenschaften des Integrationsoperators. Nach dem bei EDGE [51] und HURTY [52] dargestellten Verfahren der modalen Synthese lassen sich die modalen Werte komplexer Systeme durch Kopplung der sehr genau berechneten modalen Werte von Teilsystemen ermitteln. Die genaue modale Lösung für das nichthomogene Problem eines kontinuierlichen Systems stellt OVUNC [53] vor, der Belastung und der möglichen Systemtopologie sind dabei aber enge Grenzen gesetzt sind. Die Anwendung modalen Systemwerte im nichtlinearen Bereich zeigt KAVANAGH [55] mit dem Verfahren der dynamischen Relaxation unter Benutzung der Werte für die kritische Dämpfung.

Nach der Hypothese der momentanen Eigenformen stellt NICKELL [54] ein iteratives Verfahren vor, in welchem durch Eigenwertextrapolation auch nichtlineare Systeme modal integriert werden können, wenn die dynamischen Deformationen in Form von kleinen harmonischen Deformationen auf große statische Deformationen überlagert werden. Dieses Verfahren kann je nach Problemstellung schneller zum Ziel führen als direkte Verfahren, es wird aber eher für Probleme der Strukturdynamik als für Stoßwellenfortpflanzungsberechnungen vorgeschlagen. Die bei der Analyse der Stoßwellenfortpflanzung und des Kontaktes von Körpern mit der Methode der Finiten Elemente auftretenden Probleme werden in [56-61] dargestellt. Den Vergleich der zu erwartenden Ergebnisgenauigkeit bei Punktmassendarstellungen zu analytischen Lösungen gibt ELLIS [56]. Das Verfahren wird von GABRIELSON [59] durch ein in bestimmten Bereichen definiertes nichtlineares Werkstoffverhalten erweitert, wobei plastisches Materialverhalten mit einem Reibungs-Dissipationsmechanismus durch ein linear viskos gedämpftes Modell angenähert ist. Ein einfaches Stoßmodell eines Balkens zeigt

SCHMITT (57) für die Impulsübermittlung bei Anregung höherer Eigenformen durch Anwendung von Restitutionskoeffizienten. Eine Bewertung der nach der Methode der Finiten Elemente errechenbaren Ergebnisse bei Stoßproblemen gibt SHIPLEY (58). Die durch die numerische Berechnung festgestellten dispersiven Eigenschaften der Verläufe werden durch graphische Mittelung relativiert. McCAFFERY (60) stellt für unterschiedliche Stoßprobleme mögliche und sinnvolle Lösungswege gegenüber, der Vergleich modaler Beteiligungsfaktoren, die Darstellung der Dämpfung durch Restitutionskoeffizienten und das Problem des elastischen, inelastischen und starren Stoßes nehmen dabei einen weiten Raum ein. PETERSSON (61) formuliert zur Berechnung von statischen Kontaktproblemen ein Verfahren mit inkrementellen Steifigkeitsbeziehungen. Bei der Simulation der Fugencharakteristik treten aber hier bei sehr großen Fugensteifigkeiten numerische Instabilitätsprobleme auf.

Konvergenzkriterien und Stabilitätsnachweise für Operatoren linearer Bewegungsgleichungen werden in [72-76] gegenübergestellt. GOUDREAU (72) , DUNHAM (73) , KRIEG (74) vergleichen den Lösungsverlauf von Operatoren bei Stoßproblemen sowie die mögliche Anwendbarkeit modaler Operatoren auf nichtlineare Zustandsgleichungen. GERADIN (75) , HILBER (76) zeigen den Einfluß der numerischen Dämpfung auf die Konvergenz von Operatoren.

Nichtlineare Lösungsansätze zur Ermittlung der Wellenausbreitung bei stoßartiger Beanspruchung

Lösungsansätze für die Berechnung nichtlinearer dynamischer Probleme mit der Methode der Finiten Elemente werden in [62-71] dargestellt. YAMADA (62), MARCAL (64), ARGYRIS (66), HARTZMANN (67), NAYAK (68) , ARMEN (69) , BIFFLE (70) stellen die grundlegenden nichtlinearen Beziehungen für ein- und mehrdimensionales Verhalten nach dem Konzept der äquivalenten Spannungs-Dehnungsbeziehung bei isotroper oder kinematischer Werkstoffverfestigung auf und formulieren Iterationsvorschriften für inkrementelle Ansätze. ZIENKIEWICZ (63) entwickelt das Prinzip der Anfangsdehnungen, das dem tangentialen Steifigkeitsverfahren gegenübergestellt wird. BUSHNELL (71) zeigt, daß auch Operatoren nach der Methode der tangentialen Steifigkeit nicht immer konvergieren. STRICKLIN (65) vergleicht die Konvergenz von Operatoren für nichtlineare, inkrementelle Zustandsgleichungen; nichtlineare modale Operatoren werden nur für begrenztes elastisch-plastisches Verhalten und für geometrische Nichtlinearitäten vorgeschlagen.

Integrationsoperatoren bei nichtlinearen Werkstoffverhalten und geometrischen Nichtlinearitäten werden in [77-97] beschrieben. Bei AYRE (78) besteht die Nichtlinearität im gekoppelten nichtlinearen Ansatz für Steifigkeit und Dämpfung eines Einmassensystems, der allerdings nur für kurze Belastungsimpulse Gültigkeit hat. HEIFITZ (79) hat einen Operator, der bei großen Dehnungen duktiler Werkstoffe gültig ist, für ideal starr-plastische

Kennlinien entwickelt. WEEKS [80] schlägt zur Konvergenzverbesserung eine Taylorextrapolation des nichtlinearen Anteils vor, der mit einem nichtlinearen Dämpfungsansatz der Form : $c \dot{v} + a_1 \dot{v}^2$ (a_1 : nichtlinearer Koeffizient) gekoppelt ist. CLOUGH [81] stellt die viskose und hysteretische Dämpfung gegenüber und entwickelt nichtlineare modale, den direkten nichtlinearen Operatoren gleichwertige Verfahren. WU [82] verdeutlicht, daß aufgrund der unterschiedlich genauen Eigenwertdarstellung für Punktmassenabbildungen größere Integrationsschrittweiten zulässig sind als für konsistente Massenabbildung. BELYTSCHKO [96] zeigt, daß Elemente höherer Ordnung im Hinblick auf die Integrationsschrittweite wenig effektiv sind, während für nichtlineare Beziehungen allgemein eine Schrittweitenverringerung von 10% - 20% gegenüber linearen Zustandsgleichungen als ausreichend vorgeschlagen wird. Zum Stabilitätsnachweis wird eine laufende Energiebilanzierung empfohlen. ARGYRIS [83] entwickelt ein modifiziertes Steifigkeitsverfahren mit kubischer Interpolation der Trägheitskräfte. NAKAO [84] schlägt ein elastisch-plastisches Verfahren bei seismischer Beanspruchung vor, in welchem durch quasistatische Kondensation der Massenmatrix und durch die Darstellung plastischer Gelenke als nichtlineare Drehfedern eine modale Überlagerung vorgenommen werden kann, der Dämpfungsansatz bleibt linear viskos. WALLACE [85] definiert die Dämpfung für nichtlineares Verhalten als zusätzliche äußere, in den Knoten angreifende Belastung mittels eines aus dem Kelvin-Modell entwickelten Triparameter-Modelles. Der Lösungsverlauf wird verifiziert an einem Zylindermodell, welches unter Stoßbeanspruchung steht, durch den Vergleich zum Verlauf von Hertz'schen Kontaktkräften. McNAMARA [86] , [88] , STRICKLIN [87] vergleichen implizite und explizite Operatoren im Hinblick auf die Anwendung des Verfahrens der Anfangsdehnungen und des Verfahrens der tangentialen Steifigkeit. Es wird festgestellt, daß die Summenschreibweise gegenüber der inkrementellen Schreibweise bei Anwendung des Verfahrens der Anfangsdehnungen auch bei modaler Integration zu numerischen Instabilitäten führen kann, wenn als zusätzliche äußere Belastung das Residuum aus dem Ungleichgewicht des vorhergehenden Schrittes und die als initialen Lasten formulierten plastischen Dehnungen gegeben sind. Deshalb wird eine Extrapolation des nichtlinearen Anteils mit anschließender Gleichgewichtsiteration dergestalt vorgeschlagen, daß große Integrationsschrittweiten möglich sind, die bei weiterer Vergrößerung keine signifikante Änderung des Ergebnisverlaufes zur Folge haben. Aufgrund des Aufbaus impliziter Operatoren ist aber für diese in jedem Fall aus Stabilitätsgründen eine Gleichgewichtsiteration notwendig. PECKNOLD [89] schlägt bei seismischer Beanspruchung ein Integrationsverfahren für die Berechnung von Schubalken mit nichtlinearer Steifigkeit durch eine Korrektur der plastischen Dehnungen vor. NAGARAJAN [90] bevorzugt für die Berechnung nichtlinearer Stoßprobleme direkte Verfahren, während TILLERSON [94] modale Lösungen vorschlägt. Nichtlinearer Dämpfung wird bei MONDKAR [97] durch einen der linear viskosen Dämpfung äquivalenten

Ansatz, der den nichtlinearen Anteil der tangentialen Steifigkeitsmatrix in gleicher Weise wie den linearen Anteil der Anfangssteifigkeitsmatrix enthält, Rechnung getragen. In gleicher Weise formuliert BELYTSCHKO [91], [95] den Einfluß nichtlinearer Dämpfung durch einen linear viskosen, von der jeweiligen Steifigkeit abhängigen Dämpfungsansatz, wobei an den Kontaktflächen zusätzliche Reibungs-Dissipationsmechanismen definiert werden können. Aufgrund der jeweiligen spektralen und bei Überlagerung kompensatorischen Fehler wird als Integrationsoperator ein explizites Verfahren an einem Punktmassmodell vorgeschlagen. BATHE [92], DUNDER [93] formulieren in inkrementeller und totaler Schreibweise ein Integrationsverfahren mit veränderlichem Zeitschritt für tangentialen Steifigkeiten mit Gleichgewichtsiteration. Sie empfehlen zur Berechnung von Systemen, die unter stoßartiger Beanspruchung stehen, eine isotrope Werkstoffverfestigung und einen Dämpfungsansatz, dessen nichtlineare Anteile entsprechend der veränderlichen Steifigkeitsmatrix als hysteretische Dämpfung behandelt werden.

Berechnung von Systemen unter stoßartiger Beanspruchung und Wechselwirkungseffekten

Theoretische Ansätze zur Berechnung von Systemen, die unter stoßartiger Beanspruchung stehen, folgen aus [98-101], während in [102-113] die praktische Anwendung spezieller Problemstellungen unter Berücksichtigung von Wechselwirkungseffekten, teilweise mit veränderlicher Gliederung gezeigt wird. Aufgrund der Tatsache, daß für elastisch-plastische Stoßprobleme keine analytischen Lösungen existieren, finden bei nichtlinearem Materialverhalten unterschiedliche Näherungsansätze, z.B. bei HERRMANN [101] in Form von Differenzenverfahren oder bei WASLEY [98] für idealisiertes Materialverhalten Anwendung. MATHIEU [99], SCHMIDT [100] trennen die Berechnung des Stoßverhaltens von Körpern in zwei Teilprobleme: in das reine Stoßproblem, welches durch Ansätze nach der Newtonschen Stoßtheorie durch einen Restitutionskoeffizienten oder nach dem Hertz'schen Gesetz - sofern die Stoßzeit groß gegenüber der Eigenschwingungszeit ist - gegeben ist, und in das Anfangswertproblem, für welches ein kontinuierlicher Ansatz gewählt wird. GUPTA [102] untersucht den Aufprall eines tankförmigen Körpers hoher Geschwindigkeit auf eine feste Oberfläche mit Schalenelementen unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten. BOHM [103], MORRONE [104] berechnen das linear elastische Schwingungsverhalten von Balkenelementen unter seitlicher Stoßbeanspruchung mit Wechselwirkung, hervorgerufen durch seismische Beanspruchung. Zur Ermittlung des Verlaufes der Stoßkraft wird eine konstante Federsteifigkeit in der Fuge vorausgesetzt, der erhöhten Energiedissipation im Stoßbereich wird durch ein Coulombsches Reibungsmodell oder durch ein zusätzliches linear viskoses Dämpfungsglied Rechnung getragen.

Das kritische Dämpfungsverhältnis β wird aus einem Restitutionskoeffizienten von 50% berechnet und hat den Wert $\beta = 10\%$. Für das restliche System bleibt ein Dämpfungskoeffizient von $\beta = 2\%$ weiterhin maßgebend. DUBOWSKY [105], WINFREY [106] untersuchen die Erregung höherer Eigenformen bei Wechselwirkungsproblemen dynamisch beanspruchter Gelenke, in denen ein Spiel vorhanden ist. Sowohl die Konstruktion selbst als auch das Gelenk, dessen Steifigkeit durch einen linearisierten Hertz'schen Ansatz ermittelt wird, werden linear elastisch berechnet. Die Stoßlast wird bei WINFREY über den Impulserhaltungssatz in der Bewegungsgleichung als äußere Belastung ausgewiesen. Die dynamische Analyse komplexer Systeme mit Stoßbeanspruchung durch Wechselwirkungseffekte wird in [107-112] behandelt. NUNO [107] wendet ein Modalverfahren an und behandelt die Kontaktkräfte als zusätzliche äußere Belastung. Ein Reibungsansatz in der Fuge bewirkt eine begrenzte, zusätzlich wirksam werdende Energiedissipation. LIEN [108], VISSER [109] benutzen einen linear viskosen Dämpfungsansatz, der konservativerweise am geöffneten System ermittelt wird. LEE [110], RAMANI [112] setzen linear elastisches Systemverhalten für Rohrleitungsschwingungen voraus, lediglich die Auflagerkonstruktion wird elastisch-plastisch berechnet. Nichtlineare Dämpfungseigenschaften werden durch von der Beanspruchung abhängige, linear viskose Ansätze mit veränderlichem Dämpfungskoeffizienten angenähert. MATTHEES [111] entwickelt ein Verfahren, welches den Einfluß von Vorspannung und Vorbelastung auf die Wechselwirkung selbst zu erfassen gestattet.

Darstellung von Dämpfungseigenschaften

Grundlegende Beziehungen des Dämpfungseinflusses bei linearem und nichtlinearem Werkstoffverhalten in Abhängigkeit von der Beanspruchung sind bei LAZAN [113], [114] für Materialien und Konstruktionskomponenten zu finden. Die Möglichkeit der Überführung beanspruchungsabhängiger hysteretischer Dämpfung in ein linear viskoses Dämpfungsmodell zeigt LO [115] für den harmonisch erregten Balken mit einem kontinuierlichen Ansatz. Durch Vorgabe einer Hysteresisschleife kann ein je nach Beanspruchung linearer oder nichtlinearer und frequenzabhängiger Verlustfaktor zugrunde gelegt werden. CRANDALL [116] entwickelt für das entsprechende Problem am diskreten Systemmodell bei nichtharmonischer Erregung Näherungsansätze. NELSON [117], WILSON [118] behandeln die bei der Berechnung von diskreten Systemmodellen mit lokal veränderlicher Dämpfung auftretenden numerischen Probleme, einschließlich des Vergleichs der Möglichkeiten zur Darstellung der Energiedissipation durch hysteretische und viskose Dämpfung im nichtlinearen Bereich.

3.0 Ermittlung der Zustandsgleichungen eines linear elastischen Systems

3.1 Darstellung der Arbeitsgrößen

Gesucht wird das Deformationsverhalten eines durch Stabelemente darstellbaren räumlichen Systems. Der Verschiebungszustand ist durch die Deformationen der Knoten bestimmt. Im allgemeinen Fall sind je Knoten drei voneinander unabhängige Wege und drei voneinander unabhängige Drehungen möglich. Belastungen dürfen nur in den Knoten angreifen.

Erfasst werden die elastischen Elementdeformationen der Biegesteifigkeit, Längssteifigkeit, Torsionssteifigkeit und Schubsteifigkeit. Die Hauptträgheitsachsen der Elemente können beliebig im Raum orientiert sein.

Der Deformationszustand eines elastischen Kontinuums sei definiert durch das Verschiebungsfeld (u) . Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist ein System dann im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten der eingepprägten inneren und äußeren Kräfte δA_i und δA_a für jede mögliche, mit den Randbedingungen des Systems verträgliche virtuelle Verschiebung $\delta(u)$ verschwindet:

$$\delta A = \delta A_a + \delta A_i = 0 \quad (3.1)$$

Die vollständige Arbeit der inneren Kräfte setzt sich zusammen aus dem Anteil δW , den ein elastischer Körper bei seiner Entspannung zu leisten vermag und dem Anteil δK aus den Trägheitskräften:

$$-\delta A_i = +\delta W + \delta K \quad (3.2)$$

δW bzw. δK bedeuten den Zuwachs der Formänderungsarbeit bzw. der Arbeit der Trägheitskräfte bei einer virtuellen Verschiebung.

Die virtuelle Verschiebung $\delta(u)$ hat den mit ihr kompatiblen virtuellen Dehnungszustand $\delta(\epsilon)$ zur Folge. Mit dem bekannten momentanen Spannungszustand (σ) kann die virtuelle Formänderungsarbeit δW ermittelt werden:

$$\delta W = \int_V \delta(\epsilon)' (\sigma) dV \quad (3.3)$$

Die Trägheitskräfte eines infinitesimalen Volumenelementes dV leisten bei der virtuellen Verrückung $\delta(u)$ die Arbeit:

$$\delta K = \int_V \mathcal{P} \delta(u)' (\ddot{u}) dV \quad (3.4)$$

$(\ddot{u})' = (\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_z)$ kennzeichnet den Beschleunigungszustand eines Punktes des Körpers im Kartesischen Koordinatensystem.

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte lautet:

$$\delta A_a = \int_O \delta(u)' (p_o) dO + \int_V \delta(u)' (p_V) dV + \delta(v)' (P) \quad (3.5)$$

(p_o) und (p_v) sind die Oberflächen- und Volumenkräfte. Die Einzel-
lasten (P) greifen in den Systempunkten an, in denen der Verfor-
mungszustand (v) definiert ist.

Die Deformation des elastischen Körpers soll zwischen den Zeit-
punktent t_o und t_1 kontinuierlich verlaufen. Die Verschiebung (u) ist
somit eine Zeitabhängige. Unter der Annahme, daß die virtuelle
Verschiebung $\delta(u)$ zu den Zeitpunkten t_o und t_1 den Wert Null hat,
gilt:

$$\delta(u) = (0) \quad \text{für } t = t_o, t = t_1$$

Das zwischen den Zeitpunkten t_o und t_1 vorgenommene Zeitintegral
lautet unter Berücksichtigung von (3.1), (3.2), (3.4):

$$\int_{t_o}^{t_1} \delta W dt = \int_{t_o}^{t_1} \delta A_a dt - \int_{t_o}^{t_1} \int_V \mathcal{S} \delta(u)' (\ddot{u}) dt dV \quad (3.6)$$

Der letzte Integralausdruck von (3.6) entspricht der Variation
der kinetischen Energie E_K des Systems:

$$E_K = \frac{1}{2} \int_V \mathcal{S} (\dot{u})' (\dot{u}) dV \quad , \quad (3.7)$$

$(\dot{u})' = (\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$ kennzeichnet den Geschwindigkeitszustand eines
Punktes im kartesischen Koordinatensystem. Die Variation von (3.7)
gibt:

$$\delta E_K = \int_V \mathcal{S} \delta(\dot{u})' (\dot{u}) dV \quad (3.8)$$

Nach Umformung von (3.8) nach der Kettenregel lautet das Integral
über δE_K zwischen t_o und t_1 :

$$\begin{aligned} \int_{t_o}^{t_1} \delta E_K dt &= \int_{t_o}^{t_1} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{S} \delta(u)' (\dot{u}) \right] dV - \int_V \mathcal{S} \delta(u)' (\ddot{u}) dV \right] dt \\ &= \int_V \left[\mathcal{S} \delta(u)' (\dot{u}) \right]_{t_o}^{t_1} dV - \int_{t_o}^{t_1} \int_V \mathcal{S} \delta(u)' (\ddot{u}) dV dt \\ &= - \int_{t_o}^{t_1} \int_V \mathcal{S} \delta(u)' (\ddot{u}) dV dt \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit $\left[\mathcal{S} \delta(u)' (\dot{u}) \right]_{t_o}^{t_1} = 0$, , da die virtuellen Verrückungen zum Zeit-
punkt t_o und t_1 vereinbarungsgemäß gleich Null sind.

Eingesetzt in (3.6) ergibt sich:

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} (W - E_K) dt = \int_{t_o}^{t_1} \delta A_a dt \quad (3.10)$$

Bei konservativen Systemen, d.h. bei Systemen, in denen die Arbeit
der äußeren Kräfte unabhängig vom Belastungspfad und nur abhängig
von den erreichten Endverschiebungen ist, gilt die Umformung von
(3.10):

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} (W - E_K + E_p) dt = 0 \quad , \quad (3.11)$$

E_p ist das Potential der äußeren Kräfte. Nach dem Hamiltonschen
Prinzip muß der Integralausdruck (3.11) für elastische Systeme
unter konservativer dynamischer Belastung einen stationären Wert
annehmen.

Unter der Annahme, daß die virtuelle Verschiebung $\delta(u)$ identisch mit einem aktuellen Verschiebungszuwachs $d(u)$ ist, und $(u) + d(u)$ den Verschiebungszustand zum Zeitpunkt $t+dt$ kennzeichnet, gilt:

$$\delta(u) = \frac{\partial(u)}{\partial t} dt = (\dot{u}) dt = d(u) \quad . \quad (3.12)$$

Die Variationen der Formänderungsarbeit und der kinetischen Energie lauten in gleicher Weise:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{\partial W}{\partial t} dt = dW = \int_V d(\epsilon)'(\sigma) dV, \\ \delta E_K &= \frac{\partial E_K}{\partial t} dt = dE_K = \int_V \rho d(\dot{u})'(\dot{u}) dV, \\ \delta A_a &= \frac{\partial A_a}{\partial t} dt = dA_a = -dE_p. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die dynamische Analyse kontinuierlicher Systeme kann mit den Mitteln der Matrixalgebra durch den Näherungsansatz für diskrete Systeme beschrieben werden. Der Verschiebungszustand des kontinuierlichen Systems (u) wird bei dieser Methode durch den Verschiebungszustand (v) einer endlichen Anzahl von beliebigen Systempunkten (Freiheitsgraden) definiert. Die Ableitung der Eigenschaften eindimensionaler Elemente und der Bewegungsgleichung ist Anhang A zu entnehmen.

3.2 Betrachtungen zur Energiedissipation

Durch den Mangel der zur Verfügung stehenden Werkstoffdaten und Modellvorstellungen, die der praktischen Berechnung eines dynamischen Systems zugrundegelegt werden können, und im Hinblick auf die Anwendung vereinfachender, rechenzeitsparender Rechenmodelle, durch welche die Dissipationsmechanismen mit ausreichender Genauigkeit angenähert werden können, sind zur Analyse komplexer Strukturen vereinfachende Lösungsansätze üblich.

Folgende mathematischen Lösungsmodelle sind bekannt:

- linear viskose Dämpfung für leicht gedämpfte Strukturen (geschwindigkeitsproportional),
- Reibungsdämpfung (Coulombsche Dämpfung mit konstanten Koeffizienten) in Systemknoten angreifend
- Struktur - oder Hysteresisdämpfung (amplitudenproportional).

Die gekoppelten Bewegungsgleichungen diskreter Systeme werden üblicherweise so formuliert, daß sie durch modale Transformation entkoppelbar sind. In einigen Sonderfällen besteht die Möglichkeit, linear viskos gedämpfte Systeme nach dem klassischen Eigenwertverfahren zu lösen. Exakt ist die Zustandsgleichung mit viskoser Dämpfung allgemein allerdings nur durch einen komplexen Ansatz zu lösen. Der Einfluß der Strukturdämpfung kann durch die Analogiebetrachtung zu linear viskos gedämpften Systemen erfaßt werden.

Die modale Lösung gedämpfter Systeme in Anlehnung an die Lösung von Einmassenschwingern folgt aus Anhang B.

4.0 Numerische Darstellung von Fugenmechanismen

Zur Untersuchung von Stoßproblemen finden in der gesichteten Literatur drei unterschiedliche Verfahren, die den Verlauf der Kontaktbeanspruchung zweier aufeinanderstoßender Körper erfassen, Anwendung; es sind:

1. Verfahren unter Zugrundelegen von Restitutionskoeffizienten ε . Mit diesen Verfahren können nur Stoßprobleme sehr einfacher Feder-Masse-Systeme näherungsweise berechnet werden, da die zeitliche Zuordnung des Stoß-Kontaktproblems nicht erfaßt wird. Näherungsweise folgt der für die Berechnung dieser Systeme zu ermittelnde kritische viskose Dämpfungskoeffizient:

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.1a)$$

aus dem Restitutionskoeffizienten oder der Stoßzahl ε :

$$\varepsilon = - \frac{\dot{v}_{t_{n+1}}}{\dot{v}_{t_n}} \quad , \quad (4.1b)$$

\dot{v}_{t_n} , $\dot{v}_{t_{n+1}}$ sind die vor und nach dem Stoßvorgang gemessenen Systemgeschwindigkeiten. β enthält den durchschnittlichen Anteil aller bei dem Stoßvorgang angeregten Eigenformen.

2. Verfahren mit Berücksichtigung der Steifigkeit des Stoßbereiches. Diese Verfahren werden z.B. in der Getriebelehre bei der dynamischen Untersuchung beweglicher Gelenke und bei der dynamischen Analyse von durch Biegeschwingungen induzierten Kontaktvorgängen, wie beispielsweise seismisch erregten Rohrleitungsstoßbeanspruchungen durch Lager- und Dämpfungseinrichtungen oder bei wechselseitigen Stoßvorgängen von Brennelementführungsrohren in einem Reaktor-druckbehälter angewendet.

Die benutzten Fugensteifigkeiten sind entweder experimentell oder durch Annahme spezieller Kontaktgesetze ermittelt. Es ist nachgewiesen, daß eine linearisierte Form dieser, nur einen begrenzten Systembereich erfassenden Kontaktgesetze eine ausreichend genaue Näherung gewährleistet. Die Voraussetzung für dieses Verfahren bildet die quasistatische Betrachtungsweise des Stoßbereiches.

Dazu muß die Forderung, daß die Eigenschwingzeit des Systems sehr viel kleiner als die Dauer des Stoßproblems ist, erfüllt werden. Diese Annahme gilt für den Stoß sphärischer Körper oder Körpern mit kugeligen Kontaktzonen, nicht aber für den Stoß longitudinaler Stab- und Zylindersysteme.

Das angeführte Verfahren kann bei der Berechnung dann auf numerische Instabilitäten führen, wenn sehr steife Fugenbereiche und somit große Federsteifigkeiten vorliegen.

3. Verfahren, bei denen der Stoßvorgang vollständig durch die dynamische Analyse des Gesamtsystems nach der klassischen Theorie untersucht wird. Für einfache Systeme existieren analytische Lösungen. Die Berechnung von Stoßvorgängen komplizierter Systeme dagegen ist auf numerischem Weg durch die diskretisierende Darstellung des Gesamtsystems in Finite Elemente oder durch die diskrete Lösung der Differentialgleichung des kontinuierlichen Körpers mittels Finiter Differenzen möglich. Die unterschiedlichen Merkmale aller aus der Literatur hierfür bekannten Methoden sind der der vergleichenden Darstellung von Tab. I zu entnehmen.

Da aufgrund der eindimensionalen Betrachtungsweise für die vorliegende Arbeit nur die beiden unterschiedlichen Zustände der Fugen: offen oder geschlossen von Bedeutung sind, und der Stoßvorgang nicht in einem lokal begrenzten Kontaktbereich, sondern vollständig durch das gesamte System verlaufend zu untersuchen ist, findet im weiteren nur das 3. Verfahren Anwendung:

Öffnen bedeutet, daß sich im weiteren Deformationsverlauf die durch die betreffende Fuge getrennten Systemteile unabhängig voneinander verformen können. Die Folge für die numerische Berechnung ist, daß aus einem Freiheitsgrad (dem Freiheitsgrad der Fuge) zwei Freiheitsgrade (die Freiheitsgrade der Fugenufer) entstehen. Im mechanischen Sinn sind die Fugenufer frei, da sie keine Zugkraft übertragen können.

Schließen bedeutet genau die Umkehrung dieses Vorganges. Da die den Freiheitsgraden zugeordneten Massen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten behaftet sind, tritt im Bereich der Fuge eine stoßartige Beanspruchung ein, gekennzeichnet durch die Änderung der Bewegungsimpulse. Die Geschwindigkeiten erfahren eine sprunghafte Änderung. Im mechanischen Sinn folgt aus dem Schließen eine starre Charakteristik, in der Fuge können Druckkräfte übertragen werden.

In der Literatur wurde nur ein Verfahren gefunden, welchem eine frei-starre Fugencharakteristik zugrundegelegt ist, Lien [108]. Bei jeder Änderung der mechanischen Gliederung des Systems ist hier

- eine Änderung der Steifigkeitsmatrix durch die Überlagerung der Koeffizienten entsprechend der veränderten Gliederung,
- eine Änderung der rechten Seite, die auch die Fugenstoßbeanspruchung enthält, entsprechend der veränderten Gliederung,
- eine Änderung der Anzahl der Freiheitsgrade

vorzunehmen. Durch den Wechsel der Anzahl der unbekanntenen Deformationen ändert sich auch fortlaufend die Zuordnung der Knoten und Freiheitsgrade. Für ein System mit n Fugen existieren 2^n unterschiedliche Zuordnungszustände.

Die Berechnung des Stoßkraftzeitverlaufes unter Zuhilfenahme des Impulserhaltungssatzes, wie sie in dem Verfahren nach WINFREY [106] vorgeschlagen wird, um die unbekanntene Stoßbeanspruchung explizit ausdrücken zu können, erscheint aus 2 Gründen unzuweckmäßig:

- die Möglichkeit zur Formulierung eines geeigneten Mechanismus der Energiedissipation geht verloren,
- auch bei Anwendung sehr genauer Integrationsverfahren sind die errechenbaren Bewegungsimpulse aufgrund der Systemdiskretisierung nur eine Näherung; dies gilt sowohl für die errechnete Geschwindigkeit \dot{v} als auch für die errechnete Beschleunigung \ddot{v} , wie Abb. 4.1 zu entnehmen ist.

Zur Vereinfachung wird deshalb vom Verfasser ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Zuordnung und auch die Anzahl der Freiheitsgrade für alle Gliederungszustände gleich bleibt. Durch das Öffnen und Schließen von Systemfugen wird auch hier die Veränderbarkeit der mechanischen Gliederung des Systems definiert.

Für die beiden Zustände: Offen oder geschlossen wird die ideelle Fugensteifigkeit: Frei oder starr bei diesem Verfahren durch eine rechnerische, d.h. fiktive Fugensteifigkeit k^* ersetzt.

Die rechnerischen Fugensteifigkeiten k^* unterscheiden sich im geschlossenen Zustand durch den Faktor 10^{+5} zu

$$k_{I}^* = \frac{K_{i+1,i+1} + K_{i+2,i+2}}{2} \cdot 10^{+5}$$

im offenen Zustand durch den Faktor 10^{-5} zu

$$k_{II}^* = \frac{K_{i+1,i+1} + K_{i+2,i+2}}{2} \cdot 10^{-5}$$

von den Elementsteifigkeiten der Nachbarelemente entsprechend Abb. 4.2. Durch diese Steifigkeitsdarstellung wird praktisch

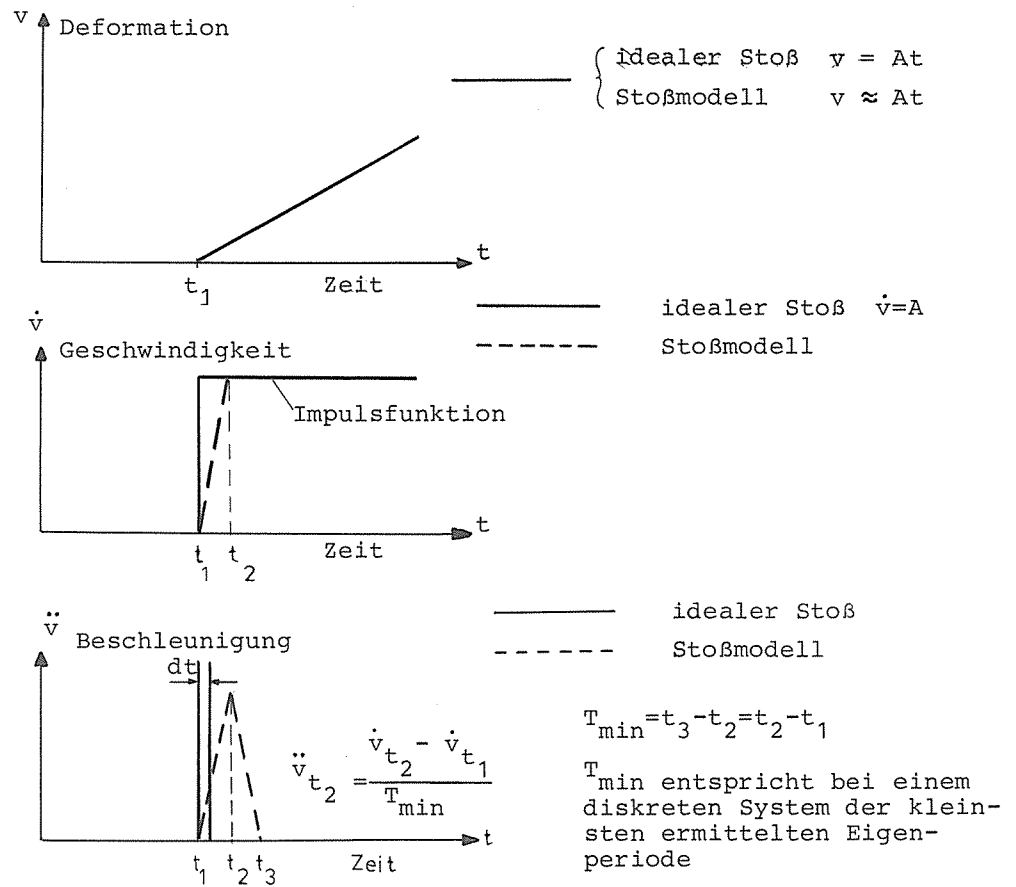


Abb. 4.1 Vergleichende Gegenüberstellung der Bewegungsimpulse eines Feder-Massensystems unter Impulsbeanspruchung nach [106]

erreicht, daß

geschlossene Fugen eine große Steifigkeit,
 offene Fugen eine geringe Steifigkeit

besitzen. Durch die numerische Berechnung wird auf diese Weise für

den geschlossenen Zustand die Kopplung zweier
 Freiheitsgrade,

den offenen Zustand die Entkopplung zweier Frei-
 heitsgrade bzw. zweier Systemhälften

erzielt.

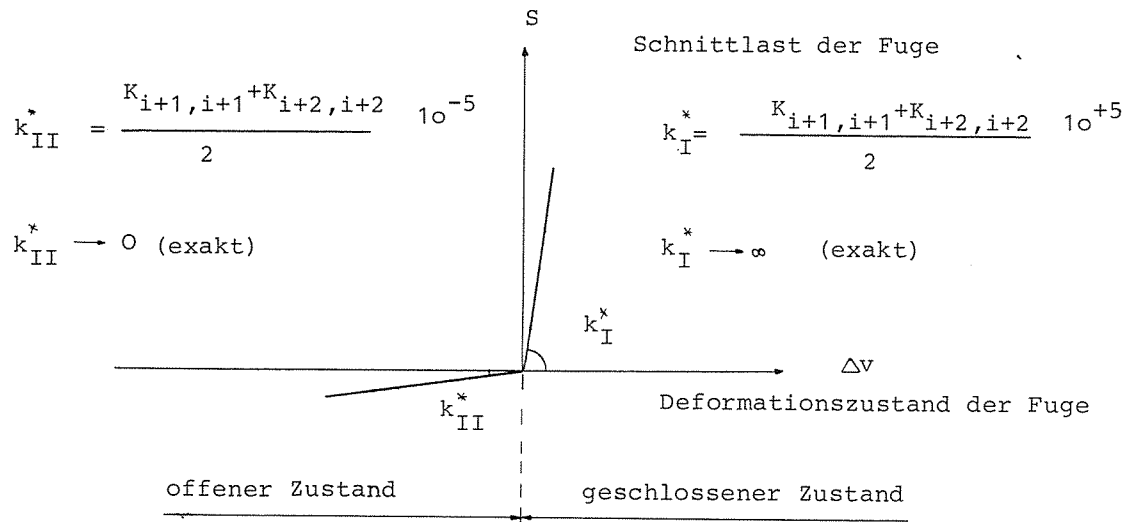


Abb. 4.2 Fiktives Steifigkeitsverhalten der Fuge zur Ermittlung der numerischen Steifigkeit

In der Systemsteifigkeitsmatrix werden die entsprechenden Fugensteifigkeiten k^* gemäß Abb. 4.3 gliedweise eingeordnet ($K_{n,m}$ sind die vorhandenen Elementsteifigkeiten).

$K_{i-1,i-1}$	$K_{i-1,i}$	$K_{i-1,i+1}$		
$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$		
$K_{i+1,i-1}$	$K_{i+1,i}$	$K_{i+1,i+1} + k^*$	$-k^*$	
		$-k^*$	$K_{i+2,i+2} + k^*$	$K_{i+2,i+3}$
			$K_{i+3,i+2}$	$K_{i+3,i+3}$

Abb. 4.3 Einordnen der fiktiven Fugensteifigkeit k^* zwischen die Freiheitsgrade $i+1, i+2$

Durch die Fugensteifigkeit k^* ist das System über die Freiheitsgrade $i+1$ und $i+2$ hinweg gekoppelt. Die Fugensteifigkeit k^* wird im Programm wie eine Elementsteifigkeit behandelt.

Um eine Änderung der momentan vorhandenen mechanischen Systemgliederung feststellen zu können, wird im

- geschlossenen Zustand das Vorzeichen der Schnittlast eines vorher definierten, neben der Fuge liegenden Bezugselementes unter Berücksichtigung der Vorbelastungen abgefragt. Da das Fugenelement im geschlossenen Zustand die räumliche Ausdehnung Null hat, kann durch die Wahl eines sehr kleinen Nachbarelementes die Schnittlast der Fuge errechnet werden.
- offenen Zustand das Vorzeichen der Differenzdehnung der Fugenelemente abgefragt.

abgefragt.

Die numerische Berechnung wurde auf einer Anlage des Types TR 440 durchgeführt. Für die Wortdarstellung in der Anlage stehen intern 38 Stellen der Basis 2 für die Mantisse zur Berechnung zur Verfügung. Daraus folgt für die externe Zahlendarstellung zur Basis 10 eine je nach Konvertieren exakt darstellbare Mantisse mit 10,6 bis 13,0 Stellen.

Der Vergleich eines fünfstelligen Ergebnisprotokolls für das Antwortverhalten des Deformations-Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlaufes läßt rechnerisch keinen Unterschied zu einer genauen Berechnung erkennen, in welcher die geöffnete und die geschlossene Fuge, dem momentanen Deformationszustand entsprechend, durch die genaue Anzahl von Systemfreiheitsgraden repräsentiert wird.

Die in der Literatur, z.B. bei LEE [110] zitierten numerischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichung bei Vorhandensein von nahezu starren Federkennlinien werden in der vorliegenden Arbeit dadurch vermieden, daß die in den höheren Eigenformen sichtbar werdenden fiktiven Fugeneigenschaften bei der Ermittlung des Ergebnisverlaufes mittels der vorangehenden Modalanalyse herausgenommen werden.

Eine andere Möglichkeit für die numerische Handhabung der Änderung des Systemgliederungszustandes durch fiktive Federsteifigkeiten bietet die Betrachtungsweise, die bei der Änderung ermittelte fiktive Steifigkeit durch eine geänderte und zum Gliederungszustand passende fiktive Belastung zu ersetzen. In diesem Fall bleiben bei Änderung der Systemgliederung die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix und somit auch die modalen Werte erhalten. Die Eigenwertanalyse wäre demnach nur einmal durchzuführen, wodurch eine Rechenzeiterparnis möglich wäre. Dieser Gewinn ist aber nur ein relativer, da zu jedem Zeitpunkt eine zusätzliche Gleichgewichtsiteration zur Erzeugung des gewünschten Fugenzustandes notwendig ist. Darüberhinaus kann diese Vorgehensweise numerische Instabilitäten hervorrufen, da als fiktive Belastung immer der iterierte Belastungszustand des vorhergehenden Zeitschrittes zu verwenden ist. In der Gleichgewichtsiteration selbst sind die Anteile aus Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenträgheitskräften in gleicher Weise zu be-

rücksichtigen. In der vorliegenden Arbeit findet aus den genannten Gründen das Verfahren der fiktiven Belastung keine Anwendung. Für die rechnerische Lösung müssen zwei unterschiedliche Fugenarten definiert werden:

- Fugenart 1 ist zu Beginn offen und hat eine endliche Ausdehnung Δ ,
- Fugenart 2 ist zu Beginn geschlossen und kann vorgespannt oder vorbelastet sein.

Beim erstmaligen Übergang vom offenen zum geschlossenen Zustand muß für die Fugenart 1 zur Vermeidung logischer Zuordnungsfehler eine Koordinatentransformation vorgenommen werden. Damit soll ausgeschlossen werden, daß ein Systempunkt (die geschlossene Fuge) zwei - um die Fugenlänge Δ - unterschiedliche Wege ausführen kann.

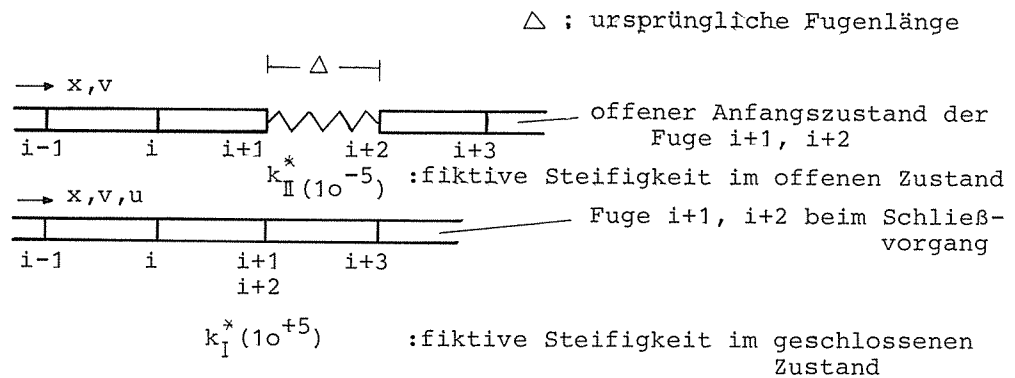


Abb. 4.4 Schematische Darstellung der Zustandsänderung einer Fuge

Deshalb wird für diesen ersten Schließungsvorgang eine Koordinatentransformation derart vorgenommen, daß alle Deformationen, die bis zu diesem Zeitpunkt aufgetreten sind, gleich Null gesetzt werden. Alle bisher ermittelten Wege werden unter Zuhilfenahme der Systemsteifigkeit durch fiktive Kräfte p^{fi} ersetzt. Dazu wird in A 1.6 die Transformation:

$$(u) = (v) - (\Delta) \quad (4.2)$$

durchgeführt. In (4.2) ist:

- (u) der neue Deformationsvektor nach dem Schließen mit den Anfangswerten Null,
- (Δ) derjenige Deformationsvektor von (v) , der sich beim Schließvorgang eingestellt hat. Im Fugenbereich selbst gilt: $v = \Delta$ (Abb. 4.4).

Aus (A 1.6) und (4.2) folgen:

$$[M] \{(\dot{u}) + (\dot{\Delta})\}' + [C] \{(\dot{u}) + (\dot{\Delta})\}' + [K] \{(u) + (\Delta)\} = (P).$$

Also:

$$[M] (\ddot{u}) + [C] (\dot{u}) + [K] (u) = (P) - [K] (\Delta).$$

Für die weitere Berechnung muß also der zusätzliche Belastungsvektor:

$${}^{(P)}\dot{f}_i = - [K] (\Delta) \quad (4.3)$$

als dynamische Belastung berücksichtigt werden.

5.0 Sensitivitätsuntersuchungen der Systemdiskretisierung

Da bei einer stoßförmigen Beanspruchung eines kontinuierlichen Systems alle, d.h. auch die höheren Eigenformen, angeregt werden, ist bei der rechnerischen Ermittlung des Schwingungsverlaufes auch deren Einfluß zu berücksichtigen. Dabei ist zu beachten, daß die höheren Eigenformen durch die Diskretisierung des Systems zunehmend ungenau werden und deshalb in der zeitlichen Integration nicht verwendet werden dürfen. Es muß aus diesem Grunde die Forderung erhoben werden, das kontinuierliche System für die numerische Berechnung hinreichend fein zu diskretisieren, damit alle benutzten Eigenformen die gewünschte Ergebnisgenauigkeit ermöglichen. Im Folgenden sollen mit Hilfe der modalen Analyse, die in der Arbeit als Integrationsverfahren angewendet ist, die Eigenschaften der Diskretisierung des Systems bewertet werden.

Die Beurteilung der Diskretisierung kann nach 2 Methoden vorgenommen werden:

1. Vergleich unterschiedlicher Massendarstellung

Es werden je nach Anforderung an die gesuchte Genauigkeit die Ergebnisverläufe von v oder \dot{v} für Punktmassen und konsistente Massendarstellung eines Systems zur Korrelation gebracht. Wenn beide Verläufe ausreichend genau korrelieren, ist die Systemdiskretisierung ausreichend. Wenn die Verläufe trotz weitergehender Verfeinerung des Elementrasters nicht ausreichend genau korrelieren und durch Oszillation in den höheren Frequenzen abweichen, kann der qualitativ genaueste Ergebnisverlauf aus der Mittelung der unterschiedlichen höheren Frequenzverläufe erzielt werden.

2. Bewertung der höheren Eigenformen

Es werden die unterschiedlichen Einflußwerte der Eigenformen für den maßgebenden Ergebnisverlauf von v oder \dot{v} untersucht. Unter der Annahme, daß die nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ermittelten Ergebnisverläufe die genaue Lösung der Differentialgleichung sind, lautet die Lösung von (A 1.6) unter Zuhilfenahme der modalen Schreibweise (B 3.5c) für den stationären Zustand und dem Ansatz (B 1.3c) am Punktmassensystem:

$$\begin{aligned}
(v) &= [\phi_M] \cdot (y) \\
&= [\phi_M] \left\{ [e^{-\beta \lambda^2 t}] [\cos \omega_c t] (y_0) + [\beta \lambda^2 \omega_c^{-1}] [\sin \omega_c t] (\dot{y}_0) \right. \\
&\quad \left. + [\sin \omega_c t] [\omega_c]^{-1} (\dot{y}_0) \right\} \quad . \quad (5.1a)
\end{aligned}$$

Wird der Ergebnisverlauf auf die Anfangswerte (v_0) und (\dot{v}_0) bezogen und aus Gründen der Konservativität der Einfluß der Dämpfung vernachlässigt, folgt:

$$(v) = [\phi_M] \left\{ [\cos \omega t] [\phi_M]^{-1} [M] (v_0) + [\sin \omega t] [\lambda]^{-\frac{1}{2}} [\phi_M]^{-1} [M] (\dot{v}_0) \right\} \quad . \quad (5.1b)$$

Zur Ermittlung des instationären Verlaufes von (A 1.6) für die Belastung (P) wird der Impulssatz benutzt. Für ein System mit einem Freiheitsgrad gilt:

$$M \Delta \dot{y} = \{ P[\tau] - k y[\tau] \} d\tau \quad ,$$

mit $\Delta \dot{y}$ als Änderung der Geschwindigkeit durch die Belastung. Für kleine Werte $d\tau$ kann gezeigt werden, daß der Deformationsanteil aus y um eine Größenordnung kleiner ist als der aus $\Delta \dot{y}$. Für kurze Lastimpulse kann also nach Abb. 5.1 der Steifigkeitsanteil vernachlässigt werden. Somit lautet der Impulssatz:

$$M \Delta \dot{y} \approx P[\tau] d\tau$$

oder:

$$\Delta \dot{y} \approx \frac{1}{M} P[\tau] d\tau \quad .$$

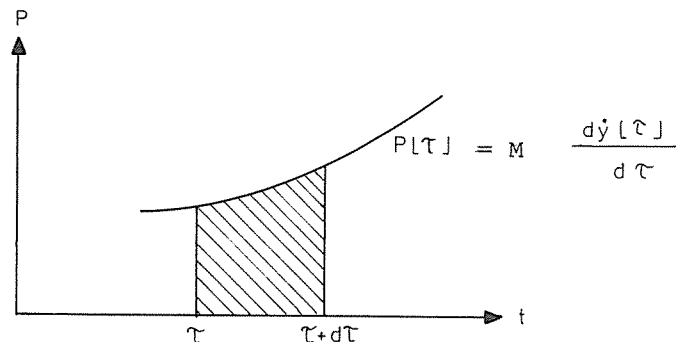


Abb. 5.1 Verlauf der Belastungsordinate eines Freiheitsgrades

In gleicher Weise kann in (5.1a) der Anteil infolge (y_0) vernachlässigt werden und der Zuwachs von (v) infolge einer Geschwindigkeitsänderung zum Zeitpunkt τ lautet dann:

$$d(v)[t] = [\phi_M] \left\{ [e^{-\beta \lambda^2 (t-\tau)}] [\sin \omega_c (t-\tau)] [\omega_c]^{-1} d(\dot{y}_0)[\tau] \right\} \quad .$$

Durch die Identität $\Delta \dot{y} = d(\dot{y}_0)[\tau]$ ergibt die Integration unter Berücksichtigung der nach (B 4.5b) normierten modalen Masse und der modalen Belastung nach (B 3.5c):

$$\begin{aligned}
(v)[t] &= (v) \Big|_{\tau=0}^t \\
&= [\phi_M] \int_{\tau=0}^t \left\{ [e^{-\beta \lambda^2 (t-\tau)}] [\sin \omega_c (t-\tau)] [\omega_c]^{-1} [\phi_M]^{-1} (P)[\tau] \right\} d\tau \quad , \quad (5.2a)
\end{aligned}$$

bzw. bei Vernachlässigen der Dämpfung:

$$(v) = [\phi_M] \int_{\tau=0}^t \{ [\sin \omega (t - \tau)] [\Lambda]^{-\frac{1}{2}} [\phi_M]' (P) \} d\tau \quad (5.2b)$$

Die Lösung von (5.2a) lautet für eine konstant verlaufende Impuls-
last:

$$(v) = [\phi_M] \{ \{ [\omega_c] - [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \} \{ [\beta \wedge \frac{1}{2} \sin \omega_c t] + [\omega_c \cos \omega_c t] \} \} [\beta^2 \wedge + \omega_c^2]^{-1} [\omega_c]^{-1} [\phi_M]' (P) \} \quad (5.3a)$$

Vernachlässigen der Dämpfung ergibt:

$$(v) = [\phi_M] [1 - \cos \omega t] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' (P) \quad (5.3b)$$

Entsprechend lautet der Deformationsverlauf für eine Lastfunktion
mit endlicher Anstiegszeit T_L nach Abb. 5.2:

$$(v) = [\phi_M] [L] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' (P) \quad (5.3c)$$

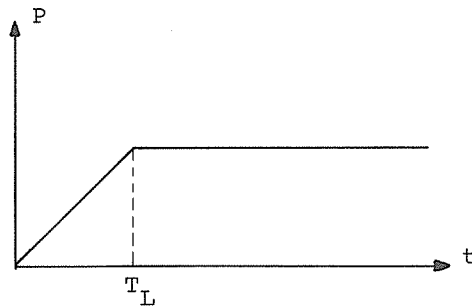


Abb. 5.2 Belastungsfunktion mit endlicher Anstiegszeit

$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & \\ & \ddots \\ & & l_{nn} \end{bmatrix}$ ist die dynamische Einflußmatrix, sie lautet für den Lastverlauf mit endlichem Anstieg im Bereich $t \geq T_L$:

$$[L] = -\left[\frac{T}{T_L 2\pi} \right] \left[\sin 2\pi \frac{t}{T} \right] + [I] + \left[\frac{T}{T_L 2\pi} \right] \left[\sin 2\pi \frac{t - T_L}{T} \right] \quad (5.4)$$

T ist die modale Schwingungsperiode. Für $T_L \rightarrow 0$ d.h.

$$[L] = [1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}] \text{ folgt wiederum (5.3b).}$$

Das Antwortverhalten eines kontinuierlichen Systems unter Impulsbeanspruchung ist sowohl für den stationären als auch für den instationären Zustand durch einen linearen Anstieg der Deformationen und durch einen stufenförmigen, konstanten Geschwindigkeitsverlauf gekennzeichnet. Deshalb wird nur der instationäre Anteil von (5.3a) benutzt, um zu untersuchen, in welche Mindestanzahl von Elementen das System zur Berechnung zu unterteilen ist, um einen konsistenten, d.h. von der gewählten mathematisch-mechanischen Modellabbildung unabhängigen Deformationsverlauf zu gewährleisten.

Die Diagonalmatrix $[L]$ enthält die zeitlich veränderlichen, modalen dynamischen Lastfaktoren, d.h. zu jeder Zeit t werden in $[L]$ die Beteiligungsfaktoren aller Eigenvektoren ausgewiesen. Aus (5.3c) folgt:

$$(y) = [L] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' \quad (P)$$

oder

$$(y) = [L] (y)_{\text{stat}} \quad (5.5a)$$

$(y)_{\text{stat}}$ ist der modale Deformationsvektor bei statischer Belastung.

Zur Berechnung der zeitlich veränderlichen, dynamischen (nicht-modalen) Lastfaktoren wird Gleichung (5.5a) mit $[\phi_M]$ multipliziert und $(y)_{\text{stat}}$ durch den statischen Knotendeformationsvektor

$$(v)_{\text{stat}} = [\phi_M] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' \quad (P) \quad (5.6a)$$

ersetzt:

$$\begin{aligned} (v) &= [\phi_M] (y) = [\phi_M] [L] (y)_{\text{stat}} , \\ (v) &= [\phi_M] [L] [\phi_M]^{-1} (v)_{\text{stat}} , \\ (v) &= [L^*] (v)_{\text{stat}} . \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Die Matrix $[L^*]$ enthält die zeitlich veränderlichen dynamischen Lastfaktoren:

$$[L^*] = [\phi_M] [L] [\phi_M]^{-1} = [\phi_M] [L] [\phi_M]' [M] . \quad (5.7)$$

Für $[L] = [I]$ ergeben sich die statischen Deformationen der Freiheitsgrade k durch die Summation über die Eigenformen i :

$$(v_k) = \sum_i (v_k)_i \quad (5.8a)$$

Die Summanden von (5.8a) lassen sich trennen und in Matrixform bringen:

$$\begin{aligned} [v_{ki}] &= [\phi_M] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' [P_{kk}] \\ &= [\phi_M] \left[\frac{\phi_M' P}{\omega^2} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Matrix $[v_{ki}]$ veranschaulicht den Einfluß der Eigenform i auf die statische Knotendeformation k . Verzichtet man bei der Darstellung des zeitlichen Einflusses auf die Bewertung des Deformationsverlaufes und betrachtet nur die Maximaldeformationseinflußwerte der Eigenformen durch den Vergleich der maximalen Komponenten - die im Normalfall durch die erste Eigenform mit der Periode T_1 bei $T_L / T_1 \ll 1$ gegeben sind - so sind die in (5.9) ermittelten Spalten für die Deformationen mit den jeweiligen Maximalwerten $l_{ii \text{ max}}$ der Einflußmatrix $[L]$ zu multiplizieren. Die maximalen Gesamtdeformationen ergeben sich mit (5.8a) aus der Summe:

$$(v_k) = \sum_i l_{ii \text{ max}} (v_k)_i \quad (5.8b)$$

Die Anzahl r der zu benutzenden Eigenformen folgt aus der Forderung:

$$l_{rr} \max (v_k)_r \leq l_{11} \max (v_k)_1 \nu \quad (5.10)$$

Als zulässiges Abbruchkriterium wird $\nu = 3\%$ vorgeschlagen. Wenn die mit (C 2a) bewertete Genauigkeit der Eigenperiode r hinreichend und (5.10) erfüllt ist, gilt das kontinuierliche System für den gegebenen Belastungsverlauf als ausreichend diskretisiert. Für (P) wird nach (5.3a) und (5.4) ein gleichförmiger Verlauf in allen Freiheitsgraden vorausgesetzt.

Die Relation der Komponenten einer statischen Einflußmatrix $[v_{ki}]$ für eine Systemdiskretisierung bestimmter Feinheit ermöglicht keine Aussage über die Relationen der Komponenten anderer Matrizen $[v_{ki}]$ bei anderer, d.h. groberer oder feinerer Diskretisierung. Es kann lediglich festgestellt werden, daß von einem bestimmten Diskretisierungsgrad aufwärts der Anteil der höheren Formen immer kleiner wird, und da gleichzeitig die unteren Formen immer genauer ermittelt werden, vermindert sich gleichzeitig die nach (5.10) ermittelte notwendige Anzahl der bei der Integration zu berücksichtigenden Eigenformen.

Als Regel gilt: Wenn die Komponenten des Lastvektors in Freiheitsgraden großer Steifigkeit angreifen, ist die Konvergenz von (5.10) klein.

Für eine Impulslast ergibt sich als Maximalwert der Einflußmatrix $[L]$:

$$l_{ii} \max = 2$$

d.h. alle statischen Einflußwerte $[v_{ki}]$ werden dynamisch gleich stark erregt.

Bei einer Lastanstiegszeit von $T_L \neq 0$ tritt durch die Abminderung der höheren Eigenformen nach Abb. 5.3 für (5.10) eine sehr schnelle Konvergenz ein, d.h. kontinuierliche Systeme sind dann weniger genau zu diskretisieren und bei der Integration ist eine geringere Anzahl von Eigenformen zu benutzen.

