

ISSN 0172-7613

Forschungsbericht 78

BUNDESANSTALT FÜR
MATERIALPRÜFUNG (BAM)

BERLIN

Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund

von Dr.-Ing. W. Rücker

September 1981

115 Seiten, 92 Abbildungen, 2 Tabellen

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon 030/8104-1
Telex 01-083 261 bamb d

Vorwort

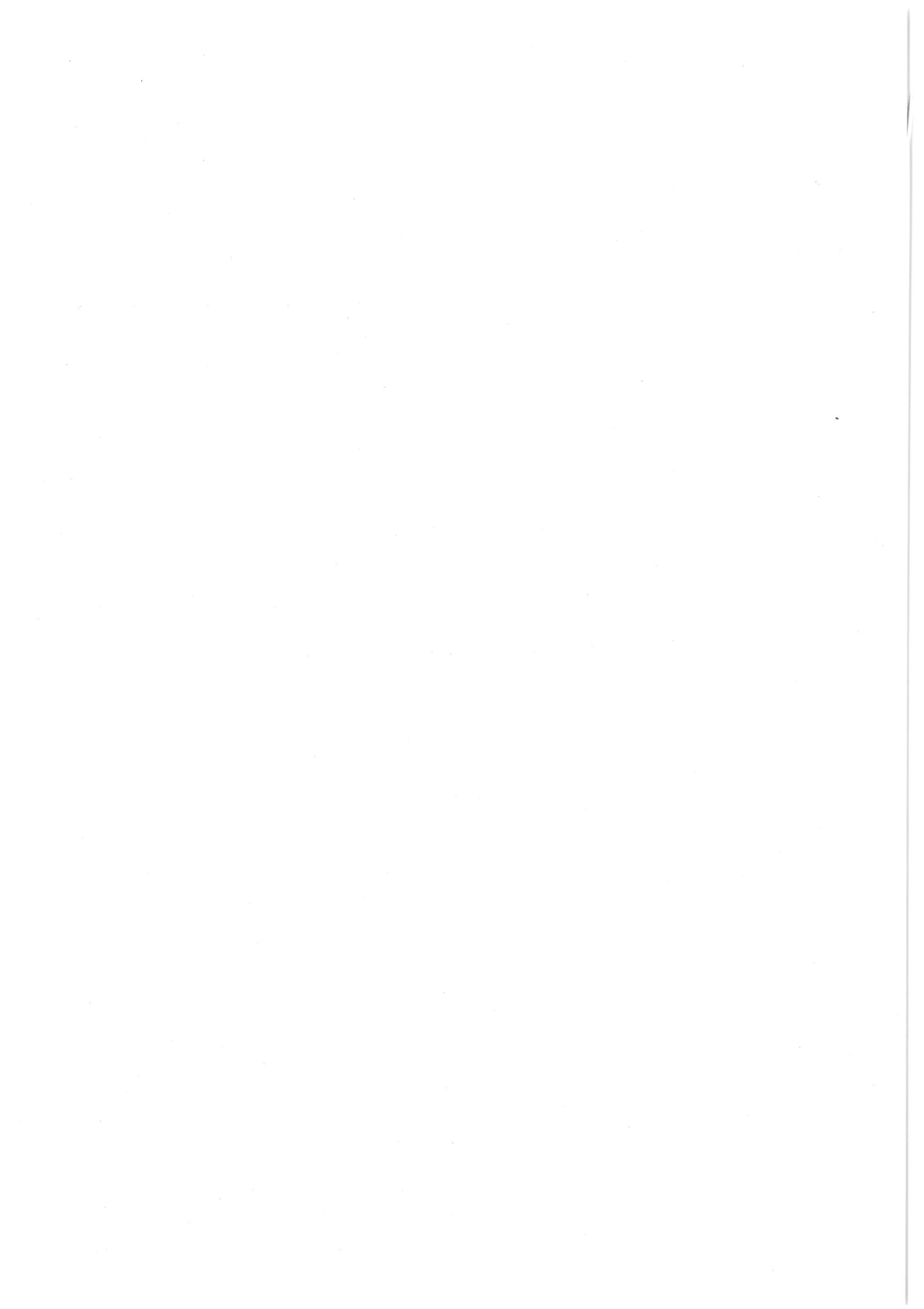
Die diesem Bericht zugrundeliegenden Arbeiten wurden im Rahmen der Rad/Schiene Forschung durchgeführt und vom Bundesminister für Forschung und Technologie (Kennzeichen TV 78172) gefördert.

Sämtliche numerische Berechnungen wurden an der TR 440-Rechenanlage des Großrechenzentrums (GRZ), Berlin, durchgeführt.

Den dortigen Mitarbeitern, sei für ihr verständnisvolles Entgegenkommen und ihr Eingehen auf Sonderwünsche gedankt. Gleichmaßen ist die sehr gute Zusammenarbeit mit den Mitarbeitern des BAM-Rechenzentrums, die die umfangreichen Plotaufträge abwickelten, zu loben.

Nicht zuletzt gilt der Dank Frau Soogrim, für das Schreiben des zumindest stellenweise sehr schwierigen Manuskripts.

Werner Rücker



1.	EINLEITUNG	1
1.1	Zielsetzung	1
1.2	Aktivitäten und Fragestellungen	2
2.	EINFÜHRUNG UND LITERATURRECHERCHE	3
3.	VORAUSSETZUNGEN UND PRINZIPIEN	8
3.1	Allgemeines	8
3.2	Voraussetzungen	8
3.3	Verwendete Prinzipien	9
4.	NACHGIEBIGKEITSFUNKTIONEN FÜR DIE EINZELGRÜNDUNGEN	12
4.1	Übersicht und Grundgleichungen	12
4.2	Verschiebungsfeld infolge vertikaler Einzellast	18
4.3	Nachgiebigkeitsfunktionen starrer Sohlflächen	23
5.	WECHSELWIRKUNG MEHRERER STARRER SOHLFLÄCHEN	31
5.1	Grundgleichungen	31
5.2	Nachgiebigkeitsfunktionen für ein Schwellensystem	33
5.2.1	Systeme und Darstellung	33
5.2.2	Vergleich der Nachgiebigkeiten einer starren Sohlfläche unter Berücksichtigung von n Nachbargründungen	34
5.2.3	Nachgiebigkeitsfunktionen mehrerer masseloser Gründungskörper infolge vertikaler Belastung eines Gründungskörpers (vertikale Koppelnachgiebigkeiten)	36
5.2.4	Nachgiebigkeitsfunktionen mehrerer masseloser Gründungskörper infolge Rotationsbelastung eines Gründungskörpers (Rotationskoppelnachgiebigkeiten)	41
5.2.5	Nachgiebigkeitsfunktionen für die Rotationen $\tilde{\varphi}_y$ mehrerer masseloser Gründungskörper infolge vertikaler Belastung einer Gründung	43
5.2.6	Zusammenfassung	47
6.	ABSCHÄTZUNG DES EINFLUSSES DER BODENHETEROGENITÄT UND EINBETTUNG	49
6.1	Bodenheterogenität	49
6.2	Einbettung	51
7.	ERSATZSYSTEM DER SCHWELLEN UND SCHIENEN	54
7.1	Systembeschreibung	54
7.2	Variationsprinzip	55

7.3	Ableitung der Elementsteifigkeits- und Massenmatrix	57
7.4	Assemblierung und Transformation	60
7.5	Berücksichtigung von Verschiebungsrandbedingungen	61
7.6	Näherungsweise Berücksichtigung der Unendlichkeit der Schienen	62
8.	GESAMTSTEIFIGKEITSBEZIEHUNG UND KRITIK DER LÖSUNGSMETHODEN	64
8.1	Impulsbilanz	64
8.2	Hinweise und Kritik	64
9.	RECHENBEISPIELE UND VERGLEICH MIT MESSUNGEN	67
9.1	Allgemeines	67
9.2	Belastungseinrichtung und Versuchsprogramm	67
9.3	Berechnete Teilsysteme	69
9.4	Starre Einzelschwelle	70
9.4.1	Systemdaten	70
9.4.2	u_z -Translation	71
9.4.3	u_y -Translation	73
9.4.4	u_x -Translation	75
9.4.5	φ_x -Rotation	75
9.4.6	φ_y -Rotation	77
9.5	Elastische Einzelschwelle	78
9.5.1	Annahmen und Systemdaten	78
9.5.2	Theoretische Ergebnisse für die Lastfälle P_z, P_y, M_x	79
9.5.3	Vergleich mit Meßergebnisse	82
9.6	System starrer massebehafteter Schwellen	83
9.6.1	Untersuchte Systeme	83
9.6.2	Translation u_z infolge P_z	84
9.6.3	Rotationen φ_y infolge M_y	88
9.6.4	Rotationen φ_y infolge P_z	90
9.6.5	Vergleich mit Messungen	91
9.7	Schienen-Schwellenrost	96
9.7.1	System, Systemdaten und Darstellung	96
9.7.2	u_x -Translationen	98
9.7.3	u_y -Translationen	102
9.7.4	u_z -Translationen	105
10.	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	109

LITERATURVERZEICHNIS

Kurzfassung

Es wird ein Ersatzsystem für die Dynamik eines Schienenschwellenrostes als Fahrbahn schnellfahrender Züge entwickelt, das sowohl über die Schienen wie über den Boden gekoppelt ist. Hierbei werden zunächst starre masselose Einzelschwellen betrachtet, die sich an der Oberfläche eines linear elastischen homogenen Halbraums befinden. Die Lösung des zugehörigen gemischten Randwertproblems führt zu Nachgiebigkeitsfunktionen, die für die Belastungsmoden vertikal und Rotation um beide horizontale Achsen berechnet werden. Zur Ermittlung dieser Nachgiebigkeitsfunktionen wird eine neue Methode entwickelt, die von Verschiebungsfeldern harmonisch variierender Einzellasten Gebrauch macht. Die Berechnungsmethodik wird danach auf ein System von mehreren starren Flächen an der Bodenoberfläche erweitert. Damit wird die Bodenkoppelungsmatrix (dynamische Wechselwirkung) für vertikale Belastung und Momentenbelastung für mehrere Gründungssysteme mit bis zu sieben Einzelgründungen errechnet. Nicht erfaßbare Einflüsse, wie Einbettung der Schwellen und Heterogenität des Untergrundes werden durch Näherungsmethoden berücksichtigt. Für die Schienen und Schwellen wird ein dreidimensionales Ersatzsystem auf der Basis der finiten Elemente entwickelt. Zur Überprüfung der Ersatzsysteme werden die dynamischen Reaktionen der Teilsysteme starre Einzelschwelle, elastische Einzelschwelle, System starrer Einzelschwellen die über den Untergrund gekoppelt sind, sowie ein Schienenschwellenrost, der sowohl über den Untergrund wie über die Schienen gekoppelt ist, in verschiedenen Belastungsmoden berechnet und mit Messungen verglichen.

Summary

A model is presented for a railway line in which the coupling of the ties by the rails and by the subsoil is taken into account.

In a first step the mixed boundary value problem for a single massless rigid tie on the surface of an elastic homogenous half-space excited by forces and moments is solved. For this part of the total system compliance-functions were computed for a wide range of frequencies and side ratio b/a . For computation the compliance functions a new method is developed

using the harmonic wavefield of concentrated loads. Then the method is extended to a system of several rigid massless ties bedded on the surface of an elastic homogenous half-space. The method is used for computation the interaction matrix for systems up to seven ties excited in vertical and rocking mode. Effects, like embeddment of the ties and heterogeneity of the subsoil not included in the analysis were taken into account by approximate methods.

For the ties and rails a three-dimensional model is developed using the method of finite elements.

The models are proved by measurements compared with computed dynamic reactions of single rigid and flexible ties, of a system of seven rigid ties and a railway line which is coupled by the rails and the subsoil.

1. Einleitung

Bewegt sich ein schienengebundenes Fahrzeug längs seiner Trasse, so wird sowohl das Fahrzeug wie die Fahrbahn durch dynamische Lasten aus Achsüberfahrten, Kurvenfahrten, Unwuchten, Flachstellen der Radreifen, ungleichmäßige Lagerung der Trasse in Längs- und Querrichtung, sowie durch dadurch bedingte Fahrzeugresonanzen zu Schwingungen ange-regt. Hierbei beeinflussen dynamische Eigenschaften der Fahrbahn das Schwingungsverhalten des Fahrzeuges und um-gekehrt. Der Betrieb eines schnellfahrenden schienengebun- denen Verkehrssystems (bis 300 km/h) erfordert deshalb aus Gründen der erforderlichen Verkehrssicherheit und Optimie- rung des Systems eine eingehende Kenntnis des Zusammen- spiels der Teilsysteme Fahrbahn und Fahrzeug.

1.1 Zielsetzung

Während für das Teilsystem "Fahrzeug" eine Anzahl genügend genauer Rechenmodelle verfügbar sind, besteht für das System "Fahrbahn" noch eine große Unsicherheit bezüglich seines dynamischen Verhaltens. Die Zielsetzung dieses Vorhabens besteht deshalb darin, für das System "Fahrbahn", das aus den Komponenten Schienen mit Schwellen oder Platte, sowie dem darunter befindlichen Untergrund (z.B. Schotter auf natürlichem Boden) besteht, ein analytisches Rechen- modell für alle relevanten Freiheitsgrade zu entwickeln.

Mit dem Rechenmodell soll es möglich sein, für verschiedene Oberbauarten und Untergrundbeschaffenheiten eine zuverlässi- ge Aussage über den Einfluß der Fahrbahn auf das Schwingungs- verhalten der Fahrzeuge anzugeben.

Durch geeignete Versuche und Messungen an Probestrecken soll das entwickelte Modell solange überprüft und schritt- weise verbessert werden, bis eine genügend zuverlässige und genaue Aussage über das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems möglich ist. Sind die gegenseitigen Ein- flüsse des Fahrzeugs und der Fahrbahn dann quantifizier- bar, so ist es in einem weiteren Schritt möglich, Unter- suchungen für gezielte Maßnahmen zur Erschütterungsminde- rung zu erarbeiten.

1.2 Aktivitäten und Fragestellungen

Das Arbeitsprogramm sieht folgende Punkte vor:

- Literaturrecherche im Hinblick auf vorhandene Lösungsmöglichkeiten und Prüfung der Anwendbarkeit auf das vorliegende Problem. Von besonderem Interesse sind hierbei Lösungen und Lösungsmöglichkeiten, mit denen die Wellenfelder an der Bodenoberfläche infolge teilweiser Spannungsbelastung der Bodenoberfläche berechnet werden können. Solche Lösungen dienen dann zur Ermittlung der Nachgiebigkeitsfunktionen bzw. Steifigkeitsfunktionen von Einzelgründungen (Schwelle) sowie zur Berechnung des Koppelleinflusses mehrerer Gründungen (Schwellen) untereinander infolge der Wellenausbreitung im Boden.
- Entwicklung eines diskreten Rechenmodells für den Oberbau (Schienen mit Schwellen)
- Abschätzung nicht erfaßter bzw. infolge der gewählten Lösungsmethode nicht erfaßbarer Einflußgrößen
- Versuche und Messungen zur Bestimmung der elastischen Materialeigenschaften von Schotter und Untergrund im Labor und im Felde (durchgeführt vom Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der TU-Karlsruhe)
- Versuche und Messungen zum Schwingungsverhalten von Systemteilen (starre Einzelschwelle, elastische Einzelschwelle) und des Gesamtsystems (System mehrerer "starrer" Schwellen mit Bodenkoppelung und ohne Koppelung durch die Schienen, System mehrerer elastischer Schwellen mit Koppelung durch Boden und über die Schienen) infolge harmonischer Belastung in mehreren Erregerefreiheitsgraden. Die Messungen zu dem Schwingungsverhalten einer starren Einzelschwelle und eines Systems von starren Einzelschwellen ohne Schienenkoppelung wird von der Bundesanstalt für Materialprüfung, die anderen von der TU-Karlsruhe durchgeführt.
- Berechnung spezieller Systeme (Einzelschwelle, Schwellenrost, Gleisrost) in einigen Freiheitsgraden und Vergleich mit Messungen.

2. Einführung und Literaturrecherche

Das einer Analyse zu unterstellende System besteht zunächst aus den schwingungsfähigen Teilsystemen Oberbau und Untergrund. Als "Oberbau" werden hier die Teilsysteme Schienen und Schwellen (Gleisrost) bezeichnet. "Untergrund" ist das anstehende Erdreich unter dem Oberbau einschließlich des Schotterbettes.

Wird das gesamte System durch einen fahrenden Zug an den Schienen belastet, so überträgt sich die vorhandene Belastung infolge der Koppelung über die Schienen auf einen bestimmten Schwellenbereich. Durch die dadurch hervorgerufenen Bewegungen der Schwelle wird im Untergrund ein dreidimensionales Wellenfeld erzeugt. Dieses Wellenfeld beeinflusst wiederum die Bewegungen benachbarter Schwellen. Damit tritt neben der Koppelung über die Schienen eine weitere Koppelung der Schwellen über den Untergrund auf. Diese Art der Koppelung ist eine Funktion der Verformungsrandbedingung (starr, elastisch), sowie der Trägheitswirkung der einzelnen Schwellen.

Die Materialeigenschaften der Teilsysteme Schienen und Schwellen können als relativ homogen betrachtet werden. Der Untergrund als "natürliches" System besitzt die Eigenschaft der Homogenität nicht. Im allgemeinen ist anzunehmen, daß der Untergrund eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Schichtung besitzt. Weitere Einflüsse sind Grundwasser oder andere starke Inhomogenitäten, wie z.B. künstliche Einbauten. Zudem hängen die elastischen Materialeigenschaften stark vom aktuellen Spannungs- und Dehnungszustand ab. /1/ Für die Lösung des Problems, das ist die Beschreibung des Gesamtsystems in einem algorithmischen Zusammenhang, stehen im Grundsatz zwei Möglichkeiten zur Verfügung, die jede für sich betrachtet Vor- und Nachteile besitzen. Dies sind die diskrete Methode der finiten Elemente und die analytisch-numerische Methode.

Bei der Methode der finiten Elemente wird das System in eine Anzahl endlicher Elemente aufgeteilt, deren Form grundsätzlich beliebig gewählt werden kann. Die Elemente sind durch eine diskrete Anzahl von Knotenpunkten auf den Element-

rändern miteinander verbunden. In jedem Element wird eine Verschiebungsfunktion vorgegeben, die den Verformungszustand bzw. Verzerrungszustand innerhalb des Elementes und auf den Elementrändern festlegt. Die Verschiebungsfunktionen müssen dabei derart beschaffen sein, daß an den Elementrändern keine Klaffungen bzw. Überschneidungen auftreten. Zusammen mit einem Stoffgesetz beschreiben die aus den Verschiebungen abgeleiteten Verzerrungen den Spannungszustand innerhalb eines Elements und auf den Elementrändern.

Vorteil dieser Methode ist, daß beliebige Bodenschichtungen, insbesondere auch nichtlineare Materialeigenschaften, Einbettung der Schwellen in das Schotterbett, sowie die Eigenelastizität der Schwellen und Schienen auf einfache Weise berücksichtigt werden können.

Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß aus rechen-technischen Gründen dreidimensionale Berechnungen nicht bzw. nur näherungsweise möglich sind /2/. Die mit der dreidimensionalen Wellenausbreitung im Untergrund verbundene Energieabsorption, auch geometrische Dämpfung genannt, kann damit nicht (außer für den Fall von Axial-symmetrie) erfaßt werden.

Die Größe des Element-Netzes für den Untergrund ist so zu wählen, daß die an der Systembegrenzung auftretenden Reflexionen keinen Einfluß auf das eigentliche System besitzen. Durch Wahl geeigneter Randelemente /3/ kann das abzubildende Gebiet des Untergrundes jedoch beschränkt werden.

Der rechenbare Frequenzbereich ist bei dieser Methode einerseits dadurch beschränkt, daß maximale Elementabmessungen in einem bestimmten Verhältnis zu einer auftretenden kleinsten Wellenlänge stehen müssen. Als Richtwert für die maximale Elementlänge gilt ein Viertel bis ein Achtel der kleinsten Scherwellenlänge. Andererseits folgt eine Beschränkung des Frequenzbereiches aus der Vorgabe des Verschiebungsfeldes für das einzelne finite Element. Wie in /4/ ausgeführt, führt dies dazu, daß die Antworten eines schwingungsfähigen Systems mit wachsender Frequenz zunehmend ungenauer wiedergegeben werden.

Bei der analytischen Methode werden die Teilsysteme Oberbau/Untergrund getrennt betrachtet. Die Schnittstelle beider Teilsysteme liegt in der Gründungsfläche der Schwelle (bzw. der festen Fahrbahn). Die dynamische Reaktion des Untergrundes wird dann in allgemeiner Form dadurch erfaßt, indem man zunächst frequenzabhängige komplexe Nachgiebigkeits- oder Steifigkeitsfunktionen unter der Randbedingung einer starren oder flexiblen masselosen Bodenplatte (Trennfuge zwischen Untergrund und Oberbau) berechnet. Die Steifigkeitsfunktionen, die insbesondere von Parametern wie Geometrie der Lastfläche, Art der Randbedingung in der Sohlfläche, Richtung der Freiheitsgrade und Frequenz abhängig sind, können dann als ein System von Federn und Dämpfern für alle relevanten Freiheitsgrade betrachtet werden, die die Koppelung bzw. Rückwirkung des Untergrundes auf den Oberbau in der Trennfuge bewirken. In gleicher Weise kann die Koppelung der Schwellen über den Untergrund angegeben werden, wenn ein System mehrerer starrer oder flexibler masseloser Bodenplatten betrachtet wird.

Für diesen analytischen Ansatz wird der Untergrund meistens als ein elastisches bzw. bei Ansatz eines komplexen Schubmoduls für den Untergrund zur Berücksichtigung der Materialdämpfung als linear-viskoelastisches Kontinuum betrachtet. Aus /5/, in der alle zur Zeit, die analytische Methode betreffenden Lösungen zusammengestellt sind, folgt zwar, daß es auch Arbeiten gibt, die einen geschichteten Halbraum betrachten. Die Arbeiten behandeln jedoch meist nur einfache Fälle wie elastische Schicht auf starrer Unterlage bzw. elastische Schicht auf Halbraum.

Einige wenige Arbeiten /6/, /7/ betrachten auch den Fall einer kontinuierlichen Steifigkeitszunahme des Untergrundes mit der Tiefe. Dies tritt praktisch immer auf, da der Schubmodul des Bodens mit wachsender statischer Spannung und damit mit der Tiefe zunimmt. Das Problem der Steifigkeitszunahme mit der Tiefe ist jedoch für das hier betrachtete System nicht so relevant, da einerseits die elastischen Eigenschaften des Schotters und des darunterliegenden Untergrundes sich nur wenig voneinander unterscheiden /8/, und andererseits in oberflächennahen Bereichen ein gewisser Ausgleich in der Spannungsverteilung des Bodens infolge

der hohen statischen Vorlast des Fahrzeuges, die sich auf mehrere Schwellen verteilt, auftritt. Da die Steifigkeitsvariation mit der Tiefe zudem zu einer Schwellenabmessung in Beziehung steht, wirkt sich die Heterogenität insbesondere auf das dynamische Verhalten einer Einzelschwelle nur wenig aus. Prinzipiell ist es jedoch möglich, aus Lösungen die einen homogenen Halbraum betrachten, durch Einführung eines "äquivalenten" Halbraums Lösungen zu gewinnen, die solche Heterogenitäten näherungsweise berücksichtigen /9/. Näherungsweise Berücksichtigung nichtlinearer Materialeigenschaften ist in gleicher Weise möglich /10/.

Aus der zusammenfassenden Literaturrecherche /5/ ist zu ersehen, daß für den betrachteten Fall einer Schwelle mit der außerordentlichen großen Schlankheit der Schwellensohlfläche keine Lösungen verfügbar sind. Näherungsweise könnten Lösungen für einen unendlich langen Laststreifen angesetzt werden. Hier ist jedoch zu bedenken, daß ein solches System für statische Belastung unbegrenzt anwachsende Verschiebungen liefert, d.h. eine solche Näherung ist für kleine Frequenzen unbrauchbar. Außerdem sind systemabhängig nur Lösungen für die Freiheitsgrade vertikale Translation, horizontale Translation quer zur Längsrichtung des Laststreifens sowie Rotation um die Längsachse des Laststreifens möglich. Die für einen Gleisrost wichtigen Bewegungsmodi der horizontalen Translation in Schwellenlängsrichtung sowie die Rotationen um die kurze Schwellenachse und um die Hochachse sind bei Betrachtung dieses ebenen Falles nicht möglich. Für die infolge der Wellenausbreitung im Untergrund vorhandene Koppelung der einzelnen Schwellen sind naturgemäß keine Lösungen verfügbar, da solche Lösungen explizit von den Abständen der einzelnen Gründungskörper abhängen, und damit immer nur für einen speziellen Fall gelten. Es gibt jedoch mehrere Arbeiten in denen Methoden zur Berechnung des Koppel-effektes beschrieben werden. Bezüglich der Erfassung der Einbettung gibt es ebenfalls keine vollständig theoretisch entwickelten Verfahren und Ergebnisse. In der Arbeit /11/ wird jedoch eine durch Versuche abgestützte Methode beschrieben, die Einbettung zu erfassen, indem zu den Steifigkeitsfunktionen nichteingebetteter

Gründungskörper additiv entsprechende Anteile hinzugefügt werden. Es wird jedoch vermutet, daß die hier vorhandene sehr geringe Einbettung der Schwelle, die zudem keinen innigen Kontakt zu dem umgebenden Schotter besitzt, keinen wesentlichen Einfluß auf das Schwingungsverhalten besitzt. Dies ist natürlich im entsprechenden Fall nachzuweisen.

Damit gilt zusammenfassend für die analytische Methode: Es ist eine vollständige 3-dimensionale Betrachtung unter Einbeziehung aller Freiheitsgrade möglich. Der berechenbare Frequenzbereich ist infolge der analytischen Formulierung theoretisch keiner Beschränkung unterworfen. Praktisch wird infolge der Numerik (Rechengenauigkeit, endliche Darstellbarkeit einer Zahl) doch eine gewisse Beschränkung eintreten, die jedoch praktisch ohne Belang ist.

Die notwendige Rechenzeit zur Lösung des Problems ist klein verglichen mit einer rein numerischen Methode (z.B. Finite Element Methode).

Nachteilig ist, daß bezüglich der Stoffeigenschaften nur linear elastische/viskoelastische homogene Kontinua betrachtet werden können. Desgleichen ist eine volle analytische Erfassung der Einbettung nicht möglich. Schwierige geometrische Situationen wie sie z.B. im Schienen-Schwellensystem einschließlich der Schienenbefestigung zu finden sind, sind mit der analytischen Methode überhaupt nicht bzw. nur sehr schwer zu bewältigen.

Vergleicht man beide Methoden, so wird folgende Lösungsstrategie als geeignet betrachtet.

Die dynamische Rückwirkung des Untergrundes auf den Oberbau einschließlich des Wechselwirkungseffektes zwischen benachbarten Schwellen wird mit der analytischen Methode erfaßt. Damit ist einerseits sichergestellt, daß der berechenbare Frequenzbereich keinen Beschränkungen unterworfen ist und andererseits wird der wichtigen Eigenschaft der Dreidimensionalität Rechnung getragen. Nicht erfaßbare Einflüsse wie Bodenschichtung und Einbettung der Schwelle wird durch Näherungsmethoden berücksichtigt. Das dynamische Verhalten der Schwellen, Schienenbefestigung und Schienen wird in diskreter Weise durch die Methode der finiten Elemente mit Hilfe von Stabelementen beschrieben. Da die Verformungs-

Linien von Stabelementen aus der elementaren Balkentheorie bekannt sind, können diese direkt als Ansatzfunktionen in die Formulierung der finiten Element-Methode übernommen werden. Da damit die Ansatzfunktionen "genau" sind, ist für diesen Fall die oben ausgeführte Frequenzbeschränkung der diskreten Methode nicht von ausschlaggebender Bedeutung.

3. Voraussetzungen und Prinzipien

3.1 Allgemeines

In den folgenden Abschnitten wird der Lösungsweg zur algorithmischen Beschreibung des Gesamtsystems Oberbau - Untergrund entwickelt. In der Ausführung folgt zunächst die Beschreibung der Rückwirkung des Untergrundes auf die Einzelschwelle. Danach wird auf die Koppelwirkung durch die Wellenausbreitung im Untergrund eingegangen. Es folgt die diskrete Beschreibung der Schwellen und Schienen. Den Abschluß bildet die Gesamtsteifigkeitsbeziehung für ein Oberbau-Untergrundsystem (Schienenschwellenrost), das sowohl über den Boden wie auch über die Schienen gekoppelt ist.

3.2 Voraussetzungen

Zur analytischen Untersuchung des Gesamtsystems gelten folgende Voraussetzungen:

- Der Untergrund (einschließlich Schotter) wird als linear elastischer homogener Halbraum betrachtet
- Nichtlineare Effekte wie die sogenannte Nullsetzung werden in dieser Untersuchung nicht betrachtet.
- Einbettung der Schwellen in das Schotterbett sowie Schichtung bzw. Heterogenität des Untergrundes wird näherungsweise berücksichtigt.
- Das Materialverhalten der Systeme Schwellen und Schienen wird durch linear elastische Stoffgesetze beschrieben.
- Die Schienenbefestigung wird als biegesteif angenommen
- Materialdämpfung bleibt vorerst außerhalb der Betrachtung. (kann im Vorgriff auf 3.3 jedoch leicht mit Hilfe des Korrespondenzprinzips eingeführt werden).
- Für die Berechnung der Nachgiebigkeitsfunktionen der

einzelnen Schwellen sowie der Koppelung durch den Boden werden die Gründungsflächen als starr vorausgesetzt. Damit besitzt die Gründungsfläche als starrer Körper insgesamt 6 Freiheitsgrade (3 Translationen, 3 Rotationen). Von den sechs möglichen Freiheitsgraden einer starren Gründungsfläche werden hier nur die Freiheitsgrade vertikale Translation, sowie Rotation um beide horizontale Achsen einer Schwelle einer exakten Lösung zugeführt. Die verbleibenden Freiheitsgrade horizontale Translation in Schwellenlängs- und Querrichtung, sowie Rotation um die Hochachse der Schwelle werden durch Näherungsansätze berücksichtigt. (Eine exakte Untersuchung erfolgt zu einem späteren Zeitpunkt).

3.3 Verwendete Prinzipien

Zur analytischen Behandlung des Problems sind folgende Prinzipien nützlich und notwendig.

Aus der vorausgesetzten Linearität des Systems folgt die Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips.

$$T\{C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\} = C_1 T\{F_1(x)\} + C_2 T\{F_2(x)\} \quad (3.1)$$

Dieses Prinzip besagt, z.B. daß Anteile aus verschiedenen Belastungen additiv zusammengefaßt werden dürfen. Aus der gleichen vorausgesetzten Bedingung der Linearität folgt weiter die Anwendbarkeit der Fouriertransformation, die in vielfältiger Weise ausgenutzt werden kann.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ixt} dt \quad (3.2)$$

Die Fouriertransformation gestattet zum einen die Darstellung einer beliebigen Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingung durch Superposition einzelner Spannungswellen. Zum anderen wird die Fouriertransformation benutzt, um eine beliebige zeitliche Antwort eines Systems aus einzelnen harmonischen Anteilen zu synthetisieren. Die Linearität gestattet weiter die Anwendbarkeit des Faltungssatzes (Duhamelsches Integral)

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h_S(t-\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} h(t-\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Der Faltungssatz besagt, daß sich die Gesamtantwort eines Systems aus der Superposition einzelner freier Schwingungen infolge Belastung durch eine Distribution (3.3) oder Sprungfunktion (3.4) ergibt.

Für lineare Systeme, bei denen die Verschiebungen proportional zu den Belastungen sind (Superpositionsprinzip), gilt weiter der Reziprozitätssatz nach Maxwell.

$$a_{kj} = a_{jk} \quad (3.5)$$

Dieser Satz besagt, daß die Einflußlinie-(fläche) für eine Verschiebung a_{kj} an einer Stelle x_k gleich ist der Biegelinie-(fläche) infolge einer Einheitskraft-(Flächenlast)

$$P_k = 1.$$

Die Linearität bedingt ebenfalls, daß das Schienen-Schwellen-System durch ein Variationsproblem mit positiv definitem Funktional beschrieben werden kann. Das ist die Voraussetzung zur Anwendung der Methode der finiten Elemente nach dem derzeitigen Stand der Theorie. Nützliche Prinzipien sind hier das Prinzip der virtuellen Verrückungen, (3.6) das d'Alembertsche Prinzip (3.7) sowie das Hamiltonsche Prinzip (3.8) in der Erweiterung für nichtkonservative Kräfte (Energiedissipation infolge Dämpfung).

Variationsprinzip für beliebige elastische Stoffe:

$$\delta(W - A) = \delta_V(W - A) = 0 \quad (3.6)$$

W elastische Formänderungsarbeit

A Arbeit der äußeren Kräfte

D'Alembert'sches Prinzip in Lagrangescher Fassung:

$$\int (dK^e - dm b) \delta r = 0 \quad (3.7)$$

dK^e eingeprägte Kraft

$dm b$ Massenbeschleunigung

δr virtuelle Verschiebung

Hamiltonsches Prinzip für dynamisch belastete Systeme:

$$\int_{t_a}^{t_e} ((\delta E - U) + \delta D) dt = 0 \quad (3.8)$$

E-U kinetisches Potential
 D nicht aus Potentialen ableithbare
 Kräfte (Reibung, Dämpfung)

Als letztes der Prinzipien ist noch das sogenannte "Korrespondenzprinzip" von Bedeutung, das aussagt, daß man aus einer Lösung für ein ungedämpftes Material eine Lösung für ein gedämpftes Material gewinnen kann, indem man die realen (physikalischen) Elastizitätskonstanten durch komplexe ersetzt. Das entspricht dem Ansatz einer hysteretischen bzw. viskosen Materialdämpfung.

$$\tilde{G} = G(1 + 2i\beta) \quad (3.9)$$

$$\text{oder } \tilde{G} = G(1 + i\omega\eta) \quad (3.10)$$

mit β hysteretische Dämpfungskonstante
 η viskose Dämpfungskonstante
 ω Frequenz
 G physikalischer Schubmodul

Für die weitere Abhandlung wird noch die Nachgiebigkeitsfunktion \tilde{f} definiert durch

$$\tilde{u}/\tilde{p} = \tilde{f} = f_1 + if_2 \quad (3.11)$$

Hierin ist \tilde{u} eine komplexe Verschiebungsgröße und \tilde{p} eine komplexe Kraftgröße. \tilde{f} wird dann als komplexe Nachgiebigkeit bezeichnet.

Die Beziehung

$$\tilde{p}/\tilde{u} = \tilde{k} = k_1 + ik_2 \quad (3.12)$$

wird als Steifigkeitsfunktion bezeichnet, wobei die komplexe Steifigkeit \tilde{k}

$$\tilde{k} = \frac{1}{\tilde{f}} = \frac{f_1 - if_2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.13)$$

durch Invertieren aus Gl. 3.11 gewonnen wird.

4. Nachgiebigkeitsfunktionen für die Einzelgründung

4.1 Übersicht und Grundgleichungen

Zur Ermittlung der Nachgiebigkeitsfunktionen wird ein elastischer homogener Halbraum betrachtet, an dessen Oberfläche ($z = 0$) sich eine starre masselose Platte der Fläche A mit

$$A = 2a \times 2b \quad (4.1)$$

befindet.

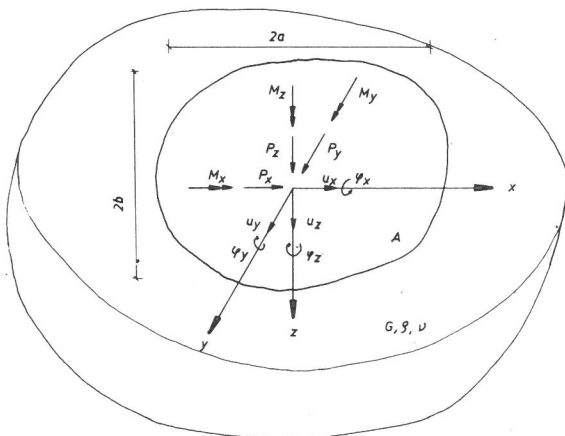


Abb. 1:

Grundlegendes System mit signifikanten Kenngrößen und Freiheitsgraden

Die Fläche A ist mit harmonischen Kräften und Momenten

$$\underline{p}(t) = \text{Re}(\tilde{\underline{p}} e^{i\omega t}) \quad (4.2)$$

in der Frequenz ω belastet, die die Verdrehungen und Verschiebungen

$$\underline{u}(t) = \text{Re}(\tilde{\underline{u}} e^{i\omega t}) \quad (4.3)$$

an der Halbraumoberfläche bewirken.

Der Vektor $\tilde{\underline{p}}$ enthält die komplexen Amplituden der Kräfte und Momente

$$\tilde{\underline{p}}^T = (\tilde{P}_x, \tilde{P}_y, \tilde{P}_z, \tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z) \quad (4.4)$$

und der Vektor $\tilde{\underline{u}}$ die komplexen Amplituden der Verschiebungen und Verdrehungen

$$\tilde{\underline{u}}^T = (\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\phi}_x, \tilde{\phi}_y, \tilde{\phi}_z). \quad (4.5)$$

Der Ansatz einer harmonischen Belastung bedeutet hier keine Einschränkung, da mit Hilfe der Theorie der Fouriertrans-

formation (Gl. 3.2) aus der Lösung für harmonische Erregung das Verhalten infolge beliebiger transienter Belastung errechnet werden kann.

Der Zusammenhang zwischen äußerer Belastung $\tilde{\underline{p}}$ und den Reaktionen $\tilde{\underline{u}}$ der Halbraumboberfläche kann dann unter Weglassung des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ mit Hilfe einer komplexen 6 x 6 Nachgiebigkeitsmatrix $\tilde{\underline{F}}$ beschrieben werden:

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{F}} \tilde{\underline{p}}. \quad (4.6)$$

Die komplexen Elemente

$$\tilde{f}^{jk}(a_0) = f_1^{jk}(a_0) + i f_2^{jk}(a_0) \quad \begin{array}{l} j = 1,6 \\ k = 1,6 \end{array} \quad (4.7)$$

der Matrix $\tilde{\underline{F}}$ sind von der Erregerfrequenz ω , beschrieben durch die dimensionslose Frequenzvariable

$$a_0 = \omega a/v_s, \quad (4.8)$$

von dem Seitenverhältnis b/a der Gründungsgeometrie und von dem Materialverhalten des Halbraumes, der durch den Schubmodul G , die Poissonzahl ν und die Materialdichte ρ beschrieben wird, abhängig. In Gl. 4.8 ist

$$v_s = \sqrt{G/\rho} \quad (4.9)$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Scherwelle.

Die Aufgabe besteht nun darin, ein geeignetes Verfahren anzugeben, mit dem die Elemente \tilde{f}^{jk} der Matrix $\tilde{\underline{F}}$ berechnet werden können.

Die meisten bisherigen Arbeiten beschränken sich auf die Untersuchung des axialsymmetrischen Problems einer masselosen Kreisplatte /12,13,14,15/ bzw. auf das 2-dimensionale Problem eines Laststreifens /16,17,18/. In diesen Arbeiten wird das zu untersuchende gemischte Randwertproblem - vorgeschriebene Verschiebungen im Bereich der Sohlfläche, vorgeschriebene Spannungen außerhalb der Sohlfläche - mit üblichen Methoden auf ein Integralgleichungsproblem zurückgeführt. Für andere Geometrien der Gründungsfläche wird das Problem näherungsweise gelöst, indem entweder eine äquivalente Kreisfläche zugrunde gelegt oder indem eine bestimmte Spannungsverteilung unter der Fläche angenommen wird /19,20,

21/. Ein weiterer Weg zur Lösung des Problems besteht darin, die Gründungsfläche in Teilflächen aufzulösen, in denen dann eine konstante Spannungsverteilung unbekannter Amplituden angenommen wird. (Die unbekannte Spannungsverteilung in der Gründungsebene wird durch eine Stufenfunktion angenähert).

Aus der Berechnung der Verschiebungen jeder Teilfläche infolge Belastung aller Teilflächen lassen sich dann die Nachgiebigkeitsfunktionen des Untergrundes aus der Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems für die unbekanntes Sohlspannungen gewinnen. Dieser Weg wurde in /22/ für den Fall einer Kreisfläche und in /23/ für beliebige Gründungsgeometrien beschrieben. In /24/ ist eine ähnliche Methode zur Berechnung der Wechselwirkung zweier quadratischer Fundamente zu finden.

Bei allen diesen Methoden muß jedoch das Verschiebungsfeld an der Halbraumoberfläche infolge einer bestimmten örtlich begrenzten (konstanten) Spannungsverteilung (z.B. auf der Fläche $A = 2a \times 2b$) bekannt sein. Da der Verlauf der örtlich begrenzten (konstanten) Spannungsverteilung meistens durch eine doppelte Fouriertransformation dargestellt wird, sind diese Lösungen sehr kompliziert, bedingen einen großen Aufwand an Rechenzeit und werden aus numerischen Gründen (Rundungsfehler bei Differenzen großer Zahlen) für größere Frequenzen instabil.

Durch Anwendung des Reziprozitätsprinzips für lineare Systeme (Gl. 3.5) bzw. nach einem Differentialprinzip lassen sich jedoch wesentlich einfachere Lösungen finden. Voraussetzung hierfür sind die Verschiebungsfelder von harmonischen Einzellasten an der Halbraumoberfläche, deren Kenntnis vorläufig vorausgesetzt wird. Das Reziprozitätsprinzip auf den hier zu untersuchenden Fall angewendet /26/ besagt, daß die gesuchte Verschiebung w_p (Abb. 2) infolge Belastung durch eine Spannungsverteilung $q(x,y)$ innerhalb einer Fläche A , gleich ist dem Integral des Verschiebungsfeldes infolge einer Einzellast $Q_p = 1$, integriert über die Fläche A . Diese mehr anschauliche Definition kann auch ersetzt werden durch ein Differentialprinzip /27/, bei dem die Spannungsverteilung durch differentielle Einzellasten

$$dQ = q \, dx \, dy \qquad (4.10)$$

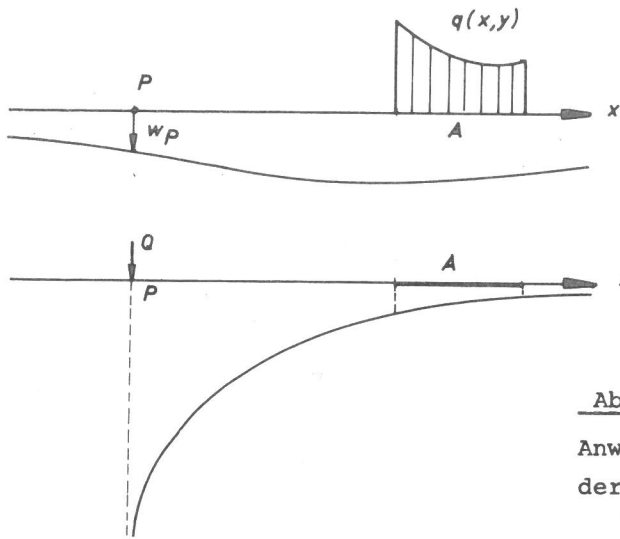


Abb. 2:
Anwendung des Satzes von Maxwell zur Ermittlung der Verschiebung infolge einer Flächenlast.

beschrieben wird. Die Verschiebung eines Punktes P ergibt sich dann in gleicher Weise wieder aus der Integration der Verschiebungsfelder aller differentieller Einzellasten.