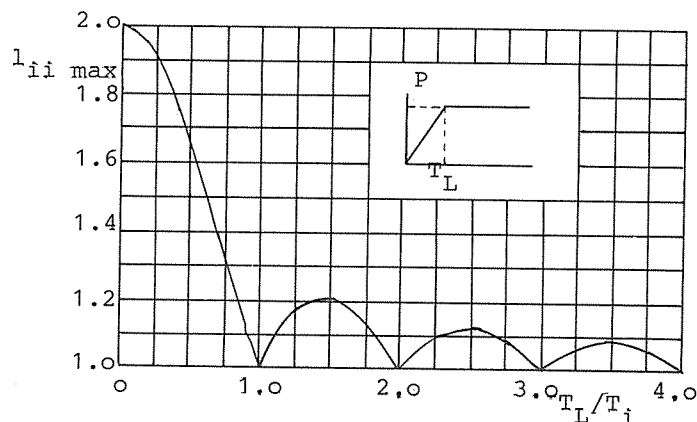


Abb. 5.3 Abhängigkeit der maximalen dynamischen Einflußfaktoren $l_{ii} \max$ von der Eigenperiode T_i und der Lastanstiegszeit T_L

Wird die Systemdiskretisierung nicht nach der Genauigkeit des Verlaufes der Deformation sondern der Spannung bewertet, bieten sich 2 Möglichkeiten:

- durch die Differenzen der relevanten Knotendeformationen der Knoten k_1, k_2 :

$$\sigma_{k_1, k_2} = \sum_i^r l_{ji} \max \frac{v_{k_1 i} - v_{k_2 i}}{l_{k_1, k_2}} E$$

- durch Differenziation von $[L]$ nach der Zeit, da bei Impulsbeanspruchung die Spannung proportional der Geschwindigkeit ist.

Der Vorteil des vorgeschlagenen Verfahrens besteht also darin, daß

- die Anzahl und Zuordnung der Systemfreiheitsgrade für alle Gliederungszustände unverändert beibehalten werden kann (Kap. 4)
- die bei der Integration der Bewegungsgleichungen verwendeten modalen Werte bei jeder Änderung des Systemgliederungszustandes eine Bewertung der Diskretisierung des unter stoßartiger Beanspruchung stehenden Systems ermöglichen.

6.0 Erläuterung des Zusatzlastverfahrens für statische Beanspruchungen

Bei Änderung der mechanischen Systemgliederung sind die momentan vorhandenen Deformations- und Geschwindigkeitszustände entsprechend den Systemfreiheitsgraden als Anfangswerte für die weitere Berechnung zu berücksichtigen. Da bei Änderung der mechanischen Gliederung auch die durch Vorspannung und statische Vorbelastung eines Betriebslastfalles gespeicherte Deformationsenergie freigesetzt wird, ist zusätzlich zum momentanen, aus der vorangegangenen dynamischen Berechnung ermittelten Deformationszustand, ein weiterer Anfangsdeformationsvektor zu berücksichtigen. Dieser Zusatzvektor hat für unterschiedliche Konfigurationen unterschiedliche Anordnungen. Er ist im Normalfall in allen Freiheitsgraden besetzt. So existieren z.B. bei einer Anzahl von 10 Systemfugen $2^{10} = 1024$ mögliche unterschiedliche, mechanisch-mathematische Systemgliederungen. Da die Definition der 1024 dann möglichen, in ihrer Struktur unterschiedlichen Anfangsdeformationsvektoren besonders für den Anteil Vorspannung - gekennzeichnet durch die jeweilige

Änderung der Systemnullage - einen erheblichen und in der Praxis kaum zu lösenden Arbeitsaufwand beinhaltet, wird für die vorliegende Arbeit ein anderer und einfacherer Weg beschritten.

Die dem Zusatzlastverfahren zugrundeliegende modale Überlagerung von Systemschwingungen erlaubt eine getrennte, d.h. entkoppelte Behandlung der

- Deformationsanteile aus statischen Lastfällen (Betriebslast),
- Deformationsverläufe aus dynamischen Lastfällen (Störfall).

Anders als bei üblichen Verfahren wird kein zusätzlicher Anfangsdeformationsvektor bei Änderungen von Systemgliederungen benutzt. Der Anfangsdeformationsvektor wird ersetzt durch einen zusätzlichen äußeren Belastungsvektor, dessen Komponenten bis auf zwei, den jeweiligen Fugenvorbelastungen, welche die Änderung kennzeichnen, zugeordneten Anteilen gleich Null sind.

Die im Betriebszustand ermittelten Fugenschnittlasten werden als äußere Belastung aufgeprägt. Durch die einmalige Festlegung eines zusätzlichen, aber vom jeweiligen Änderungszustand unabhängigen Belastungsvektors, wird eine wesentliche Vereinfachung der dynamischen Analyse erzielt.

Ein allgemeiner, in modaler Schreibweise geführter Nachweis zeigt die Identität der Ergebnisverläufe des Zusatzlastverfahrens und üblicher Verfahren. Dabei wird sowohl für den Vorspann- als auch für den Vorbelastungszustand die einfachere Handhabung des entwickelten Verfahrens für die Anwendung auf komplexe Systeme verdeutlicht. In 8. wird die praktische Anwendung beider Verfahren gezeigt.

Bei Anwendung des Zusatzlastverfahrens werden zur Ermittlung des vollständigen Deformationszustandes in einfacher Weise die aus getrennten Berechnungen ermittelten Ergebnisse für die Lastfälle Betrieb und Störfall überlagert. Diese Methode eignet sich besonders für eine statische Betrachtungsweise, d.h. für den Fall, daß die dynamischen Werte aus einer statischen Berechnung übernommen und lediglich mit einem dynamischen Lastfaktor (DLF) versehen werden.

Der Vorteil des Zusatzlastverfahrens liegt ferner darin, daß die Deformationen des Systems aus den Betriebszuständen nicht explizit als Anfangswerte vorliegen müssen, lediglich die Fugenvorbelastungen müssen bekannt sein. Diese Verfahrensmöglichkeit erscheint besonders vorteilhaft bei Finiten Element-Berechnungen, wenn eine feine Modellabbildung gewählt wird und nicht für alle Systempunkte Anfangsdeformationswerte ermittelt werden müssen.

Im folgenden Nachweis wird gezeigt, daß der durch die Änderung der mechanischen Systemgliederung zu berücksichtigende

Vorverformungszustand einem zusätzlichen Belastungszustand entspricht. Rechnerisch ausgedrückt, entspricht ein Deformationsvektor einem Belastungsvektor. Zu beachten ist, daß der Belastungsvektor nur aus den - je nach dem mechanischen Gliederungszustand - freigesetzten Schnittlasten in der Fuge besteht.

Der Vergleich beider Verfahren erfolgt unter Berücksichtigung aller Anfangswerte, d.h. der Belastungsvektoren und der Vorverformungsvektoren. Die anteilig aus den Anfangsgeschwindigkeitsvektoren herrührenden Deformationsverläufe werden in den Vergleich nicht miteinbezogen, da aus beiden Verfahren identische Geschwindigkeitsverläufe resultieren; diese würden aufgrund der entkoppelten Darstellbarkeit lediglich identische Deformationsanteile bewirken.

6.1 Zusatzbelastung aus äußerer Vorbelastung

Beim Eintreten eines Störfalls (z.B. Bersten des in Abb. 1.0 dargestellten Reaktordruckbehälters) ändert sich der Belastungsvektor der äußeren Belastungen $(P)_i$ in den noch verbleibenden Vektor $(P)_{iR}$. Da beim Zusatzlastverfahren eine Trennung der Deformationen aus dem statischen Anteil infolge $(P)_i$ und aus dem dynamischen Anteil infolge $(P)_{i\Delta}$ vorgenommen wird, gilt:

$$(P)_{iR} = (P)_i + (P)_{i\Delta} \quad . \quad (6.1)$$

Der Deformationsansatz des Zusatzlastverfahrens bei zunächst unverändertem Gliederungszustand (Zustand I) lautet demnach:

$$(v) = (v)_i + (v)_{P_{i\Delta}} \quad . \quad (6.2a)$$

Unter der Voraussetzung schwacher Dämpfung:

$$\omega_c \approx \omega = \Lambda^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (6.3a)$$

$$\beta^2 \Lambda + \omega_c^2 \approx \omega_c^2 \approx \omega^2 = \Lambda \quad . \quad (6.3b)$$

folgt aus (5.3a) mit (6.2a) für den vollständigen Deformationsverlauf:

$$(v) = (v)_i + [\phi_M] \{ \{ [I] - [e^{-\beta \Lambda^{\frac{1}{2}} t}] \{ [\beta \sin \omega t] + [\cos \omega t] \} \} [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} \} \quad . \quad (6.4a)$$

Der vollständige Deformationsansatz üblicher Verfahren lautet:

$$(v) = (v)_{v_i} + (v)_{P_{iR}} \quad , \quad (6.2.b)$$

mit (5.1a), (6.3a) und (6.3b) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
(v) = & [\phi_M] \{ [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\cos \omega t] [\phi_M]' [M] (v)_i + [\beta \sin \omega t] [\phi_M]' [M] (v)_i \} \} \\
& + [\phi_M] \{ [I] - [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\beta \sin \omega t] + [\cos \omega t] \} \} [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{iR} \}
\end{aligned} \quad (6.4b)$$

Aus (6.1) und der nichtdynamischen Beziehung:

$$(P)_i = [K] (v)_i \quad (6.5a)$$

eingesetzt in die nach der Steifigkeit aufgelösten Gleichung (5.6a):

$$[K] = [\phi_M]'^{-1} [\wedge] [\phi_M]^{-1} \quad (6.5b)$$

folgt aus (6.4b):

$$\begin{aligned}
(v) = & [\phi_M] \{ [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\cos \omega t] [\phi_M]' [M] (v)_i + [\beta \sin \omega t] [\phi_M]' [M] (v)_i \} \} \\
& + [\phi_M] \{ [I] - [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\beta \sin \omega t] + [\cos \omega t] \} \} [\wedge]^{-1} [\phi_M]' [K] (v)_i \} \\
& + [\phi_M] \{ [I] - [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\beta \sin \omega t] + [\cos \omega t] \} \} [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} \} \\
= & [\phi_M] \{ [\wedge]^{-1} [\phi_M]' [K] (v)_i + [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} \\
& - [e^{-\beta \wedge \frac{1}{2} t}] \{ [\beta \sin \omega t] + [\cos \omega t] \} [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} \}
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (6.4a) zeigt, daß die veränderlichen Glieder identisch sind, es bleibt lediglich die Erfüllung des Nachweises der zeitlich unveränderlichen Glieder:

$$(v)_i + [\phi_M] [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} = [\phi_M] \{ [\wedge]^{-1} [\phi_M]' [K] (v)_i + [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta} \}$$

also:

$$(v)_i = [\phi_M] [\wedge]^{-1} [\phi_M]' [K] (v)_i$$

und mit (6.5b):

$$(v)_i = (v)_i$$

Der Einfluß der Dämpfung bleibt in den folgenden Ausführungen zur Vereinfachung der Schreibweise unberücksichtigt. Der vollständige Nachweis mit Berücksichtigung der Dämpfung kann in gleicher Weise durchgeführt werden.

Zum Zeitpunkt τ ändere sich die mechanische Gliederung des Systems. Der Geschwindigkeitszustand und der vollständige Deformationszustand lauten:

$$(\dot{v})_\tau = [\phi_M] [\omega] [\sin \omega \tau] [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta},$$

$$(v)_\tau = (v)_i + [\phi_M] [1 - \cos \omega \tau] [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i\Delta}. \quad (6.6)$$

Für das Zusatzlastverfahren wird bei Änderung der mechanischen Gliederung (Zustand II) ein zusätzlicher Belastungsvektor wirksam. Dieser zusätzliche Belastungszustand $(P)_{iz}$ kann durch die bei Fugenöffnen freigesetzte und erst im geöffneten Zustand dynamisch wirksam werdende Fugenschnittlast veranschaulicht werden. Die Fugenschnittlast resultiert aus dem am ursprünglichen System unter dem Belastungszustand $(P)_i$ ermittelten Schnittlastenzustand.

Die Systemeigenschaften im Zustand II werden durch: II markiert. Der Deformationsanteil aus dem Geschwindigkeitszustand $(\dot{v})_{\tau}$ wird in den Vergleich wiederum nicht miteinbezogen, da er für beide Verfahren identisch ist. Mit (5.1b) und (5.3b) lautet der vollständige Deformationsansatz des Zusatzlastverfahrens im Zustand II:

$$\begin{aligned} (v) = (v)_i + [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_{\tau \Delta} \\ + [\phi_{MII}] [1 - \cos \omega_{II} t] [\wedge_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{i \Delta} \\ + [\phi_{MII}] [1 - \cos \omega_{II} t] [\wedge_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{iz} \quad (6.7) \end{aligned}$$

Der Anfangsdeformationsvektor $(v)_{\tau \Delta}$ des Zusatzlastverfahrens besteht aus dem um den statischen Anteil $(v)_i$ verminderten vollständigen Deformationsvektor:

$$\begin{aligned} (v)_{\tau \Delta} &= (v)_{\tau} - (v)_i \\ &= [\phi_M] [1 - \cos \omega \tau] [\wedge]^{-1} [\phi_M]' (P)_{i \Delta} \quad (6.8) \end{aligned}$$

Die Zeitabzisse t in (6.7), (6.8) zählt vom Zeitpunkt τ . Der wiederum ohne den Geschwindigkeitsanteil nach dem üblichen Verfahren formulierte vollständige Ansatz lautet:

$$\begin{aligned} (v) = [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_{\tau} \\ + [\phi_{MII}] [1 - \cos \omega_{II} t] [\wedge_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{iR} \quad (6.9) \end{aligned}$$

(6.7) und (6.9) müssen identisch sein, mit (6.8) und (6.1) folgt:

$$\begin{aligned} (v)_i + [\phi_{MII}] \{ [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] \{ (v)_{\tau} - (v)_i \} \} \\ + [\phi_{MII}] \{ [1 - \cos \omega_{II} t] [\wedge_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' \{ (P)_{i \Delta} + (P)_{iz} \} \} \\ = [\phi_{MII}] \{ [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_{\tau} \\ + [\phi_{MII}] \{ [1 - \cos \omega_{II} t] [\wedge_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' \{ (P)_i + (P)_{i \Delta} \} \} \} \end{aligned}$$

Die Subtraktion identischer Terme ergibt:

$$\begin{aligned}
(v)_i &= -[\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i \\
&+ [\phi_{MII}] [1 - \cos \omega_{II} t] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{iz} \\
&= [\phi_{MII}] [1 - \cos \omega_{II} t] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_i .
\end{aligned}$$

Zur Identität der konstanten und veränderlichen Terme sind zwei Bedingungen (a), (b) zu erfüllen:

$$(v)_i + [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{iz} = [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_i , \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
-[\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i - [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_{iz} \\
= -[\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_i . \quad (b)
\end{aligned}$$

Aus Bedingung (a) folgt:

$$(v)_i = [\phi_{MII}] \{ [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' \{ (P)_i - (P)_{iz} \} \} ,$$

bzw. aufgelöst nach $(P)_{iz}$:

$$(P)_{iz} = (P)_i - [\phi_{MII}]'^{-1} [\Lambda_{II}] [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i . \quad (6.10a)$$

Nach Einsetzen von (B4.4b) und (B4.4c) folgt:

$$\begin{aligned}
(P)_{iz} &= (P)_i - [\phi_{MII}]^{-1} [\phi_{MII}]'^{-1} [\phi_{MII}]^{-1} [\Lambda_{II}] [\phi_{MII}] [\phi_{MII}]^{-1} [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i \\
&= (P)_i - [\phi_{MII}]^{-1} [\Lambda_{II}] [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i .
\end{aligned}$$

und weiter mit (B 4.4a):

$$\begin{aligned}
(P)_{iz} &= (P)_i - [\phi_{MII}]^{-1} [\phi_{MII}]'^{-1} [\phi_{MII}]^{-1} [\Lambda_{II}] [\phi_{MII}] [\phi_{MII}]^{-1} [\phi_{MII}]^{-1} (v)_i \\
&= (P)_i - [K_{II}] (v)_i \quad (6.10b)
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des statischen Deformationsverhaltens

$(v)_i = [K]^{-1} (P)_i$, $[K]$ ist die Steifigkeitsmatrix im Zustand I, ergibt sich mit (6.5a):

$$\begin{aligned}
(P)_{iz} &= (P)_i - [K_{II}] [K]^{-1} (P)_i \\
&= \{ [I] - [K_{II}] [K]^{-1} \} (P)_i . \quad (6.10c)
\end{aligned}$$

Gleichung (6.10a) bzw. (6.10c) weisen den bei Änderung der Systemgliederung wirksam werdenden zusätzlichen Lastvektor $(P)_{iz}$ in Abhängigkeit von dem bei statischer Vorbelastung vorhandenen Deformationszustand $(v)_i$ bzw. Belastungszustand $(P)_i$ aus.

Aus Bedingung (b) folgt mit (6.10b) für die Koeffizienten der Zeitveränderlichen:

$$[\phi_{MII}] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_i = [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' [K_{II}] (v)_i .$$

Nach Multiplikation mit $[\phi_{MII}]^{-1}$, $[\phi_{MII}]'^{-1}$ und $[M_{II}]^{-1}$ folgt:

$$\begin{aligned} (v)_i &= [M_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]'^{-1} [\phi_{MII}]^{-1} [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' [K_{II}] (v)_i \\ &= [M_{II}]^{-1} [M_{II}]^{\frac{1}{2}} [\phi_{MII}]' [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' [K_{II}] (v)_i \\ &= [M_{II}]^{-\frac{1}{2}} [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' [M_{II}]^{-\frac{1}{2}} [K_{II}] (v)_i , \end{aligned}$$

und weiter mit (B 4.4b) und (B 4.4a):

$$\begin{aligned} (v)_i &= [M_{II}]^{-\frac{1}{2}} [A_{II}]^{-1} [M_{II}]^{\frac{1}{2}} [K_{II}] (v)_i \\ &= [M_{II}]^{-\frac{1}{2}} [M_{II}]^{\frac{1}{2}} [K_{II}]^{-1} [M_{II}]^{\frac{1}{2}} [K_{II}] (v)_i \\ &= [K_{II}]^{-1} [K_{II}] (v)_i , \end{aligned}$$

d.h.

$$(v)_i = (v)_i .$$

Somit ist der für beide Verfahren identische Deformationsverlauf nachgewiesen. Es ist zu beachten, daß bei Anwendung

- des Zusatzlastverfahrens der vollständige Deformationszustand durch Überlagerung der Werte $(v)_i$ aus der statischen Berechnung für die äußere Belastung, und bei Systemänderung unter Berücksichtigung eines zusätzlichen Belastungsvektors $(P)_{iZ}$ mit einem reduzierten Anfangsdeformationsvektor $(v)_{\tau\Delta}$ zu ermitteln ist,
- üblicher Verfahren durch den vollständigen Anfangsdeformationsvektor $(v)_{\tau}$ unmittelbar der vollständige Deformationszustand die Lösung ist.

Als dynamischer Belastungsvektor gilt bei Berechnung mit

- dem Zusatzlastverfahren: $(P)_{i\Delta}$,
- üblichen Verfahren: $(P)_{iR}$.

6.2 Zusatzbelastung aus Vorspannung

Im geschlossenen System bewirkt die Vorspannung allein bei plötzlicher Änderung des Betriebszustandes noch keinen zusätzlichen, dynamisch wirksamen Deformationszustand; der Vorspannungszustand ist ein Gleichgewichtszustand.

Erst nach der Änderung der Systemgliederung gibt die Vorspannung

Arbeit aus der gespeicherten Vorspannenergie ab und regt das schwingende System zusätzlich dynamisch an. Diese Energiefreigabe aus Vorspannung geschieht plötzlich. Beim Zusatzlastverfahren wird diese Energie als zusätzlicher Lastvektor $(P)_v$, in dem die Lastkomponenten die Größe der vorher angegebenen Vorspannungen besitzen und an den Schnittufern der geöffneten Fuge wirken, in die dynamische Berechnung mit einbezogen. Bei üblichen Verfahren wird diese bei Änderung der mechanischen Systemgliederung freiwerdende Vorspannenergie als zusätzlicher Anfangsdeformationszustand $(v)_v$ gedeutet. Dieser zusätzliche Deformationsvektor ist je nach Änderungszustand des Systems unterschiedlich definiert.

Die Differentialgleichung für das Zusatzlastverfahren lautet ohne Dämpfungsterm in modaler Schreibweise für veränderte Systemgliederung:

$$(\ddot{y}) + [\Lambda_{II}] (y) = [\phi_{MII}]' \{ (P) + (P)_v \} \quad , \quad (6.11a)$$

sie hat die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} (v)_{t=0} &= (v)_\tau \quad , \\ (\dot{v})_{t=0} &= (\dot{v})_\tau \quad . \end{aligned}$$

Entsprechend gilt die Differentialgleichung für übliche Verfahren:

$$(\ddot{y}) + [\Lambda_{II}] (y) = [\phi_{MII}]' (P) \quad , \quad (6.11b)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} (v)_{t=0} &= (v)_\tau + (v)_v \quad , \\ (\dot{v})_{t=0} &= (\dot{v})_\tau \quad . \end{aligned}$$

Der Belastungsvektor (P) beinhaltet in beiden Verfahren einen Störlastfall. Da sein Anteil ebenso wie die Anteile von $(\dot{v})_\tau$ und $(v)_\tau$ (der Endgeschwindigkeits- und Endverformungsvektor des unveränderten Systems) für beide Verfahren gleich ist und wegen der Entkopplung bei modaler Schreibweise getrennt behandelt werden kann, also für beide Verfahren identische Deformationsverläufe hervorrufen würde, bleiben seine Komponenten ebenso wie die von $(\dot{v})_\tau$ und $(v)_\tau$ für den Nachweis unberücksichtigt.

Somit lauten die in gleicher Weise reduzierten Gleichungen (6.11a):

$$\begin{aligned} (\ddot{y}) + [\Lambda_{II}] (y) &= [\phi_{MII}]' (P)_v \quad , \\ (v)_{t=0} &= (0) \quad , \\ (\dot{v})_{t=0} &= (0) \quad , \end{aligned}$$

und (6.11b):

$$\begin{aligned} (\ddot{y}) + [\Lambda_{II}] (y) &= (0) \quad , \\ (v)_{t=0} &= (v)_v \quad , \\ (\dot{v})_{t=0} &= (0) \quad . \end{aligned}$$

Für die Deformationsverläufe (v) muß also lediglich die Identität der dynamischen Einflüsse von $(P)_V$ und $(v)_V$ nachgewiesen werden. Mit (5.3b) und (5.1b) lauten die so reduzierten Ansätze im offenen Zustand für

- das Zusatzlastverfahren:

$$(v) = (v)_V + [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V ,$$

- übliche Verfahren:

$$(v) = [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_V .$$

Damit zwischen beiden Ansätzen Identität herrscht, müssen die konstanten und die veränderlichen Anteile jeweils identisch sein, d.h. es sind folgende zwei (a), (b) Bedingungen einzuhalten:

$$(v)_V + [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V = (0) , \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & - [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V \\ & = [\phi_{MII}] [\cos \omega_{II} t] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_V . \end{aligned} \quad (b)$$

Bedingung (a) enthält die Umformung des bei Änderung der Systemgliederung zu beachtenden zusätzlichen Belastungsvektors $(P)_V$ infolge Vorspannung für das Zusatzlastverfahren in einen zusätzlichen Anfangsdeformationsvektor $(v)_V$ infolge Vorspannung für übliche Verfahren:

$$(v)_V = - [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V . \quad (6.12)$$

Aus Bedingung (b) folgt nach Multiplikation mit $[\phi_{MII}]^{-1}$ für die Koeffizienten von $[\cos \omega_{II} t]$:

$$- [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V = [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_V .$$

Auflösung nach $(v)_V$ ergibt wiederum:

$$\begin{aligned} (v)_V & = - [M_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V \\ & = - [M_{II}]^{-1} [M_{II}]^{\frac{1}{2}} [\phi_{MII}]' [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V \\ & = - [M_{II}]^{-\frac{1}{2}} [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V \\ & = - [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}]^{-1} [\phi_{MII}]' (P)_V . \end{aligned}$$

Somit ist der Nachweis für die Identität beider Verfahren für den Lastfall Vorspannung erbracht. Die Auflösung von (6.12) nach $(P)_V$ ergibt:

$$(P)_V = - [M_{II}] [\phi_{MII}] [\Lambda_{II}] [\phi_{MII}]' [M_{II}] (v)_V . \quad (6.13)$$

Das Zusatzlastverfahren erfordert also bei Änderung der mechanischen Gliederung die Überlagerung des Vorspannungszustandes mit

den aus dem dynamischen Belastungsvektor $(P)_V$ ermittelten Deformationsverläufen, während in üblichen Verfahren bei Änderung der mechanischen Gliederung ein zusätzlicher Anfangsdeformationsvektor $(v)_V$ zu berücksichtigen ist.

Tabelle II stellt die unterschiedliche Handhabung von Zusatzlastverfahren und üblichen Verfahren gegenüber. Zur Überlagerung der rechnerisch ermittelten Spannungen mit den Spannungen aus der Vorspannung dient der nach der Methode der initialen Dehnungen errechnete initiale Dehnungsvektor $(\varepsilon)_V$ in Abhängigkeit vom initialen Deformationsvektor $(v)_\varepsilon$ infolge Vorspannung:

$$\begin{aligned} (v)_\varepsilon &= [K]^{-1} [K_I] (\varepsilon)_V \\ &= [\phi_M] [\Lambda]^{-1} [\phi_M]' [K_I] (\varepsilon)_V \end{aligned} \quad (6.14)$$

$[K]^{-1}$ ist die Inverse der Steifigkeitsmatrix und $[K_I]$ ist nach (A 1.2), (A1.3) gegeben durch:

$$[K_I] = \int_V [B]' [D] dV, \quad (6.15)$$

und ist identisch mit der Matrix der initialen Dehnungen (D 1.13a).

7.0 Modale Analyse diskreter Systeme mit veränderlicher Gliederung im elastisch-plastischen Bereich

Für den unmittelbaren Bereich der Lasteinleitung in das System, d.h. an den Fugenrändern, wird im folgenden vorausgesetzt, daß zu Beginn des Stoßvorganges die Beanspruchung des Werkstoffes über den linear elastischen Bereich hinaus erfolgen kann. Es wird angenommen, daß durch das nichtlineare Verhalten ein zusätzlicher Dissipationsmechanismus wirksam wird, dessen quantitatives Verhalten aus der durch die Werkstoffhysterese geleisteten Arbeit hervorgeht. Da die dissipierte Energie nichtlinearen Charakter hat, gilt weder die Zustandsgleichung für linear viskose Dämpfung nach (B 1.1a), noch ist ein Überführen der nichtlinearen Strukturdämpfung in einen äquivalenten viskosen Dämpfungskoeffizienten nach (B 2.1a) möglich. In der Differentialgleichung ist demnach der Dämpfungsterm je nach Abbildungsmodell durch einen direkten Ansatz als

- nichtlineare hysteretische Dämpfung
(Strukturdämpfung)

oder

- Reibungsdämpfung

zu berücksichtigen.

Die erhöhte Energiedissipation im Stoßbereich bewirkt durch den Abbau von Spannungsspitzen weiter, daß die nichtlineare Beanspruchung der Konstruktion nur lokal begrenzt vorhanden ist. Für

das Verhalten des globalen Systems kann deshalb weiterhin die lineare Zustandsgleichung (A 1.6) zugrundegelegt werden.

Eine sinnvolle Verknüpfung der modalen Analyse mit nichtlinearen Zustandsgleichungen besteht nur dann, wenn die Steifigkeitsmatrix über eine große Anzahl von Zeitinkrementen unverändert bleibt, damit sich der Aufwand zur Berechnung der modalen Werte in Grenzen hält. Diesen Anforderungen wird besonders das Verfahren der Anfangsdehnungen gerecht, in welchem die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix unverändert beibehalten bleibt. Dem nichtlinearen Verhalten wird durch eine Gleichgewichtskorrektur Rechnung getragen, in der - in gleicher Weise wie die Wirksamkeit der statischen Belastungen durch Zusatzlasten erfaßt werden - die plastischen Anteile als äußere Belastungen behandelt werden.

7.1 Nichtlineare Zustandsgleichungen für das Verfahren der Anfangsdehnungen

Nachfolgend wird ein allgemeiner Lösungsalgorithmus für das Verfahren der Anfangsdehnungen in Anlehnung an das im Anhang D.2 dargestellte Integrationsverfahren für die tangentielle Steifigkeit entwickelt und ihm vergleichend gegenübergestellt. Die gemeinsame Ausgangsgröße beider Verfahren ist die Identität der Schreibweisen für den nichtlinearen, inneren Kräftezustand:

$$[K_t] (v_t) = [K] (v_t) - [K_I] (\varepsilon_{pt}) \quad , \quad (7.1)$$

$$[K_{t+\Delta t}] (v_{t+\Delta t}) = [K] (v_{t+\Delta t}) - [K_I] (\varepsilon_{pt+\Delta t}) .$$

Somit lautet die (D 2.1a) entsprechende korrekte Schreibweise der Differentialgleichung:

$$[M] (\ddot{v}_t) + [C] (\dot{v}_t) + [K](v_t) = (P_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt}) , \quad (7.2a)$$

i) und in der Prediktorform, wenn die hochgestellte Zahl, den Grad der Näherungsstufe kennzeichnet:

$$[M] (\ddot{v}_t)^1 + [C] (\dot{v}_t)^1 + [K] (v_t)^1 = (P_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt-\Delta t}) . \quad (7.2b)$$

(7.2b) enthält den allgemeinen Prediktor für das Verfahren der initialen Dehnungen. Dabei gilt es zu beachten, daß keine Identität zu (D 2.1b) vorhanden ist:

$$[K_{t-\Delta t}] (v_t) \neq [K] (v_t) - [K_I] (\varepsilon_{pt-\Delta t}) \quad .$$

ii) Da der Dehnungszustand $(\varepsilon_{pt})^1$ mit dem Prediktor $(v_t)^1$ kompatibel ist, gilt unter Hinzuziehung des zum Zeitpunkt t für den Verformungszustand $(v_t)^1$ vorhandenen inneren Schnittlastenzustandes

$$(F_t)^1 = [K] (v_t)^1 - [K_I] (\varepsilon_{pt})^1$$

entsprechend (D 2.2):

$$\begin{aligned} [M] (\ddot{v}_t)^1 + [C] (\dot{v}_t)^1 + [K] (v_t)^1 - [K] (v_t)^1 + [K_I] (\varepsilon_{pt})^1 \\ = (P_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt-\Delta t}) - (F_t)^1 \quad , \quad (7.3) \end{aligned}$$

bzw.

$$[M] (\ddot{v}_t)^1 + [C] (\dot{v}_t)^1 + [K_I] (\varepsilon_{pt})^1 = (P_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt-\Delta t}) - (F_t)^1 .$$

iii) Der Prediktor $(\Delta v)^1$ für den Zeitpunkt $t+\Delta t$ folgt durch Aktualisierung der Ausgangswerte aus (7.3) entsprechend (D 2.3)

$$[M] \{(\ddot{v}_t) + (\Delta \ddot{v})^1\} + [C] \{(\dot{v}_t) + (\Delta \dot{v})^1\} + [K] \{(v_t) + (\Delta v)^1\} - [K] (v_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt}) = (P_{t+\Delta t}) + [K_I] (\varepsilon_{pt}) - (F_t) ,$$

bzw.

$$[M] (\ddot{v}_{t+\Delta t})^1 + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t})^1 + [K] (\Delta v)^1 = (P_{t+\Delta t}) - (F_t) , \quad (7.4)$$

oder in der Form:

$$[M] (\Delta \ddot{v})^1 + [C] (\Delta \dot{v})^1 + [K] (\Delta v)^1 = (P_{t+\Delta t}) - (F_t) - [M] (\ddot{v}_t) - [C] (\dot{v}_t) .$$

Der Vergleich von (7.4) und (D.2.3) zeigt, daß der Operator für das Verfahren der Anfangsdehnungen bei ausgeprägten nichtlinearen Erscheinungen weniger genau ist. Während (D 2.3) den Prediktor $(\Delta v)^1$ mittels der aktualisierten Steifigkeitsmatrix $[K_t]$ des vorhergehenden Zeitschrittes approximiert, wird in (7.4) die in viel größerem Maße unzutreffende anfängliche Steifigkeitsmatrix $[K]$ benutzt.

Zur Konvergenzverbesserung des Verfahrens der Anfangsdehnungen wird deshalb in (7.4) der Einfluß des aktuellen plastischen Anteils durch das zum Zeitpunkt t wirksame Residuum berücksichtigt. Dazu dient der Vergleich mit der exakten Schreibweise der Differentialgleichung:

$$[M] (\ddot{v}_{t+\Delta t}) + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t}) + [K_{t+\Delta t}] (v_{t+\Delta t}) = (P_{t+\Delta t}) ,$$

bzw.

$$[M] (\ddot{v}_{t+\Delta t}) + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t}) + (P_{Ft}) = (P_{t+\Delta t}) - (F_t)$$

(P_{Ft}) ist das Residuum des inneren Gleichgewichtszustandes:

$$(P_{Ft}) = [K_{t+\Delta t}] (v_{t+\Delta t}) - [K_t] (v_t) , \quad \text{bzw. (7.5a)}$$

$$(P_{Ft}) = [K] \{(v_{t+\Delta t}) - (v_t)\} - [K_I] \{(\varepsilon_{pt+\Delta t}) - (\varepsilon_{pt})\} , \quad (7.5b)$$

und lautet für das Verfahren der tangentialen Steifigkeit mit der Näherung $[K_{t+\Delta t}] \approx [K_t]$ in der Prediktorform:

$$(P_{Ft})^1 = [K_t] \{(v_{t+\Delta t})^1 - (v_t)\} = [K_t] (\Delta v)^1 . \quad (7.6a)$$

Für das Verfahren der Anfangsdehnungen wird anstelle der üblichen Näherung: $(\varepsilon_{pt+\Delta t}) \approx (\varepsilon_{pt})$, welche den plastischen Anteil in der inkrementellen Form mit (7.5b) nicht zu erfassen gestattet, das Residuum des plastischen Anteils zum Zeitpunkt t anstatt zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ gebildet:

$$(P_{Ft})^1 = [K] \{ (v_{t+\Delta t})^1 - (v_t) \} - [K_I] \{ (\varepsilon_{pt}) - (\varepsilon_{pt-\Delta t}) \} . \quad (7.6b)$$

Die verbesserte Prediktorform (7.4) lautet somit:

$$\begin{aligned} [M] (\ddot{v}_{t+\Delta t})^1 + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t})^1 + [K] (\Delta v)^1 - [K_I] \{ (\varepsilon_{pt}) - (\varepsilon_{pt-\Delta t}) \} \\ = (P_{t+\Delta t}) - (F_t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Der Integrationszyklus beginnt anschließend wieder bei ii). Da die modalen Eigenschaften von (7.7) unverändert bleiben, eignet sich das Verfahren der Anfangsdehnungen besonders für die modalen Auflösungen der Bewegungsgleichungen. Zur Konvergenzverbesserung des Verfahrens der Anfangsdehnungen dient in Anlehnung an die Iterationsvorschrift (D 2.4):

$$\begin{aligned} [M] (\ddot{v}_{t+\Delta t})^r + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t})^r + [K] \{ (v_{t+\Delta t})^r - (v_{t+\Delta t})^{r-1} \} \\ = (P_{t+\Delta t}) - (F_{t+\Delta t})^{r-1} \end{aligned} .$$

7.2 Modalanalyse eines Systems mit veränderlicher Gliederung und nichtlinearem Werkstoffverhalten

Bei nichtlinearem Materialverhalten findet das Zusatzlastverfahren, in welchem mögliche Änderungen der Systemgliederung durch zusätzliche Belastungsglieder auf der rechten Seite erfaßt werden, das Pendant in der den plastischen Anteil erfassenden Ersatzlast.

Diese Ersatzlast ist nach (7.1) die zusätzliche, auf der rechten Seite der Zustandsgleichung wirkende äußere Belastung $[K_I](\varepsilon_{pt})$. Beide Belastungsglieder sind vom sich jeweils ändernden Gliederungs- oder Verformungszustand abhängig, d.h. die Lösung der Differentialgleichung ist nur inkrementell möglich.

Für den Identitätsnachweis wird zur Vereinfachung der Darstellung entsprechend der Vorgehensweise in (6.0) der Einfluß der linear viskosen Dämpfung im Lösungsansatz nicht berücksichtigt. Die korrekte Form der Differentialgleichung lautet mit (7.2a):

$$[M] (\ddot{v}_t) + [C] (\dot{v}_t) + [K] (v_t) = (R_t) + [K_I] (\varepsilon_{pt}) + (P_{ct}), \quad (7.8)$$

(P_{ct}) ist die von der Deformation oder der Geschwindigkeit abhängige nichtlineare Dämpfungskraft und (R_t) ist die nach (6.0) vom Gliederungszustand abhängige äußere Belastung:

$$(R_t) = (P)_{iR} - (P)_i = (P)_{i\Delta} \quad \text{für das Zusatzlastverfahren und}$$

$$(R_t) = (P)_{iR} \quad \text{für übliche Verfahren.}$$

Mit den Definitionen (6.2a) und (6.2b) ergeben sich die Deformationsverläufe:

$(v) = (v)_i + (v)_{P_{i\Delta}} + (v)_P + (v)_C$ für das Zusatzlastverfahren
und

$(v) = (v)_{vi} + (v)_{P_{iR}} + (v)_P + (v)_C$ für übliche Verfahren (7.9).

$(v)_P, (v)_C$ sind die Deformationsverläufe aus den entsprechenden nichtlinearen plastischen- und Dämpfungsbelastungen. Der Nachweis der Identität für die Verläufe der jeweils ersten beiden Terme wurde in (6.0) in modaler Schreibweise erbracht; aus $(v)_P$ und $(v)_C$ selbst folgen nach (7.9) jeweils wieder identische Deformationsverläufe.

Die Differentialgleichung für die geänderte Systemgliederung lautet entsprechend (7.8):

$$[M] (\ddot{v}_t) + [C] (\dot{v}_t) + [K_{II}] (v_t) = (\bar{R}_t) + [K_{I,II}] (\varepsilon_{pt}) + (P_{ctII}). \quad (7.10)$$

(\bar{R}_t) ist der Belastungsvektor im geänderten Systemzustand:

$(\bar{R}_t) = (P)_{i\Delta} + (P)_V + (P)_{iz}$ für das Zusatzlastverfahren und

$(\bar{R}_t) = (P)_{iR}$ für übliche Verfahren.

Mit den Anfangswerten für Deformation und Geschwindigkeit:

$(v)_\tau - (v)_i = (v)_{\tau\Delta}; (\dot{v})_\tau$ für das Zusatzlastverfahren und

$(v)_\tau + (v)_V; (\dot{v})_\tau$ für übliche Verfahren

ergeben sich die Deformationsverläufe:

$(v) = (v)_i + (v)_{\bar{R}_t} + (v)_{v_{\tau\Delta}} + (v)_{\dot{v}_\tau} + (v)_{PII} + (v)_{CII}$
für das Zusatzlastverfahren und

$(v) = (v)_{\bar{R}_t} + (v)_{v_\tau} + (v)_{\dot{v}_\tau} + (v)_{PII} + (v)_{CII}$
für übliche Verfahren.

Durch das Eintreten von plastischen Deformationen ändert sich die statische Ruhelage des Systems. Die anfängliche Ruhelage des Systems ist gekennzeichnet durch den mit (6.14) definierten Deformationszustand $(v)_\varepsilon$ aus Vorspannung. Die Änderung der Ruhelage ist definiert durch die Überlagerung der Ausgangswerte mit den aus (D 1.15) berechneten plastischen Deformationen. Bei der Ermittlung des Spannungszustandes in den Elementen ist zu beachten, daß zusätzlich zu dem aus der dynamischen Berechnung nach (7.10) - d.h. nach der in Anlehnung an (7.7) aufzustellenden Prediktorform für (7.10) - herrührenden und mit dem Deformationsverlauf (v_t) kompatiblen Dehnungsverlauf (ε_t) Dehnungen aus nichtdynamischer Beanspruchung zu überlagern sind.

Während dazu beim Zusatzlastverfahren die aus den Deformationszuständen infolge Vorbelastung $(v)_i$ nach (6.5a) und infolge Vorspannung $(v)_\varepsilon$ nach (6.14) resultierenden Dehnungen heranzuziehen

sind, müssen bei Anwendung von üblichen Verfahren lediglich die Dehnungen infolge Vorspannung $(v)_{\varepsilon}$ berücksichtigt werden.

7.3 Berücksichtigung von Dämpfungsmechanismen bei nichtlinearem Werkstoffverhalten

Die Definition linearer Dämpfung ist an elastisches Werkstoffverhalten gebunden, die hysteretische Schleife hat Ellipsenform (Abb. B.1), Verlustfaktor wie Steifigkeit können in diesem Fall frequenzabhängig sein. Nichtlineare Dämpfung ist an nichtlineare Werkstoffkennlinien gebunden, das hysteretische Arbeitsdiagramm ist dann im allgemeinen Fall frequenzabhängig und die Amplitude ist durch einen unstetigen Verlauf gekennzeichnet (Abb. B.3).

Jedoch zeigt ein Vergleich von hysteretischen Arbeitsschleifen die Möglichkeit, nichtlineare Diagramme auf elliptische Kennlinien zu beziehen.

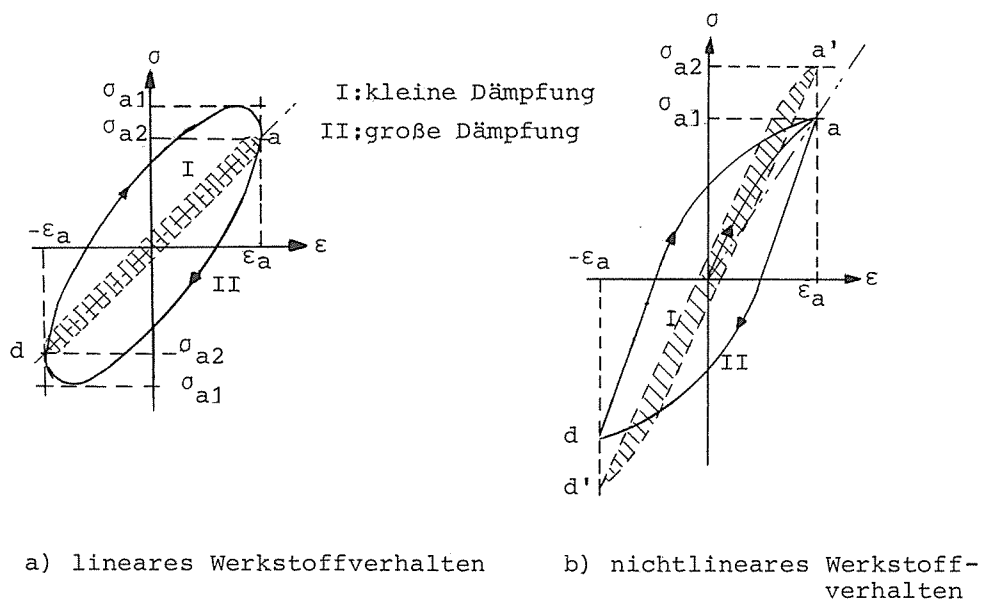


Abb. 7.1 Hysteretisches Arbeitsdiagramm bei unterschiedlicher Dämpfung [114]

Das Diagramm b) in Abb. 7.1 zeigt eine mögliche Abminderung der Dämpfung bei hoher Frequenz infolge Verfestigung des Materials für unterschiedliche Dämpfungswerte bei gleichen maximalen Dehnungen.

Diese Eigenschaft kann in mechanischen Modellen durch in Knotenpunkten des Systems angeordnete Coulomb'sche Dissipatorelemente mit beliebigen Reibungskoeffizienten dargestellt werden. Eine weitere Möglichkeit der Darstellung nichtlinearer Dämpfung durch lineare Modelle bietet die Anwendung von Verlustfaktoren.

Das eigentliche Problem liegt in der geeigneten Definition der Formänderungsenergie (B 1.4) bei nichtlinearen Kennlinien. Als

hinreichende Lösung gilt die Ermittlung eines geeigneten Verlustfaktors (B 1.5) durch einen Abklingversuch entweder für den Werkstoff oder für die Systemelemente selbst, da die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve signifikant mit der Abnahme der gespeicherten Energie verbunden ist.

Nichtlineare, frequenzabhängige Dissipationsmechanismen können im Hinblick auf eine analytische Lösung nicht oder nur näherungsweise durch lineare Ansätze erfaßt werden. Das gilt besonders dann, wenn Differentialgleichungen für mehr als für einen Freiheitsgrad vorliegen. Unter diesen Umständen kann die Dämpfung nicht durch modale Systemeigenschaften ausgedrückt werden, da die Gleichungen bei Frequenzabhängigkeit nichtlinear werden. In Anbetracht der Tatsache, daß das Problem der Modelldarstellung von nichtlinearen Dissipationsmechanismen einschließlich deren qualitativen Eigenschaften bei zunehmend nichtlinearem Verhalten und ansteigender Einflußnahme auf den Lösungsverlauf der Differentialgleichung keineswegs zufriedenstellend gelöst ist, erscheinen die aus dem Näherungsansatz für ideal elastisch-plastisches Materialverhalten und aus dem Integrationsoperator bedingten Ungenauigkeiten vernachlässigbar klein.

Da, wie einleitend vorausgesetzt, nichtlineares Werkstoffverhalten für das vorliegend zu berechnende System nur lokal begrenzt sein soll, d.h. nur im Bereich der Stoßstelle plastische Anteile auftreten, kann in gleicher Weise wie in (7.2) durch die Ersatzkraft $(P_{pt}) = [K_p](\epsilon_{pt})$ für plastische Dehnungen eine entsprechende nichtlineare Dämpfungskraft (P_{ct}) , welche wiederum lokal begrenzt ist, den nichtlinearen Dissipationsmechanismus erfassen. Im restlichen Systembereich behält der Ansatz für linear viskose Dämpfung weiterhin Gültigkeit.

Nichtlineare Dissipationsmechanismen können durch zwei unterschiedliche Ansätze erfaßt werden: durch Verlustfaktor und Reibungsdämpfung.

Verlustfaktor η

Verlustfaktoren im elastisch-plastischen Bereich können für geschichtete Querschnitte und für Strukturen, an denen Stoßeffecte an Fugen möglich sind, je nach Beanspruchung den Wert $\eta = 0,01$ bis $0,1$ [116] annehmen. Dieser Wert läßt sich dann entweder in den Ansatz für die komplexe Steifigkeit (B 2.2a) übernehmen, oder ist nach (B 2.1c) in ein kritisches Dämpfungsverhältnis β zu überführen. Aus β läßt sich ein äquivalenter Dämpfungskoeffizient c_{eq} (B 1.8a) für die vorherrschende Erregerfrequenz ermitteln. Die nichtlineare Dämpfungskraft greift direkt an den betreffenden Freiheitsgraden an, sie ist nicht mehr modal aufzulösen und hat den Wert:

$$(P_{ct}) = - c_{eq} (\dot{v}_c) .$$

Der Geschwindigkeitsvektor (\dot{v}_c) ist nur in den Positionen belegt, in denen ein nichtlinearer Mechanismus vorliegt.

Reibungsdämpfung

Nichtlineare Dämpfungsmechanismen sind vielfach dadurch gekennzeichnet, daß sie weitgehend unabhängig von der Frequenz, aber abhängig von der Amplitude sind. Diese Mechanismen enthalten Kombinationen von Komponenten des viskoelastischen Modells nach Abb. B.7, in denen der lineare Dämpfungstopf durch ein Coulomb'sches Reibungselement ersetzt ist. Der Ansatz für eine nichtlineare Dämpfungskraft eines Reibungselementes, dessen Restitutionskoeffizient nicht von der Stoßgeschwindigkeit und der Masse abhängt, lautet nach [107] für eine entsprechend einer hysteretischen Dämpfungskraft gewählten

$$\text{Formulierung: } (P_{ct}) = R (v_R) \frac{(\dot{v}_R)}{|\dot{v}_R|} .$$

Der Koeffizient R wird aus Versuchen zur Feststellung des Restitutionskoeffizienten ϵ ermittelt:

$$R = k \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon^2} .$$

Der Vektor (v_R) dient als Maß der durch die Plastizierung hervorgerufenen Reibungseffekte und ist nur in den entsprechenden Freiheitsgrade definiert. Für die Prediktorlösung $(v_t)^1$ (7.8), (7.10) werden für $(v_c)^1$, $(v_R)^1$ die Werte des vorhergehenden Zeitintervalls entsprechend angesetzt.

8.0 Beispiele

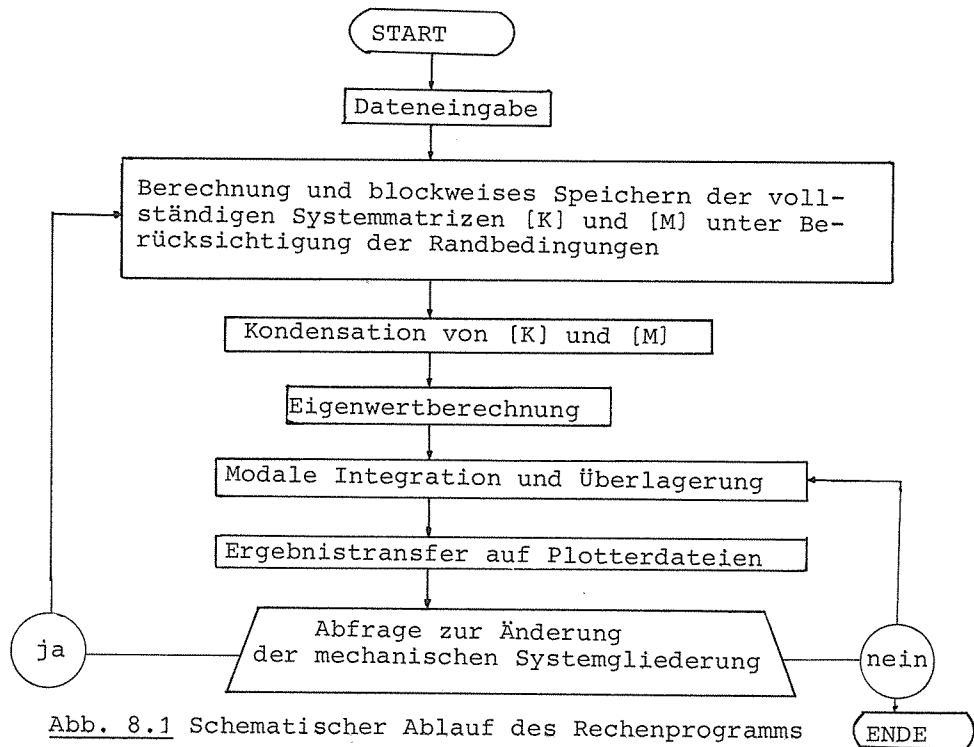
An 3 Beispielen soll die Anwendung des Verfahrens für den linear-elastischen Bereich demonstriert werden. Das erste Beispiel zeigt die Genauigkeit des errechenbaren Ergebnisverlaufes bei Anwendung von Fugenelementen sowie die eigentlich zu erwartende Ergebnisgenauigkeit von diskreten Rechenmethoden, angewendet an kontinuierlichen Systemen, die stoßartig beansprucht werden. Im zweiten und dritten Beispiel wird ein vereinfachtes und ein genaues Modell einer vorbelasteten und vorgespannten Berstschutzkonstruktion durch das Zusatzlastverfahren berechnet.

8.1 Programmbeschreibung

Das Programm ist ausgelegt auf maximal:

120 Freiheitsgrade / 100 Systemknotenpunkte
100 Elemente / 200 Zeitintervalle bei beliebiger,
zeitlich veränderlicher Belastung.

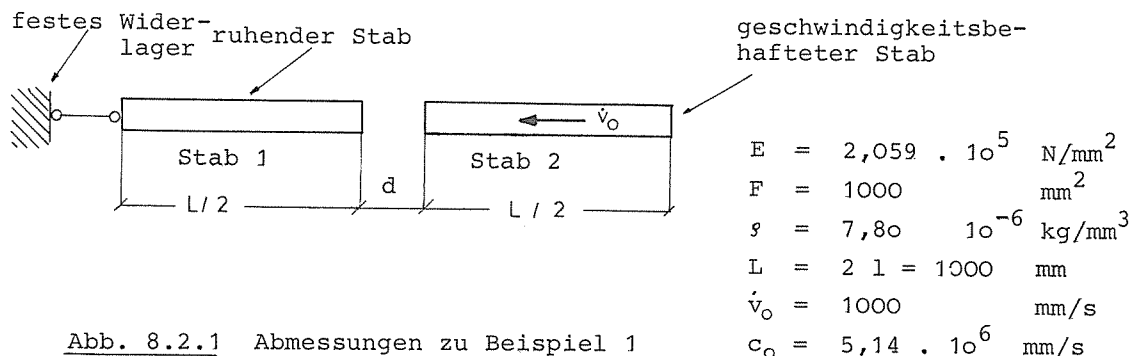
Die Anzahl der Integrationszeitschritte bei konstanter Belastung ist nicht begrenzt. Das Programm ist in Fortran IV geschrieben und benötigt auf einer Rechenanlage Telefunken TR 440 ca. 130 K Kernspeicher. Das Rechenprogramm wird schematisch in Abschnitte nach Abb. 8.1 geteilt:



8.2 Einfluß der Diskretisierung eines kontinuierlichen Systems auf das Antwortverhalten unter Impulsbeanspruchung (Beispiel 1)

Beispiel 1 zeigt die zeitliche Änderung der Deformationen, Geschwindigkeiten und Spannungen für ein System, dessen Massen sowohl als Punktmassen als auch als konsistente Massen abgebildet sind, unter Impulsbeanspruchung. Das Zutreffen der rechnerischen Lösung wird durch den Vergleich mit der für das gewählte, einfache System möglichen elementaren, d.h. exakten Lösung für ein-dimensionale Wellenausbreitung nachgewiesen.

In Beispiel 1 liegen zwei identische Stäbe unterschiedlicher Rand- und Anfangsbedingungen vor: Zum Zeitpunkt $t = 0$ stößt ein mit der Geschwindigkeit \dot{v}_0 behafteter, freier Stab auf einen ruhenden, einseitig gelagerten Stab, vgl. Abb. 8.2.1. Um den Einfluß der fiktiven Fugensteifigkeit auf die numerische Rechnung zu erfassen, wird in einer Variation (Version 2) ein Fugenelement zwischen den Stäben angeordnet.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Zustand I) beginnt der Stoßvorgang beider Stäbe. Zu Beginn des Stoßvorganges ($0 \leq t \leq t_{II}$) verhalten sich der ruhende und der geschwindigkeitsbehaftete Stab wie zwei gleichartige mit der Geschwindigkeit $\dot{v}_0/2$ aufeinanderprallende Stäbe (vgl. Abb. 8.2.2). Der weitere Spannungs- und Dehnungsverlauf bis zum Wiederablösen von Stab 2 folgt ebenfalls aus Abb. 8.2.2. Die Phasendifferenz zweier Zustände, die zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt sind, entspricht gerade der Länge eines Stabes, d.h. $\Delta t = l/c_0$. Im Zustand V löst sich Stab 2 wieder mit der Geschwindigkeit $-\dot{v}_0$, während Stab 1 in Ruhe bleibt.

Rechnerische Lösung

Beide Stäbe werden in der Version 1 durch je 20 Elemente dargestellt:

Stab 1 hat die Knoten 1 bis 21, die Elemente 1 bis 20, ein festes Auflager am Knoten 1, befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ruhezustand.

Stab 2 hat die Knoten 22 bis 41, die Elemente 21 bis 40, bewegt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit \dot{v}_0 .

Erläuterung zu Abb. 8.2.2

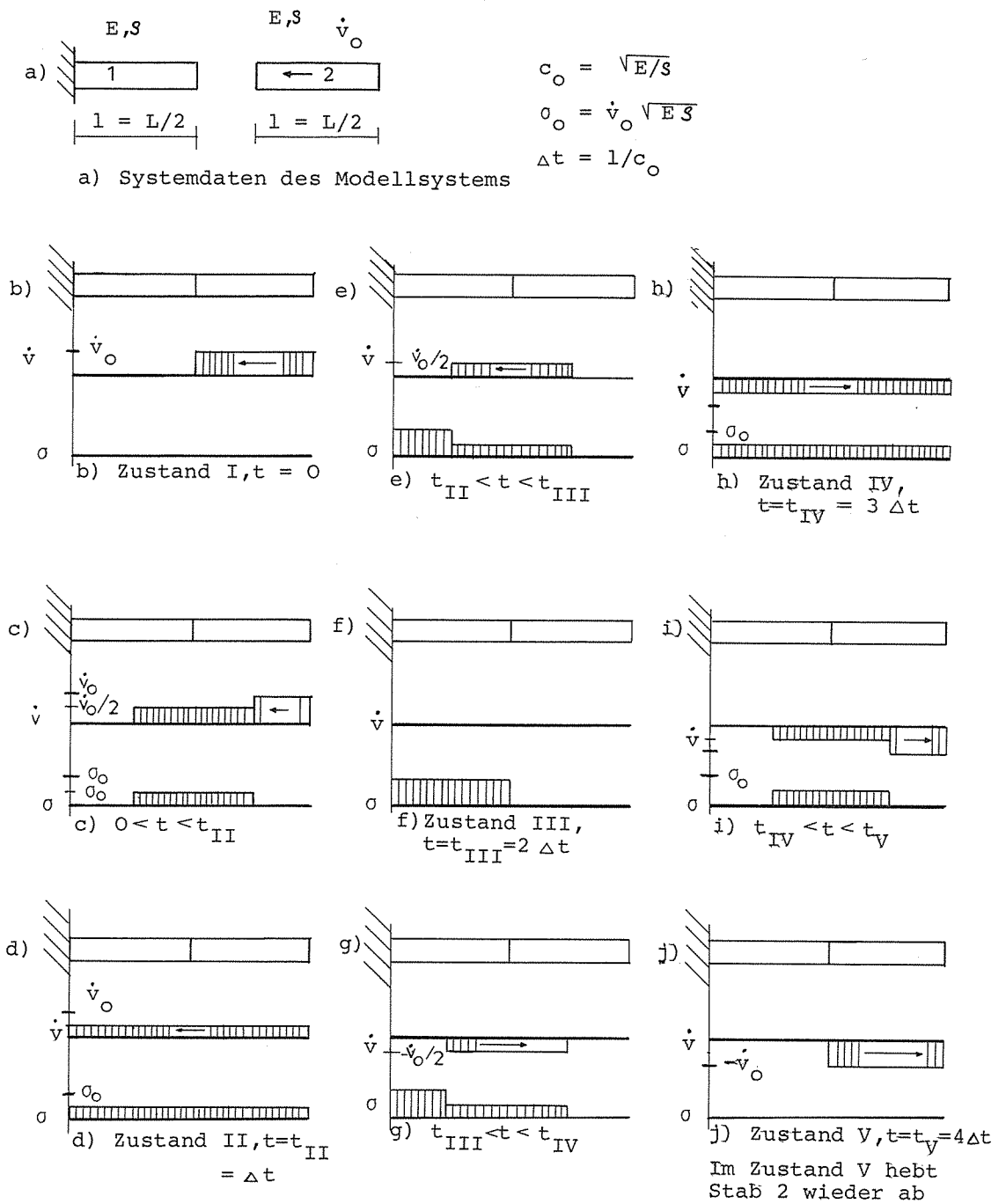
c_0 = Longitudinalwellenfortpflanzungsgeschwindigkeit

σ_0 = $40 \cdot 11 \text{ N/mm}^2$; Bezugsspannung

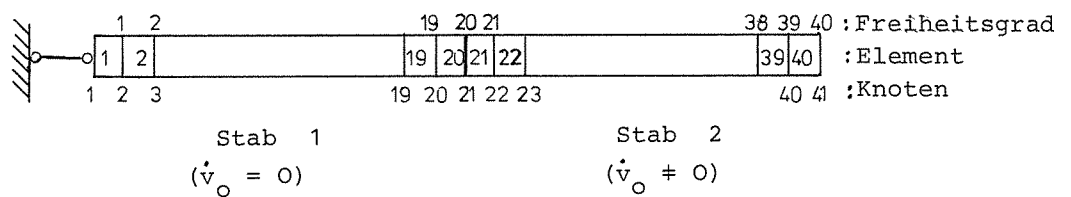
Δt = Systemschwungsdauer/4

Δ_0 = $\sigma_0 \cdot l_{E1} / E = 4.86 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$; Bezugsdeformationsdifferenz

Abb. 8.2.2 eindimensionales Stabstoßverhalten dargestellt an einem Zweistabmodell in aufeinanderfolgenden Phasen



In der Version 2 wird zwischen den Knoten 21, 22 ein Fugenelement eingefügt. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt für Version 1:40, für Version 2:41, (vgl. Abb. 8.2.3).



Version 1: ohne Fugenelement

Version 1 festzustellen, so daß das identische Verhalten zweier identischer Systeme unterschiedlicher Modellabbildung auch für den Geschwindigkeitsverlauf gewährleistet ist.

In Abb. 8.2.10 und 8.2.11 sind die Geschwindigkeiten der Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40 für ein Modell mit konsistenter Massenverteilung der Version 2 dargestellt. Auch hier wird der zunehmend oszillierende Verlauf der Kurven um die exakten Werte bei ansteigender Anzahl von Eigenwerten sichtbar. Es wird aber auch der prinzipielle Unterschied zwischen dem Punktmassenmodell und dem Modell mit konsistenter Massenverteilung deutlich:

Beim Punktmassenmodell tritt die größte Oszillation nach einem Sprung, beim Modell mit konsistenter Massenverteilung vor einem Sprung auf; die Sprünge selbst besitzen einen endlichen Anstieg.

Die beim Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe festgestellten Eigenschaften gelten gleichermaßen für die Spannungsverläufe, welche proportional zu den in Abb. 8.2.12 bis 8.2.16 dargestellten Differenzendehnungsverläufe Δ der Elemente 10, 20, 30 und 40 sind, es gilt: $\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta}{l_{E1}} E$.

Die in Abb. 8.2.12 bis 8.2.15 dargestellten Differenzendehnungsverläufe eines Punktmassenmodells der Version 1 sind wiederum identisch mit den Differenzendehnungen eines Punktmassenmodells der Version 2. Die in Abb. 8.2.16 dargestellten Differenzendehnungsverläufe eines Modells mit konsistenter Massenverteilung der Version 2 unterscheiden sich wiederum durch die gleichen beim Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe gefundenen Merkmale eines Punktmassenmodells.

Der Lösungsvergleich läßt folgende Schlüsse zu:

- Durch die höheren EW erhalten Spannungs- und Geschwindigkeitsverläufe oszillierenden Charakter.
- Durch das Einfügen von Fugenelementen ergeben sich keine numerischen Instabilitätserscheinungen und keine Abweichungen des Ergebnisverlaufes zu Berechnungen ohne Anwendung von Fugenelementen.
- Die rechnerisch ermittelten Spannungs- und Geschwindigkeitsverläufe weichen mit ihren Mittelwerten nicht von den exakten Werten ab.
- Durch die Benutzung höherer Eigenformen wird ein verstärkter oszillierender Verlauf für die Spannungs- und Geschwindigkeitsverläufe sichtbar.
- Der Anstieg für die Stufenfunktion hat in der numerisch-rechnerischen Lösung einen endlichen Wert. Die Abweichung zum stufenförmigen Anstieg sinkt mit der Anzahl der benutzten Eigenwerte.
- Der Unterschied der rechnerischen Lösung für Punktmassenmodelle und Modelle mit konsistenter Massenverteilung besteht in der unterschiedlichen zeitlichen Folge der Oszillationen. Im weite-

ren zeitlichen Verlauf wird jede dieser Oszillationen gedämpft und pegelt sich auf den exakten Mittelwert ein.

- Da bei der Analyse eines schwingenden Systems mit Stoßeffecten die Extremalwerte für die Spannung und die Geschwindigkeit von Bedeutung sind, muß geklärt werden, ob die Oszillationen numerischen Charakter haben oder ob sie echte Systemschwingungen sind. Hierzu dient der Vergleich der Verläufe des Punktmassenmodells und des Modells mit konsistenter Massenverteilung:

Echte Systemschwingungen werden bei beiden Methoden gleichzeitig sichtbar; numerische Oszillationen durch die Diskretisierung sind dann vorhanden, wenn jeweils nur eine Abbildung oszillierende Verläufe ergibt. In diesem Fall ergeben sich die exakten Werte in guter Näherung durch Mittelung.

Abb. 8.2.4

Vergleich der Deformationen v (cm), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

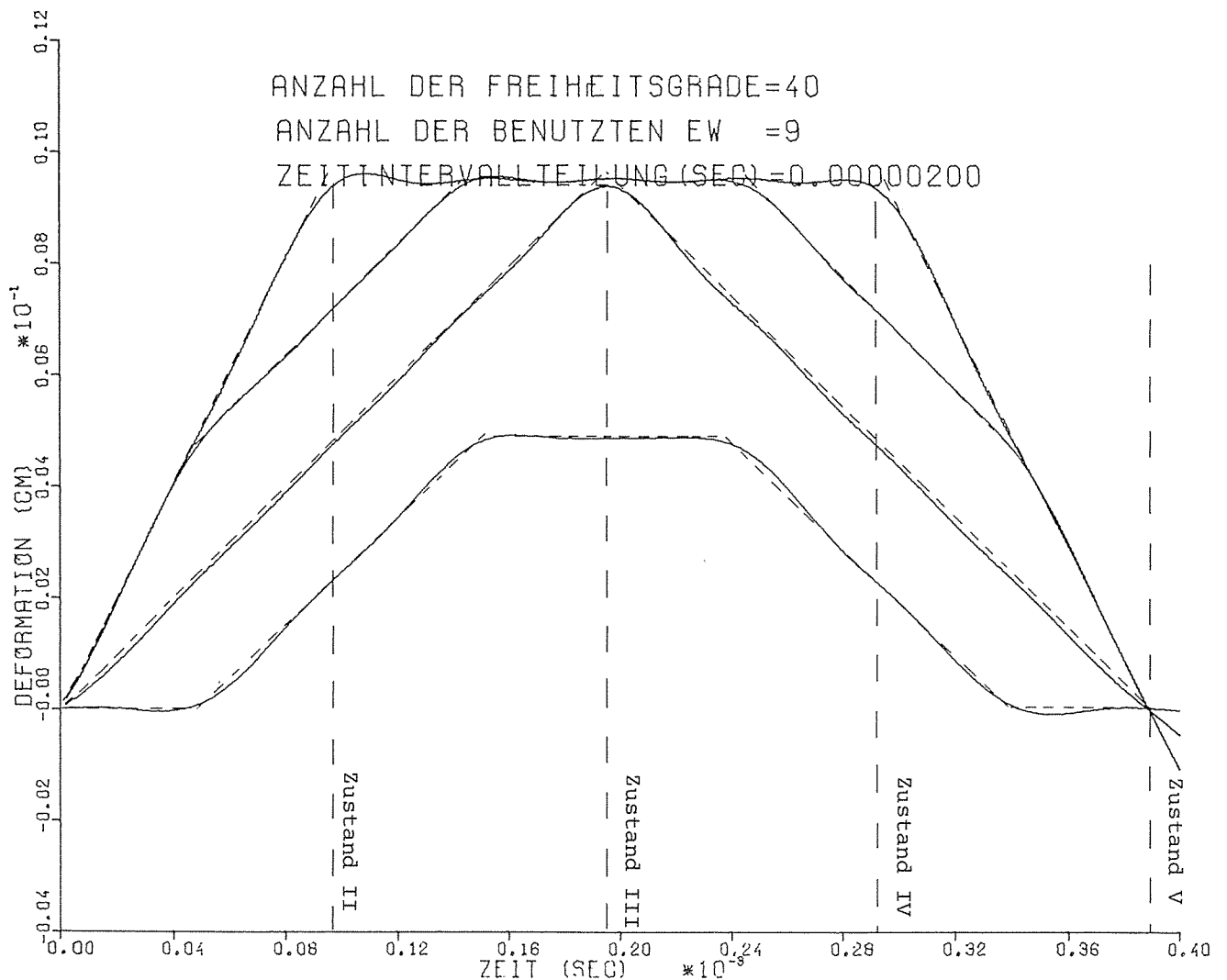


Abb. 8.2.5

Vergleich der Deformationen v (cm), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 2 (durchgezogene Kurve)

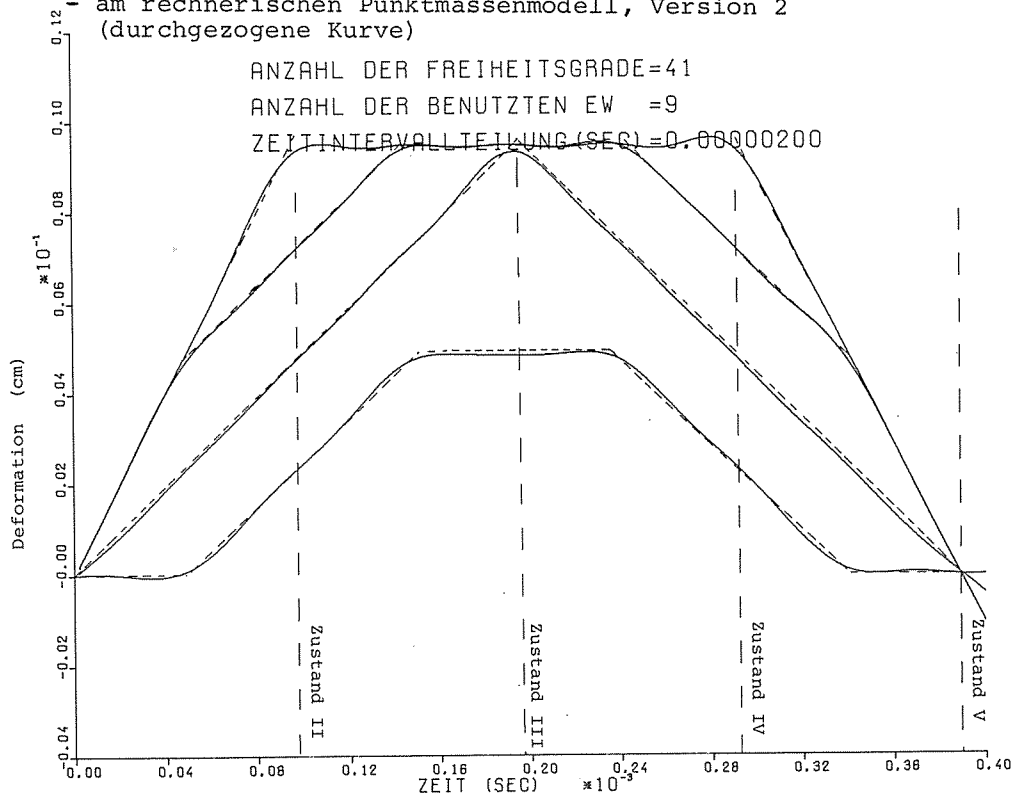


Abb. 8.2.6

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

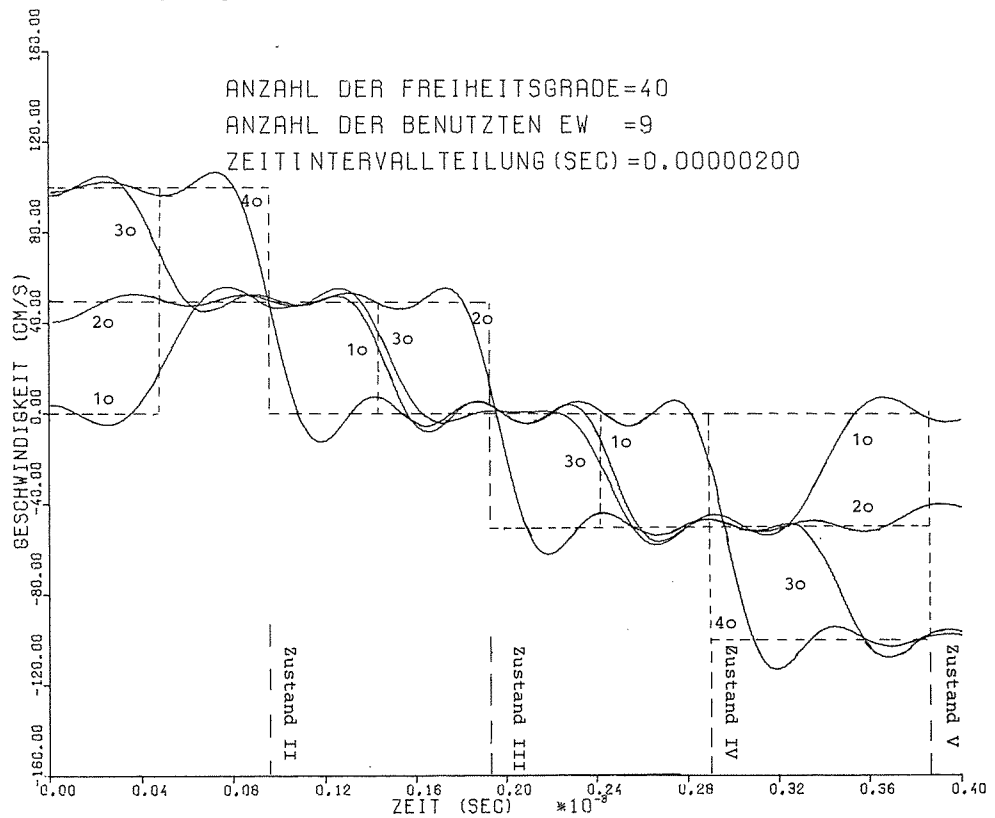


Abb. 8.2.7

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

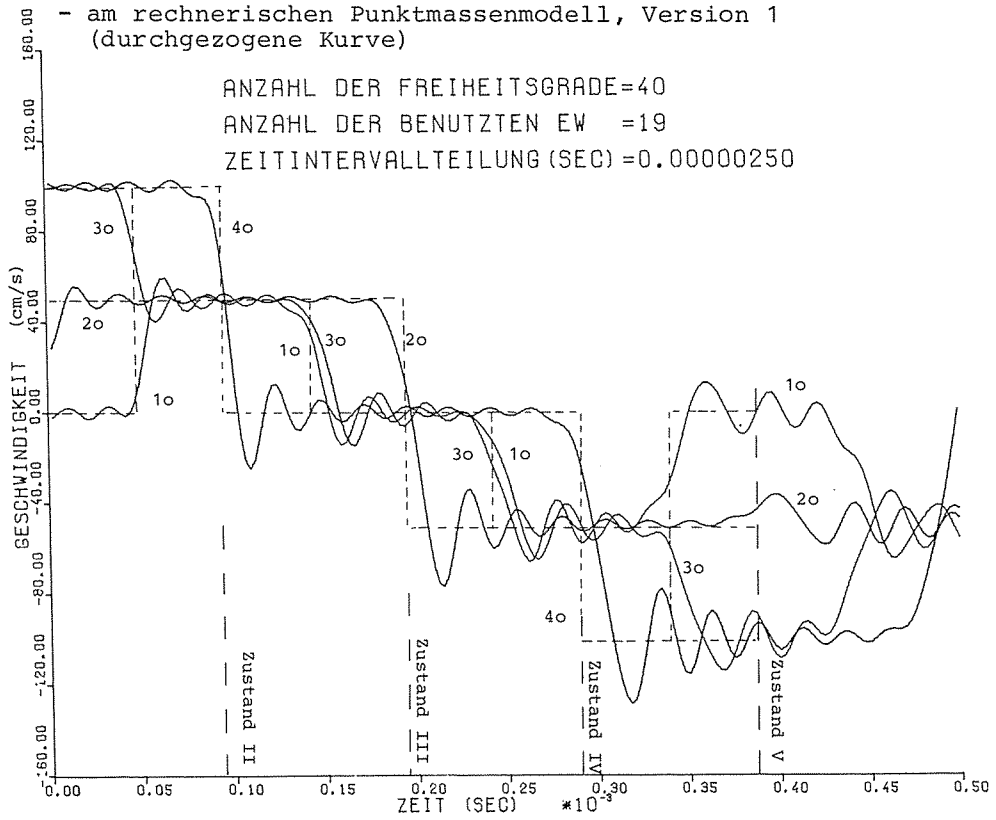


Abb. 8.2.8

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

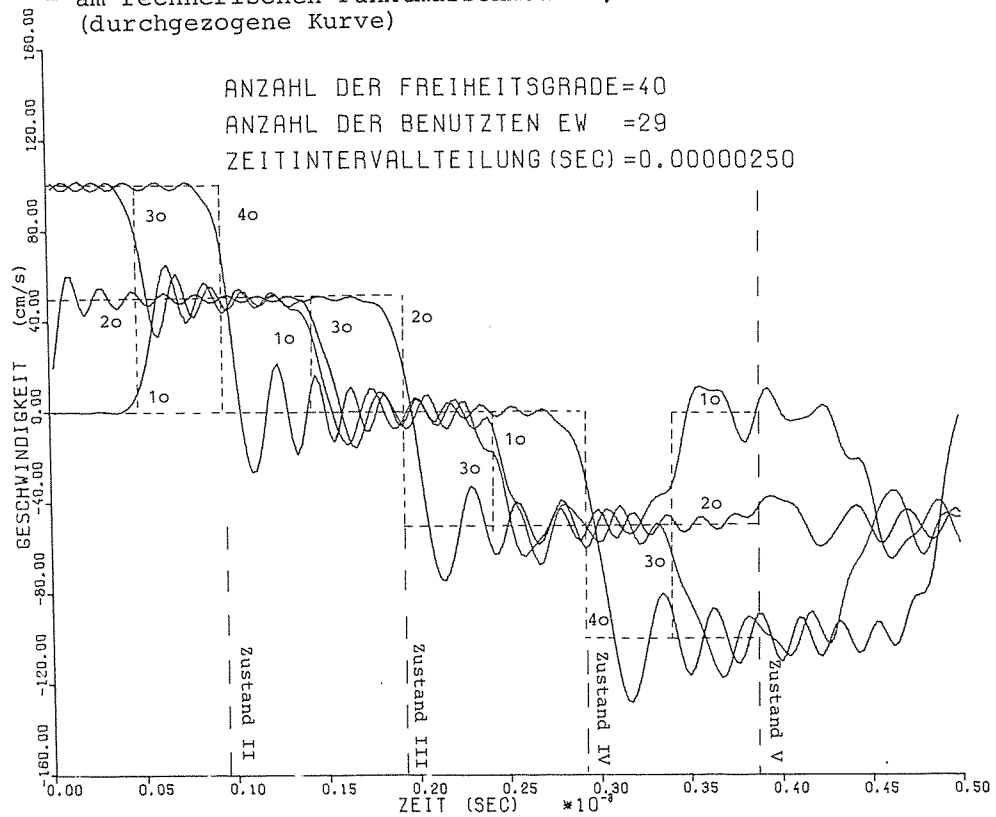


Abb. 8.2.9

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

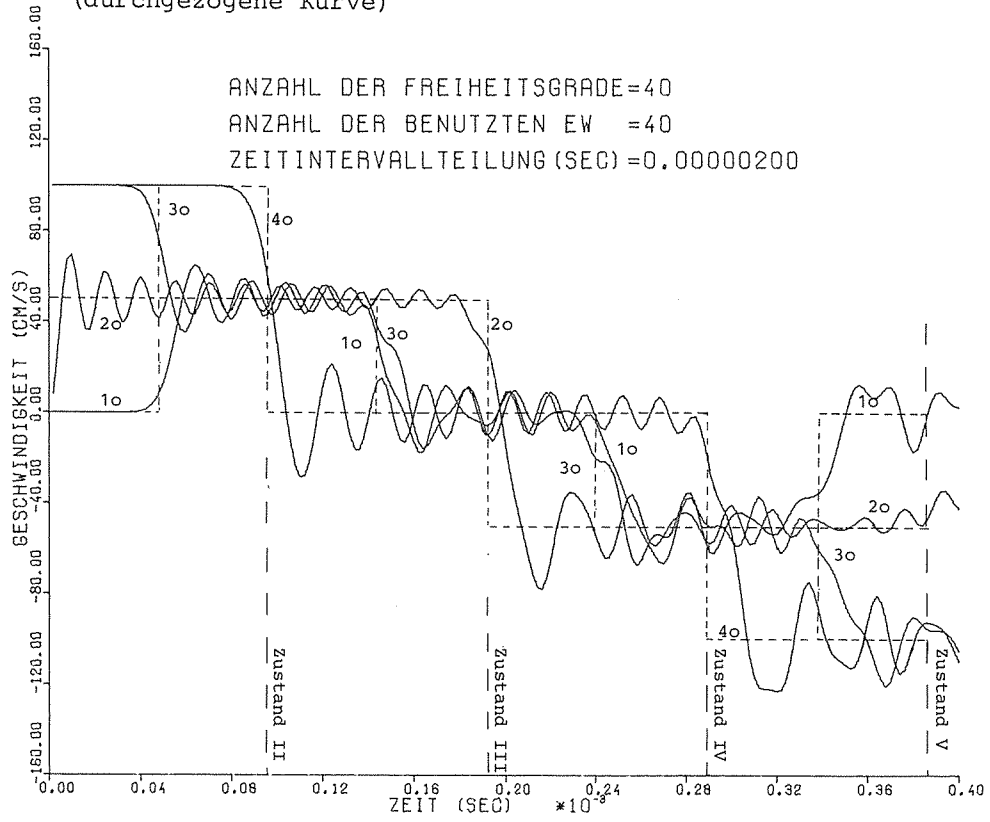


Abb. 8.2.10

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Modell mit konsistenter Massenverteilung, Version 2 (durchgezogene Kurve)

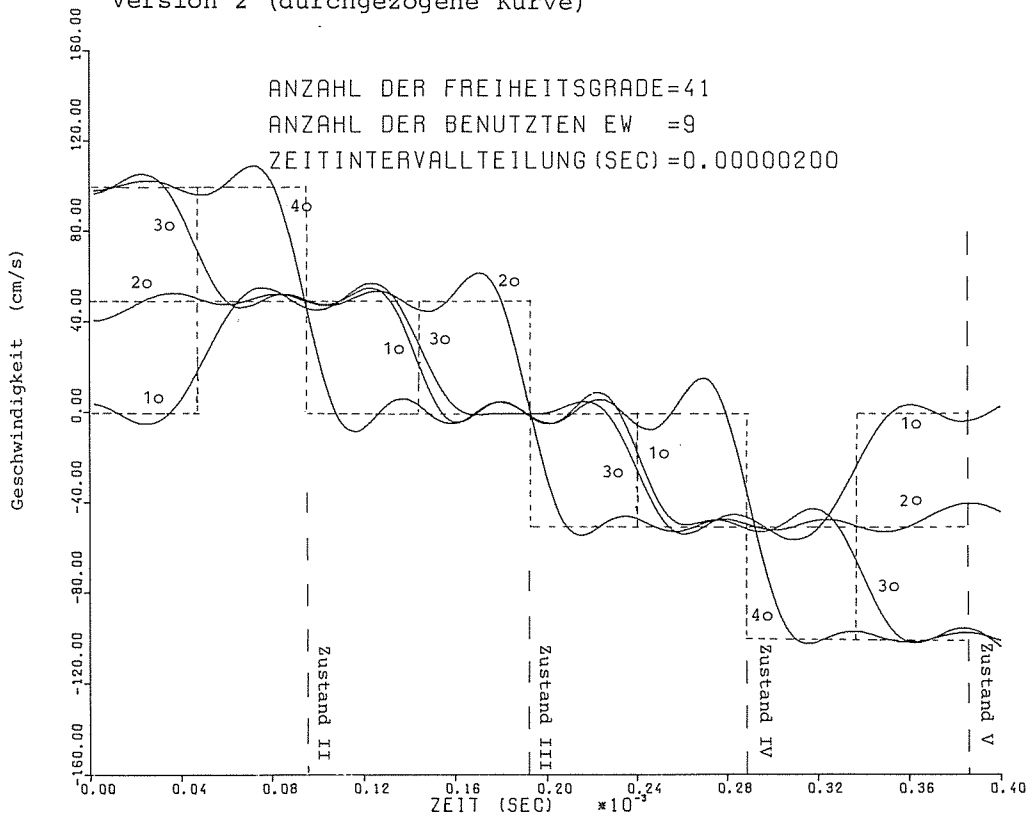


Abb. 8.2.11

Vergleich der Geschwindigkeiten \dot{v} (cm/s), betrachtet für die Freiheitsgrade 10, 20, 30 und 40
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Modell mit konsistenter Massenverteilung, Version 2 (durchgezogene Kurve)

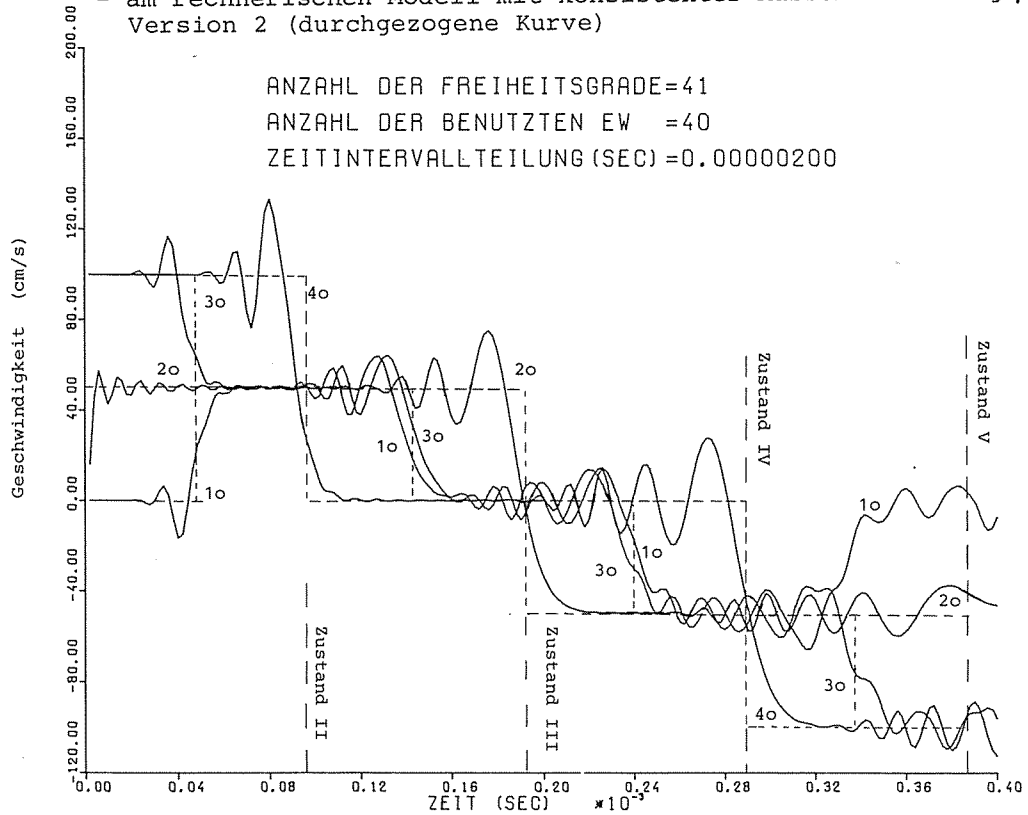


Abb. 8.2.12

Vergleich der Deformationsdifferenzen Δ (cm) an den Elementen 10, 20 und 30
 - nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
 - am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

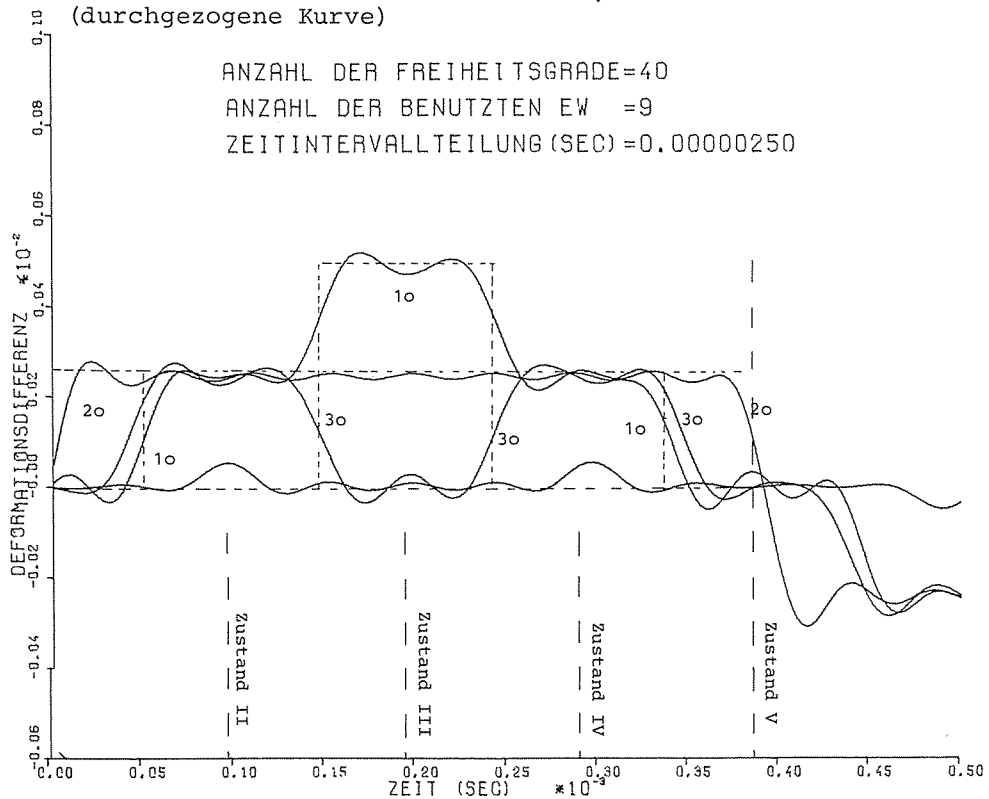


Abb. 8.2.13

Vergleich der Deformationsdifferenzen Δ (cm) an den Elementen 10, 20 und 30

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

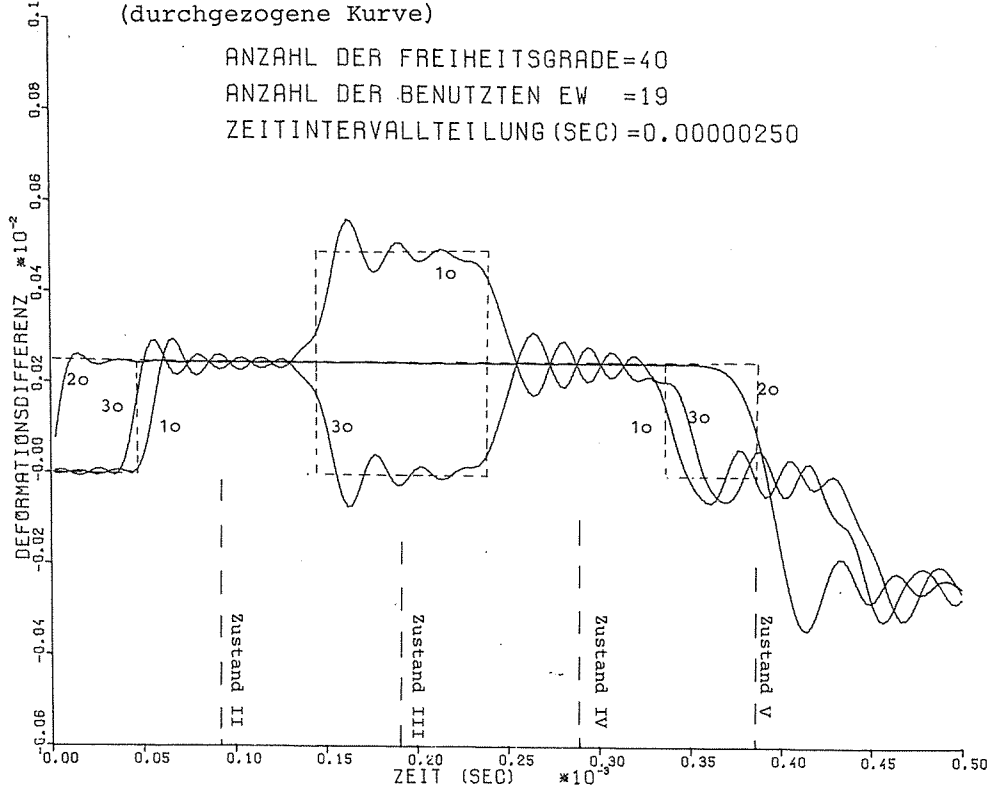


Abb. 8.2.14

Vergleich der Deformationsdifferenzen Δ (cm) an den Elementen 10, 20 und 30

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

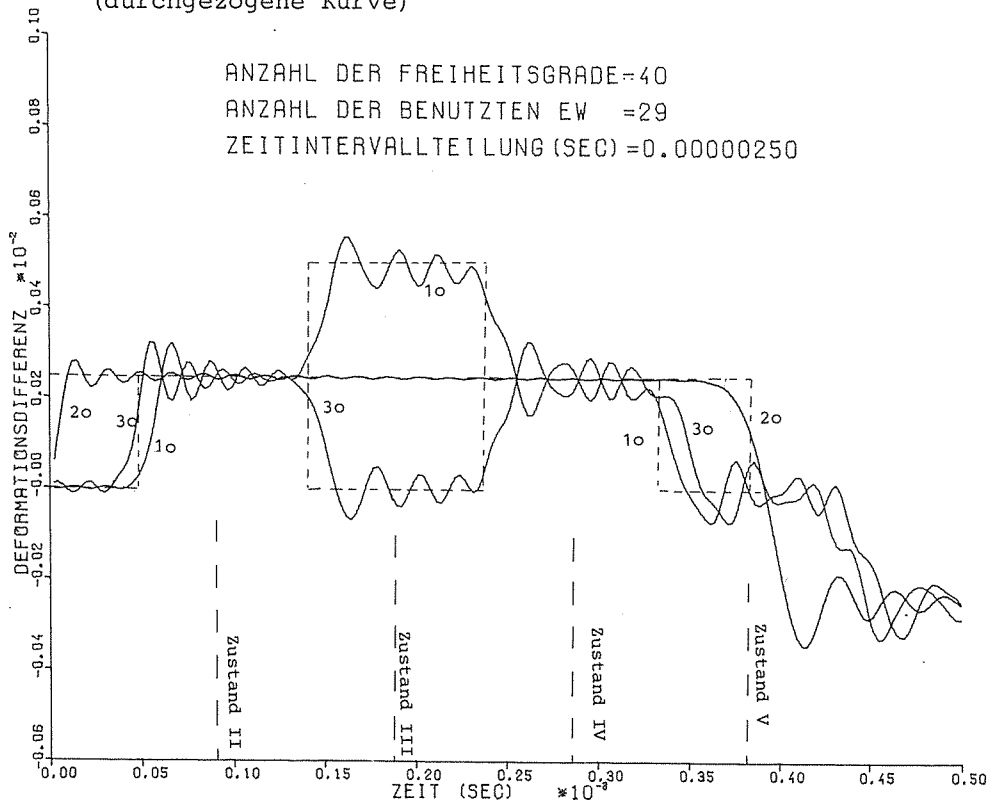


Abb. 8.2.15

Vergleich der Deformationsdifferenzen Δ (cm) an den Elementen 10, 20 und 30

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Punktmassenmodell, Version 1 (durchgezogene Kurve)

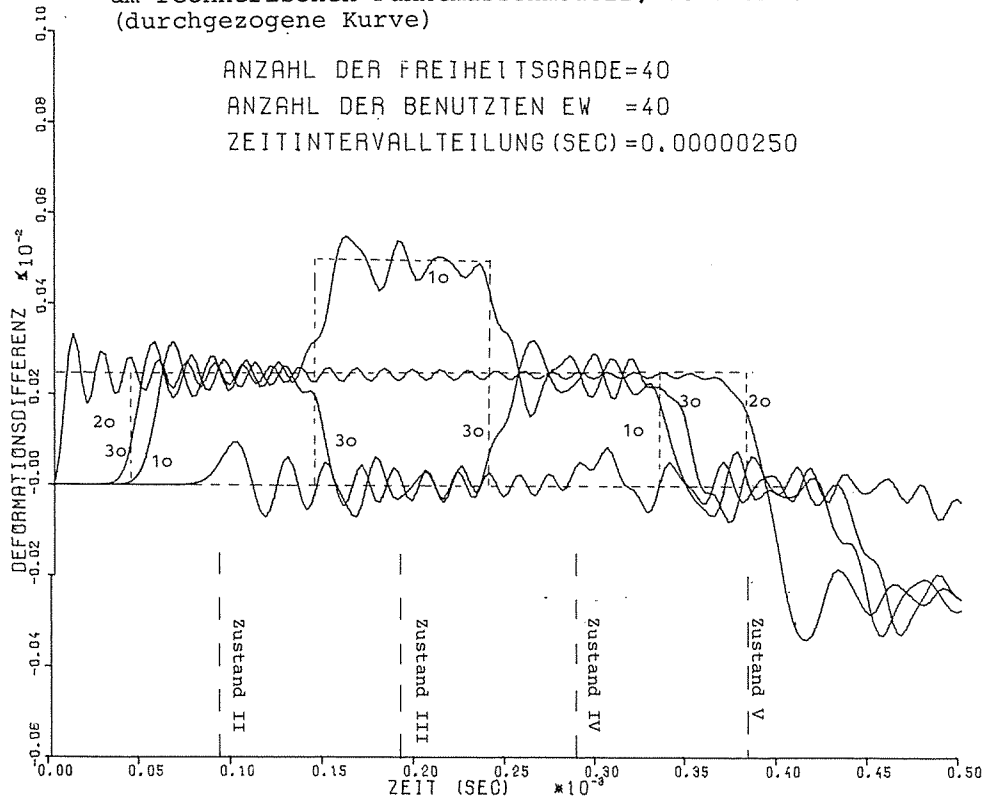
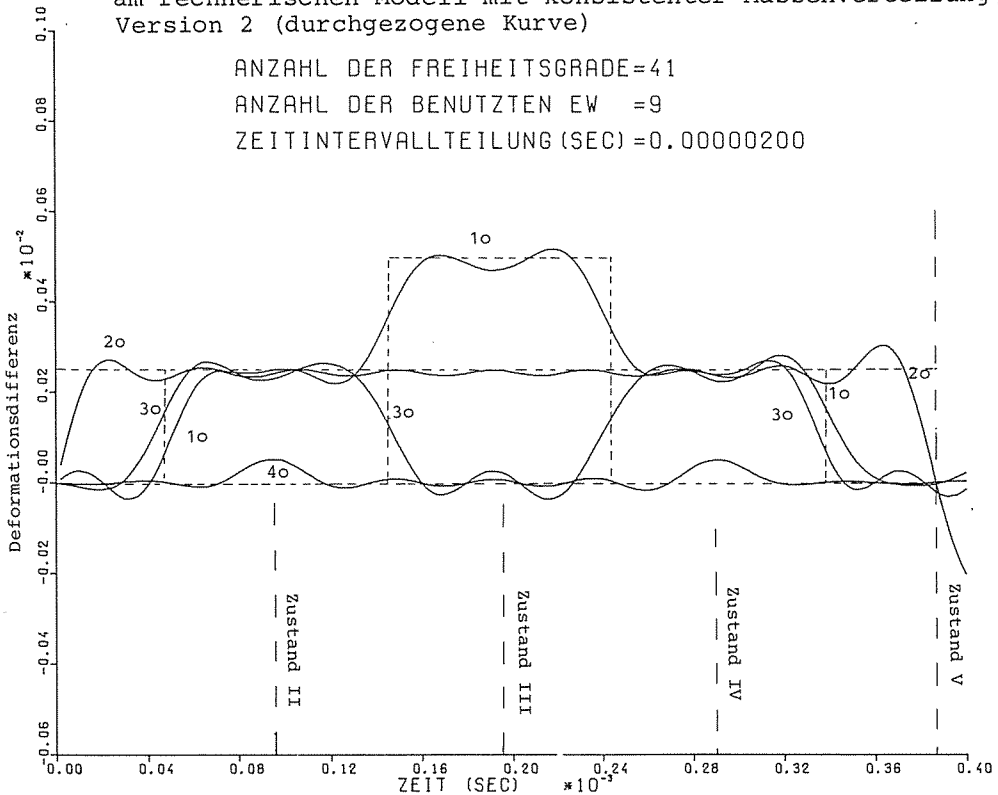


Abb. 8.2.16

Vergleich der Deformationsdifferenzen Δ (cm) in den Elementen 10, 20, 30 und 40

- nach der elementaren Stoßtheorie (gestrichelte Linie)
- am rechnerischen Modell mit konsistenter Massenverteilung, Version 2 (durchgezogene Kurve)



8.3 Untersuchung eines Zweimassenschwingers mit Stoßeffekten unter Berücksichtigung einer statischen Vorbeanspruchung (Beispiel 2)

Anhand eines die Berstschutzkonstruktion vereinfachenden Beispiels soll gezeigt werden, daß beide genannten Verfahren (übliche Verfahren und Zusatzlastverfahren) zum selben Resultat führen. Es werden als statische Lasten: eine Vorbelastung P_i aus dem Innendruck und eine Vorspannung P_v aus Temperaturdehnungen berücksichtigt. Die dem System eingeprägte dynamische Belastung aus dem Bersten des Druckbehälterbodens wird durch das plötzliche Entfernen einer Komponente der Vorbelastung P_i simuliert, s. Abb. 8.3.1. Die Systemwerte werden so gewählt, daß nach Überwinden der in Feder 3 anfangs vorhandenen Druckschnittlast ein Ablösen der Feder vom Auflager möglich ist und eine Änderung der Systemgliederung entsteht.

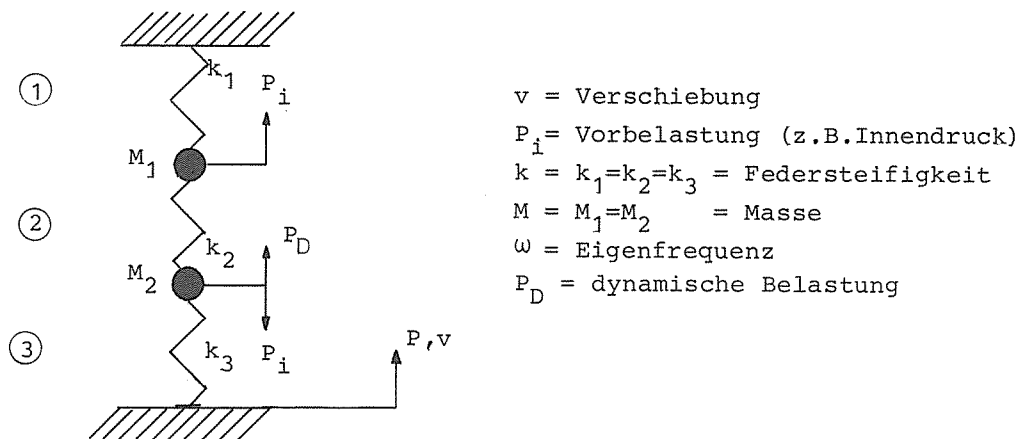


Abb. 8.3.1 Stellvertretendes Feder-Masse-System (Beispiel 2)

Die drei Federn des Systems sind ideal masselos, das System besitzt somit zwei Punktmassen. Die statische Last P_i greift in den Massepunkten an und entspricht der Wirkung des Innendruckes. Der dynamische Lastfall wird durch die plötzliche Entlastung von Masse M_2 simuliert. Die modalen Werte des Punktmassensystems für das ursprüngliche, in seiner Gliederung nicht veränderte System lauten:

$$[\phi] = [\phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$[\phi_M] = [M]^{-1/2} [\phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2M}} & \sqrt{\frac{1}{2M}} \\ \sqrt{\frac{1}{2M}} & -\sqrt{\frac{1}{2M}} \end{bmatrix} = [\phi_M] \quad ,$$

mit den Eigenwerten:

$$\omega_1 = \sqrt{k/M} \quad , \quad \omega_2 = 1,73 \sqrt{k/M} \quad .$$

Aus dem dynamischen Lastvektor $(P)_D$:

$$(P)_D = (P)_{i\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [\phi_M]^T (P)_{i\Delta} = \begin{pmatrix} P \sqrt{\frac{1}{2M}} \\ -P \sqrt{\frac{1}{2M}} \end{pmatrix}$$

folgt nach (6.4a) der Deformationsverlauf des Zusatzlastverfahrens:

$$v_1 = \frac{P}{2k} \{1 - \cos \omega_1 t\} - \frac{P}{6k} \{1 - \cos \omega_2 t\} \quad ,$$

$$v_2 = \frac{P}{2k} \{1 - \cos \omega_1 t\} + \frac{P}{6k} \{1 - \cos \omega_2 t\} \quad ,$$

der sich durch den statischen Deformationsvektor:

$$(v)_i = \begin{pmatrix} \frac{P}{3k} \\ -\frac{P}{3k} \end{pmatrix}$$

von dem vollständigen Deformationsvektor unterscheidet.

Der dynamische Belastungsvektor und der Anfangsdeformationsvektor für das übliche, hinsichtlich des Deformationsverlaufes vollständig formulierten Verfahrens lauten nach (6.1):

$$(P)_{iR} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{bzw.} \quad [\phi_M]^T (P)_{iR} = \begin{pmatrix} P \sqrt{\frac{1}{2M}} \\ P \sqrt{\frac{1}{2M}} \end{pmatrix} \quad ,$$

und:

$$(v)_i = \begin{pmatrix} \frac{P}{3k} \\ -\frac{P}{3k} \end{pmatrix} \quad ,$$

bzw. als modaler Anfangsdeformationsvektor:

$$(y_0) = [\phi_M]^{-1} (v)_i = [\phi_M]^T [M] (v)_i = \begin{pmatrix} \frac{2P}{3k} \sqrt{\frac{M}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die vollständigen dynamischen Deformationsverläufe lauten nach (6.4b):

$$v_1 = \frac{P}{2k} \{1 - \cos \omega_1 t\} + \frac{P}{6k} \{1 + \cos \omega_2 t\} \quad ,$$

$$v_2 = \frac{P}{2k} \{1 - \cos \omega_1 t\} - \frac{P}{6k} \{1 + \cos \omega_2 t\} \quad .$$

Beide Verfahren führen am unveränderten System zum selben Resultat. Der Einfluß der nichtdynamischen Belastungen bei verändertem Gliederungszustand wird getrennt für die Lastfälle Vorspannung und Vorbelastung untersucht.

8.3.1 Vorspannung $(P_i = 0, P_v \neq 0)$.

Da bei analytischen Verfahren die Ermittlung des Überganges von Zustand I (ungeöffnet) in Zustand II (geöffnet) nicht in allgemeiner Form, sondern nur durch die Lösung transzendenter Gleichungen möglich ist, wird ein bestimmtes Verhältnis P_v/P gewählt: $v = P_v/P = 1$.

Jede Feder ist also um $\Delta = P_v/k$ vorverformt. Feder k_3 öffnet bei $v_2 = \Delta = P_v/k$, d.h. bei

$$\frac{P}{k} = \frac{P}{2c} \{1 - \cos \omega_1 t_e\} + \frac{P}{6k} \{1 - \cos \omega_2 t_e\} .$$

Es folgt: $\omega_1 t_e = 1.416$.

Die modalen Werte für die in Abb. 8.3.2 gewählte Diskretisierung lauten:

$$\omega_1 = \sqrt{k/M} = 2139.7, \quad \omega_2 = 1.73 \omega_1 = 3701.6 ,$$

$$\omega_{1II} = 0.618 \sqrt{k/M} = 1322.3, \quad \omega_{2II} = 1.618 \sqrt{k/M} = 3461.97 .$$

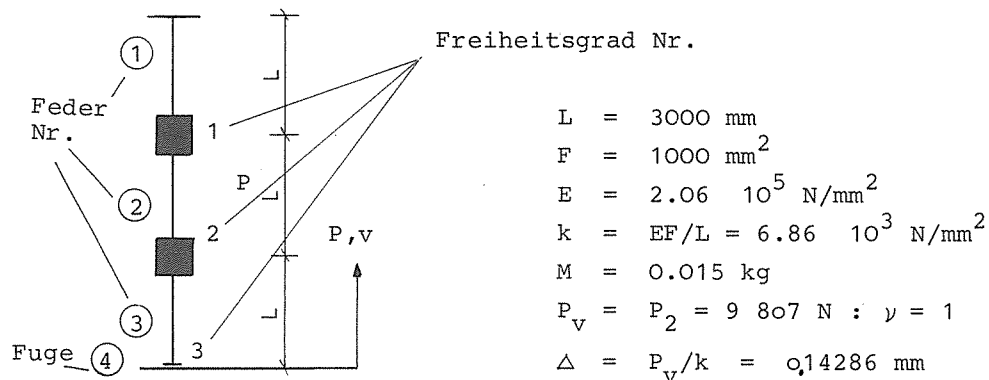


Abb. 8.3.2 Diskretisierung des Feder-Masse-Systems (Beispiel 2)

Die Belastungs- und Anfangsbedingungen lauten, wenn der Freiheitsgrad 3 nach (6.12) statisch auf den Freiheitsgrad 2 bezogen wird:

$$(P)_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} : \text{Fugenbelastungsvektor (beim Zusatzlastverfahren in der Fuge bzw. Masse 2 angreifend),}$$

$$(v)_v = \begin{pmatrix} \Delta \\ 2 \Delta \end{pmatrix} : \text{Anfangsverformungsvektor (vollständiges Verfahren).}$$

Mit der modalen Lösung für das Zusatzlastverfahren:

$$(y)_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (v)_{\tau \Delta} = [\phi_{MII}]' [M_{II}]^{-1} (v)_{\tau \Delta} ,$$

$$(\dot{y})_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (\dot{v})_{\tau} = [\phi_{MII}]' [M_{II}]^{-1} (\dot{v})_{\tau}$$

und mit $(v) = [\phi_{MII}](y)$ folgt der dynamische Anteil des Deformationsverlaufes:

$$v_1 = 7.733 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{1II} t + 7.656 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{1II} t - 2.867 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{2II} t + 1.681 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t ,$$

$$v_2 = 1.250 \cdot 10^{-2} \cos \omega_{1II} t + 1.239 \cdot 10^{-2} \sin \omega_{1II} t + 1.772 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{2II} t - 1.039 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t .$$

Beim vollständig formulierten Verfahren folgen aus den Anfangsbedingungen:

$$(v)_{\tau} = (v)_v, (v)_{\tau \Delta}, (\dot{v})_{\tau}$$

die vollständigen dynamischen Deformationen:

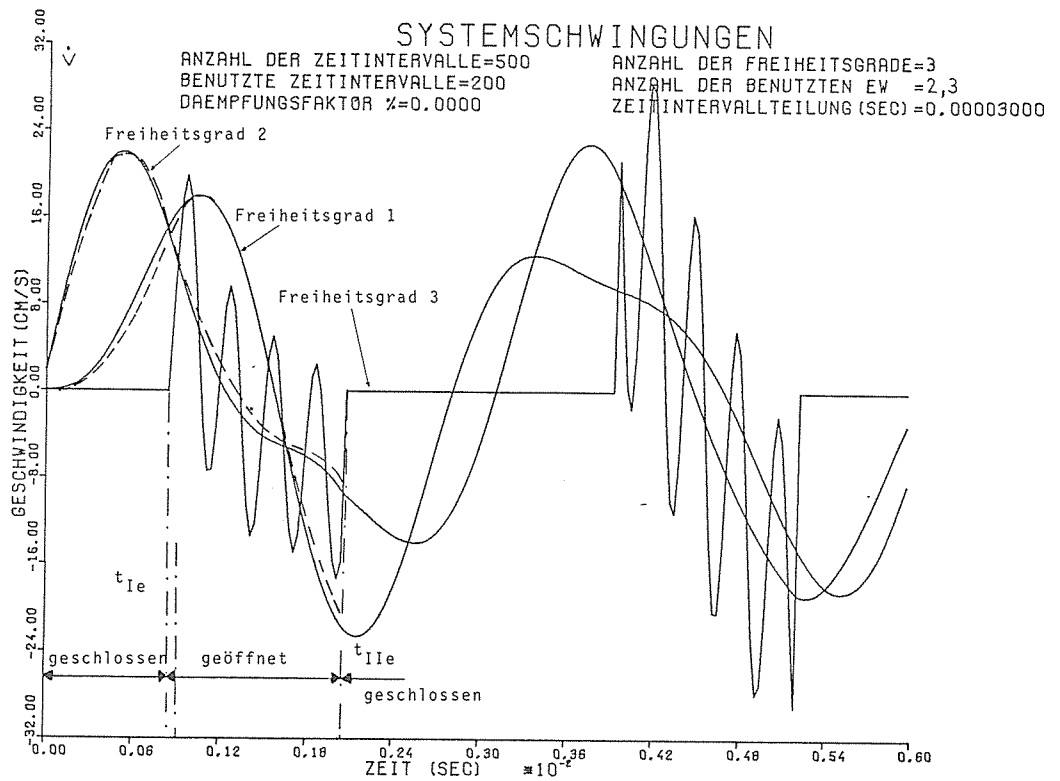
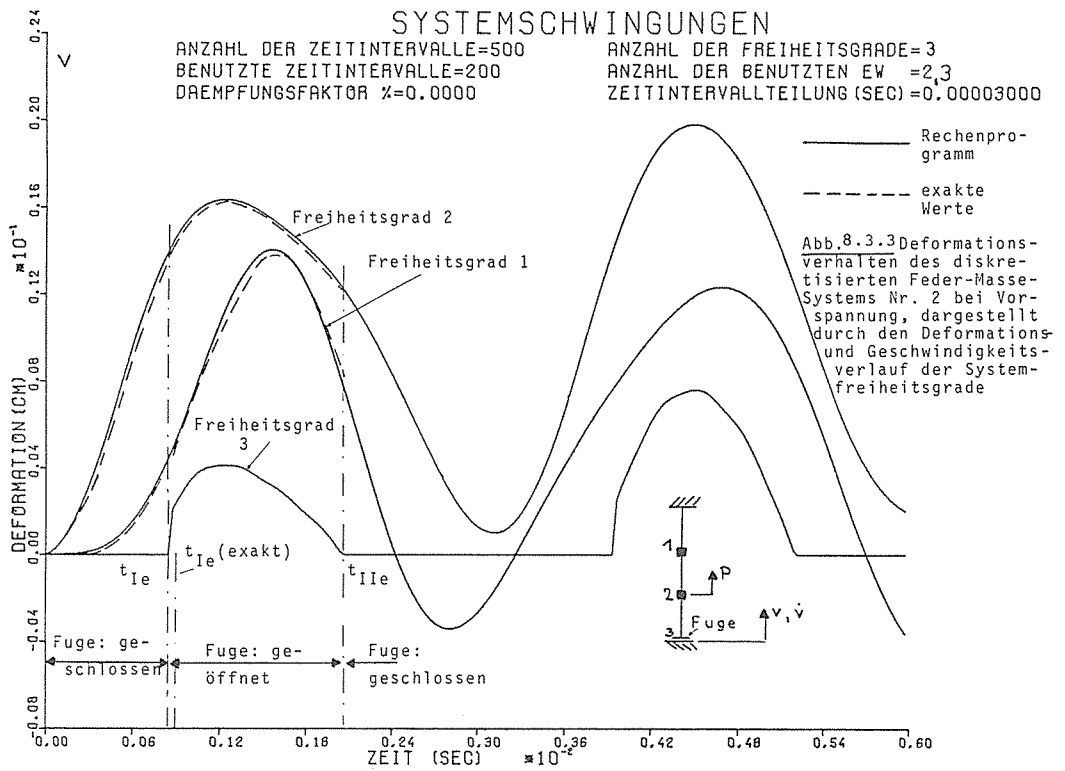
$$\begin{aligned} v_1 &= 7.730 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{1II} t + 7.656 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{1II} t \\ &\quad - 2.865 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{2II} t + 1.681 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 0.01433, \\ v_2 &= 1.251 \cdot 10^{-2} \cos \omega_{1II} t + 1.239 \cdot 10^{-2} \sin \omega_{1II} t \\ &\quad + 1.771 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{2II} t - 1.039 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 0.02858 . \end{aligned}$$

Durch die Erfüllung der Bedingung:

$$(v)_{\text{Zusatzlastverfahren}} + (v)_v = (v)_{\text{vollständig formuliertes Verfahren}}$$

ist entsprechend (6.11a), (6.11b) der rechnerische Nachweis der Übereinstimmung beider Verfahren erbracht.