Wird das Verschiebungsfeld infolge einer harmonischen Einzellast Q, dargestellt durch

$$w = \frac{Q}{G \cdot r} (f_3(\bar{r}, \nu) + i f_4(\bar{r}, \nu)) e^{i\omega t} , \quad (4.11)$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Entfernung eines betrachteten Punktes von der Last Q und

$$\bar{r} = r \omega / v_s \quad (4.12)$$

ein dimensionsloser Frequenzparameter ist, so erhält man nach obigen Prinzipien die Verschiebung eines Punktes P zu

$$w_P = \iint_{(A)} \frac{1}{G \cdot r} (f_3(\bar{r}, \nu) + i f_4(\bar{r}, \nu)) q(x, y) dx dy . \quad (4.13)$$

Liegt der Punkt P innerhalb der Fläche A, so besitzt der Integrand der Gl. 4.13 an der Stelle $r = 0$ einen Pol. Verwendet man jedoch anstelle der karthesischen Koordinaten ein Polarkoordinatensystem mit

$$dx dy = r dr d\phi \quad (4.14)$$

so kann der Pol auf einfache Weise zum Verschwinden gebracht werden und man erhält:

$$w_P = \frac{1}{G} \iint_{(A)} (f_3(\bar{r}, \nu) + i f_4(\bar{r}, \nu)) q(r, \phi) dr d\phi . \quad (4.15)$$

Abb. 3 zeigt die Art der Integration über ein rechteckiges

Gebiet der Dimension $2a \times 2b$, wobei für den Fall, daß die Verschiebung an der Stelle $r = 0$ gesucht ist, die Integration über die Teilgebiete I und II durchzuführen ist, deren Grenzen beschrieben werden durch:

$$\text{Teilgebiet I: } 0 \leq r \leq a/\cos\varphi_I; \varphi_I = \tan^{-1} b/a \quad (4.16)$$

$$\text{Teilgebiet II: } 0 \leq r \leq b/\cos\varphi_{II}; \varphi_{II} = \tan^{-1} a/b .$$

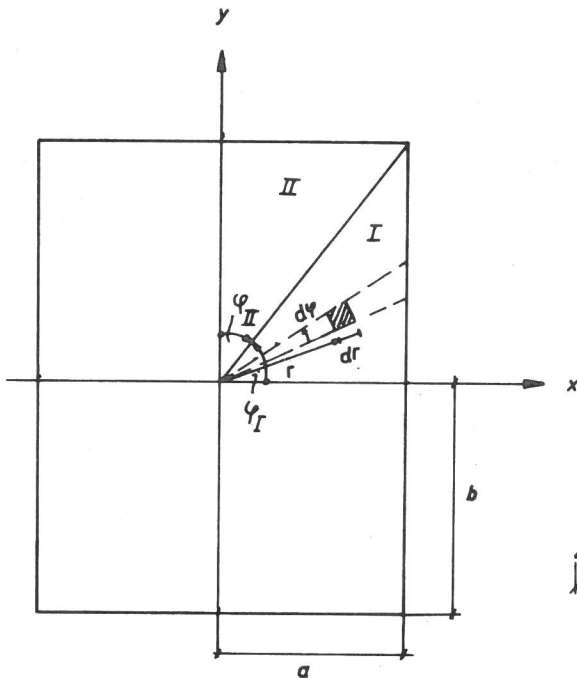


Abb.: 3

Integration über ein rechteckiges Gebiet mit Polarkoordinaten

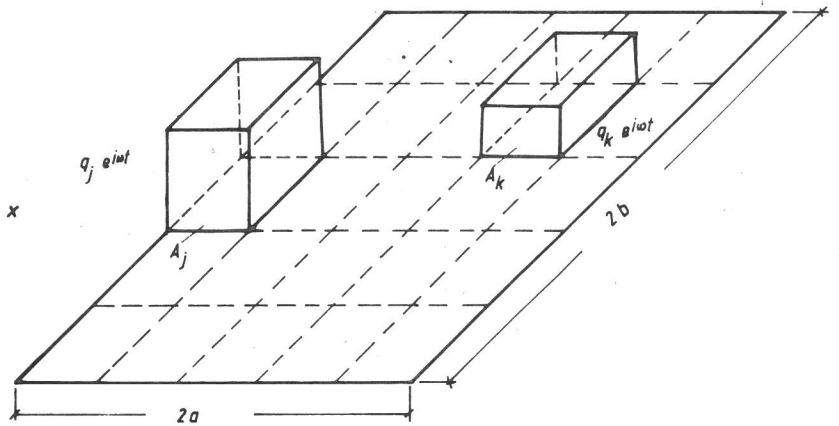


Abb.: 4:

Aufteilung einer Fläche in Teilflächen mit Ansatzbereichsweiser konstanter Spannungsverteilung.

Das durch Gl. 4.15 beschriebene Integralgleichungsproblem in den Spannungen $q(r, \varphi)$ wird nun näherungsweise gelöst, indem ähnlich wie in /23,24/ die Sohlfläche A in einzelne kleine Teilflächen A_j aufgelöst wird, (Abb. 4) in denen dann eine konstante Spannungsverteilung unbekannter Amplitude q_j angenommen wird.

Für die Verschiebung u_{jk} der j -ten Teilfläche A_j infolge Belastung der Teilfläche A_k mit $q_k = 1$ erhält man dann nach Gl. 4.15:

$$u_{jk} = \iint_{A_k} (f_3(\bar{r}, v) + i f_4(\bar{r}, v)) dr d\varphi = s_{jk} q_k. \quad (4.17)$$

Permutative Durchführung der in Gl.4.17 angegebenen Operation

für alle Elemente A_n , $n = 1, j, k, \dots, m$ ergibt eine Einflußmatrix $\tilde{\underline{S}}$ für die Verschiebungen am Mittelpunkt jeder Teilfläche infolge Belastung durch eine Einheitsspannung $q_k = 1 \cdot e^{i\omega t}$. Nach Hinzufügung der geometrischen Randbedingungen für eine starre Platte

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{xj} &= \tilde{v}_x - \tilde{\varphi}_z y_j \\ u_{yj} &= \tilde{v}_y + \tilde{\varphi}_z y_j \\ u_{zj} &= \tilde{v}_z + \tilde{\varphi}_x y_j - \tilde{\varphi}_y x_j,\end{aligned}\tag{4.18}$$

hierin sind $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z$ die komplexen Verschiebungsamplituden am Mittelpunkt (0,0,0) der Platte und $\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y, \tilde{\varphi}_z$ die komplexen Verdrehungsamplituden, und Erfüllung der Äquivalenz

$$\begin{aligned}\tilde{P}_l &= \sum_{n=1}^m A_n \tilde{q}_{n,lz} \quad (l = x, y, z) \\ \tilde{M}_x &= \sum_{n=1}^m y_n A_n \tilde{q}_{n,zz} \\ \tilde{M}_y &= \sum_{n=1}^m x_n A_n \tilde{q}_{n,zz} \\ \tilde{M}_z &= \sum_{n=1}^m (x_n \tilde{q}_{n,yz} - y_n \tilde{q}_{n,xz}) A_n,\end{aligned}\tag{4.19}$$

erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Amplituden \tilde{q} der unbekanntenen Sohlspannungen sowie der Elemente \tilde{f} der Nachgiebigkeitsmatrix $\tilde{\underline{F}}$. Durch Zusammenfassung der Gl. 4.17, 4.18, 4.19 stellt sich das Gleichungssystem in Matrixschreibweise in folgender Form dar:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{S}} & \underline{\underline{G}} \\ \tilde{\underline{D}} & \underline{\underline{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{P}} \end{bmatrix}.\tag{4.20}$$

Hierin enthalten die Teilmatrizen $\tilde{\underline{S}}$ die Verschiebungseinflußfunktionen nach Gl.4.17, $\underline{\underline{G}}$ die geometrischen Randbedingungen nach Gl.4.18 und $\tilde{\underline{D}}$ die Äquivalenzbedingungen nach Gl.4.19. Die Matrix der rechten Seite besteht im oberen Teil aus der Null-Matrix $\underline{\underline{O}}$ und im unteren Teil aus der Matrix $\underline{\underline{P}}$

der äußeren Belastung. Nach der Lösung des linearen Gleichungssystems (4.20) enthält die Matrix \tilde{Q} die komplexen Spannungsamplituden aller Teilflächen und die Matrix \tilde{F} die gesuchten Elemente der Nachgiebigkeitsfunktionen.

Neben der oben beschriebenen Methode der Teilflächen sind noch andere Methoden möglich, das Integralgleichungsproblem (4.15) zu lösen. So kann z.B. eine beliebige Spannungsverteilung $q(x,y)$ angenommen und diese solange iterativ verändert werden, bis die geometrischen Randbedingungen und die Äquivalenz erfüllt sind /28/. Weiter kann das unbekannte Spannungsfeld durch einen Polynomansatz oder auch einen Funktionenansatz der Form

$$\tilde{q}(x,y) = \sum_n \tilde{q}_n \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^{-1/2} T_n(x,y), \quad (4.21)$$

wobei $T_n(x,y)$ Polynome vom Chebyscheffschen Typ sind, approximiert wird. Die Koeffizienten \tilde{q}_n der einzelnen Funktionen $T_n(x,y)$ können mit einer linearen Ausgleichsrechnung nach dem Verfahren der kleinsten Quadrate bzw. direkt aus dem sich ergebenden linearen Gleichungssystem berechnet werden.

4.2 Verschiebungsfeld infolge vertikaler Einzellast

Zur Anwendung der oben beschriebenen Methode ist die Kenntnis des Verschiebungsfeldes harmonisch variierender Einzellasten notwendig. Holzlöhner /26/ berechnete eine Lösung, indem er seine Lösung /25/ für den Fall einer mit einer konstanten Spannungsverteilung beaufschlagten Rechteckfläche für den Grenzwert $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ auswertete. Diese Lösung wird aus einer Reihenentwicklung gewonnen und ist deshalb verhältnismäßig rechenzeitaufwendig und der berechenbare Frequenzbereich ist aus numerischen Gründen beschränkt.

Für den Fall, daß die Impulsantwort $h_s(t)$ oder Sprungantwort $h(t)$ des Untergrundes infolge vertikaler Belastung bekannt ist, kann jedoch durch Anwendung des Faltungssatzes (Gl.3.3 und 3.4) eine Lösung gewonnen werden, die die oben angeführten Nachteile vermeidet. Eine solche Lösung liegt z.B. von Pekeris /29/ für vertikale Belastung durch eine Sprungfunktion vor.

Aus dem für Erregung durch eine Sprungfunktion geltenden Faltungssatz

$$w(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dp(t-\lambda)}{d\lambda} h(\lambda) d\lambda, \quad (4.22)$$

ergibt sich die harmonische Antwort $w(t)$ des Untergrunds infolge einer harmonischen Einzellast

$$p(t) = \tilde{p} e^{i\omega t}, \quad (4.23)$$

nach Durchführung der in Gl.4.22 angegebenen Differentialoperation

$$\frac{dp(t-\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(\tilde{p} e^{i\omega(t-\lambda)})}{d\lambda} = -i\omega\tilde{p} e^{i\omega(t-\lambda)} \quad (4.24)$$

zu:

$$w(t) = -\tilde{p}i\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega\lambda} h(\lambda) d\lambda, \quad (4.25)$$

Mit den in /29/ angegebenen Lösungen für die vertikale Sprungantwort h_{zz} und eine Poissonzahl $\nu = 0.25$, kann das vertikale Verschiebungsfeld infolge einer vertikalen, harmonisch variierenden Einzellast angegeben werden zu:

$$w_{zz}(t) = \frac{\tilde{p} z e^{i\omega t}}{G r} \tilde{w}_{zz}(\bar{r}) = \frac{\tilde{p} z e^{i\omega t}}{G r} (f_3(\bar{r}) + i f_4(\bar{r})). \quad (4.26)$$

Hierbei wird die komplexe Größe $\tilde{w}_{zz}(\bar{r})$ durch folgende Integrale beschrieben, die für einen festen Wert $\bar{r} = \omega r/v_s$, getrennt für den Realteil und den Imaginärteil auszuwerten sind.

$$\tilde{w}_{zz}(\bar{r}) = I_1(\bar{r}) + I_2(\bar{r}) + I_3(\bar{r}) + I_4(\bar{r}) + I_5(\bar{r}) \quad (4.27)$$

mit

$$I_1 = \frac{3}{16} (e^{-i\bar{r}} + e^{-i\bar{r}/\sqrt{3}}) \quad (4.28)$$

$$I_2 = -i \frac{\sqrt{3} \bar{r}}{32 \pi} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\alpha\bar{r}} \cosh u \, du \quad (4.29)$$

$$u_1 = \cosh^{-1} 1/\alpha\sqrt{3}$$

$$u_2 = \cosh^{-1} 1/\alpha$$

$$I_3 = -i \frac{\sqrt{3} \sqrt{3+5}}{32\pi} \bar{r} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\gamma \bar{r} \sin u} du \quad (4.30)$$

$$u_1 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3} \gamma}$$

$$u_2 = \sin^{-1} \frac{1}{\gamma}$$

$$I_4 = \frac{-i\sqrt{3} \sqrt{3-5}}{32\pi} \bar{r} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\beta \bar{r} \cosh u} du \quad (4.31)$$

$$u_1 = \cosh^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}\beta}$$

$$u_2 = \cosh^{-1} \frac{1}{\beta}$$

$$I_5 = -i \frac{\sqrt{3} \sqrt{3+5}}{16\pi} \bar{r} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\gamma \bar{r} \sin u} du \quad (4.32)$$

$$u_1 = \sin^{-1} \frac{1}{\gamma}$$

$$u_2 = \sin^{-1} 1$$

Obige Formeln gelten für eine Poissonzahl $\nu = 0,25$, wobei für diesen Fall die Variablen α, β, γ die Werte

$$\alpha = 1/2$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{3-\sqrt{3}} \quad (4.33)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{3+\sqrt{3}}$$

annehmen.

In gleicher Weise kann das horizontale Verschiebungsfeld

$$w_{rz}(t) = \frac{\tilde{P}}{Gr} \tilde{w}_{rz}(\bar{r}) e^{i\omega t} \quad (4.34)$$

infolge Belastung durch eine vertikale harmonische Einzel-
last berechnet werden. /27/ .

Die numerische Auswertung der Gl. 4.28 - 4.32 wurde mit dem

Verfahren der rationalen Extrapolation durchgeführt. Es treten keinerlei numerische Schwierigkeiten auf, der berechenbare Frequenzbereich ist praktisch unbeschränkt (Faktor \bar{r} vor den Integralen) und die Ausführung ist außerordentlich schnell.

In den Abb. 5 und 6 sind die Beträge

$$|w(\bar{r})| = \sqrt{f_3^2(\bar{r}) + f_4^2(\bar{r})}, \quad (4.35)$$

sowie Phasenwinkel

$$\varphi(\bar{r}) = \tan^{-1} f_4(\bar{r})/f_3(\bar{r}), \quad (4.36)$$

für das vertikale $\tilde{w}_{zz}(\bar{r})$ und horizontale $\tilde{w}_{rz}(\bar{r})$ Verschiebungsfeld infolge vertikaler harmonischer Einzellast angeben.

Im Vergleich sind dort ebenfalls die Fernfeldlösungen (für $\bar{r} \gg 0$) entsprechend den Gleichungen

$$\tilde{w}_{zz}^F = \frac{\tilde{P}_z e^{i\omega t}}{G r} \frac{(2\bar{\kappa}^2 - 1)^2 \sqrt{\bar{\kappa}^2 - \bar{h}^2}}{\bar{\kappa} N} \sqrt{\frac{\bar{\kappa} \bar{r}}{2\pi}} e^{-i(\bar{\kappa} r + \pi/4)} \quad (4.37)$$

$$\tilde{w}_{rz}^F = \tilde{w}_{zr}^F = \frac{\tilde{P}_z e^{i\omega t}}{G r} H \sqrt{\frac{\bar{\kappa} \bar{r}}{2\pi}} e^{-i(\bar{\kappa} r + 0,75 \pi)} \quad (4.38)$$

mit

$$H = \frac{(2\bar{\kappa}^2 - 1 - 2 \sqrt{\bar{\kappa}^2 - \bar{h}^2} \sqrt{\bar{\kappa}^2 - 1}) (2\bar{\kappa}^2 - 1)^2}{N} \quad (4.39)$$

$$N = 8 (1 - (6 - 4\bar{h}^2) \bar{\kappa}^2 + 6 (1 - \bar{h}^2) \bar{\kappa}^4) \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \kappa/k \\ \bar{h} &= h/k \\ \bar{\xi} &= \xi/k \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$k = \omega/v_s$$

$$h = \omega/v_p$$

$$\kappa = \omega/v_R$$

angegeben.

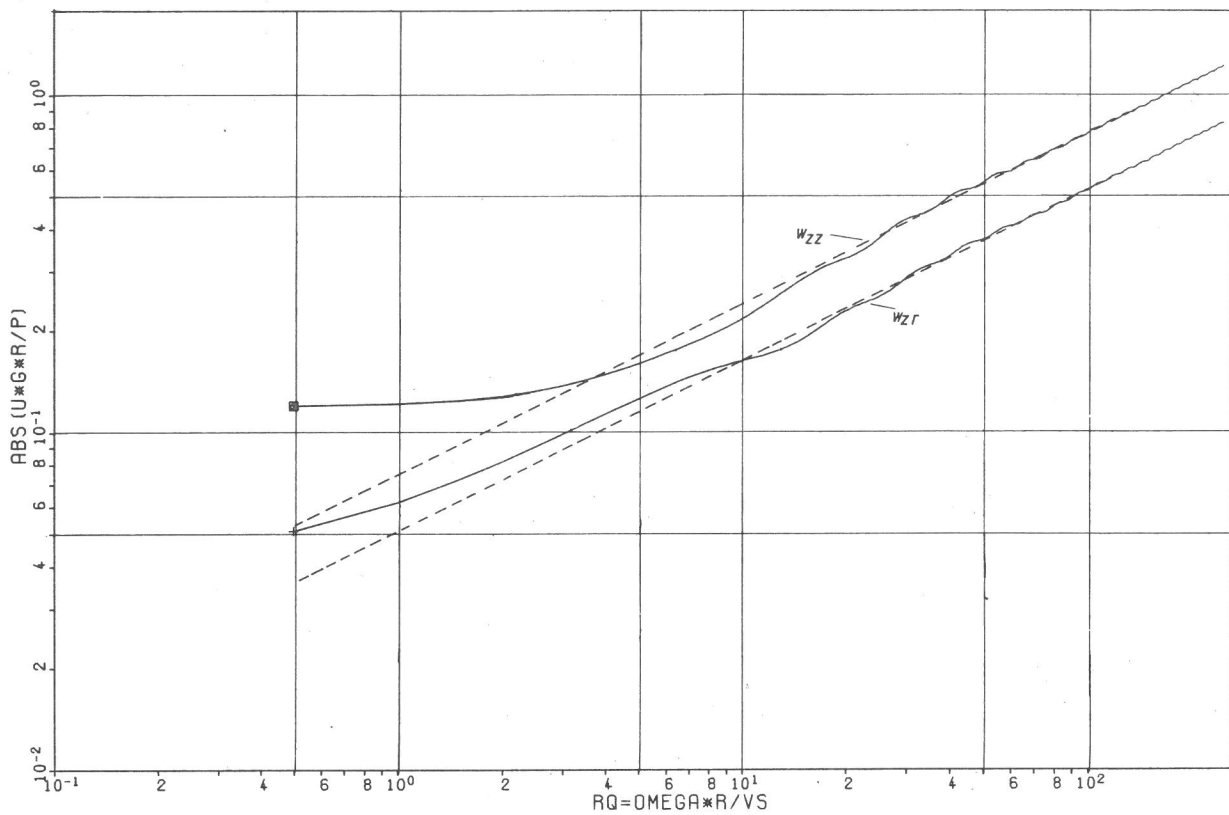


Abb. 5:

Beträge der Verschiebungen w_{zz} , w_{zr} infolge einer vertikalen Einzellast.

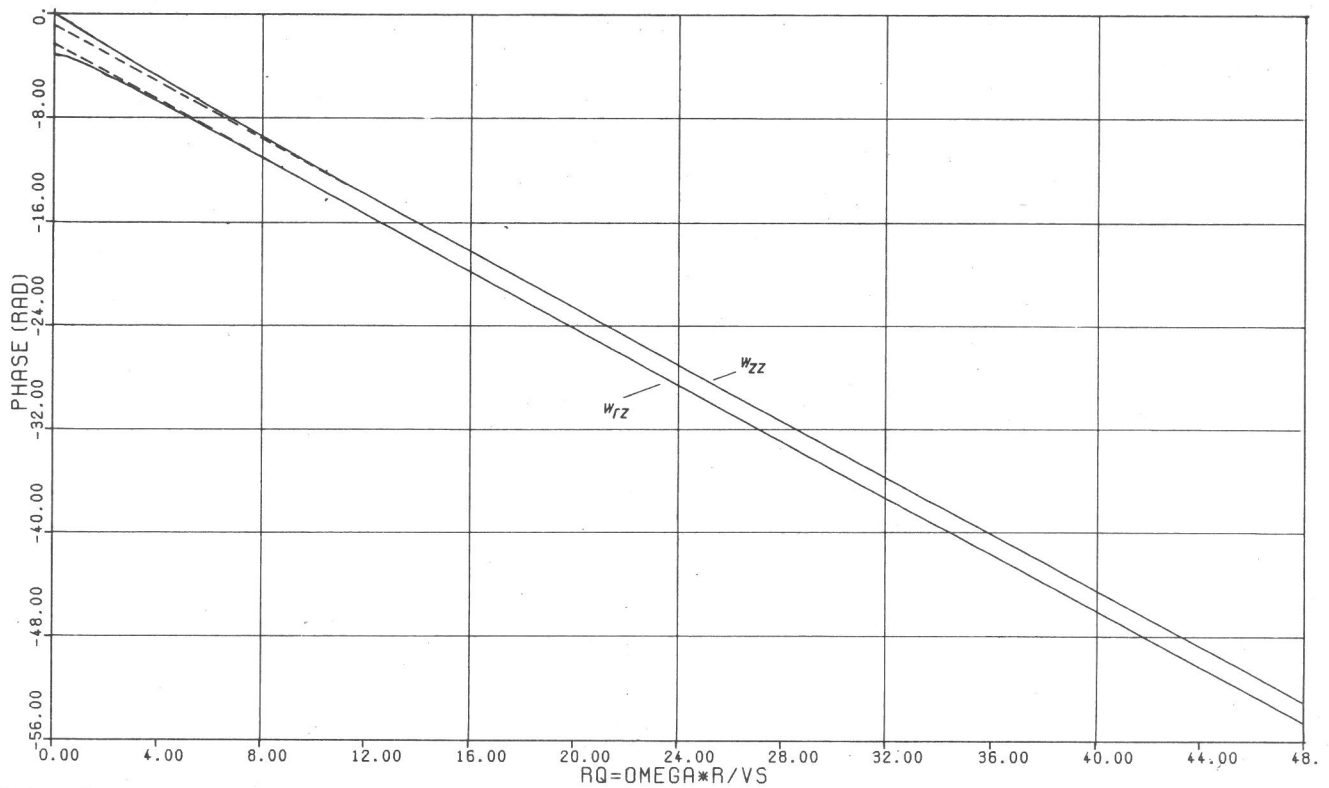


Abb. 6:

Phasen der Verschiebungen w_{zz} , w_{zr} infolge einer vertikalen Einzellast.

κ ist die reelle Wurzel der sogenannten Rayleighgleichung

$$F(\bar{\xi}) = (2\bar{\xi} - 1)^2 - 4\bar{\xi}^{-2} \sqrt{\bar{\xi}^2 - \bar{h}^2} \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1} \quad (4.42)$$

und v_s , v_p , v_R sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Scher- Kompressions- und Rayleighwelle.

Aus dem Vergleich der exakten Lösungen mit den Lösungen für das Fernfeld ist zu sehen, daß die exakten Lösungen für große Werte von \bar{r} in die Fernfeldlösungen übergehen. Für die Berechnung der Nachgiebigkeitsfunktionen starrer Sohlflächen mit Hilfe der oben ausgeführten Teilflächenmethode bestehen deshalb keinerlei Beschränkungen sowohl hinsichtlich des geometrischen Abstandes zweier Teilflächen wie auch des analysierbaren Frequenzbereiches.

4.3 Nachgiebigkeitsfunktionen starrer Sohlflächen

Mit den in Abschnitt 4.2 angegebenen Einzellastlösungen und der in 4.1 ausgeführten Teilflächenmethode werden die Nachgiebigkeitsfunktionen starrer Sohlflächen berechnet.

Untersucht werden im Rahmen dieser Arbeit nur die Freiheitsgrade vertikale Translation, sowie die Rotationen um beide horizontalen Achsen der Sohlfläche.

Für diese Freiheitsgrade sind die Nachgiebigkeitsfunktionen definiert durch

$$\tilde{f}_{zz}(a_0) = G a \tilde{u}_z / \tilde{P}_z \quad (4.43)$$

$$\tilde{f}_{\varphi_x \varphi_x}(a_0) = G a^3 \tilde{\varphi}_x / \tilde{M}_x \quad (4.44)$$

$$\tilde{f}_{\varphi_y \varphi_y}(a_0) = G a^3 \tilde{\varphi}_y / \tilde{M}_y . \quad (4.45)$$

a_0 ist ein dimensionsloser Frequenzparameter

$$a_0 = a \omega / v_s, \quad (4.46)$$

der einen Bezug der kleineren Fundamentseite zu der Scherwellenlänge herstellt. Alle angegebenen Kurven gelten für eine Poissonzahl von $\nu = 0,25$.

Für die hier nicht behandelten Freiheitsgrade der beiden horizontalen Translationen in x- und y-Richtung sowie für das Koppelglied 1. Ordnung zwischen horizontaler Verschiebung und zugeordnetem Moment einer starren Fläche werden Näherungslösungen angegeben, deren Ableitung in ausführ-

licher Weise in /30/ dargestellt ist.
Die Moden sind dort definiert durch:

$$\tilde{f}_{xx}(a_0) = G \ 2b \ \tilde{u}_x / \tilde{P}_x \quad (4.47)$$

$$\tilde{f}_{yy}(b_0) = G \ b \ \tilde{u}_y / \tilde{P}_y$$

$$\tilde{f}_{x\phi y}(a_0) = G \ 2b \ \tilde{u}_x / \tilde{M}_y = G \ 2b \ \tilde{\phi}_y / \tilde{P}_x \ . \quad (4.49)$$

b ist hierbei die längere Seite der Gründungsfläche.
In Abb. 7 sind die Realteile $f_1(a_0)$ und in Abb. 8 die Imaginärteile $-f_2(a_0)$ der vertikalen Nachgiebigkeitsfunktion f_{zz} für verschiedene Seitenverhältnisse b/a im Bereich $1 \leq b/a \leq 10$ aufgetragen.

Es ist zu erkennen, daß die Nachgiebigkeitsfunktionen mit zunehmendem Verhältnis b/a stark abnehmen. Insbesondere treten bei allen b/a-Verhältnissen für den Bereich $a_0 > 3$ für den Realteil sehr kleine Werte auf. Für die Anwendung bedeutet dies, daß die hieraus zu berechnenden Steifigkeitsfunktionen (Inverse der Nachgiebigkeitsfunktionen) bezüglich des Realteils aus numerischen Gründen etwas ungewisse Werte annehmen können. Für den hier zu untersuchenden Fall einer Schwelle mit den Abmessungen $a = 0,13$, $b = 1,30$ m dürfte dies aber ohne Bedeutung sein, da unter der Annahme von $v_s = 200$ m/s und $a_0 = 3$ Frequenzen bis

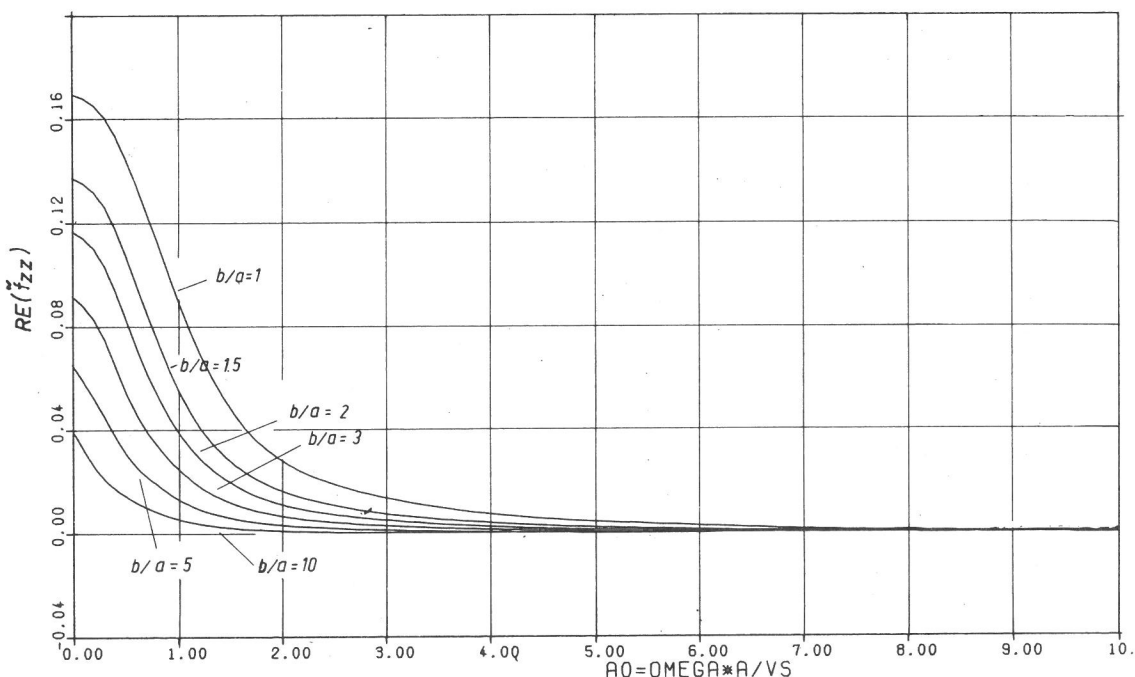


Abb. 7:

Realteile der Nachgiebigkeitsfunktionen \tilde{f}_{zz} für verschiedene Seitenverhältnisse b/a.

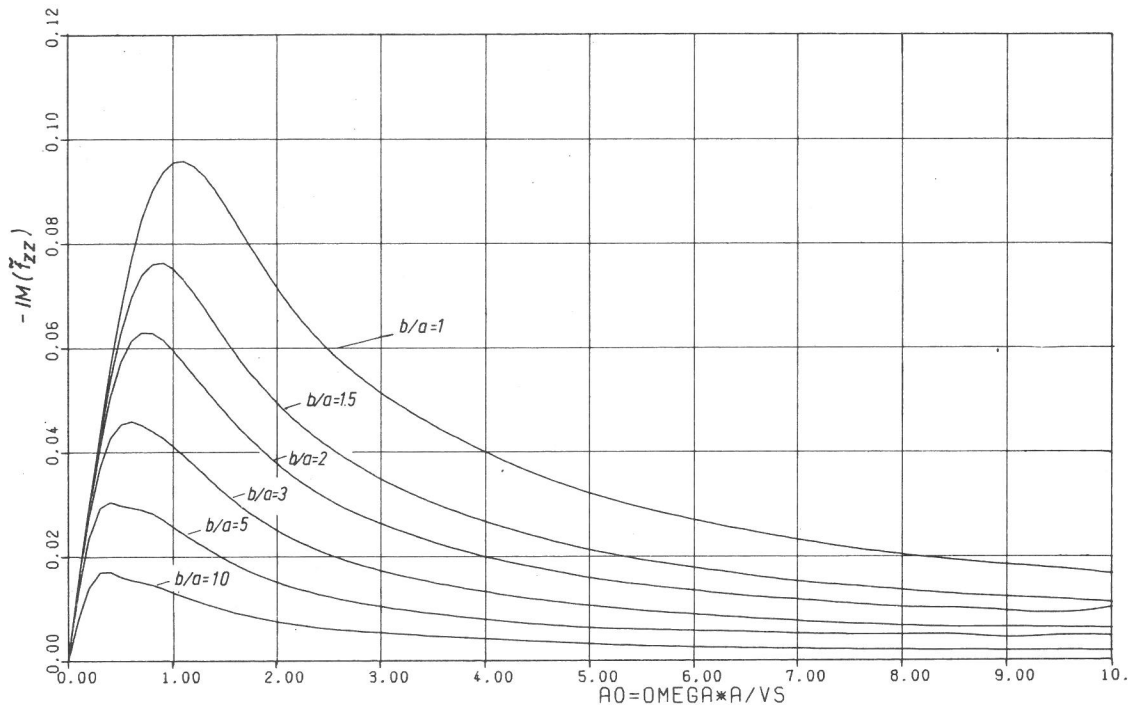


Abb. 8:

Imaginärteile der Nachgiebigkeitsfunktionen \tilde{f}_{zz} für verschiedene Seitenverhältnisse b/a .

$$f = \frac{a_0}{2 \pi a} \frac{v_s}{a} = \frac{3}{2 \pi} \frac{200}{0,13} \approx 750 \text{ Hz}$$

untersucht werden können.

Die Abbildungen (9) und (10) zeigen die Real- und Imaginärteile für die Rotationsmode $\tilde{\varphi}_y$ (um die "lange" Achse). Auch hier nehmen die Nachgiebigkeitsfunktionen mit zunehmenden Verhältnis b/a stark ab. Der Einfluß kleiner Werte der Realteile der Nachgiebigkeitsfunktionen auf die Realteile der Steifigkeitsfunktionen tritt hier für a_0 -Werte $a_0 > 5$ auf. In den Abbildungen (11) und (12) sind die Real- und Imaginärteile für die Rotationsmode $\tilde{\varphi}_x$ um die x-Achse (kurze Achse) aufgetragen. Bei dieser Bewegungsmode treten schon ab einem Seitenverhältnis von $b/a = 3$ sehr kleine Werte auf. Für ein Seitenverhältnis von $b/a = 10$ sind die Werte der Nachgiebigkeitsfunktion nahe Null. Dies entspricht in der Steifigkeitsformulierung einer außerordentlich großen Steifigkeit, die dieser Bewegungsmode entgegengesetzt wird. Für die einzelne Schwelle und den Schwellenrost könnte dies bedeuten, daß diese Bewegungsmode ohne wesentlichen Einfluß auf das Schwingungsverhalten der Einzelschwelle und des Rostes ist. Diese Aussage kann jedoch nur solange aufrecht-

erhalten werden, so lange die Eigenelastizität der Schwelle nicht überwiegt (Randbedingung starre Schwelle!) und die Belastung in dieser Mode nicht alle anderen Belastungsmoden übersteigt.

In den Abb. 13-15 sind für alle drei untersuchten Bewegungsmoden die Nachgiebigkeitsfunktionen für das für diese Untersuchung wichtige Seitenverhältnis $b/a = 10$ aufgetragen.

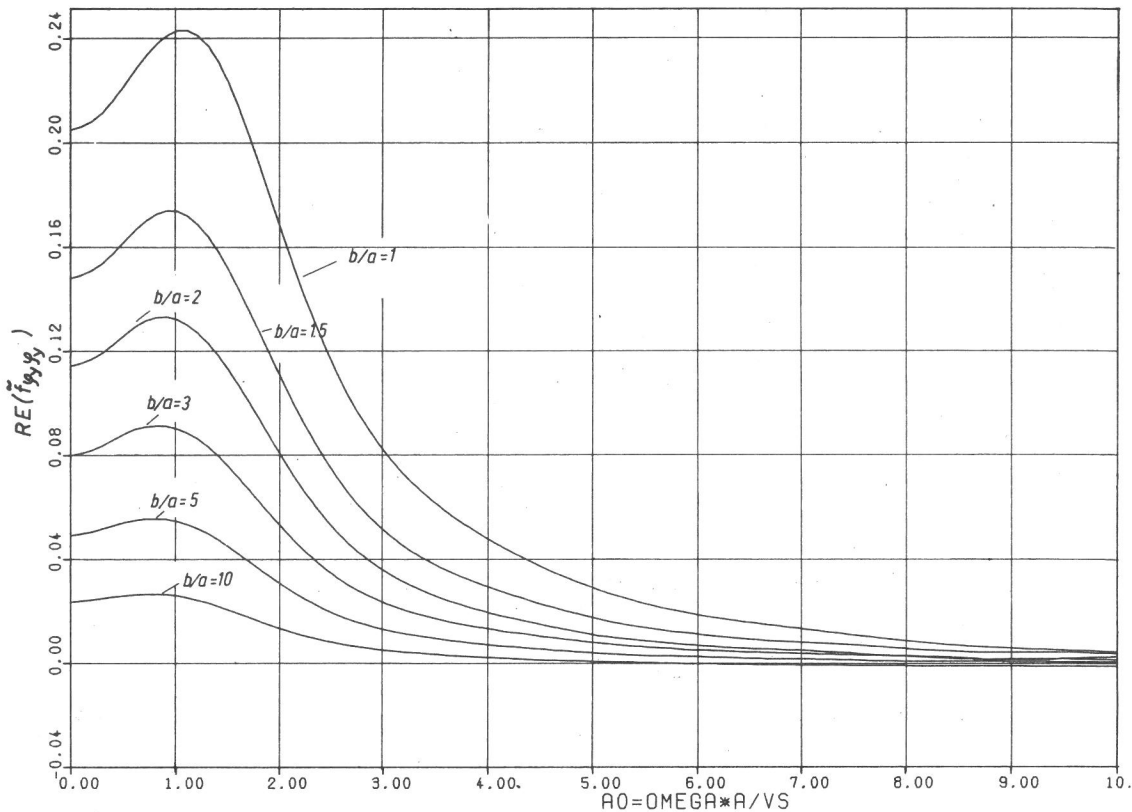


Abb. 9:

Realteile der Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi\varphi y}$ für verschiedene Seitenverhältnisse b/a .

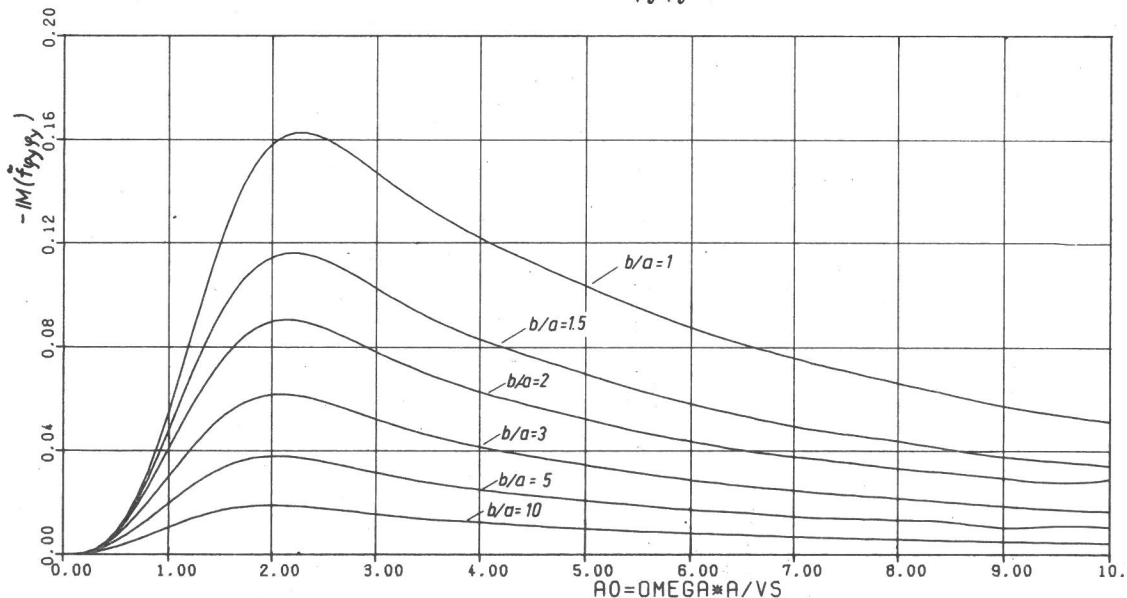


Abb. 10:

Imaginärteile der Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi\varphi y}$ für verschiedene Seitenverhältnisse b/a .

Zum Vergleich sind Lösungen nach Luco /18/ eingetragen, der den 2-dimensionalen Fall eines Laststreifens untersucht. (Verglichen werden können nur Lösungen für die vertikale Translation und die Rotation um die y-Achse, da beim

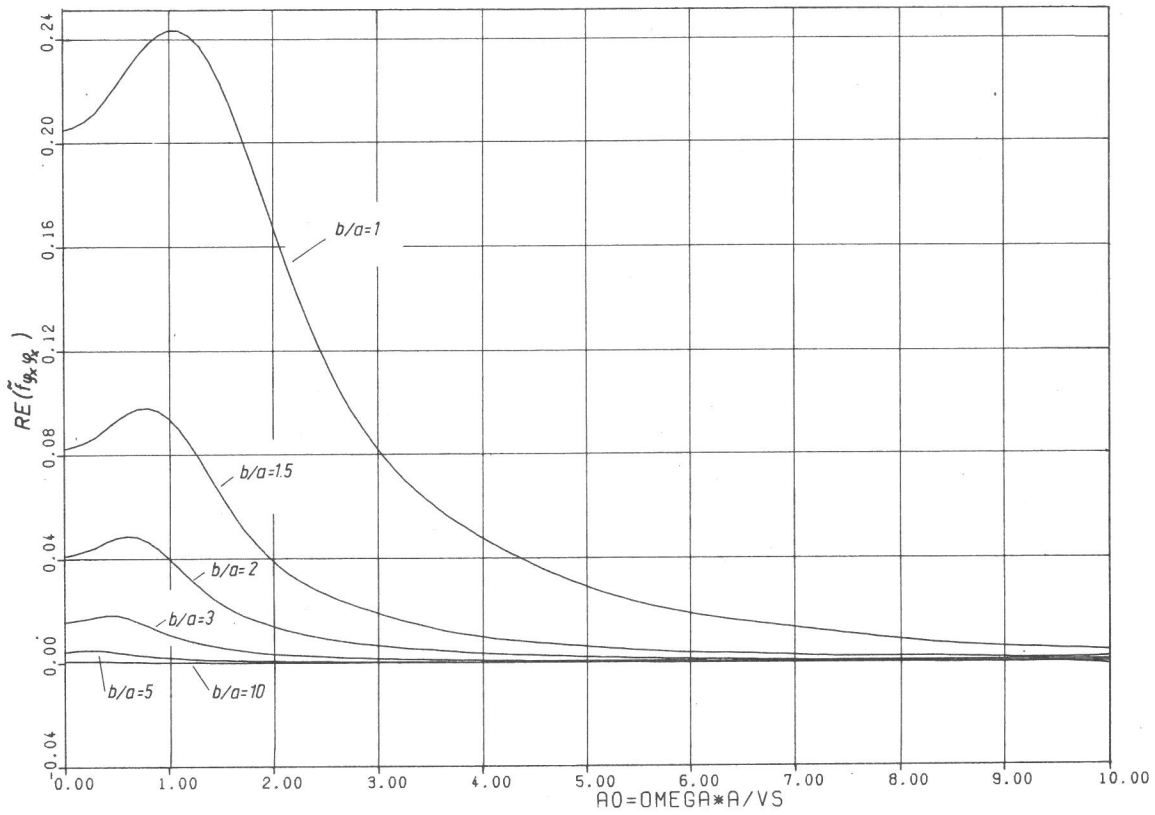


Abb. 11:

Realteile der Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi_x \varphi_x}$ für verschiedene Seitenverhältnisse b/a .

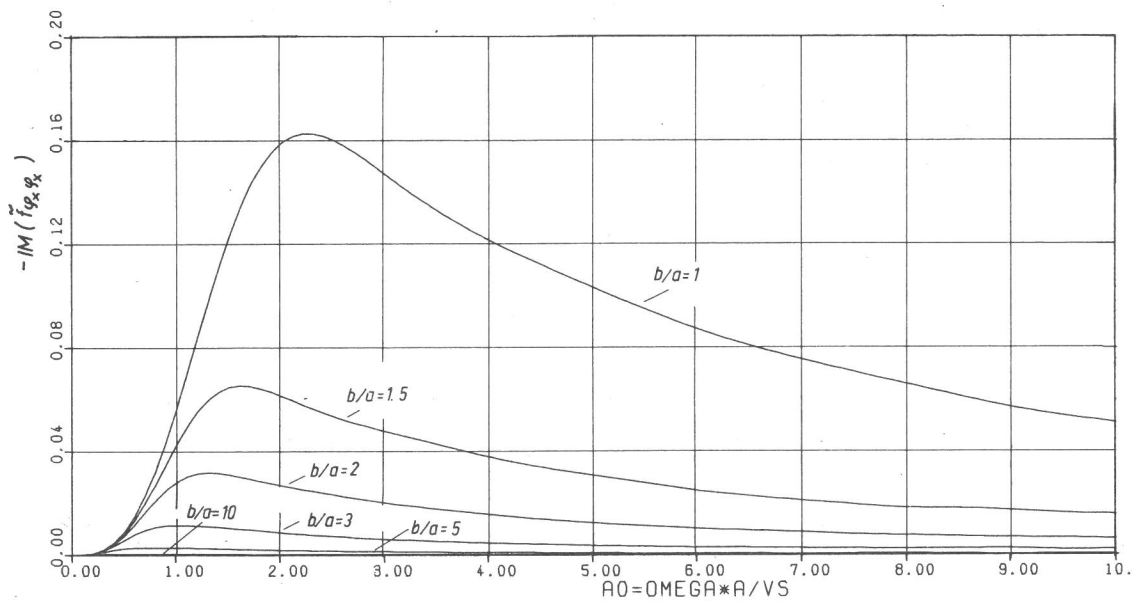


Abb. 12:

Imaginärteile der Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi_x \varphi_x}$ für verschiedene Seitenverhältnisse b/a .

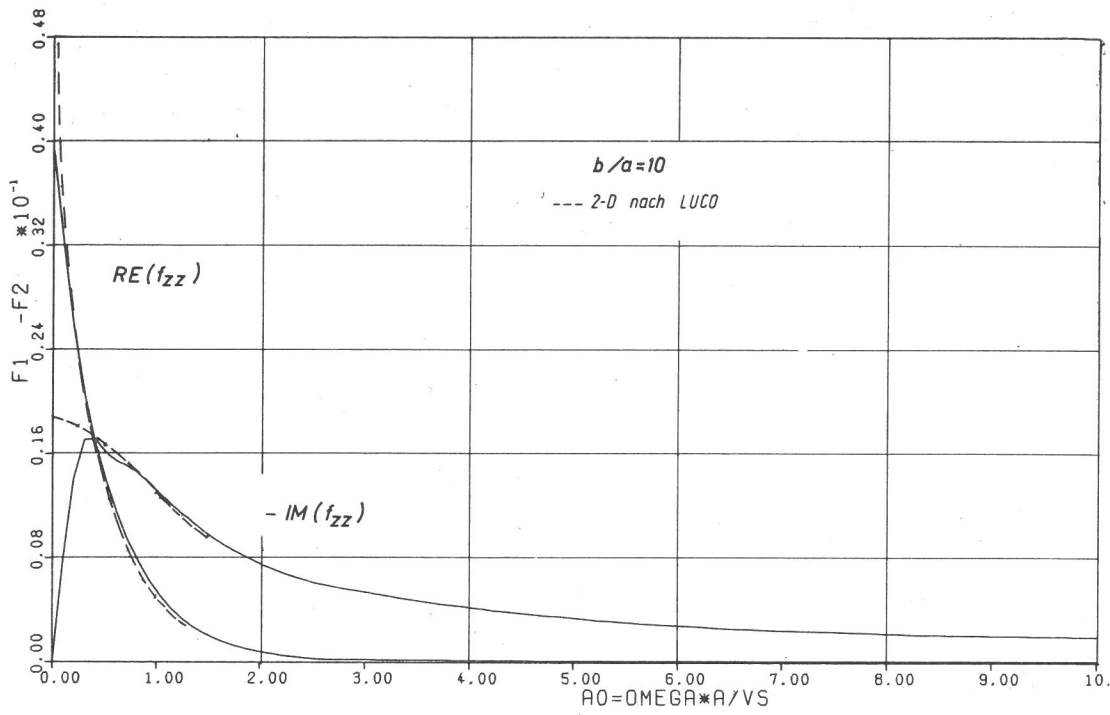


Abb.: 13:

Real- und Imaginärteil der Nachgiebigkeitsfunktionen \tilde{f}_{zz} für ein Seitenverhältnis $b/a = 10$

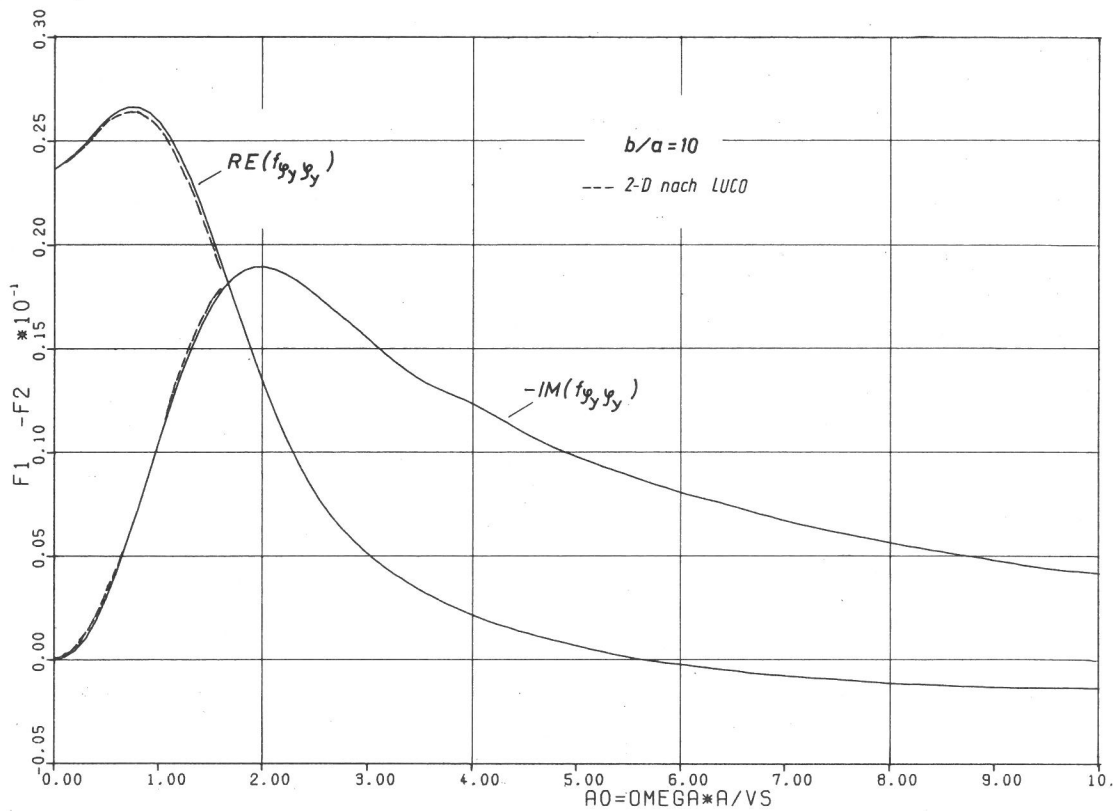


Abb.: 14:

Real- und Imaginärteil der Nachgiebigkeitsfunktion $\tilde{f}_{\phi_y \phi_y}$ für ein Seitenverhältnis $b/a = 10$

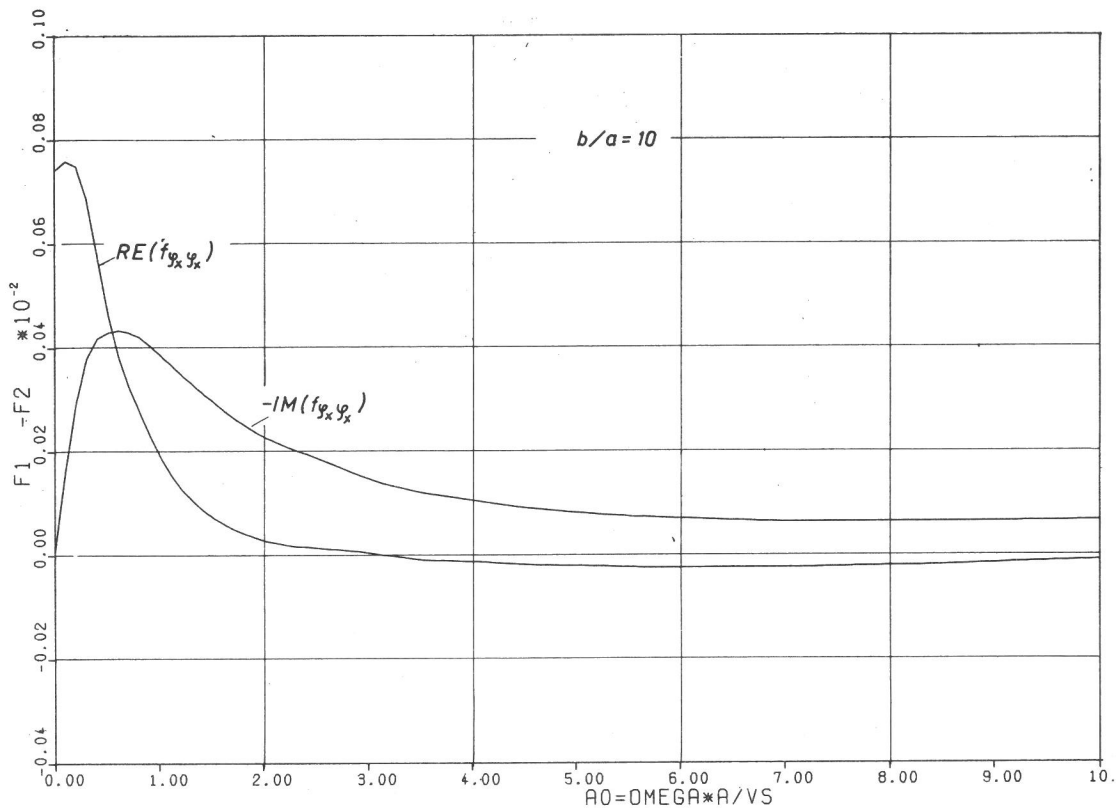


Abb. 15:

Real- und Imaginärteil der Nachgiebigkeitsfunktion $\tilde{f}_{\varphi_x \varphi_x}$ für ein Seitenverhältnis $b/a = 10$

Laststreifen eine Rotation um die x-Achse nicht möglich ist). Man erkennt, daß sich beide Lösungen für Werte von $a_0 \gtrsim 0,3$ sehr gut annähern. (Für die Mode $\tilde{\varphi}_y$ schon früher). Für größere a_0 -Werte ist deshalb eine 2-dimensionale Lösung recht gut geeignet, das Verhalten einer Einzelschwelle zu beschreiben. Für kleinere a_0 -Werte bis $a_0 \approx 0,3$ (dies entspricht unter den gegebenen Verhältnissen einer Frequenz bis etwa $f \approx 80$ Hz) ist eine 2-dimensionale Lösung jedoch nicht ausreichend geeignet, da insbesondere diese Lösung für den Fall $a_0 = 0$ unendliche Werte für den Realteil der Nachgiebigkeitsfunktionen liefert. Im Sinne einer vollständigen Darstellung sind in Abb. 16 die Nachgiebigkeitsfunktionen der horizontalen Bewegungsmoden sowie der Koppelungsmoden 1. Ordnung aufgezeichnet. Es sei jedoch nochmals betont, daß es sich hier nur um Näherungswerte handelt.

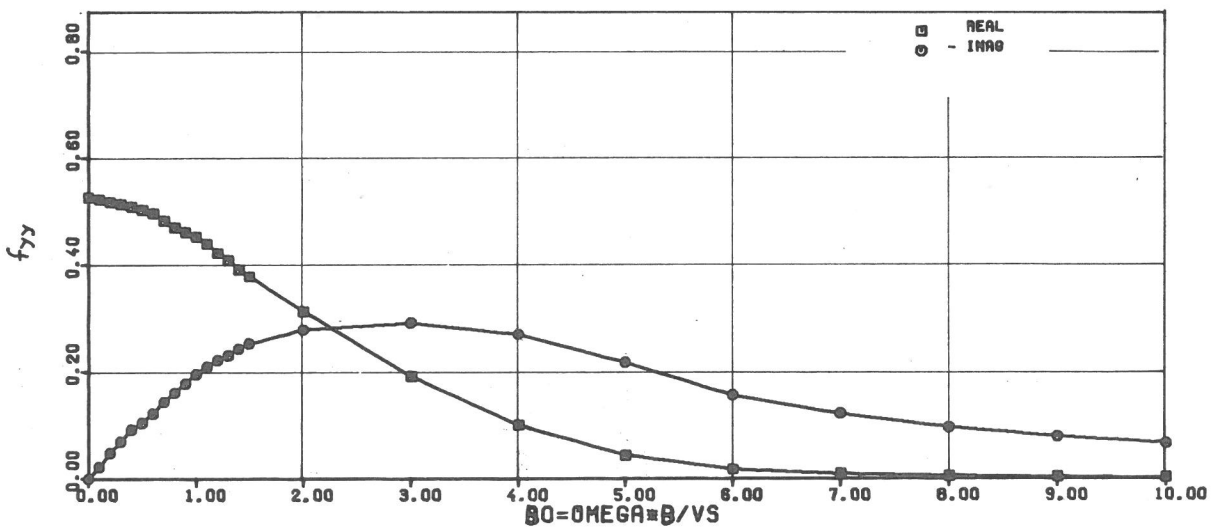
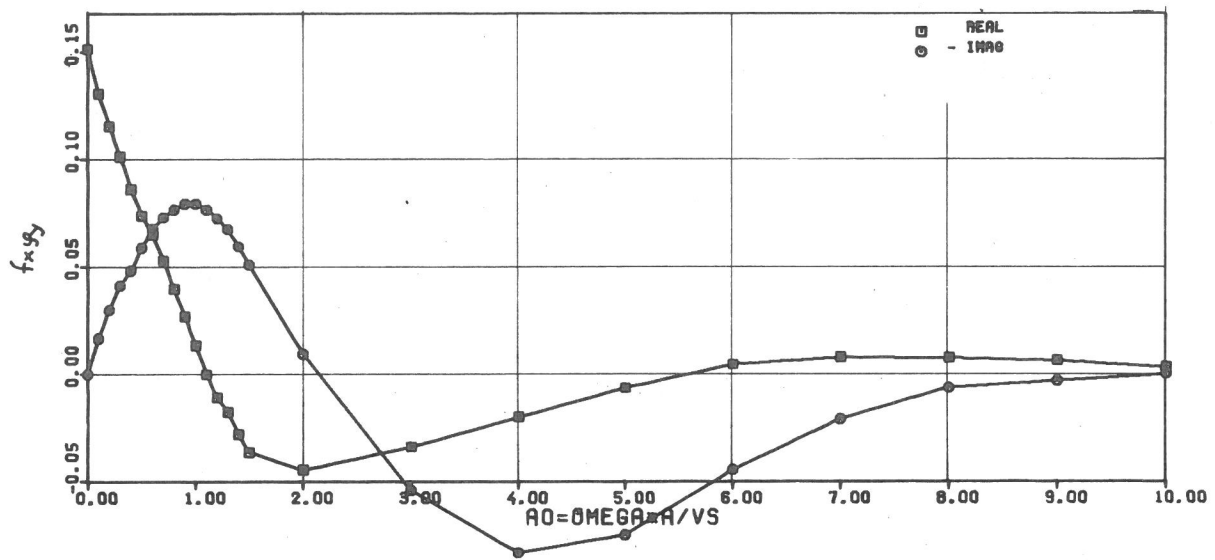
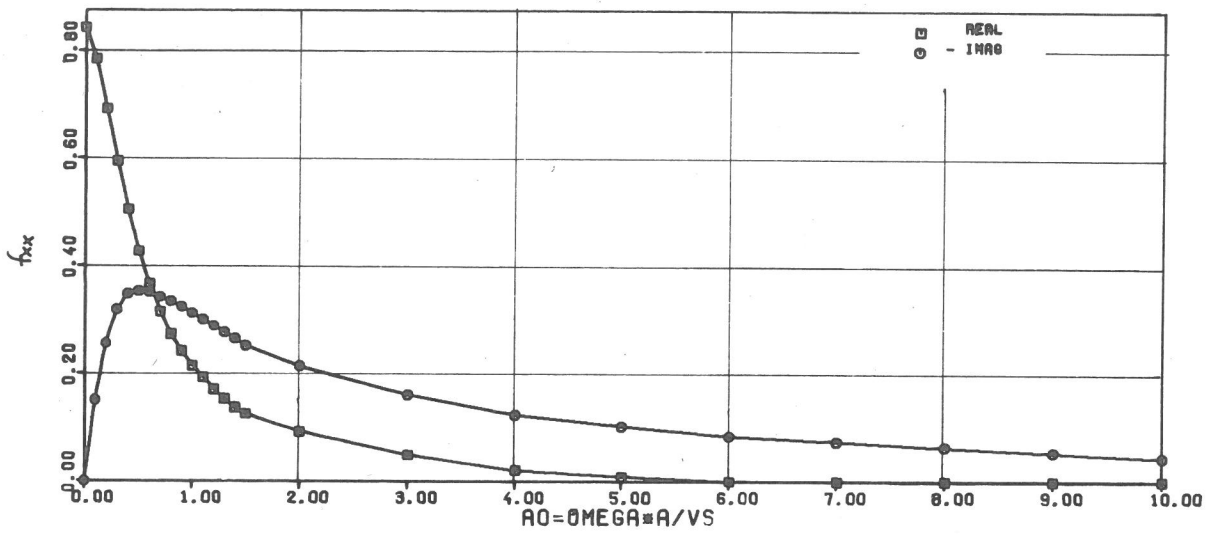


Abb. 16:
 Näherungslösungen für die Nachgiebigkeitsfunktionen
 f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} .

5. Wechselwirkung mehrerer starrer Grundflächen

5.1 Grundgleichungen

Wird in einem System von mehreren Gründungskörpern (Schwellen), die sich an der Oberfläche des Bodens befinden, ein Gründungskörper direkt belastet, so entstehen im Untergrund Raum- und Oberflächenwellen, die die anderen Gründungskörper indirekt (über den Boden) dynamisch belasten. Es entsteht also ein Wechselwirkungs- oder Koppelungseffekt. Diese dynamische Wechselwirkung wird hier untersucht. Abb. 17 zeigt das System mit signifikanten Dimensionen und möglichen Freiheitsgraden.

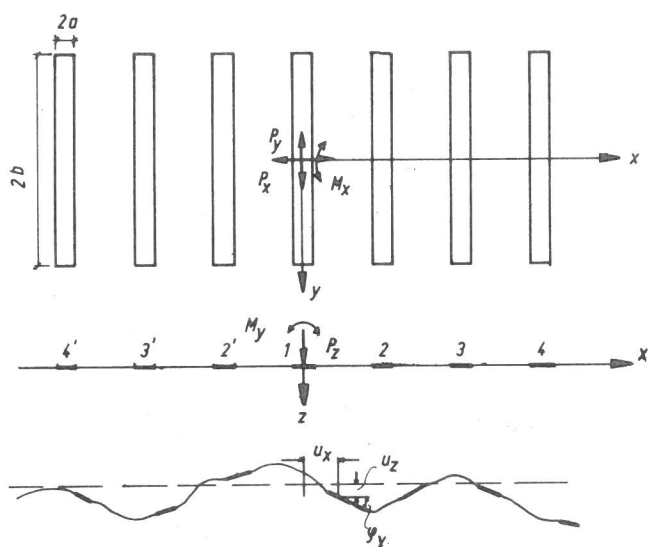


Abb. 17:

System starrer Flächen mit signifikanten Bewegungs- und Belastungsmoden

Der formale Zusammenhang zwischen äußerer Belastung $\tilde{\underline{p}}$ und den Reaktionen $\tilde{\underline{u}}$ der Halbraumoberfläche für ein System von n Flächen kann analog zu den Gl. 4.6 - 4.8, die für die Einzelfläche gelten, dargestellt werden. Das heißt, es gilt:

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{F}} \tilde{\underline{p}}. \quad (5.1)$$

Die Vektoren $\tilde{\underline{u}}$, $\tilde{\underline{p}}$ sind jetzt jedoch als Hypervektoren aufzufassen,

$$\tilde{\underline{u}}^T = \{ \tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y, \tilde{\varphi}_z \}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\underline{p}}^T = \{ \tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z, \tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z \},$$

deren Elemente z.B. die Vektoren

$$\tilde{u}_x^T = \{\tilde{u}_{x1}, \tilde{u}_{x2}, \dots, \tilde{u}_{xn}\} \quad (5.3)$$

$$\tilde{p}_x^T = \{\tilde{p}_{x1}, \tilde{p}_{x2}, \dots, \tilde{p}_{xn}\}$$

sind.

Die quadratische, symmetrische Nachgiebigkeitsmatrix \tilde{F} besteht dann im allgemeinen Fall aus einem 6x6 System von n x n Submatrizen \tilde{F}_{jk}

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{xx} & \tilde{F}_{xy} & \tilde{F}_{xz} & \tilde{F}_{x\phi x} & \tilde{F}_{x\phi y} & \tilde{F}_{x\phi z} \\ \tilde{F}_{yx} & \tilde{F}_{yy} & \tilde{F}_{yz} & \tilde{F}_{y\phi x} & \tilde{F}_{y\phi y} & \tilde{F}_{y\phi z} \\ \tilde{F}_{zx} & \tilde{F}_{zy} & \tilde{F}_{zz} & \tilde{F}_{z\phi x} & \tilde{F}_{z\phi y} & \tilde{F}_{z\phi z} \\ \tilde{F}_{\phi xx} & \tilde{F}_{\phi xy} & \tilde{F}_{\phi xz} & \tilde{F}_{\phi x\phi x} & \tilde{F}_{\phi x\phi y} & \tilde{F}_{\phi x\phi z} \\ \tilde{F}_{\phi yx} & \tilde{F}_{\phi yy} & \tilde{F}_{\phi yz} & \tilde{F}_{\phi y\phi x} & \tilde{F}_{\phi y\phi y} & \tilde{F}_{\phi y\phi z} \\ \tilde{F}_{\phi zx} & \tilde{F}_{\phi zy} & \tilde{F}_{\phi zz} & \tilde{F}_{\phi z\phi x} & \tilde{F}_{\phi z\phi y} & \tilde{F}_{\phi z\phi z} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

wobei z.B. die n x n Submatrix \tilde{F}_{xx} die Elemente

$$\tilde{F}_{xx} = \begin{bmatrix} f_{xx}^{1,1} & \dots & f_{xx}^{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{xx}^{n,1} & \dots & f_{xx}^{n,n} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

enthält.

Für spezielle Fälle können einige der Matrizen \tilde{F}_{jk} aus der Nullmatrix $\underline{0}$ bestehen.

Zur Berechnung der Elemente

$$\tilde{f}_{jk}^{lm} \quad \begin{matrix} l, m = 1, \dots, n \\ j, k = 1, \dots, 6 \end{matrix} \quad (5.6)$$

aller Submatrizen \tilde{F}_{jk} , werden alle Gründungsflächen in eine genügend große Anzahl von Teilflächen aufgelöst. Entsprechend Gl. 4.17 werden dann die Einflußwerte für die Verschiebungen aller Teilflächen infolge permutativer Belastung aller Teilflächen mit einer Einheitsspannung $\tilde{q}_k = 1e^{i\omega t}$ be-

rechnet. Damit erhält man die Einflußmatrix $\tilde{\underline{S}}$ aller Teilflächen des Gesamtsystems. Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen aller Gründungsflächen entsprechend Gl. (4.18), sowie Erfüllung der Äquivalenz aller Teilflächen entsprechend Gl. (4.19) führt dann zu einem analogen Gleichungssystem entsprechend Gl. 4.20, mit dem dann sowohl die unbekannt Amplituden der Sohlspannungen, wie die Elemente der Nachgiebigkeitsfunktionen für alle Gründungsflächen und Freiheitsgrade berechnet werden können.

5.2 Nachgiebigkeitsfunktionen für ein Schwellensystem

5.2.1 Systeme und Darstellung

Im folgenden werden mit obiger Methode berechnete Nachgiebigkeitsfunktionen für vertikale Belastung $\tilde{\underline{P}}_z$ und Rotationsbelastung $\tilde{\underline{M}}_y$ für mehrere Schwellensysteme mit einer Anzahl n von n = 3, 5 und 7 Schwellen angegeben und verglichen.

Die Dimensionen der einzelnen Schwellen sind

$$b/a = 2,60/0,26 = 10,$$

und der Abstand d der Schwellen untereinander ist $d = 0,6$ m mit

$$d/a = 0,60/0,13 \approx 4,61 .$$

Durch die angegebenen Funktionen sind alle Elemente der Matrizen $\tilde{\underline{F}}_{zz}$, $\tilde{\underline{F}}_{\phi y \phi y}$ und $\tilde{\underline{F}}_{z \phi y}$, $\tilde{\underline{F}}_{\phi y z}$ bestimmt. Für die Diagonalelemente der Matrizen $\tilde{\underline{F}}_{xx}$, $\tilde{\underline{F}}_{yy}$, $\tilde{\underline{F}}_{\phi x \phi x}$ können in erster Näherung die oben angegebenen Nachgiebigkeitsfunktionen für die Einzelschwelle angesetzt werden.

Die Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f} = f_1 + if_2$ sind in dimensionsloser Form, getrennt für den Realteil f_1 und Imaginärteil f_2 dargestellt, wobei die Abzisse durch den dimensionslosen Frequenzparameter $a_0 = a \omega / v_s$ (a ist immer die kleinere Flächenseite) beschrieben wird.

Für die Ordinaten gilt:

$$\text{Vertikale Translation: } \tilde{f}_{zz}^{1,m} = G a \tilde{u}_z^{1,m} / \tilde{P}_z^m \quad (5.7)$$

$$\text{Rotation um die y-Achse: } \tilde{f}_{\phi y \phi y}^{1,m} = G a^3 \tilde{\phi}_y^{1,m} / \tilde{M}_y^m \quad (5.8)$$

Vertikale Translation infolge \tilde{M}_y
bzw. Rotation infolge \tilde{P}_z :

$$f_{z\phi y}^{l,m} = f_{\phi y z}^{m,l} = G \quad a^2 \tilde{u}_z^{l,m} / \tilde{M}_y^m = Ga^2 \tilde{\phi}_z^{m,l} / \tilde{P}^l \quad (5.9)$$

Die hochgestellten Indizes m,l bedeuten: Bewegungsmode der Gründungsfläche m infolge Belastung der Gründungsfläche l . Die tiefgestellten Indizes (z.B. zz) beschreiben die Art der Bewegungsmode bzw. Belastungsmode.

5.2.2 Vergleich der Nachgiebigkeiten einer starren Gründung unter Berücksichtigung von n Nachbargründungen.

In Abb. 18 ist die vertikale Nachgiebigkeitsfunktion $\tilde{f}_{zz}^{1,1}$ für ein Gründungssystem mit $n = 1, 3, 5, 7$ starren

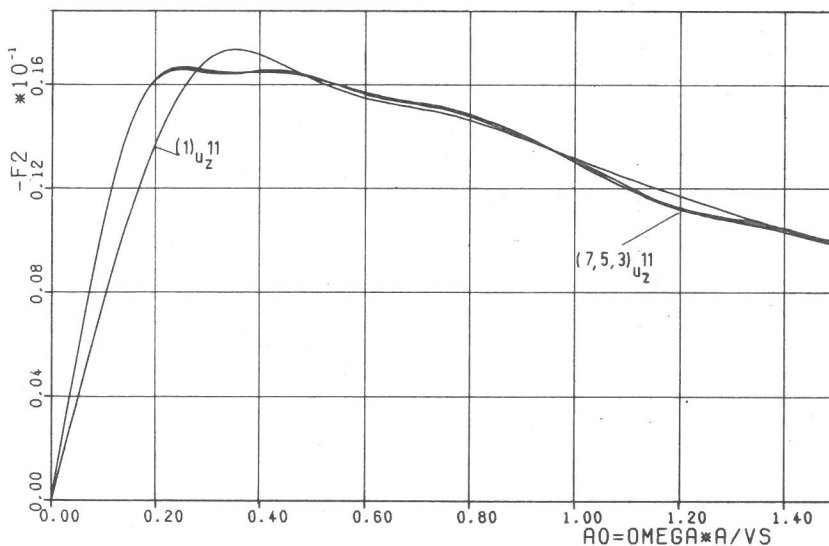
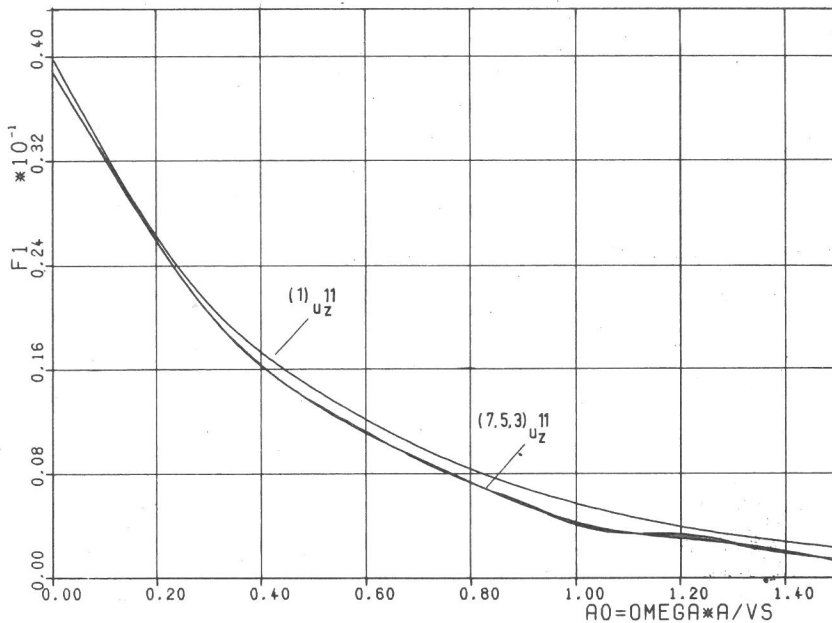


Abb. 18:
Nachgiebigkeitsfunktion f_{zz}
in Abhängigkeit der Anzahl
der Nachbarflächen

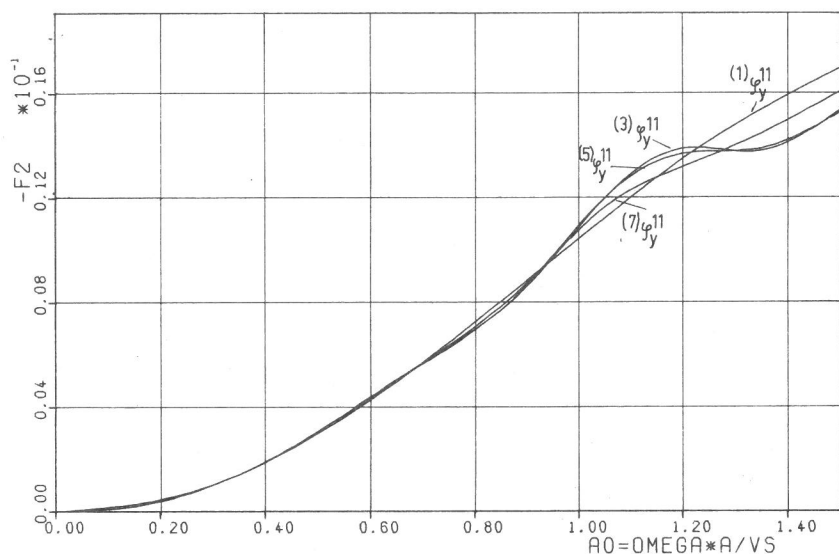
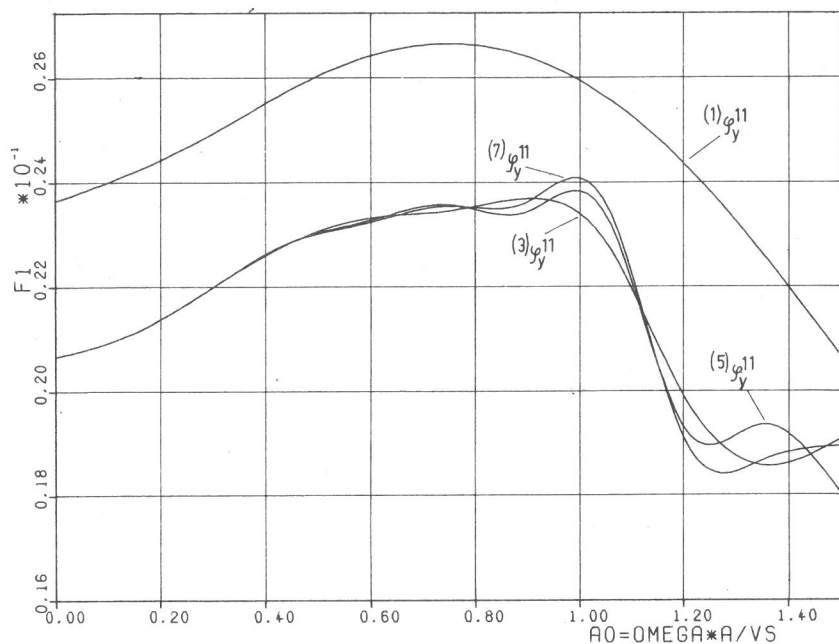


Abb. 19:
Nachgiebigkeitsfunktion
 $f_{\varphi_y \varphi_y}$ in Abhängigkeit
der Anzahl der Nachbarflächen.

Gründungen mit $b/a = 10$ und $d = 0,6$ m infolge vertikaler Belastung $P_z^{1,1} = 1$ der Gründung Nr. 1 aufgetragen. Man erkennt, daß für diese Belastungsmoder der Einfluß der Nachbargründungen auf die betrachtete Nachgiebigkeitsfunktion zum einen in bezug auf die Beträge gering ist und zum anderen, daß ab einer Gründungsanzahl von $n \geq 3$ nur noch sehr kleine Änderungen im Funktionsverlauf auftreten.

Für den Realteil treten dabei Änderungen derart auf, daß die Nachgiebigkeiten im gesamten untersuchten Frequenzbereich $0 \leq a_0 \leq 1,5$ kleiner werden, wobei mit zunehmendem Frequenzparameter größere Abweichungen in bezug auf

den Funktionsverlauf einer Einzelgründung auftreten. Für den Imaginärteil sind bis $a_0 \approx 0,25$ größere Werte zu beobachten, danach schwanken die Funktionsverläufe um den Funktionsverlauf einer Einzelgründung. Für die komplexe Steifigkeitsfunktion als Inverse der Nachgiebigkeitsfunktion, bedeuten diese Verhältnisse eine Verringerung des Realteiles (Steifigkeit) und eine Erhöhung des Imaginärteiles (Dämpfung). Abb. 19 zeigt den Einfluß mehrerer Nachbargründungen auf die Nachgiebigkeitsfunktion der Rotationsmode $\tilde{\varphi}_y$ einer Einzelgründung. Für die Funktionsverläufe der Realteile sind wie für die vertikale Mode Abminderungen der gleichen Größenordnung zu beobachten. Eine Zunahme der Gründungsanzahl über $n \geq 3$ bewirkt in den Funktionsverläufen ebenfalls nur noch kleine Änderungen, die insbesondere für Frequenzen von $a_0 \geq 0,5$ zutage treten. In den Verläufen für die Imaginärteile ist ein wesentlicher Einfluß der Gründungsanzahl erst ab einer Frequenz von $a_0 \geq 0,7$ zu finden. Bezüglich der Steifigkeitsfunktionen bewirkt der Einfluß der Nachbargründungen für diese Bewegungsmode eine Erhöhung sowohl der Steifigkeit wie auch der Dämpfung.

Zusammenfassend gilt, daß der Einfluß von Nachbargründungen auf die Nachgiebigkeitsfunktionen bzw. Steifigkeitsfunktion einer Einzelgründung als gering bis mäßig bezeichnet werden kann. Der Einfluß nimmt jedoch mit zunehmender Frequenz zu. Bei Nichtberücksichtigung des Einflusses von Nachbargründungen auf die Nachgiebigkeitsfunktionen einer Einzelschwelle sind Fehler zu erwarten, die im niedrigen Frequenzbereich ($a_0 \leq 0,5$) ca. 10 % und im höheren Frequenzbereich ($0,5 \leq a_0 \leq 1,5$) ca. 25 % betragen können.

5.2.3 Nachgiebigkeitsfunktionen mehrerer masseloser Gründungskörper infolge vertikaler Belastung eines Gründungskörpers (vertikale Koppelnachgiebigkeiten).