Den Vergleich der exakten und der rechnerisch ermittelten Werte zeigt Abb. 8.3.3 für die ersten beiden Systemänderungen. Die geringfügigen Abweichungen der beiden Ergebnisverläufe sind die Folge der Darstellung der an sich masselosen Federn (exakt) als Stäbe mit geringer Massebelegung (rechnerisch). Aus dieser Notwendigkeit resultiert der oszillierende Verlauf von \dot{v} für den Freiheitsgrad 3 im geöffneten Zustand. Die Ergebnisverläufe der Massen 1 und 2 werden aber dadurch nicht beeinflusst.



8.3.2 Vorbelastung ($P_i \neq 0, P_v = 0$).

Zur Initiierung des dynamischen Lastfalles wird der Belastungsvektor $(P)_i$ mit dem dazugehörigen Deformationsvektor $(v)_i$:

$$(P)_i = \begin{pmatrix} P \\ -P \end{pmatrix}, \quad (v)_i = \begin{pmatrix} \frac{P}{3k} \\ -\frac{P}{3k} \end{pmatrix}$$

auf

$(P)_{iR} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$ reduziert. Die in 6.1 definierten Belastungsgrößen haben den Wert:

$$(P)_{i\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}, \quad (P)_{iz} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{P}{3} \end{pmatrix}$$

Die Endwerte von Zustand I (ungeöffnet) ergeben sich aus der Bedingung:

$$v_{2e} = 0 = \frac{P}{2c} \{ 1 - \cos \omega_1 t_e \} - \frac{P}{6c} \{ 1 + \cos \omega_2 t_e \}$$

zu:

$$(v)_e = (v)_\tau, \quad (\dot{v})_e = (\dot{v})_{De} = (\dot{v})_\tau$$

$$(v)_{De} = (v)_{\tau\Delta} = (v)_e - (v)_i$$

wobei

$$\omega_1 t_e = 0.870 \text{ für } P = 8826 \text{ N ist.}$$

Die Deformationsverläufe des Zusatzlastverfahrens für Zustand II (geöffnet) folgen aus den modalen Anfangsbedingungen:

$$(y)_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (v)_{\tau\Delta}, \quad (y)_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (v)$$

$$(\dot{y})_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (\dot{v})_\tau$$

und mit $(P) = (P)_{i\Delta} + (P)_{iz} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} P \end{pmatrix} : \left(\frac{P}{M\omega^2} \right)$ zu:

$$v_1 = -8.043 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{1II} t + 6.776 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{1II} t - 2.483 \cdot 10^{-4} \cos \omega_{2II} t - 1.837 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 0.857 \cdot 10^{-2},$$

$$v_2 = -1.302 \cdot 10^{-2} \cos \omega_{1II} t + 1.097 \cdot 10^{-2} \sin \omega_{1II} t + 1.535 \cdot 10^{-4} \cos \omega_{2II} t + 1.135 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 1.715 \cdot 10^{-2}.$$

Aus den modalen Anfangswerten:

$$(y)_0 = [\phi_{MII}]^{-1} (v)_\tau, \quad \left(\frac{P_{iR}}{M\omega^2} \right)$$

ergibt sich als vollständige Lösung des Deformationsverlaufes:

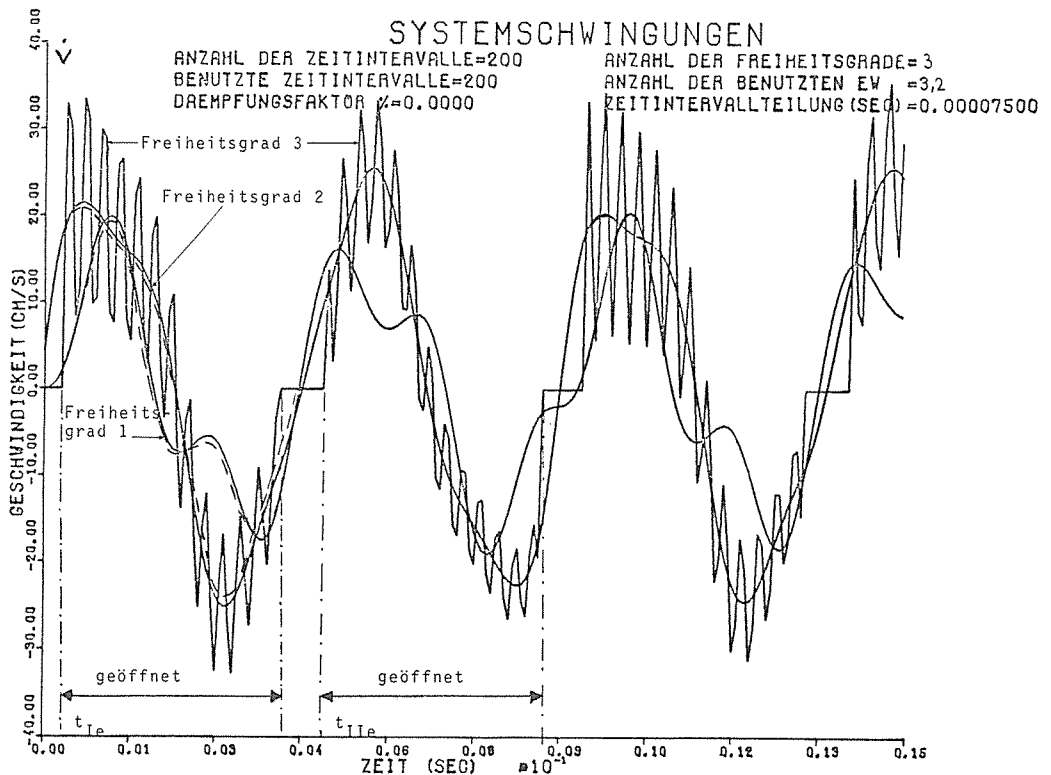
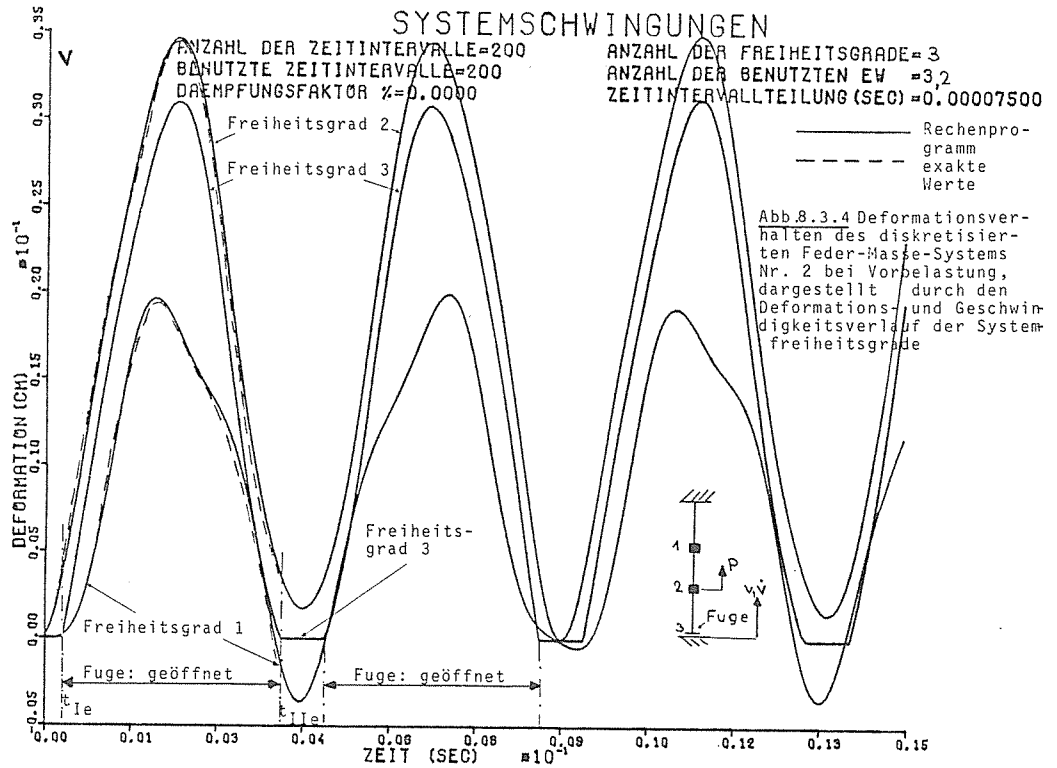
$$v_1 = -8.043 \cdot 10^{-3} \cos \omega_{1II} t + 6.776 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{1II} t - 2.483 \cdot 10^{-4} \cos \omega_{2II} t - 1.837 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 1.286 \cdot 10^{-2},$$

$$v_2 = -1.302 \cdot 10^{-2} \cos \omega_{1II} t + 1.097 \cdot 10^{-2} \sin \omega_{1II} t + 1.535 \cdot 10^{-4} \cos \omega_{2II} t + 1.135 \cdot 10^{-3} \sin \omega_{2II} t + 1.286 \cdot 10^{-2}.$$

Beide Verfahren führen wiederum zum selben Resultat, wenn für die konstanten Glieder folgende Beziehung berücksichtigt wird:

$$(v)_{\text{Zusatzlastverfahren}} + (v)_i = (v)_{\text{vollständig formuliertes Verfahren.}}$$

Den Vergleich der exakten Systemschwingungen mit den durch das Rechenprogramm ermittelten Werten zeigt Abb. 8.3.4 für die ersten beiden Systemänderungen. Durch die rechentechnische Notwendigkeit der Abbildung der an sich ideal masselosen Feder k_3 als Stab mit geringer Massenbelegung ergibt sich eine nur geringe Abweichung. Lediglich für den Freiheitsgrad 3 (Fuge) ist - bedingt durch die massebehaftete Feder k_3 - eine Abweichung des rechnerischen Geschwindigkeitsverlaufes vom exakten Verlauf, der mit dem von Freiheitsgrad 2 identisch sein müsste, zu verzeichnen. Die Ergebnisverläufe der Massen 1 und 2 werden aber dadurch nicht beeinflusst.



8.4 Dynamische Berechnung einer Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion im Berstfall (Beispiel 3)

Die in 2.1 beschriebene Berstschutzkonstruktion ist unter Berücksichtigung folgender Fugen, die offen oder geschlossen sein können, dynamisch zu berechnen:

- Fuge 1 Zwischen Reaktordruckbehälter (RDB)-Auflagerkonstruktion und Fundament (anfangs geschlossen und unter statischer Vorlast stehend),
- Fuge 2 zwischen Betonring und Betonzylinder der Berstschutzkonstruktion (anfangs geöffnet),
- div.Fugen in den Kerneinbauten (zur Vorspannung der Brennstäbe zwischen den Gitterplatten).

In Abhängigkeit vom vorgegebenen Belastungszustand und dem daraus resultierenden, zeitlich veränderlichen Deformationszustand sind zu Beginn des Berstens für die Berstschutzkonstruktion zwei unterschiedliche Systemzustände möglich, wenn zunächst nur Fuge 1 und Fuge 2 betrachtet werden, siehe Abb. 8.4.1.

- Zustand I: Das Berstschutzsystem ist geschlossen (d.h. der RDB hat nicht abgehoben), es ist einfach statisch unbestimmt (Fuge 1 geschlossen, Fuge 2 offen).
- Zustand II: Das System ist statisch bestimmt, da der RDB vom Fundament abgehoben hat (Fuge 1 offen, Fuge 2 offen).

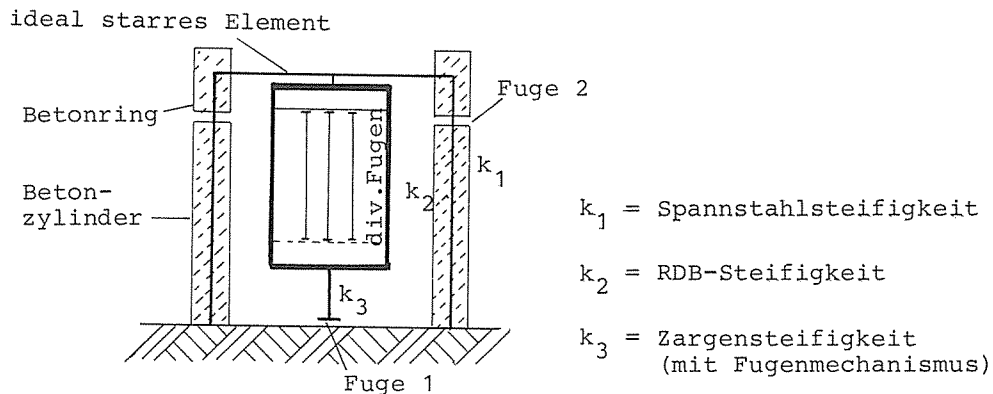


Abb. 8.4.1 Systematische Systemabbildung des Berstschutzsystems

8.4.1 Berechnung des Betriebszustandes

Zur Definition der statischen Belastungen werden folgende Bezeichnungen vereinbart:

- Lastfall Betrieb:
 - Vorspannung (Anspannen der Seile und Einstellen der Betriebstemperatur im RDB)
 - Innendruckbelastung

- Berstlastfall: Der RDB-Boden löst sich. Das Bersten des Bodens geschieht derart, daß keine axiale unsymmetrische Belastung auf das Berstschutzsystem einwirkt.

Vorspannung

Durch das Vorspannen der Spannseile um den Vorspannweg Δ treten in den Systembereichen folgende Deformationen (Längenänderungen) ein:

- Δv_1 : Verlängerung der Spannseile
- Δv_2 : Verkürzung des RDB
- Δv_3 : Verkürzung der Zarge

Diesen Deformationswerten entspricht die Vorspannlast P_v in den Spannkabeln. Für die Temperaturvorspannung kann so verfahren werden, daß die durch Temperaturdehnung des RDB hervorgerufenen Differenzbewegungen in den Spannseilen dem Wert Δ entsprechen.

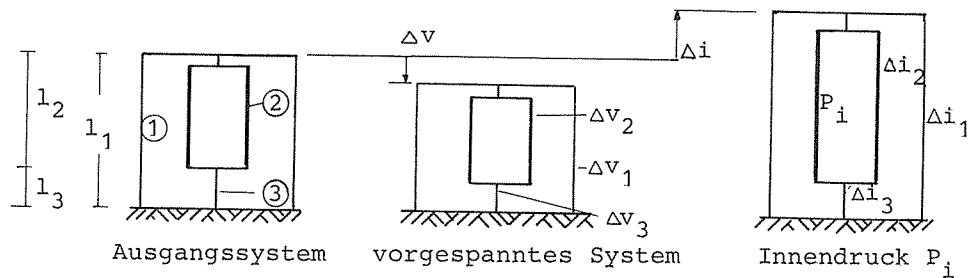


Abb. 8.4.2 Deformationsverhalten für den Betriebszustand

Nach Abb. 8.4.2 gilt die geometrische Beziehung:

$$\Delta v = \Delta - \Delta v_1 = + (\Delta v_2 + \Delta v_3) .$$

Die Schnittlasten und die Verschiebung Δv lauten mit $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$:

$$S_{1v} = P_v = \frac{\Delta}{\frac{1}{k}} ,$$

$$S_{2v} = S_{3v} = - P_v = - \frac{\Delta}{\frac{1}{k}} ,$$

$$\Delta v = \frac{\Delta}{\frac{1}{k}} \frac{1}{k_2} + \frac{\Delta}{\frac{1}{k}} \frac{1}{k_3} = \Delta \left(\frac{1}{\frac{k}{k_2}} + \frac{1}{\frac{k}{k_3}} \right) .$$

Innendruckbelastung

Durch den Innendruck wird der RDB-Deckel um den Weg: $\Delta i = \Delta i_2 - \Delta i_3$ verschoben. Aus den Schnittlasten:

$$S_{1i} = - S_{3i} = P_i \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k}} ,$$

$$S_{2i} = P_i - P_i \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k}} = P_i \left(1 - \frac{1}{\frac{k_2}{k_1} + 1 + \frac{k_2}{k_3}} \right)$$

folgen die Längenänderungen von RDB und Zarge entsprechend Abb.8.4.2

$$\Delta i_2 = P_i \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{\frac{k_2}{k_1} + k_2 + \frac{k_2}{k_3}} \right), \quad \Delta i_3 = - P_i \frac{\frac{1}{k_2} \frac{1}{k_3}}{\frac{1}{k}}$$

Als Ausgangswerte für die Berechnung des Berstlastfalles gelten überlagerte Schnittlasten und die überlagerten Systemlängen:

$$\begin{aligned} l_3' &= l_3 - |\Delta v_3| - |\Delta i_3|, \\ l_2' &= l_2 - |\Delta v_2| + |\Delta i_2|, \\ l_1' &= l_1 - \Delta + \Delta v_1 + \Delta i \end{aligned}$$

8.4.2 Grundlegende Voraussetzungen für die Berechnung des Berstzustandes

Im Berstlastfall ist zunächst bis zur Überwindung der Vorspannung Zustand I maßgebend, der größte Teil der Berstlast wird durch die Feder k_3 direkt in das Auflager übertragen. Erreicht die Berstlast aber eine solche Größe, die in der Feder k_3 eine Zugkraft hervorruft, löst sich diese vom Auflager und von nun an wird Zustand II für die Berechnung maßgebend. Im Zustand II ist das Gesamtsystem weniger steif als im Zustand I und es können große Deformationen auftreten. Weiter gelten folgende Voraussetzungen:

- Der Innendruck bleibe über den betrachteten Zeitbereich konstant (ein etwaiger Innendruckabfall ist gegebenenfalls durch eine weitere dynamische Belastung zu erfassen).
- Für den Berstlastfall soll die Wechselwirkung durch das Fundament zwischen Spannkabel, Berstschutzzylinder und RDB-Auflager vernachlässigbar klein sein. Das Fundament soll also sehr viel steifer als die anderen Konstruktionselemente sein. Anstelle der Darstellung des Systems als integrale, in sich geschlossene Berstschutzkonstruktion kann das eigentliche Berstschutzsystem also mit einem starren Auflager versehen werden.

Die Schnittstelle, an der der Bruch eintritt, muß spannungsfrei sein. Bei der Berechnung mit dem Zusatzlastverfahren ist an dieser Stelle die statische Schnittlast S des Betriebslastfalles mit umgekehrtem Vorzeichen als dynamische Belastung $P_D = -S$ aufzubringen. Der vollständige Schnittlastenzustand ergibt sich aus der Überlagerung der Werte aus der statischen (Betriebszustand) und dynamischen (Berstzustand) Berechnung. Die dynamische Belastung ist deshalb identisch mit der durch das Bersten an dieser Stelle freigesetzten "dynamischen Schnittlast" $-S$. Durch die Überlagerung der Schnittlast S mit der

dynamischen Belastung $P_D = -S$ wird das betrachtete Schnittufer kräftefrei und befindet sich im Gleichgewicht. Gemäß dieser Definition kann das Gesamtsystem nach Abb. 8.4.3 in 2 Teilsysteme a, b zerlegt werden.

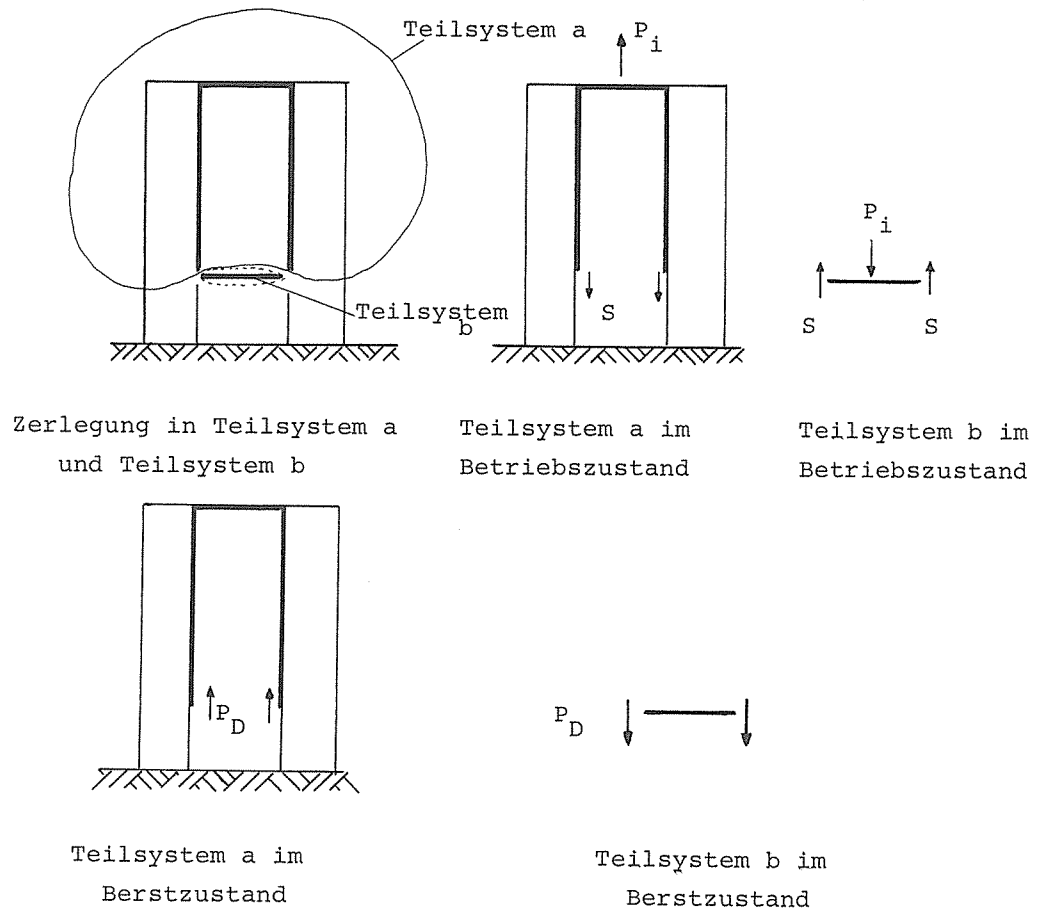


Abb. 8.4.3 Belastung der Teilsysteme

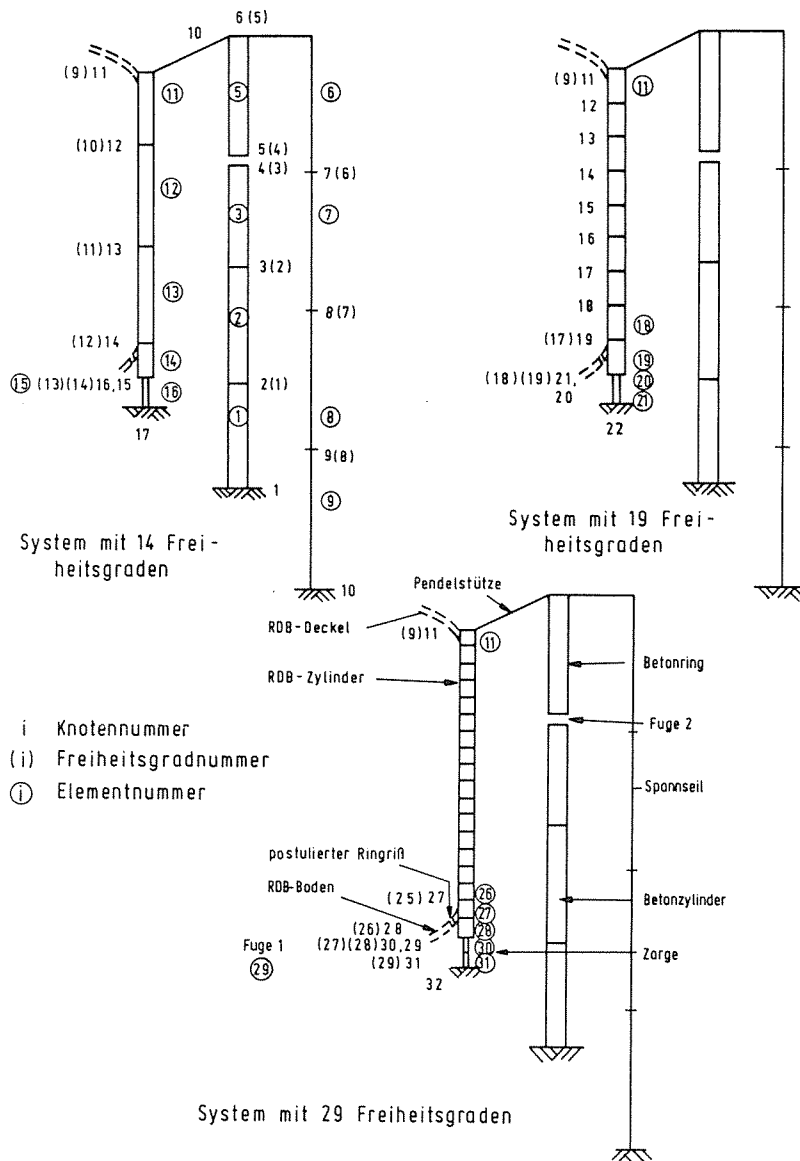
Bei der Berechnung mit dem vollständigen Verfahren werden die Deformationen aus der statischen Berechnung als Anfangswerte für die dynamische Berechnung des berstenden Systems benutzt. In diesem Fall wird anstelle der "dynamischen Schnittlast" als zutreffender Belastungszustand nur die am RDB-Deckel angreifende Innendruckkomponente angesetzt.

8.4.3 Systemwerte und Belastungsgrößen

Die Steifigkeits- und Massenwerte sind den maßgebenden Sicherheitsgutachten [119], [120] entnommen; der dabei im Rahmen des Konstruktionsentwurfes gefundenen Streuung für die Dimensionierungsdaten wurde bei der Zusammenstellung in Tabelle III Rechnung getragen.

Das System ist zur Berechnung in unterschiedliche Modelle mit 14, 19, 29 und 67 Freiheitsgraden diskretisiert.

Abb. 8.4.4 Systemtopologien des Berstschutzsystems



In Abb. 8.4.4 sind die Systemtopologien des Berstschutzsystems für die Diskretisierung in Modelle mit 14, 19 und 29 Freiheitsgraden erläutert, während die Zuordnung des mechanischen Modells zur vorliegenden Konstruktion und die Definition von wichtigen, für alle Modellabbildungen identischen Systempunkten: (P1, P2, P3, P4, P5, P6), welche das Deformationsverhalten des Gesamtsystems kennzeichnen, Abb. 8.4.5 zu entnehmen sind:

- P1: Oberkante des Betonringes (Spannkabelkopf)
- P2: Unterkante des Betonringes (Oberkante Fuge 2)
- P3: Oberkante des Reaktordruckbehälters
- P4: Unterkante des Reaktordruckbehälters (Lage des Ringrisses)
- P5: Oberkante Fuge 1 (Reaktordruckbehälterlager)
- P6: Unterkante Fuge 1 (Reaktordruckbehälterlager)

Die Massen der RDB-Einbauten sind bei den Modellen mit 14, 19 und 29 Freiheitsgraden über den RDB verschmiert. In Abb. 8.4.6 sind unter Verwendung des Modells mit 29 Freiheitsgraden die zusätzlichen Freiheitsgrade für die RDB-Einbauten für ein Modell mit 42 Freiheitsgraden definiert.

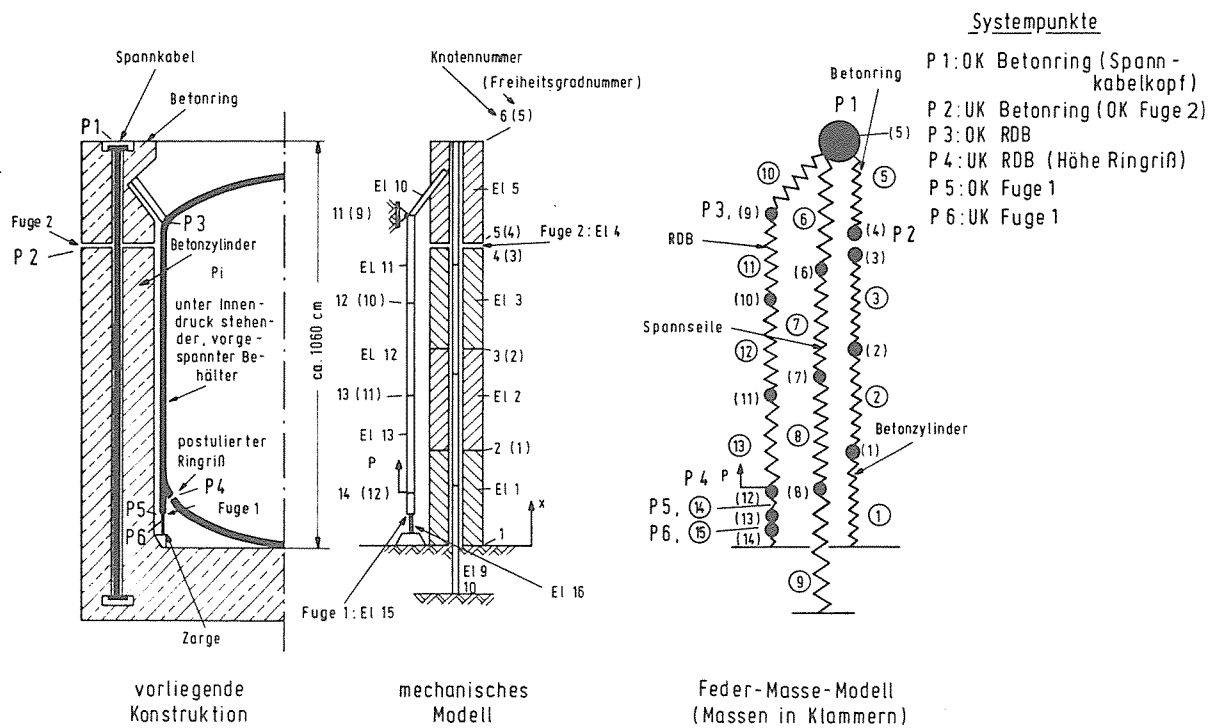
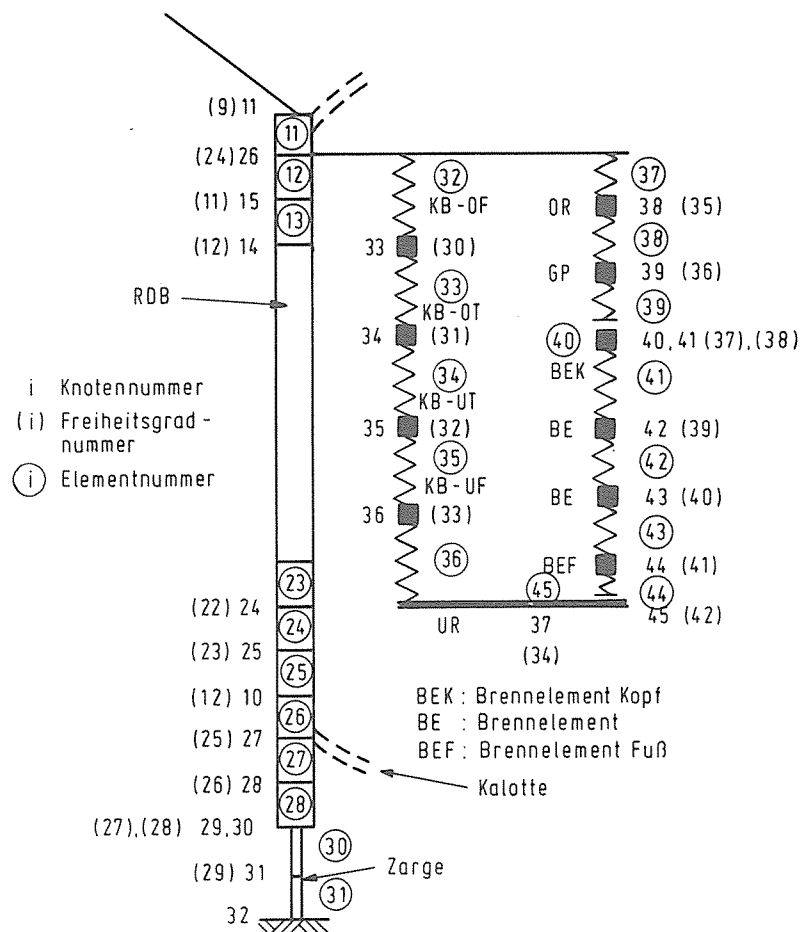


Abb. 8.4.5 Diskretisierung einer vorgegebenen rotationssymmetrischen Konstruktion (Berstschutzhälter) durch Stabelemente in 14 Freiheitsgrade und Bezeichnung ausgewählter Systempunkte

Abb. 8.4.6

Mechanisch-Mathematische Gliederung der RDB - Einbauten:
Anschluß an ein Globalsystem mit 29 Freiheitsgraden (vgl. Abb. 8.4.4)

KB - OF : Kernbehälter oberer Flansch	KB - UT : Kernbehälter Unterteil
KB - OT : Kernbehälter Oberteil	UR : unterer Rost
KB - UF : Kernbehälter unterer Flansch	OR : oberer Rost
	GP : Gitterplatte



Die den Betriebszustand definierenden Systemgrößen folgen aus den Bemessungswerten von Tab. III und haben für die erste Berechnung den Wert:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 8,389 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} & 1/k_1 &= 1,191 \cdot 10^{-7} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \\
 k_2 &= 6,878 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}} & 1/k_2 &= 1,454 \cdot 10^{-8} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \\
 k_3 &= 1,648 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{mm}} & 1/k_3 &= 6,068 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mm}}{\text{N}}
 \end{aligned}$$

$$M (\text{RDB} + \text{Beton}) = 1,729 \cdot 10^6 \text{ kg} = 1729 \text{ t.}$$

Die Wirkung der Steifigkeit der Pendelstützen wird in erster Näherung vernachlässigt.

Lastannahmen

Innendruck (Betriebszustand)	$p_i = 17,16 \text{ N/mm}^2$
Innendurchmesser des RDB	$\phi_i = 4400 \text{ mm}$
Temperatur (Betriebszustand des RDB)	$T' = 350^\circ \text{ C}$
d.h. angenommene relative Temperatur	$\Delta T' = 320^\circ \text{ C}$
RDB-Zylinderlänge	$l = 9570 \text{ mm.}$

Somit ergibt sich für den Lastfall Innendruck folgende Belastung:

$$P_i = p_i \frac{\pi \phi_i^2}{4} = 2,610 \cdot 10^8 \text{ N.}$$

Die Schnittlasten und Längenänderungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k} &= 1,344 \cdot 10^{-7} \frac{\text{mm}}{\text{N}} : \\
 S_{1i} &= 0,1041 \cdot P_i = 2,717 \cdot 10^7 \text{ N} , \\
 S_{2i} &= 0,8959 \cdot P_i = 2,338 \cdot 10^8 \text{ N} , \\
 S_{3i} &= -0,1041 \cdot P_i = -2,717 \cdot 10^7 \text{ N} , \\
 \Delta i_1 &= S_{1i}/k_1 = 3,236 \text{ mm} , \\
 \Delta i_2 &= S_{2i}/k_2 = 3,400 \text{ mm} , \\
 \Delta i_3 &= S_{3i}/k_3 = -0,165 \text{ mm} .
 \end{aligned}$$

Die Deformation des RDB in Höhe des Deckels hat den Wert:

$$\begin{aligned}
 v_o \quad (P \ 3) &= \begin{array}{l} 3,400 \text{ mm} \\ - 0,165 \text{ mm} \end{array} \\
 &= 3,235 \text{ mm.}
 \end{aligned}$$

Für den Lastfall Temperatur ergibt sich für den RDB-Zylinder die Längenänderung:

$$\begin{aligned}
 \Delta l &= \Delta = \Delta T' \cdot \alpha_T \cdot l \\
 &= 320 \cdot 12,0 \cdot 10^{-6} \cdot 9570 = 36,70 \text{ mm.}
 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, daß die Vorspannung allein durch Temperaturdehnung des Systems zustande kommt, ergibt sich als Vorspannkraft:

$$P_v = \frac{\Delta l}{\frac{1}{k}} = 2,627 \cdot 10^8 \text{ N.}$$

Die Längenänderungen des Systems haben den Wert:

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= P_v / k_1 = 31,29 \text{ mm} & , \\ \Delta v_2 &= P_v / k_2 = - 3,821 \text{ mm} & , \\ \Delta v_3 &= P_v / k_3 = - 1,594 \text{ mm} & .\end{aligned}$$

Gegen die Nullage führt der RDB in Höhe des Deckels folgenden Weg aus:

$$\begin{aligned}\Delta v &= - |\Delta v_2| - |\Delta v_3| \\ &= - 5,415 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Im Lastfall Betriebszustand ergeben sich somit folgende Schnittlasten:

$$\begin{aligned}S_1 &= S_{1i} + S_{1v} = 2,717 \cdot 10^7 + 2,627 \cdot 10^8 = 2,899 \cdot 10^8 \text{ N} & , \\ S_2 &= S_{2i} + S_{2v} = 2,338 \cdot 10^8 - 2,627 \cdot 10^8 = -2,893 \cdot 10^7 \text{ N} & , \\ S_3 &= S_{3i} + S_{3v} = -2,717 \cdot 10^7 - 2,627 \cdot 10^8 = -2,899 \cdot 10^8 \text{ N} & .\end{aligned}$$

Die Berstlast P_b und die Fugenschnittlast P_{iz} haben somit den Wert:

$$\begin{aligned}P_b &= P_i = 2,610 \cdot 10^8 \text{ N} & , \\ P_{iz} &= S_3 = -2,899 \cdot 10^8 \text{ N} & .\end{aligned}$$

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse des Schwingungsablaufes beziehen sich auf die durch das Zusatzlastverfahren definierten Deformationen. Die vollständigen Deformationen sind also aus der Überlagerung mit dem Anteil aus statischer Ruhelage (Betriebszustand) zu ermitteln. Die statischen Anteile in Höhe des RDB-Deckels und der RDB-Zarge lauten z.B.:

$$\begin{aligned}v_o \text{ (P 3, RDB-Deckel)} &= \begin{array}{r} 3,235 \text{ mm} \\ - 5,415 \text{ mm} \\ \hline - 2,180 \text{ mm} \end{array} \\ v_o \text{ (P 5, RDB-Zarge)} &= \begin{array}{r} - 0,165 \text{ mm} \\ - 1,594 \text{ mm} \\ \hline - 1,759 \text{ mm}.\end{array}\end{aligned}$$

8.4.4 Sensitivitätseinflüsse bei der Diskretisierung des Berstschutzsystems

8.4.4.1 Einfluß der Feinheit der Modellabbildung bei konsistenten Massen und Punktmassen

Eine Abschätzung darüber, in welche Mindestanzahl von Elementen das System zur Berechnung bei der stufenförmig angreifenden Berstbelastung P_{iz} zu unterteilen ist, um einen konsistenten, d.h. von der gewählten mathematisch-mechanischen Modellabbildung unabhängigen Deformationsverlauf zu gewährleisten, wird nach 5.0 durch den Vergleich unterschiedlicher Massendarstellungen und durch die Bewertung der höheren Eigenformen vorgenommen.

Betrachtet man die Komponenten von $\{v_{k,i}\}$ in (5.9), die für das Deformationsverhalten der Standzarge maßgebend sind, zeigt der Zahlenvergleich, daß bei Systemtopologien mit 14, 19 und 29 Freiheitsgraden alle maßgebenden Glieder die gleiche Größenordnung besitzen. Somit sind die höheren Eigenformen für diese Abbildungen nicht vernachlässigbar. Da aber die höheren Eigenformen am diskreten Modell mit ansteigender Ordnungszahl zunehmend ungenau ermittelt werden, sind die mit den Systemmodellen der Abb. 8.4.4 berechneten Deformationsverläufe nur grobe Näherungen: Abweichungen entstehen also sowohl beim Vernachlässigen der Anteile der höheren Eigenformen als auch bei Berücksichtigung der ungenauen höheren Eigenformen. Nur durch den Vergleich der Zahlenrechnung selbst offenbart sich, je nach der benutzten Steifigkeits- bzw. Masse-Version (Tabelle III) der Fehlereinfluß der höheren Formen. Der Koeffizientenvergleich von $\{v_{k,i}\}$ zeigt, daß ein Systemmodell mit 67 Freiheitsgraden (42 RDB-Elemente) im Gegensatz zu Modellen mit 14, 19 und 29 Freiheitsgraden das Vernachlässigen höherer Eigenformen (hier: $i \geq 15$) einwandfrei zuläßt und konsistente Ergebnisverläufe ermöglicht, wenn als Abbruchkriterien in (5.10) $v = 3\%$ der Maximalwerte der für das Abhebeverhalten maßgebenden Freiheitsgrade angesetzt wird.

Die Abgrenzung der Anzahl der geforderten Freiheitsgrade durch einen Ergebnisvergleich der Verläufe des Punktmassenmodells mit dem Modell konsistenter Massenverteilung läßt im vorliegenden Fall folgende Aussagen zu:

Die Eigenwerte des Punktmassenmodells sind kleiner, die des Modells mit konsistenter Massenverteilung größer als die exakten Werte.

Erst für Systemabbildungen, bei denen die Abweichungen dieser Werte für beide Verfahren klein und die Ergebnisverläufe gleich sind, sind durch die Maximalwerte konsistent. Im vorliegenden Fall gilt diese Aussage wiederum für die ersten 15 benutzten Eigenformen bei einer Modellabbildung in 67 Freiheitsgrade.

Für ein System mit den in 8.4.3 angegebenen Daten zeigt Abb. 8.4.7, daß ein Systemmodell mit 14 Freiheitsgraden bei Anwendung von 14 Eigenformen keinen konsistenten Deformationsverlauf ergibt. Die Maximalordinaten der betrachteten Systempunkte P2 (Betonring) und P5 (Fuge) haben für diese Fälle konträren Charakter:

maximale Deformation	konsistente Masse	Punkt-Masse
max v_{P2}	0,60 cm	0,59 cm
max v_{P5}	0,58 cm	0,66 cm
max v_{P3}	0,64 cm	0,585 cm

Bei der Gegenüberstellung der einzelnen Deformationsverläufe ist der Zeitbereich so gewählt, daß in den Diagrammen die maximalen Deformationswerte enthalten sind. Die Abzissen können also unterschiedlich sein.

Auch bei Nichtberücksichtigung der höheren Eigenformen sind die Unterschiede der Deformationsverläufe und deren Spitzenwerte zwischen denjenigen von Punkt- und konsistenten Massenmodellen erheblich, wie Abb. 8.4.8 für ein System mit 19 Freiheitsgraden bei 15 verwendeten Eigenformen zeigt. Falsch ist in diesem Fall, bedingt durch das Ausschalten der höheren Eigenformen, der Deformationsverlauf der geöffneten Fuge (Systempunkt P6) mit einem errechneten Ausschlag von Null. Auch bei einem Modell mit 29 Freiheitsgraden sind Unterschiede in den Ergebnisverläufen bei den Vergleichen:

- . Punktmasse - konsistente Masse und
- . Benutzen höherer Eigenformen - Vernachlässigen höherer Eigenformen

vorhanden.

Die Abweichung ist in diesem Fall aber geringer, d.h. die Werte nähern sich den Ergebnisverläufen eines Modells mit 67 Freiheitsgraden. Die vollständigen Deformationen der Systempunkte P3, P5 für das konsistente Massenmodell beispielsweise ergeben sich aus der Überlagerung am Modell mit 19 Freiheitsgraden:

	v (P3) cm	v (P5) cm
statischer Deformationsanteil:	- 0,22	- 0,18
max. dynamischer Deformationsanteil:	+ 0,57	+ 0,68
max. Gesamtdeformation:	0,35	0,50

Den Einfluß der Anzahl der benutzten Eigenwerte und den Einfluß einer feineren Diskretisierung zeigt Abb. 8.4.9 durch den Vergleich der 19 und 67 Freiheitsgradmodelle. Bei einer Diskretisierung in 67 Freiheitsgrade ist der Ergebnisverlauf konsistent.

Die Unterteilung in eine Mindestanzahl von Elementen ist für die dynamische Berechnung prinzipiell aus zwei Gründen erforderlich:

- 1) Um das Abheben überhaupt ermitteln zu können. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß bei 8 benutzten Eigenwerten kein Abheben festgestellt werden kann, erst bei mehr als 12 benutzten Eigenwerten läßt sich das Abheben an einem Modell mit 14 Freiheitsgraden errechnen.
- 2) Vergleichsrechnungen zeigen, daß für den Fall eines errechenbaren Abhebens eine weitere Verfeinerung der RDB-Darstellung Einfluß auf die Maximalordinate im geöffneten Zustand hat.

8.4.4.2 Einfluß unterschiedlicher Dimensionierung des Berstschutzsystems

Die Variation der Spannstahlsteifigkeit gemäß Tab. III auf $k_1 = 8,286 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$ (anstelle $8,398 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$) bringt keine wesentliche Änderung des Deformationsverlaufes. Das gleiche gilt für die

Variation der Masse des Betonringes von $M = 1729 \text{ t}$ auf 948 t (vgl. Tab. III).

Lediglich der Spitzenausschlag wird bei dem System mit der größeren Masse bei gleichem Wert mit geringer zeitlicher Verzögerung erreicht.

Die Variation der Zargensteifigkeit zeigt deutlich, daß eine Abminderung der Zargensteifigkeit größere Deformationswerte zur Folge hat (vgl. Abb. 8.4.10 für ein Modell mit 29 Freiheitsgraden).

Bei Systemmodellen mit einer geringeren Zargensteifigkeit werden die höheren Eigenformen weniger stark angeregt, wie auch aus der Steifigkeitsverteilung des Systems bezüglich der Lasteinleitungsstelle für die Berstlast gefolgert werden darf. In der vergleichenden Untersuchung der Eigenformdeformationsanteile nach (5.9) wird diese Aussage für die Systemabbildung in 67 Freiheitsgrade (DOF) bestätigt. So müßte für den größten Wert der Zargensteifigkeit laut Tab. III ($k_3 = 1,972 \cdot 10^8 \text{ N/mm}$) auch noch die Eigenform 51 berücksichtigt werden. Für Systemabbildungen mit 19 und 29 Freiheitsgraden sind bei variierten Zargensteifigkeiten als Folge der groben Elementunterteilung noch keine Unterschiede bezüglich des kleiner werdenden Einflusses der oberen Eigenformen festzustellen. Es kann für alle Steifigkeitsversionen festgestellt werden, daß die rechnerischen Deformationswerte von Systempunkt P5 (geöffnete Fuge) für feinere Elementteilungen (67 DOF) größer sind als für grobere Elementteilungen (19, 29 DOF). Diese Aussage gilt im umgekehrten Sinne für Systempunkt P2 (Betonring).

Eine Erhöhung der Steifigkeit des RDB von $k_2 = 6,878 \cdot 10^7 \text{ N/mm}$ auf $k_2 = 7,822 \cdot 10^7 \text{ N/mm}$ (vgl. Tab. III) bei unveränderter RDB-Masse bewirkt eine Vergrößerung der Deformationen. Abb. 8.4.11 verdeutlicht diese Erhöhung durch den Vergleich zum Verlauf von Abb. 8.4.10 bei einer Zargensteifigkeit von $k_3 = 1,648 \cdot 10^8 \text{ N/mm}$. Der Deformationsvergleich mit Abb. 8.4.11 zeigt ferner eine gute Übereinstimmung der Maximalwerte für Punkt- und konsistente Massenmodelle am System mit 19 DOF. Lediglich der zeitliche Deformationsverlauf selbst ist nicht identisch.

Durch das Reduzieren der Zargensteifigkeit wird der Deformationsverlauf wiederum erhöht. Abb. 8.4.12 zeigt gegenüber Abb. 8.4.11, daß bei Verminderung von k_3 von $1,648 \cdot 10^8 \text{ N/mm}$ auf den Wert $1,371 \cdot 10^8 \text{ N/mm}$ für alle Systempunkte eine Erhöhung der Deformationen um ca. 15% eintritt. Abb. 8.4.12 zeigt ferner, daß eine gute Übereinstimmung der Spitzendeformationswerte für die 29 und 67 Freiheitsgradmodelle besteht.

Diese Übereinstimmung wird dann weniger gut, wenn die Massen der RDB-Einbauten nicht mehr kontinuierlich über die Länge des RDB verschmiert, sondern ihrer im RDB gegliederten Lage gemäß punktförmig auf den RDB, d.h. in Höhe des Deckels und der Kalotte angesetzt werden. Diese Punktmassen der RDB-Einbauten werden den entsprechenden RDB-Elementen durch Erhöhen der Elementdichten um den Wert Δs

zugeordnet (Lage und Größe der Werte $\Delta\delta$ vgl. Tab. III). Durch die daraus folgende erhöhte Konzentration der Massen der RDB-Einbauten im Bereich des Deckels, d.h. zur Strukturmitte hin, wird die erforderliche Anzahl der nach (5.9) ermittelten Eigenformen reduziert. Die mitschwingende Systemmasse der ersten Eigenform wird dadurch gleichzeitig erhöht, so daß deren Schwingungsperiode größer wird. Da aber andererseits die Perioden der benutzten höheren Eigenformen durch die Massenumverteilung kleiner werden und deren Deformationsanteile nicht vernachlässigbar sind, werden die Schwingungsmaxima früher erreicht.

Die Abb. 8.4.13 zeigt den Deformationsverlauf für eine Systemabbildung, bei der die Massen der RDB-Einbauten im oberen RDB-Bereich auf eine Länge von 50 cm angeordnet sind. Gegenüber Abb. 8.4.12, in der eine gleichmäßige Verteilung der Masse über den RDB angenommen wird, zeigt Abb. 8.4.13 eine Verkleinerung der Maximaldeformationswerte für die Punkte P2 und P3 (Bereich des RDB-Deckels) und eine Vergrößerung der Maximalwerte für Punkt P5 (Zargenbereich). Die Übereinstimmung der Maximalausschläge ist hier besonders für den Systempunkt P5 für die vergleichende Darstellung des Systems mit 19 und 67 Freiheitsgraden weniger genau als bei einer gleichmäßigen RDB-Massenverteilung (Abb. 8.4.12).

Noch augenscheinlicher wird diese Abweichung, wenn auch die Masse der RDB-Bodenkalotte getrennt ausgewiesen wird. Abb. 8.4.14 zeigt für diesen Fall wiederum eine Verminderung der Maximalwerte für die Systempunkte P2, P3. Der Ergebnisvergleich dieser Punkte am 29- und am 67-Freiheitsgradmodell zeigt ebenfalls Übereinstimmung. Dagegen tritt für den Systempunkt P5 am 67-Freiheitsgradmodell eine Vergrößerung der Deformation ein, die bei der Darstellung mit 29 Freiheitsgraden infolge der dann vorliegenden zu groben Unterteilung rechnerisch nicht gefunden werden kann (vgl. Abb. 8.4.14). Die Auswertung von (5.9) für die für das Abhebverhalten maßgebenden Freiheitsgrade bei einem Abbruchkriterium von 3% zeigt, daß für das vorliegende System mindestens 32 Eigenformen zu überlagern sind. Das 29-DOF-Modell gibt in diesem Fall die Maximalwerte, bezogen auf die Werte des 67-DOF-Modell, mit ca. 9% Fehler wieder.

Der Vorteil des entwickelten Verfahrens wird darin deutlich, daß bei Variation der Systembemessungsgrößen bei gleichbleibender Betriebsbelastung nicht jeweils ein neuer Anfangsdeformationszustand zu berechnen ist.

8.4.4.3 Einfluß der Lastanstiegszeit der Berstlast

Die Auswertung von (5.4) für eine Lastanstiegszeit $T_L = 10^{-3}$ s ergibt folgende maximalen modalen Lastfaktoren l_{\max} für einige Eigenformen:

Modus	$\frac{T_L}{T}$	l_{\max}
1	$3,14 \cdot 10^{-2}$	2,00
2	$6,67 \cdot 10^{-2}$	1,99
3	0,134	1,97
4	0,141	1,97
10	0,425	1,72
18	0,81	1,22
20	0,91	1,10
23	1,47	1,22
30	2,27	1,11

Die Tabelle zeigt, daß Eigenvektoren mit einer Ordnungszahl größer 30 nur noch mit ca. halbem Einfluß zu berücksichtigen sind. Aus (5.10) selbst folgt, daß es bei der vorgegebenen Lastanstiegszeit $T_L = 10^{-3}$ s ausreichend ist, anstelle der ersten 32 Eigenformen (Stufenlast) nur die ersten 17 Eigenformen zu benutzen. Für diesen Fall ist also die Wahl einer Modellabbildung mit 29 Freiheitsgraden ausreichend genau. Abb. 8.4.15 zeigt den im Vergleich zu Abb.8.4.14 schwindenden Einfluß der höheren Eigenformen. Diese Aussage gilt insbesondere für den steifen Systembereich am Zargenaufleger. So ist für Punkt P5 am Modell mit 67 Freiheitsgraden eine Abnahme der Deformation um 3,6% und für den Punkt P2 nur um 1% zu erkennen.

8.4.4.4 Einfluß der Dämpfung

Unter der Voraussetzung, daß die Dämpfung ohne Einfluß auf die Systemeigenformen ist, vermindert eine viskose Dämpfung in der Integration auf jeden Fall die Größe der Deformationen. Die modale Schreibweise (B 3.5c) verdeutlicht, daß bei gleichem kritischem Dämpfungsverhältnis β die höheren Eigenformen stärker abgemindert werden. Bei einem kritischen modalen Dämpfungsverhältnis von $\beta = 2\%$ vermindern sich die Maximaldeformationen im Bereich des Druckbehälterdeckels um ca. 8%; im Bereich des Druckbehälterbodens, für den im ungedämpften Fall die höheren Eigenformen nicht zu vernachlässigen sind, um ca. 12%.

8.4.4.5 Einfluß der Blattfedersteifigkeit der Zarge in Verbindung mit dem Lastanstieg

Aus der Variation der Blattfedersteifigkeit k_3 folgt mit kleiner werdender Steifigkeit ein Ansteigen der Deformationsordinaten

(der Einfluß der höheren Eigenformen schwindet, der Deformationsverlauf wird glatter).

In Abb. 8.4.16 sind die dynamischen Deformationsanteile prozentual in Abhängigkeit von der Steifigkeit k_3 aufgetragen:

- die Abnahme der maximalen Deformationen ist bei einem Steifigkeitszuwachs von k_3 geringer als der Anstieg der Deformationen bei einer gleich großen Steifigkeitsminderung;
- im Bereich: k_3 rechnerisch / $k_3 \geq 1$ ist für den Punkt P5 (s. Abb. 8.4.5) eine größere Reduktion der maximalen Deformationen vorhanden als für den Punkt P2, da bei P5 nach (5.9) die höheren Eigenformen einen größeren Anteil haben;
- Im Bereich: k_3 rechnerisch / $k_3 < 1$ wird der Anteil der höheren Eigenformen am Gesamtverlauf geringer, der Unterschied der Deformationen zwischen P2 und P5 ist daher auch bei den unterschiedlichen Belastungsverläufen ((α) Stufenlast, (β) linearer Anstieg) klein. Im Bereich k_3 rechnerisch / $k_3 > 1,25$ sind auf der anderen Seite im verstärkten Maß die höheren Eigenformen zu berücksichtigen. Die Folge ist, daß bei einer Stufenlast der Einfluß der höheren Eigenformen stärker wird und die Berechnung somit instabil werden kann. Bei sehr großen Steifigkeiten k_3 muß deshalb zur genauen Ermittlung der höheren, nicht zu vernachlässigenden Eigenformen für die mathematisch-mechanischen Modellabbildung eine noch feinere Unterteilung als für ein 67 Freiheitsgradmodell gewählt werden. Bei linearem Lastanstieg entfällt diese Notwendigkeit, da bei der Integration der Einfluß der höheren Formen durch die Reduzierung des dynamischen Lastfaktors (5.4) vermindert wird.
- Die Anzahl der zu verwendenden Eigenformen wird durch das Abbruchkriterium (5.10) bestimmt. Für ein Modell mit 67 Freiheitsgraden folgt:

$\frac{k_3 \text{ rechnerisch}}{k_3}$	0,5	1,0	1,5	2,0
Anzahl der Eigenformen bei Stufenlast nach (5.10)	16	32	34	47
Anzahl der Eigenformen bei linearem Anstieg $T_L = 10^{-3} \text{ s}$ nach (5.10)	16	17	17	25

8.4.4.6 Einfluß der Höhe der Standzarge

Als Lasteinleitungspunkt wird der Anschluß der Bodenkalotte an den Reaktordruckbehälter bezeichnet, durch ihn wird die Höhe der Standzarge definiert. Eine Variation der Ordinate dieses Punktes, d.h. eine Änderung der Höhe der Standzarge des RDB in der Modellabbildung, hat folgenden Einfluß:

- Anordnung zum Auflager hin: Verminderung der Maximaldeformationswerte,
- Anordnung vom Auflager weg: Erhöhung der Maximaldeformationswerte. Für die vorliegende Systemabmessung wurden beispielsweise folgende Werte ermittelt:

Höhe des Lasteinleitungspunktes im RDB bzw. Standzargenlänge cm	max v (P2) cm	max v (P3) cm	max v (P4) cm
α) 126 ($\Delta = + 25$ cm)	. 520(+4%)	.537(+5%)	.562(+2%)
β) 101 (vgl.Abb.8.4.14)	. 500	.513	.550
γ) 83 ($\Delta = - 18$ cm)	. 490(-2%)	.497(-3%)	.540(-2%)

Der qualitative Deformationsverlauf des Systemmodells mit 67, Freiheitsgraden weicht für die Versionen α) und γ) nur unwesentlich von dem in Abb. 8.4.14 für die Version β) dargestellten ab. Da bei α) der Lastangriffspunkt am dichtesten an der Systemmitte liegt, werden bei α) die höheren Eigenformen vergleichsweise weniger stark angesprochen, der Verlauf der Deformationszeitkurve wird glatter. Diese Eigenschaft wird wiederum durch das Abbruchkriterium (5.10) bestätigt. Während bei α) die Verwendung der ersten 25 Eigenformen ausreichend ist, müssen bei β) bzw. γ) mindestens die ersten 32 bzw. 34 Eigenformen berücksichtigt werden.

8.4.4.7 Einfluß der Vorspannung

Den Einfluß der Vorspannkraft P_v und der Spannkabelsteifigkeit k_1 auf die Deformationen zeigt Abb. 8.4.17:

- Die Variation von k_1 hat keinen Einfluß auf die Anzahl der zu benutzenden Eigenformen (bei einem System mit 29 Freiheitsgraden sind immer mindestens 18 Eigenformen zu berücksichtigen). Lediglich im abgehobenen Zustand ergibt sich entsprechend der Größe von k_1 eine andere Ordinate.
- Eine Vergrößerung von P_v ($\mu_p \geq 1$) bewirkt nur eine geringe Abnahme der Deformationen, demgegenüber kann die Zunahme der Deformationen durch eine Verminderung von μ_k für $\mu_p < 1,0$ sehr groß sein.
- Der Einfluß der höheren Eigenformen ist für die dem Zargenauf-lager benachbarten Systempunkte besonders groß. Diese Eigen-

schaft wird durch den Vergleich der maximalen Deformationszuwächse der Systempunkte P2 und P5 bei $\mu_k = 1$ im Bereich $\mu_p > 1$ deutlich. In diesem Bereich akkumulieren für P5 die Deformationsanteile der höheren Formen, da das System über längere Zeit im anfänglichen geschlossenen Zustand bleibt.

- Abb. 8.4.17 zeigt ferner die ausreichende Bemessung der Vorspannung. Aus einer Steigerung der Spannkraft (μ_p) folgt nur eine geringe Reduktion der Deformationen. Eine Steigerung der Spannkabelsteifigkeit (μ_k) um 25% hat ebenfalls (bei $\mu_p = 1$) nur eine geringe Abnahme der Deformationen zur Folge. Andererseits zeigt Abb. 8.4.17, daß aus einer Abminderung der Spannkabelsteifigkeit (μ_k) um 25% nur ein kleiner Deformationszuwachs folgt, die Spannungen liegen auch in diesem Fall im zulässigen Bereich.

Der Spannungsnachweis für die Spannkabel müßte für $\mu_k/\mu_p = 1/1$

und $\mu_k/\mu_p = 0,75/1$

mit: $\sigma = \sigma_{stat} + \sigma_{dyn} = \sigma_{[P_v]} + \sigma_{dyn}$ lauten:

μ_k/μ_p	σ_{stat} (Spannkabel) N/mm ²	σ_{dyn} (Spannkabel) N/mm ²	σ (Spannkabel) N/mm ²
1/1	$\frac{P_v}{F} = \frac{2,627 \cdot 10^8}{742000}$ = 354,0	$\frac{v}{L}E = \frac{5,00}{18440} \cdot 2,059 \cdot 10^5$ = 55,8	409,8 < σ_{zul}
0,75/1	$\frac{P_v}{F} = \frac{2,627 \cdot 10^8}{556500}$ = 472,1	$\frac{v}{L}E = \frac{5,40}{18440} \cdot 2,059 \cdot 10^5$ = 60,3	532,4 < σ_{zul}

8.4.4.8 Einfluß des Druckaufbaus unter der Standzarge

Nach dem Rundabriß der Bodenkalotte vom zylindrischen Teil des RDB entsteht durch den sich ausbreitenden Innendruck eine zusätzliche Belastung ΔP auf dem Druckbehälter. Diese Belastung ΔP greift an der Stirnfläche des zylindrischen Teils des RDB an und ist vertikal nach oben gerichtet. Die Lastangriffsstelle für diese zusätzliche Last ist identisch mit dem Systempunkt P6. Zur Berechnung des Einflusses des Druckaufbaus unter der Standzarge werden 2 Fälle unterschiedlicher Zusatzdruckverläufe berücksichtigt, beiden Rechnungen wird ein System mit 29 Freiheitsgraden zugrundegelegt:

α) Im ersten Fall wird der Druckaufbau ΔP rechnerisch direkt aus dem Produkt Stirnfläche mal Innendruck bei stufenförmigem Lastanstieg ermittelt:

$$\begin{aligned}
 P &= F \cdot p_i = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot t \cdot p_i \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot 2200 \cdot 230 \cdot 17,16 \quad \text{N} \\
 &= 54 \, 557 \quad \text{kN}.
 \end{aligned}$$

Die Verläufe der Druckanstiege und der Deformationen der Systempunkte P2, P3, P5, P6 sind der Abb. 8.4.18 zu entnehmen. Gegenüber den Deformationsverläufen ohne Berücksichtigung des zusätzlichen Druckaufbaus (vgl. Abb. 8.4.14) tritt eine Steigerung der maximalen Deformationswerte um ca. 50% ein.

ñ) Für den zweiten Fall werden die mit dem Programm PISCES nach [119] ermittelten Werte zugrundegelegt, danach ergibt sich in 84 ms ein nichtlinearer Lastanstieg von 0 auf $11,0 \cdot 10^4$ kN. Im Datensatz für das Rechenprogramm wird dieser nichtlineare Verlauf durch einen linearen Lastanstieg mit einer Anstiegszeit von 20 ms ersetzt, die Verläufe der Druckanstiege und der Deformationen der Systempunkte P2, P3, P5, P6 sind der Abb. 8.4.19 zu entnehmen. Durch die im Vergleich zu α) höhere Endordinate des Druckes unter der Zarge ergibt sich eine weitere Erhöhung der maximalen Deformationswerte. Zur Verdeutlichung des Einflusses des Druckanstieges unter der Standzarge werden die maximalen Deformationswerte, ermittelt am Modell mit 29 Freiheitsgraden, gegenübergestellt:

	ohne Druckaufbau unter der Stand- zarge (Abb.8.4.14)	Druckaufbau rechnerisch α) (Abb.8.4.18)	Druckaufbau ñ) mit PISCES (Abb. 8.4.19)
max v (P2)	0.500 cm	1,00 cm	1,72 cm
max v (P3)	0.516 cm	1,03 cm	1,75 cm
max v (P5)	0.505 cm	1,10 cm	1,90 cm

8.4.4.9 Einfluß der mechanisch-mathematischen Gliederung der RDB-Einbauten

Zur Untersuchung des Einflusses der RDB-Einbauten auf das Gesamtschwingungsverhalten wird das Systemmodell mit 29 Freiheitsgraden benutzt. Die Massen werden nicht mehr in die Dichte der RDB-Wandungen einbezogen, sondern gemäß ihrer Anordnung in Abb. 8.4.6 strukturiert. Die Anzahl der Freiheitsgrade erhöht sich dadurch auf 42. Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Kernbehälter ist nur oben im RDB befestigt (Abb. 8.4.6),
- Vernachlässigung der Reibung zwischen Brennstab und Führungsrohr, so daß die Steifigkeiten der Brennstäbe konservativerweise nicht berücksichtigt werden.

Die Ermittlung der Massen für die Freiheitsgrade der RDB-Einbauten führt auf folgende Werte:

Freiheitsgrad	Masse (Anteil aus Führungsrohr) t	Masse (Anteile aus Brennstab und Führungsrohr) t
30	6,51	6,51
31	17,69	17,69
32	50,95	50,95
33	2,42	2,42
34	27,48	27,48
	<u>105,05</u>	<u>105,05</u>
35	45,50	45,50
36	6,39	6,39
37	1,39	1,39
38	2,37	25,92
39	0,98	24,53
40	0,98	24,53
41	1,99	25,54
42	1,01	1,01
	<u>165,66</u>	<u>259,86 (vgl.Tab. III)</u>

Die Federeigenschaften der als Federelemente gekennzeichneten RDB-Einbauten sind:

Element Nr.	Fläche mm ²	Länge mm	Steifigkeit N/mm
32	804200	250	6,627 10 ⁸
33	1588900	2250	1,455 10 ⁸
34	667200	2100	6,545 10 ⁷
35	660400	2250	6,047 10 ⁷
36	134500	250	1,109 10 ⁸
37	86400	240	7,420 10 ⁷
38	294200	1800	3,367 10 ⁷
39	3000	170	3,494 10 ⁴
41	200500	1550	2,664 10 ⁷
42	199200	1540	2,664 10 ⁷
43	199200	1540	2,664 10 ⁷
44	559700	260	4,435 10 ⁸

Der Deformationsverlauf für die Systempunkte P2, P3, P5, P6 ist bei 32 benutzten Eigenformen der Abb. 8.4.20 zu entnehmen. Durch die genauere Darstellung der Massen und Steifigkeiten der RDB-Einbauten kann gegenüber der vereinfachenden Globalanalyse (vgl. Abb. 8.4.14)

- ein früheres Abheben des RDB von der Zarge,
- eine Reduktion der maximalen Deformationswerte um ca. 13%

ermittelt werden. Diese Reduktion der Beanspruchung ist eine Folge der Verlagerung der Masse der Kerneinbauten, die bisher in den RDB-Elementen verschmiert war, von der Lasteinleitungsstelle weg. Durch diese lokale Massenreduktion, d.h. durch die Verminderung der effektiv wirksamen Trägheitskräfte, hebt der RDB früher ab, die maximalen Ordinaten der Schwingungen um die statische Ruhelage werden außerdem verringert.

Der Deformationsverlauf einiger Systempunkte für die Einbauten ist der Abb. 8.4.21 zu entnehmen. Nach Überwinden der Vorspannung von $P_v = 628\,978\text{ N}$ in den Brennelementen trennen sich die Brennelemente (Freiheitsgrad 42) vom unteren Rost (Freiheitsgrad 34). Während die Deformationen des unteren Rostes auf einen Wert von $v = 0,545\text{ cm}$ begrenzt sind, führen die Brennelementköpfe im geöffneten Zustand (Freiheitsgrad 38) einen Weg von mehr als $2,30\text{ cm}$ aus.

8.4.4.10 Ermittlung der Spannungsverläufe

Spannungen aus dem Betriebszustand

Die der genauen Berechnung zugrundegelegten Querschnittswerte (vgl. Tab. III) lauten:

-	Fläche F_2 mm ²	Steifigkeit k N/mm	$\frac{1}{k}$ mm/N
Spannkabel	7420	$8,286 \cdot 10^6$	$1,207 \cdot 10^{-7}$
RDB	34372	$7,822 \cdot 10^7$	$1,278 \cdot 10^{-8}$
Zarge	5325	$1,371 \cdot 10^8$	$7,294 \cdot 10^{-9}$

$1,408 \cdot 10^{-7}$

Im Betriebszustand werden für einen Innendruck von $P_i = 2,610 \cdot 10^8\text{ N}$ und eine Fugenschnittlast von $S_3 = + P_{iz} = - 2,899 \cdot 10^8\text{ N}$ (Vorspannung $P_v = 2,660 \cdot 10^8\text{ N}$) folgende Spannungen ermittelt:

-	Schnittlast N	Spannung N/mm ²
Spannkabel	$2,899 \cdot 10^8$	390,7
RDB-Zylinder	$- 2,893 \cdot 10^7$	- 8,4
Zarge	$- 2,899 \cdot 10^8$	- 543,3
RDB-Fuß	$- 2,899 \cdot 10^8$	- 84,3
Pendelstütze	$- 2,899 \cdot 10^8$	- 86,2

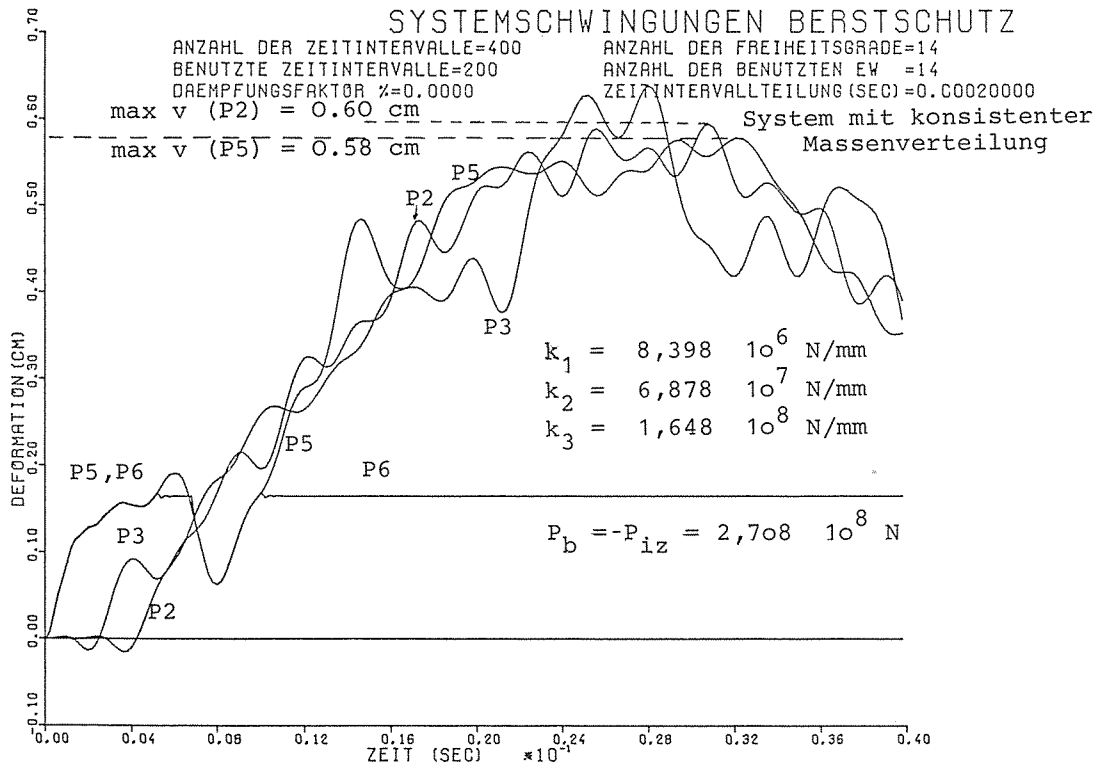
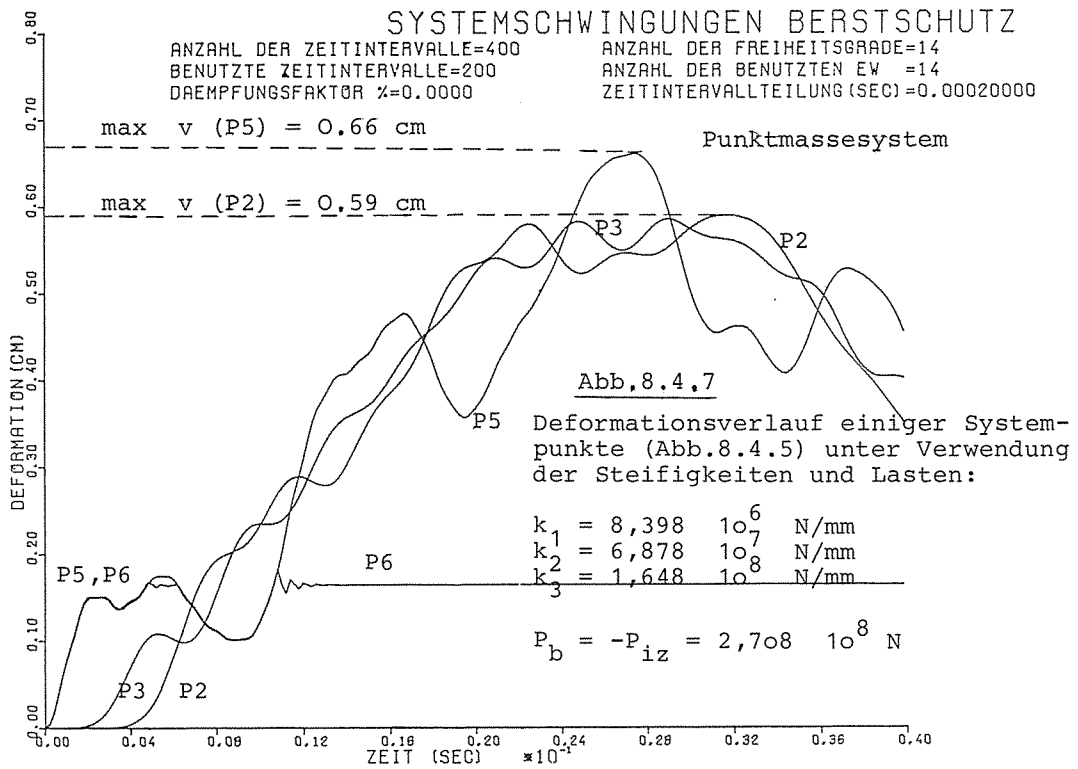
Spannungen aus dem Berstzustand

Aus Abb. 8.4.22 folgen die Absolutwerte der Spannungsverläufe für einige Systempunkte. Die maximalen dynamischen und die maximalen überlagerten Spannungswerte des Berstschutzsystems, ermittelt am

Systemmodell mit 67 Freiheitsgraden, und der Kerneinbauten, ermittelt am Systemmodell mit 42 Freiheitsgraden lauten:

Systempunkt, Element (vgl. Abb. 8.4.5, Abb. 8.4.6)	σ_{Betrieb} N/mm ²	max σ_{Dynamik} N/mm ²	max σ N/mm ²
P1: Spannkabel	390,7	71,6	462,3
Pendelstütze	- 86,2	- 155,0	- 241,2
P3: RDB, oben	- 8,4	- 89,2	- 97,6
P4: RDB, unten	- 8,4	- 57,9	- 66,3
P5: RDB, Fuß	- 84,3	94,6	10,3
P6: Zarge	- 543,3	559,0	13,7
P1: Spannkabel	390,7	60,8	451,5
P3: RDB, oben	- 8,4	- 78,5	- 86,9
P4=El 24: RDB, unten	- 8,4	- 53,9	- 62,3
P6: Zarge	- 543,3	549,2	5,9
El 34: Kernbehälter	1,0	± 78,5	79,5
El 38: Steuerstab	- 2,2	± 13,2	- 15,4
El 42: Brennelement	- 3,1	± 12,3	- 15,4

Der Vergleich der maximalen Spannungswerte unter Berücksichtigung der Gliederung der Kerneinbauten in den Systempunkten P1, P3, P4, P6 läßt ebenso wie die in 8.4.4.9 festgestellte Abminderung der Deformationen eine Reduktion der maximalen Beanspruchungen erkennen.



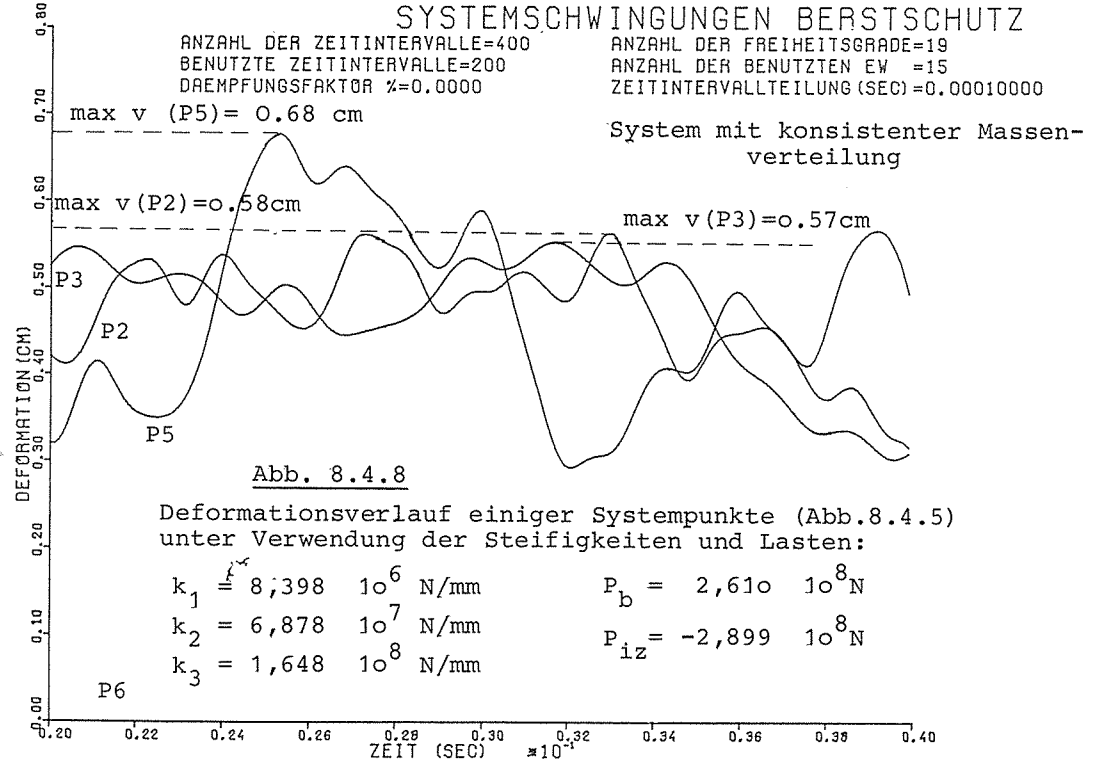
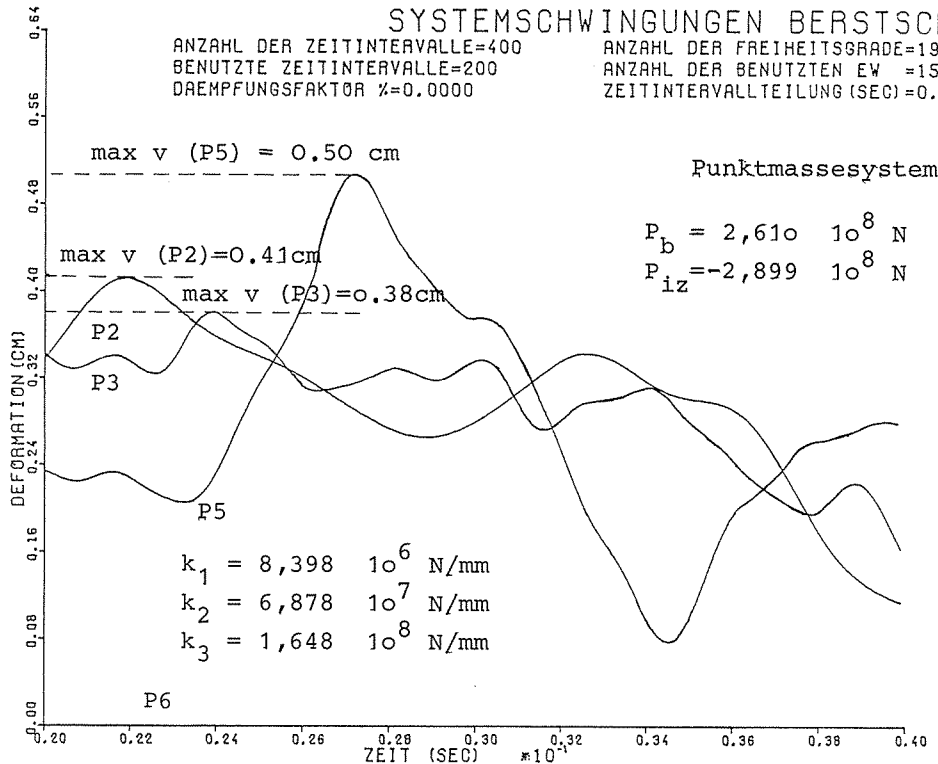
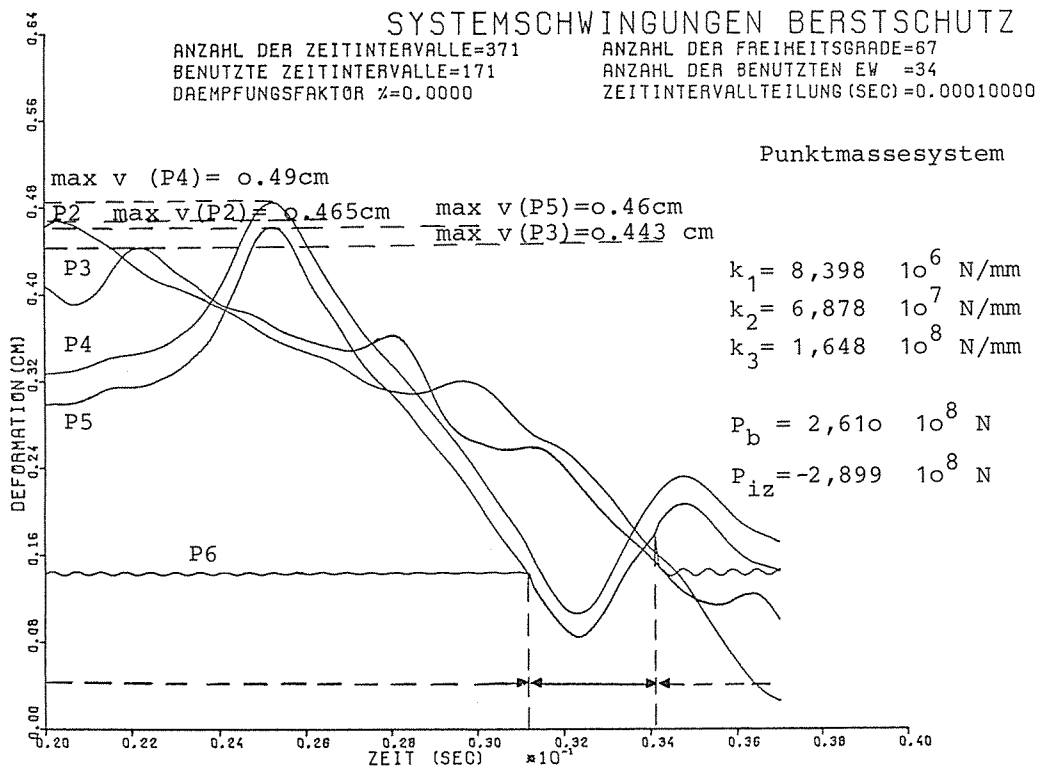
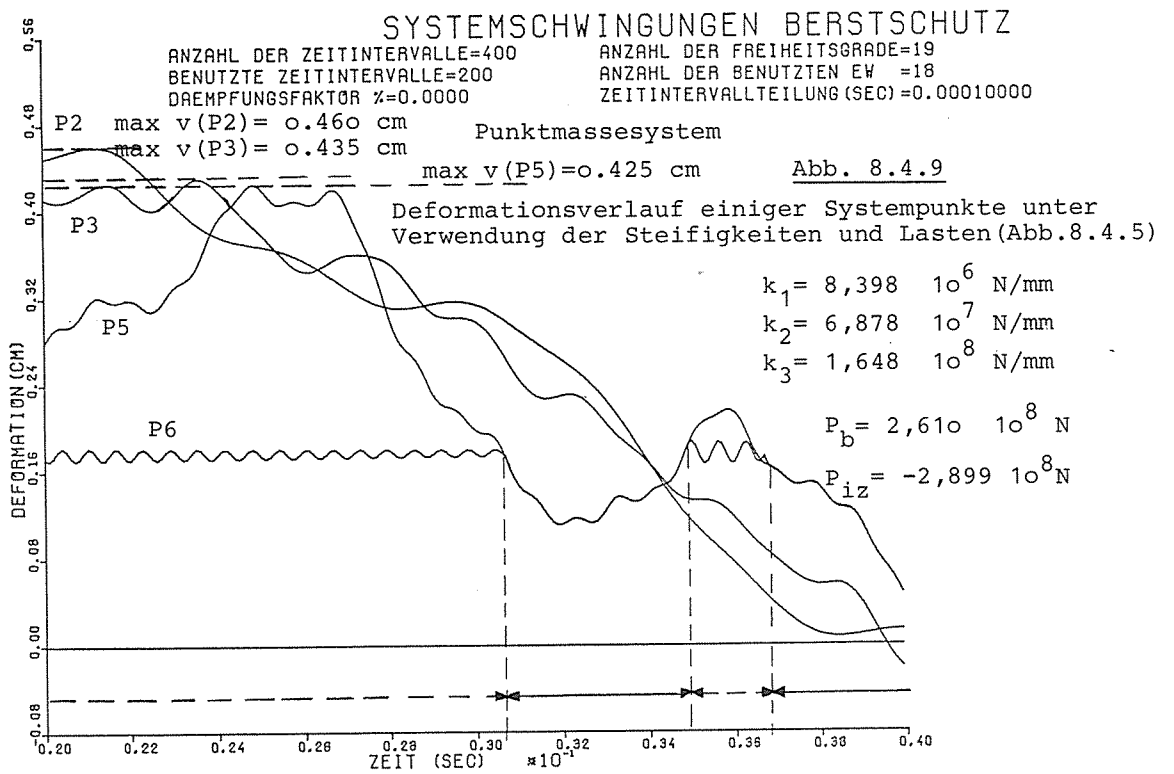
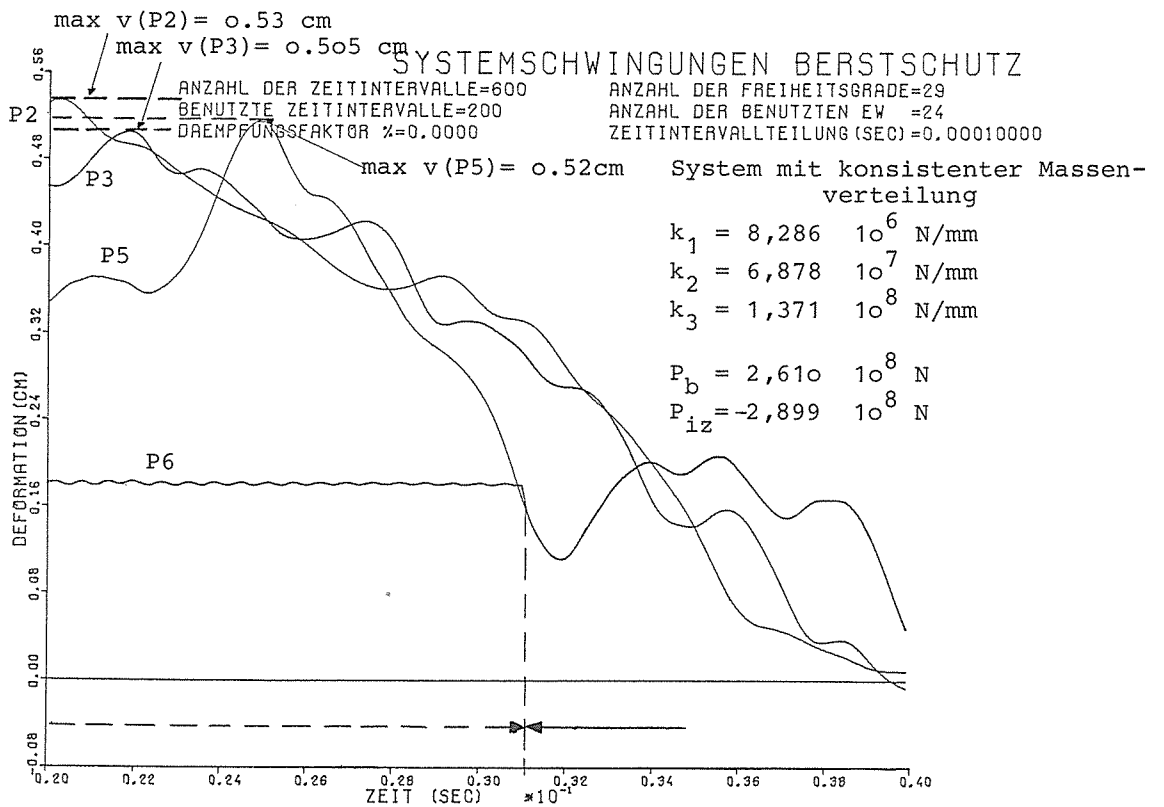
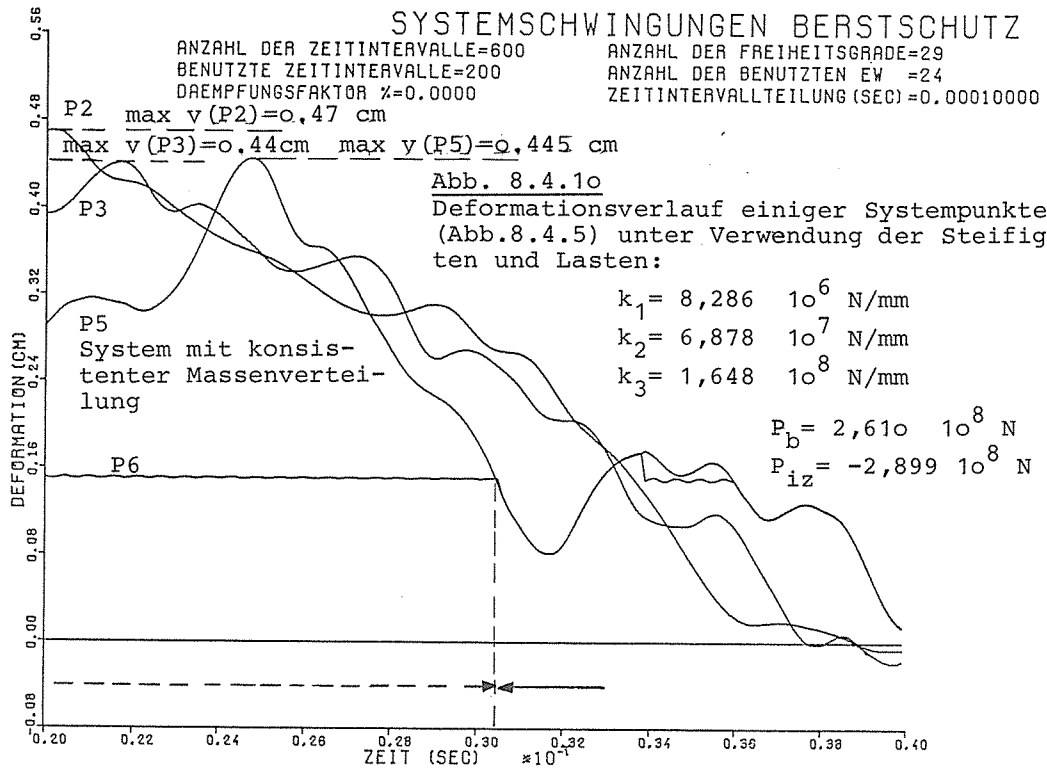


Abb. 8.4.8
 Deformationsverlauf einiger Systempunkte (Abb.8.4.5) unter Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:



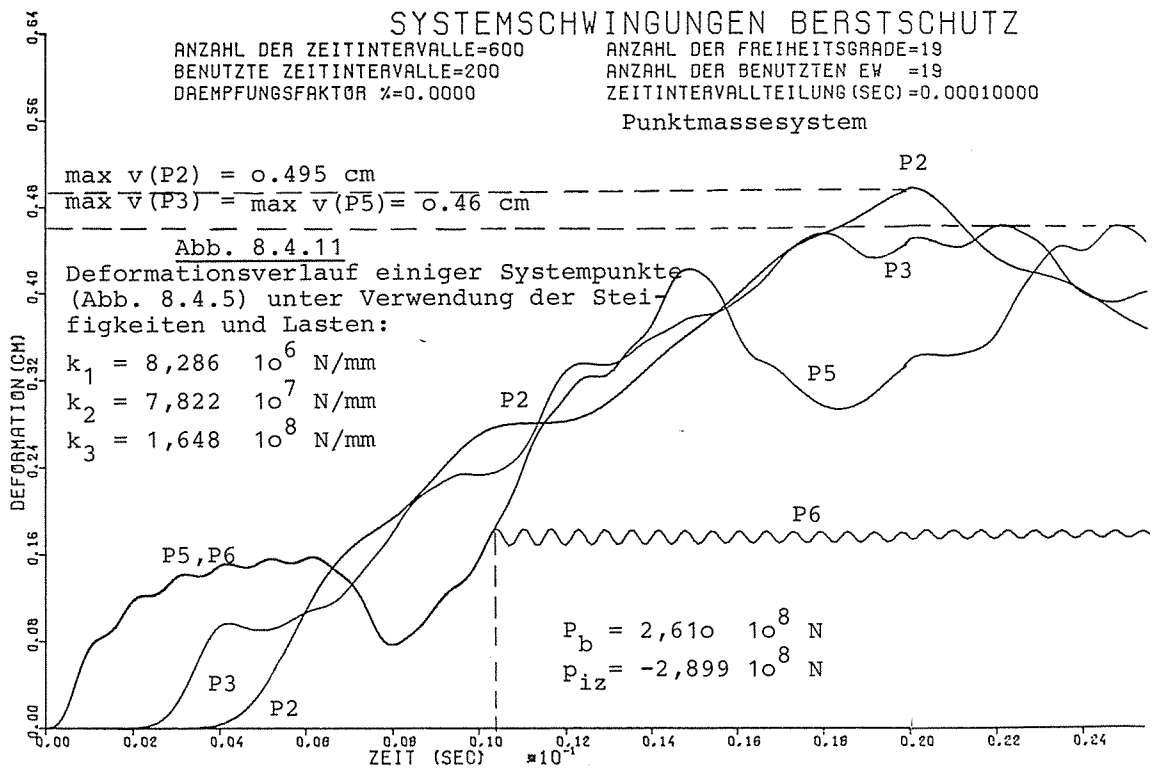


SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$

ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=19
 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =19
 ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

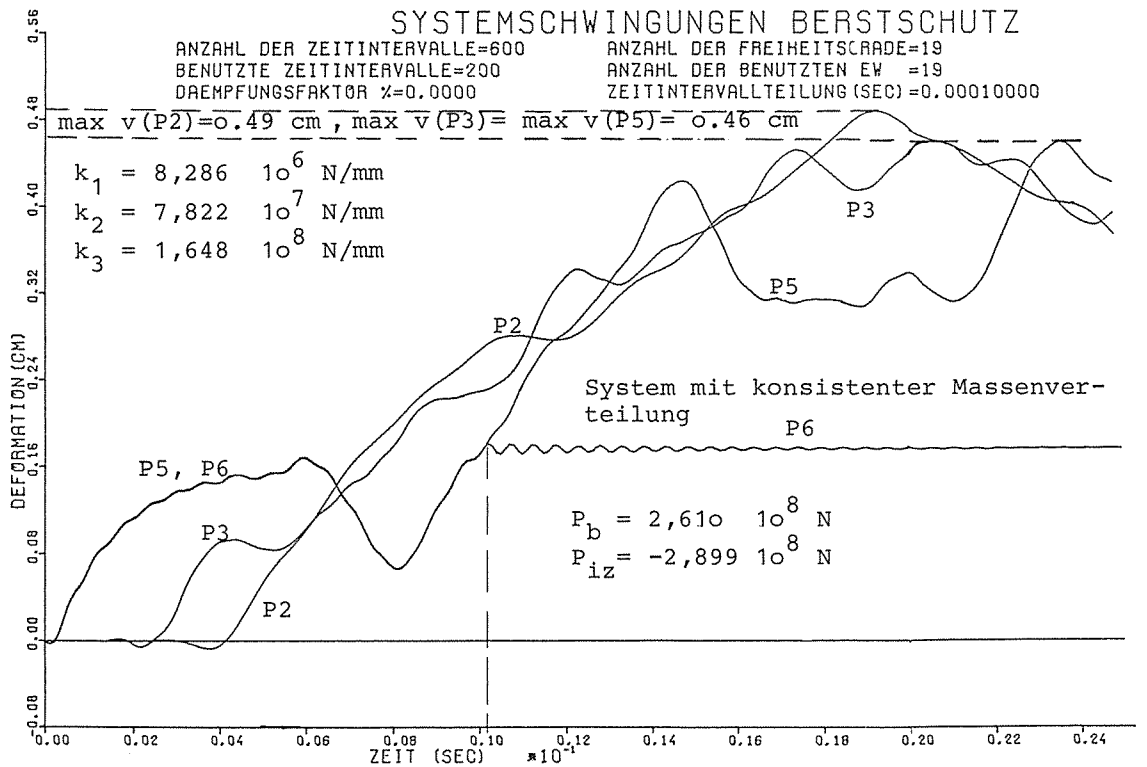
Punktmassensystem

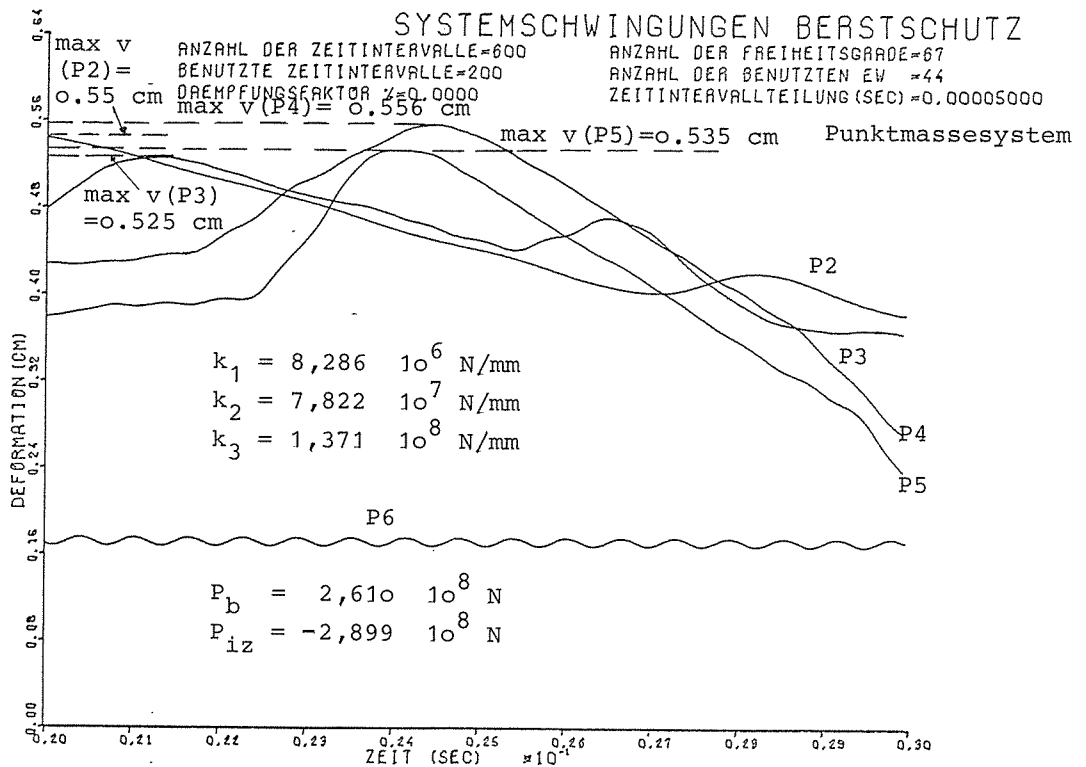
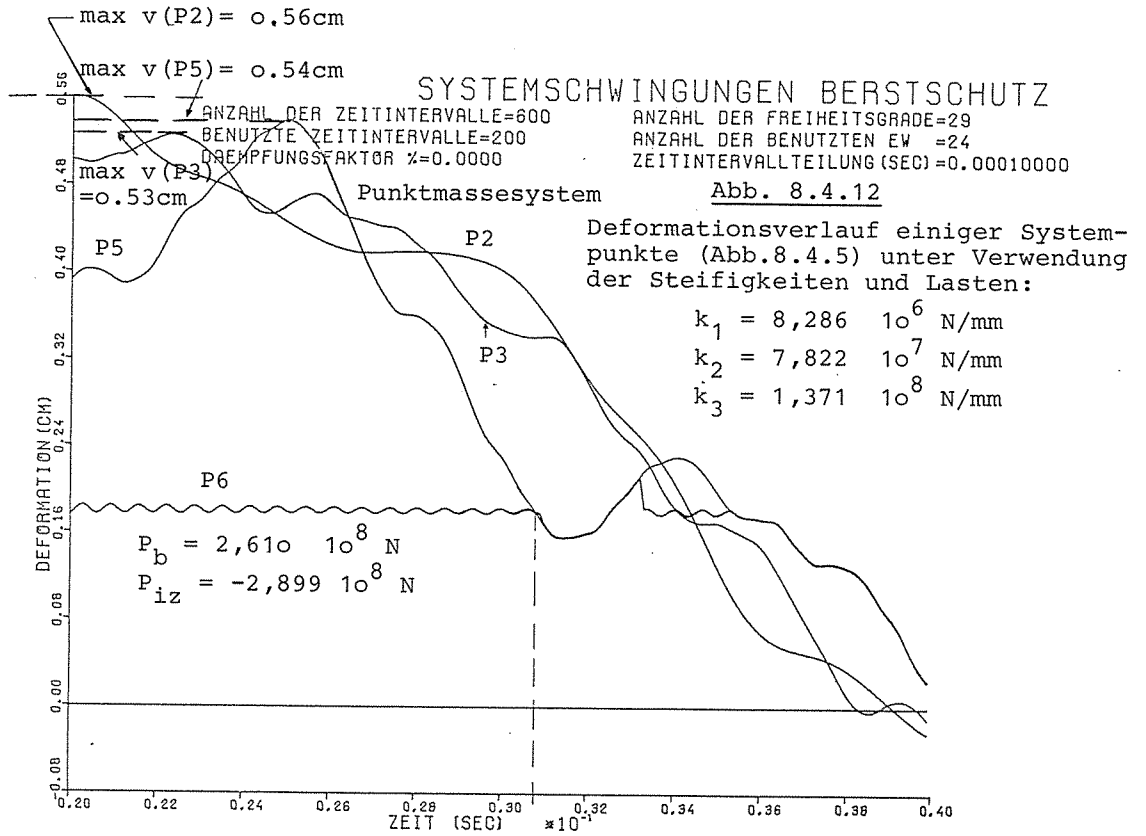


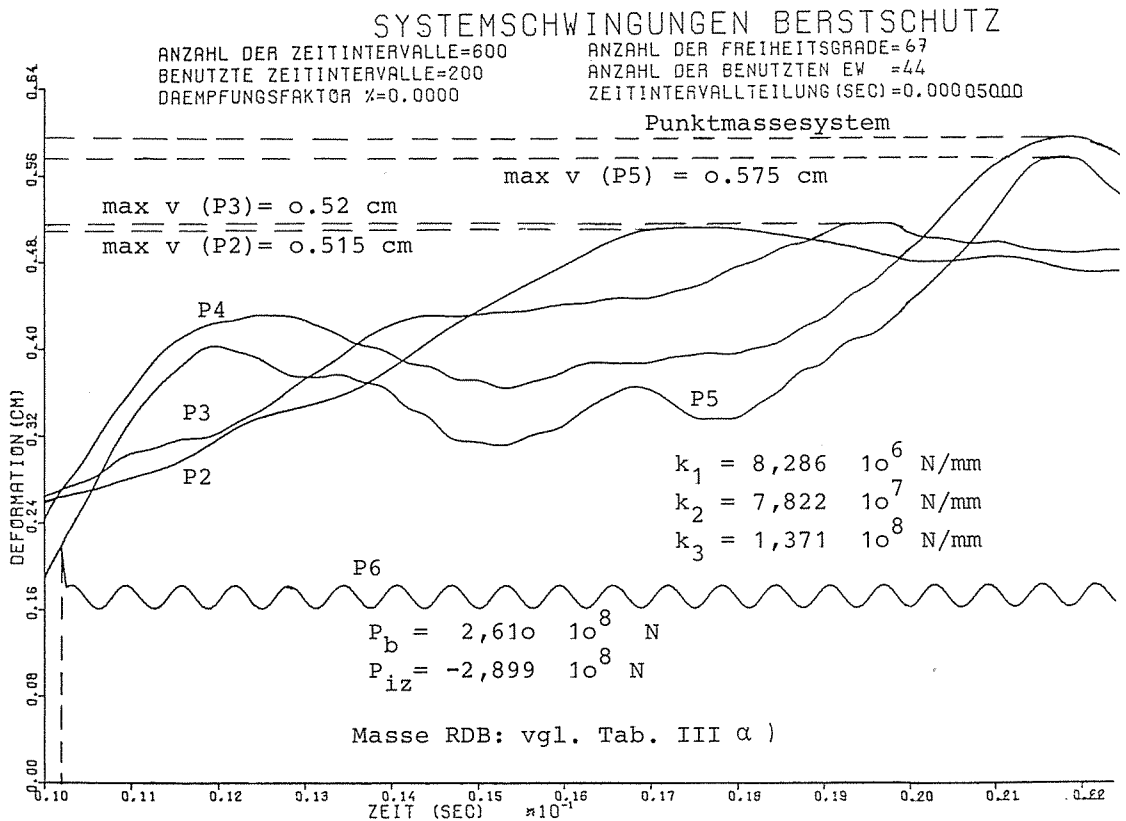
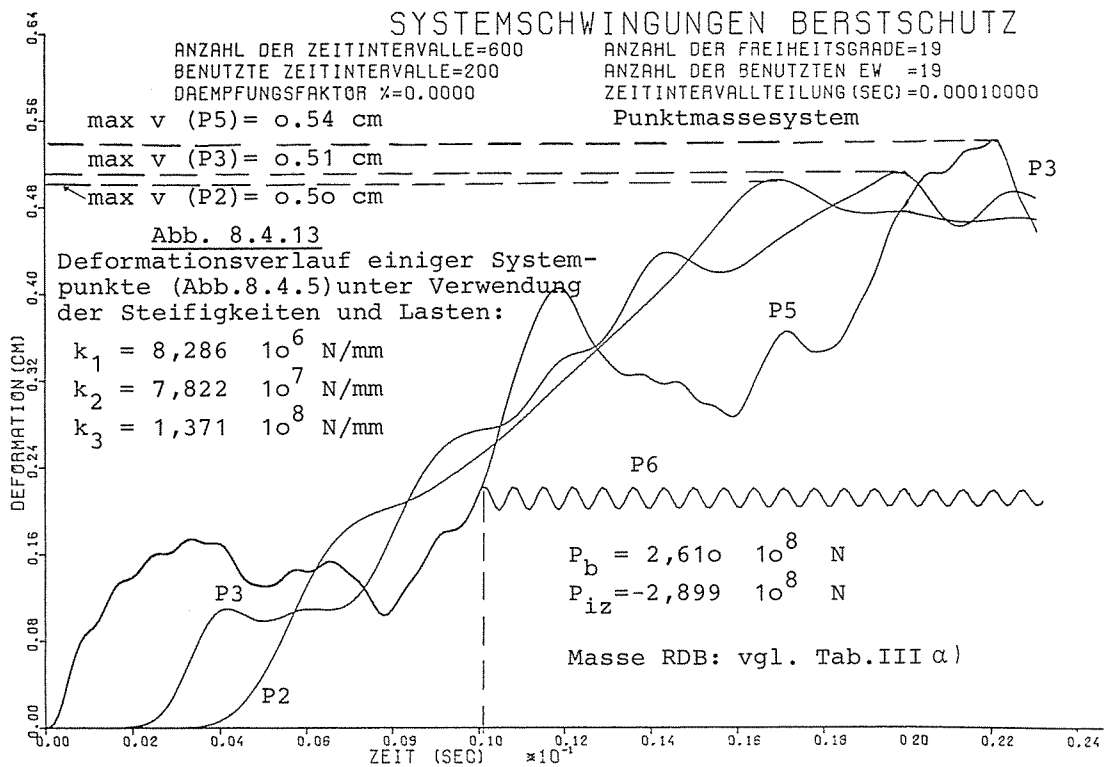
SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

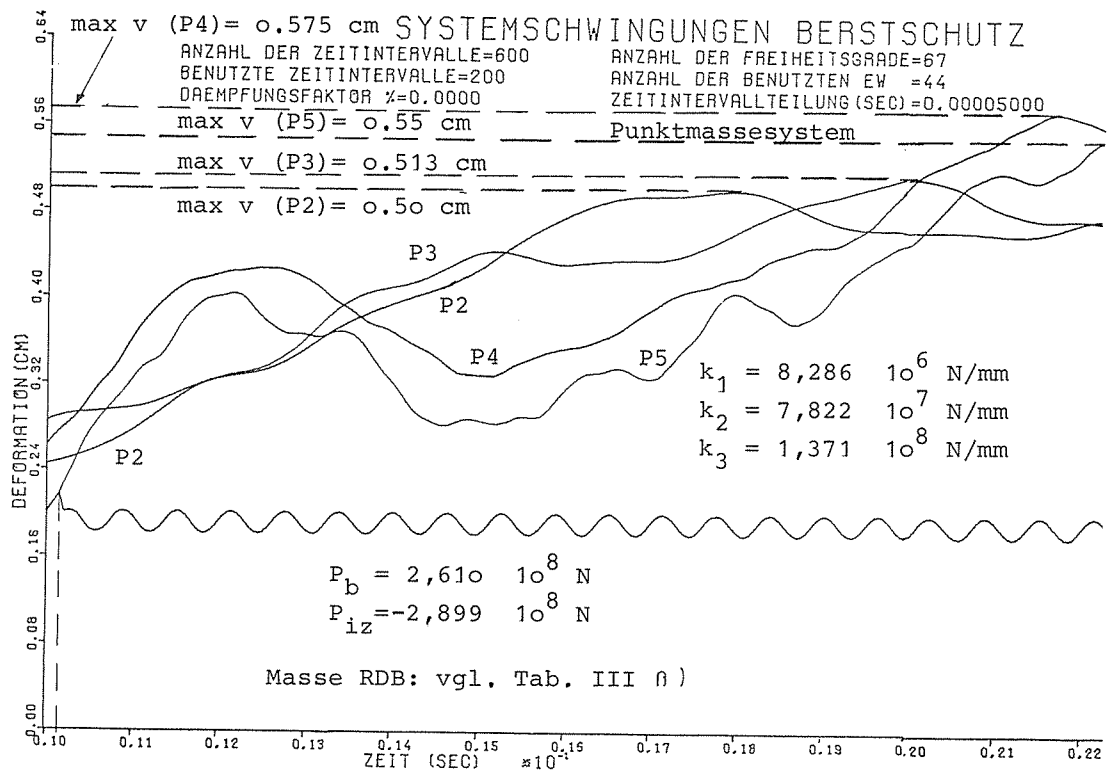
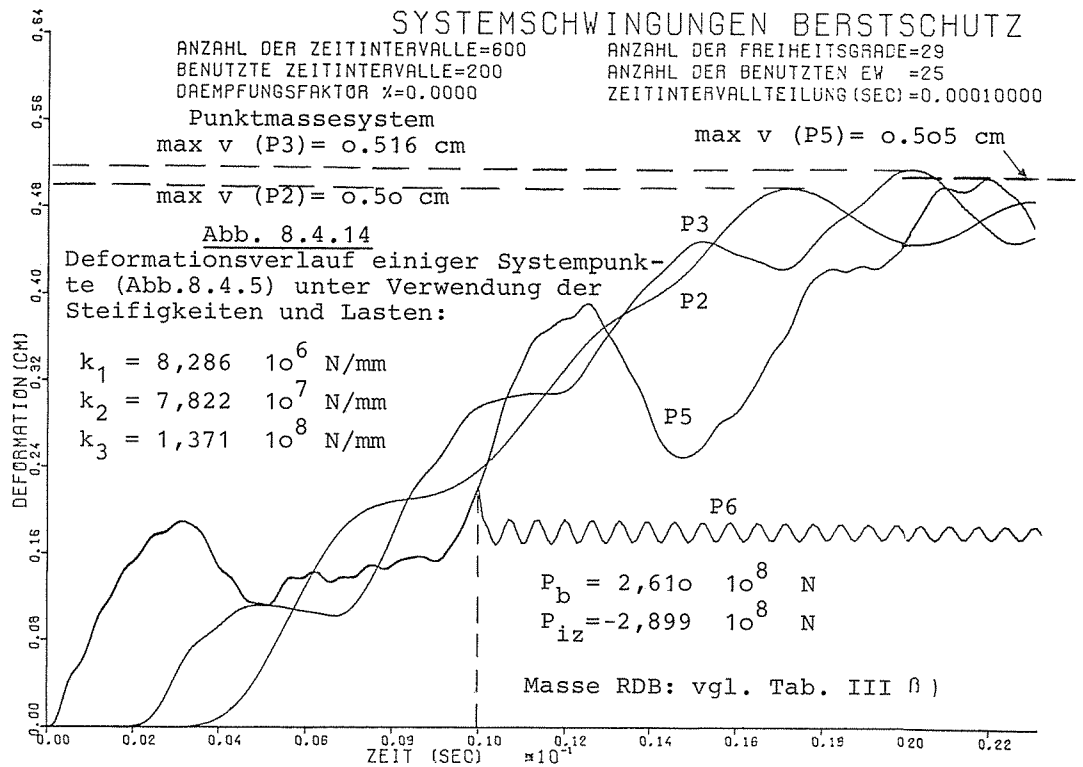
ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$