Abb. 20 zeigt die komplexen vertikalen Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{zz}^{j,k}$; $j = 1,4$; $k = 1$ eines Gründungssystems mit $n = 7$ und $d = 0,6$ m infolge Belastung der Gründung Nr. 1 mit $\tilde{p}_z^{1,1} = 1e^{i\omega t}$. Man erkennt, daß die Koppelung

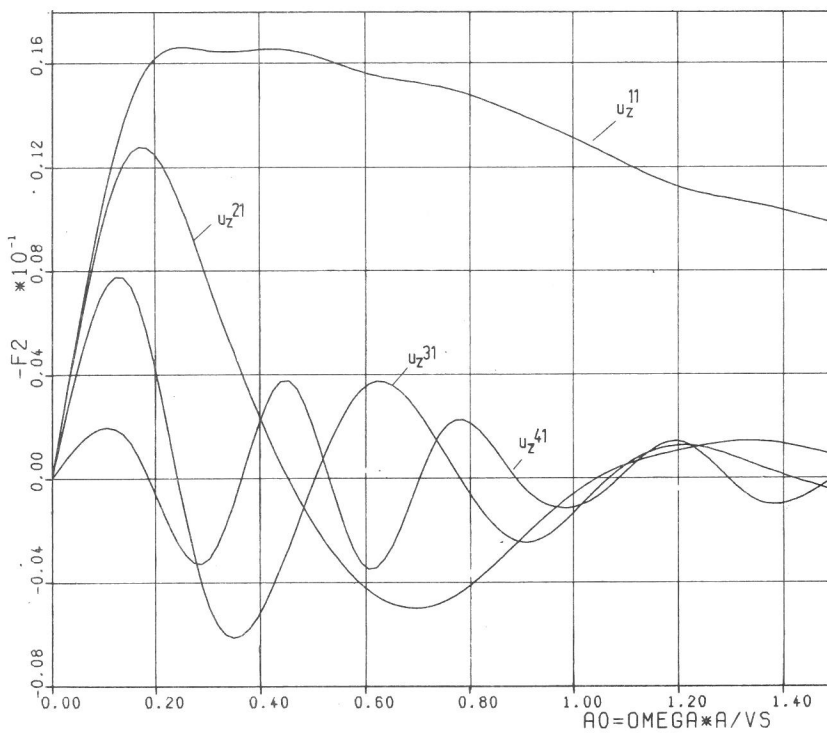
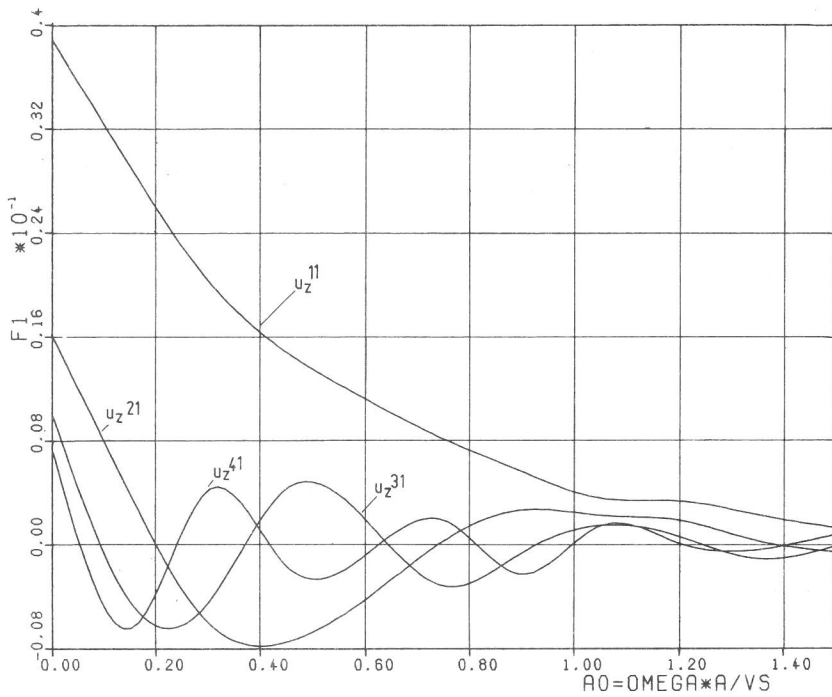


Abb.:20:

Nachgiebigkeitsfunktionen f_{zz} (7 starre Flächen, vertikale Belastung P_z auf Fläche Nr. 1)

der einzelnen Gründungen über den Boden von relativ großer Bedeutung ist. Für den statischen Fall ($a_0 = 0$) erhält man folgende Verhältnisse der Verschiebungen benachbarter masseloser Gründungen bezogen auf die belastete Gründung:

- 2. Gründung $u_2/u_1 = 0,415$
- 3. Gründung $u_3/u_1 = 0,253$
- 4. Gründung $u_4/u_1 = 0,186.$

Dieser relativ hohe Prozentsatz des Einflusses der Boden-

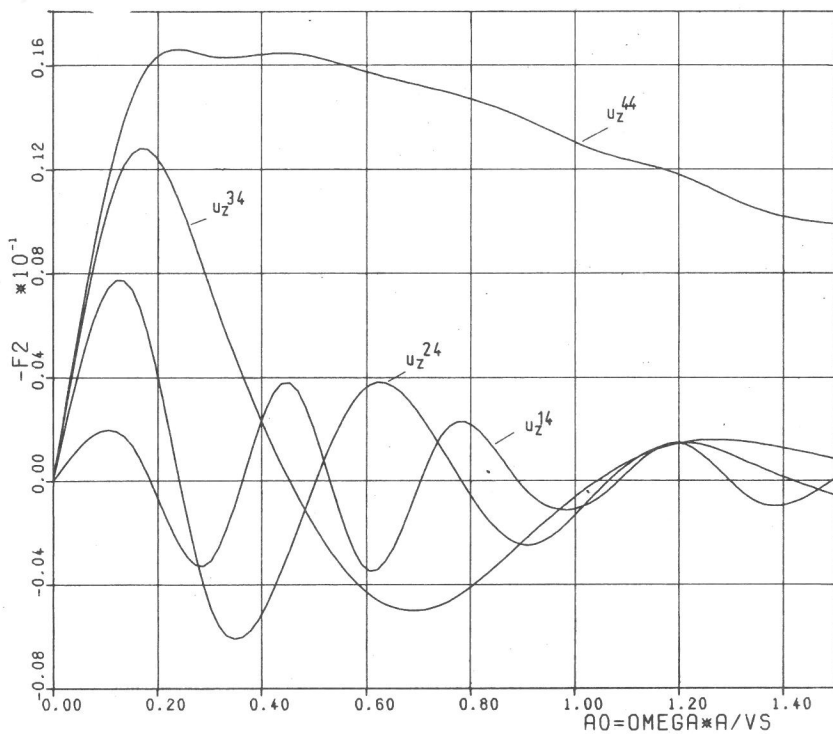
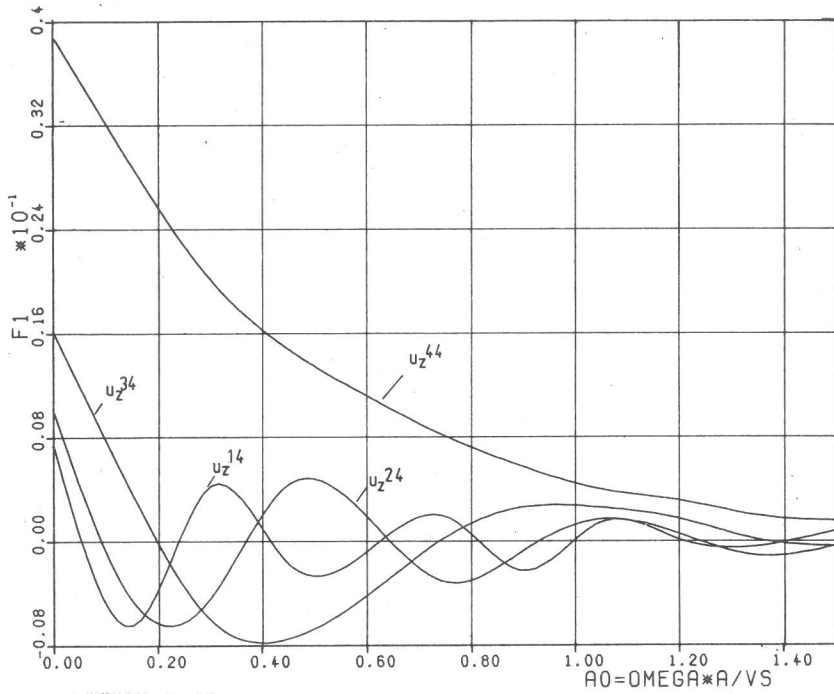


Abb. 21:

Nachgiebigkeitsfunktionen f_{zz} (7 starre Flächen, vertikale Belastung P_z auf Fläche Nr. 4).

koppelung nimmt mit wachsender Frequenz zum Teil noch zu. Aus den dargestellten Kurvenverläufen ist weiter die plausible Tatsache zu erkennen, daß eine minimale oder maximale Koppelwirkung dann auftritt, wenn die benachbarten Gründungen im Abstand d im Knotenpunkt einer Welle bzw. auf einen Wellenberg liegen. Dies ist aus den gleichbleibenden Abständen der Nulldurchgänge der Nachgiebigkeitsfunktionen über der dimensionslosen Frequenz a_0 zu erkennen. Formelmäßig kann dies durch die Beziehung

$$d \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} = \text{konstant} \quad (5.10)$$

zum Ausdruck gebracht werden.

Abb. 21 zeigt die komplexen Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{zz}^{j,k}$, $j = 1, 4$ $k = 4$ desselben Systems. Belastet ist hier jedoch Gründung Nr. 4 mit $P_z^4 = 1e^{i\omega t}$. Der Vergleich mit Abb. 20 zeigt, daß nur geringfügige Abweichungen in den einzelnen Funktionsverläufen auftreten. Dies tritt insbesondere im höheren Frequenzbereich ($a_0 > 1,0$)

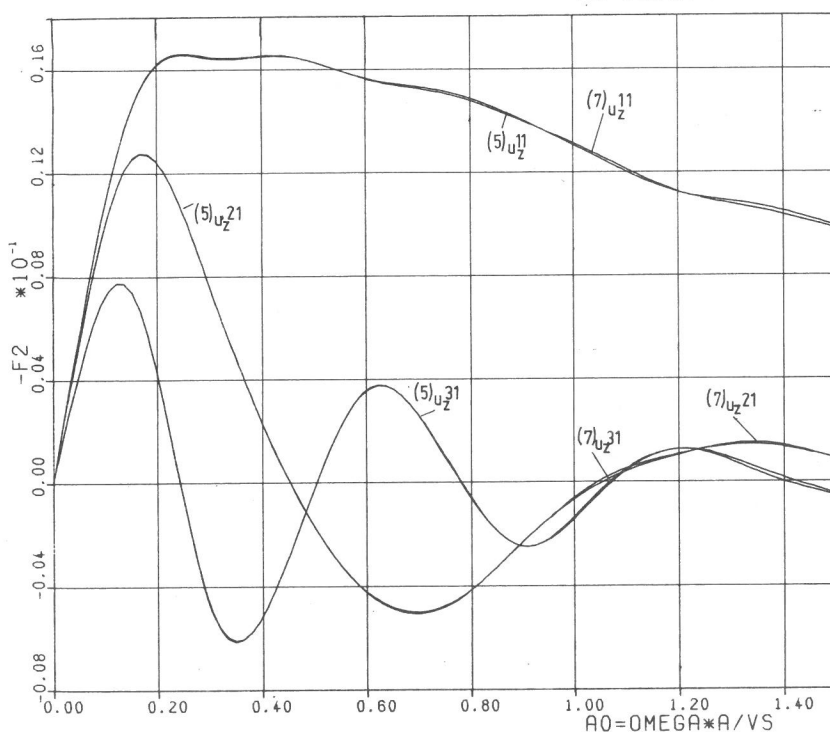
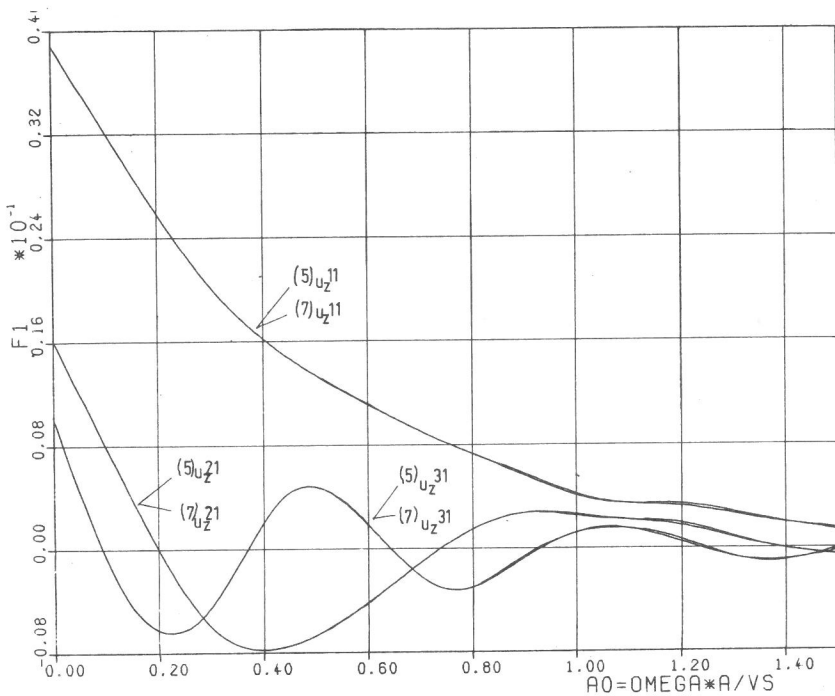


Abb. 22:

Nachgiebigkeitsfunktionen \tilde{f}_{zz} (vertikale Belastung P_z auf Fläche Nr. 1) in Abhängigkeit der Anzahl der Nachbarflächen.

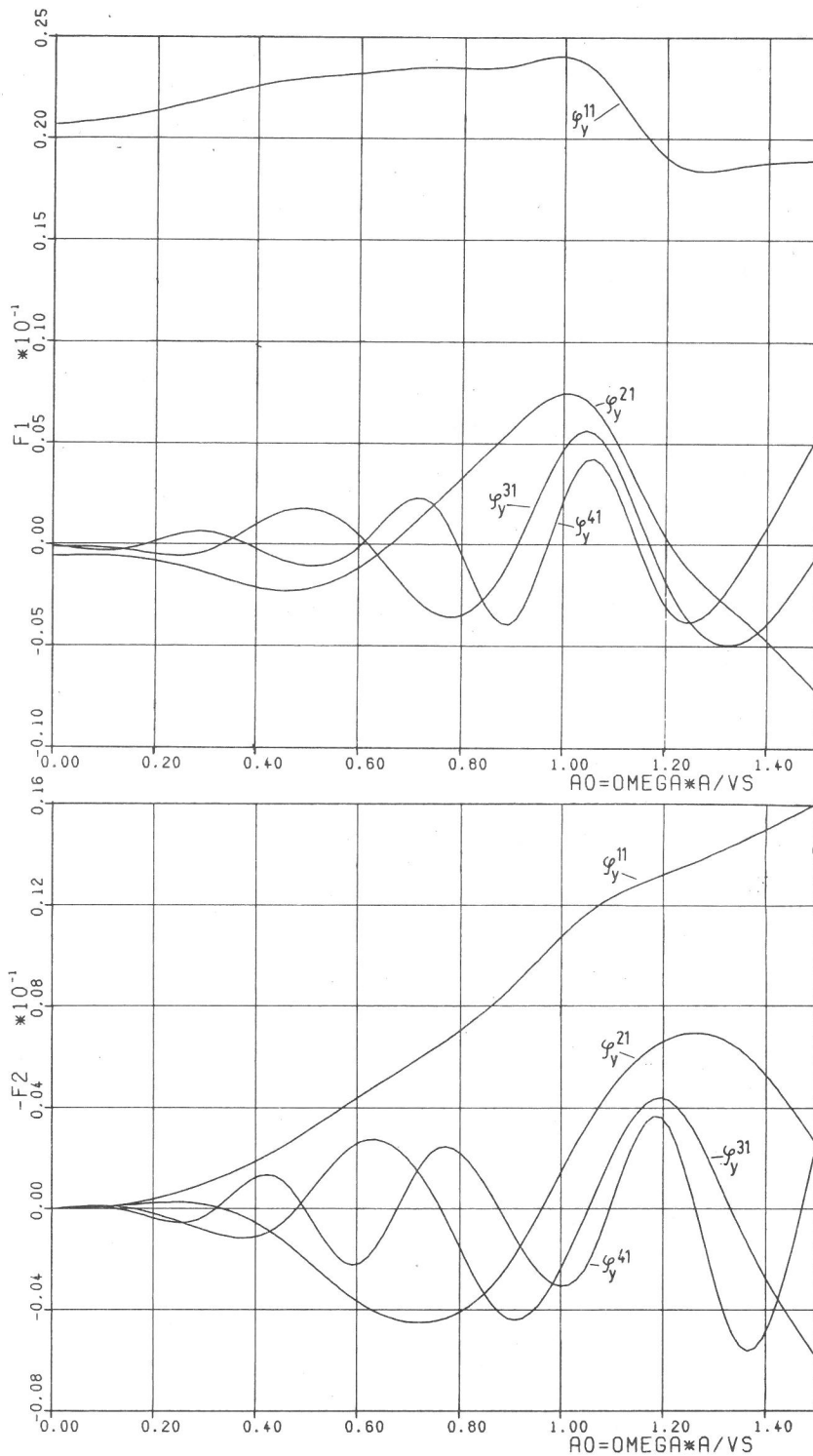


Abb. 23:

Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi y \varphi y}$ (7 starre Flächen, Momentenbelastung auf Fläche Nr. 1).

und bei der belasteten und unmittelbar benachbarten Gründung auf. Dies bedeutet, daß die angenommene Endlichkeit des an und für sich unendlichen Schwellensystems eines Gleises keinen bzw. nur sehr geringen Einfluß auf das Ergebnis der Koppelung besitzt. Es ist deshalb gerechtfertigt, einen Ausschnitt aus dem unendlichen Schwellensystem zu betrachten, ohne daß ein wesentlicher Verlust an Genauigkeit zu befürchten ist.

Abb. 22 zeigt den Vergleich zugeordneter Nachgiebigkeitsfunktionen in Abhängigkeit der Anzahl n der Gründungskörper ($n = 5$ und $n = 7$). Auch hier treten kleine Veränderungen in den Funktionsverläufen nur im höheren Frequenzbereich ($a_0 > 0,6$) auf. Dieses Ergebnis führt zu dem Schluß, daß es für die vertikale Bewegungsmode als ausreichend erscheint, das unendliche Schwellensystem durch ein endliches Schwellensystem mit $n \approx 5$ Schwellen zu ersetzen.

5.2.4 Nachgiebigkeitsfunktionen mehrerer masseloser Gründungskörper infolge Rotationsbelastung eines Gründungskörpers (Rotationskoppelnachgiebigkeiten)

In Abb. 23 sind die Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi_Y \varphi_Y}^{j,k}$, $j = 1,4$, $k = 1$, infolge Momentenbelastung $\tilde{M}_Y^1 = 1e^{i\omega t}$ der Gründung Nr. 1 dargestellt. Für diese Belastungsmoden ist der Koppelwirkungseinfluß auf die benachbarten Gründungskörper im niedrigen Frequenzbereich relativ gering. Erst ab $a_0 > 0,6$ treten Wechselwirkungseffekte auf, die bis zu 30 % und darüber bezogen auf die belastete Schwelle betragen können. Wie bei der vertikalen Translationsmode treten auch hier in den Funktionsverläufen benachbarter Gründungskörper Minimas, Nullstellen und Maximas auf, die monoton und stetig mit steigender Gründungsnummer zunehmen. Zur Erklärung dieses Verhaltens sei auf den Abschnitt 5.2.3 verwiesen.

In Abb. 24 sind die Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi_Y \varphi_Y}^{j,k}$, $j = 1,4$, $k = 4$ infolge Belastung $\tilde{M}_Y^4 = 1e^{i\omega t}$ der Gründung Nr. 4 dargestellt.

Der Vergleich mit Abb. 23 zeigt, daß die Endlichkeit des Gründungssystems auf die Nachgiebigkeitsfunktionen in dieser Belastungsmoden größeren Einfluß besitzt. Hier treten ab einer Frequenz von $a_0 \approx 0,8$ zum Teil relativ größere Abweichungen, insbesondere bei den Nachgiebigkeitsfunktionen der belasteten und unmittelbar benachbarten Gründung, auf.

Dies wird auch deutlich, wenn man die Funktionsverläufe für die Nachgiebigkeiten $\tilde{f}_{\varphi_Y \varphi_Y}^{1,1}$ und $\tilde{f}_{\varphi_Y \varphi_Y}^{2,1}$ in Abhängigkeit der Anzahl n der Gründungskörper betrachtet (Abb. 25).

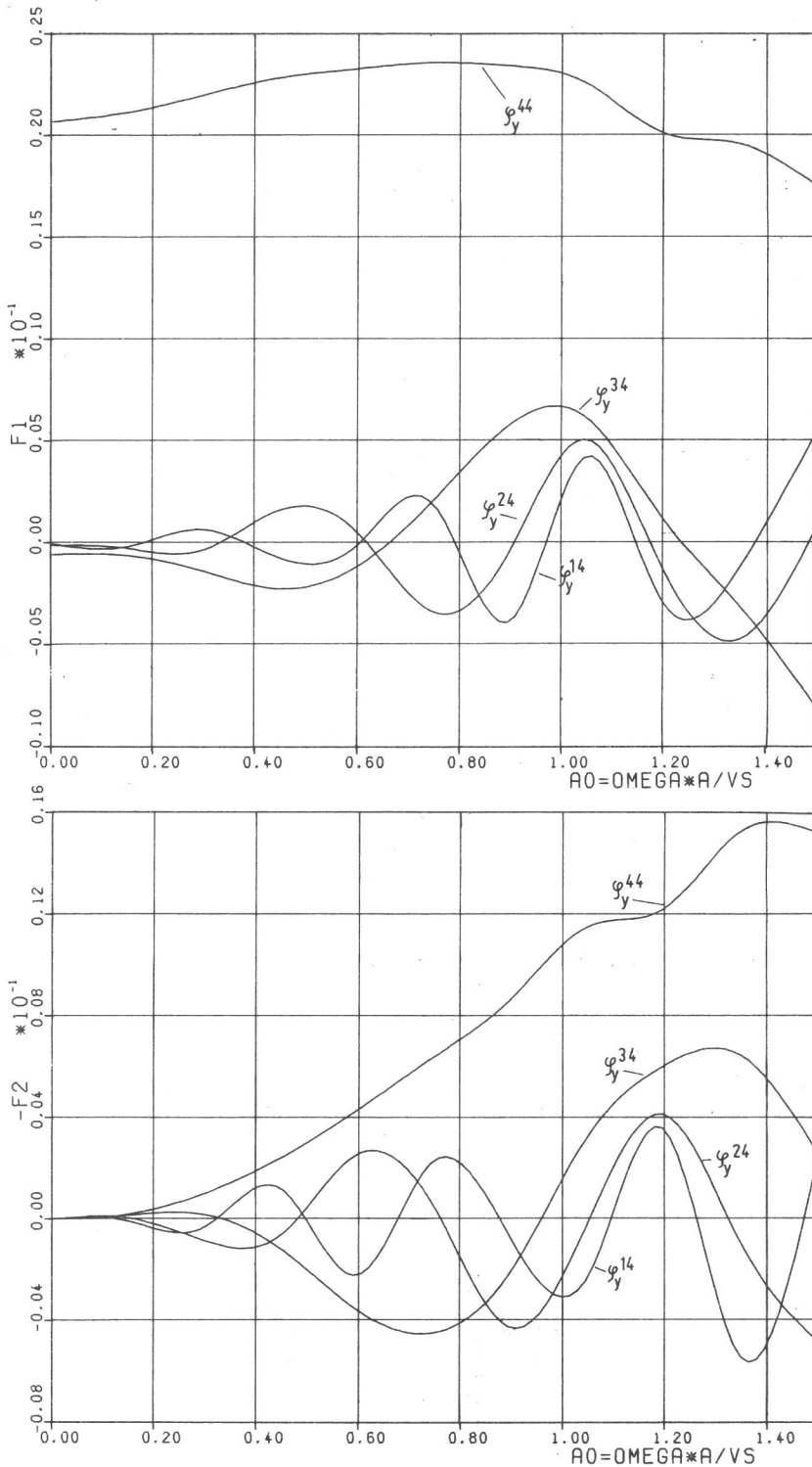


Abb. 24:
 Nachgiebigkeitsfunktionen
 $f_{\varphi_y \varphi_y}$ (7 starre Flächen,
 Momentenbelastung auf
 Fläche Nr. 4)

Die Abb. 25 zeigt, daß für Frequenzen $a_0 > 0,6$ zum Teil relativ größere Abweichungen als wie bei der vertikalen Translationsmode auftreten.

Für diese Bewegungs- und Belastungsmode ist deshalb zu fordern, daß minimal $n = 5$ Schwellen, für eine größere Genauigkeit und höhere Frequenzen minimal $n = 7$ Schwellen in ein Rechenmodell einzubeziehen sind.

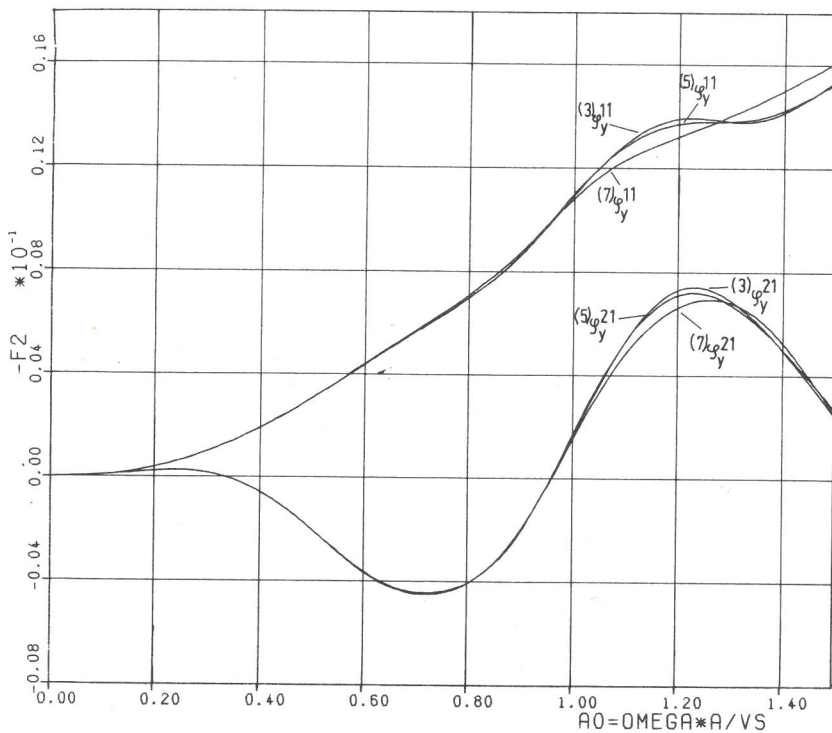
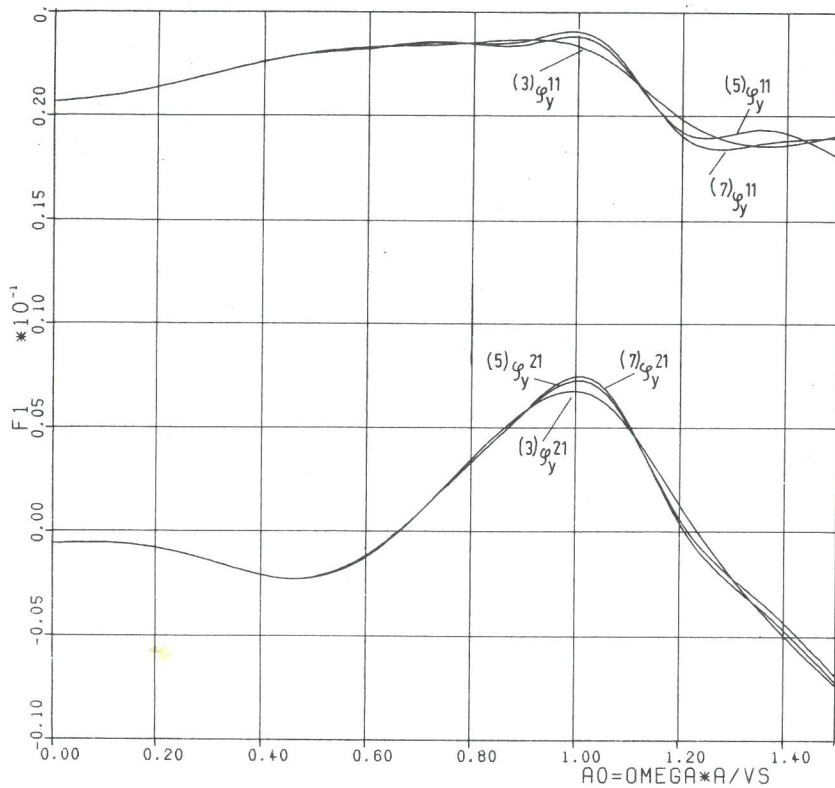


Abb. 25:

Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi y \varphi y}$ (Momentenbelastung M_y auf Fläche Nr. 1) in Abhängigkeit der Anzahl der Nachbarflächen.

5.2.5 Nachgiebigkeitsfunktionen für die Rotationen $\tilde{\varphi}_y$ mehrerer Gründungskörper infolge vertikaler Belastung einer Gründung

Mit den in den Abb. 26 - 29 dargestellten Nachgiebigkeitsfunktionen $\tilde{f}_{\varphi y z}^{j,k}$ $j = 1,4$, $k = 1,4$ infolge vertikaler Belastung $P_z^k = 1 e^{i\omega t}$, $k = 1,4$ ist die Bodenkoppelmatrix eines unendlich langen Gründungssystems mit starren

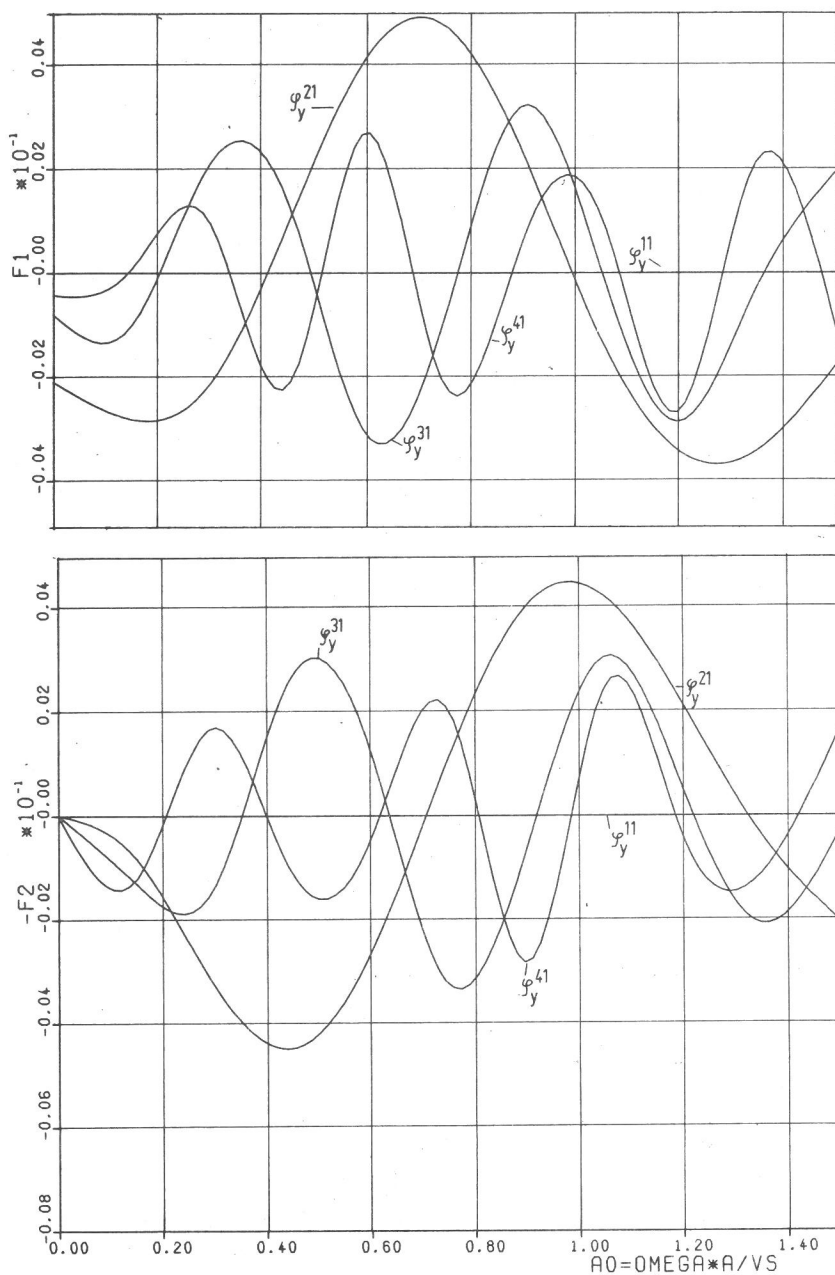


Abb. 26:
Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi yz}$ (7 starre Flächen, vertikale Belastung auf Fläche Nr.1).

Gründungsflächen im Abstand von $d/a \approx 4.6$ in den Belastungsmoden \tilde{P}_z und \tilde{M}_y vollständig bestimmt. Die dargestellten Funktionen $\tilde{f}_{\varphi yz}$ sind infolge des Reziprozitätssatzes äquivalent den Funktionen $\tilde{f}_{z\varphi y}$. Allgemein lassen sich aus diesen Abbildungen folgende Aussagen ableiten:

Diese "Nebendiagonalelemente" sind klein bezogen auf die in den Abb. 20 bis 25 dargestellten Diagonalelemente.

(Man beachte die Definition dieser Funktion entsprechend Gl. 5.9). Der Einfluß der Begrenztheit des Systems spiegelt sich in den Elementen $\tilde{f}_{\varphi yz}^{j,k}$ für $j = k$ wieder. Für $j = k \geq 2$ sind in den entsprechenden Funktionsverläufen für höhere

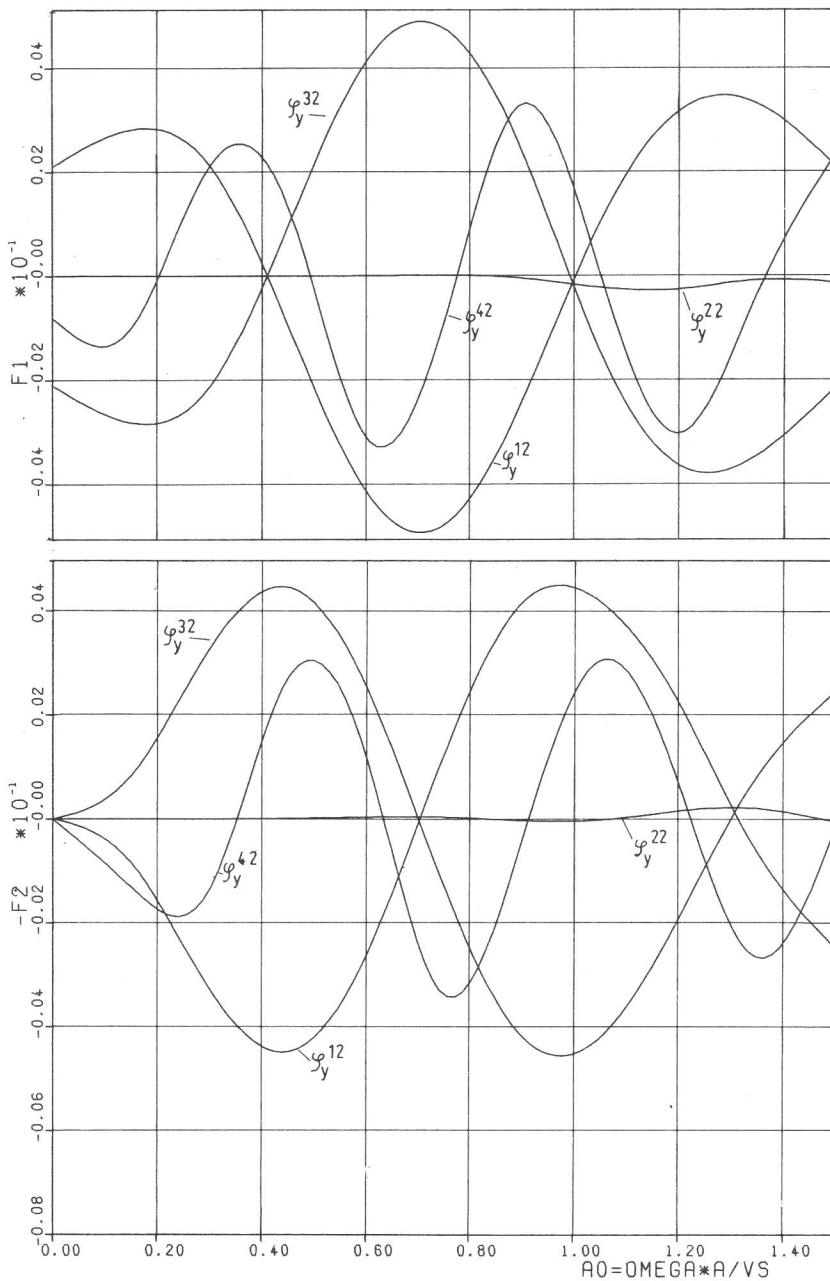


Abb. 27:

Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi yz}$ (7 starre Flächen, vertikale Belastung auf Fläche Nr. 2).

Frequenzen leichte Abweichungen von dem geforderten Wert $\tilde{f}_{\varphi yz} = 0$ zu beobachten. Alle anderen äquivalenten Nachgiebigkeitsfunktion z.B. $\varphi_{21} = \varphi_{12} = \varphi_{32}$ sind jedoch trotz der Endlichkeit des Systems identisch.

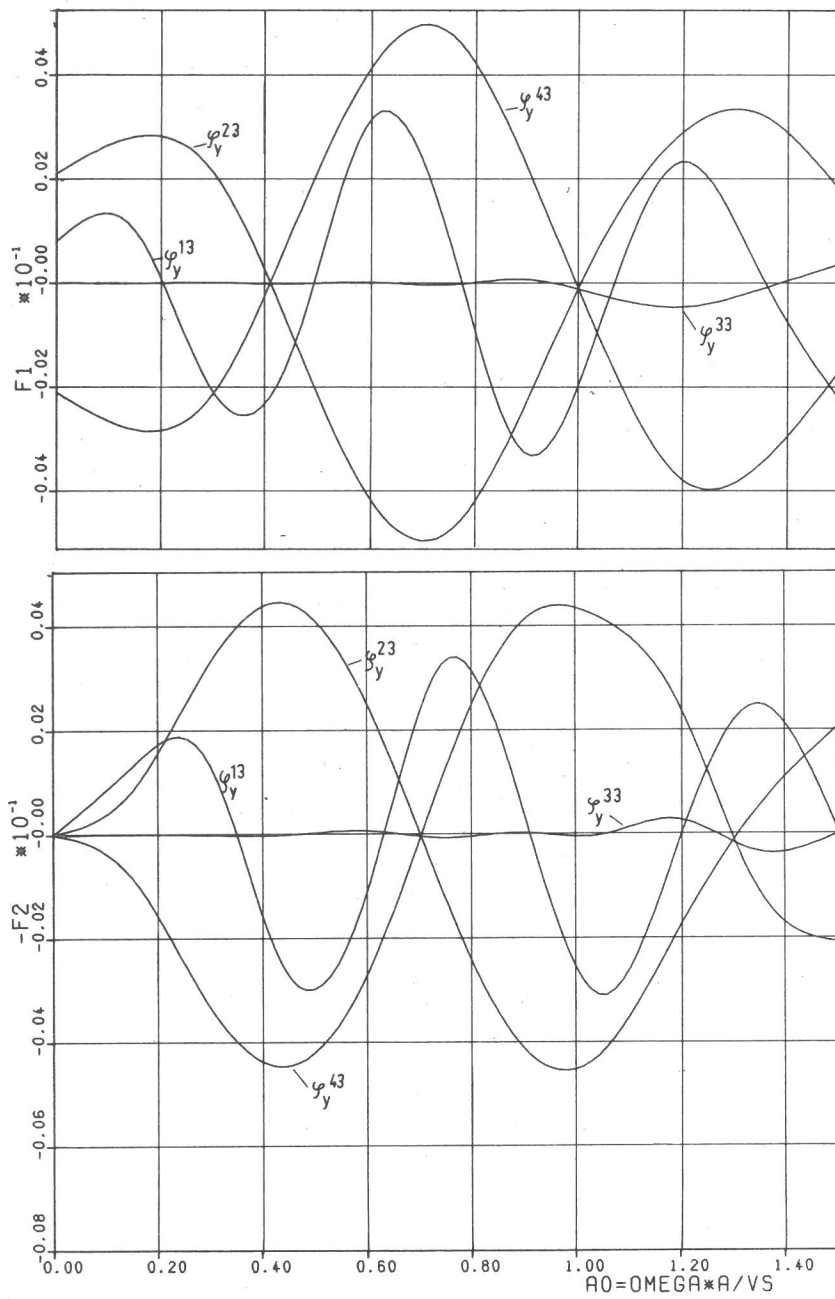


Abb. 28:

Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi yz}$ (7 starre
Flächen, vertikale Belastung auf Fläche Nr.3).

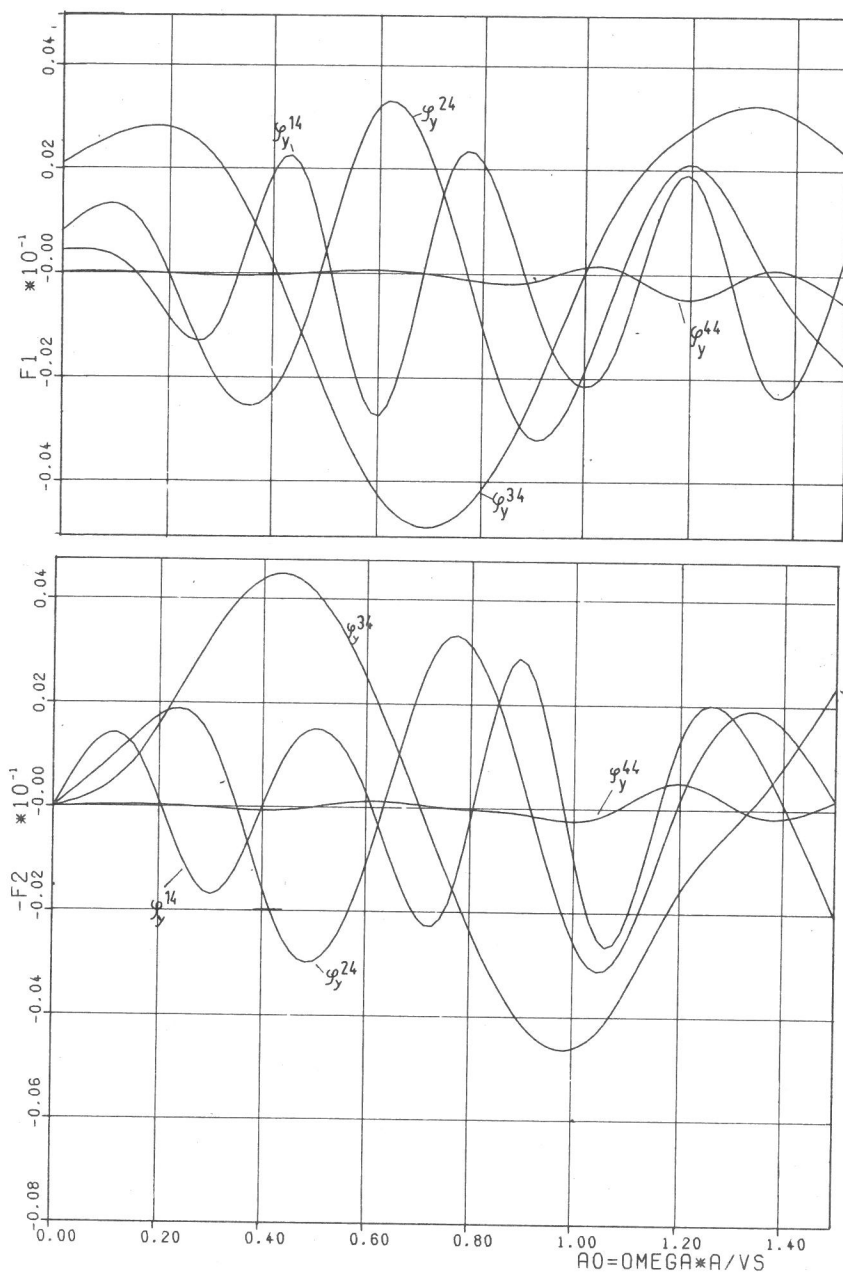


Abb. 29:

Nachgiebigkeitsfunktionen $f_{\varphi yz}$ (7 starre Flächen, vertikale Belastung auf Fläche Nr.4).

5.2.6 Zusammenfassung

1. Durch die dargestellten Nachgiebigkeitsfunktionen sind die Submatrizen \tilde{F}_{zz} , $\tilde{F}_{\varphi y \varphi y}$ und $\tilde{F}_{z \varphi y} = \tilde{F}_{\varphi y z}$ zur Beschreibung der Bodenkoppelung eines Gründungssystems mit $n \rightarrow \infty$ einzelnen Gründungskörpern vollständig bestimmt.
2. Die Diagonalelemente der Submatrizen \tilde{F}_{xx} , \tilde{F}_{yy} , $\tilde{F}_{\varphi x \varphi x}$ können näherungsweise durch die in Abschnitt 4. angege-

benen Nachgiebigkeitsfunktionen für eine Einzelschwelle beschrieben werden.