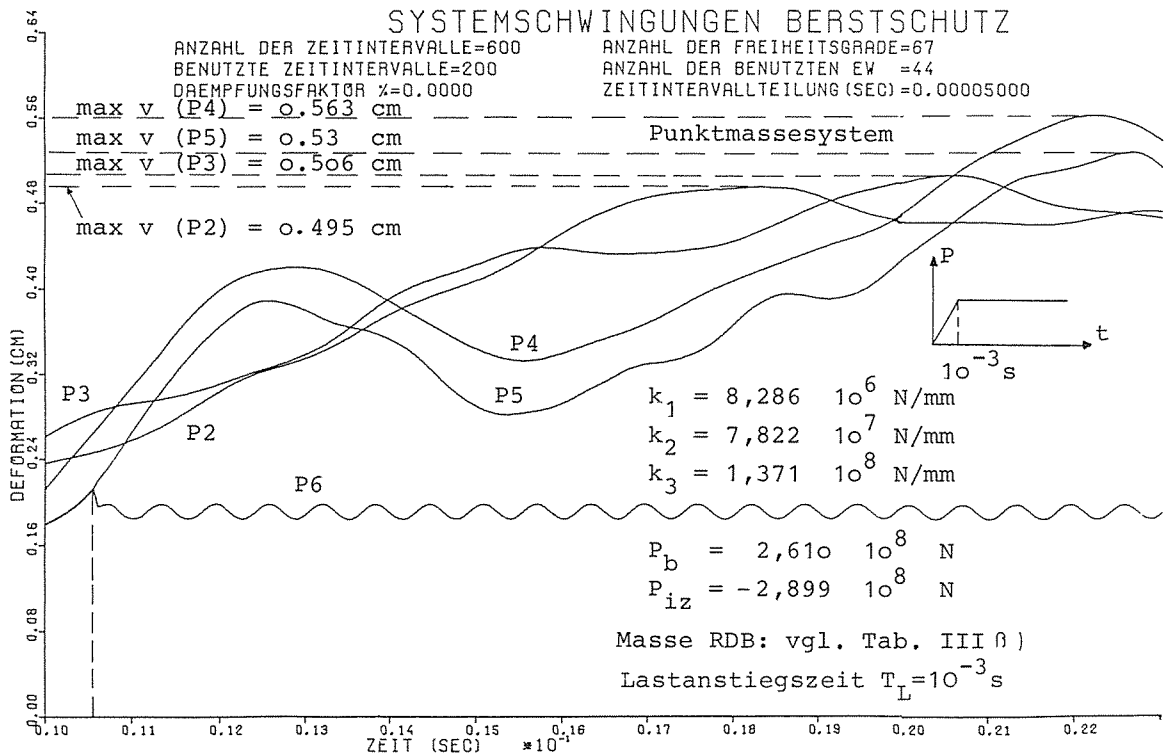
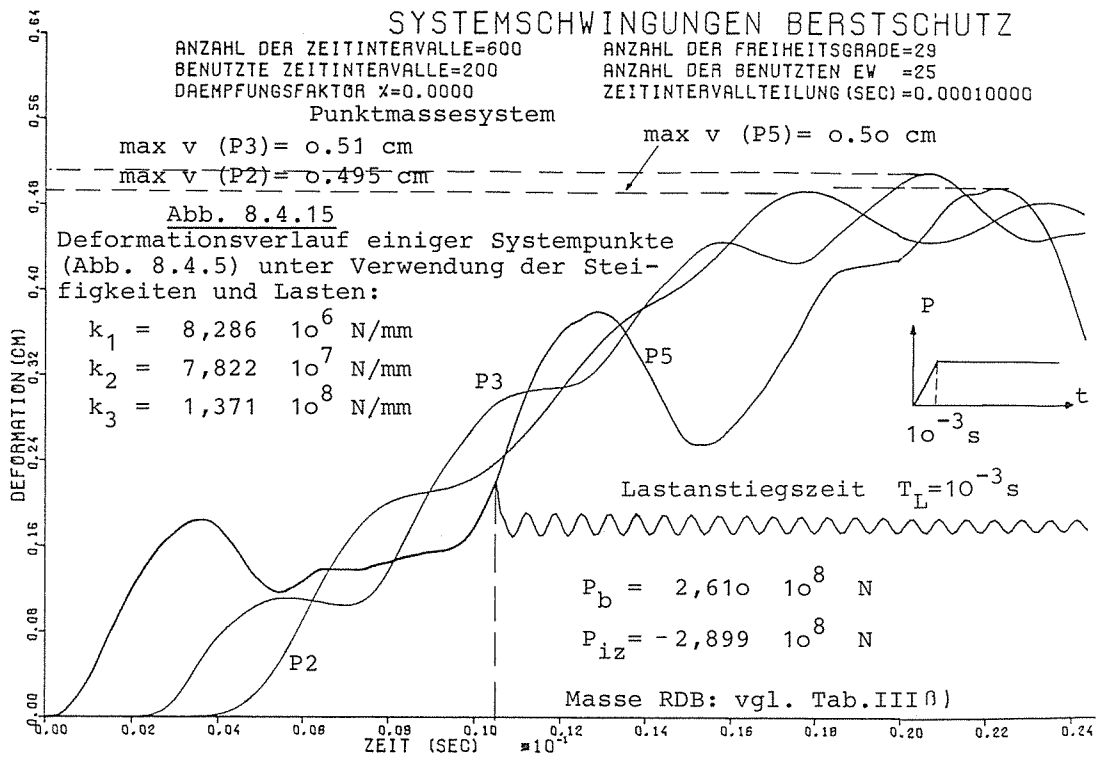
ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=19
 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =19
 ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

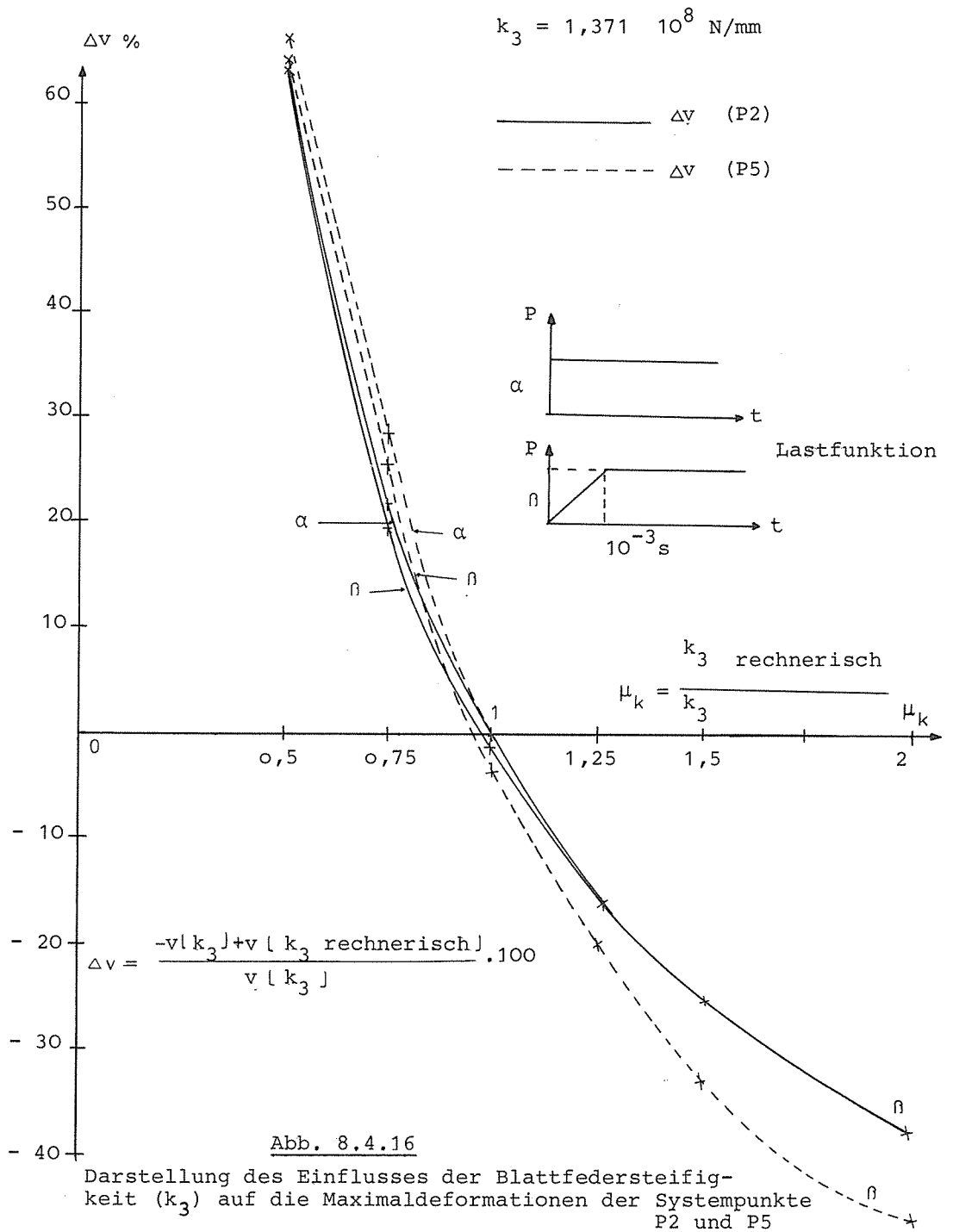


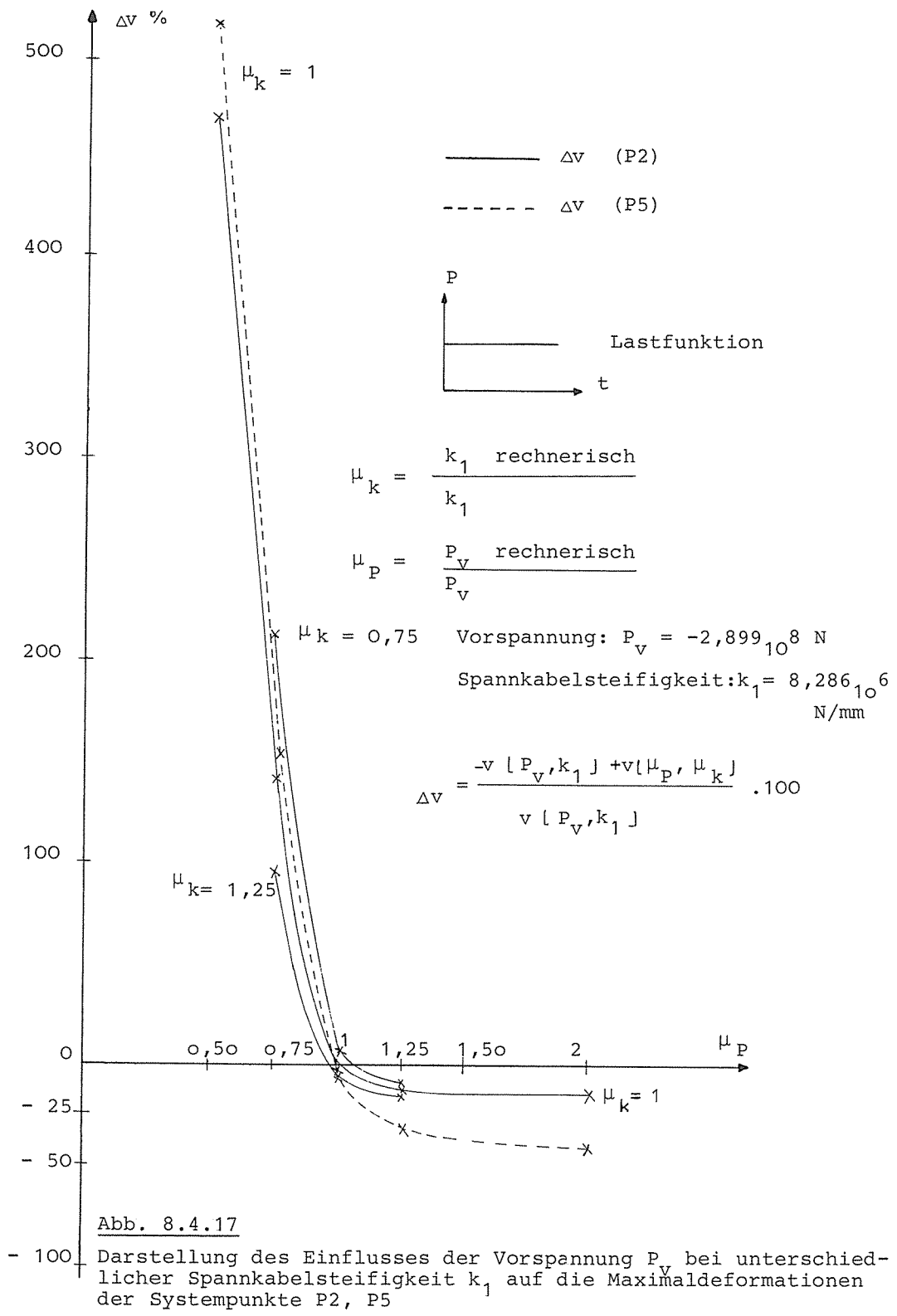












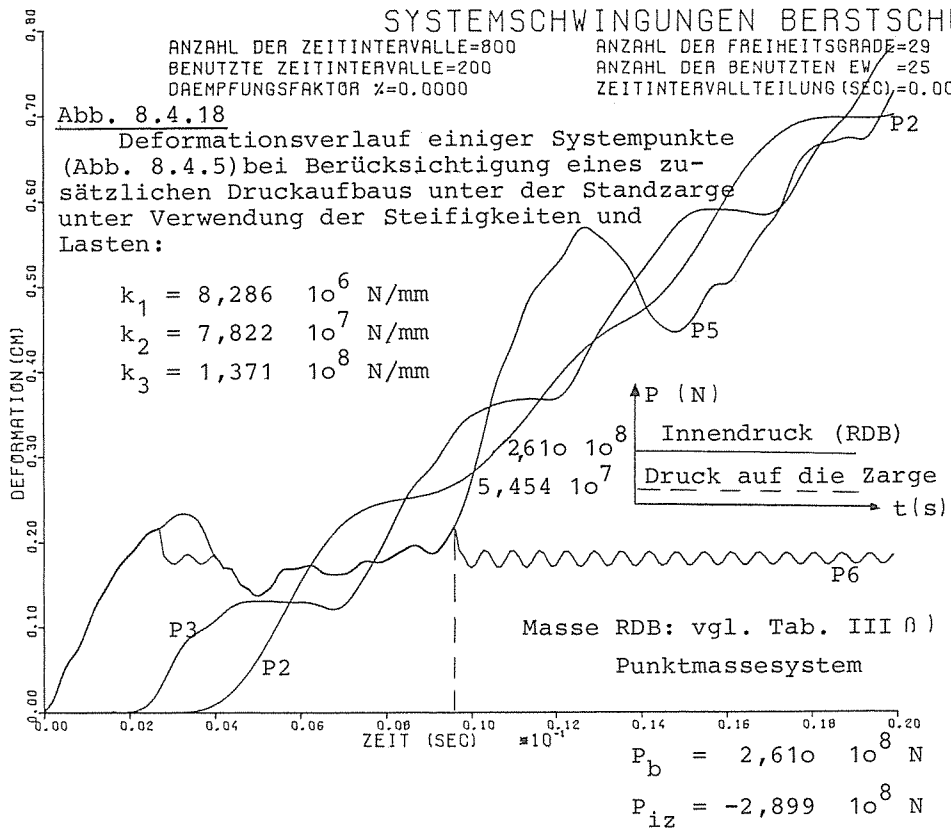
SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=800 ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=29
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =25
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$ ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

Abb. 8.4.18

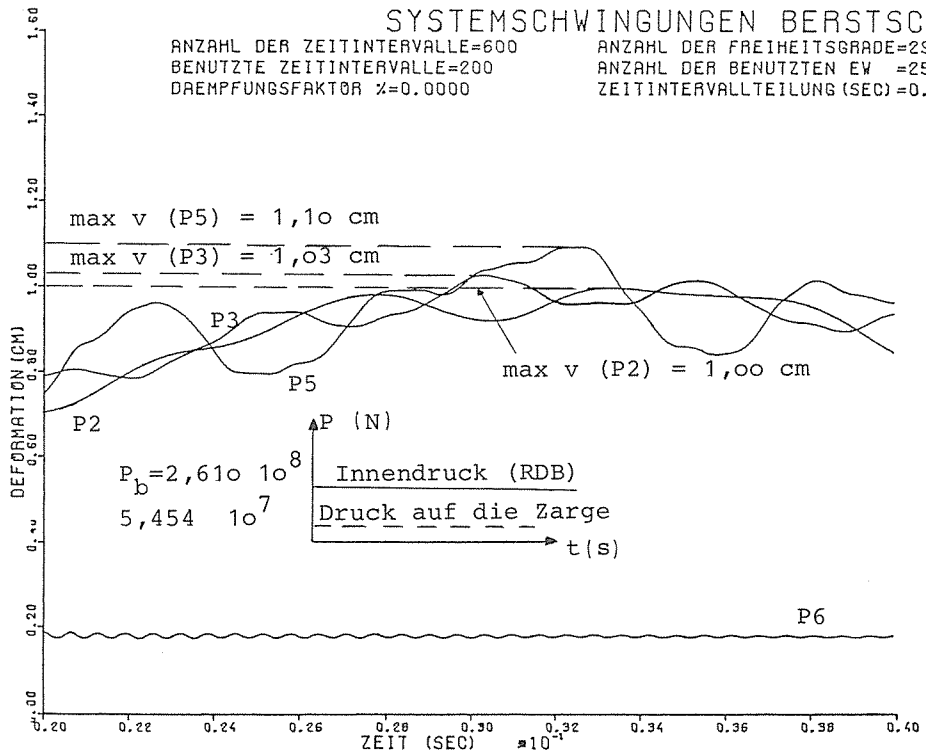
Deformationsverlauf einiger Systempunkte (Abb. 8.4.5) bei Berücksichtigung eines zusätzlichen Druckaufbaus unter der Standzarge unter Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 8,286 \cdot 10^6 \text{ N/mm} \\
 k_2 &= 7,822 \cdot 10^7 \text{ N/mm} \\
 k_3 &= 1,371 \cdot 10^8 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$



SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600 ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=29
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =25
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$ ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

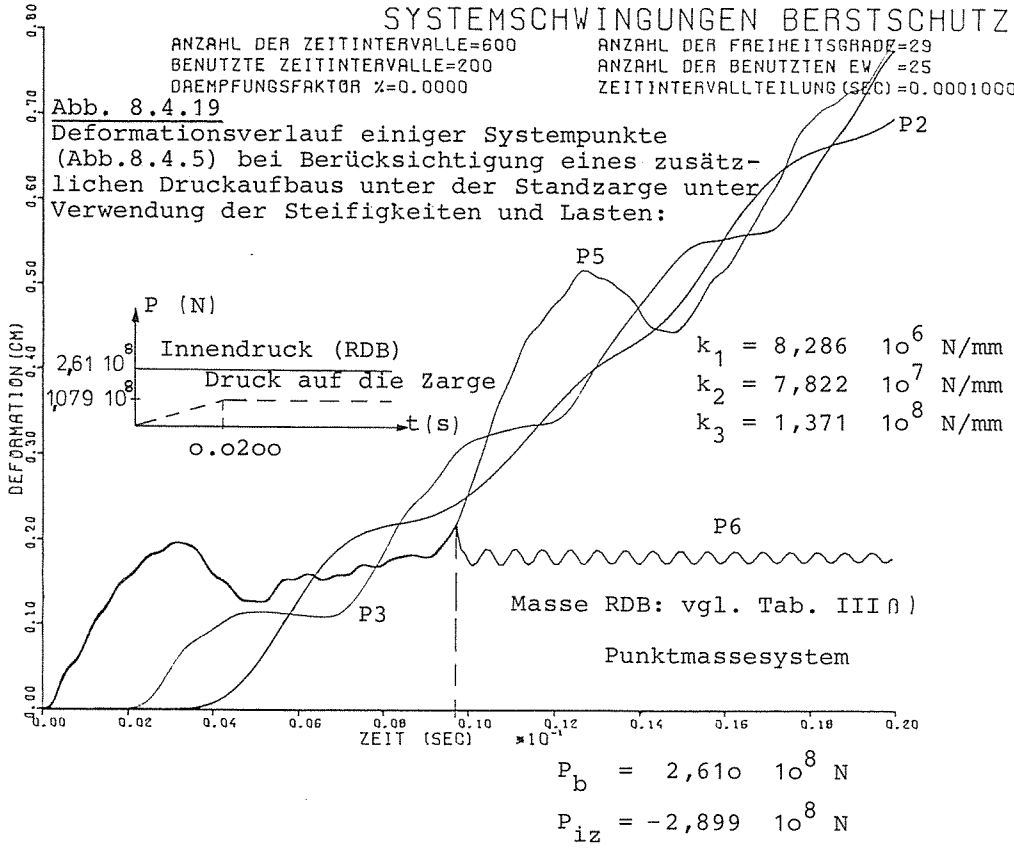


SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600 ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=29
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =25
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$ ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

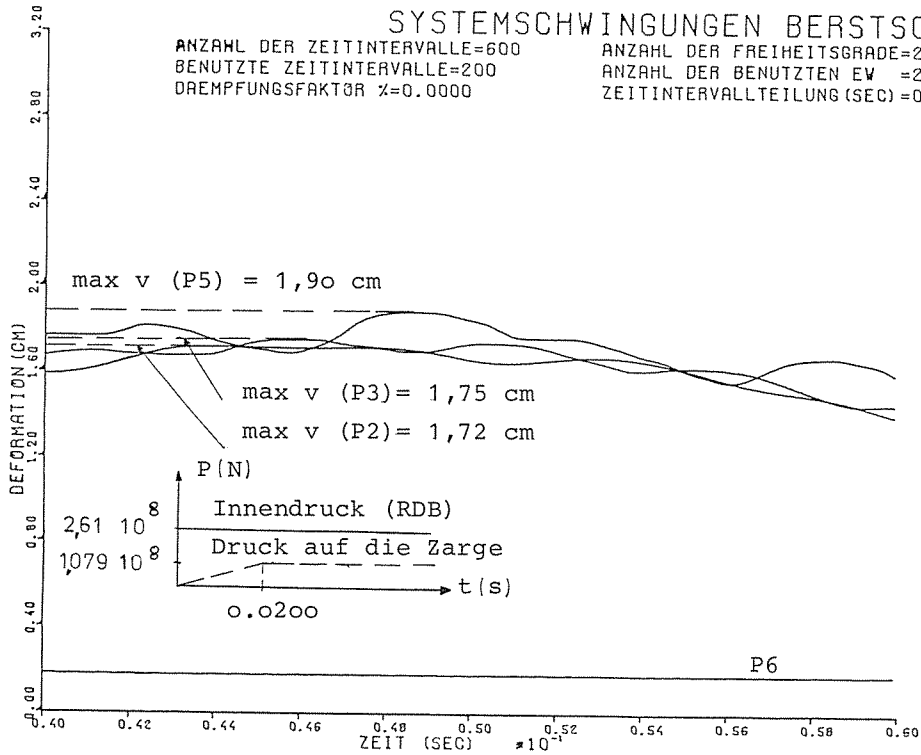
Abb. 8.4.19

Deformationsverlauf einiger Systempunkte
 (Abb.8.4.5) bei Berücksichtigung eines zusätz-
 lichen Druckaufbaus unter der Standzarge unter
 Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:



SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600 ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=29
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =25
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$ ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000



SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$

ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=42
 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =32
 ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

max v (P5) = 0.460 cm
 max v (P3) = 0.434 cm
 max v (P2) = 0.422 cm

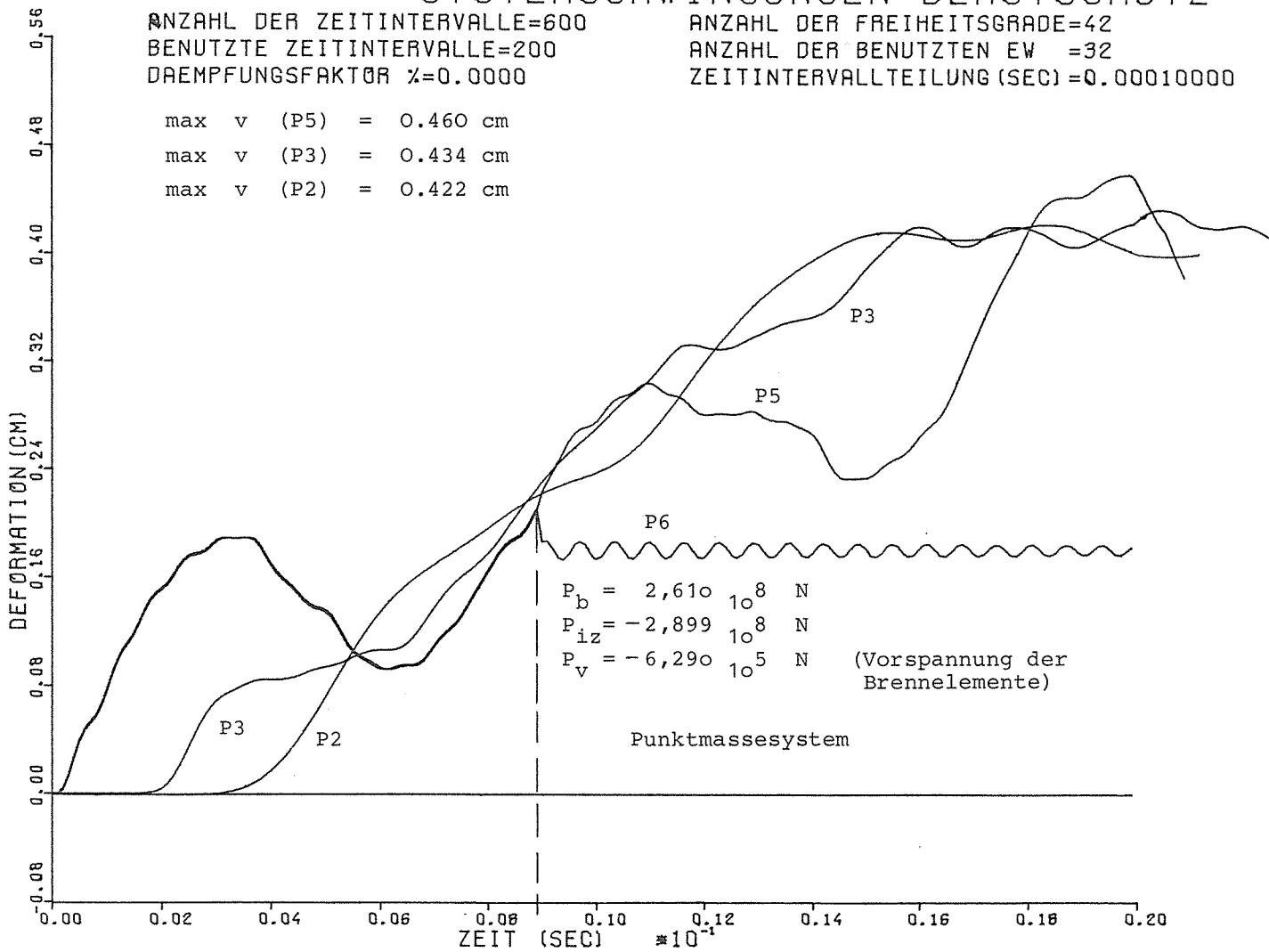


Abb. 8.4.20

Deformationsverlauf einiger Systempunkte (Abb. 8.4.5) bei Berücksichtigung der mechanisch-mathematischen Gliederung der RDB-Einbauten (Abb. 8.4.6) unter Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 8,286 \cdot 10^6 \text{ N/mm} \\
 k_2 &= 7,822 \cdot 10^7 \text{ N/mm} \\
 k_3 &= 1,371 \cdot 10^8 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

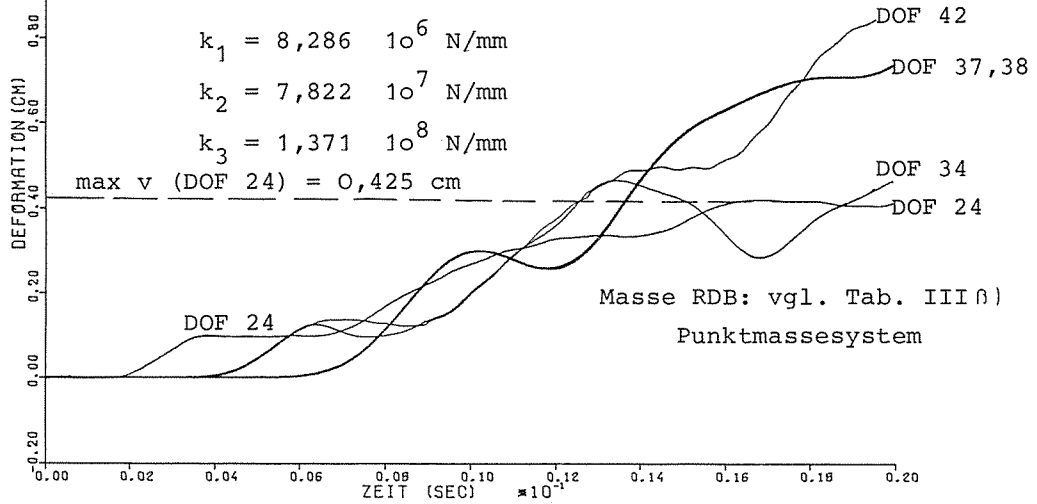
SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$

ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=42
 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =32
 ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000

Abb. 8.4.21

Deformationsverlauf einiger Freiheitsgrade der Kerneinbauten bei Berücksichtigung der mechanisch-mathematischen Gliederung der RDB-Einbauten (Abb. 8.4.6) unter Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:



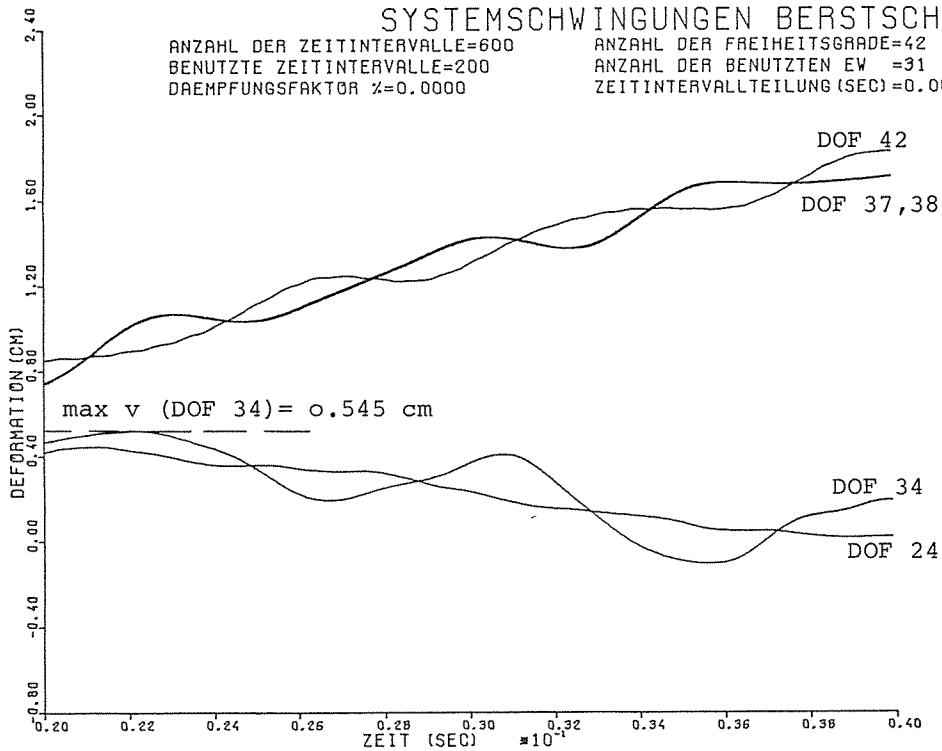
$P_b = 2,610 \cdot 10^8 \text{ N}$
 $P_{iz} = -2,899 \cdot 10^8 \text{ N}$
 $P_v = -6,29 \cdot 10^5 \text{ N}$

(Vorspannung und Brennelemente)

SYSTEMSCHWINGUNGEN BERSTSCHUTZ

ANZAHL DER ZEITINTERVALLE=600
 BENUTZTE ZEITINTERVALLE=200
 DAEMPFUNGSFAKTOR $\gamma=0.0000$

ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=42
 ANZAHL DER BENUTZTEN EW =31
 ZEITINTERVALLTEILUNG (SEC)=0.00010000



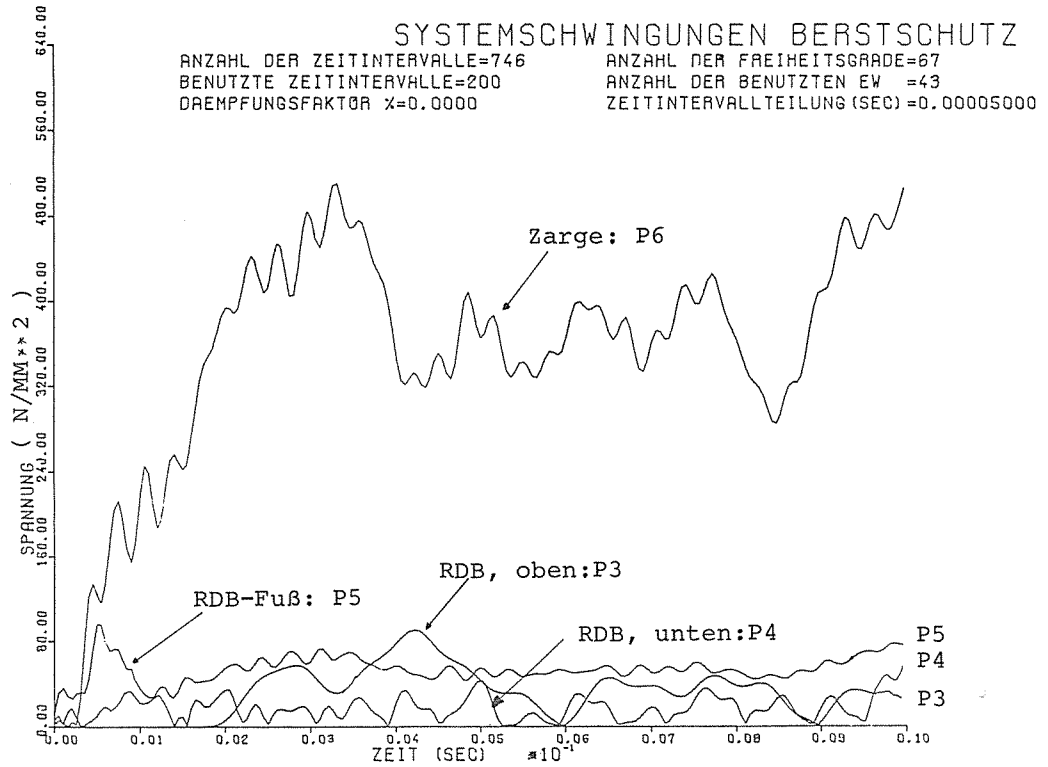
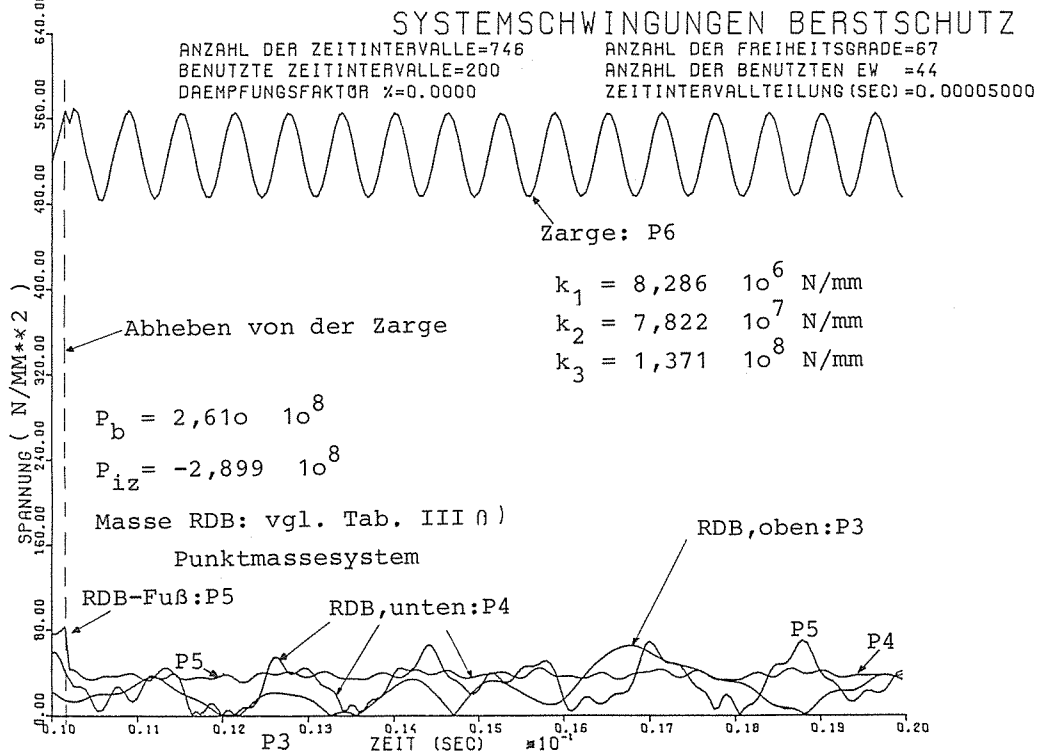


Abb. 8.4.22

Spannungsverlauf einiger Systempunkte (Abb.8.4.5) unter Verwendung der Steifigkeiten und Lasten:



Sicherheitstechnisch relevante Komponenten von Kernkraftwerkskonstruktionen müssen gegen hypothetische Störfälle so ausgelegt sein, daß der Reaktor sicher abgeschaltet werden kann, in diesem Zustand gehalten werden kann und keine unzulässige Freisetzung radioaktiver Stoffe möglich ist. Da diese Störfälle transienten Charakter haben, ist den geforderten Sicherheitsbedürfnissen gemäß eine vollständige dynamische Analyse des Systems durchzuführen. Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Analyse von Wechselwirkungseffekten, hervorgerufen durch Stoß- und Aufschlagvorgänge von Komponenten. Aufgrund des stoßartigen Charakters der Beanspruchung gelten hinsichtlich der für die numerischen Berechnung notwendigen Diskretisierung der Konstruktion besondere Maßstäbe.

Die maßgebenden Eigenfrequenzen einer Konstruktion können durch eine Modalanalyse ermittelt werden. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit die Modalanalyse zugrunde gelegt und anschließend die Integration der Bewegungsgleichungen in entkoppelter Form durchgeführt. Das entwickelte Lösungsverfahren gestattet die dynamische Analyse von Systemen mit einer veränderlichen, vom zeitlichen Deformationsverlauf abhängigen Gliederung mit Hilfe eindimensionaler Elemente.

Bei Änderung der Systemgliederung ist die gespeicherte Formänderungsenergie aus der statischen Vorbeanspruchung als zusätzliches Anfangswertproblem zu berücksichtigen. Durch Trennung der statischen von den dynamischen Deformationsanteilen erlaubt das vorliegend entwickelte Verfahren die getrennte Bewertung der auf die Konstruktion einwirkenden Beanspruchung aus einem Störfall allein.

Für die numerische Berechnung ergibt sich durch die Inanspruchnahme von speziellen Fugenelementen der Vorteil, daß für das Anfangswertproblem der Vorbelastung und Vorspannung keine veränderlichen und in ihrer logischen Zuordnung vom jeweiligen Gliederungszustand abhängigen Anfangsdeformationsvektoren zu definieren sind. Stattdessen werden nur zusätzliche äußere Belastungen (Zusatzlasten), die durch einfache Lastvektoren definiert werden, vorgegeben. In gleicher Weise werden die nichtlinearen Anteile der bis in den nichtlinearen Bereich beanspruchten Materialien nach dem Verfahren der Anfangsdehnungen als zusätzliche, vom Deformationsverlauf abhängige, äußere Belastungen behandelt.

Für den Sonderfall longitudinal beanspruchter Konstruktionen wird der Lösungsverlauf von Beispielen für den linear-elastischen Bereich ermittelt. Dabei zeigt insbesondere das Beispiel einer Kernkraftwerksberstschutzkonstruktion die starke Beeinflussbar-

keit der erzielbaren Ergebnisverläufe durch die Wahl der Eingabeparameter selbst. Hierzu zählt z.B. die Variation von Bemessungsdaten oder die Änderung der Diskretisierung hinsichtlich ihrer Verteilung und Feinheit. Deshalb ist die Diskretisierung von Konstruktionen, für die eine dynamische Analyse von Stoß-Kontaktproblemen vorzunehmen ist, mit einer kritischen Beurteilung der maßgebenden Parameter zu verbinden.

Als Ziel weiterer Untersuchungen kann die vollständige dynamische Analyse von Stoß-Kontaktproblemen unter der Berücksichtigung von Biegeschwingungen genannt werden. Mit dieser Erweiterung kann die Kopplung von Biege- und Längsschwingungen realisiert werden, anstatt wie im vorliegenden Beispiel der Berstschutzkonstruktion die spektralen Werte einer Platte (z.B. die Gitterplatte im Reaktordruckbehälter) durch die Eigenform eines Ein-Feder-Massesystems auszudrücken. Durch die Berücksichtigung gekoppelter Biegeschwingungen lassen sich Wechselwirkungsprobleme nicht-longitudinal beanspruchter Konstruktionen mit Stoßvorgängen, wie z.B. seismisch induzierte Brennelementschwingungen, in gleicher Weise berechnen. Dabei ist dem bisher keineswegs vollständig geklärten Problem der Modellabbildung von Dissipationsmechanismen im Bereich von Kontaktstellen sowohl bei linearen als auch bei nichtlinearen Werkstoffverhalten besondere Beachtung zu schenken. Auch die Realisierung der Modellvorstellungen von Reibungsdämpfern, die z.B. bei der Diskretisierung von Reaktor-druckbehältereinbauten zwischen Brennelementen und Brennelementhüllrohren oder beim Einfahren von Steuerstäben in Steuerstabführungsrohre wirksam werden, ist dabei von großer Bedeutung.

Literaturangaben

- [1] A.E.H. Love
"A treatise on the mathematical theory of elasticity"
Dover Publication, 1944
4. Aufl.
- [2] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier
"Theory of elasticity"
McGraw Hill, 1970
3. Aufl.
- [3] I. Szabó
"Höhere Technische Mechanik"
Springer-Verlag, 1960
3. Aufl.
- [4] J.S. Przemieniecki
"Theory of matrix structural analysis"
McGraw Hill, 1968
- [5] O.C. Zienkiewicz
"The finite element method in engineering science"
McGraw Hill, 1971
2. Aufl.
- [6] R. D. Cook
"Concepts and applications of finite element analysis"
John Wiley, 1974
- [7] K. J. Bathe, E. L. Wilson
"Numerical methods in finite element analysis"
Prentice-Hall, 1976
- [8] W. C. Hurty, M. F. Rubinstein
"Dynamics of structures"
Prentice-Hall, Inc., 1964
- [9] L. Meirovitch
"Analytical methods in vibration"
Macmillan, 1967
- [10] E. C. Pestel, F. A. Leckie
"Matrix methods in elastomechanics"
McGraw Hill, 1963
- [11] J. M. Biggs
"Introduction to structural dynamics"
McGraw Hill, 1964
- [12] R. W. Clough, J. Penzien
"Dynamics of structures"
McGraw Hill, 1975
- [13] H. Waller, W. Krings
"Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik"
B.I. - Wissenschaftsverlag, 1975
- [14] S. Timoshenko
"Vibration problems in engineering"
D. Van Nostrand Comp., 1955
3. Aufl.
- [15] J. D. Achenbach
"Wave propagation in elastic solids"
North-Holland, 1975
- [16] R. Zurmühl
"Matrizen und ihre technischen Anwendungen"
Springer-Verlag, 1964
4. Aufl.
- [17] S. J. Fenves, N. Perrone, A. R. Robinson, W.C. Schnobrich
"Numerical and Computer methods in structural mechanics"
Academic Press, 1973

- [18] W. Pilkey, K. Saczalski, H. Schaeffer
"Structural mechanics computer programs"
Univ. Press Virginia, 1974
- [19] W. and B. Pilkey
"Shock and vibration computer programs"
The Shock and Vibration Monograph
Series 10, 1975
- [20] W. Goldsmith
"Impact"
Edward Arnold Ltd., 1960
- [21] K. H. H. Rühl
"Der Spannungsfluß in der Konstruktion"
VDI-Berichte, Bd. 10, 63-74, 1957
- [22] K. J. DeJuhasz
"Graphical analysis of impact of elastic bars"
Trans. ASME, 64, A 122-128, 1942
- [23] L. H. Donnell
"Longitudinal wave transmission and impact"
Trans. ASME, 52, 153-167, 1930
- [24] J. R. Hutchinson
"Axisymmetric vibrations of a free finite length rod"
J. Acoust. Soc. Am, 51, 233-240, 1972
- [25] R. D. Mindlin, E. A. Fox
"Vibrations and waves in elastic bars of rectangular
cross section"
J. Appl. Mech., 152-158, 1960
- [26] F. Karal
"Far-field dependence on the end conditions in a
semi-infinite elastic rod of circular cross-section"
J. Sound Vibr. 17, 5-11, 1971
- [27] W. R. Spillers, A. Callegari
"Impact of two elastic cylinders: short time solution"
Int. J. mech. Sci., 11, 845-851, 1969
- [28] R. Skalak
"Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar"
J. Appl. Mech., 59-64, 1957
- [29] G. P. DeVault, C. W. Curtis
"Elastic cylinder with free lateral surface and mixed
time-dependent end conditions"
J. Acoust. Soc. Am., 34, 421-432, 1962
- [30] M. Rumerman, S. Raynor
"Natural frequencies of finite circular cylinders in
axially symmetric longitudinal vibration"
J. Sound Vibr. 15, 529-543, 1971
- [31] J. Miklowitz
"On the use of approximate theories of an elastic rod in
problems of longitudinal impact"
Proc. 3. Nat. Congr. Appl. Mech., 215-224, 1958
- [32] R. Folk, G. Fox, C. A. Shook, C. W. Curtis
"Elastic strain produced by sudden application of
pressure to one end of a cylindrical bar" I theory.
J. Acoust. Soc. Am., 30, 552-558, 1958
- [33] L. D. Bertholf
"Numerical solution for two-dimensional elastic wave
propagation in finite bars"
J. Appl. Mech., 725-734, 1967
- [34] H. Reismann, L.-W. Tsai
"Wave propagation and forced motion in elastic cylindrical rods.
A comparison of two theories"
AFOSR Scientific Report: AFOSR 69-300 ITR

- [35] J. S. Archer
"Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques"
AIAA Journal 3, 1910-1918, 1965
- [36] T. K. Caughey, M. E. J. O'Kelly
"Classical normal modes in damped linear dynamic systems"
J. Appl. Mech., 583-588, 1965
- [37] R. W. Clough
"Analysis of structural vibrations and dynamic response"
Proc. US - Japan Seminar on recent advances in matrix methods of structural analysis and design,
441-486, 1969
- [38] R. E. Scholl
"Dynamic analysis of three-dimensional frames"
Oregon State Univ. Ph.D. 1969, 69-19, 913
- [39] R. J. Talbot
"Analysis of the dynamics of elastic structures by the finite element method"
Report DS/MC/72-1, 1972
- [40] G. M. L. Gladwell, U. C. Tahbildor
"Finite element analysis of the axisymmetric vibrations of cylinders"
J. Sound Vibr. 22, 143-157, 1972
- [41] D. Hitchings, S. H. Dance
"Response of nuclear structural systems to transient and random excitations, using both deterministic and probabilistic methods"
Preprints of the 2nd Int. Conf. on 'Structural Mechanics in Reactor Technology'
Session E 4/1, 1973
- [42] M. P. Kamatt, G. J. Smitses
"Optimal beam frequencies by the finite element displacement method"
Int. J. Solids Structures 9, 415-429, 1973
- [43] W. Matthees
"Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von vorgespannten Systemen unter stoßartiger Belastung, Teil I: Einfache Mechanische Modelle"
Gutachten von der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), 21.2.1975,
Gesch.-Z.: UA II 2-5680-SR 7 für den Bundesminister des Innern
- [44] S. R. Pritchard
"On a numerical technique for elastic wave propagation"
Report: SC-CR-68-3501, 1967
- [45] R. J. Lawrence
"WONDY IIIa - A Computer program for one-dimensional wave propagation"
Report: SC-DR-70-315, 1970
- [46] E. Ondracek, J. B. Haddow
"A numerical method for the analysis of longitudinal elastic-plastic stress wave propagation"
Int. J. Num. Methods Engineering 6, 103-115, 1973
- [47] R. B. McCalley
"Shock analysis by matrix method"
Report KAPL-P-3343, 1967
- [48] K. Horii, M. Kawahara
"A numerical analysis of the dynamic response of structures"
Proc. Japan Nat. Congress Appl. Mech., 17-22, 1969

- [49] Y. Yamada
 "Dynamic analysis of structures"
 Erschienen in: J. T. Oden, R.W. Clough, Y. Yamamoto
 'Advances in computational methods in structural
 mechanics and design'
 Univ. Alabama Huntsville Press, 181-199
- [50] V. H. Neubert, H. Lee
 "Finite beam elements for dynamic analysis"
 Shock a Vibr. Bull. 41, Part 7, 51-60, 1970
- [51] B. L. Edge, P. G. Mayer, G. A. Pierce
 "An analysis technique for composite structures
 subject to dynamic loads"
 J. Applied Mechanics, 118-124, 1971
- [52] W. C. Hurty, J. D. Collins, G. C. Hart
 "Dynamic analysis of large structures by modal
 synthesis techniques"
 Comp. Struc. 1, 535-563, 1971
- [53] B. A. Ovunc
 "Dynamics of frameworks by continuous mass method"
 Comp. Struc. 4, 1061-1089, 1974
- [54] R. E. Nickell
 "Nonlinear dynamics by mode superposition"
 AIAA/ASME/SAE 15th Structures,
 Structural Dynamics and Materials Conference 1974
- [55] K. T. Kavanagh
 "An approximate algorithm for the reanalysis of
 structures by the finite element method"
 Comp. Struc. 2, 713-722, 1972
- [56] B. C. Ellis, V. Gabrielson
 "Dynamic analysis of lumped mass-systems"
 SCL-TM-64-110, Sandia Laboratories, 1965
- [57] H. W. Schmitt
 "Analysis of the repetitive impact of a beam with
 a rigid body"
 Report: SC-TM-67-867, 1967
- [58] S. A. Shipley, H. G. Leistner, R. E. Jones
 "Elastic wave propagation - a comparison between finite
 element predictions and exact solutions"
 Proc. Int. Symp. Wave Propagation Dynamic Properties
 of Earth Materials, 509-519, 1967
- [59] V. K. Gabrielson, R. T. Reese
 "Shock code user's manual. A computer code to solve the
 dynamic response of lumped-mass systems"
 SCL - DR - 69 - 98, Sandia Laboratories, 1969
- [60] R. J. McCaffery
 "Solutions of impact problems for structural dynamic analysis"
 Second ASCE specialty conference on
 'Structural Design of Nuclear Plant Facilities'
 Vol. II, 47-104, 1975
- [61] H. Petersson
 "Application of the finite element method in the analysis
 of contact problems"
 International Conference on Finite Elements in
 Nonlinear Solid and Structural Mechanics,
 GO 2.1 - GO 2.17, 1977
- [62] Y. Yamada, N. Yoshimura, T. Sakurai
 "Plastic stress-strain matrix and its application for the
 solution of elastic-plastic problems by the finite
 element method"
 Int. J. Mech. Sci. 10, 343-354, 1968

- [63] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan, I. P. King
 "Elasto-plastic solutions of engineering problems
 'initial stress', finite element approach"
 Int. J. Num. Meth. Engineering 1, 75-100, 1969
- [64] P. V. Marcal
 "Finite element analysis with material nonlinearities,
 theory and practice"
 US-Japanese Sem. Recent Advances Matrix Methods Struc.
 Analysis and Design, 257-282, 1971
- [65] J. A. Stricklin, W.E. Haisler, W.A. Von Rieseemann
 "Formulation, computation, and solution procedures for
 material and/or geometric nonlinear structural analysis
 by the finite element method"
 Sandia Laboratories Report SC-CR-72 3102, 1972
- [66] J. H. Argyris, A.S.L. Chan
 "Applications of finite elements in space and time"
 Ing.-Archiv 41, 235-257, 1972
- [67] M. Hartzmann, J. R. Hutchinson
 "Nonlinear dynamics of solids by the finite element method"
 Computers a. Structures 2, 47-77, 1972
- [68] G. C. Nayak, I. C. Zienkiewicz
 "Elasto-plastic stress analysis. A generalization for
 various constitutive relations including strain softening"
 Int. J. Num. Meth. Engineering 5, 113-135, 1972
- [69] H. A. Armen, Jr.
 "Plastic analysis"
 Erschienen in: W. Pilkey, K. Saczalski, H. Schaeffer
 'Structural mechanics computer programs'
 1974
- [70] J. H. Biffle, E. B. Becker
 "Finite element stress formulation for dynamic
 elastic-plastic analysis"
 Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering 6, 101-119, 1975
- [71] D. Bushnell
 "A strategy for the solution of problems involving
 large deflections, plasticity and creep"
 Int. J. Num. Meth. Engineering 11, 683-708, 1977
- [72] G. L. Goudreau
 "Evaluation of discrete methods for the linear dynamic
 response of elastic and viscoelastic solids"
 Report No. 69-15, Univ. California, Berkeley, 1970
- [73] R.S. Dunham, R.E. Nickell, D.C. Stickler
 "Integration operators for transient structural response"
 Comp. Struct. 2, 1-15, 1972
- [74] R. D. Krieg, S. W. Key
 "Transient shell response by numerical time integration"
 2nd US-Japan Seminar on Matrix Meth. Struc. Analysis,
 237-258, 1972
- [75] M. Geradin
 "A classification and discussion of integration operators
 for transient structural response"
 AIAA 12th Aerospace Sciences Meeting 1-16, 1974
- [76] H. M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor
 "Improved numerical dissipation for time integration
 algorithms in structural dynamics"
 Earthquake Engineering Struc. Dyn. 5, 283-292, 1977
- [77] E. A. Witmer, H. A. Balmer
 "Large dynamic deformations of beams rings, plates,
 and shells"
 AIAAJ 1, 1848-1857, 1963

- [78] R. S. Ayre, J. R. Mays
"Transient dynamic response of some nonlinear structural systems"
Computers a. Structures 1, 511-534, 1971
- [79] J. H. Heifitz, C. J. Costantino
"Dynamic response of nonlinear media at large strains"
J. Engineering Mech. Div. EM6, 1511-1528, 1972
- [80] G. Weeks
"Temporal operators for nonlinear structural dynamic problems"
J. Engineering Mech. Div. EM 5, 1087-1104, 1972
- [81] R. W. Clough, K. J. Bathe
"Finite element analysis of dynamic response"
Proc. 2nd US-Japan Seminar Matrix Methods Struc. Analysis, 153-179, 1972
- [82] R.W.H. Wu, E. A. Witmer
"Nonlinear transient responses of structures by the spatial finite-element method"
AIAAJ 11, 1110-1117, 1973
- [83] J. H. Argyris, P.C. Dunne, T. Angelopoulos
"Non-linear oscillations using the finite element technique"
Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering 2, 203-250, 1973
- [84] Y. Nakao, S. Takano
"Elasto-plastic seismic response analysis of framed structures by mode superposition"
Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, 423-440, 1973
- [85] D. B. Wallace, A. Seireg
"A finite element based procedure for simulating the transient response and failure of a two-dimensional continuum with nonlinear material characteristics"
J. Engineering Industry, 345-352, 1973
- [86] J. F. McNamara, P. V. Marcal
"Incremental stiffness method for finite element analysis of the nonlinear dynamic problem"
Erschienen in: N. Perrone
'Numerical and computer methods in structural mechanics', 353-376, 1973
- [87] J.A. Stricklin, W. E. Haisler
"Survey of solution procedures for nonlinear static and dynamic analysis"
Int. Conf. Vehicle Struc. Mech., 1-17, 1974
- [88] J. F. McNamara
"Solution schemes for problems of nonlinear structural dynamics"
J. Pressure Vessel Techn., 1-7, 1974
- [89] D. A. Pecknold
"Inelastic structural response to 2D ground motion"
J. Engineering Mech. Div. EM5, 949-963, 1974
- [90] S. Nagarajan, E. P. Popov
"Elastic-plastic dynamic analysis of axisymmetric solids"
Comp. Struct. 4, 1117-1134, 1974
- [91] T. Belytschko
"Transient analysis"
Erschienen in: W. Pilkey et al
'Structural mechanics computer programs', 255-276, 1974
- [92] K.J. Bathe, H. Ozdemir, E.L. Wilson
"Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis"
Univ. California, Berkeley, UCSESM 74-4, 1974

- [93] V. F. Dunder, K. J. Bathe
"Choice and application of computer programs in pipe whip analysis"
Structural Design of Nuclear Plant Facilities, Vol. II, 379-396, 1975
- [94] J. R. Tillerson
"Selecting solution procedures for nonlinear structural dynamics"
The Shock and Vibration Digest Bd. 7, 2-13, 1975
- [95] T. Belytschko, R.L. Chiapetta, H.D. Bartel
"Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements"
Int. J. Num. Meth. Engineering 10, 579-596, 1976
- [96] T. Belytschko, I. R. Mullen
"Explicit integration of structural problems"
Inter. Conf. Finite Element Nonlin. Sol. Struc. Mech., 1977
- [97] D. P. Mondkar, G. H. Powell
"Finite element analysis of non-linear static and dynamic response"
Int. J. Num. Meth. Engineering 11, 499-520, 1977
- [98] R. J. Wasley
"Propagation of stress disturbances in elastic-plastic cylinders: one-dimensional theories"
Report UCRL-14617, 1965
- [99] P. Matthieu
"Theoretische Behandlung von Stoßproblemen"
VDI-Berichte Nr. 135, 1969
- [100] B. Schmidt
"Problem- und Modellvorstellung bei Stößen"
VDI-Berichte Nr. 132, 1970
- [101] W. Herrmann, L.D. Bertholf, S.L. Thompson
"Computational methods for stress wave propagation in nonlinear solid mechanics"
Erschienen in: A. Dold, B. Eckmann
'Computational Mechanics'
Lecture Notes in Mathematics 461, 91-126, 1975
- [102] K. K. Gupta
"Dynamic response analysis of geometrically nonlinear structures subjected to high impact"
Int. J. Numerical Methods in Engineering 4, 163-174, 1972
- [103] G. J. Bohm, A. N. Nahavandi
"Dynamic analysis of reactor internal structures with impact between components"
Nuclear Science and Engineering 47, 391-408, 1972
- [104] A. Morrone, A.N. Nahavandi, W.G. Brussalis
"Scram and nonlinear reactor system seismic analysis for a liquid metal fast reactor"
Internat. Seminar on "Extreme Load Conditions and Limit Analysis Procedures for Structural Reactor Safeguards and Containment Structures"
Paper U 5/7, 1975
- [105] S. Dubowsky, F. Freudenstein
"Dynamic analysis of mechanical systems with clearances"
J. Engineering for Industry, 305-316, 1971
- [106] R.C. Winfrey, R.V. Anderson, C.W. Guilka
"Analysis of elastic machinery with clearances"
J. Engineering for Industry, 695-703, 1973

- [107] H. Nuno, M. Mizuta, K. Kitade, I. Sarayama
 "A method of colliding vibration analysis of PWR fuel assemblies under seismic condition"
 Preprints of 2nd international conference on "Structural Mechanics in Reactor Technology"
 Paper K6/10, 1973
- [108] J.S. Lien, R. P. Kassawara, H.B. Smith
 "Dynamic analysis of piecewise linear structures"
 Second ASCE specialty Conference on 'Structural Design of Nuclear Plant Facilities', 1592-1621, 1975
- [109] C. Visser, A. J. Molnar
 "Piping Systems"
 Erschienen in: W. and B. Pilkey
 'Shock and vibration computer programs', 373-398, 1975
- [110] K. N. Lee, R. J. Hollmeier
 "Gapped restraints and pipe whipping"
 Transactions of the 4th international conference on 'Structural Mechanics in Reactor Technology'
 Paper F 4/2, 1977
- [111] W. Matthees
 "Dynamische Analyse eines vorgespannten Berstschutzsystems unter stoßartiger Beanspruchung"
 Gutachten von der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), 27.10.1977,
 Gesch.-Z.: RS I 2-510 312/67-SR 42 für den Bundesminister des Innern
- [112] D. T. Ramani
 "Intrans"- A Computer code for the non-linear structural response analysis of reactor internals under transient loads.
 Transactions of the 4th international conference on 'Structural Mechanics in Reactor Technology'
 Paper M 1/2, 1977
- [113] B. J. Lazan, L. E. Goodman
 "Material and interface damping"
 Shock und vibration handbook, Vol. 2,
 McGraw Hill, 1961
- [114] B. J. Lazan
 "Damping of materials and members in structural mechanics"
 Pergamon Press, 1968
- [115] C. C. Lo
 "Vibrations of beams with hysteresis damping"
 J. Acoust. Soc. Am., 912-918, 1972
- [116] S. H. Crandall
 "The role of damping in vibration theory"
 J. Sound. Vib., 3-18, 1970
- [117] F. C. Nelson, R. Greif
 "Damping"
 Erschienen in: W. B. Pilkey
 'Shock and vibration computer programs', 1975
- [118] J. Wilson
 "Transient response of structures"
 Erschienen in: C. A. Brebbia
 'Vibration of engineering structures', Gresham Press, 1976
- [119] KWU-Sicherheitsbericht, Kernkraftwerk mit Druckwasserreaktor BASF/AG, 1975
- [120] Sicherheitsgutachten vom TÜV Rheinland e.V. zur Errichtung eines 2340 MWth-Kraftwerkes der BASF mit einem KWU-Druckwasserreaktor auf dem Werksgelände in der Stadt Ludwigshafen für das atomrechtliche Genehmigungsverfahren, Februar 1976

DARSTELLUNG DER ELEMENTEIGENSCHAFTEN

A 1. Ermittlung des Verschiebungszustandes

Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen definiert [N] das Verschiebungsfeld des Systems und bezieht die Systemdeformationen (u) auf den Verschiebungszustand (v) beliebiger Systempunkte:

$$(u) = [N] (v) , (\dot{u}) = [N] (\dot{v}) , (\ddot{u}) = [N] (\ddot{v}) , \quad (A 1.1)$$

mit:

$$(u)' = (u_x , u_y , u_z)$$

$$(v)' = (v_1 , v_2 , \dots , v_n) .$$

Gleichzeitig ist durch [N] der Dehnungszustand bestimmt:

$$(\varepsilon) = [B] (v) , \quad (A 1.2)$$

[B] entsteht durch Differenzieren von [N] nach dem Ort.

Der Näherungsansatz (u) = [N] (v) läst für statische Probleme immer eine beliebig genaue Lösung zu. Im dynamischen Belastungsfall dagegen muß mindestens sichergestellt sein, daß das System in eine ausreichende Anzahl von Freiheitsgraden unterteilt ist, damit der gesuchte Ergebnisverlauf konsistent, d.h. unabhängig von einer noch feineren Unterteilung des Systems wird.

Unter Berücksichtigung von (A1.1), (A 1.2) und der linear elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung:

$$(\sigma) = [D] (\varepsilon) , (\varepsilon) = [D]^{-1}(\sigma) = [E] (\sigma) , \quad (A 1.3)$$

[D] enthält das Hooke'sche Gesetz, lauten die Energieausdrucke am diskreten System:

$$\delta W = \int_V \delta (v)' [B]' [D] [B] (v) dV ,$$

$$\delta A_a = \int_O \delta (v)' [N]' (p_o) dO + \int_V \delta (v)' [N]' (p_v) dV + \delta (v)' (P) ,$$

$$\delta E_K = - \int_V \int \delta (v)' [N]' [N] (\ddot{v}) dV$$

Unter Berücksichtigung von (3.13) lautet (3.11):

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V d(v)' [B]' [D] [B] (v) dV + \int_V \int d(v)' [N]' [N] (\ddot{v}) dV \right. \\ \left. - \int_O d(v)' [N]' (p_o) dO - \int_V d(v)' [N]' (p_v) dV - d(v)' (P) \right\} dt = 0 ,$$

Da der Ergebnisverlauf unabhängig von der virtuellen Verschiebung (u) und somit nach (3.12) auch unabhängig vom Differential d(v) ist, gilt bei nicht vorhandenen Oberflächen- und Volumenkraften:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V [B]' [D] [B] (v) dV + \int_V \int [N]' [N] (\ddot{v}) dV - (P) \right\} d(v)' dt = 0 .$$

Damit diese Bedingung im allgemeinen Fall erfüllt wird, muß der Klammerausdruck identisch Null sein:

$$[K] \cdot (v) + [M] \cdot (\ddot{v}) = (P) \quad (A 1.4)$$

hierbei sind:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]' [D] [B] dV, \\ [M] &= \int_V \rho [N]' [N] dV \end{aligned} \quad (A 1.5)$$

die Steifigkeits- und Massenmatrix des Systems.

Die Lagrangesche Gleichung (3.11) läßt sich um den Arbeitsanteil, den die Dämpfungskräfte an der virtuellen Verrückung leisten, erweitern. In Anlehnung an den Lösungsansatz für linear viskose Dämpfung des Einmassenschwingers lautet die virtuelle Dämpfungsarbeit am diskreten System:

$$\delta A_c = \int_V \delta (v)' [C] (\dot{v}) dV$$

Die vervollständigte Bewegungsgleichung hat somit die Form:

$$[M] \cdot (\ddot{v}) + [C] \cdot (\dot{v}) + [K] \cdot (v) = (P) \quad (A 1.6)$$

Der Deformationsverlauf des diskreten Systems wird durch den Zustandsvektor: $(v) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

hervorgerufen durch den Belastungsvektor

$$(P) = (P_1, P_2, \dots, P_n) \text{ gekennzeichnet.}$$

Der Deformationszustand eines eindimensionalen Elementes k_1, k_2 ist durch die 12 Knotendeformationen der Knoten k_1, k_2 definiert;

Längs-, Quer- und Torsionsdeformationen sind nach Abb. A.1 nicht miteinander gekoppelt:

$$(v) = (v_{k1x}, v_{k1y}, v_{k1z}, \varphi_{k1x}, \varphi_{k1y}, \varphi_{k1z}, v_{k2x}, v_{k2y}, v_{k2z}, \varphi_{k2x}, \varphi_{k2y}, \varphi_{k2z})$$

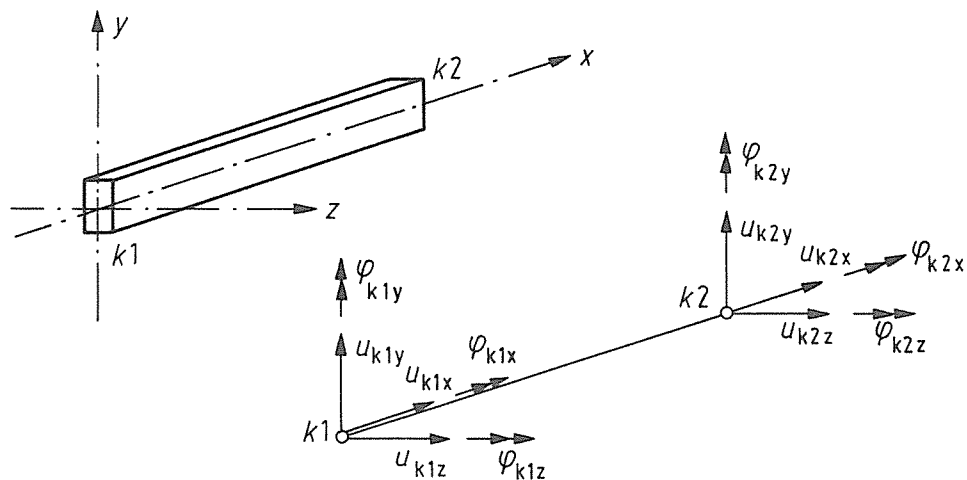


Abb. A.1 Knotendeformationen eines Elementes k_1, k_2

(Positivbild)

A 2. Ermittlung der Elementsteifigkeit im lokalen Koordinatensystem

Zur Herleitung der Steifigkeitsmatrix $[k]$ für ein eindimensionales Element dient das Prinzip von Castigliano:

$$\frac{\partial W}{\partial (\underline{v})} = (\underline{P}) \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial (\underline{P})} = (\underline{v}) \quad (A 2.1)$$

W ist die Formänderungsenergie eines eindimensionalen Elementes:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{\sigma})' (\underline{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\varepsilon})' (\underline{\sigma}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{v})' [\underline{b}]' [\underline{d}] [\underline{b}] (\underline{v}) dV \\ &= \frac{1}{2} (\underline{v})' [k] (\underline{v}) \end{aligned} \quad (A 2.2)$$

Die Definition der zu den Knotendeformationen von Abb. A.1 gehörenden Knotenbelastungen des Elementes k_1, k_2 zeigt Abb. A.2.

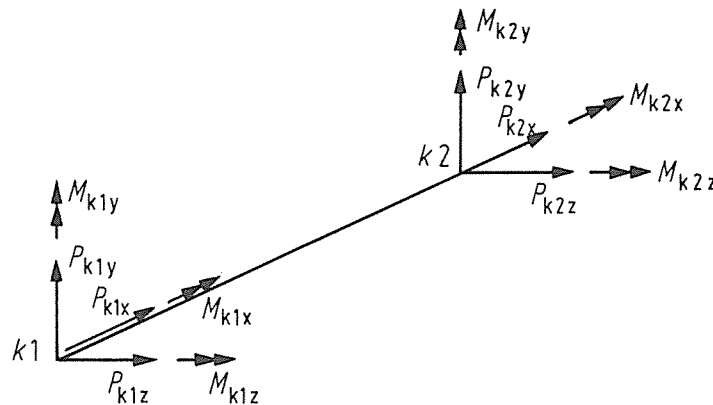


Abb. A.2 Randschnittlasten eines Elementes k_1, k_2

(Positivbild)

Unter Berücksichtigung von (A 2.1) und (A 2.2) ergeben sich die Komponenten der Elementsteifigkeitsmatrix aus der Ableitung der Formänderungsenergie:

$$[k] = \frac{\partial^2 W}{\partial (\underline{v}) \partial (\underline{v})'} \quad (A 2.3)$$

Der Anteil der Längssteifigkeit eines Elementes läßt sich aber auch direkt aus dem linearen Ansatz mit der Definition in (A 1.1):

$$(u) = u = a_1 + a_2 x = [1 \quad x] (a_1 \quad a_2) \quad \text{und}$$

$$(\underline{v}) = \begin{pmatrix} v_{k1x} \\ v_{k2x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = [DA] (a) \quad \text{herleiten,}$$

l ist die Elementlänge.

Mit der Umkehrung:

$$(a) = [DA]^{-1} (\underline{v})$$

lautet (A 1.1):

$$\begin{aligned} \{u\} &= [1 \ x] [DA]^{-1} \{\underline{v}\} \\ &= \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \ \frac{x}{l} \right] \{\underline{v}\} = [\underline{n}] \{\underline{v}\} \end{aligned} \quad (A 2.4)$$

Die Dehnung ergibt sich aus (A 1.2):

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [\underline{n}] \right\} \{\underline{v}\} \\ &= \left[-\frac{1}{l} \ \frac{1}{l} \right] \{\underline{v}\} = [\underline{b}] \{\underline{v}\}. \end{aligned} \quad (A 2.5)$$

Mit $[\underline{d}] = E$ lauten (A 2.2) und (A 2.3):

$$\begin{aligned} [\underline{k}] &= \int_0^l \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{E}{l} [-1 \ 1] F \, dx \\ &= \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A 2.6)$$

Die Torsionssteifigkeit ergibt sich in gleicher Weise.

Zur Ermittlung der Biegesteifigkeit wird die Biegelinie durch ein kubisches Polynom interpoliert. Diese Funktion muß nach dem Ritz'schen Verfahren Deformationskompatibilität und Kräftegleichgewicht als Randbedingung erfüllen. Das Verschiebungsfeld wird definiert durch:

$$\begin{aligned} \{u\} &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = [X] \{a\}. \end{aligned}$$

Die Ableitung von $\{u\}$ ergibt die Neigung bzw. die Drehung der Biegelinie:

$$\{u'\} = [X'] \{a\} = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \{a\}.$$

Die Enddeformationen in der x-y Ebene sind definiert durch:

$$\{\underline{v}\} = \begin{pmatrix} v_{k1y} \\ v'_{k1y} \\ v_{k2y} \\ v'_{k2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x=0} \\ u'_{x=0} \\ u_{x=l} \\ u'_{x=l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{k1z} \\ \varphi_{k1y} \\ v_{k2z} \\ \varphi_{k2y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \{a\},$$

oder:

$$\{\underline{v}\} = [DA] \{a\}.$$

Nach der Umkehrung lautet (A 1.1):

$$\begin{aligned} \{u\} &= [X] \{a\} = [X][DA]^{-1} \{\underline{v}\} \\ &= [\underline{n}] \{\underline{v}\} \end{aligned} \quad (A 2.7)$$

wobei:

$$[DA]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} .$$

Mit: $(u'') = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [\underline{n}] \} (\underline{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \{ [X] [DA]^{-1} \} (\underline{v})$
 $= [0 \ 0 \ 2 \ 6x] [DA]^{-1} (\underline{v})$,
 $(\varepsilon) = \underline{y} (u'') = \underline{y} [0 \ 0 \ 2 \ 6x] [DA]^{-1} (\underline{v})$
 $= \left[\underline{y} \left(\frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \right) \ \underline{y} \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \right) \ \underline{y} \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \ \underline{y} \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \right) \right] (\underline{v})$
 $= [\underline{b}] (\underline{v}) \tag{A2.8}$

und $[\underline{d}] = E$ lauten (A 2.2) und (A 2.3) für den zweiseitig eingespannten Stab:

$$[\underline{k}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{l^3} & & & \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{4EJ_z}{l} & & \\ -\frac{12EJ_z}{l^3} & -\frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{12EJ_z}{l^3} & \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{2EJ_z}{l} & -\frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{4EJ_z}{l} \end{bmatrix} \tag{A 2.9}$$

symmetrisch

Der Einfluß der Schubverformung auf den Deformationszustand kann durch die Schubverteilungszahl κ erfaßt werden:

$$\kappa_y = \frac{F}{J_z^2} \left(\frac{s_z^2}{b^2} \right) dF \quad , \quad \kappa_z = \frac{F}{J_y^2} \left(\frac{s_y^2}{\tilde{b}^2} \right) dF .$$

In der Schreibweise mit der bezogenen Schubverteilungszahl ϕ_y, ϕ_z :

$$\phi_y = \kappa_y \frac{12EJ_z}{Gl^2 F} \quad , \quad \phi_z = \kappa_z \frac{12EJ_y}{Gl^2 F} \tag{A 2.10}$$

lautet die Gesamtsteifigkeitsmatrix für ein allseitig eingespanntes Element:

A 3. Ermittlung der Elementmasse im lokalen Koordinatensystem

Es kann allgemein nachgewiesen werden, daß ein Verschiebungsfeld in der Form von (A 1.1): $\{u\} = [N] \{v\}$ für beliebige dynamische Randbedingungen eines Elementes nicht realisierbar ist. Das Verschiebungsfeld ist abhängig von dem gesamten vorhergehenden Verschiebungsverlauf der Randverformungen. Exakte Lösungsansätze existieren nur für die speziellen Randbedingungen der statischen oder harmonischen Randdeformation $\{v\}$, die Massen- und Steifigkeitsmatrix sind dann frequenzabhängig. Näherungsansätze bietet die Annahme eines statischen Verschiebungsfeldes. Die Genauigkeit der mit diesen Ansätzen erzielbaren Lösungen bedarf in jedem Fall je nach Konfiguration des vorgegebenen Systems hinsichtlich der Feinheit der Modelldiskretisierung und der Art der Beanspruchung einer besonderen Untersuchung.

Die Wahl der Interpolationsfunktion $[N]$ ist von wesentlichem Einfluß auf die Darstellung der Massenmatrix. Eine Möglichkeit besteht darin, dieselben Funktionen, die zur Formulierung der Steifigkeitsmatrix führten, zu benutzen. Unter dieser Voraussetzung entspricht der Wert des Ausdrucks der kinetischen Energie des Elementes demjenigen der potentiellen Energie. Erfüllen diese Ansatzfunktionen die geometrischen Randbedingungen, so ergeben sich nach dem Ritz'schen Verfahren die oberen Grenzen der Eigenfrequenzen. Man nennt die entstehende Massenmatrix konsistent.

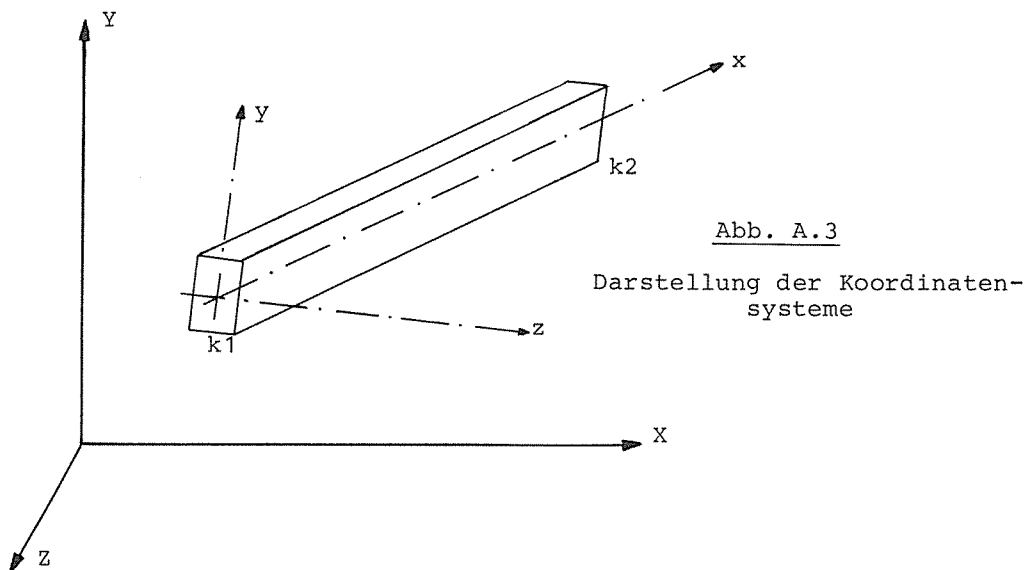
Das Anwenden konsistenter Massenmatrizen bedeutet eine Steigerung der Lösungsgenauigkeit bei erhöhtem rechnerischen Aufwand. Deshalb werden die Massenmatrizen vielfach durch die Benutzung vereinfachter Ansatzfunktionen aufgestellt. Am einfachsten ist es, für $[N] = [I]$, d.h. die Einheitsmatrix anzusetzen, also den Verformungsverlauf auf die Knotenverformung zu beschränken.

Die Massen sind dann in den Knotenpunkten als konzentrierte Massen vorhanden und werden den entsprechenden Knotenfreiheitsgraden zugeordnet. In diesem Fall wird die Massenmatrix diagonal (Punktmassen der lumped mass matrix).

Aus Punktmassen- und konsistenten Massenmatrizen ergeben sich bei eindimensionalen Elementen Abweichungen der gleichen Größenordnung zu den exakten Systemeigenformen, wobei aber die Eigenfrequenzen von Punktmassensystemen kleiner als die natürlichen Eigenfrequenzen sind.

A 4. Transformation des Elementarstabkoordinatensystems

Die im allgemeinen räumlichen Falle mitlaufenden Koordinatensysteme x, y, z der Hautträgheitsachsen der Elementarstäbe sind nach Abb. A.3 auf ein raumfestes Bezugskoordinatensystem X, Y, Z zu beziehen. Dadurch wird erreicht, daß sich die Randschnittlasten mehrerer in einem Knoten zusammentreffender Stäbe überlagern lassen. Die Lage des Bezugssystems selbst ist beliebig.



Die Transformationsmatrix $[T]$ überführt die Deformationen des lokalen Systems (\underline{v}) auf die Deformationen (\underline{v}) des globalen Systems:

$$[\underline{v}] = [T] (\underline{v})$$

Unter Benutzung des Prinzips der virtuellen Verschiebung, nach der die geleistete virtuelle Arbeit unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist, ergeben sich für das globale System:

$$\begin{aligned} [k] &= [T]' [k] [T] , \\ [m] &= [T]' [m] [T] , \\ (\underline{P}) &= [T]' (P) . \end{aligned} \quad (A 4.1)$$

A 5. Zusammenstellung des Gesamtsystems

Die elementweise formulierten Differentialgleichungen:

$$[m] \ddot{\underline{v}} + [c] \dot{\underline{v}} + [k] \underline{v} = \underline{P}$$

werden so umgeordnet, daß der zu ermittelnde Lösungsverlauf dem gewählten Deformationsvektor (\underline{v}) zugeordnet werden kann. Die den einzelnen Elementen zugeordneten Größen $[k]$ und $[m]$ werden dem vorliegenden Schema entsprechend aufgeteilt und gliedweise überlagert. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Ver-rückungen erzeugt die Zuordnungsmatrix $[A]$ den systematischen Vektor (\underline{v}):

$$\underline{v} = [A] \underline{v} .$$

Da die Reihenfolge der Summierung keinen Einfluß auf die geleistete virtuelle Arbeit haben darf, folgt:

$$\begin{aligned} [K] &= [A]^T [k] [A] , \\ [M] &= [A]^T [m] [A] , \\ (P) &= [A]^T \underline{P} . \end{aligned}$$

A 6. Berücksichtigung der Randbedingungen

Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ repräsentiert die Steifigkeitsverhältnisse eines freien Systems, also ohne Auflager. Das setzt voraus, daß der Belastungsvektor (P) ein Gleichgewichtssystem bilden muß. Bei einer endlichen Anzahl beliebiger Belastungskomponenten wird eine bestimmte Anzahl von abhängigen Belastungen (Reaktionen) vorausgesetzt, die mit dem beliebigen Belastungssystem ein Gleichgewichtssystem bilden. Diese abhängigen Reaktionen bestehen im räumlichen Fall aus mindestens 6 Komponenten und entsprechen den 6 Festkörperfreiheitsgraden. Diese Abhängigkeiten lassen $[K]$ singular werden und müssen deshalb eliminiert werden.

Der Belastungsvektor (P) wird deshalb in einen Lastvektor (P_L) für eingeprägte Lasten und in einen Reaktionsvektor für Auflagerlasten (P_R) geordnet, desgleichen $[K]$ und (v) :

$$\begin{pmatrix} P_L \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit $(P_L) = [K_{LL}] (v)$ ergeben sich die Auflagerreaktionen unter der Belastung (P_L) zu:

$$(P_R) = [K_{RL}] (v) = [K_{RL}] [K_{LL}]^{-1} (P_L) . \quad (A 6.1)$$

Für bekannte, d.h. eingeprägte Knotendeformationen gilt ähnlich:

$$\begin{pmatrix} P_L \\ P_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{L\Delta} \\ K_{\Delta L} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \Delta \end{pmatrix} ,$$

(Δ) ist der Vektor der eingepprägten Knotendeformationen, (P_Δ) der dazugehörige Belastungsvektor.

Die unbekanntenen Knotendeformationen ergeben sich dann aus:

$$(v_L) = [K_{LL}]^{-1} \{ (P_L) - [K_{L\Delta}] (\Delta) \} . \quad (A 6.2)$$

$[K_{L\Delta}] (\Delta)$ ist ein fiktiver Belastungsvektor, der am Restsystem die eingepprägten Deformationen simuliert.

Zur Umordnung der Massenmatrix wird das gleiche Umordnungsschema benutzt, die reduzierten Matrizen $[K_{LL}]$ und $[M_{LL}]$ sind identisch mit den in (A 1.6) formulierten Systemgrößen.

MODALE ANALYSE GEDÄMPFTER DISKRETER SYSTEME IM LINEAR ELASTISCHEN BEREICH

B 1. Viskos gedämpfte Einmassenschwinger

Die Bewegungsgleichung linear viskos bzw. hysteretisch gedämpfter Einmassenschwinger hat entsprechend (A 1.6) die Form:

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + kv = P \quad \text{bzw.} \quad (B 1.1a)$$

$$m \ddot{v} + kM \frac{\dot{v}}{|v|} \zeta + kv = P \quad (B 1.1b)$$

Die homogene Lösung von (B 1.1a) für schwache Dämpfung lautet mit:

$$\omega^2 = k/m \quad (B 1.2a)$$

$$\omega_c^2 = \omega^2 - (c/2m)^2 \quad (B 1.2 b)$$

$$c_{kr} = 2 \sqrt{km} = 2 m \omega = 2k/\omega \quad (B 1.2c)$$

$$\beta = c/c_{kr} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c\omega}{2k} \quad (B 1.2d)$$

wobei c die kritische Dämpfung und β das Dämpfungsverhältnis sind:

$$\begin{aligned} v &= e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 \sin \omega_c t + C_2 \cos \omega_c t) \\ &= e^{-\beta\omega t} (C_1 \sin \omega_c t + C_2 \cos \omega_c t) \\ &= e^{-\beta\omega t} (D_1 e^{i\omega_c t} + D_2 e^{-i\omega_c t}) \end{aligned} \quad (B 1.3a)$$

Der stationäre Anteil des Deformationsverlaufes bei harmonischer Erregung: $P = P_0 \sin \Omega t$ ergibt sich aus dem Ansatz:

$$v_s = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t$$

zu:

$$v_s = D \frac{P_0}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) \sin \Omega t - 2 \frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t \right], \quad (B 1.3b)$$

bzw. in komplexer Schreibweise für: $P = P_0 e^{i\Omega t}$:

$$v_s = D^* \frac{P_0}{k} e^{i\omega t} \quad (B 1.3c)$$

Die dynamische Vergrößerungsfunktion lautet:

$$D = \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\beta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \right]^{-1}$$

bzw.
$$D^* = \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 + i 2\beta \frac{\Omega}{\omega} \right]^{-1} .$$

Durch den Verlustfaktor η kann die in einem Zyklus bei harmonischer Bewegung dissipierte Energie bezogen auf die Formänderungsenergie ausgedrückt werden:

$$\eta = \frac{A_c}{2\pi W} . \quad (B 1.4)$$

Für den zur praktischen Anwendung kommenden Bereich gilt:

$$\eta = 10^{-5} \text{ bis } 2 \cdot 10^{-1} .$$

Der Verlustfaktor hängt allgemein von der Frequenz und von der Amplitude ab.

Ein anderes Maß für die dissipierte Energie ist das logarithmische Dekrement δ_0 :

$$\delta_0 = \ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\pi c}{m \omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\pi \eta}{\sqrt{1-\eta^2/4}} \approx \pi \eta . \quad (B 1.5)$$

Für linear viskose Dämpfung lautet die in einem Zyklus dissipierte Energie:

$$A_c = 2\beta \pi k v_{\max}^2 = \pi c \omega v_{\max}^2 , \quad (B 1.6a)$$

bzw. bei harmonischer Erregung mit der Frequenz Ω :

$$A_c = \pi c \Omega v_{\max}^2 . \quad (B 1.6b)$$

Bei Resonanz, d.h. $\Omega \rightarrow \omega$ kann die Dämpfung aus dem Arbeitsdiagramm der Dämpfungskraft P_c nach Abb. B.1 bestimmt werden:

$$c = \frac{P_c \max}{\dot{v}_{\max}} = \frac{P_c \max}{\omega v_{\max}} . \quad (B 1.7)$$

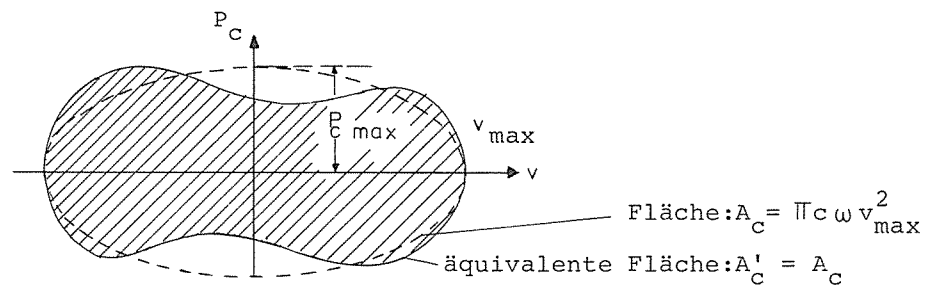


Abb. B.1

Arbeitsdiagramm für viskose Dämpfung [12]

Für linear viskose Dämpfung ist das Arbeitsdiagramm eine Ellipse. Das Arbeitsdiagramm für nichtlinear viskose Dämpfung ist nicht elliptisch, durch einen äquivalenten viskosen Dämpfungskoeffizienten c_{eq} kann aber die dissipierte Energie durch Flächengleichheit auf ein elliptisches Diagramm gleicher Fläche bezogen werden:

$$P_{c \max} = \frac{A' c}{\pi v_{\max}}$$

Der äquivalente viskose Dämpfungskoeffizient lautet mit (B 1.7):

$$c_{eq} = \frac{A' c}{\pi \omega v_{\max}^2} \quad (\text{B 1.8a})$$

oder in frequenzunabhängiger Schreibweise bezogen auf die kritische Dämpfung:

$$\beta_{eq} = \frac{A' c}{\pi \omega v_{\max}^2} / c_{kr} = \frac{A' c}{\pi \omega v_{\max}^2} / \frac{2k}{\omega} = \frac{A' c}{4 \pi W} \quad (\text{B 1.8b})$$

W ist die linear elastische Formänderungsenergie (Abb. B.2).

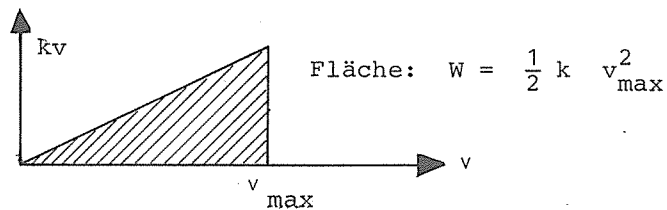


Abb. B.2 Elastisches Arbeitsdiagramm

Für viskose Dämpfung ergibt sich mit (B 1.4), (B 1.6a), (B 1.7) der Verlustfaktor:

$$\eta = 2 \beta = \frac{c_{eq} \omega}{k} \quad (\text{B 1.9a})$$

bzw. für linear viskose Dämpfung:

$$\eta = 2 \beta = \frac{c \omega}{k} \quad (\text{B 1.9b})$$

B 2. Hysteretisch gedämpfte Einmassenschwinger

Die hysteretische oder Strukturdämpfung ist nach (B 1.1b) frequenzunabhängig aber dehnungsamplitudenabhängig. Durch Strukturdämpfung wird die im nichtlinearen Bereich dissipierte Energie wie in Abb. B.3 für elastisch-plastisches Materialverhalten erfaßt,

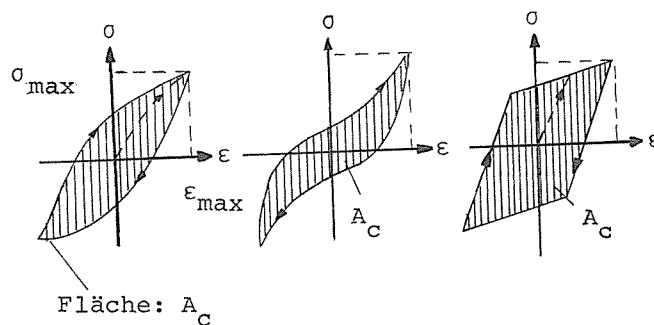


Abb. B.3 Nichtlinear elastisch-plastische Arbeitsdiagramme [114]

B 2.1 Harmonisch erregtes System

Das Arbeitsdiagramm für die Hysteresisdämpfung bei harmonischer Bewegung zeigt Abb. B.4.

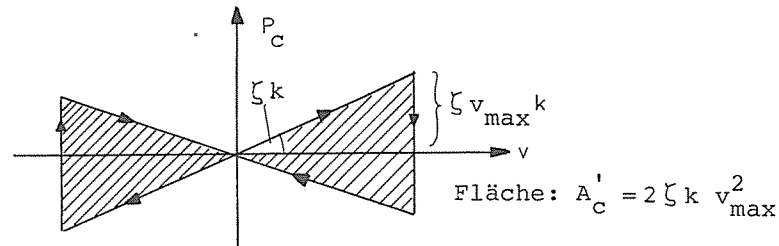


Abb. B.4 Arbeitsdiagramm für hysteretische Dämpfung [12]

Bei harmonischer Erregung kann ein System mit Struktur­dämpfung als viskos gedämpftes System mit äquivalenten viskosen Dämpfungskoeffizienten, der umgekehrt proportional zur Frequenz ist, behandelt werden. Dazu wird die hysteretische Arbeit in (B 1.8a) eingesetzt:

$$c_{\text{eq}} = \frac{2 \zeta k v_{\max}^2}{\pi \omega v_{\max}^2} = \frac{2 \zeta k}{\pi \omega} \quad , \quad (\text{B 2.1a})$$

Das kritische Dämpfungsverhältnis lautet:

$$\zeta = \pi \beta \quad . \quad (\text{B 2.1b})$$

Als frequenzunabhängiger Verlustfaktor folgt mit (B 1.9a):

$$\eta = 2 \beta \quad . \quad (\text{B 2.1c})$$

Die Differentialgleichung bei harmonischer Erregung lautet für den Ansatz der äquivalenten viskosen Dämpfung mit (B 1.1a):

$$m \ddot{v}_s + \frac{2 \zeta k}{\pi \omega} \dot{v}_s + k v_s = P_0 e^{i\omega t} \quad .$$

Mit der Ableitung von (B 1.3c) folgt:

$$m \ddot{v}_s + k (1 + i\eta) v_s = P_0 e^{i\omega t} \quad , \quad (\text{B 2.2a})$$

$\eta = \frac{2 \zeta}{\pi} = 2 \beta$ ist der hysteretische Dämpfungsfaktor, $k (1 + i\eta)$ die komplexe Steifigkeit.

Die Lösung von (B 2.2a) lautet mit (B 1.3c):

$$v_s = \frac{P_0}{k} \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 + i\eta \right]^{-1} e^{i\omega t} \quad . \quad (\text{B 2.3})$$

Im Falle einer nicht harmonischen Erregung kann das mathematische Modell des frequenzproportionalen idealen Dämpfers von (B 2.1a) allgemeingültig nicht mehr aufrechterhalten werden. Es gilt lediglich unter zwei Voraussetzungen als Näherungslösung, sofern die vorgegebene Erregung, z.B. ein Impuls, näherungsweise durch die Frequenz Ω darstellbar ist:

- nur im Resonanzbereich bewirkt der Verlustfaktor η einen unterscheidbaren Einfluß auf das Deformationsverhalten, wie Abb. B.5 für den maximalen stationären Anteil zeigt,
- nur im Resonanzbereich ist deshalb die Übereinstimmung des aktuellen Verlustfaktors mit einem äquivalenten, idealen Verlustfaktor von Bedeutung (Abb. B.6), da der restliche Frequenzbereich bei schwacher Dämpfung keinen wesentlichen Einfluß hat.

Diese Näherung kann unter den genannten Voraussetzungen auf Systeme mit vielen Freiheitsgraden übertragen werden. Die äquivalente Dämpfung wird hierbei jeder Eigenschwingform in solcher Weise zugeordnet, daß der aktuelle Verlustfaktor dann erreicht wird, wenn sich das System in der jeweiligen Resonanzfrequenz der Eigenschwingungsform befindet. Hierdurch wird eine Kopplung der Eigenformen durch die Dämpfung umgangen.

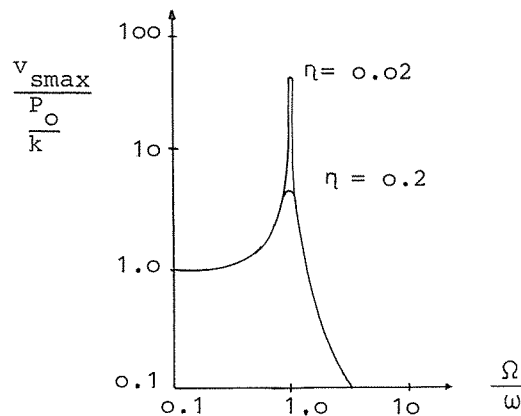


Abb. B.5
Maximale stationäre Deformation eines Ein-Masse-Feder-Systems mit ideal linearer Dämpfung [116]

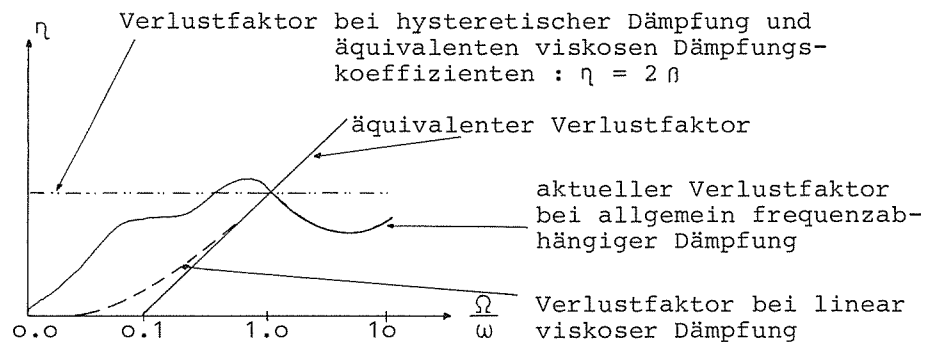


Abb. B.6 Frequenzabhängigkeit des aktuellen Verlustfaktors und des Verlustfaktors bei äquivalenter, idealer Dämpfung [116]

B 2.2 Nicht harmonisch erregtes System

Die mathematisch genaue Lösung der Differentialgleichung bei nicht harmonischer Erregung erfordert die Definition eines beliebig frequenzabhängigen Dämpfers $c(\omega)$, um zwischen Dämpfung und Deformation eine logische Beziehung herstellen zu können. Die Fouriertransformation der Dämpfungskraft:

$$P_c [t] = c \frac{dv [t]}{dt}$$

und der Deformation $v(t)$ in den Frequenzraum ergibt:

$$P_c(\omega) = i\omega c v(\omega) \quad .$$

Da die Verlustfaktoren des aktuellen Dämpfers meistens bei oder in der Nähe von harmonischen Deformationen gemessen werden, d.h. bei

$$c(\omega) = \frac{k \eta(\omega)}{\omega} \quad ,$$

lautet die Rücktransformation:

$$P_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega c(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad , \quad (B 2.4a)$$

bzw.

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega c(\omega)} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} P_c(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad . \quad (B 2.4b)$$

Diese Integrale sind nur für spezielle Ansätze für $c(\omega)$ elementar lösbar. Durch Polynomansätze für $c(\omega)$ lassen sich in allgemeiner Form als Differentialgleichung höherer Ordnung Beziehungen zwischen $P_c(t)$ und $v(t)$ herstellen. Dieser Lösungsweg ist gangbar für Systeme mit einem Freiheitsgrad, nicht aber für komplexe Systeme mit vielen Freiheitsgraden.

Der Lösungsansatz von $c(\omega)$ muß die Kausalität des Deformationsverlaufes gewährleisten, d.h. die Deformation in (B 2.4b) darf nur von der vorhergehenden Erregung $P_c(t)$ abhängen, nicht aber von der zukünftigen Erregung. Diese Forderung ist für den stationären Anteil bei harmonischer Bewegung erfüllt. Hierfür lautet die Differentialgleichung (B 1.1a) im Frequenzraum:

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k) v(\omega) = P(\omega) \quad , \quad (B 2.5a)$$

bzw. für frequenzabhängige Dämpfung:

$$(-m\omega^2 + k(1 + i\eta(\omega))) v(\omega) = P(\omega) \quad . \quad (B 2.5b)$$

Die Rücktransformation von (B 2.5a) bzw. (B 2.5b) ergibt entsprechend (B 1.1a) bzw. (B 2.2a):

$$m \ddot{v}_s + c(\omega) \dot{v}_s + k v_s = P, \quad (B 1.1c)$$

$$m \ddot{v}_s + k(1 + i\eta(\omega)) v_s = P. \quad (B 2.2b)$$

Der Kausalitätsnachweis ist in den meisten Fällen für eine gegebene Funktion $c(\omega)$ schwer zu führen, einfacher kann die Nichtkausalität nachgewiesen werden. In diesen Fällen wird zwar (B 2.4b) erfüllt, das Antwortverhalten läuft aber der Erregung voraus. Dieser nichtkausale Charakter liegt beispielsweise im Falle der linear hysteretischen Dämpfung unter der Einwirkung des Dirac'schen Deltaimpulses $\delta(t)$ vor, wenn wie in der Praxis üblich, anstelle des frequenzabhängigen Verlustfaktors in (B 2.4b) ein konstanter Wert η angesetzt wird.

B 3. Linear viskos gedämpfte Mehrmassensysteme

Für Systeme mit kleiner, in der Konstruktion gleichförmig verteilter Dämpfung kann das homogene Problem des gekoppelten Mehrmassenschwingers (A 1.6) durch den Ansatz:

$$(v) = [\phi] (y) \quad (B 3.1)$$

entkoppelt werden. Mit dem harmonischen Ansatz:

$$(v) = (\phi) y = (\phi) e^{i\omega t} \quad \text{für eine Eigenform bzw.}$$

$$(v) = [\phi](y) = [\phi] (e^{i\omega t}) \quad \text{für alle Eigenformen}$$

$$\text{d.h.} \quad (\ddot{y}) = [-\omega^2] (y) \quad (B 3.2)$$

ergibt sich die Matrix der Eigenvektoren $[\phi]$ aus der Lösung des Eigenwertproblems bei proportionaler Dämpfung:

$$[\omega]^2 [M] (\phi) = [K] (\phi) \quad (B 3.3a)$$

bzw.

$$[M] [\phi] = [K] [\phi] [\Lambda]^{-1} \quad (B 3.3b)$$

Wenn die Dämpfung nicht mehr proportional in den verschiedenen Eigenformen ist, das klassische Eigenwertproblem also nicht mehr vorliegt, findet eine Entkopplung der Schwingungsgleichung durch ein System orthogonaler Eigenvektoren, die dann im komplexen Bereich liegen, für das homogene Problem nur in der Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} [O] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} (\dot{y}) + \begin{bmatrix} -[M] & [O] \\ [O] & [K] \end{bmatrix} (y) = (Y)$$

mit:

$$(y) = \begin{pmatrix} (\dot{y}) \\ (y) \end{pmatrix}, \quad (Y) = \begin{pmatrix} (o) \\ (P) \end{pmatrix}$$

statt.

Durch die lineare Transformation (B 3.1) werden die Dämpfungsglieder von (A 1.6) nur dann entkoppelt, wenn die Dämpfungsmatrix $[C]$ eine lineare Kombination von $[M]$ und $[K]$ ist, also

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (B 3.4a)$$

bzw. durch die Reihenentwicklung:

$$[C] = [M] \sum_b a_b ([M]^{-1} [K])^b \quad (B 3.4b)$$

Nach Linksmultiplikation von (A 1.6) mit $[\phi]'$ und (B 3.1) ergibt sich:

$$[\phi]' [M] [\phi] (\ddot{y}) + [\phi]' [C] [\phi] (\dot{y}) + [\phi]' [K] [\phi] (y) = [\phi]' (P) \quad (B 3.5a)$$

Für ein auf $[M]$ orthonormiertes Eigenvektorsystem folgt mit (B 3.3b):

$$(\ddot{y}) + [\phi]' [C] [\phi] (\dot{y}) + [\Lambda] (y) = [\phi]' (P) \quad (B 3.5b)$$

Für den Fall der proportionalen Dämpfung in der Darstellung von (B 3.4a) bzw. (B 3.4b) in Anlehnung an den gedämpften Einmassenschwinger mit der Bewegungsgleichung (B 1.1a) und der bezogenen kritischen Dämpfung (B 1.2d) lautet das viskose Dämpfungsglied des Mehrmassensystems:

$$[\phi]' [C] [\phi] = [2\beta\omega] = [2\beta\Lambda^{\frac{1}{2}}]$$

und die Differentialgleichung in modaler Form:

$$(\ddot{y}) + [2\beta \omega_i^{\frac{1}{2}}] (\dot{y}) + [\Lambda] (y) = [\Phi] \cdot (P) \quad (B 3.5c)$$

Die Darstellungsweise (B 3.4a) erlaubt eine Ermittlung der modalen Dämpfungsverhältnisse $[\beta]$ in Abhängigkeit von 2 Konstanten a_0, a_1 für 2 Eigenformen. Durch die Festlegung von β für die ersten beiden Eigenformen wird der Anteil der höheren Formen herausgefiltert, es kann dann näherungsweise angenommen werden, daß β nur durch die Systemsteifigkeit festgelegt ist.

Das bezogene Dämpfungsmaß der Eigenform i lautet:

$$\beta_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1\omega_i}{2} \approx \frac{a_1}{2} \omega_i \quad (B 3.6a)$$

Mit (B 1.5) und (B 1.9b) folgt für das logarithmische Dekrement der Eigenform i :

$$\delta_i \approx \pi \eta_i \approx \pi a_1 \omega_i^2 \omega_i / (\phi_i^T [K] \phi_i) = \pi a_1 \omega_i \quad (B 3.6b)$$

Diese Art der Dämpfung kann durch ein Voigt-Modell, bestehend aus einer Feder und einem parallelen Dämpfer nach Abb. B.7 veranschaulicht werden, das logarithmische Dekrement ist hierfür nach Abb. B.8 proportional zur Frequenz.

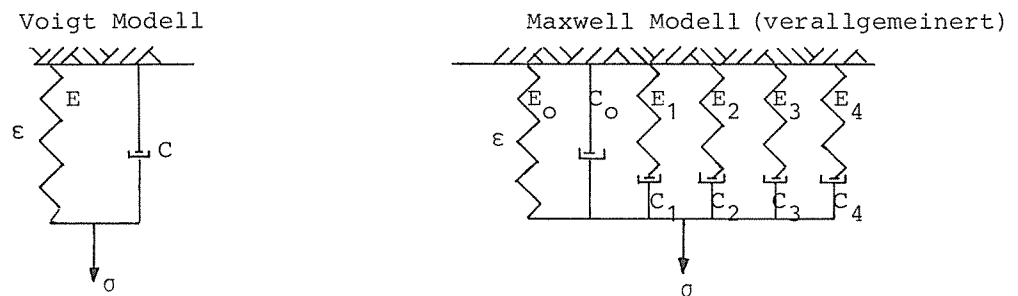


Abb. B.7 Dämpfungsmodelle nach Voigt und Maxwell [118]

Die Dämpfung ist dann nicht unmittelbar auf den Werkstoff bezogen, kann aber in dieser Form behandelt werden. Durch Modifizierung des einfachen Voigt Modells nach Abb. B.7 in ein sog. Maxwell Modell kann das verallgemeinerte linear viskoelastische Werkstoffverhalten dargestellt werden.

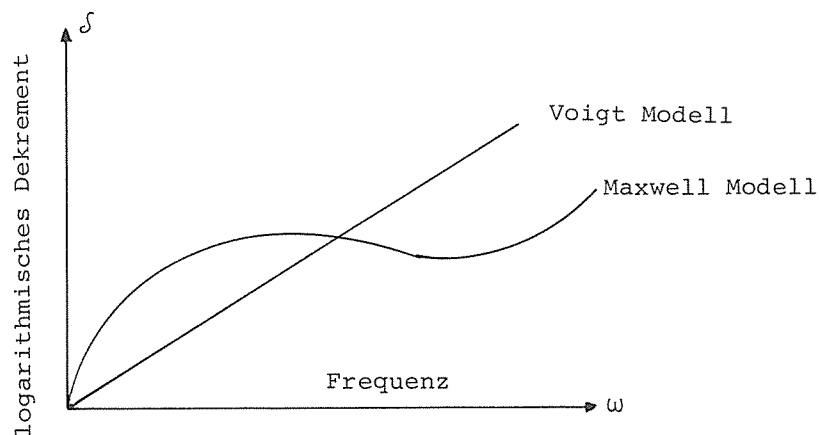


Abb. B.8 Darstellung des logarithmischen Dekrements eines linear viskoelastischen Werkstoffes [118]

Für diesen Werkstoff besteht kein linearer Zusammenhang zwischen logarithmischen Dekrement und Frequenz, wie Abb. B.8 zeigt; die Maxwell'sche Dämpfung entspricht deshalb einem allgemeinen frequenzabhängigen Dämpfer nach Abb. B.6. Auch für das Maxwell'sche Dämpfungsmodell ist eine Entkopplung für (A 1.6) möglich.

In der Darstellungsweise (B 3.4b) kann für alle Eigenformen eine beliebige Dämpfung vorgegeben werden; die großen Zahlenwerte der höheren Frequenzen können aber in der Berechnung auf numerische Probleme führen.

B 4. Modalanalyse diskreter Systeme

Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichung (A 1.6) bieten sich folgende Ansätze:

- Faltungsintegral (Duhamel) für beliebige Last-Zeit-Verläufe,
- Laplace- oder Fourier-Transformation und damit Überführung in ein algebraisches Problem,
- Numerische Integrationsverfahren (gekoppelt, d.h. direkt oder modal entkoppelt),
- Analytische Ansätze bei harmonischer Beanspruchung.

Vorliegend wird die Modalanalyse benutzt, deren Vorteil darin liegt, durch Kenntnis der Systemfrequenzen die gewünschte Genauigkeit der Ergebnisverläufe durch passend gewählte Integrations-schrittweiten erzielen zu können. Außerdem wird durch die Auswahl einer begrenzten Anzahl von mitwirkenden Eigenformen, die das zu lösende Problem angemessen erfassen, die Rechenzeit optimiert.

Zur Entkopplung der Differentialgleichung ist das allgemeine Eigenwertproblem (B 3.3b) zu lösen, dazu sind aus der Literatur folgende Verfahren bekannt:

- Lösung der charakteristischen Gleichung: $|\mathbf{[K]} - [\omega^2]\mathbf{[M]}| = 0$,
- Matrizeniteration der sog. dynamischen Matrix $[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{M}]$, $[\mathbf{F}]$ ist nicht symmetrisch,
- Diagonalisieren durch sukzessive Iteration (z.B. Jacobi Verfahren, Householder-QR-Verfahren),
- Lösung des allg. Eigenwertproblems für nichtsymmetrische $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{M}]$
- Näherungsverfahren:
 - . Rayleigh
 - . Galerkin
 - . Kollokation
 - . Komponenten Eigenform-Synthese.

Unter Ausnutzen der Tatsache, daß $[\mathbf{K}]$ und $[\mathbf{M}]$ positiv definit sind, werden im folgenden Verfahren angewendet, die das allgemeine Eigenwertproblem in ein spezielles Eigenwertproblem der Form:

$$[\Phi][\Lambda] = [\mathbf{A}][\Phi] \quad (\text{B 4.1})$$

überführen.

B 4.1. Modalanalyse von Punktmassensystemen

Die Punktmassenmatrix hat Diagonalform, d.h. ihre Kehrmatrix entsteht durch einfache Kehrwertbildung der Diagonalglieder:

$$[M]^{-1} = [M^{-1}]$$

Mit der Transformation

$$(v) = [M]^{-\frac{1}{2}} (x) \quad (B 4.2)$$

und dem Lösungsansatz

$$(x) = [\phi] (y) \quad (B 4.3)$$

lautet (B 3.3b) :

$$[M]^{-\frac{1}{2}} [\phi] = [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [\phi]$$

Die Linksmultiplikation mit $[M]^{-\frac{1}{2}}$ führt auf:

$$[\phi] [\Lambda] = [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [\phi]$$

$$\text{Mit } [A] = [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} \quad (B 4.4a)$$

ergibt sich das spezielle Eigenwert-Problem (B 4.1), $[A]$ ist positiv definit.

Vorliegend werden die Eigenwerte unter Verwendung des Verfahrens von Jacobi ermittelt. Charakteristisch für das Jacobi-Verfahren ist die Eigenschaft, daß die Eigenwerte etwa mit der gleichen absoluten Genauigkeit anfallen. Sind daher die Werte von unterschiedlicher Größenordnung, so werden die kleinsten, für das vorliegende Problem also wichtigsten Eigenwerte relativ ungenau wiedergegeben. Zur Genauigkeitssteigerung werden deshalb die Kehrwerte der Eigenwerte an der Matrix $[A]^{-1}$ ermittelt. Die Eigenwerte von $[A]$ ergeben sich dann durch Inversion der Eigenwerte von $[A]^{-1}$.

Durch die Inversion von (B 4.1) entsteht:

$$\begin{aligned} [\Lambda]^{-1} [\phi]^{-1} &= [\phi]^{-1} [A]^{-1} \quad \text{bzw.} \\ [A]^{-1} &= [\phi] [\Lambda]^{-1} [\phi]^{-1} \\ [A]^{-1} [\phi] &= [\phi] [\Lambda]^{-1} \end{aligned} \quad (B 4.4b)$$

Die so ermittelten Eigenwerte sind die Kehrwerte der gesuchten Eigenwerte des Problems. Nachdem die Eigenwerte $[\Lambda]$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $[\phi]$ bzw. die Eigenvektoren

$$[\phi_M] = [M]^{-\frac{1}{2}} [\phi] \quad (B 4.4c)$$

ermittelt sind, kann (B 3.5a) numerisch integriert werden:

$$[\phi_M]' [M] [\phi_M] (\ddot{y}) + [\phi_M]' [C] [\phi_M] (\dot{y}) + [\phi_M]' [K] [\phi_M] (y) = [\phi_M]' (P)$$

Für die Eigenvektoren $[\phi]$ besteht die Orthogonalität, d.h.

$$[\phi]' [\phi] = [I] \quad (B 4.5a)$$

bzw.

$$[\phi]' = [\phi]^{-1}$$

Die Eigenvektoren $[\phi_M]$ werden so orthonormiert, daß sich

$$[\phi_M]' [M] [\phi_M] = [I] \quad (B 4.5b)$$

bzw.

$$[\phi_M]^{-1} = [\phi_M]' [M]$$

ergibt.

Aus (B 4.1) folgt mit (B 4.4b), (B 4.4c) :

$$[K] [\phi_M] = [M] [\phi_M] [\Lambda] \quad .$$

Durch Linksmultiplikation mit $[\phi_M]'$ entsteht:

$$[\phi_M]'^T [K] [\phi_M] = [\phi_M]'^T [M] [\phi_M] [\Lambda] \quad \text{d.h.}$$

$$[\phi_M]'^T [K] [\phi_M] = [\Lambda] = [\omega^2] \quad .$$

Somit lautet die zu lösende Differentialgleichung:

$$(\ddot{y}) + [2\beta \Lambda^{\frac{1}{2}}] (\dot{y}) + [\Lambda] (y) = [\phi_M]'^T (P) \quad (\text{B 4.6}).$$

B 4.2 Modalanalyse von Systemen mit konsistenter Massenverteilung

Da die Massenmatrix bei konsistenter Massenverteilung keine Diagonalform hat, ist die Reduktion auf eine symmetrische Form komplizierter. $[M]$ ist zwar positiv definit, bei der Division $[M]^{-1} [K]$ entsteht aber eine nichtsymmetrische Matrix. Die Reduktion auf das spezielle Eigenwertproblem geschieht durch eine Choleskyzerlegung der Steifigkeitsmatrix oder der Massenmatrix; beide Wege führen zum selben Resultat. Die Steifigkeitsmatrix wird zerlegt in:

$$[K] = [F] [F]'^T = [F] [F] \quad . \quad (\text{B 4.7})$$

Für das homogene Problem wird die Transformation:

$$(v) = [F]^{-1} (x) \quad (\text{B 4.8})$$

und der Lösungsansatz:

$$(x) = [\phi] (y)$$

gewählt. Das Eigenwertproblem lautet dann:

$$[M] [F]^{-1} [\phi] [\omega^2] = [K] [F]^{-1} [\phi] \quad .$$

Nach Linksmultiplikation mit:

$$[K]^{-1} = [F]^{-1} [F]^{-1}$$

ergibt sich:

$$[F]^{-1} [F]^{-1} [M] [F]^{-1} [\phi] [\omega^2] = [F]^{-1} [\phi] \quad ;$$

woraus sich mit:

$$[A] = [F]^{-1} [M] [F]^{-1} \quad (\text{B 4.9})$$

das spezielle Eigenwertproblem ergibt:

$$[\phi] = [A] [\phi] [\omega^2] \quad .$$

Die Umformung $[\Lambda] = \left[\frac{1}{\omega^2} \right]$ ergibt wiederum (B 4.1) .