3. Für die vertikale Bewegungs- und Belastungsmode ist der Einfluß unbelasteter starrer Nachbargründungen auf die Nachgiebigkeitsfunktion der belasteten Gründung klein. Für Rotationsbewegung und Belastung ist ein Anwachsen dieses Einflusses insbesondere für höhere Frequenzen ($a_0 > 0,8$) festzustellen.
4. Der Einfluß der Koppelung, d.h. die Verschiebungen unbelasteter starrer Nachbargründungen infolge indirekter Belastung durch das von einer belasteten Gründung erzeugte Wellenfeld ist relativ groß. Für die untersuchten Verhältnisse von $b/a = 10$ und $d/a = 4,6$ ist für vertikale Belastung ein maximaler Koppelungseffekt von 40 % bezogen auf die erregte Gründungsfläche im statischen Fall und mit wachsender Frequenz darüber hinaus festzustellen. Dieser wachsende Koppelungseffekt kann mit einer zunehmenden "Ebenheit" des erzeugten Wellenfeldes für höhere Frequenzen erklärt werden. (Im räumlichen Fall tritt eine Abnahme der Amplituden der Oberflächenwelle ein, die proportional zu $r^{-1/2}$ ist, im ebenen Fall tritt eine Abnahme mit r^0 , also keine Abnahme mit der Entfernung r auf). Für Rotationsbelastung und -bewegung ist der Koppelungseffekt im niedrigen Frequenzbereich (hier $a_0 \approx 0,6$) gering. Danach tritt ein Koppelungseffekt ein, der bis zu 30 % und darüber betragen kann.
5. Geringer Koppelungseffekt, bzw. maximaler Koppelungseffekt tritt auf, wenn die erzeugten Wellenlängen in einem bestimmten Verhältnis zu den Gründungsabständen stehen.
6. Reduzierung des unendlichen Gründungssystems auf ein endliches Teilgebiet besitzt vernachlässigbaren Einfluß auf die vertikalen Nachgiebigkeitsfunktionen im gesamten untersuchten Frequenzbereich von $0 \leq a_0 \leq 1,5$, und geringen bis mäßigen Einfluß auf die Rotationsnachgiebigkeitsfunktionen im höheren Frequenzbereich von $a_0 > 0,6$. Damit ergibt sich, daß ein Gründungssystem mit $n \rightarrow \infty$ einzelnen Gründungskörpern ausreichend genau

für vertikale Belastung durch $n = 3$ bis $n = 5$ und für Rotationsbelastung durch $n = 5$ bzw. im höheren Frequenzbereich durch $n = 7$ einzelne Gründungskörper abgebildet werden kann.

6. Abschätzung des Einflusses der Bodenheterogenität und Einbettung

6.1 Bodenheterogenität

In der analytischen Betrachtung zur Ermittlung der Nachgiebigkeitsfunktionen von Einzelgründungen sowie zur Ermittlung des Wechselwirkungseinflusses (Bodenkoppelung) mehrerer Gründungskörper wurde der Untergrund als linear elastischer homogener Halbraum angenommen. Der Untergrund in der Realität besitzt im allgemeinen die Eigenschaft der Homogenität nicht.

Die Eigenschaft der Homogenität geht stark verloren, wenn der Boden eine ausgeprägte Schichtung, wie z.B. im Falle von Lockergestein auf Fels, besitzt. Auch Grundwasser und der Übergang vom Schotterbett zum Untergrund stellt eine solche Schichtgrenze dar. Eine schwache Inhomogenität liegt praktisch immer vor, da wie z.B. in /1/ ausgeführt, die Steifigkeit des Bodens mit zunehmender effektiver Spannung zunimmt. Eine solche Spannungszunahme ist beim Untergrund durch die wachsende Auflast mit zunehmender Tiefe gegeben. In /8/ wird diese Spannungsabhängigkeit durch die experimentell ermittelten Gesetze

$$G = \frac{15460 (2.17 - e)^2}{1 + e} \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_0} 0.38 \quad (6.1)$$

für runde Kornform des Untergrundmaterials und durch

$$G = \frac{7230 (2.97 - e)^2}{1 + e} \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_0} 0.38 \quad (6.2)$$

für eckige Kornform des Untergrundmaterials (z.B. Schotter) für den die Steifigkeit charakterisierende Größe des Schubmoduls G dargestellt.

In den Gl. 6.1 und 6.2, die für eine effektive Gleitung

von $\gamma_{\text{eff}} \leq 10^{-6}$ gelten, ist e die Porenziffer und $\bar{\sigma}_0$ die effektive Oktaederspannung

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.3)$$

Durch Gl. 6.2 kann damit der Schotter wie ein "normales" Untergrundmaterial beschrieben werden, wobei die aktuellen Größen für den Schubmodul G relativ wenig von einem "normalen" Material abweichen.

Für den Fall eines Gleises wird nun die Inhomogenität infolge der Spannungsabhängigkeit des Schubmoduls G mit der Tiefe z zum Teil wieder durch die hohen statischen Vorlasten (Spannungen) infolge des Zugeigengewichtes ausgeglichen. Abb. 30 zeigt einen solchen Spannungsverlauf über die Tiefe z , wobei die strichlierte Linie die Spannungen aus Bodeneigengewicht und die durchgezogenen Linien die Spannungen infolge verschiedener Zusatzlasten einschließlich der Spannungen aus Bodeneigengewicht darstellen.

Abb. 31 zeigt den zugehörigen Schubmodulverlauf $G(z)$ der aus Abb. 30 und mit Hilfe der Gl. 6.2 und 6.4 ermittelt wurde /9/. Hieraus ist zu erkennen, daß sich der Schubmodulverlauf für den betrachteten Fall nur schwach über eine relativ große Tiefe ändert. Für andere Fälle, bei denen die Schichtung stärker ausgeprägt ist, kann mit

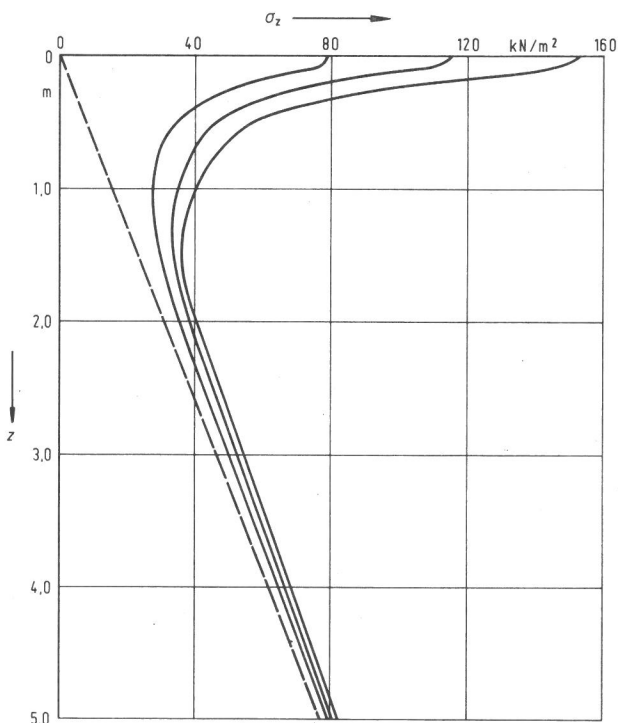


Abb. 30:
Spannungsverlauf unter Schwellenmitte
in Abhängigkeit der Tiefe z .

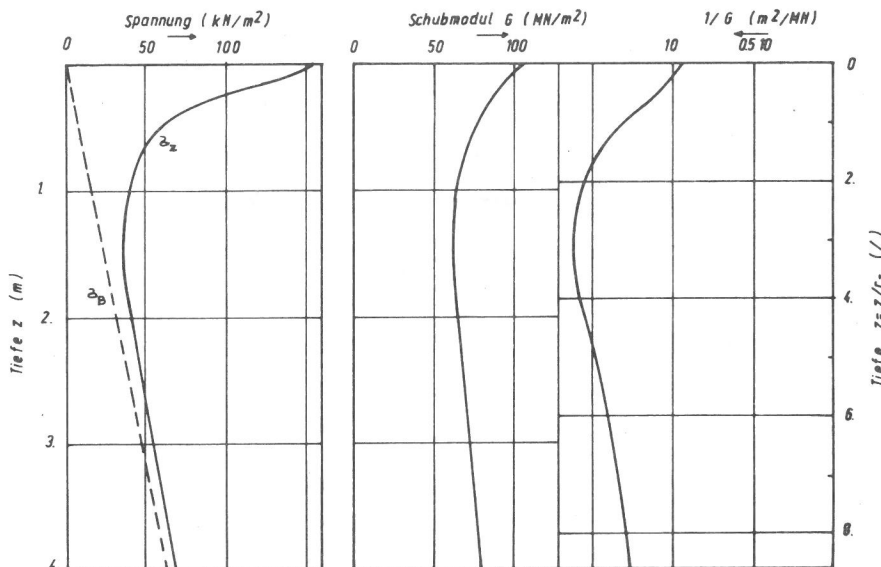


Abb. 31:
Spannungs- und
Steifigkeitsverlauf
unter einer
Schwelle

einem in /31/ mitgeteilten Näherungsverfahren ein mittlerer effektiver Schubmodul ermittelt werden, indem schichtweise über gewichtete Reziprokwerte des tiefenabhängigen Schubmoduls integriert wird, wobei als Wichtungskurve ein normierter Spannungsverlauf über die Tiefe dient. (Siehe hierzu auch /9/). Damit ist gezeigt, daß Lösungen die aus der Theorie des linear elastischen Halbraums folgen, die gegebenen Verhältnisse ausreichend genau beschreiben bzw. durch eine einfach Modifikation den jeweils aktuell vorliegenden Verhältnissen angepaßt werden können.

6.2 Einbettung

Der Einfluß einer Einbettung eines Gründungskörpers in das Erdreich ist dadurch gekennzeichnet, daß

- die Amplituden abnehmen
- die Resonanzfrequenz anwächst
- und die Dämpfung erhöht wird.

Im weiteren ist sofort einsichtig, daß die Art des Kontaktes zwischen Gründungskörper und umgebendem Material von großer Bedeutung ist. Der Einfluß wird voll wirksam, wenn zwischen Gründungskörper und umgebendem Material inniger Kontakt besteht und wird umso unbedeutender, je weniger Kontakt vorhanden ist.

Wie im Falle der Heterogenität ist es mit Hilfe einer analytischen Betrachtungsweise jedoch nur sehr schwer möglich komplexe geometrische Randbedingungen wie Ein-

bettung des Gründungskörpers in den Untergrund zu berücksichtigen.

In /11/ wird jedoch eine Methode mitgeteilt, mit deren Hilfe es möglich ist, durch einfache additive Hinzufügung von Termen zu den oben angegebenen Nachgiebigkeits- oder Steifigkeitsfunktionen diesen Einbettungseinfluß zu berücksichtigen. Verwendet man Steifigkeitsfunktionen, so kann für die vertikale Translation die Einbettung in folgender Form berücksichtigt werden:

$$\tilde{k}_{zz}^E = G \cdot a \left(k_{zz} + \frac{G_E}{G} \frac{H}{a} K_z + i a_0 \left(c_{zz} + \frac{G_E}{G} \frac{H}{a} \frac{a_{OE}}{a_0} C_z \right) \right) \quad (6.4)$$

In Gl. 6.4 ist k_{zz} und c_{zz} die Steifigkeits- bzw. Dämpfungsfunktion eines nicht eingebetteten Gründungskörpers. a ist die halbe Fundamentbreite, H die Einbettungstiefe, G_E der Schubmodul des Bodens im Bereich der Einbettung und K_z , C_z sind frequenzabhängige Beiwerte zur Berücksichtigung der Einbettung nach /11/.

a_{OE} ist ein dimensionsloser Frequenzparameter

$$a_{OE} = \frac{\omega r_T}{v_{SE}} \quad (6.5)$$

mit
$$v_{SE} = \sqrt{G_E / \rho_E} \quad (6.6)$$

und
$$r_T = a \sqrt{\frac{4b}{\pi a}} \quad (6.7)$$

Die Beziehungen für die verbleibenden fünf restlichen Freiheitsgrade eines starren Gründungskörpers sind in /9/ angegeben und werden deshalb hier nicht wiederholt.

Den Einfluß der Einbettung für die vertikale Translation soll ein Beispiel verdeutlichen, wobei zur Vereinfachung frequenzunabhängige Werte angesetzt werden. Dies gilt näherungsweise für einen Bereich von $0 \leq a_{OE} \leq 2$.

Aus den oben angegebenen Nachgiebigkeitsfunktionen für den Fall $b/a = 10$ können durch Inversion folgende Mittelwerte für die Steifigkeit und Dämpfung errechnet werden.

$$k_{zz} = 28.3$$

$$c_{zz} = 67.6$$

Nach /9/ und /11/ gilt für die Beiwerte K_z , C_z :

$$K_z = 2.7$$

$$C_z = 6.7$$

Die mittlere Einbettungstiefe beträgt für eine Schwelle $H = 0.17$ m und die halbe Breite ist $a = 0.13$ m.

Zur Ermittlung des effektiven Schubmoduls G_E im Einbettungsbereich wird die effektive Spannung $\bar{\sigma}_0$ benötigt. Diese ermittelt sich aus Gl. 6.3 unter der Annahme einer Materialdichte von $\rho = 1.54$ t/m³ und einem Reibungswinkel von $\varphi = 39.6^\circ$ (siehe /8/) zu:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_z}{3} (1 + 2 (1 - \sin \varphi)) \approx 1.0 \text{ KN/m}^2$$

$$\text{mit } \sigma_z = \gamma z_{\text{eff}} = 15.4 \cdot 0.17 \cdot 2/3 \approx 1.75 \text{ KN/m}^2.$$

Mit Gl. 6.2 und einer Porenzahl von $e = 0.784$, /8/, errechnet sich dann der effektive Schubmodul G_E zu

$$G_E = \frac{7230 (2.97 - 0.784)^2}{1.784} 1^{0.38} = 19.37 \text{ MN/m}^2.$$

Für den effektiven Schubmodul G des Untergrundes wird aus /30/ ein Zahlenwert von

$$G = 82.3 \text{ MN/m}^2$$

entnommen. Damit ist $G_E/G = 19.37/82.3 = 0.235$ und $H/a = 0.17/0.13 = 1.30$. Weiter wird noch das Verhältnis

$$\frac{a_{OE}}{a_O} = \frac{\omega}{v_{SE}} \frac{r_T v_S}{\omega a} = \frac{r_T v_S}{a v_{SE}}$$

benötigt. Unter der Annahme $\rho = \rho_E$ und mit den Gl. 6.5 bis 6.7, ergibt sich

$$\frac{a_{OE}}{a_O} = 3.57 \sqrt{\frac{G}{G_E}} = 7.36$$

Damit kann nun der Prozentsatz der Steifigkeitserhöhung abgeschätzt werden zu:

$$\frac{R_E(\tilde{k}_{zz}^E)}{k_{zz}} = \frac{28.3 + 0.235 \cdot 1.30 \cdot 2.70}{28.3} = 1.029.$$

Für die Erhöhung der Dämpfung ergibt sich ein Faktor von:

$$\frac{IM(\tilde{k}_{zz}^E)}{c_{zz}} = \frac{67.6 + 0.235 \cdot 1.30 \cdot 7.36 \cdot 6.7}{67.6} = 1.22.$$

Aus dieser Beispielrechnung ist zu ersehen, daß die Einbettung in dem gegebenen Fall nur eine sehr geringe Erhöhung der Steifigkeit bewirkt. Der Prozentsatz von ca. 3 % liegt erheblich unter der Genauigkeit mit der der effektive Schubmodul G des Untergrundes praktisch bestimmt werden kann. Für die Werte der Dämpfung ist jedoch ein erheblich größerer Einfluß der Einbettung zu erwarten. Dieser Einfluß ist im allgemeinen zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieser Einfluß jedoch außer acht gelassen um die Interpretation der nachfolgenden Rechenergebnisse nicht unnötig zu verkomplizieren.

7. Ersatzsystem der Schwellen und Schienen

7.1 Systembeschreibung

Bisher wurde die dynamische Reaktion einer starren masselosen Fläche bzw. eines Systems von starren masselosen Flächen auf der Oberfläche eines linear elastischen Halbraumes untersucht. Damit lassen sich Nachgiebigkeitsfunktionen für eine Einzelschwelle und für die Koppelung für ein System von mehreren Schwellen ermitteln.

Zur Beschreibung des gesamten schwingungsfähigen Systems der Fahrbahn eines schienengebundenen Fahrzeugs sind jetzt noch die Teilsysteme Schwellen und Schienen näher zu untersuchen. Es ist nun sehr schwierig das dreidimensionale Gebilde des Schienen-Schwellenrostes mit analytischen Methoden zu beschreiben. Deshalb wird hier von einem numerischen Verfahren, der Methode der finiten Elemente, Gebrauch gemacht. Die Methode der finiten Elemente ist ein Verfahren zur näherungsweise Beschreibung von Systemen mit schwierigen geometrischen Verhältnissen und komplexen Randbedingungen. Nach dem derzeitigen Stand der Theorie ist diese Methode anwendbar auf alle Variationsprobleme, die ein positiv definites Funktional besitzen, wie es immer bei Problemen

im Bereich der linearen Elastizitätstheorie auftritt. Die Näherung bei dieser Methode besteht darin, daß der tatsächliche Verschiebungszustand \underline{u} des Systems durch einen Verschiebungszustand \underline{v} beschrieben wird. Der Verschiebungszustand \underline{v} wird durch Basisfunktionen innerhalb eines finiten (endlichen) Teilbereiches (Elementes) des Systems in Abhängigkeit von diskreten Werten der Knotenpunktverschiebungen definiert. Die Basisfunktionen innerhalb jedes finiten Elements müssen dabei im allgemeinen die kinematischen und dynamischen Verträglichkeitsbedingungen/32/ erfüllen.

Für das hier zu untersuchende Problem werden zur Modellierung der Schwellen und Schienen finite Stabelemente mit bereichsweiser konstanter Geometrie benutzt. Zur Erfüllung der Voraussetzung eines positiv definiten Funktionals werden die Materialeigenschaften als linear elastisch betrachtet. Die Stoffe bestehen dann aus Hooke'schem Material mit den Konstanten Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν . Materialdämpfung ist in den späteren Berechnungen nicht eingeschlossen, kann aber entsprechend dem Korrespondenzprinzip (Gl. 3.9) leicht durch Einführung eines komplexen Schubmoduls (hysteretische Materialdämpfung) berücksichtigt werden.

Eine kurz gefaßte Darstellung der Berechnungsmethode des Schienenschwellensystems ist in /30/ zu finden. Da in dieser Arbeit die Beschreibung des Systems "Fahrbahn" jedoch im Gesamtzusammenhang erfolgt, wird hier im folgenden der Entwicklung der Berechnungsmethode ein etwas breiterer Platz eingeräumt.

7.2 Variationsprinzip

In allgemeiner Gültigkeit wird bei dynamischen Untersuchungen das Variationsproblem durch das Hamiltonsche Prinzip

$$\int_{t_a}^{t_e} (\delta L + \delta C) dt = 0 \quad (7.1)$$

beschrieben.

Die diesem Variationsprinzip zugeordneten Eulerschen Differentialgleichungen sind die sogenannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

In Gl. (7.1) ist L die Lagrangesche Funktion (kinetisches Potential).

$$L = E - U = E + A^{(e)} = E + A_a + W \quad (7.2)$$

Hierin ist E die kinetische Energie, A_a das Potential der äußeren Kräfte und W das Potential der Verzerrungsenergie des elastischen Körpers. In C der Gl. (7.1) sind alle am System angreifenden nicht aus Potentialen ableitbare Kräfte (Reibung) zusammengefaßt.

Das Prinzip besagt, daß das Zeitintegral zwischen zwei willkürlichen Zeitpunkten $t_a \leq t \leq t_e$ über die Lagrangesche Funktion einen stationären Wert annimmt.

Für konservative Systeme (d.h. ohne Betrachtung von C) gilt für die Potentiale in Matrixschreibweise:

$$W = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dV \quad (7.3)$$

$$A_a = \int_{(O)} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_O \, dO + \int_{(V)} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_V \, dV + \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}, \quad (7.4)$$

und die kinetische Energie wird durch

$$E = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \, \underline{\underline{\dot{u}}}^T \underline{\underline{\dot{u}}} \, dV \quad (7.5)$$

beschrieben.

In den Gl. 7.3 - 7.5 ist $\underline{\underline{\epsilon}}$ der Verzerrungsvektor, $\underline{\underline{\sigma}}$ der Spannungsvektor, $\underline{\underline{p}}_O$, $\underline{\underline{p}}_V$ die Vektoren der Oberflächenkräfte und Volumenkräfte und $\underline{\underline{p}}$ ist ein Vektor diskret angreifender Lasten. Das Verschiebungsfeld und Geschwindigkeitsfeld ist durch $\underline{\underline{u}}(x,y,z)$ bzw. $\underline{\underline{\dot{u}}}(x,y,z)$ definiert.

Für eine Variation $\delta \underline{\underline{u}}$, womit über die Elastizitätsgesetze ein kompatibler Verzerrungszustand $\delta \underline{\underline{\epsilon}}$ verbunden ist, lauten die variierten Energieausdrücke:

$$\delta W = \int_{(V)} \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dV \quad (7.6)$$

$$\delta A_a = \int_{(O)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_O \, dO + \int_{(V)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_V \, dV + \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}} \quad (7.7)$$

und unter der, dem Hamiltonschen Prinzip innewohnenden Voraussetzung, daß die variierte Verschiebung $\delta \underline{u}$

$$\delta \underline{u}(t_a) = \delta \underline{u}(t_e) = 0$$

ist, ergibt sich die variierte kinetische Energie zu

$$\delta E = \int_{(V)} \rho \delta \underline{\dot{u}}^T \dot{\underline{u}} dV = \int_{(V)} \rho \delta \underline{u}^T \ddot{\underline{u}} dV \quad (7.8)$$

7.3 Ableitung der Elementsteifigkeits- und -Massenmatrix

Betrachtet wird ein eindimensionales Stabelement entsprechend Abb. 32, mit dem dort eingezeichneten Koordinatensystem und den Elementknotendeformationen.

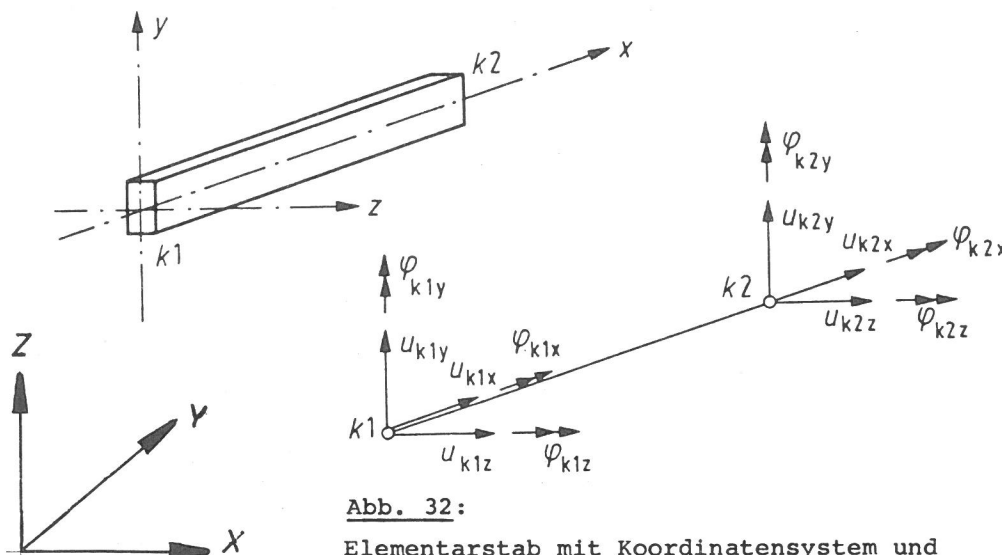


Abb. 32:

Elementarstab mit Koordinatensystem und Knotendeformationen nach /33/.

Der Verschiebungszustand \underline{u} des Elementes wird durch einen Satz von Basisfunktionen \underline{N} in Abhängigkeit der Knotendeformationen \underline{v} zu

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{v} \quad (7.9)$$

definiert.

Weiter gilt für die Verzerrungen entsprechend den Gesetzen der Elastizitätstheorie

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{v} \quad (7.10)$$

Die Matrix \underline{B} entsteht aus einem Differentialprozeß an den Basisfunktionen \underline{N} . Die Verknüpfung der Verzerrung $\underline{\epsilon}$ mit

den Spannungen $\underline{\sigma}$ erfolgt durch ein konstitutives Materialgesetz

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} . \quad (7.11)$$

\underline{D} enthält hier die Materialkonstanten für Hookesches Material. Das Variationsprinzip der Gl. 7.1 kann nun unter Einsetzen der Gl. 7.9 - 7.11 in die variierten Energieausdrücke der Gl. 7.6 - 7.7 angeschrieben werden zu:

$$\int_{t_a}^{t_e} \left(\int_{(V)} \delta \underline{v}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{v} \, dV + \int_{(V)} \rho \delta \underline{v}^T \underline{N}^T \underline{N} \ddot{\underline{v}} \, dV - \delta \underline{v}^T \underline{p} \right) dt = 0 \quad (7.12)$$

In Gl. (7.12) ist zur Vereinfachung vorausgesetzt, daß keine Oberflächen- und Volumenkräfte vorhanden sind. Da das Ergebnis der Gl. (7.12) unabhängig vom Betrage der willkürlichen Variation $\delta \underline{v}$ sein muß (differentielle Kleinheit der Variationen vorausgesetzt), wird Gl. 7.12 für alle beliebigen t_a, t_e erfüllt wenn:

$$\underline{K} \underline{v} + \underline{M} \ddot{\underline{v}} = \underline{p} . \quad (7.13)$$

Hierin wird

$$\underline{K} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dV \quad (7.14)$$

$$\underline{M} = \rho \int_{(V)} \underline{N}^T \underline{N} \, dV \quad (7.15)$$

als Steifigkeitsmatrix \underline{K} bzw. Massenmatrix \underline{M} bezeichnet.

Unter der Voraussetzung, daß die Belastung $\underline{p}(t)$ harmonisch variiert

$$\underline{p}(t) = \underline{p} e^{i\omega t} , \quad (7.16a)$$

ist auch der Ergebnisverlauf harmonisch

$$\underline{v}(t) = \underline{v} e^{i\omega t} . \quad (7.16b)$$

Durch zweimalige Differentiation von Gl. 7.16 nach der Zeit t , kann die Zeitabhängigkeit von Gl. (7.13) eliminiert werden, und man erhält:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{v} = \underline{p} . \quad (7.17)$$

Im allgemeinen Fall ist die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix \underline{K} und Massenmatrix \underline{M} nur durch eine numerische

In den Gl. (7.18) und (7.19) bezeichnen l die Elementlänge, A die Stabfläche, I , I_z , I_y , sind die den jeweiligen Koordinaten zugeordneten Trägheitsmomente. E ist der Elastizitätsmodul, G der Schubmodul und ρ die Materialdichte.

Der Anteil der Schubverformung an der Gesamtverformung wird durch bezogene Schubverteilungszahlen ϕ_y, ϕ_z , die durch

$$\begin{aligned}\phi_y &= \kappa_y \frac{12EI_z}{Gl^2A} \\ \phi_z &= \kappa_z \frac{12EI_y}{Gl^2A}\end{aligned}\tag{7.20}$$

beschrieben werden /33/, in die Analyse mit einbezogen.

7.4 Assemblierung und Transformation

Zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen und Massenmatrizen für das Gesamtsystem ist die kinetische Energie des Gesamtsystems zu betrachten und sind die im allgemeinen räumlichen Fall mitlaufenden lokalen Koordinatensysteme der Elementarstäbe auf ein globales ortsfestes Koordinatensystem zu beziehen.

Da die Lagrangesche Funktion L_j (kinetisches Potential) der n Einzelstäbe eine skalare Größe ist, ist es zulässig den Gesamtenergiebetrag L durch einfache Summation zu ermitteln.

$$L = \sum_{j=1}^n L_j\tag{7.21}$$

Die Gesamtsteifigkeits- und massenmatrizen ergeben sich dann in gleicher Weise durch Summation der Elementmatrizen in Abhängigkeit der Knotennummerierung des Gesamtsystems zu:

$$\begin{aligned}\underline{K} &= \sum_{j=1}^n \underline{K}_j \\ \underline{M} &= \sum_{j=1}^n \underline{M}_j\end{aligned}\tag{7.22}$$

Diese Operation wird im angelsächsischen Sprachbereich als "Assemblage" bezeichnet. Ein ausführlicher Beweis dieser kurzen Ausführungen ist z.B. in /34/ zu finden.

Zur Transformation der im lokalen System definierten

Gl. 7.13 oder 7.17 wird wie in /30/ oder /33/ die Transformationsmatrix \underline{T} definiert, die die lokalen Verschiebungen \underline{v}_0 auf die globalen Verschiebungen \underline{v} überführt.

$$\underline{v}_0 = \underline{T} \underline{v} \quad (7.23)$$

Die Elemente der Transformationsmatrix \underline{T} werden aus dem Richtungscosinus der einzelnen Knotenpunktkoordinaten ermittelt. Unterwirft man die Knotenpunktverschiebungen einer virtuellen Verschiebung und beachtet, daß die dadurch geleistete virtuelle Arbeit unabhängig vom jeweiligen Koordinatensystem sein muß, so gilt:

$$\delta \underline{v}_0^T \underline{q} = \delta \underline{v}^T \underline{p}, \quad (7.24)$$

wobei \underline{q} der auf das Bezugssystem projizierte Belastungsvektor ist.

Mit Gl. 7.23 gilt für Gl. 7.24

$$\delta \underline{v}_0^T (\underline{q} - \underline{T}^T \underline{p}) = 0, \quad (7.25)$$

bzw. infolge der Beliebigkeit der virtuellen Verschiebung $\delta \underline{v}_0^T$

$$\underline{q} = \underline{T}^T \underline{p}. \quad (7.26)$$

Einsetzen von Gl. 7.26 in Gl. 7.17 unter Beachtung von Gl. 7.23 liefert die gesuchte Transformationsbeziehung für den Übergang vom lokalen zum globalen Koordinatensystem:

$$\underline{q} = \underline{T}^T (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{v}_0 = \underline{T}^T \underline{S}_e \underline{T} \underline{v}. \quad (7.27)$$

7.5 Berücksichtigung von Verschiebungsrandbedingungen

Zur Berücksichtigung von Verschiebungsrandbedingungen (z.B. vorgegebene Fußpunkterregung bzw. Auflagerbedingungen), die gleichbedeutend mit einer Reduzierung der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems sind, muß Gl. 7.17 modifiziert werden. Die in Gl. 7.27 definierte Systemmatrix $\underline{S} = \underline{T}^T (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{T}$ wird hierbei derart in Submatrizen \underline{S}_{ij} aufgeteilt, daß gilt:

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{12}^T & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_f \\ \underline{u}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_f \\ \underline{P}_e \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

In den Vektoren \underline{u}_f , \underline{P}_f sind die gesuchten freien Knotenverschiebungsamplituden und zugeordneten Kräfte und in den Vektoren \underline{u}_e , \underline{P}_e die eingepprägten Knotenpunktverschiebungen und zugeordneten jetzt unbekanntes Knotenpunktkräfte angeordnet. Das reduzierte, zu lösende Gleichungssystem für die Knotenpunktverschiebungen u_f lautet dann:

$$\underline{S}_{11} \underline{u}_f = \underline{P}_f - \underline{S}_{12} \underline{u}_e \quad (7.29)$$

Eine solche Reduktion ist immer notwendig, da die sonst fehlenden Festhaltungen des Systems die Systemmatrix \underline{S} singular werden läßt.

7.6 Näherungsweise Berücksichtigung der Unendlichkeit der Schienen

Bei dem System des Schienen-Schwellenrostes ist es für den Fall der Koppelung über den Boden infolge der Amplitudenabnahme des Wellenfeldes mit der Entfernung durch geometrische - und Materialdämpfung möglich einen endlichen Ausschnitt zu betrachten. Für das Teilsystem "Schiene" tritt jedoch dann eine Verletzung der Randbedingungen an der Systembegrenzung ein. In /30/ ist ausführlich dargelegt, wie dies näherungsweise kompensiert werden kann. Deshalb sollen hier nur die wesentlichen Schritte gezeigt und das Endergebnis aufgeführt werden. Grundlage ist der einfache Fall, daß in der Schiene eine Spannungswelle σ_x , die sich mit der Geschwindigkeit c in x -Richtung der Schiene ausbreitet, durch die Belastung erzeugt wird. Nach /35/ wird dieser Fall durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (7.30)$$

beschrieben. Die Spannungswelle erzeugt in einer Entfernung x_j die Verschiebung

$$u_x = \frac{\sigma_x}{E} x_j = \frac{\sigma_x}{E} c t . \quad (7.31)$$

Umformung von Gl. (7.31) ergibt

$$\frac{u_x}{t} = \dot{u}_x = \frac{\sigma_x}{E} c , \quad (7.32)$$

wobei \dot{u}_x als Geschwindigkeit eines Teilchens interpretiert werden kann. Wird die Schiene an der Stelle x_j freigeschnitten, so ist nach Gl. 7.32 eine Spannung

$$\sigma_x = \frac{\dot{u}_x E}{c} \quad (7.33)$$

zu erwarten, die zur Aufrechterhaltung der Impulsbilanz kompensiert werden muß. Dies kann erreicht werden, wenn eine entsprechende äußere Kraft

$$P_x = A \sigma_x = A \sqrt{E\rho} \dot{u}_x \quad (7.34)$$

auf das Schienenende aufgebracht wird. (A ist die Stabfläche). Im Falle einer harmonischen Belastung entsprechend Gl. 7.16 ergibt sich für Gl. (7.34)

$$P_x = i\omega \sqrt{E\rho} A u_x . \quad (7.35)$$

Die in Gl. 7.35 ausgedrückte Beziehung ist natürlich nicht geeignet die Elastizität des abgetrennten Schienenteils zu berücksichtigen. Gewährleistet wird durch diese Beziehung nur, daß keine oder nahezu keine Reflexionen an dieser Systembegrenzung auftreten.

In ähnlicher Weise können die Schienenendkräfte für die anderen Freiheitsgrade abgeleitet werden. So erhält man z.B. für die Drehung φ_x

$$M_x = i\omega \sqrt{G\rho} I_p \varphi_x \quad (7.36)$$

und für die Translation u_z , bzw. u_y :

$$P_{z,y} = \frac{i\omega 2\pi}{\lambda_{z,y}} \sqrt{E I_{y,z} \rho A} u_{z,y} . \quad (7.37)$$

In diesen Gleichungen ist I_j das den jeweiligen Richtungen

zugeordnete Trägheitsmoment und $\lambda_{z,y}$ ist eine Wellenlänge, die näherungsweise aus den gegebenen Lagerungsbedingungen in Abhängigkeit der Frequenz zu ermitteln ist /30/. Zusammenfassend gilt dann für die Schienenenden in Matrixschreibweise

$$i\omega \underline{D} \underline{u} = \underline{p} , \quad (7.38)$$

wobei \underline{u} die Freiheitsgrade am Schienenende und \underline{p} die zugeordneten Kräfte sind.

8. Gesamtsteifigkeitsbeziehung und Kritik der Lösungsmethoden

8.1 Impulsbilanz

Mit den Gl. 5.1 bis 5.4, 7.17 und 7.38 kann die Impulsbilanz des Gesamtsystems für harmonische Belastung durch einfache Addition der Einzelenergien gebildet werden zu:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{D} + \underline{F}^{-1}) \underline{v} = \underline{p} . \quad (7.39)$$

Hierin beschreiben die Matrizen $\underline{K} - \omega^2 \underline{M}$ das Elastizitäts- und Trägheitsverhalten des Schienen-Schwellensystems, \underline{D} die viskosen Dämpfungskräfte des Schienenendes und \underline{F}^{-1} ist die inverse Nachgiebigkeitsmatrix (eventuell einschließlich Einbettung) eines Systems von mehreren masselosen Schwellen auf einem linear elastischen Halbraum. Voraussetzung für die in Gl. 7.39 dargestellte einfache Addition ist, daß die im Rang kleineren Matrizen \underline{D} und \underline{F}^{-1} durch Hinzufügung von Nullen und eventuellem Spalten- und Zeilentauch entsprechend der Diskretisierung des Schienen-Schwellensystems durch die Methode der finiten Elemente auf den Rang der Matrizen \underline{K} , \underline{M} erweitert werden.

8.2 Hinweise und Kritik

Das Gleichungssystem 7.39 ist linear und symmetrisch. Weiter besitzen die Matrizen \underline{K} , \underline{M} Bandstruktur, wobei die Bandbreite MB proportional zur maximalen Knotendifferenz in der Form

$$MB = 6 \times \text{max. Knotendifferenz} + 6 \quad (7.40)$$

ist. Durch entsprechende Optimierungsmaßnahmen /33/, /36/

kann die Bandbreite minimiert werden.

Die hinsichtlich des Bedarfs an Rechenzeit sehr günstige Eigenschaft einer schmalen Bandbreite wird zum Teil wieder zu-
nicht gemacht durch die Bodenkoppelungsmatrix \underline{F}^{-1} .

Durch Berücksichtigung einer großen Anzahl von Schwellen können Gleichungssysteme entstehen, die nicht nur in einem schmalen Bereich um die Diagonale besetzt sind, sondern Elemente weit außerhalb der Diagonale besitzen. Damit sind unter Umständen Gleichungssysteme zu lösen, deren Rang gleich der Gesamtanzahl der Unbekannten ist. Probleme die hierbei entstehen, sind die stark ansteigende Rechenzeit und der notwendige Kernspeicherbedarf. Für praktische Untersuchungen ist deshalb anzustreben, die Gesamtanzahl zu berücksichtigender Schwellen zu begrenzen, wobei sich die Gesamtanzahl nach der gewünschten Genauigkeit richten muß. Bei der Ermittlung der Elemente der Bodenkoppelungsmatrix \underline{F} wird der Untergrund als linear elastischer homogener Halbraum bzw. bei Schichtung durch das in /31/ angegebene Verfahren als äquivalenter homogener Halbraum betrachtet. Das tatsächliche Verhalten des Untergrunds im Falle einer ausgeprägten Schichtung bzw. die infolge der Spannungs- und Dehnungsabhängigkeit des Schubmoduls orts- und zeitabhängige Änderung der Steifigkeitsverteilung des Untergrundes bei Überfahrt eines Zuges kann dann nur im Mittel beschrieben werden. Es ist jedoch als plausibel anzunehmen, daß die Veränderung der zeitlichen und örtlichen Schubmodulverteilung des Untergrundes bei Zugüberfahrten nicht so ausgeprägt ist, da einerseits eine Zunahme des Schubmoduls mit zunehmender Spannung einhergeht mit einer Abnahme infolge größerer Schubdeformationen. Zum anderen wird ein gewisser Ausgleich dadurch stattfinden, daß sich die Last bei Überfahrt infolge der Kopplung über die Schienen auf mehrere Schwellen verteilt. Bei der Diskretisierung der Schienen und Schwellen durch Stabelemente mit Hilfe der Methode der finiten Elemente kann die Steifigkeitsmatrix exakt im Sinne der Balkentheorie angegeben werden. Nach /33/ gilt jedoch, daß ein Verschiebungsfeld der Form $\underline{u} = \underline{N} \underline{v}$ für beliebige dynamische Randbedingungen eines Elementes nicht realisierbar ist. Der oben angeführte statische Ansatz ist damit nur ein Näherungsansatz, wobei dann entsprechend dem Ritz'schen

Verfahren die Methode der finiten Elemente immer nur obere Grenzen der Eigenfrequenzen liefert. Wird an Stelle der, mit obigem Ansatz als konsistent bezeichnenden Massenmatrix, eine Punktmassenmatrix (lumped mass -matrix) verwendet, dann ergeben sich Eigenfrequenzen die kleiner als die tatsächlichen Eigenfrequenzen sind. Für genaue Untersuchungen kann damit ein relativ "exakter" Wert durch Anwendung beider Verfahren gefunden werden.

Die Diskretisierung hat aber auch zur Folge, daß sich die Eigenfrequenzen als abhängig von der Elementlänge herausstellen. So gilt z.B. nach /33/ für die Eigenwerte eines freien Stabes:

$$\text{exakt: } \omega_{\text{ex}} = i \frac{\pi}{l} c \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.40)$$

$$\begin{array}{l} \text{konsistente} \\ \text{Massendarstellung:} \end{array} \quad \omega_k = \frac{2 c}{\Delta x} \frac{\sin \frac{a}{2 N}}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{a}{2 N}}} \quad (7.41)$$

$$\begin{array}{l} \text{Punktmassen-} \\ \text{darstellung} \end{array} \quad \omega_p = \frac{2 c}{\Delta x} \sin \frac{a}{2 N} \quad (7.42)$$

$$a_{\text{ex}} = i \pi \quad i = 0, 1, 2 \quad (7.43)$$

Hierin ist l die Länge des Stabes, Δx die Länge eines Elementes, a die Wellenlänge und N ist die Anzahl der Elemente.

Aus der Reihenentwicklung für die Näherungswerte der Eigenfrequenzen, Gl. 7.41 und Gl. 7.42 ergibt sich, daß in einem finiten Element Modell Abweichungen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Eigenformen in bezug zu den exakten Werten auftreten. So haben die höheren Eigenformen bei konsistenter Massenmatrix eine zu hohe, bei Punktmassendarstellung eine zu niedrige Ausbreitungsgeschwindigkeit:

Nach /33/ gilt:

$$\dot{v}_{k,p} = \frac{a}{2 \pi} \omega_{k,p} = c \left(1 \pm \text{Glieder } \left(\frac{a}{N} \right) \text{ höherer Ordnung} \right).$$

(7.44)

Ähnlich wie bei den Eigenfrequenzen können diese gegensätzlichen dispersiven Eigenschaften der beiden Massenabbildungen dazu benutzt werden, dispersive von realen Oszillationen zu unterscheiden.

9. Rechenbeispiele und Vergleich mit Messungen

9.1 Allgemeines

Die Überprüfung, der mit obiger Theorie zu erreichenden Vorhersagen über das Schwingungsverhalten der Systeme: Einzelschwelle (starr und elastisch), Schwellensystem mit Koppelung über den Boden, Gleisrost mit Koppelung über die Schienen und Untergrund, erfolgt durch Versuche und Messungen an einer speziell eingerichteten Versuchsstrecke in Karlsruhe/Leopoldshafen. Die Versuche werden zum größten Teil vom Institut für Boden und Felsmechanik (IBF) der TU Karlsruhe in Zusammenarbeit mit der Firma Krupp durchgeführt.

9.2 Belastungseinrichtung und Versuchsprogramm

Bei der Überfahrt eines Zuges über einen Gleisabschnitt entsteht eine relativ große statische Belastung aus Zug-eigengewicht, der eine kleinere dynamische Belastung mit den in Abschnitt 1. angegebenen Ursachen überlagert ist. Diese Art der Belastung ist im Versuch nachzubilden. Hierzu dient eine von der Firma Krupp Industrie- und Stahlbau, Essen, im Rahmen eines Rad/Schiene Forschungsvorhabens entwickelte hydraulische Belastungseinrichtung, die in einen Oberbau-Meßwagen installiert ist. Abb. 33 zeigt eine Prinzipskizze dieser Anlage, in /36/ (aus der Abb. 33 entnommen wurde), ist eine prinzipielle Beschreibung der Wirkungsweise zu finden.

Das Versuchsprogramm des IBF und teilweise der BAM sieht im wesentlichen folgende Einzelaktivitäten vor:

- a) Ermittlung der Materialkennwerte von Schotter und Boden durch in situ - Messungen und durch Resonant Column Versuche im Labor. Über Ergebnisse ist in /8/ berichtet worden.

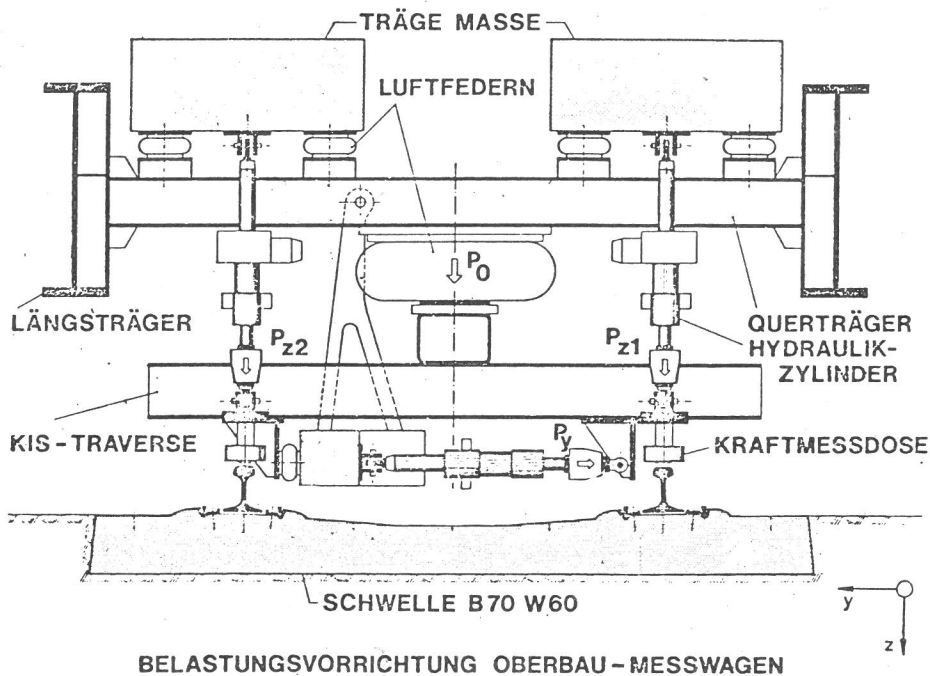


Abb. 33:
Belastungsvorrichtung
des KIS-Oberbaumesswagens
nach /36/.

- b) Messung der Reaktionen einer starren und elastischen Einzelschwelle. Bei diesen Versuchen wurden die Schienenbefestigungen in einem gewissen Schwellenbereich (14 Schwellen \times 0,6 m = 8,40 m) gelöst und die elastische Zwischenlage entfernt, so daß ein Luftspalt von ca. 5 mm zwischen Schiene und Schwellen entstand. Die Nachbarschwellen der belasteten Schwelle wurden jedoch nicht aus dem Schwellenverband entfernt. Über Ergebnisse dieser Versuche wurde in /36/ berichtet. Dieser Bericht enthält auch einen ersten Vergleich der Meßwerte des IBF mit den von der BAM in /30/ mitgeteilten theoretischen Ergebnissen der ersten näherungsweise Modellierung für eine Einzelschwelle und eines Gleisrostes ohne Bodenkopplung.
- c) Messung der Reaktionen mehrerer Nachbarschwellen infolge Belastung einer starren Einzelschwelle. Diese Versuche wurden von der BAM in Zusammenhang mit den Versuchen nach b) durchgeführt und deren Ergebnisse in /37/ dargestellt. Der Meßplan der Nachbarschwellen und die Lage der erregten Schwelle (Nr. 16) ist Abb. 34 zu entnehmen.
- d) Messung der Reaktionen eines Gleisrostes, der über die Schienen und den Untergrund gekoppelt ist. Ein Bericht hierzu liegt noch nicht vor.

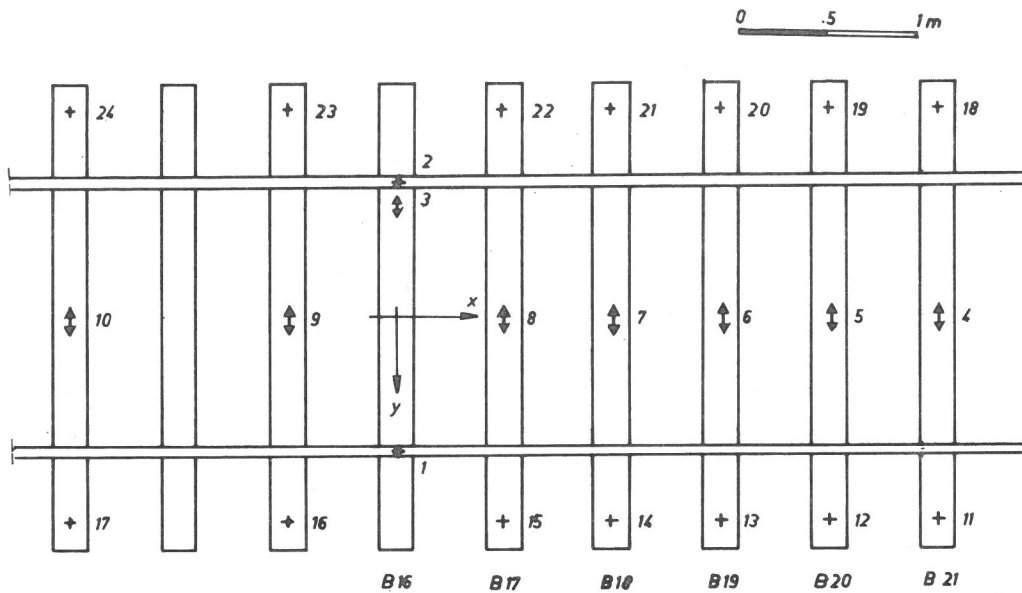


Abb. 34:

Messrichtung: + vertikal
 ‡ horizontal

Schwellenplan zur Messung der dynamischen Reaktion starrer Schwellen.

Bei allen diesen Versuchen werden folgende Parameter variiert:

statische Vorlast $P_{\text{stat}} = \{50, 75, 100\}$ KN

dynamische Belastung $P_{\text{dyn}} = \{1, 2, 4\}$ KN

Als Belastungsmoden und zu messende Reaktionen waren vorgesehen:

Belastung P_z mit vertikaler Translation u_z

Belastung P_y mit horizontaler Translation u_y

Belastung M_x mit Rotation φ_x .

Das diesen Belastungs- und Reaktionsmoden zugehörige Koordinatensystem ist Abb. 33 bzw. Abb. 34 zu entnehmen. Die Meßtechnologie von IBF und BAM (PCM-Verfahren) ist ausführlich in /8/, /36/ und /37/ dargestellt und soll deshalb hier nicht wiederholt werden.

9.3 Berechnete Teilsysteme

Analog zu dem Meßprogramm werden folgende Teilsysteme analytisch und numerisch untersucht:

a) Starre Einzelschwelle

Für dieses Teilsystem werden die Moden vertikale Translation u_z infolge vertikaler Belastung P_z , sowie die Rotationen φ_x und φ_y infolge zugeordneter Momentenbelastung M_x, M_y einer exakten Lösung zugeführt. (Unter

der oben vereinbarten Bedingung eines linear elastischen Halbraums ohne Einbettung der Schwelle und ohne Ansatz von Materialdämpfung). Die ebenfalls betrachteten Bewegungsmoden der horizontalen Translationen u_x und u_y infolge P_x und P_y sind Näherungslösungen. Die verbleibende Bewegungsmode der Rotation φ_z um die Hochachse einer Schwelle infolge M_z wird als derzeit nicht relevant betrachtet und deshalb nicht weiter untersucht.

b) Elastische Einzelschwelle

Dieses Teilsystem wird für die Belastungsmoden P_z , P_y und M_x untersucht, wobei jeweils die translatorischen Verschiebungen u_z und u_y an mehreren materiellen Punkten der elastischen Schwelle berechnet werden.

c) System starrer Schwellen

Dieses Teilsystem wird für die Belastungsmoden P_z und M_y untersucht. Variiert wird die Anzahl n der als starr angenommenen Schwellen mit $n = \{1, 3, 5, 7\}$ Schwellen. Berechnet werden jeweils die translatorischen Verschiebungen u_z und Rotationen φ_y jeder Einzelschwelle.

d) Gleisrost

Hier wird ein System, bestehend aus 7 Schwellen die über die Schienen und den Untergrund gekoppelt sind, infolge vertikaler Belastung P_z einer Schwelle untersucht. Berechnet werden sämtliche translatorischen Verschiebungen u_x , u_y , u_z an mehreren materiellen Punkten des Systems.

9.4 Starre Einzelschwelle

9.4.1 Systemdaten

Der Berechnung zugrundegelegt werden folgende Daten:

Schwellenabmessungen $2a \times 2b = 0,26 \times 2,60$ [m]

Masse m

einer Schwelle B70 W60 $m = 290$ [kg]

Massenträgheitsmoment $\theta_x = 23746$ [kg cm²]

Massenträgheitsmoment $\theta_y = 1641076$ [kg cm²]

Materialdichte Schwelle $\rho_s = 2500$ [kg/m³]

Schubmodul des Unter-

grundes $G_B = 82.3$ [MN/m²]

Materialdichte Unter-		
grund	$\rho_B = 1540$	$[\text{kg/m}^3]$
Poissonzahl Untergrund	$\nu = 0.25$	$[/]$

Die Systemdaten der Schwelle B70W60 wurden aus einem Schwellenplan der Deutschen Bundesbahn ermittelt. Die Materialkennwerte des Untergrundes wurden aus /30/ entnommen.

9.4.2 u_z -Translation

Die Abb. 35 und Abb. 36 zeigen die theoretischen Amplituden- und Phasenfrequenzgänge für die vertikale Translationsmode u_z infolge einer Belastung $P_z = 1 e^{i\omega t}$ für eine statische Vorlast von 50 KN (Abb. 35) und 100 KN (Abb. 36) im Vergleich mit den Meßwerten nach /36/.

Der Vergleich ergibt, daß die Theorie die tatsächlichen Verhältnisse sowohl hinsichtlich der Amplituden wie der Phasen recht gut wiedergibt. Auffallend an den Abbildungen ist, daß sich die Lage des absoluten Maximas des Meßergebnis von dem theoretischen Wert unterscheidet. Da dieser Wert bei den Meßergebnissen kleiner ist, ist daraus zu schließen, daß der Schubmodul des Untergrundes bei den Messungen etwas kleiner war, als er bei den Rechnungen angenommen wurde. Beachtet man, daß bei Annahme von frequenzunabhängigen Steifigkeiten - dies kann hier für den untersuchten Frequenzbereich vorausgesetzt werden - die Steifigkeit proportional zum Schubmodul ist, so gilt in erster Näherung für das Verhältnis der Eigenfrequenzen f_M der Messung und f_R der Rechnung mit den aus Abb. 35 abzulesenden Werten:

$$\frac{f_M}{f_R} = \frac{G_M}{G_R} \approx \frac{95}{125} = 0.76 .$$

Verzerrt man für die theoretischen Werte die Frequenzachse mit dem Faktor 0.76 und multipliziert die theoretischen Amplitudenwerte mit 1/0.76 zur Berücksichtigung des tatsächlich kleineren Wertes für den Schubmodul, so ergibt sich nahezu vollständige Übereinstimmung mit den Meßwerten. (punktierte Linie in Abb. 35). Die noch auftretende Abweichung nach dem absoluten Amplitudenmaxima ist aus Trägheitseinflüssen zu erklären, die in dieser

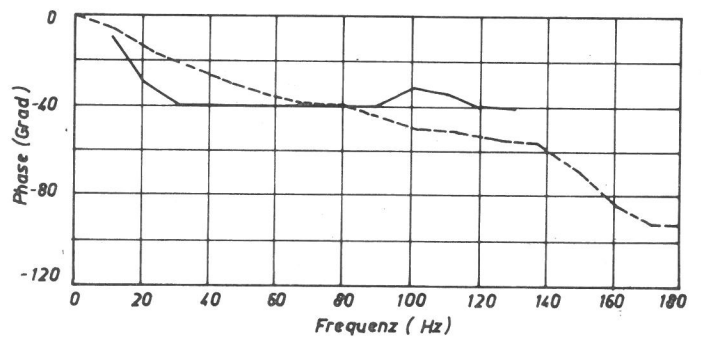
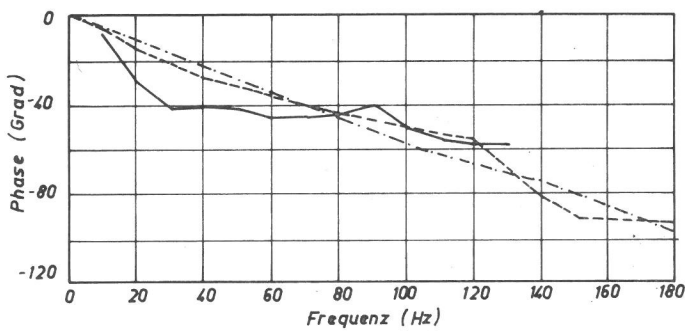
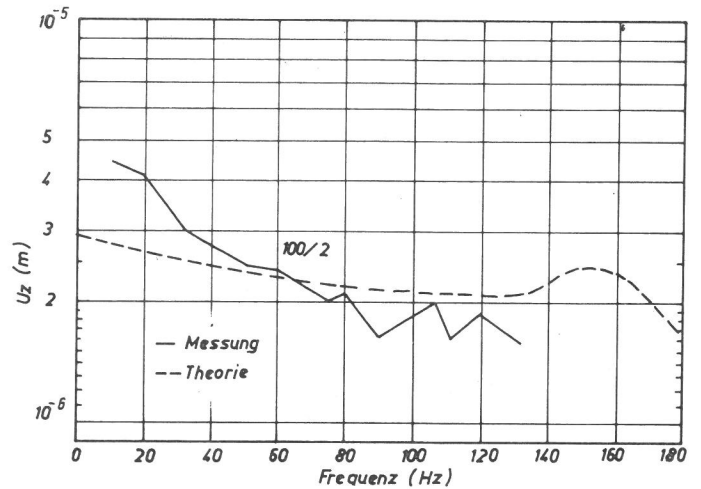
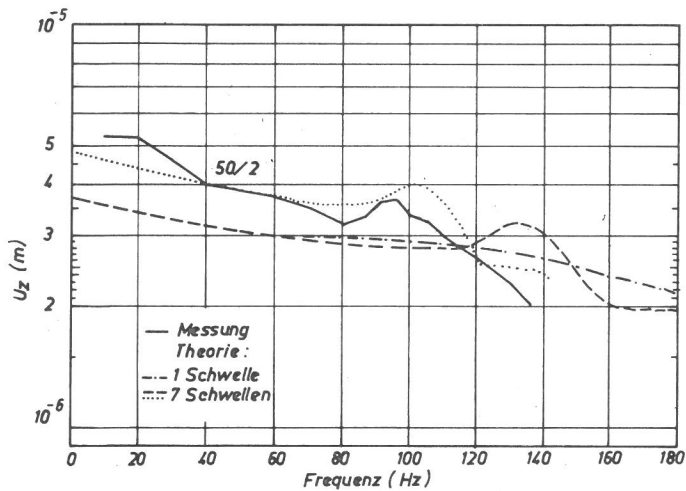


Abb. 35:

Vertikale Translation u_z einer starren Einzelschwelle mit Vergleich Theorie - Messung ($P_{stat} = 50 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2 \text{ KN}$)

Abb. 36:

Vertikale Translation u_z einer starren Einzelschwelle mit Vergleich Theorie - Messung ($P_{stat} = 100 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2 \text{ KN}$)

einfachen Korrekturrechnung nicht berücksichtigt werden können. Dieser diskutierte theoretische Verlauf der vertikalen Translation u_z berücksichtigt das Vorhandensein von starren Nachbarschwellen und ist in Abb. 52 wiederzufinden. Zum Vergleich ist in Abb. 35 noch der theoretische Amplituden- und Phasenfrequenzgang einer starren Einzelschwelle ohne Berücksichtigung der Nachbarschwellen eingetragen. Aus dem Vergleich ist zu erkennen, daß sich die Rückwirkung der Nachbarschwellen auf das Nachgiebigkeitsverhalten einer Einzelschwelle im Falle der vertikalen Translation durch das Ausbilden einer Resonanzstelle ausdrückt. Der Phasenverlauf einer Einzelschwelle ohne Berücksichtigung der Nachbarschwellen ist zudem glatter, als derjenige mit Berücksichtigung der Nachbarschwellen. Vor der Resonanzstelle folgt der Amplitudenverlauf einer Einzelschwelle derjenigen ohne Berücksichtigung der Nachbarschwellen. Nach der Resonanzstelle nähern sich die Verläufe ebenfalls an. Zusammenfassend kann für die Bewegungsmode eine ausgezeichnete Übereinstimmung vermerkt werden.

9.4.3 u_y -Translation

Für diese Bewegungsmode wurde im Rahmen dieser Arbeit keine exakte Lösung entwickelt. Abb. 37 zeigt jedoch eine Näherungslösung /30/ im Vergleich mit Meßergebnissen nach /36/. Man erkennt, daß hier die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung nicht so befriedigend ist.

Mögliche Ursachen der Abweichungen können sein:

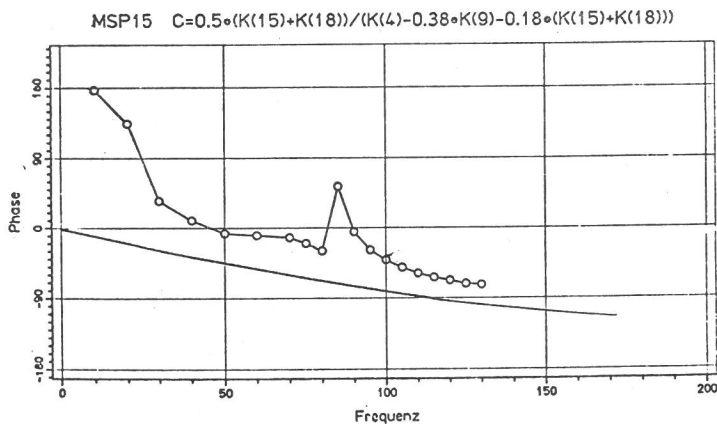
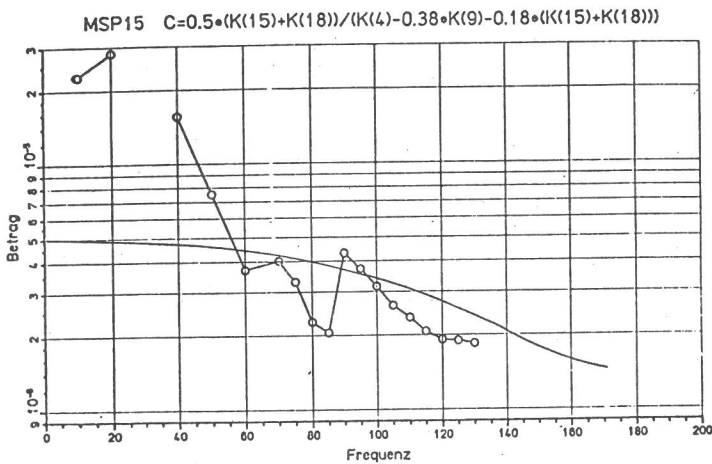


Abb. 37:

Horizontale Translation u_y einer starren Einzelschwelle mit Vergleich Theorie - Messung nach /36/.

- Die Näherungslösung ist zur Beschreibung der Bodennachgiebigkeiten ungeeignet.
- Der bei dieser Bewegungsmode auftretende Koppel-effekt der translatorischen Verschiebung u_y mit der Rotation φ_x spielt eine wesentliche Rolle.
- Der geometrische Kuppel-effekt der Schwingungsmoden u_y und φ_x infolge der unterschiedlichen Lage des Schwerpunktes und des Symmetriepunktes der Untergrundreaktion bei Anregung durch P_y ist von Bedeutung.
- Ähnliche Effekte der Rückwirkung der Nachbarschwelle auf die belastete Schwelle wie bei der vertikalen Mode (Abb. 35) sind wesentlich.

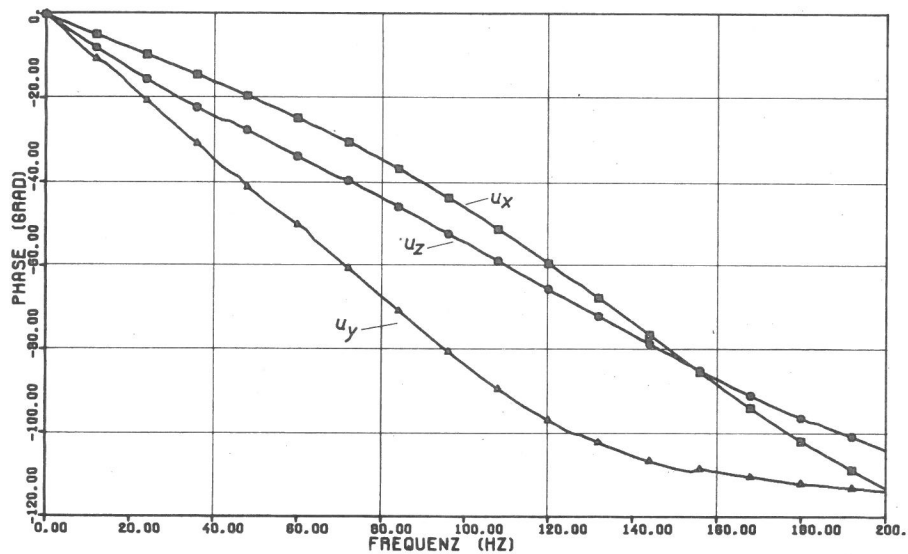
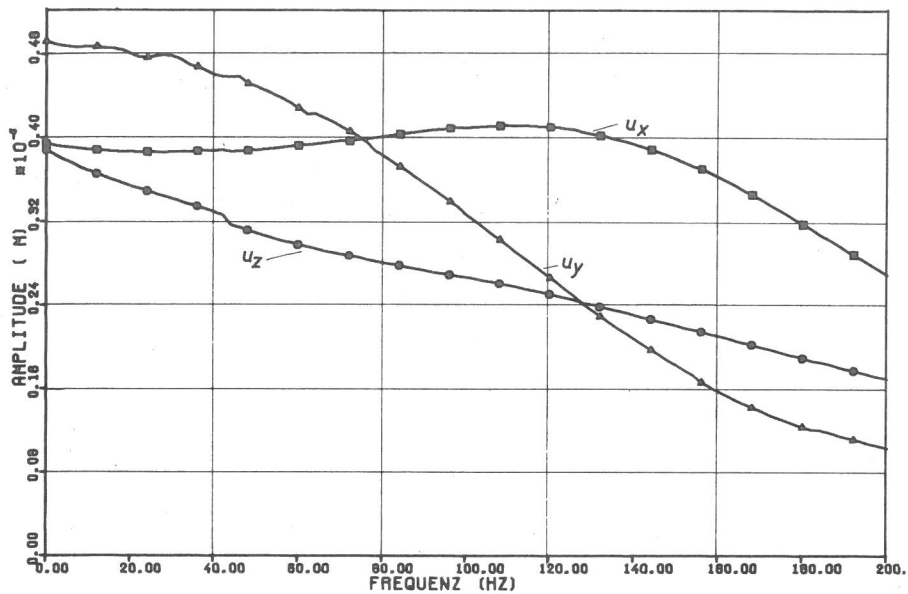


Abb. 38:
Horizontale Translation
 u_x einer starren
Einzelschwelle

- e) Der maßgebende Schubmodul des Untergrunds folgt bei dieser Belastungs- und Bewegungsmode anderen Gesetzmäßigkeiten als bei der vertikalen Mode.
- f) Die Ermittlung der eingeleiteten Horizontalkraft P_y ist fehlerhaft. Diese läßt sich nur durch Berücksichtigung der Beschleunigung der KIS Traverse (Abb. 33) berechnen /36/.

Die im 2. Technischen Bericht /30/ angegebenen Näherungslösungen für die vertikalen und horizontalen Nachgiebigkeiten eines starren Fundaments werden unter gleichen Voraussetzungen entwickelt. Da bei der vertikalen Translation die exakte Lösung in Abb. 35 nur unwesentlich von der in /30/ angegebenen Näherungslösung abweicht, ist die Vermutung a) abzulehnen. Die angegebene Näherungslösung

für die horizontale Translation u_y berücksichtigt den Koppelleffekt nach b), so daß auch diese Begründung entfällt. Die Begründung c) kann durchaus eine Rolle spielen, da im Experiment beide Bewegungsmoden (u_y, φ_x) angeregt wurden und die theoretische Lösung nur die Anregung und Bewegung in u_y -Richtung wiedergibt. Auch die Begründung d) ist nicht von der Hand zu weisen. Zusammen mit Abb. 35 wären dadurch die lokalen Maximas im Amplitudenverlauf, insbesondere bei 90 Hz, erklärbar. Die Vermutung e) ist nicht so einfach zu diskutieren. Bei der Ermittlung eines "äquivalenten" Schubmoduls für den anstehenden heterogenen Halbraum nach Abschnitt 6, wird als Wichtungskurve die Spannungsverteilung über die Tiefe benutzt. Dies ist in gewisser Weise eine willkürliche Wichtung. Es könnte sich als geeigneter erweisen, die Amplitudenverläufe der horizontalen und vertikalen Verschiebungskomponenten als Wichtungskurve über die Tiefe zu benutzen. Eine abschließende Klärung dieser Frage wäre durch Vergleichsrechnungen mit der Methode der finiten Elemente möglich. Die letzte Begründung f) ist ebenfalls möglich, wobei jedoch über den Grad des Einflusses hier nichts ausgesagt werden kann, da eine explizite Darstellung der erregenden Kraft P_y in /36/ nicht angegeben ist.

9.4.4 u_x -Translation

Der Amplituden- und Phasenverlauf dieser Bewegungsmode infolge einer Belastung $P_x = 1 e^{i\omega t}$ ist in Abb. 38 angegeben. Auch hier handelt es sich um eine Näherungslösung. Gleichzeitig sind in dieser Abbildung der Vollständigkeit halber die Bewegungsmoden u_z und u_y der ersten Näherungstheorie nach /30/ eingezeichnet. Veränderungen im Vergleich zur exakten Lösung können durch Vergleich mit Abb. 35 erkannt werden. Meßergebnisse für diese Bewegungsmode liegen nicht vor, so daß ein Vergleich nicht durchgeführt werden kann.

9.4.5 φ_x -Rotation

Diese Bewegungsmode infolge Belastung durch $M_x = 1 e^{i\omega t}$ wurde einer exakten Lösung unterzogen. Abb. 39 zeigt den Amplituden- und Phasenverlauf dieser Komponente

über einen großen Frequenzbereich

($0 \leq a_0 \leq 1.5 \text{ m}$; $0 \leq f \leq 424 \text{ Hz}$).

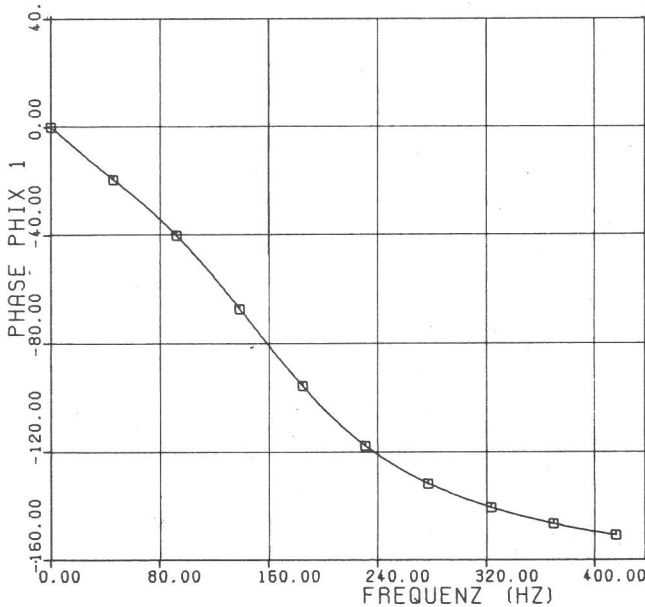
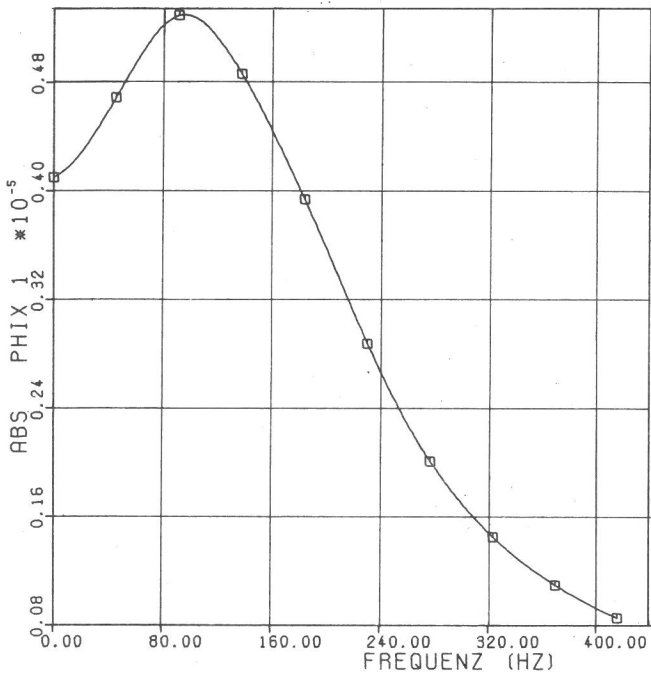


Abb. 39:

Rotation φ_x einer starren Einzelschwelle
(Theorie)

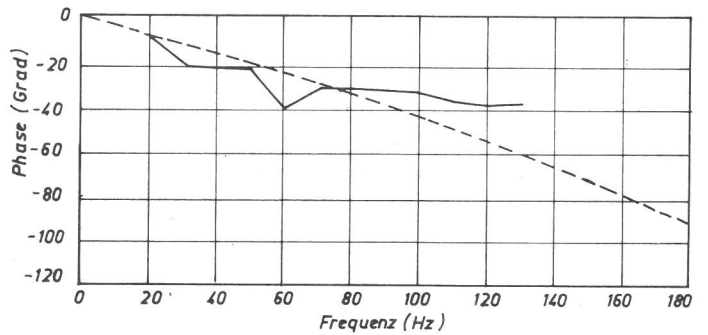
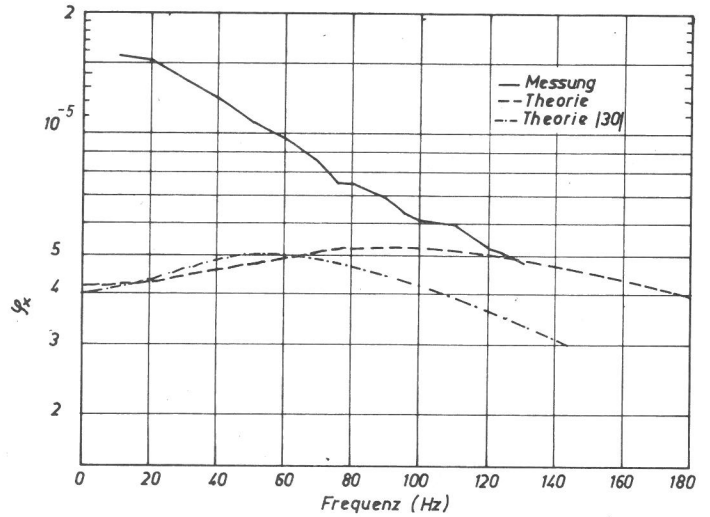


Abb. 40:

Rotation φ_x einer starren Einzelschwelle
Vergleich Theorie - Messung

In Abb. 40 ist der Vergleich mit Meßergebnissen nach /36/ und einer früheren Lösung nach /30/ dargestellt. Man erkennt, daß ähnlich wie bei der Translationsmode u_y die Übereinstimmung nicht den Grad der vertikalen Translation erreicht. Zur Begründung dieser Abweichungen gelten die gleichen Vermutungen b), e), d) wie sie bei der Translation u_y aufgeführt wurden. (a) entfällt, da es sich hier um eine exakte Lösung handelt und f) entfällt, da die eingeleitete

vertikale Kraft direkt gemessen werden kann). Da jedoch mit Vermutung b) nur Abweichungen im Bereich von 5 - 10 % zu erklären wären, gewinnen hier die Begründungsvorschläge e) und d) an Gewicht.

9.4.6 φ_y -Rotation

Der theoretische Amplituden- und Phasenverlauf dieser Bewegungsmode infolge Belastung durch $M_y = 1e^{i\omega t}$ ist Abb. 41 zu entnehmen. Da auch hierzu Meßergebnisse nicht verfügbar sind, kann ein Vergleich nicht durchgeführt werden. Zum Vergleich eingezeichnet ist jedoch der Amplituden- und Phasenverlauf einer starren Einzelschwelle mit Berücksichtigung von

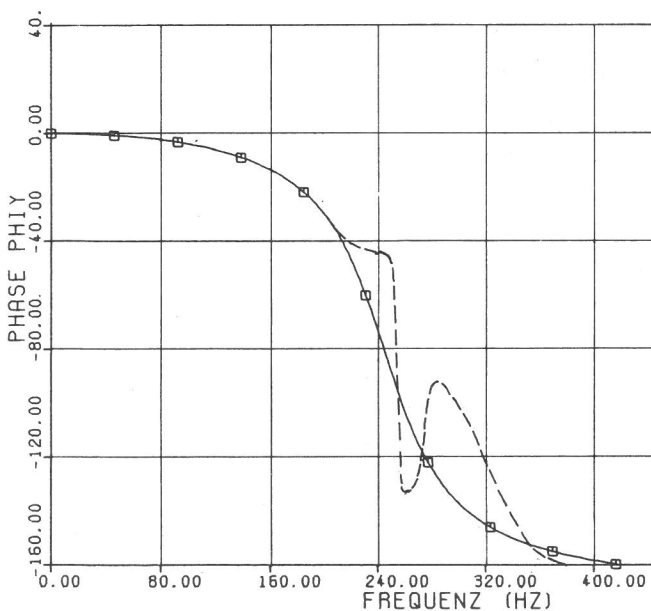
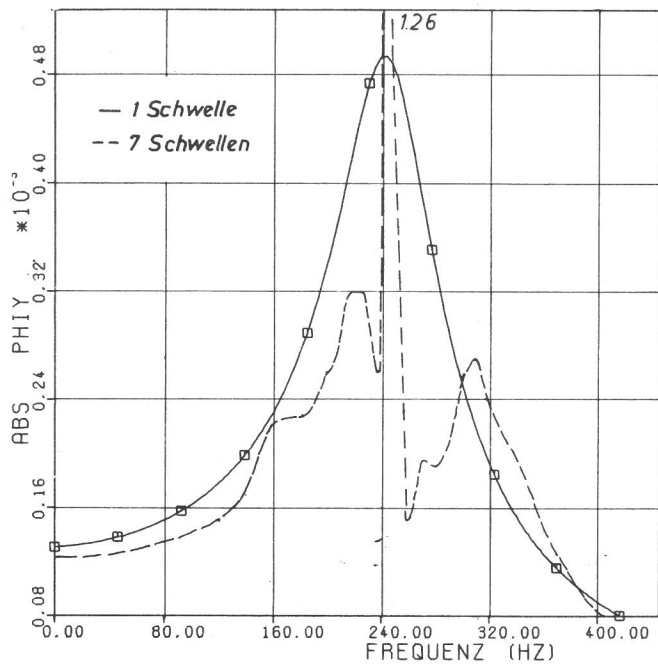


Abb. 41:
Rotation φ_y einer starren
Einzelschwelle

$n = 6$ Nachbarschwellen. Diese Verläufe sind bei dem später dargestellten Teilsystem "n starre Schwellen" wiederzufinden. Der Rückwirkungseffekt der starren Nachbarschwellen auf den Amplituden- und Phasenverlauf einer starren Einzelschwelle zeichnet sich in dieser Bewegungsmode dadurch aus, daß im Resonanzbereich eine überaus große Verstärkung mit entsprechenden Sprüngen im Phasenverlauf auftritt. Vor und nach der Resonanzstelle ist sowohl für den Amplituden- wie Phasenverlauf weitgehende Übereinstimmung mit den entsprechenden Funktionen einer starren Einzelschwelle ohne Berücksichtigung von Nachbarschwellen festzustellen.

9.5 Elastische Einzelschwelle

9.5.1 Annahmen und Systemdaten

Das schwingungsfähige System einer elastischen Schwelle auf dem Untergrund läßt sich exakt nur durch eine gemeinsame Betrachtung des Untergrundes und der Schwelle einer Lösung zuführen. Im allgemeinen Fall bedeutet das, daß die Nachgiebigkeitsfunktionen des Untergrundes entsprechend Abschnitt 4. nicht für eine starre, sondern für eine elastische Gründungsfläche mit der Elastizität der Einzelschwelle zu bestimmen sind. Im Falle einer Schwelle ist jedoch die Steifigkeit sehr groß verglichen mit der Steifigkeit des Untergrundes, so daß es in 1. Näherung mit guter Genauigkeit möglich ist, für die Reaktion des Untergrundes die Nachgiebigkeitsfunktionen für eine starre masselose Gründungsfläche zu verwenden.

Zur Untersuchung der dynamischen Reaktion einer elastischen Schwelle auf dem Untergrund wird dann die Schwelle selbst, wie im 2. Technischen Bericht /30/ dargelegt, in 5 elastische Stäbe nach der Methode der finiten Elemente aufgeteilt, (Abb. 42) und die variable, über die gesamte Fläche wirkende Steifigkeit des Untergrundes in 3 diskreten Stabelementen im Sinne eines "lumped parameter model" zusammengefaßt.

Die dynamische Belastung wird durch Lastgruppen dargestellt, die an den Schienenauflagerpunkten angreifen. Untersucht werden die Lastfälle P_z , P_y , M_x . Die für die Berechnung notwendigen geometrischen Kenngrößen der Flächen der

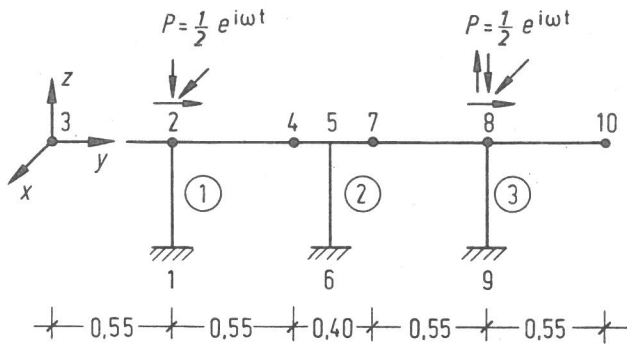


Abb. 42:

System "Elastische Einzelschwelle" mit Knotennummerierung

einzelnen Stabelemente und der Flächenträgheitsmomente sind Tab. 1 zu entnehmen.

STAB NR.	KNOTEN PUNKTE	FLAECHE (CM**2)	TRAEGHEITSMOMENTE		
			IY	IZ (CM**4)	IT
1	1 2	0.0	0.0	0.0	0.0
2	6 5	0.0	0.0	0.0	0.0
3	9 8	0.0	0.0	0.0	0.0
4	3 2	0.4945E+03	0.1051E+05	0.1772E+05	0.2823E+05
5	2 4	0.4157E+03	0.9067E+04	0.1336E+05	0.2242E+05
6	4 5	0.3237E+03	0.5494E+04	0.8164E+04	0.1366E+05
7	5 7	0.3237E+03	0.5494E+04	0.8164E+04	0.1366E+05
8	7 8	0.4157E+03	0.9067E+04	0.1336E+05	0.2242E+05
9	8 10	0.4945E+03	0.1051E+05	0.1772E+05	0.2823E+05

Tab. 1:

Stab- und Knotennummerierung sowie geometrische Kenngrößen der elastischen Schwelle

Für die Materialkenngrößen werden folgende Werte angesetzt:

Elastizitätsmodul der Schwelle	$E_S = 3 \cdot 10^6 \text{ KN/cm}^2$
Elastizitätsmodul des Bodens	$E_B = 2.058 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$
Materialdichte Schwelle	$\rho_S = 2450 \text{ kg/m}^3$
Materialdichte Boden	$\rho_B = 1540 \text{ kg/m}^3$
Poissonzahl Schwelle	$\nu_S = 0.16$
Poissonzahl Boden	$\nu_B = 0.25$

9.5.2 Theoretische Ergebnisse für die Lastfälle P_z, P_y, M_x .

In den Abb. 43-48 sind jeweils die translatorischen Verschiebungen u_y und u_z der Lastfälle $P_z = 1e^{i\omega t}$, $P_y = 1e^{i\omega t}$ und $M_x = 1e^{i\omega t}$ für die Punkte Schwellenende, Schienenaufleger und Schwellenmitte (s. Abb. 42) aufgetragen. Zum Vergleich sind frühere Ergebnisse, die mit der in /30/ beschriebenen Näherungstheorie berechnet werden, mit eingetragen (strichlierte Kurven). Dieser Vergleich zeigt, daß die mit beiden Theorien ermittelten Funktionsverläufe in allen Fällen sehr ähnlich sind. Die exakte Theorie ergibt für die Amplituden im allgemeinen etwas größere Werte und auftretende Resonanzpeaks sind in einen etwas niedrigeren Frequenzbereich verschoben. Zur ausführlichen Be-

schreibung des Schwingungsverhaltens der elastischen Einzelschwelle sei auf den 2. Technischen Bericht /30/ verwiesen.

Zusammenfassend sei hier nur wiederholt, daß

- 1.) unabhängig vom Lastfall Amplitudenmaximas, speziell am Schwellenende, im Bereich 100 - 120 Hz auftreten.
- 2.) für den Lastfall P_z ein Amplitudennullpunkt (Knoten einer Biegewelle) im Bereich von 100 - 120 Hz und für den Lastfall M_x im Bereich um 140 Hz auftritt.

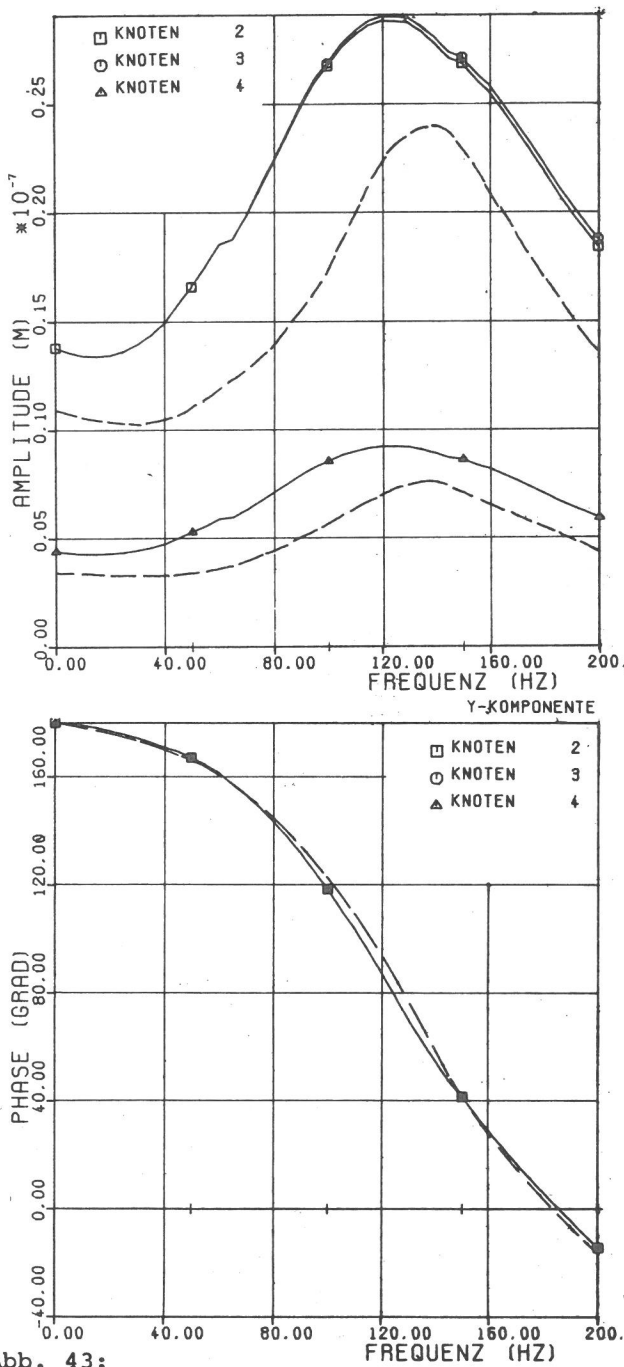


Abb. 43:
Translation u_y in folge vertikaler Belastung P_z (elast. Schwelle).

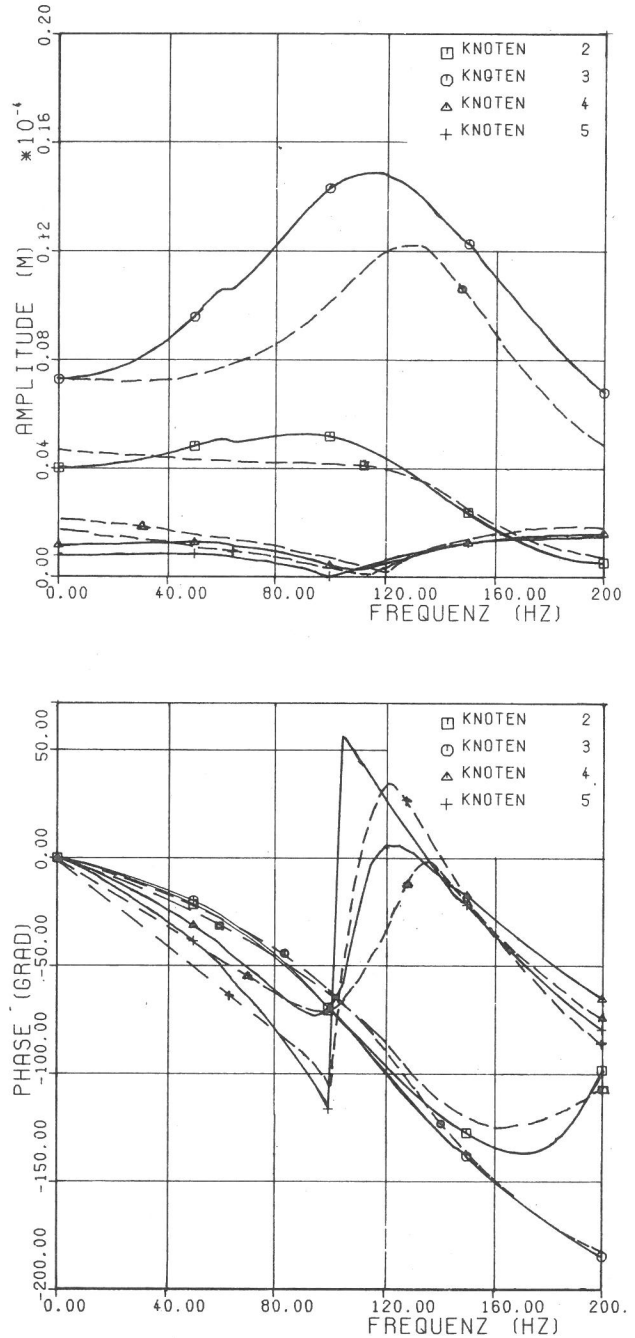


Abb. 44:
Translationen u_z infolge vertikaler Belastung P_z (elast. Schwelle)

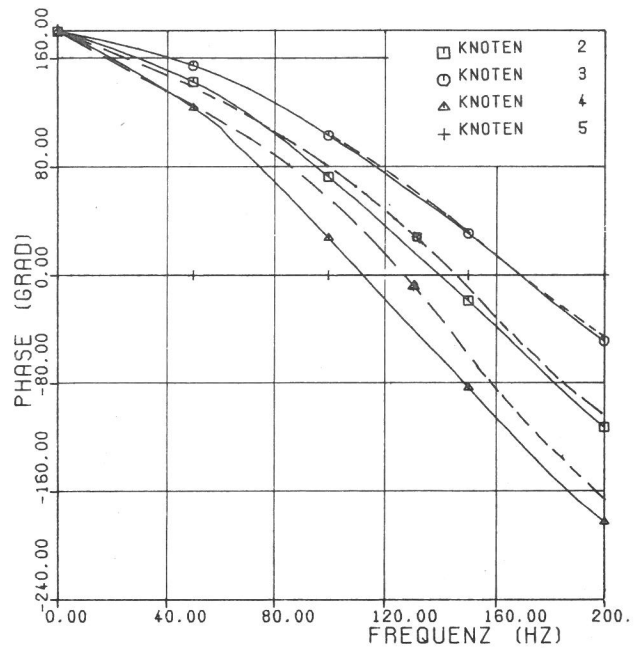
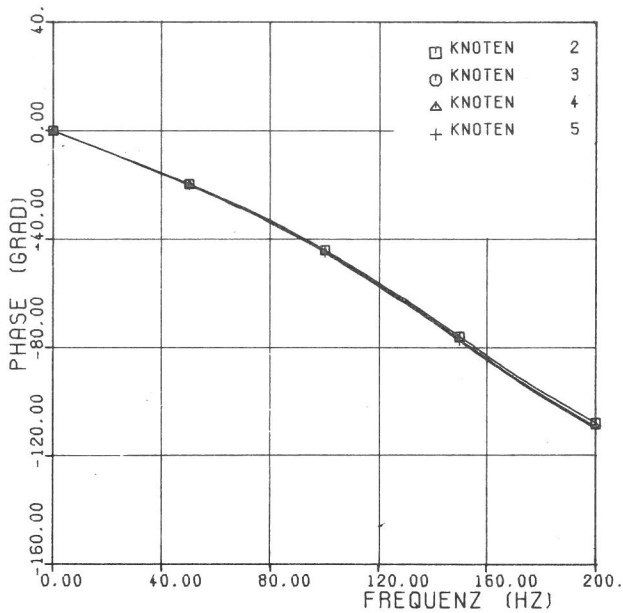
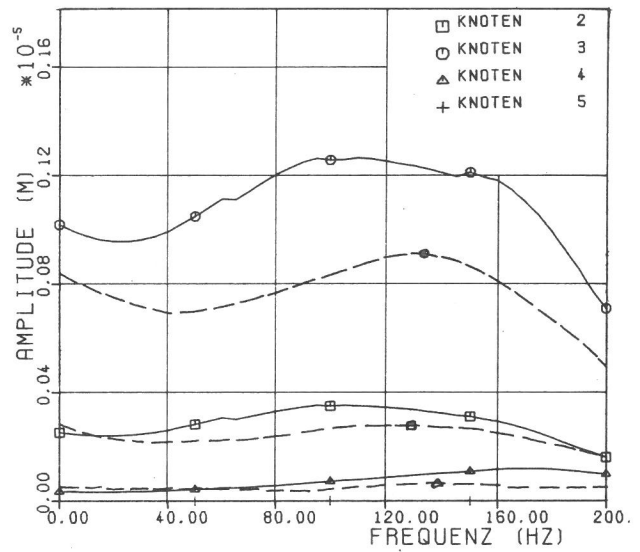
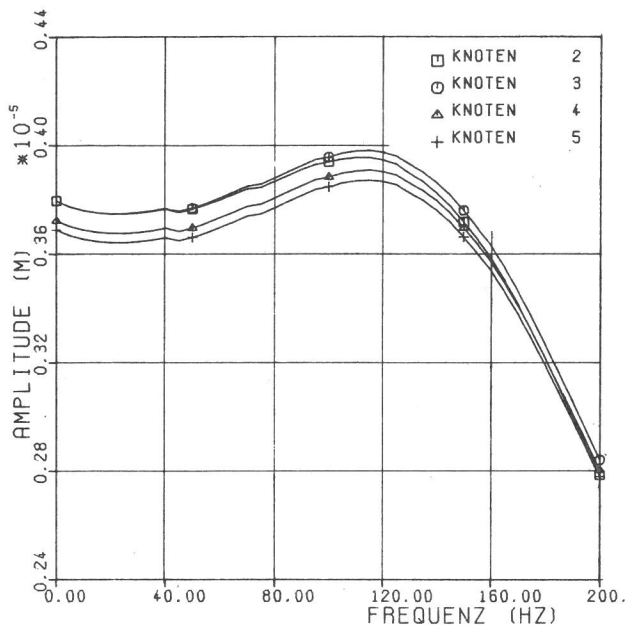


Abb. 45:
Translationen u_y infolge horizontaler Belastung P_y (elast. Schwelle)

Abb. 46:
Translationen u_z infolge horizontaler Belastung P_y (elast. Schwelle)

3.) für den Lastfall P_y keine großen Unterschiede in den translatorischen Verschiebungen u_y für die einzelnen materiellen Punkte der Schwelle auftreten. Das heißt, das Schwingungsverhalten der elastischen Schwelle wird für diesen Lastfall überwiegend durch die Nachgiebigkeit des Untergrundes bestimmt.

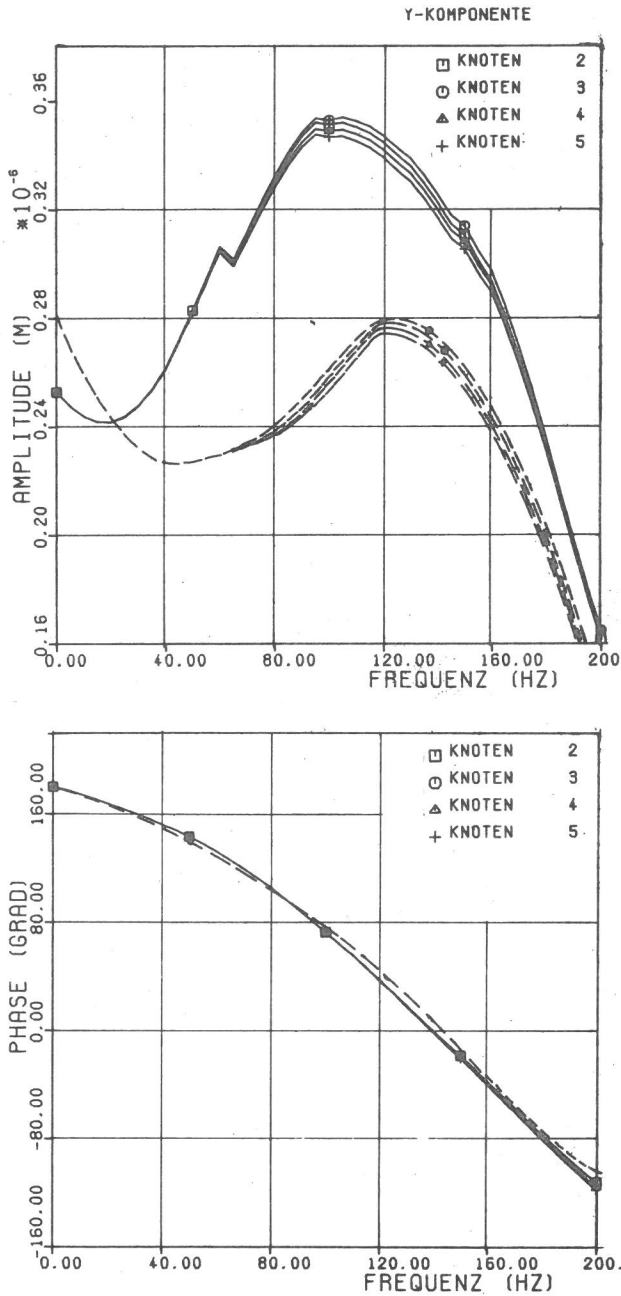


Abb. 47:
Translationen u_y infolge Momentenbelastung M_x (elast. Schwelle)

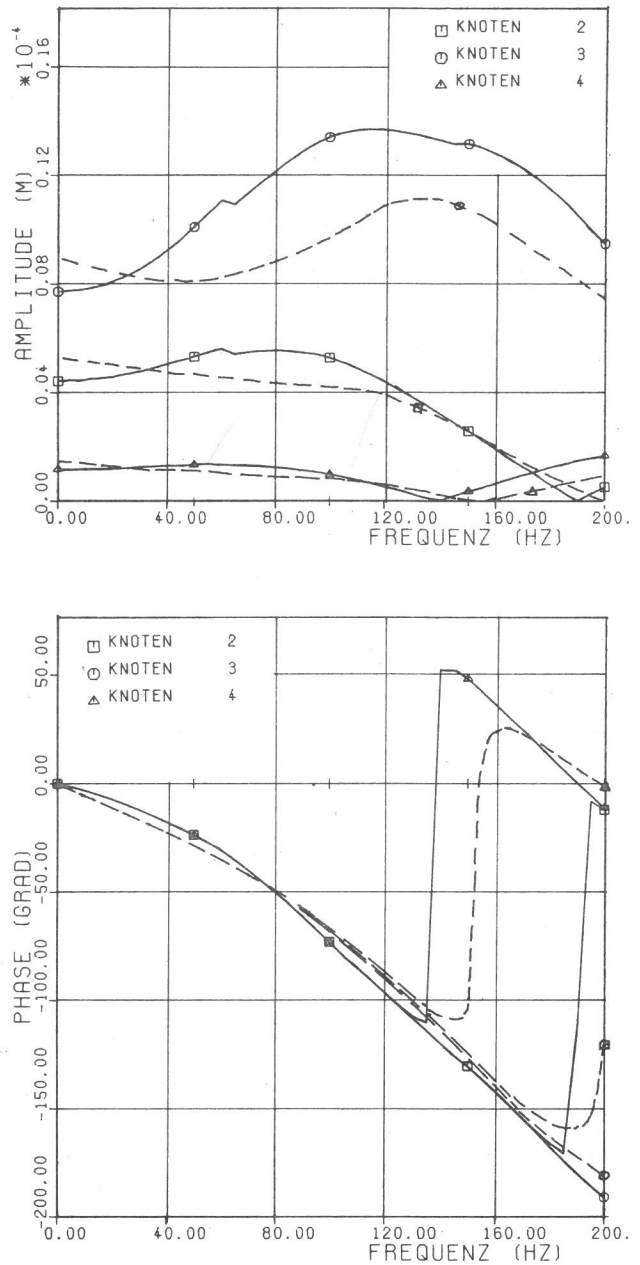


Abb. 48:
Translationen u_z infolge Momentenbelastung M_x (elast. Schwelle)

9.5.3 Vergleich mit Meßergebnissen

In den Abbildungen 49 und 50 werden die theoretischen Ergebnisse für die Lastfälle P_z und M_x mit den jeweils zugeordneten Moden u_z und φ_x mit Meßergebnissen nach /36/ verglichen. Aus Abb. 49 ist zu erkennen, daß die Übereinstimmung für die vertikale Translationsmode u_z sowohl für den Amplituden- wie Phasenfrequenzgang recht gut ist.

In dem in Abb. 50 dargestellten Vergleich für die Rotation φ_x sind z.T. größere Abweichungen festzustellen, obgleich

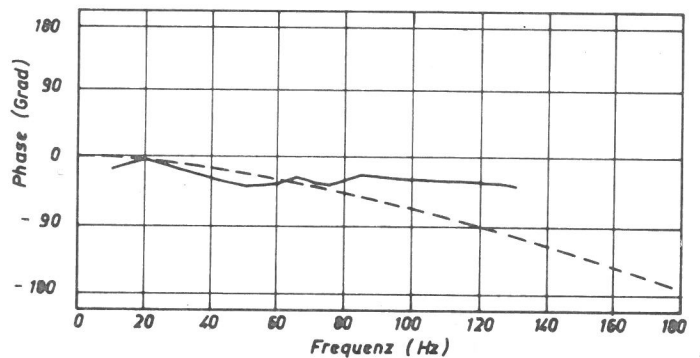
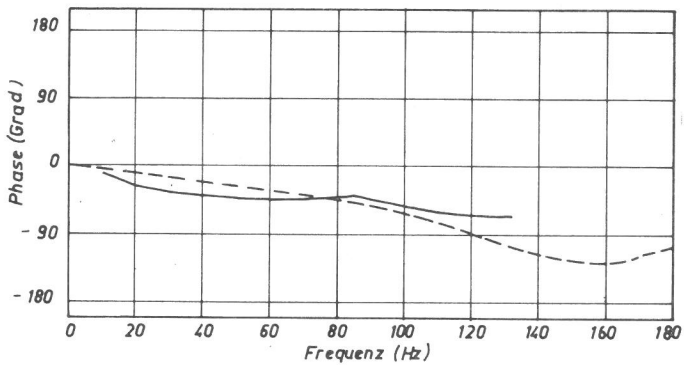
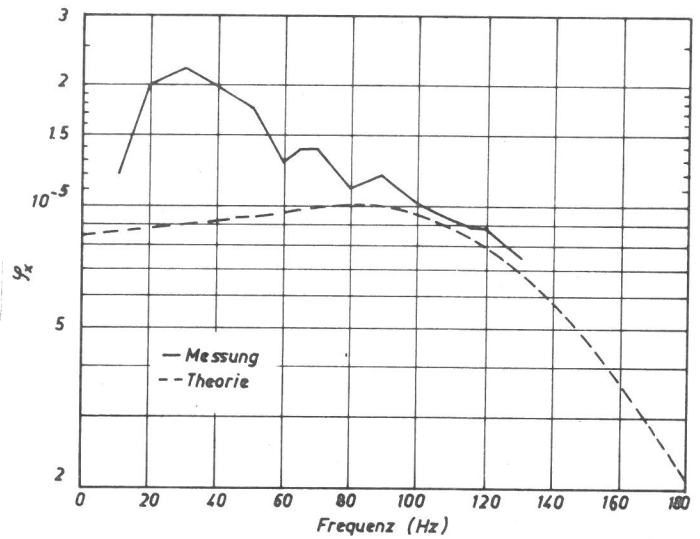
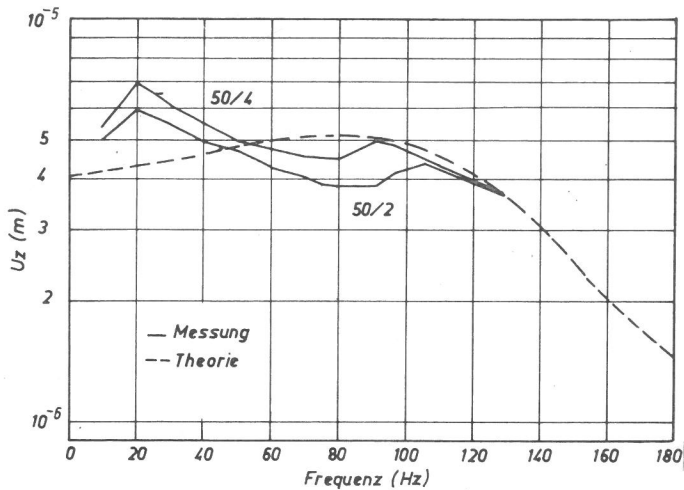


Abb. 49:

Translation u_z infolge vertikaler Belastung P_z mit Vergleich Theorie - Messung

Abb. 50:

Rotation φ_x infolge Momentenbelastung M_x mit Vergleich Theorie - Messung

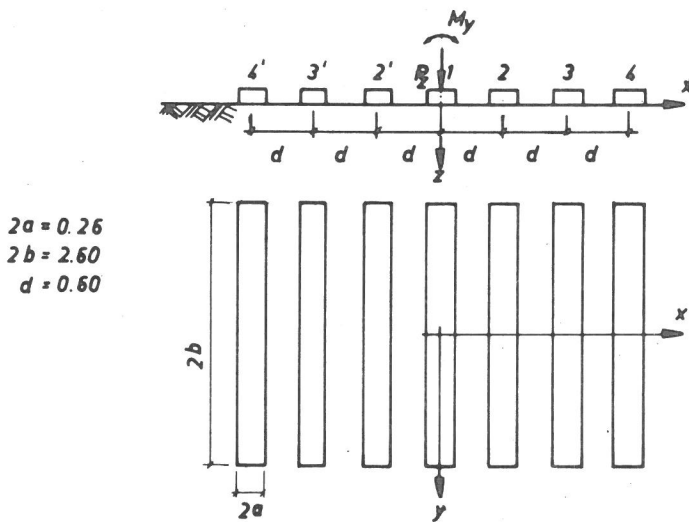
im prinzipiellen Verlauf eine Ähnlichkeit festzustellen ist. Die Ursachen dieser Abweichungen sind in den gleichen Effekten begründet, wie sie für die starre Einzelschwelle in den Abschnitten 9.4.5 und 9.4.5 angegeben wurden. Auf einen Vergleich der theoretischen Ergebnisse der Translationsmode u_y mit Meßergebnissen wird hier verzichtet, da dieser bereits in /30/ enthalten ist.

9.6 Systeme starrer massebehafteter Schwellen

9.6.1 Untersuchte Systeme

Untersucht werden hier insgesamt 4 Systeme, wobei die Anzahl der Schwellen im Bereich $n = \{1, 3, 5, 7\}$ variiert werden. Abb. 51 zeigt das System mit 7 Schwellen, mit den geometrischen Größen der Schwellenabmessungen und Schwellenmittenabstände.

Belastet wird jeweils eine Schwelle k in den Belastungsmoden $P_z^k = 1 e^{i\omega t}$ und $M_y^k = 1 e^{i\omega t}$. Als Antwortgrößen werden die vertikalen Verschiebungen u_z^{jk} infolge P_z^k , die Rotationen φ_y^{jk} infolge M_y^k sowie die Translation u_z^{jk} infolge M_y^k bzw. die Rotationen φ_y^{jk} infolge P_z^k berechnet.



$2a = 0.26$
 $2b = 2.60$
 $d = 0.60$

Abb. 51:

Untersuchtes System massenbehafteter starrer Schwellen

Die Materialkennwerte des Bodens sowie die Massen- und Massenträgheitsmomente der starren Einzelschwelle sind Abschnitt 9.4.1 zu entnehmen.

Das Systemverhalten wird im Bereich $0 \leq a_0 \leq 1.5$ untersucht. Dies entspricht bei einer Scherwellengeschwindigkeit von $v_s = 231$ m/s (diese ist aus dem Schubmodul und der Materialdichte durch $v_s = \sqrt{G/\rho}$ ableitbar) und den gegebenen geometrischen Verhältnissen einem Frequenzbereich von $0 \leq f \leq 424$ Hz. Die Antworten werden in diesem Frequenzbereich an insgesamt 56 diskreten Punkten berechnet. Damit ergibt sich ein Frequenzabstand von $\Delta f = 424/55 \hat{=} 7.7$ Hz.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die theoretischen Ergebnisse als Funktion der Anzahl der Schwellen verglichen. Danach folgt ein Vergleich der theoretischen Ergebnisse eines Systems mit 7 starren Schwellen mit Meßergebnissen, die im 4. Technischen Bericht der BAM /37/ mitgeteilt wurden.

9.6.2 Translation u_z infolge P_z

Die Abb. 52-54 zeigen die vertikalen Translationen u_z^{jk} $j = 1, 4, k = 1$ infolge $P_z^1 = 1 e^{i\omega t}$ in Abhängigkeit der Anzahl n der starren Schwellen. Man erkennt, daß im Mittel

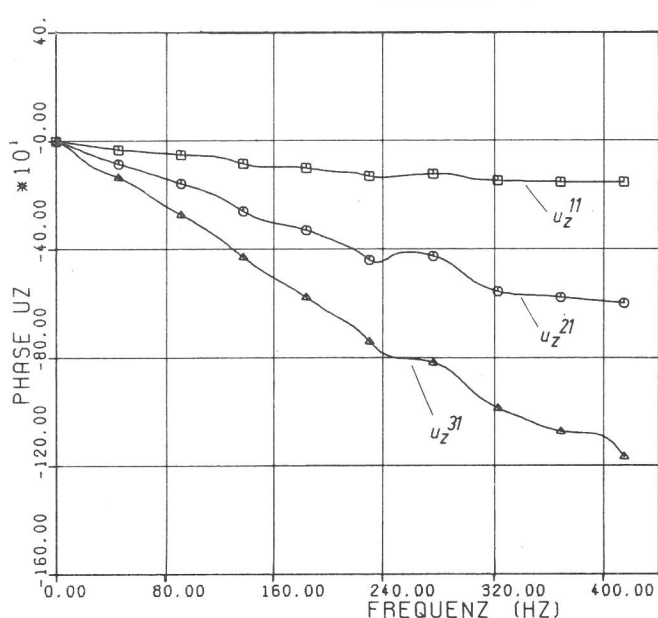
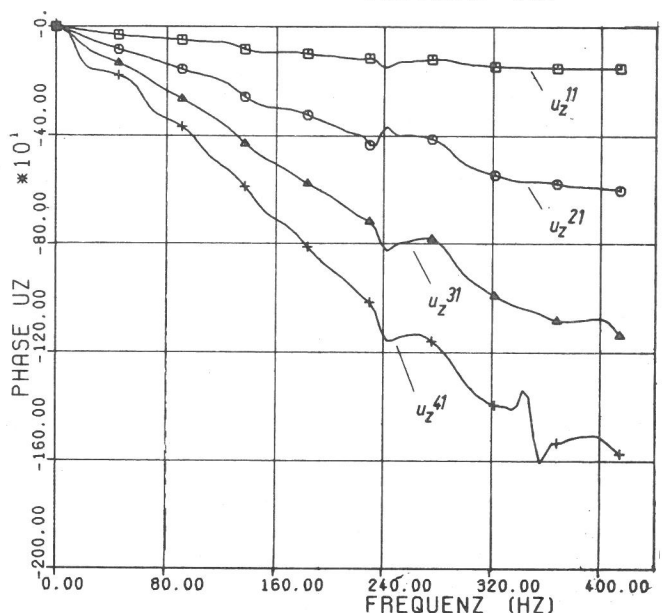
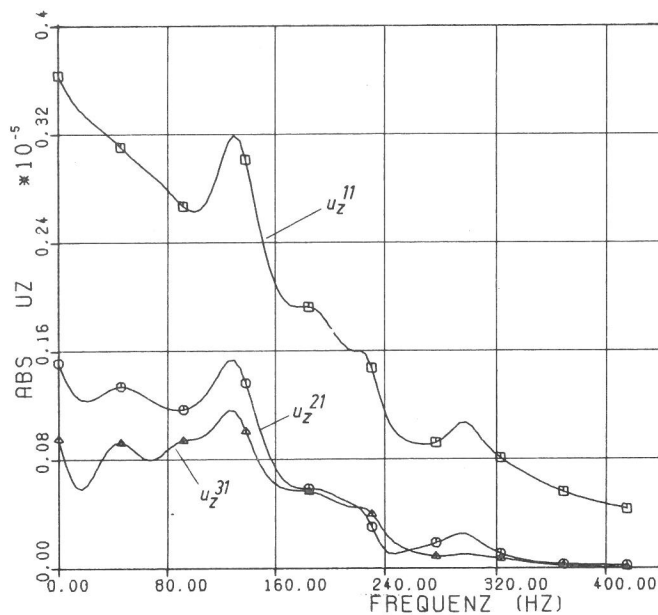
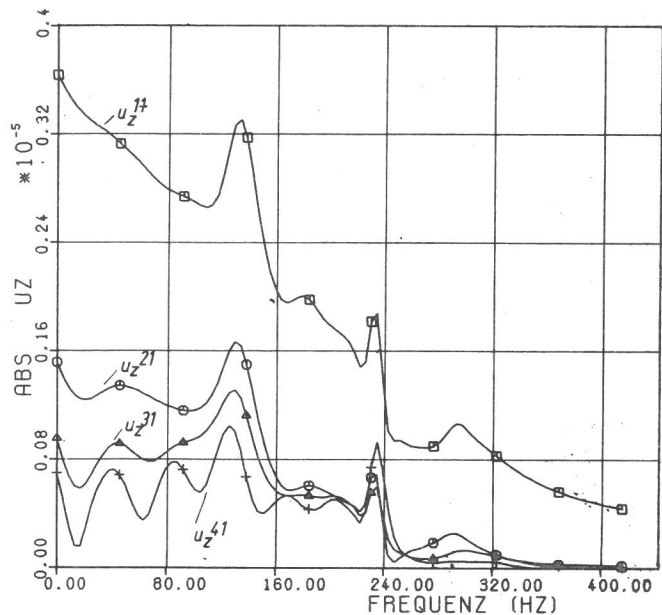


Abb. 52:

Translationen u_z masse behafteter starrer Schwellen (7 Schwellen, $p_z = 1 e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

Abb. 53:

Translationen u_z masse behafteter starrer Schwellen (5 Schwellen, $p_z = 1 e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

der Koppelungsgrad für die 1. benachbarte Schwelle ca. 40 %, für die zweite ca. 27 % und für die dritte ca. 18 % ist. Weiter weisen alle Amplitudenverläufe eine Anzahl Maximas und Minimas auf, die mit größerer Schwellennummer, bzw. größerem Abstand zu der belasteten Schwelle zunehmen. Hier tritt also ein frequenzabhängiger Auslöschungseffekt ein, der auch theoretisch nachweisbar ist. Vergleicht man die Abb. 53 und 54 mit Abb. 52, so erkennt man, daß eine Verringerung der Schwellenzahl eine Glättung bzw. völlige Unterdrückung spezifischer Maximas zur Folge hat. Die

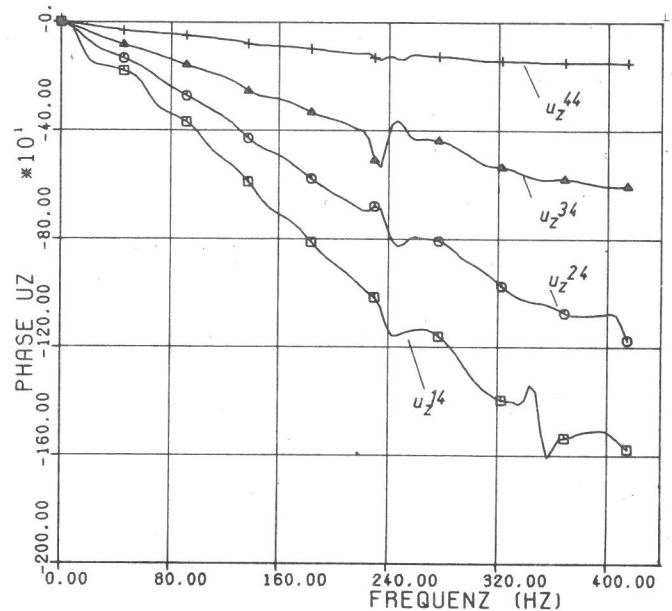
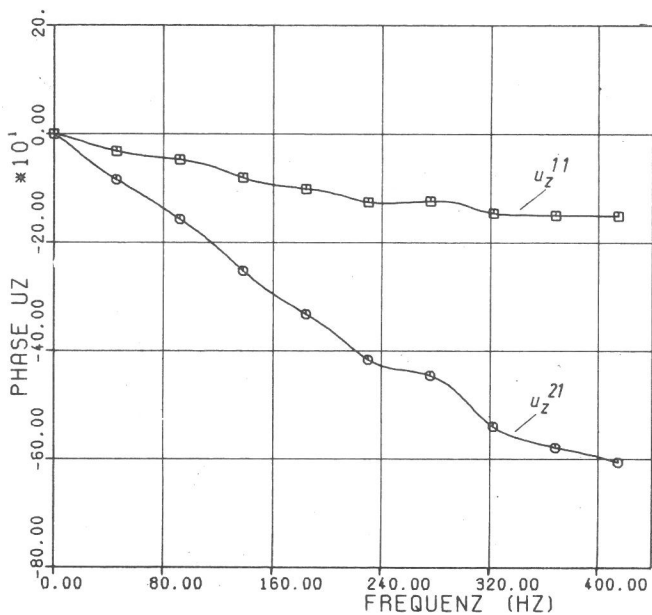
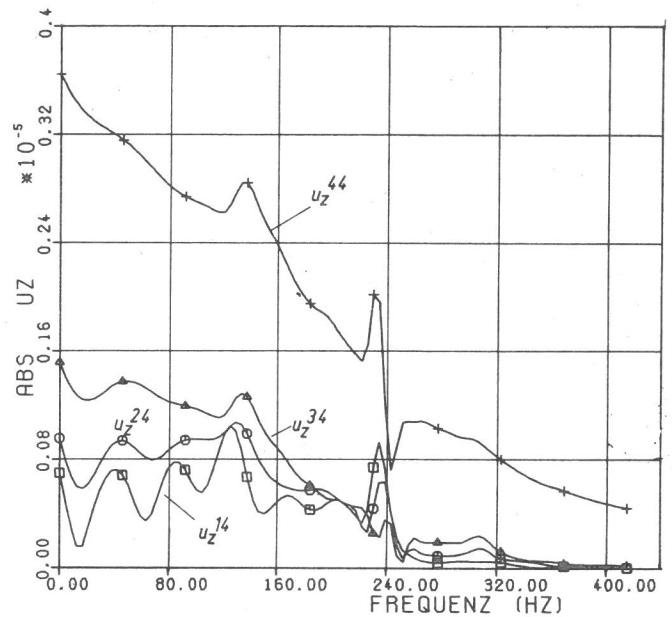
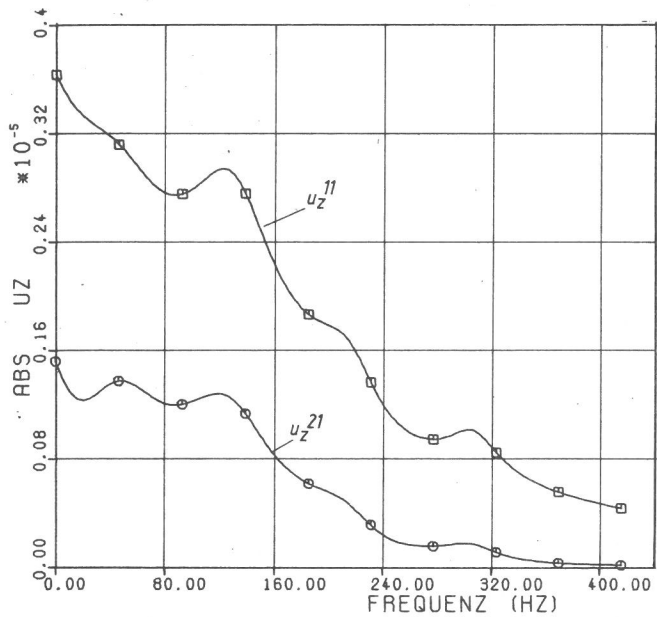


Abb. 54:
Translationen u_z massebehafteter starrer
Schwellen (3 Schwellen $P_z = 1 e^{i\omega t}$ auf
Schwelle Nr. 1)

Abb. 55:
Translationen u_z massebehafteter starrer
Schwellen (7 Schwellen, $P_z = 1 e^{i\omega t}$ auf
Schwelle Nr. 4).

prinzipiellen Funktionsverläufe und die Lage von Maximas und Minimas bleiben aber im wesentlichen unverändert.

Die Phasenverläufe sind weitgehend identisch und zeigen nur im Bereich des zweiten spezifischen Maximas bei ca. 240 Hz geringfügige Abweichungen.

Abb. 55 zeigt die vertikalen Translationen u_z^{jk} , $j = 1, 4$
 $k = 4$ infolge Belastung durch $P_z^4 = 1 e^{i\omega t}$.

Trotz dieser extremen Belastung am Rand des Systems zeigt der Vergleich mit Abb. 52 eine weitgehende Ähnlichkeit der

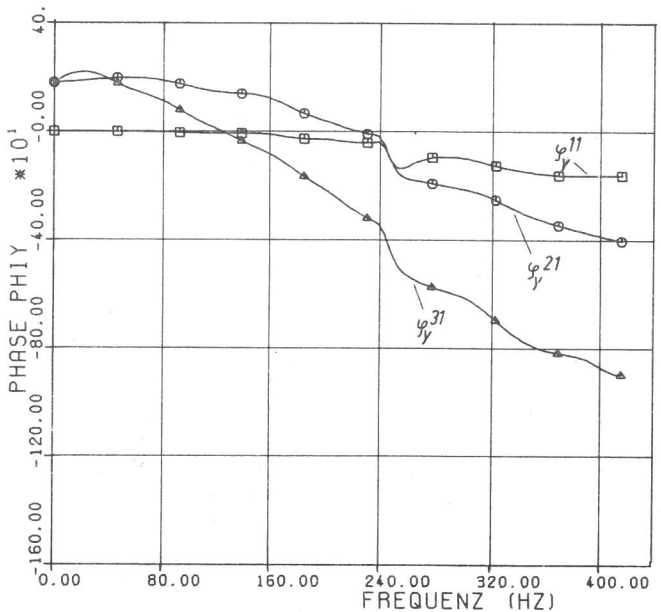
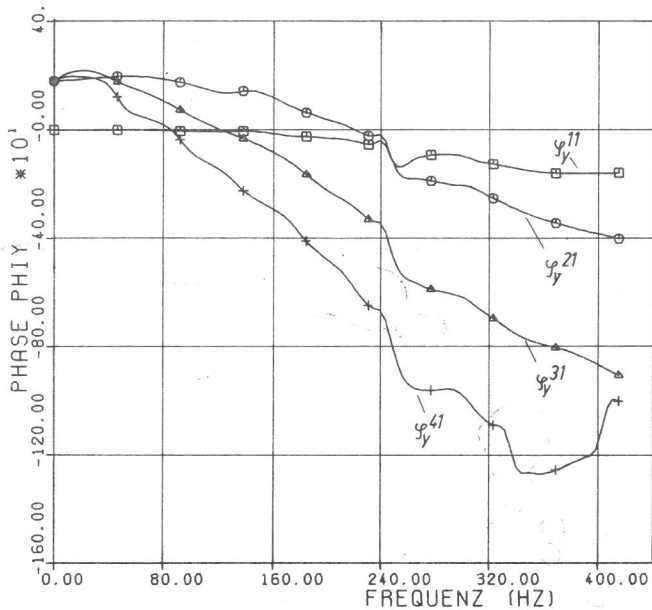
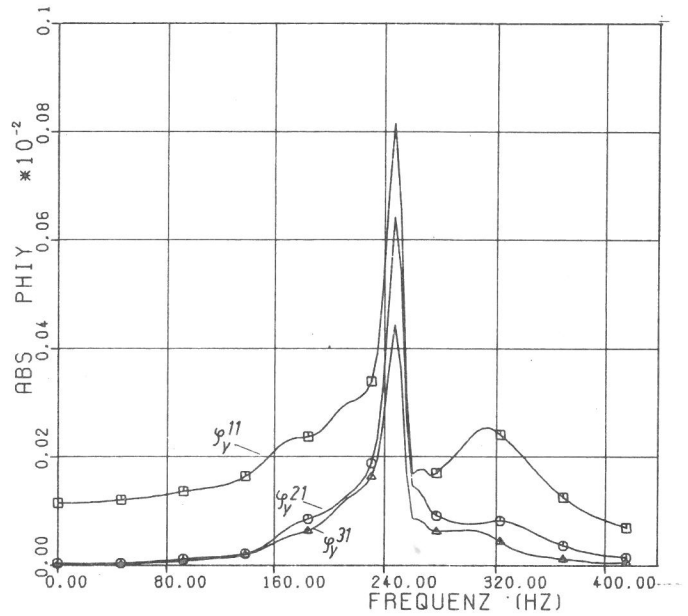
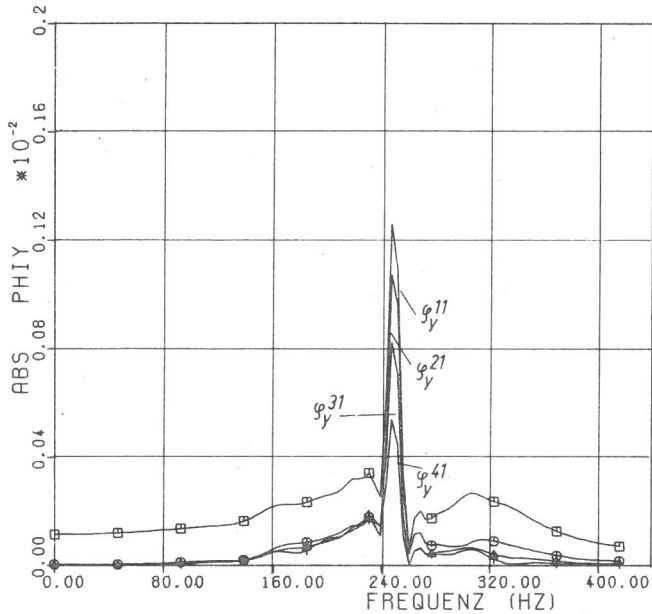


Abb. 56:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (7 Schwellen, $M_V = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

Abb. 57:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (5 Schwellen) $M_V = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

Amplituden- und Phasenfrequenzgänge. Unterschiede treten nur bei der belasteten und unmittelbar benachbarten Schwelle auf. Die Unterschiede drücken sich dadurch aus, daß beim ersten spezifischen Maxima bei ca. 128 Hz kleinere Amplituden und beim 2. spezifischen Maxima z.T. größere Amplituden auftreten.

Insgesamt ist damit der Beweis erbracht, daß es für diese Bewegungsmode mit genügender Genauigkeit ausreicht von einem unendlich langen Schwellensystem einen Ausschnitt mit ca. 7 Schwellen zu betrachten.

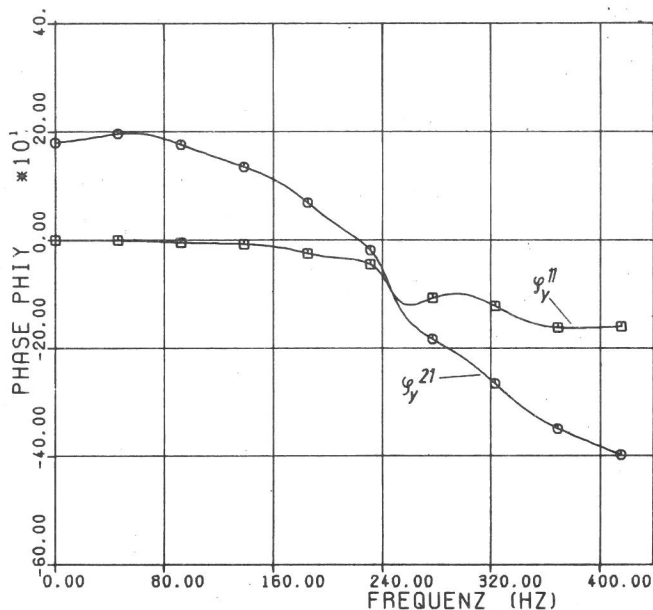
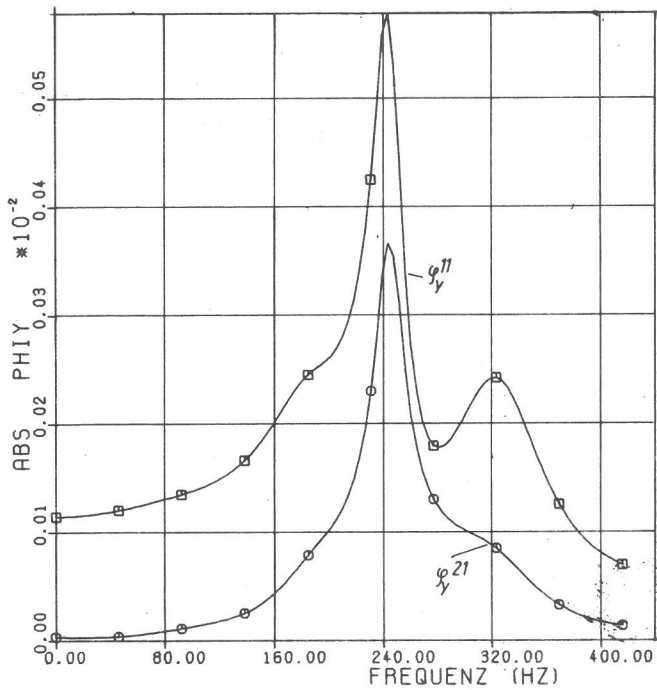


Abb. 58:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (3 Schwellen, $M_y = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

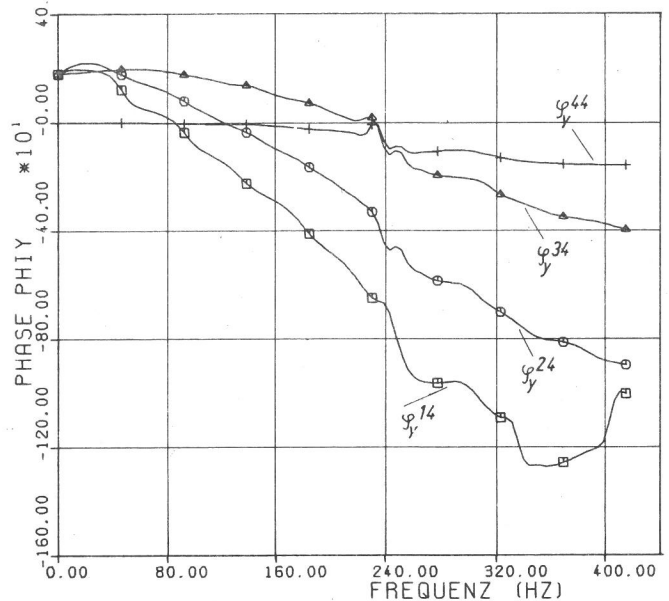
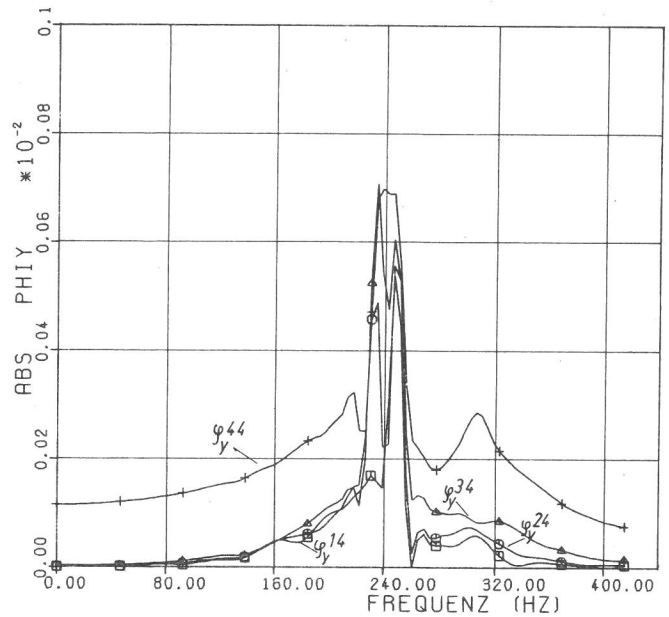


Abb. 59:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (7 Schwellen, $M_y = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 4)

9.6.3 Rotation φ_y infolge M_y

Die Abb. 56 - 58 zeigen die Rotationen φ_y^{jk} , $j = 1, 4$, $k = 1$ infolge $M_y^1 = 1 e^{i\omega t}$. Hier ist insbesondere bemerkenswert, daß die Koppelungswirkung dieser Mode auf benachbarte Schwellen nur sehr geringe Beträge bis ca. 160 Hz aufweist. Danach wächst die Koppelung jedoch stark an und erreicht bei ca. 240 Hz durch eine Resonanzstelle ihr Maximum. Danach ist wieder ein starker Abfall

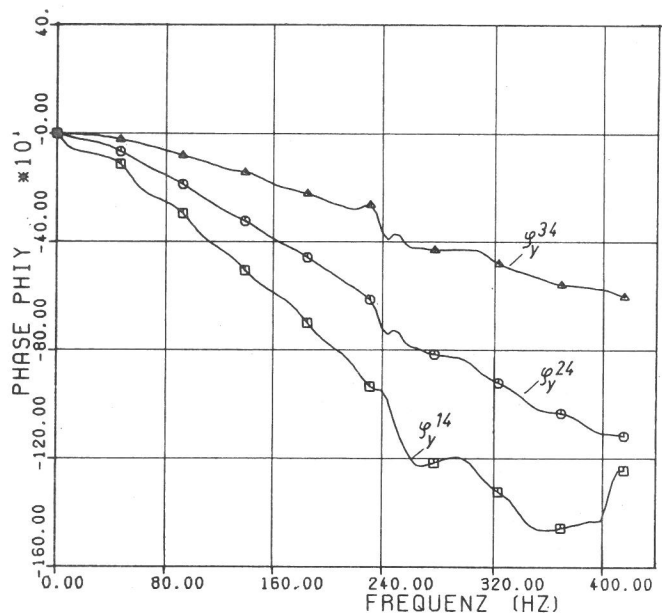
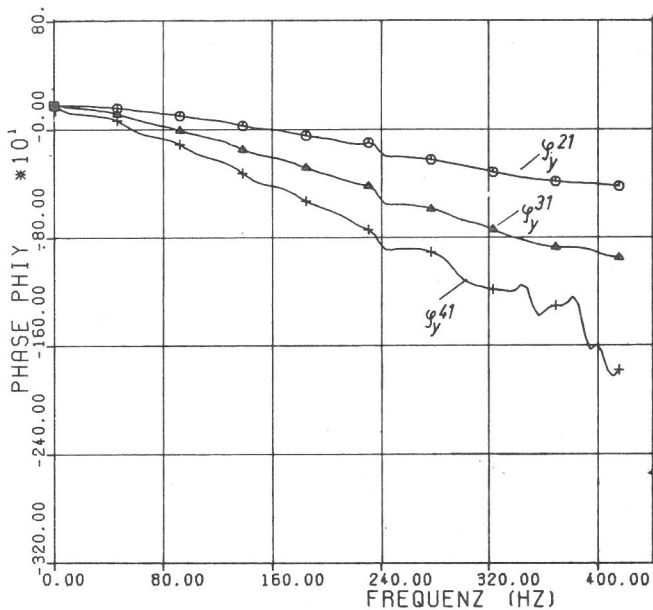
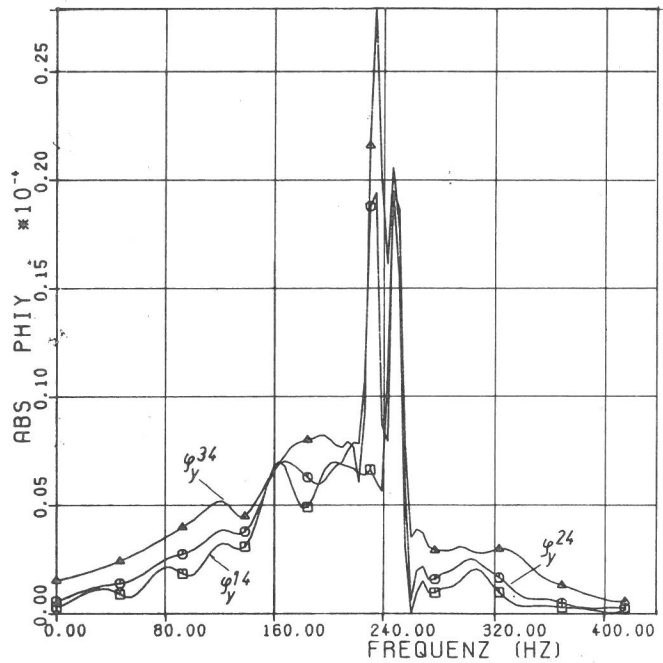
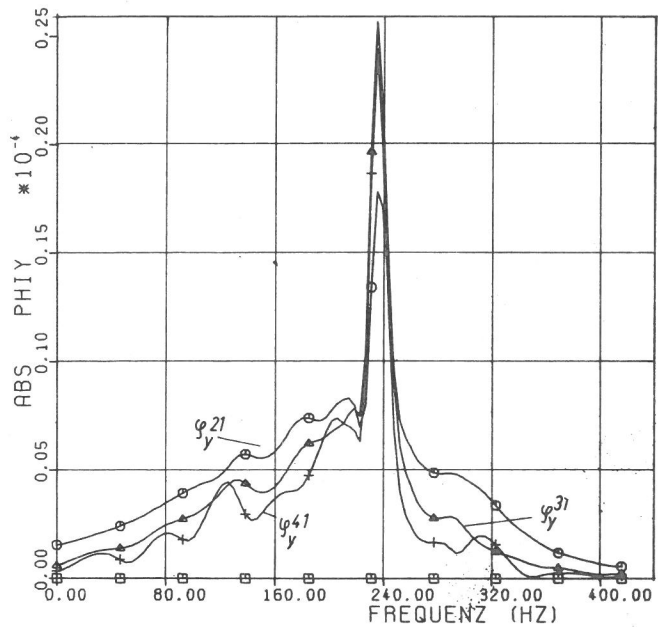


Abb. 60:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (7 Schwellen, $P_z = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 1)

Abb. 61:

Rotationen φ_y massebehafteter starrer Schwellen (7 Schwellen, $P_z = 1e^{i\omega t}$ auf Schwelle Nr. 4)

der Koppelwirkung zu verzeichnen. Weiter ist interessant, daß die Beträge der Amplituden benachbarter Schwellen vor der Resonanzstelle nahezu identisch sind und die Lage der Resonanzstelle mit dem zweiten spezifischen Amplitudenmaxima der vertikalen Translationsmode zusammenfällt. Stimmen die Phasenlagen beider Komponenten überein, so sind im Bereich dieser Frequenz überaus große Amplituden zu erwarten. Der Vergleich der Abb. 57 und Abb. 58 mit

Abb. 56 zeigt, daß ähnlich wie bei der vertikalen Translationsmode eine Verringerung der Schwellenzahl eine Glättung von Nebenmaximas und Verringerung der Resonanzamplituden bewirkt. Die übrigen Verläufe sind jedoch nahezu identisch.

Vergleich der Abb. 59, bei der das System an der Schwelle Nr. 4 durch $M_Y^4 = 1 e^{i\omega t}$ belastet wird, zeigt, daß die vorausgesetzte Endlichkeit des Systems insbesondere im Resonanzbereich größere Auswirkungen auf das Schwingungsverhalten des Systems besitzt, als dies bei der vertikalen Komponente der Fall ist. Hier tritt z.T. eine relativ große Verringerung der Resonanzamplituden ein, begleitet von einem zweiten Peak in der Umgebung der Resonanzstelle. Der übrige Verlauf ist jedoch nahezu identisch mit dem Lastfall $M_Y^1 = 1 e^{i\omega t}$, so daß auch hier ein endlicher Ausschnitt zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens eines unendlich langen Schwellenrostes ausreicht.

9.6.4 Rotationen φ_y infolge P_z

Die Abb. 60 und 61 zeigen die Rotationen φ_y^{jk} , $j = 1, 4$, $k = 1$ und $k = 4$ infolge Belastung durch $P_z^1 = 1 e^{i\omega t}$ und $P_z^4 = 1 e^{i\omega t}$. Infolge des Reziprozitätssatzes sind diese Rotationen gleich den Verschiebungen u_z^{jk} , $j = 1, k = 1, 4$ infolge M_Y^k , $k = 1, 4$. Die Amplitudenverläufe dieser Bewegungsmoden ähneln denjenigen der Rotationsmoden φ_y infolge M_Y . Gleichzeitig treten jedoch wie bei der vertikalen Translationsmode u_z eine Anzahl von Maximas und Minimas auf, die bei der reinen Rotationsmode nicht vorhanden sind. Der Beitrag dieser Mode zur gesamten vertikalen Verschiebung von unbelasteten Nachbarschwellen liegt außerhalb des Resonanzbereiches bei ca. 65 %, bezogen auf die reine vertikale Translation und ist damit recht beachtlich. Im Resonanzbereich werden z.T. sogar Prozentsätze von ca. 250 % erreicht. Bei Belastung der Schwelle Nr. 4 durch $P_z^4 = 1 e^{i\omega t}$ (Abb. 61) treten ähnlich wie bei der reinen Rotation Nebenmaximas im Resonanzbereich auf. Die prinzipiellen Funktionsverläufe außerhalb des Resonanzbereiches sind aber sehr ähnlich denjenigen der Abb. 60. Eine Ausnahme stellt nur die Rotation $\varphi_y^{4,4}$ dar. Während bei Abb. 60 aus Symmetriegründen der entsprechende Verlauf identisch Null ist, treten hier

mit Ausnahme im Resonanzbereich geringe Verschiebungen infolge der unsymmetrischen Belastung auf.

9.6.5 Vergleich mit Messungen

Die in den Abb. 52 - 54 dargestellten theoretischen Ergebnisse für die vertikale Translationsmode u_z werden im folgenden mit Meßergebnissen nach /37/ verglichen. Die in /37/ ebenfalls durchgeführten Messungen der horizontalen Translationsmode u_y können hier nicht mit theoretischen Ergebnissen verglichen werden, da diese im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden.

Aus den Messungen werden zur Darstellung Ergebnisse ausgewählt, die mit einer statischen Vorlast von $P_{\text{stat}} = 50 \text{ KN}$ und $P_{\text{stat}} = 75 \text{ KN}$ sowie einer dynamischen Belastung von $P_{\text{dyn}} = 2 \text{ KN}$ und $P_{\text{dyn}} = 4 \text{ KN}$ ermittelt wurden. Dargestellt werden jeweils bezogene Amplituden der Schwellen Nr. 2,3, und 4, die zum einen auf die Amplitude der erregten Schwelle Nr. 1 (im Versuch Nr. 16 siehe Abb. 34) bzw. in einem

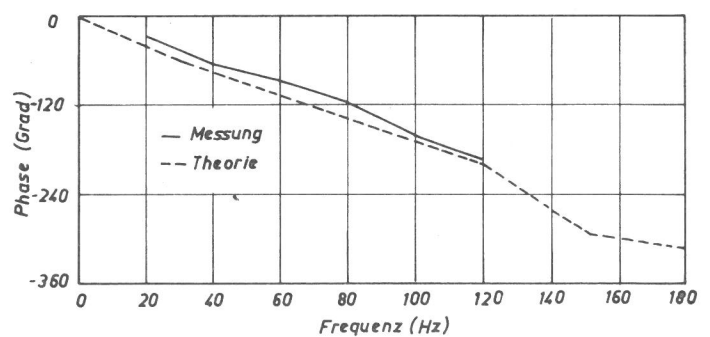
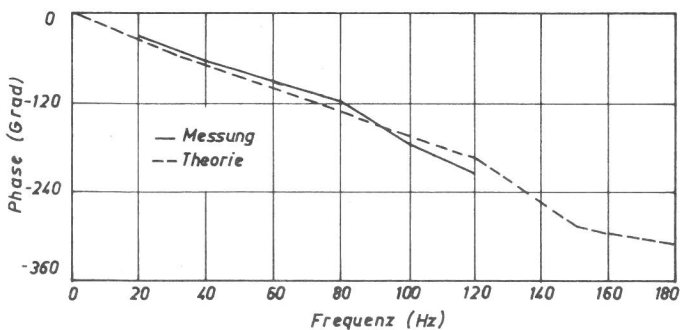
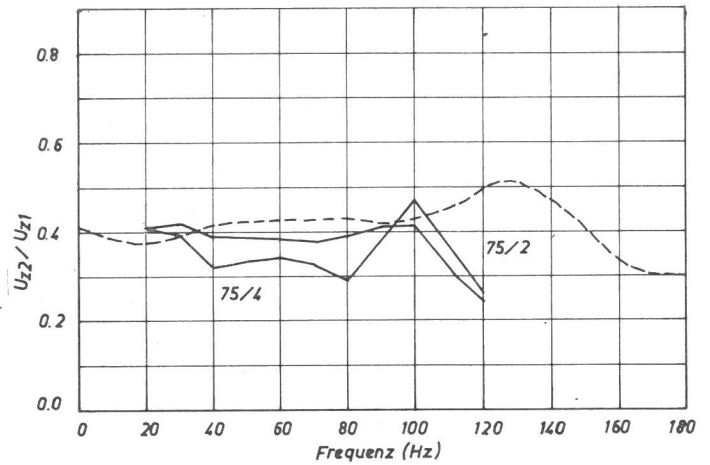
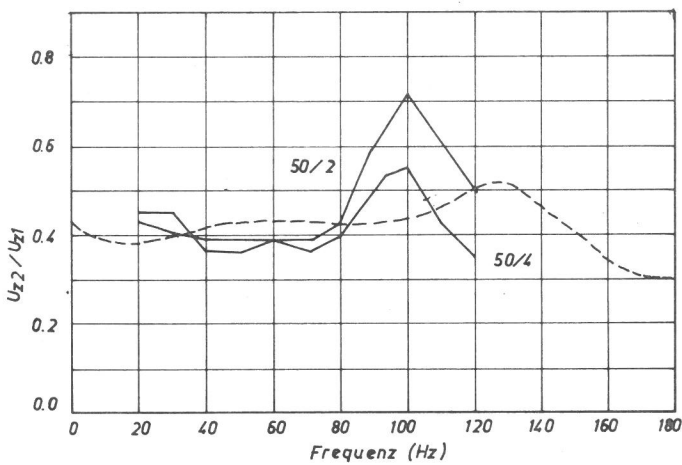


Abb. 62:

Koppelung u_{z2}/u_{z1} mit Vergleich Theorie - Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1, $P_{\text{stat}} = 50 \text{ KN}$, $P_{\text{dyn}} = 2,4 \text{ KN}$)

Abb. 63:

Koppelung u_{z2}/u_{z1} mit Vergleich Theorie - Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1, $P_{\text{stat}} = 75 \text{ KN}$, $P_{\text{dyn}} = 2,4 \text{ KN}$)

schärferen Kriterium auf die Amplituden der Schwelle Nr. 2 bezogen sind. Die Phasen werden in (Grad) angegeben.

In den Abb. 62 und Abb. 63 ist der Vergleich zwischen Theorie und Messung für die Koppelung der Schwelle Nr. 2 bezogen auf Schwelle Nr. 1 dargestellt. Hieraus ist zu erkennen, daß für alle Versuche eine ausgezeichnete Übereinstimmung, sowohl für die Beträge als auch für die Phasen, zwischen Theorie und Messung vorhanden ist. Auftretende Abweichungen bei den Beträgen im Frequenzbereich > 90 Hz können eine Folge der Eigenelastizität der einzelnen Schwellen sein, die in der Theorie nicht berücksichtigt wurde. Zum anderen ist es möglich, daß für den Schubmodul des Bodens bei den Rechnungen ein größerer Wert als in der Realität vorhanden, angesetzt wurde. Da ein ähnliches Verhalten beim Vergleich der starren Schwelle mit den Meßergebnissen zu beobachten war (vgl. 9.4.2), ist die zweite Erklärung als wahrscheinlicher zu betrachten.

Die Abb. 64 und Abb. 65 zeigen den Vergleich zwischen Theorie und Messung für Schwelle Nr. 3. Für die Beträge ist auch hier eine recht gute Übereinstimmung festzustellen. Die Ursachen für die Abweichungen im höheren Frequenzbereich unterliegen den gleichen Effekten wie sie für Schwelle Nr. 2 dargelegt wurden. Dies wird insbesondere deutlich, wenn ein Vergleich der Phasen durchgeführt wird. Hier zeigt der Phasenverlauf der Meßergebnisse eine stärkere Neigung als der, der Theorie. Dies ist gleichbedeutend mit einer geringeren Wellenausbreitungsgeschwindigkeit. Beachtet man, daß z.B. die Scherwelle über $v_s = \sqrt{G/\rho}$ mit dem Schubmodul G funktional verknüpft ist, so wird klar, daß im Versuch der effektive Schubmodul kleiner war, als er bei den Rechnungen angesetzt wurde. Dies verändert nun nicht die Ordinaten der theoretischen Kurve (als dimensionslose Größen sind diese in der Theorie unabhängig vom Schubmodul), wohl aber den Frequenzmaßstab, da in diesem durch die Beziehung $a_0 = a_w/v_s$ der absolute Wert des Schubmoduls direkt enthalten ist. Im Sinne einer Korrektur müßte die theoretische Kurve im

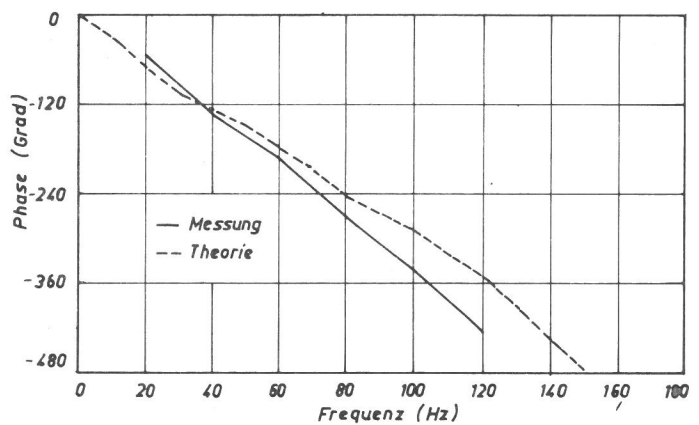
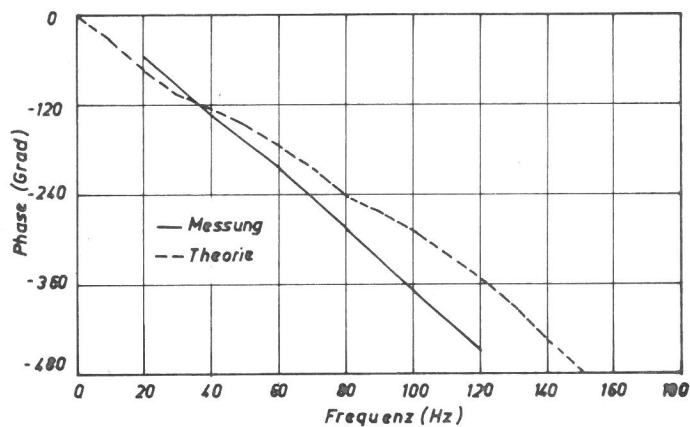
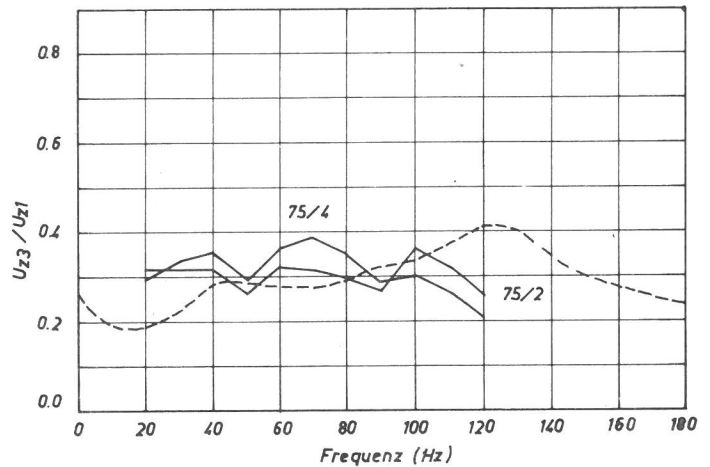
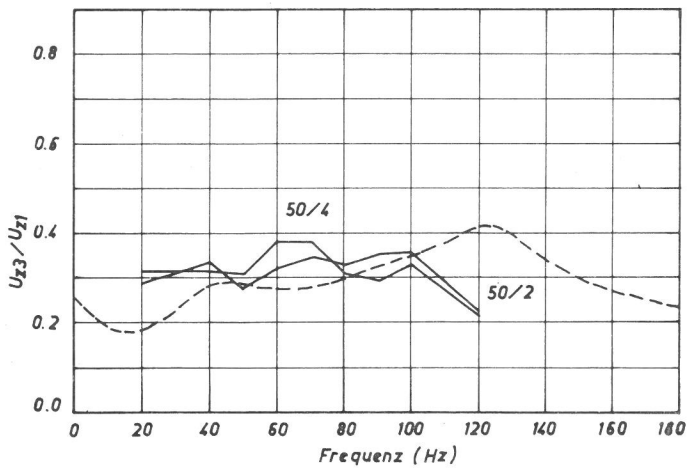


Abb. 64:

Koppelung u_{z3}/u_{z1} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1,
 $P_{stat} = 50 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

Abb. 65:

Koppelung u_{z3}/u_{z1} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1,
 $P_{stat} = 75 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

Verhältnis der Schubmoduli $G_{\text{Versuch}}/G_{\text{Rechnung}}$ verzerrt werden. Wird dieses durchgeführt, so ist zu erkennen, daß Minimas und Maximas, sowie im Durchschnitt die Beträge von Theorie und Experiment nahezu übereinstimmen.

Auch für die in den Abb. 66 und Abb. 67 dargestellte Koppelung für die Schwelle Nr. 4 ist im Mittel eine recht brauchbare Übereinstimmung festzustellen. Die relativen Abweichungen zwischen Theorie und Messung sind hier zwar größer als bei den anderen Schwellen. Dies ist aber im wesentlichen nur eine Folge der mit wachsender Entfernung von der erregten Schwelle stärker auftretenden Verzerrungen der Frequenzachse infolge des kleineren Schubmoduls im Experiment.

Um eventuelle Fehler bei der Messung des Amplitudenverlaufs u_z^1 der erregten Schwelle bzw. eventuelle Einflüsse

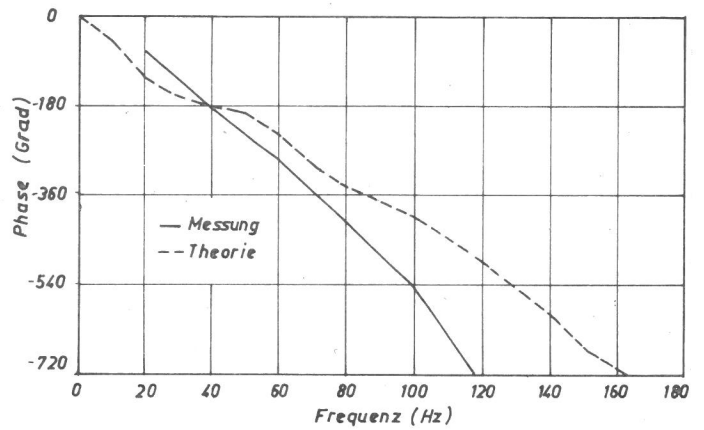
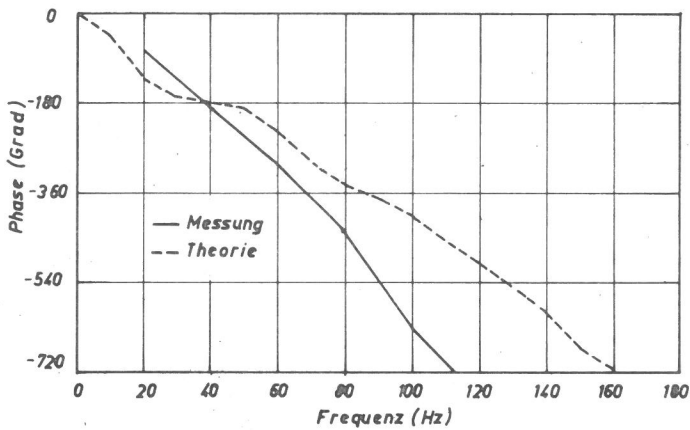
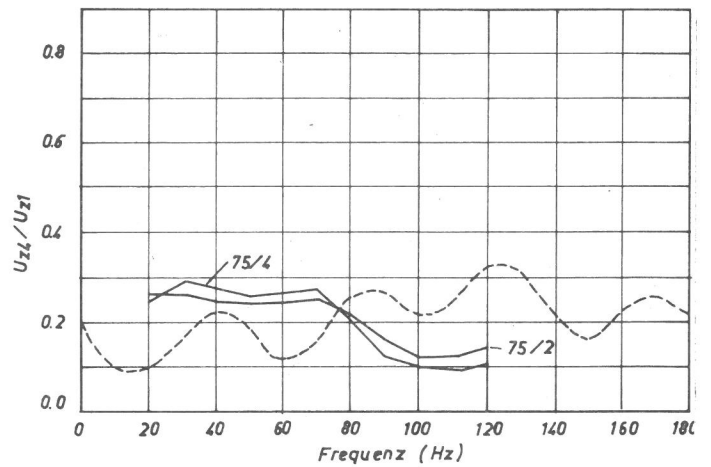
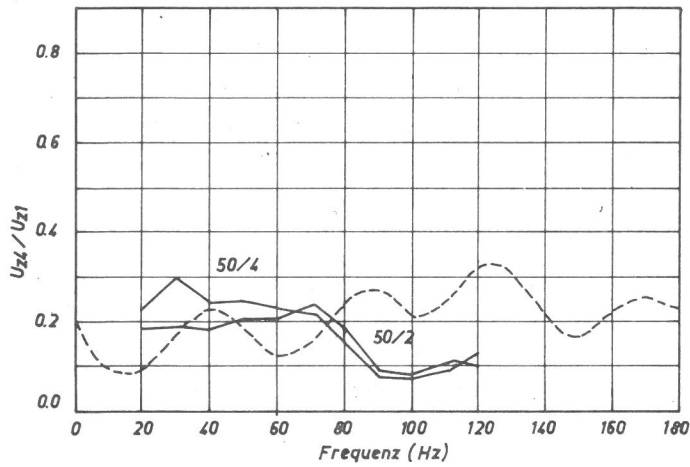


Abb. 66:

Koppelung u_{z4}/u_{z1} mit Vergleich Theorie -
 Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1,
 $P_{stat} = 50 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

Abb. 67:

Koppelung u_{z4}/u_{z1} mit Vergleich Theorie -
 Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1,
 $P_{stat} = 75 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

der Belastungseinrichtung auf diese "Normierungsamplitude" auszuschalten, sind in den Abb. 68 - 71 die Amplituden der über den Boden indirekt belasteten Nachbarschwellen 2 - 4 auf die Amplituden der Schwelle Nr. 2 bezogen worden. Obgleich dies ein schärferes Kriterium der Beurteilung ist, zeigt der Vergleich für die bezogenen Amplituden u_z^3/u_z^2 in den Abb. 68 und Abb. 69 die relativ gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Nur im höheren Frequenzbereich sind aus den oben besprochenen Gründen größere Abweichungen zu beobachten.

Ein ähnliches Ergebnis zeigt der Vergleich für die bezogenen Amplituden u_z^4/u_z^2 (Abb. 70 und 71), wobei hier jedoch im oberen Frequenzbereich z.T. größere Abweichungen auftreten. Neben der kleineren Schubmodulverteilung des Bodens im Experiment könnte hier für diese weiter entfernte Schwelle die in der Rechnung nicht berücksichtigte Materialdämpfung eine größere Rolle spielen.

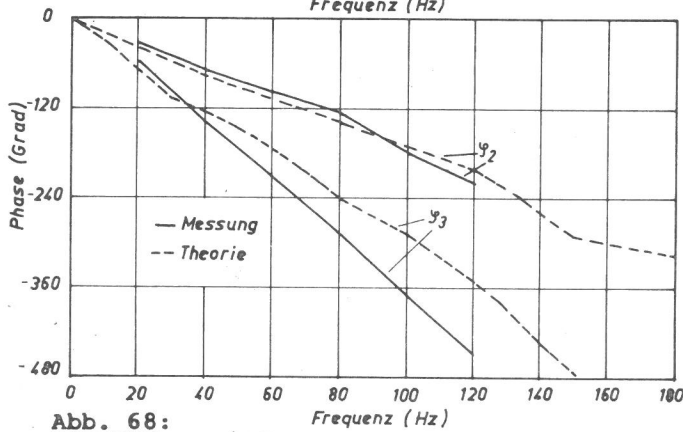
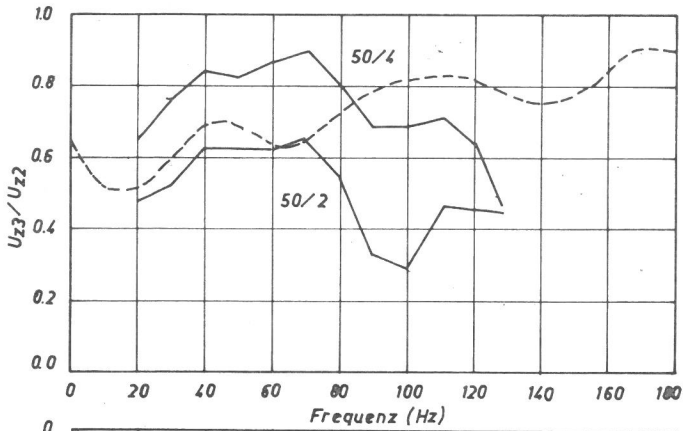


Abb. 68:
Koppelung u_{z3}/u_{z2} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1
 $P_{stat} = 50 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

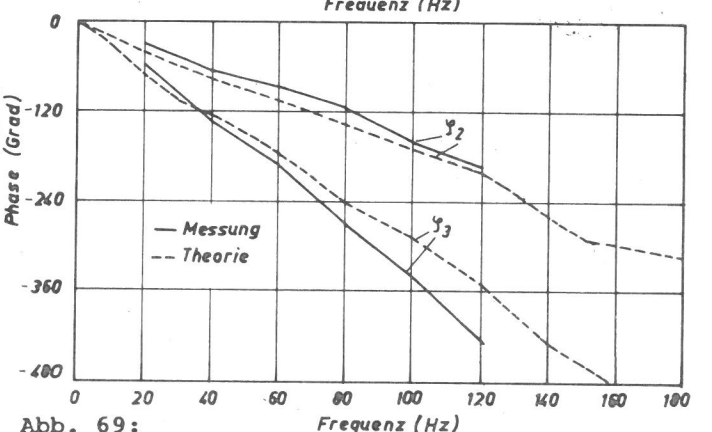
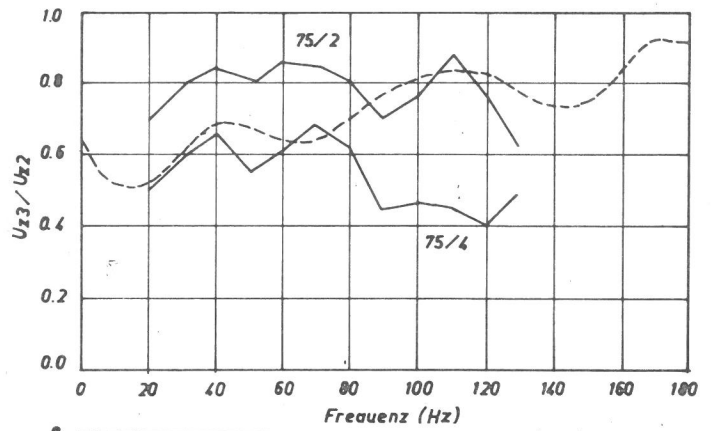


Abb. 69:
Koppelung u_{z3}/u_{z2} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1,
 $P_{stat} = 75 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

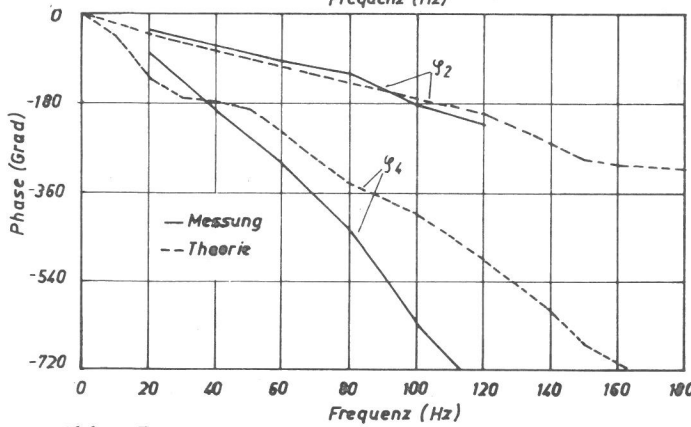
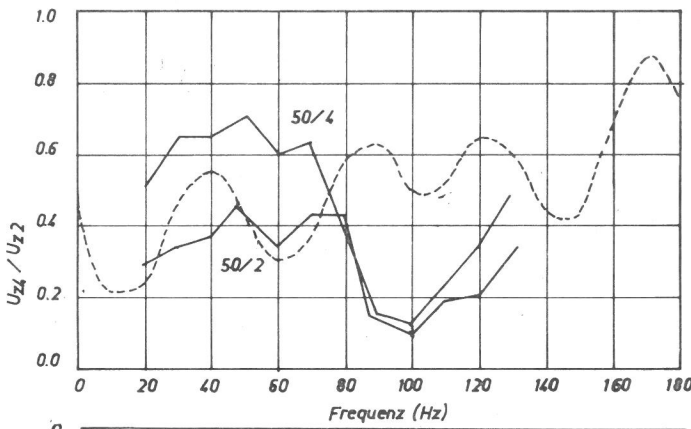


Abb. 70:
Koppelung u_{z4}/u_{z2} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr.1
 $P_{stat} = 50 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

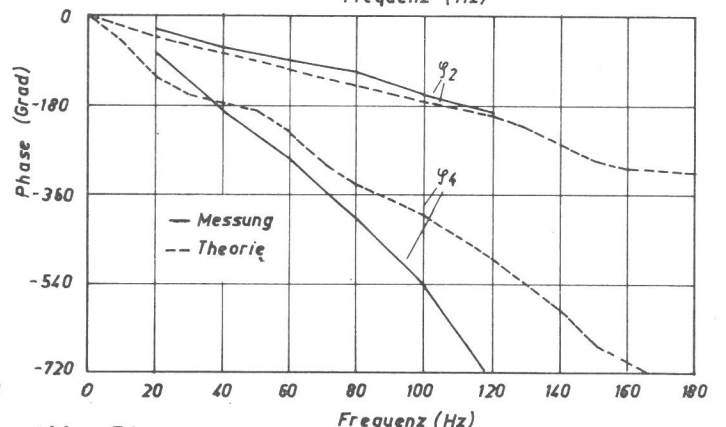
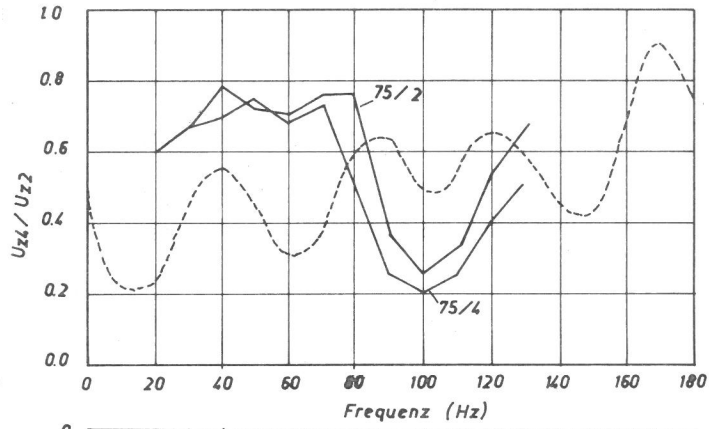


Abb. 71:
Koppelung u_{z4}/u_{z2} mit Vergleich Theorie -
Messung (vertikale Belastung Schwelle Nr. 1
 $P_{stat} = 75 \text{ KN}$, $P_{dyn} = 2,4 \text{ KN}$)

lage zwischen Schiene und Schwelle erfolgt damit nicht. In Tab. 2 sind alle geometrischen Kenngrößen, wie Fläche und Flächenträgheitsmomente für die einzelnen Stabelemente angegeben. Dort sind auch die Zuordnungen der einzelnen Stäbe zu den Knotenpunktnummern verzeichnet.

Die Materialien der Betonschwelle B70W60 und der Schiene UIC 60 werden durch linear elastische Stoffgesetze mit den Konstanten