Zur Integration der Differentialgleichung ist die Transformation:

$$(v) = [F]^{-1} [\phi] (y) = [\phi_L] (y) \quad (\text{B 4.10})$$

zu beachten.

Im Hinblick auf die Normierung von $\{\phi_L\}$ wird (B 4.1) unter Berücksichtigung von (B 4.9) von links mit $[F]^{-1}$ multipliziert:

$$[F]^{-1} [\phi] [\wedge] = [F]^{-1} [F]^{-1} [M] [F]^{-1} [\phi] \quad .$$

Mit (B 4.10) und nach Linksmultiplikation mit $[K]$ folgt weiter:

$$[K] [\phi_L] [\wedge] = [M] [\phi_L] \quad .$$

Bei Normierung auf:

$$[\phi_L]' [M] [\phi_L] = [I]$$

und Linksmultiplikation mit $[\phi_L]$ folgt:

$$[\phi_L]' [K] [\phi_L] [\wedge] = [I] \quad , \text{ bzw.}$$

$$[\phi_L]' [K] [\phi_L] = \left[\frac{1}{\wedge} \right] = [\wedge]^{-1} = [\omega^2] \quad .$$

Nach Linksmultiplikation der Differentialgleichung mit $[\phi_L]$ folgt wiederum (B 4.6):

$$(\ddot{y}) + [2\beta \wedge^{-\frac{1}{2}}] (\dot{y}) + [\wedge]^{-1} (y) = [\phi_L]' (P) \quad .$$

EINFLUSS DER MASSENDARSTELLUNG AUF DIE WELLENAUSBREITUNGSGESCHWINDIGKEIT

Da bei Systemen unter stoßartiger Beanspruchung ein großes Spektrum von Eigenformen angeregt wird, muß bei der numerischen Integration darauf geachtet werden, daß auch die höheren Eigenformen ausreichend genau wiedergegeben werden. Darüberhinaus ist es für die Genauigkeit des ermittelten Antwortverlaufes von Bedeutung, in welcher Form die Massendarstellung das Integrationsverfahren selbst beeinflußt.

Es ist bekannt, daß die nach dem Rayleigh'schen Verfahren vorgenommene Abschätzung der niedrigsten Eigenfrequenz immer einen größeren Wert als den exakten ergibt, wenn die Randbedingungen eingehalten werden. Deshalb folgen aus einem Finite-Element-System mit konsistenter Massendarstellung gegenüber dem zu berechnenden kontinuierlichen System immer höhere Werte für die Eigenfrequenzen. Bei Punktmassendarstellung tendieren die Frequenzen zu Werten, die kleiner als die exakten Werte sind. Die exakten Eigenwerte und Eigenformen eines freien Stabes nach Abb. C.1 lauten:

$$\omega_{i,ex} = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = i \frac{\pi}{L} c_0 \quad ; i = 0, 1, 2, \dots \quad (C 1a)$$

$$\phi_{i,ex} = A_{ex} \cos i \pi \frac{x}{L} = A_{ex} \cos a_{i,ex} \frac{x}{L} \quad ; i = 0, 1, 2, \dots \quad (C 1b)$$

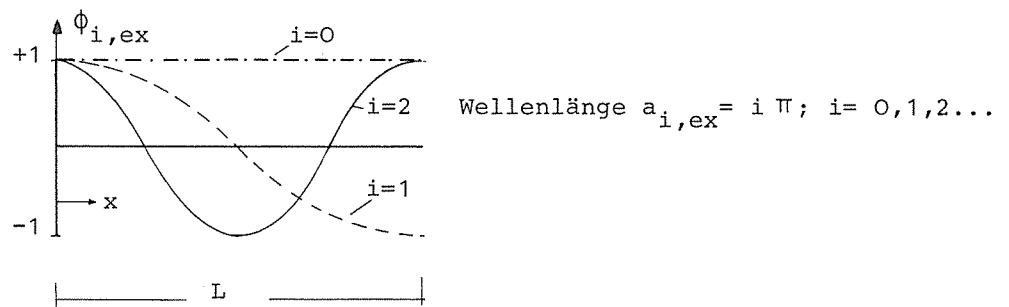


Abb. C.1 Exakte Eigenformen eines Stabes

Durch die Berechnung ergeben sich bei Darstellung des Stabes durch Finite Elemente als genäherten Werte des konsistenten Modells:

$$\omega_K = \frac{2 c_0}{\Delta x} \frac{\sin \frac{a}{2N}}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{a}{2N}}} \quad , \quad (C 1c)$$

und am Punktmassenmodell:

$$\omega_L = \frac{2 c_0}{\Delta x} \sin \frac{a}{2N} \quad , \quad (C 1d)$$

wobei Δx die Länge eines (bei gleichbleibender Elementarstellung) Elementes und N die Anzahl der Elemente sind. Abb. C.2 zeigt den

relativen Gewinn an Genauigkeit beim Benutzen konsistenter Modelle, wenn nicht nur der untere Frequenzbereich in Betracht gezogen werden muß.

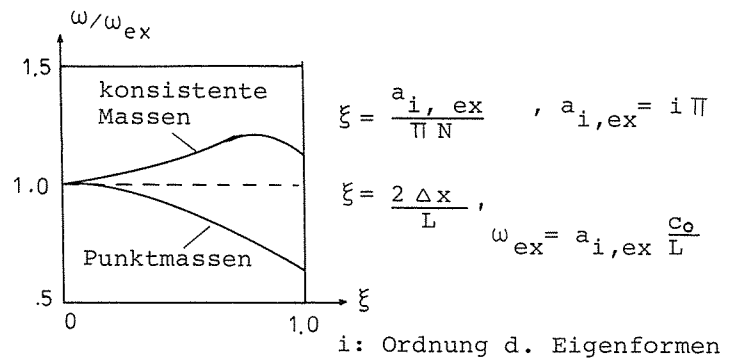


Abb. C.2 Frequenzverlauf für Massenmodelle mit kontinuierlicher und Punktmassenverteilung nach [74]

Die genäherten Eigenformen des in Abb. C.3 dargestellten Systems lauten entsprechend (C 1b):

$$\phi_k = A \cos a \frac{k}{N} \quad , \quad (C 1e)$$

k : laufende Knotennummer.

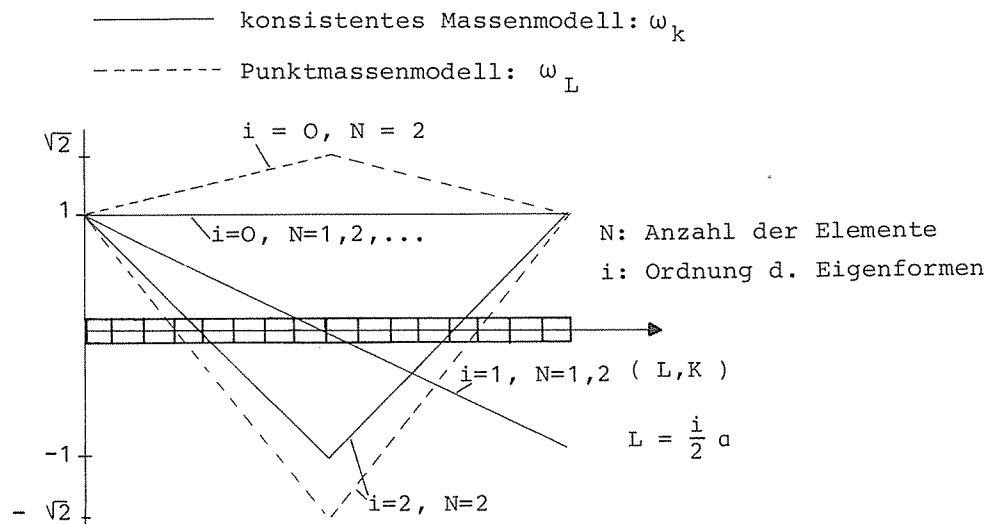


Abb. C.3 Darstellung einiger Eigenformen eines Stabes ermittelt bei Finiter Element Darstellung.

Die stückweise linearen Eigenformen haben bei konsistenter Massendarstellung in den Stützstellen die identischen Werte der exakten Eigenformen, die Wellenlängen sind identisch, d.h. $a_i = a_{i,ex}$.

Die Reihendarstellung für die Näherungswerte der Eigenfrequenzen (C 1c), (C 1d) veranschaulicht die Proportionalität zwischen Eigenperiode und der Elementlänge:

$$\begin{aligned}\omega_{K,L} &= \frac{2\pi}{T_{K,L}} = \omega_{\text{ex}} \left(1 \pm \text{Glieder} \left(\frac{a}{N} \right) \text{ höherer Ordnung} \right) \quad (\text{C } 2\text{a}) \\ &= \frac{c_0 a}{L} \quad \left(1 \pm \text{Glieder} \left(\frac{a}{N} \right) \text{ höherer Ordnung} \right) \\ \text{d.h. } T &\sim L\end{aligned}$$

Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich für das kontinuierliche System mit (C 1b):

$$\dot{v}_{\text{ex}} = \frac{a}{T_{\text{ex}}} = \frac{a}{2\pi} \omega_{\text{ex}} = \frac{a}{2\pi} a \frac{c_0}{L} = c_0, \quad (\text{C } 2\text{b})$$

sie ist somit für alle Eigenformen gleich.

Durch die Glieder höherer Ordnung entstehen in der Finite Element Darstellung Abweichungen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Eigenformen zu den exakten Werten. Die höheren Eigenformen haben nach (C 2c) bei konsistenter Massendarstellung eine zu hohe, bei Punktmassendarstellung eine zu kleine Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$\dot{v}_{K,L} = \frac{a}{T_{K,L}} = \frac{a}{2\pi} \omega_{K,L} = c_0 \left(1 \pm \text{Glieder} \left(\frac{a}{N} \right) \text{ höherer Ordnung} \right). \quad (\text{C } 2\text{c})$$

Von wesentlicher Bedeutung für die Genauigkeit des Antwortverhaltens ist ferner das benutzte Integrationsverfahren, dessen spektrale Eigenschaften durch das Eigenwertproblem der Verstärkungsmatrix [A] (C 3b) gegeben sind, d.h. aus:

$$[K_1] \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix}_{t_{n+1}} = (P)_{t_{n+1}} + [K_0] \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix}_{t_n, t_{n-1}, \dots}$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix}_{t_{n+1}} = [K_1]^{-1} (P)_{t_{n+1}} + [K_1]^{-1} [K_0] \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix}_{t_n, t_{n-1}, \dots} \quad (\text{C } 3\text{a})$$

$$\text{mit: } [A] = [K_1]^{-1} [K_0] \quad (\text{C } 3\text{b})$$

Zur Integration stehen neben modalen Ansätzen implizite und explizite direkte Verfahren zur Verfügung. In expliziten Verfahren können die Lösungen zum Zeitpunkt t_{n+1} durch die zum Zeitpunkt t_n gefundenen Systemantworten ausgedrückt werden, so daß keine Gleichungen aufgelöst werden müssen. Bei impliziten Verfahren erfordert die dem Differenzenschema zugrundegelegte Stützstellenordnung die funktionale Abhängigkeit des Antwortverlaufes $(v)_{t_{n+1}}$ von $(\dot{v})_{t_{n+1}}$, d.h. die Auflösung einer Gleichung. Aus diesem Grunde erfordern implizite Verfahren einen wesentlich größeren Rechenaufwand je Zeitschritt als explizite Verfahren. Auf der anderen Seite aber ist bei ersteren die Größe des Integrationsschrittes nur durch Genauigkeitsanforderungen begrenzt, während bei expliziten Verfahren die maximale Größe des Zeitschrittes aus Gründen der numerischen Stabilität beschränkt ist.

Bei Anwendung eines zentralen Differenzenoperators z.B. des Newmark β - Verfahrens können durch die Wahl von Parametern die spektralen Eigenschaften von (C 3b) so gesteuert werden, daß sich die spektralen Fehler der Finite Element Diskretisierung einerseits und die des zentralen Differenzenoperators andererseits kompensieren. Da auf diese Weise sowohl für konsistente bzw. für punktförmige Massenabbildung die Gleichheit der durch das Integrationsverfahren gestauchten bzw. gedehnten Eigenwerte zu den exakten Eigenwerten gewährleistet ist, wird in der Praxis der weniger rechenintensiven Punktmassenabbildung der Vorzug gegeben.

Vorliegend wird als Integrationsverfahren ein Runge Kutta-Verfahren vierter Ordnung gewählt. Da das Fehlerglied von der Ordnung Δt^5 ist, ist dieses Verfahren sehr genau und (C 3b) kann bei richtiger Schrittweitenwahl einem exakten Operator gleichgestellt werden. Bei linearem Belastungsverlauf: $\ddot{y} + \omega_i^2 y = 1 + t$ lautet der exakte Operator:

$$[A(\omega_i, \Delta t)] = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i \Delta t} & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} & \left[\frac{1}{\omega_i^2} \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i \Delta t} - \cos(\omega_i \Delta t) \right] \\ \frac{\cos(\omega_i \Delta t) - 1}{\Delta t} & \cos(\omega_i \Delta t) & \frac{1}{\omega_i} \left[\sin(\omega_i \Delta t) + \frac{\cos(\omega_i \Delta t) - 1}{\omega_i \Delta t} \right] \\ -\frac{\omega_i \sin(\omega_i \Delta t)}{\Delta t} & -\omega_i \sin(\omega_i \Delta t) & \left[\cos(\omega_i \Delta t) - \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i \Delta t} \right] \end{bmatrix} \quad (C 3c)$$

Für die nach dem Finite Element Verfahren ermittelten Näherungswerte der Eigenfrequenzen:

$$\omega_{i,K} > \omega_{i,ex}$$

$$\omega_{i,L} < \omega_{i,ex}$$

zeigt (C 3c), daß der Verlauf von (v) durch die umgekehrte Proportionalität zu ω_i näherungsweise unabhängig von den höheren Eigenformen ist. Der Verlauf von (\dot{v}) dagegen ist sowohl für den Deformations- als auch für den Geschwindigkeitsanteil nicht proportional zu ω_i , somit können zum Verlauf von (\dot{v}) als auch von (\ddot{v}) die höheren Eigenformen wesentlich beitragen.

Mit $\omega_{i,K} > \omega_{i,L}$ folgt aus (C 3c): $|(v)|_{K,max} \leq |(v)|_{L,max}$. Für den Verlauf von (\dot{v}) folgt daraus, daß der Anteil infolge $(v)_{t_n}$ bezüglich $(\dot{v})_{t_{n+1}}$ bei konsistenten Massensystemen gegenüber Punktmassensystemen schwindet und der dispersive Anteil infolge $(\dot{v})_{t_n}$ größeren Einfluß gewinnt. Dieses unterschiedliche Antwortverhalten zeigt die praktische Anwendung:

- Der Verlauf von (v) ist für beide Massendarstellungen beinahe deckungsgleich,
- der Verlauf von (\dot{v}) hat dispersiven Charakter, die Ab-

weichungen bei konsistenter Massenabbildung sind hierfür größer als bei Punktmassen, wie Abb. C.4 für den Spannungsverlauf, der bei Impulsbelastung proportional zum Geschwindigkeitsverlauf ist, zeigt:

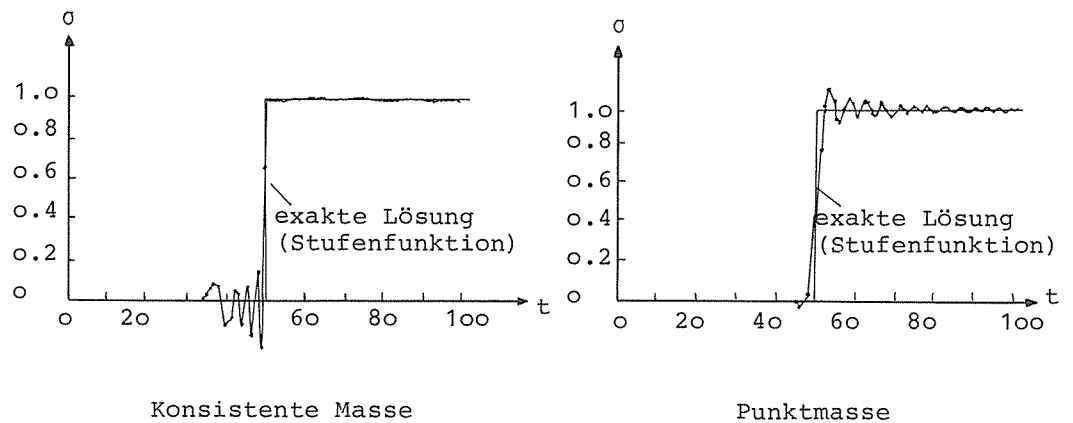


Abb. C.4 Vergleich der Spannungsverläufe für Impulsbeanspruchung bei konsistenter und Punktmassenabbildung [19]

Deshalb wird in der Praxis für genaue Integrationsverfahren nicht nur aus rechentechnischen Gründen der Punktmassenabbildung der Vorzug gegeben.

Diese gegensätzlichen dispersiven Eigenschaften beider Verfahren können, wenn wie bei Impulsbelastungen der Einfluß höherer Eigenformen nicht zu vernachlässigen ist, dazu benutzt werden, dispersive von realen Oszillationen zu unterscheiden. Der genaue Verlauf wird dann durch Mitteilung angenähert.

Für das als Integrationsverfahren benutzte Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ist eine Fehlerabschätzung nur schwer durchführbar. Die Zahlenrechnung ergibt, daß bei einer Schrittweite von:

$$t \leq \frac{T_{\min}}{5}$$

ein konsistenter, d.h. von weiterer Schrittweitenverkleinerung unabhängiger Ergebnisverlauf erreicht wird.

D 1. Darstellung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens

Nichtlineares Werkstoffverhalten wird beschrieben durch:

- ein inkrementelles Fließgesetz, z.B. nach Prandtl-Reuss,
- eine Fließbedingung, z.B. nach Mises,
- eine Plastizitätstheorie, z.B. bilineares elasto-plastisches Fließgesetz

Die inkrementelle Spannungsdehnungsbeziehung lautet allgemein in der Matrixschreibweise von (A 1.3):

$$d(\sigma) = [D] d(\epsilon_e) \quad , \quad \text{bzw.} \quad (D 1.1a)$$

$$d(\sigma) = [D_p] d(\epsilon_p) \quad , \quad (D 1.1b)$$

$$d(\sigma) = [D_{ep}] d(\epsilon) \quad . \quad (D 1.1c)$$

$d(\epsilon_e)$ und $d(\epsilon_p)$ sind der elastische und der plastische Anteil des Dehnungszuwachses:

$$d(\epsilon) = d(\epsilon_e) + d(\epsilon_p) \quad . \quad (D 1.2a)$$

Die Gesamtdehnung folgt aus der Summe des elastischen und plastischen Anteils:

$$(\epsilon) = [D]^{-1} (\sigma) + (\epsilon_p) = (\epsilon_e) + (\epsilon_p) \quad . \quad (D 1.2b)$$

$[D_p]$ und $[D_{ep}]$ beinhalten die inkrementelle Beziehung der Dehnungszuwächse und sind abhängig von den vorangehenden Dehnungsverläufen. Durch die Umkehrung von (D 1.1) entsprechend (A 1.3) ergibt sich:

$$\text{mit} \quad [E_{ep}] = [D_{ep}]^{-1}$$

$$\text{und} \quad [E_p] = [D_p]^{-1} \quad :$$

$$d(\epsilon) = \{ [E] + [E_p] \} d(\sigma) = [E_{ep}] d(\sigma) \quad , \quad (D 1.3)$$

bei Entlastung gilt: $[E_p] = [0]$.

Wird die Fließbedingung nach Mises in der Schreibweise

$$d(\epsilon_p) = d\lambda \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \quad (D 1.4a)$$

- $d\lambda$ ist ein Proportionalitätsparameter und $F = F_L(\sigma)$, κ die Fließoberfläche - zugrundegelegt, folgt für die Matrix der inkrementellen Spannungsdehnungsbeziehung:

$$[D_{ep}] = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \quad \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \right\} [D] \left[A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \right\} [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \right\} \right]^{-1} \quad , \quad (D 1.5)$$

$[D_{ep}]$ ist symmetrisch und positiv definit, $[A]$ wird durch den Verfestigungsparameter κ bestimmt:

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p} \right)' d(\varepsilon_p) \right\}$$

Für den nichteindimensionalen Spannungszustand lautet das Fließgesetz (D 1.4a) in der Schreibweise für den Vergleichszustand σ_{eff} :

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_p) &= d\varepsilon_{p\,eff} \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial (\sigma)} \\ &= \frac{d\sigma_{eff}}{H'} \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial (\sigma)} \end{aligned} \quad (D 1.4b)$$

$\varepsilon_{p\,eff}$ ist der zum Vergleichszustand gehörende plastische Anteil des Dehnungszustandes, H' die Neigung der Spannungs-Dehnungsbeziehung für den eindimensionalen Fall nach Abb. D.1:

$$H' = \frac{D D_T}{D - D_T}$$

Das Inkrement des plastischen Anteils der Vergleichsdehnung in Abhängigkeit von dem Inkrement des Dehnungszuwachses lautet für die Fließbedingung nach Mises:

$$d\varepsilon_{p\,eff} = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma} \right)' [D]}{H' + \left(\frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma} \right)' [D] \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial (\sigma)}} d(\varepsilon) \quad (D 1.5)$$

Mit der Differentialbeziehung (D 1.4b) folgt dann für den plastischen Anteil des Dehnungszuwachses:

$$d(\varepsilon_p) = [E_p] [E_{ep}]^{-1} d(\varepsilon) = [C] d(\varepsilon) \quad (D 1.6)$$

mit

$$[C] = \frac{\frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial (\sigma)} \left(\frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma} \right)' [D]}{H' + \left(\frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma} \right)' [D] \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial (\sigma)}}$$

Die dem Dehnungszuwachs zugeordneten Spannungszuwächse lauten:

$$d(\sigma) = \{ [D] - [\tilde{D}_p] \} d(\varepsilon) = [D_{ep}] d(\varepsilon) \quad (D 1.7)$$

Die Summe aller plastischen Anteile $d(\sigma_p) = [\tilde{D}_p] d(\varepsilon)$ wird als initialer Spannungszustand bezeichnet. Mit (D 1.6) und (D 1.7) lassen sich die Spannungen und die plastischen Dehnungen aus den Gesamtdehnungen berechnen. Diese Berechnung basiert auf dem angenommenen Verschiebungsfeld, d.h. aus kinematischen Relationen und ist unabhängig vom Materialverhalten. Die den inelastischen Zustand erfassenden konstitutionellen Gleichungen sind den Differentialgleichungen zuzuordnen. Aus Gründen der einfacheren Handhabung werden die nichtlinearen Anteile üblicherweise als Modifikation des linear elastischen Zustandes behandelt.

Wird also das in (3.13) zur Ermittlung der Formänderungsenergie angenommene Verschiebungsfeld in inkrementeller Schreibweise formuliert:

$$dW = \int_V d(\varepsilon)' d(\sigma) dV$$

lautet die Differentialgleichung (A 1.4) in inkrementeller Form:

$$\int_V [B]' [D_{ep}] [B] dV d(v) + \int_V [N]' [N] dV d(\vec{v}) = d(P) \quad (D 1.8)$$

Die Steifigkeitsmatrix für nichtlineares Werkstoffverhalten wird als tangentielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet und hat den momentanen Wert:

$$[K_{ep}] = \int_V [B]' [D_{ep}] [B] dV \quad (D 1.9)$$

Das nichtlineare Werkstoffverhalten läßt sich nach (D 1.6) auch direkt aus dem Verlauf der Dehnungen herleiten:

$$[D_{ep}] = \{ [I] - [C] \}' [D] \quad (D 1.10)$$

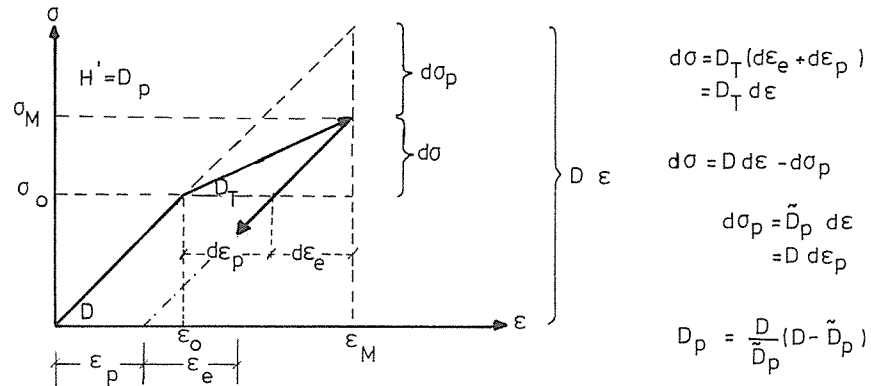


Abb. D.1 Bilineares Spannungs-Dehnungsverhalten mit Verfestigung

Die Ermittlung des Spannungsverlaufes kann bei Belastung mit (D 1.7), bei Entlastung mit (D 1.2b) vorgenommen werden. Aus (D 1.7) folgt:

$$\begin{aligned} (\sigma) &= \int d(\sigma) \\ &= (\sigma_0) + \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} ([D] - [\tilde{D}_p]) d(\epsilon) \end{aligned} \quad (D 1.11a)$$

Unter der Annahme bilinearen Verhaltens entsprechen die Spannungs-Dehnungsbeziehungen $[D]$ und $[\tilde{D}_p]$ den in Abb. D.1 für eindimensionale Körper geltenden Beziehungen D und \tilde{D}_p . Der Tangentenmodul D_T entspricht $[D_{ep}]$. Die Spannungen folgen dann aus:

$$\sigma = \sigma_0 + D_T (\epsilon - \epsilon_0) \quad (D 1.11b)$$

$$= D \epsilon - \tilde{D}_p (\epsilon - \epsilon_0) \quad , \text{ mit } \tilde{D}_p = \frac{DD}{D+D_p} \quad (D 1.11c)$$

$$= D (\epsilon - \epsilon_p) \quad (D 1.11d)$$

Die (D 1.11d) entsprechende Matrixbeziehung folgt aus (D 1.2b):

$$(\sigma) = [D] \{ (\epsilon) - (\epsilon_p) \} = [D] (\epsilon_e) \quad (D 1.11e)$$

Wird anstelle der Schreibweise für die vollständige tangentielle Steifigkeitsmatrix nach (D 1.7) nur die Differenzschreibweise für das Spannungs-Dehnungsverhalten nach (D 1.11e) gewählt, besteht die Möglichkeit, die Differentialgleichung so zu formulieren, daß der plastische Anteil lediglich als zusätzliche, vom aktuellen Deformationsverlauf abhängige, äußere Belastung auftritt. Die Differentialgleichung selbst behält somit ihren linearen Charakter und lautet in inkrementeller Form:

$$(D 1.12)$$

$$\int_V [B]' [D] [B] dV d(v) + \int_V s [N]' [N] dV d(\ddot{v}) = d(P) - \int_V [B]' [D] dV d(\epsilon_p)$$

$$[K_I] = \int_V [B]' [D] dV \quad (D 1.13a)$$

wird als Matrix der initialen Dehnungen bezeichnet. Die plastischen Dehnungen werden somit als Anfangsdehnungen interpretiert. Die inkrementellen plastischen Dehnungen selbst können also an dem nach (D 1.12) als linear elastisch betrachteten System als äußere Belastung:

$$d (P_{pt}) = [K_I] d (\epsilon_p) \quad , \quad (D 1.14a)$$

bzw. $(P_{pt}) = [K_I] (\epsilon_p)$

behandelt werden, $[K_I]$ ist identisch mit der Vorspannmatrix nach (6.15). Alternativ zu (D 1.12) lassen sich die plastischen Deformationen auch durch die Spannungen ausdrücken. Der die plastischen Dehnungen simulierende äußere Belastungsvektor geht dann aus der initialen Spannungsmatrix $[K_S]$ hervor:

$$(P_{Pt}) = [K_S] (\sigma) \quad , \quad (D 1.14b)$$

mit $[K_S] = [K_I] [D_p]^{-1}$. (D 1.13b)

Alternative Möglichkeiten der Darstellung des Ersatzlastvektors zur Erfassung der plastischen Deformationsanteile können z.B. entsprechend (D 1.11c) hergeleitet werden:

$$(P_{Pt}) = [K_{II}] \{ (\epsilon) - (\epsilon_0) \} \quad \text{bzw.} \quad (D 1.14c)$$

$$(P_{Pt}) = [K_{III}] \{ (v) - (v_0) \} \quad . \quad (D 1.14d)$$

(ϵ_0) bzw. (v_0) sind durch die in Abb. D.1 dargestellte Elastizitätsgrenze gegeben. Die initialen Matrizen $[K_{II}]$, $[K_{III}]$ lauten:

$$[K_{II}] = \int_V [B]^T (\tilde{D}_p) dV \quad , \quad (D 1.13c)$$

$$[K_{III}] = \int_V [B]^T (\tilde{D}_p) [B] dV \quad . \quad (D 1.13d)$$

Die initialen Matrizen werden elementweise entwickelt und nach A 5. dem globalen System zugeordnet. Die Ermittlung des aus den plastischen Verformungen resultierenden Deformationszustandes (v_p) wird nach (D 1.12) in Summenschreibweise für die effektive plastische Belastung (P_{Pt}) mit $(P) = (0)$ durchgeführt:

$$[K] (v_p) = [K_I] (\epsilon_p) \quad , \quad \text{d.h.}$$

$$(v_p) = [K]^{-1} [K_I] (\epsilon_p) \quad .$$

Mit (6.5b) folgt weiter:

$$(v_p) = [\Phi_M]^T [\Lambda]^{-1} [\Phi_M]^T [K_I] (\epsilon_p) \quad . \quad (D 1.15)$$

Der Nachteil der Summenschreibweise besteht darin, daß sie bei einigen Lösungsansätzen auf numerische Instabilitäten führen kann. Deshalb wird die inkrementelle Schreibweise für die Methode der initialen Dehnungen bevorzugt angewendet. Als zusätzliche äußere Belastungen sind dann der Zuwachs der plastischen Belastung und das zu Beginn jeden Zeitintervalles vorliegende Residuum, hervorgerufen aus dem durch die Linearisierung der Bewegungsgleichung hervorgerufenen Ungleichgewicht, zu berücksichtigen.

Demgegenüber ist bei der Methode der tangentialen Steifigkeit nach (D 1.8) als zusätzliche äußere Belastung lediglich das Residuum, bestehend aus dem Ungleichgewicht des vorhergehenden Inter-

valls, zu berücksichtigen. Durch die Methode der tangentialen Steifigkeit ist im allgemeinen ein genauerer Lösungsverlauf bestimmbar als durch die Methode der initialen Dehnungen. Deshalb wird die Methode der initialen Dehnungen im wesentlichen auch nur in den Fällen angewendet, in denen der plastische Bereich lokal begrenzt ist. Die unterschiedliche Genauigkeit beider Verfahren ist daher zu erklären, daß bei der Methode der tangentialen Steifigkeit die Steifigkeitsmatrix $[K_{ep}]$ in jedem Zeitschritt neu formuliert wird und bei der Methode der initialen Steifigkeiten die als Zusatzlast wirkende nicht lineare plastische Belastung d (P_{pt}) aus dem vorhergehenden Zeitschritt approximiert wird.

Andererseits spart die Methode der initialen Dehnungen Rechenzeit, da die Matrizen $[K]$ und $[K_I]$ unveränderlich sind. In diesem Fall ist auch eine Modalanalyse, in der die modalen Eigenschaften nur einmal zu bestimmen sind, vorteilhaft anwendbar. Der Vorteil der Modalanalyse ist besonders in den Fällen gegeben, in denen die Steifigkeitsmatrix eine große Bandbreite hat und in denen für die Berechnung der Bewegungsgleichung nicht alle Eigenformen benötigt werden. Darüberhinaus ermöglicht eine Modalanalyse Aussagen über die modalen Systemeigenschaften und ist in jedem Falle wünschenswert.

Für die vorliegend angewendeten eindimensionalen longitudinalen Elemente gehen die in (D 1.1a) definierten Matrizen der Spannungs-Dehnungsbeziehungen in die entsprechenden Module nach Abb.D.1 über. Der Spannungs-Dehnungsverlauf eindimensionaler Körper für kinematische und isotrope Verfestigung ist Abb. D.2 zu entnehmen; es gilt:

$$\text{Isotrope Verfestigung:} \quad |\sigma| \leq |\sigma_0| + D_T |\epsilon_p| ,$$

$$\text{Kinematische Verfestigung:} \quad |\sigma - D_T \epsilon_p| \leq |\sigma_0| .$$

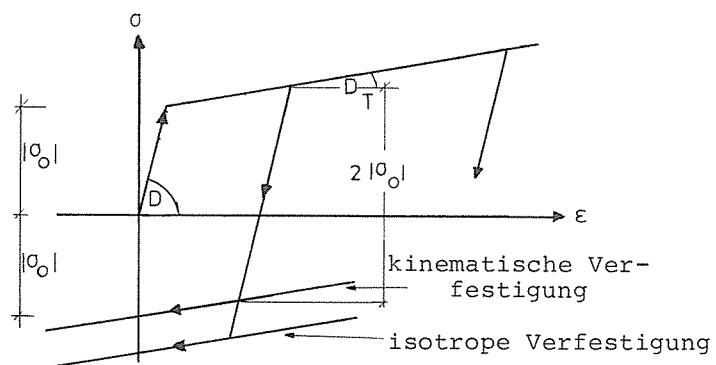


Abb. D.2 Bilineares Verfestigungsverfahren

Die in der Literatur angewendeten Integrationsverfahren (Methode der tangentialen Steifigkeit und Methode der Anfangsdehnungen) sind als Operatoren in Summenschreibweise oder in inkrementeller Form darstellbar. Da für die Methode der Anfangsdehnungen positive Erfahrungen bisher nur für die Berechnung von Systemen mit lokal begrenzten Nichtlinearitäten vorliegen und dieses Verfahren in der bekannten Literatur noch nicht umfassend dokumentiert ist, wird der in die modalen Zustandsgleichungen einzubindende nichtlineare Algorithmus der Anfangsdehnungen (s. Kap. 7.0) an Hand der bekannten Gleichungen für das Verfahren der tangentialen Steifigkeit entwickelt, welches im folgenden formuliert ist.

Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, daß im nichtlinearen Fall keine unbedingt stabilen Operatoren mehr existieren. Es kann lediglich in Anlehnung an statisch belastete, nichtlineare Systeme, bei denen die Belastung in kleinen Lastinkrementen eingetragen wird, für dynamische Belastungen die Forderung erhoben werden, daß die benutzten Zeitinkremente ausreichend klein sind. Im Gegensatz zum statischen Fall ist für den dynamischen Fall eine einmalige Abweichung weit schwerwiegender, da sich der Fehler in Form eines Anfangswertproblems durch die gesamte dynamische Berechnung fortpflanzt.

Implizite, für lineare Bewegungsgleichungen entwickelte Operatoren erlauben durch das einmalige Triangulieren der Steifigkeitsmatrix eine stückweise lineare Berechnung linearer und nichtlinearer Probleme. In jedem Fall, also auch bei linearen Zustandsgleichungen erfordern sie eine Gleichgewichtskorrektur zum Zeitpunkt $t + \Delta t$, da sie eine Stützstelle zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ haben und somit von der Lösung selbst abhängen. Der nichtlineare Anteil der Zustandsgleichungen wird als zusätzlich einwirkende Belastung als sog. Pseudolast oder Ersatzlast in Abhängigkeit vom Deformationsverlauf berücksichtigt. Auch für diesen Anteil muß zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ eine Iteration oder eine Extrapolation vorgenommen werden. Es hat sich gezeigt, daß eine lineare Extrapolation den Verlauf ausreichend genau approximieren kann.

Explizite Operatoren besitzen die Eigenschaft, zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ einen Gleichgewichtszustand zu erzeugen, da die Deformation nicht durch die am Ende des jeweiligen Zeitschrittes vorhandene Steifigkeit ausgedrückt werden muß. Somit entfällt die Notwendigkeit der Gleichgewichtskorrektur. Da explizite Verfahren nur bedingt stabile Operatoren sind, muß die Integrationsschrittweite ausreichend klein gewählt sein. Sie ist dem Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der einzelnen Elemente anzupassen. Nichtlineare Probleme erfordern bei Anwendung des Verfahrens der tangentialen Steifigkeit keinen Zusatzaufwand, da z.B. bei Punktmassensystemen keine Inversionen, sondern nur Matrizenmultiplikationen ausgeführt werden müs-

sen und die tangentiale Steifigkeit nur dem Spannungs-Dehnungsverlauf anzupassen ist. Explizite Operatoren werden deshalb bei Problemen mit einer geringen Anzahl von Zeitintervallen bevorzugt angewendet.

In der Literatur sind bei nichtlinearen Zustandsgleichungen für das Verfahren der tangentialen Steifigkeit folgende 4 Operatoren unterschiedlicher Genauigkeit klassifiziert:

- α) Keine Gleichgewichtskontrolle, durch ausreichend klein gewählte Schrittweiten soll Konvergenz gewährleistet sein,
- β) das zum Zeitpunkt t bestehende Ungleichgewicht wird dem System zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ als Residuum d.h. zusätzliche äußere Belastung eingeprägt,
- γ) das Ungleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird durch Nachiteration korrigiert,
- δ) der nichtlineare Anteil zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird durch Extrapolation approximiert.

Zwischen den verschiedenen Operatoren ist eine Verknüpfung möglich. Die Gleichgewichtskorrektur und die Korrektur der tangentialen Steifigkeitsmatrix ist nicht unbedingt zu jedem Zeitpunkt vorzunehmen, sie kann mit Operatoren des Verfahrens der Anfangsdehnungen verknüpft werden.

Dem Verfahren der tangentialen Steifigkeit wird in allgemeiner Form folgender Algorithmus zugrundegelegt:

- i) Zum Zeitpunkt $t - \Delta t$ wird ausgehend von der exakten Schreibweise:

$$[M] (\ddot{v}_t) + [C] (\dot{v}_t) + [K_t] (v_t) = (P_t) \quad , \quad (D 2.1a)$$

folgender Prediktor für die Ermittlung des Deformationszustandes $(v_t)^1$ zum Zeitpunkt t angenommen:

$$[M] (\ddot{v}_t)^1 + [C] (\dot{v}_t)^1 + [K_{t-\Delta t}] (v_t)^1 = (P_t) \quad , \quad (D 2.1b)$$

die Massen- und Dämpfungsmatrizen werden als konstant vorausgesetzt. Die unteren Indizes beschreiben den Zeitpunkt der jeweiligen Größe, die oberen Indizes den Grad der Näherung. Die tangentiale Steifigkeitsmatrix $[K_{ep}]$ zum Zeitpunkt $t - \Delta t$ wird mit $[K_{t-\Delta t}]$ bezeichnet.

- ii) Zum Zeitpunkt t wird das durch die Linearisierung im Zeitintervall Δt bedingte Residuum in der Zustandsgleichung ausgewiesen, d.h. von (D 2.1b) wird der momentan wirksame Schnittlastzustand $(F_t)^1$, ermittelt nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, abgezogen: (D 2.2)

$$[M] (\ddot{v}_t)^1 + [C] (\dot{v}_t)^1 + [K_{t-\Delta t}] (v_t)^1 - [K_t]^1 (v_t)^1 = (P_t) - (F_t)^1 \quad ,$$

$$(F_t)^1 = \int_V [B]^T (\sigma_t) dV \text{ ist überföhrbar in: } (F_t)^1 = [K_t]^1 (v_t)^1 \quad ,$$

das Residuum: $(F_t)^1 - [K_{t-\Delta t}] (v_t)^1$ gilt als Konvergenzmaß.

- iii) Bei Anwendung von (D 2.2) mit einem als genau angesehenen Prediktor $(v_t)^1 = (v_t)$, (v_t) ist der numerisch exakte Deformationszustand, als Ausgangswert wird zum Zeitpunkt t der

Prediktor des Deformationszuwachses $(\Delta v)^1$ für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmt, wobei anstelle von $[K_{t-\Delta t}]$ der aktuelle Wert der tangentialen Steifigkeit $[K_t]$ steht:

$$[M] \{ (\ddot{v}_t) + (\Delta \ddot{v})^1 \} + [C] \{ (\dot{v}_t) + (\Delta \dot{v})^1 \} + [K_t] \{ (v_t) + (\Delta v)^1 \} - [K_t] (v_t) = (P_t) + (\Delta P_t) - (F_t) .$$

$$\begin{aligned} \text{Mit: } (P_{t+\Delta t}) &= (P_t) + (\Delta P_t) , \\ (v_{t+\Delta t})^1 &= (v_t) + (\Delta v)^1 , \\ (\dot{v}_{t+\Delta t})^1 &= (\dot{v}_t) + (\Delta \dot{v})^1 , \\ (\ddot{v}_{t+\Delta t})^1 &= (\ddot{v}_t) + (\Delta \ddot{v})^1 \end{aligned} \quad \text{folgt endgültig:}$$

$$[M] (\ddot{v}_{t+\Delta t})^1 + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t})^1 + [K_t] (\Delta v)^1 = (P_{t+\Delta t}) - (F_t) \quad . \quad (D 2.3)$$

Bei kleinen Integrations-schrittweiten Δt gilt die Prediktorlösung $(v_{t+\Delta t})^1$ als ausreichend genau, so daß im Lösungsalgorithmus wieder der Schritt ii) durchzuführen ist. Zur Genauigkeitssteigerung wird in Anlehnung an (D 2.3) je nach Problemstellung und Lösungsverlauf folgende Gleichgewichtsiteration zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durchgeführt:

$$[M] (\ddot{v}_{t+\Delta t})^r + [C] (\dot{v}_{t+\Delta t})^r + [K_t] \{ (v_{t+\Delta t})^r - (v_{t+\Delta t})^{r-1} \} = (P_{t+\Delta t}) - (F_{t+\Delta t})^{r-1}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (D 2.4)$$

Unter Verwendung der Steifigkeitsmatrix des Zeitpunktes t wird mit (D 2.4) eine Korrektur des Gleichgewichtszustandes vorgenommen. Der korrigierte Lösungsvektor $(v_{t+\Delta t})^r$ wird ermittelt in Abhängigkeit vom Gleichgewichtszustand $(v_{t+\Delta t})^{r-1}$. Sofern Konvergenz gegeben ist, lautet der Korrektorkor:

$$(v_{t+\Delta t})^{r-1} \longrightarrow (v_{t+\Delta t})^r \longrightarrow (v_{t+\Delta t}) \quad .$$

Die Anfangswerte für die Iteration sind:

$$\begin{aligned} (v_{t+\Delta t})^0 &= (v_t) , \\ (F_{t+\Delta t})^0 &= (F_t) \end{aligned} \quad . \quad (D 2.5)$$

Als Konvergenzkriterium kann die Vektornorm des Residuums oder des Korrektors dienen, z.B.:

$$\frac{\| (v_{t+\Delta t})^r \|}{\| (v_{t+\Delta t})^{r-1} \|} \leq 0.01 \quad . \quad (D 2.6)$$

Bei einer Nachiteration (D 2.4) läßt sich je nach Problemstellung eine Schrittweitenvergrößerung für Δt dergestalt vornehmen, daß bei einer Änderung von Δt im Gegensatz zu Verfahren ohne diese Konvergenzverbesserung keine Änderung des Lösungsverlaufes zu ermitteln ist.

Tabelle I:

Vergleichende Gegenüberstellung verschiedener Autoren bei der Erfassung von Stoß-Kontakt-Vorgängen an Fugen

		Bohm [103,104]	Bathe [92]	Lien [108]	Nuno [107]	Lee [110]	Ramani [112]	Verfasser	Dubowsky [105]	Winfrey [106]
Art des Fugenmechanismus	starr-freie Fugenkennlinie	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	linear elastisch-freie Fugenkennlinie	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	nicht linear elastisch-freie Fugenkennlinie	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	elastisch-plastisch-freie Fugenkennlinie	-	+	+	-	+	+	+	+	+
Gesamt-systemverhalten	linear elastisch	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	elastisch plastisch	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	linear viskose Dämpfung	+	+	+	+	2	+	+	+	+
	Strukturdämpfung	-	+	+	+	+	+	+	+	+
Darstellung der Fugencharakteristik	starr- Fuge	-	-	+	-	-	-	+	-	+
	freie Fuge	-	-	+	-	-	-	-	-	5
	nicht starr- freie Fuge	-	+	-	-	-	-	-	-	-
	Ändern der Steifigkeitsmatrix	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	Ändern der rechten Seite	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Ändern der Steifigkeitsmatrix	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	Ändern der rechten Seite	+	-	-	-	-	-	-	-	-
	Darstellung der Fugenkennlinie durch:	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	- gemessene Steifigkeitswerte	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	- errechnete Steifigkeitswerte (Hertz)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
- Restitutionskoeffizient	+	-	-	+	-	-	-	-	6	
- fiktive Steifigkeit	-	-	-	-	-	-	+	-	-	
Energiedissipation der Fuge durch:	-	+	+	-	-	3	4	-	-	
- linear viskose Dämpfung	+	+	-	-	-	4	4	+	-	
- Strukturdämpfung	-	-	-	+	-	4	4	+	-	
- Reibungsdämpfung	+	-	-	-	-	-	+	-	-	
Integrationsverfahren	modal	-	-	-	+	-	-	+	+	-
	direkt	+	+	+	-	+	+	-	-	+
Fugenanfangsbedingungen	offen	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	geschlossen	+	+	+	-	+	+	+	+	+
	unter Vorbelastung	-	-	-	-	-	-	+	-	-
	unter Vorspannung	-	-	-	-	-	-	+	-	-

- 1) Nur als theoretische Möglichkeit, aus Gründen der numerischen Instabilität nicht benutzt.
- 2) Das System bleibt linear elastisch, lediglich der Kontaktbereich von Rohren kann sich plastisch verformen.
- 3) Gegeben durch die mit der Hysterese begrenzten Fläche.
- 4) Unter der Annahme konstanter Dämpfungskoeffizienten.
- 5) Ermittlung der Stoßlast durch den Impulserhaltungssatz, d.h. keine Dissipation in der Fuge möglich.
- 6) Ermittlung einer äquivalenten viskosen Dämpfung durch Hilfe des Restitutionskoeffizienten.

- + vorhanden
- nicht vorhanden
- | nicht relevant
- . vorhanden in der erweiterten Fassung für den elastisch-plastischen Bereich.

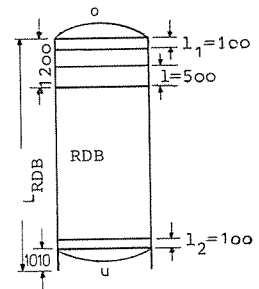
Tabelle II: Vergleich der Überlagerungen der Deformationen für das Zusatzlastverfahren und für übliche Verfahren

-	Zusatzlastverfahren	übliche Verfahren
<u>System I</u> (Zustand I)	$v_I = v_{SI} + v_{DI}$ (überlagert) $v_{SI} \{ P_V: \text{Innendruck} \}$ Be- + Vorspannung } trieb + Eigengewicht } $v_{DI} \{ P_D = -S: \text{freigesetzte}$ Schnittlast } + $v_{II\tau} \Delta$ } s.u.] + $\dot{v}_{II\tau}$ }	$v_I = v$ (direkt) $v \{ v_s: \text{statischer Deforma-}$ tionszustand + P : aktueller Belastungs- zustand + $v_{II\tau}$ + $\dot{v}_{II\tau}$ s.u.]
Abfrage (Fuge)	$S = S \{ v_{SI} \} + S \{ v_{DI} \} \geq 0$	$S = S \{ v_I \} \geq 0$
Endwerte I Anfangswerte II	$v_{\tau \Delta}, \dot{v}_{\tau}$	v_{τ}, \dot{v}_{τ}
<u>System II</u> (Zustand II)	$v_{II} = v_{SI} + v_{DII}$ (überlagert) $v_{DII} \{ P_D = -S: \text{freigesetzte}$ Schnittlast } + P_V : freigesetzte Vorspannung + $v_{\tau \Delta}$ + \dot{v}_{τ}]	$v_{II} = v$ (direkt) $v \{ P: \text{aktueller Belastungs-}$ zustand + v_{τ} + \dot{v}_{τ}]
Abfrage (Fuge)	$\Delta v_{II} = \Delta v_{SI} + \Delta v_{DII} \geq 0$ $\Delta v_{SI} = 0$ {für anfangs offene Fugen }	$\Delta v_{II}: \text{Deformationsdiffe-}$ renz ≥ 0 (direkt)
Endwerte II Anfangswerte I	$v_{II\tau \Delta}, \dot{v}_{II\tau}$	$v_{II\tau}, \dot{v}_{II\tau}$

Tabelle III Bemessungswerte des Berstschutzsystems

- 1) incl. Schätzwert des Abstützringes
 2) Unter der Annahme, daß: M (RDB) = 343 (Zylinder)+ 69 (Deckel)+ 20 (Kleinzeug) = 432 t
 M (Kern) = 260t. Somit M (RDB+Beton) = 432 + 260 + 1037 = 1729 t bzw. M (RDB+Beton) = 432+260+948 = 1640 t
- + Werte sind nicht projiziert
 ++ Vertikalprojektion
 * aus einer vorgegebenen Steifigkeit ermittelte geometrische Größe

	E N/mm ²	F ₂ mm ²	L mm	k N/mm	g bzw. Δs ³ kg/mm ³	F ₂ mm ²	L bzw. l mm	M= gFL t
Spann- stahl	2,059 10 ⁵	742000	18440*	8,286 10 ⁶	7,848 10 ⁻⁶	742000	18440*	107
			18200*	8,398 10 ⁶				
Pendel- stützen	2,059 10 ⁵	1690000 ⁺⁺⁺	780 ⁺⁺	4,462 10 ⁸ ⁺⁺	6,624 10 ⁻⁵ 1) ⁺⁺	1690000 ⁺⁺⁺	780 ⁺⁺	87 ⁺⁺
		3360000 ⁺⁺	1100 ⁺	-		2,354 10 ⁻⁵ 1)	3360000 ⁺⁺	1100 ⁺
RDB (Mittel- wert)	2,059 10 ⁵	3195000	9570	6,878 10 ⁷	2,223 10 ⁻⁵	3437200	9050	692
					2,261 10 ⁻⁵	3195000	9570	692
		1,387 10 ⁻⁵	3437200	9050	432 260 692			
		Δs=1,513 10 ⁻⁴	3437200	l=500	294 260 69 69 2) 1)			
Zarge (Blatt- federn)	2,059 10 ⁵	575000*	720	1,648 10 ⁸	7,848 10 ⁻⁶	575000 ⁺⁺	720	3,2
		532500	800	1,371 10 ⁸		575000 ⁺⁺	600	2,7
		575000	600	1,972 10 ⁸				
Beton- ring	3,825 10 ⁴	74200000	3830	7,410 10 ⁸	3,649 10 ⁻⁶	74200000	3830	1037 2)
			3500	8,108 10 ⁸			3500	948 2)



RDB-Maße in mm

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/September 1968

Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/Juli 1970 (vergriffen)

Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebern
von Dr.-Ing. Götz Andreae

Nr. 3/September 1970 (vergriffen)

Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile
von Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 4/Dezember 1970 (vergriffen)

Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren
von Dr. rer. nat. Arno Burmester

Nr. 5/März 1971

Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
von Dr. rer. nat. Norbert Steiner

Nr. 6/April 1971

Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
von Prof. Dr.-Ing. Paul Schneider

Nr. 7/Juli 1971

Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Petrowitz

Nr. 8/November 1971

Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Helmut Veith

Nr. 9/November 1971

Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Möller

Nr. 10/Januar 1972

Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
von Dr.-Ing. Dietmar Aurich und Prof. Dr. phil. Erich Martin

Nr. 11/Februar 1972

Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütewerte beim Brennschneiden
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Krause

Nr. 12/Mai 1972

Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
von Dir. u. Prof. Dr. rer. nat. Hubert Feuerberg

Nr. 13/Juni 1972

Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig (Berichter), Prof. Dr.-Ing. Kurt Kirschke, Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig und Dipl.-Phys. Harald Tischer

Nr. 14/Juli 1972

Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
von Eberhard Fischer

Nr. 15/August 1972

Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Heinz Pohl

Nr. 16/August 1972

Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
von Dr.-Ing. Erwin Knublauch

Nr. 17/August 1972

Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
von Dr.-Ing. Peter Reimers

Nr. 18/Januar 1973

Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 19/Januar 1973

Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. K. Kaffanke und Dr.-Ing. H. Czichos

Nr. 20/April 1973

Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 21/Juli 1973

Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. D. Klaffke und Dr.-Ing. W. Maennig

Nr. 22/Juli 1973

Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi und Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 23/November 1973

**Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin
Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen**
von Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Ruske

Nr. 24/November 1973

Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung
von Dipl.-Ing. J. Stanke, Ing. grad. E. Klement und Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 25/Dezember 1973

Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
von Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 26/August 1974

Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen —
von Dipl.-Ing. P. Jost, Dr.-Ing. P. Reimers und Dr.-Ing. P. Weise

Nr. 27/August 1974

Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Hermann Wüstenberg

Nr. 28/August 1974

Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern
von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 29/August 1974

Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem idealisotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall
von Prof. Dr.-Ing. P. Schneider

Nr. 30/September 1974 (vergriffen)

The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology
von Dr. Horst Czichos und Dr. Geert Salomon

Nr. 31/August 1975

Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung
von Dr.-Ing. Gerhard Fuhrmann

Nr. 32/September 1975

Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen
von Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Bernhard Böttcher

Nr. 33/November 1975

Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens
von Dipl.-Ing. Armin Wagner, Dipl.-Phys. Gerhard Kieper und Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 34/Januar 1976 (vergriffen)

Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoffen
von Dipl.-Forsting. Dr. rer. sylv. Hans-Joachim Deppe

Nr. 35/Januar 1976

Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dipl.-Ing. Ernst Limberger

Nr. 36/Januar 1976 (vergriffen)

Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles
von Dipl.-Ing. Jürgen Hundt

Nr. 37/Februar 1976

Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 38/Juni 1976

Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionisiertem Stahl 42 CrMo 4
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig

Nr. 39/Juni 1976

Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newtonschem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung
von Prof. Dr.-Ing. K. Kirschke und Dipl.-Phys. G. Kempf

Nr. 40/Juni 1976

Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren
von Dr. rer. nat. H. Hantsche

Nr. 41/Okttober 1976

Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten
von Dr. rer. nat. Bernhard Böttcher

Nr. 42/Okttober 1976

Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft
von Dr.-Ing. Siegmund Dietlen

Nr. 43/Okttober 1976

Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 44/November 1976

Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“
von Dipl.-Ing. W. Matthees

Nr. 45/Dezember 1976

Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten
von Dr.-Ing. W. Paatsch

Nr. 46/Mai 1977 (vergriffen)

Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung
Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses
von Dipl.-Ing. Gerald Schickert und Dipl.-Ing. Helmut Winkler

Nr. 47/Juni 1977

Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
von Dr.-Ing. Arno Plank

Nr. 48/Okttober 1977

Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
von Dr.-Ing. U. Holzlöhner

Nr. 49/Dezember 1977

Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
von Dr.-Ing. Günther Wittig

Nr. 50/Juni 1978 (vergriffen)

Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
von Prof. Dipl.-Phys. Norbert Czaika, Dipl.-Phys. Norbert Mayer, Dipl.-Ing. Claus Amberg, Dipl.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Götz Andrae und Dipl.-Ing. Winfried Markowski

Nr. 51/Juni 1978

Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
von Dr. rer. nat. J. Sickfeld

Nr. 52/August 1978

Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
von Dr.-Ing. Aleksandar Tomov

Nr. 53/Okttober 1978

Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
von Rolf Günter Rohrmann und Reinald Rudolphi

Nr. 54/Oktober 1978

Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Harro Sander

Nr. 55/November 1978

Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke

Nr. 56/Januar 1979

Stabilität von Sandwichbauteilen
von Dipl.-Ing. W. Brünner und Prof. Dr.-Ing. C. Langli

Nr. 57/März 1979

Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung
Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing
von Dipl.-Ing. Meinhard Stadthaus

Nr. 58/März 1979

Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 59/Juli 1979

Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
von Dr.-Ing. Günther Plauk

Nr. 60/August 1979

Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
von Dr.-Ing. H. Spreckelmeyer, Dr.-Ing. R. Helms und Dr.-Ing. J. Ziebs

Nr. 61/Dezember 1979

Beschreibung von Problemen der höheren Farbmatrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
von Dr. Klaus Richter

Nr. 62/Dezember 1979

Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Gerisch und Prof. Dr. habil. Dr. h. c. Günther Becker

Nr. 63/Dezember 1979

Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
von Dipl.-Ing. E. Behrend und Dipl.-Ing. J. Ludwig

Nr. 64/Februar 1980

Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
von Dr.-Ing. Werner Rücker

Nr. 65/Februar 1980

Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
von Dr.-Ing. Peter Schmidt, Dr.-Ing. Dietmar Aurich, Dr.-Ing. Rolf Helms, Dr.-Ing. Helmut Veith und Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 66/Mai 1980

Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
von Dr. rer. nat. Martin Hattwig

Nr. 67/Mai 1980

Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees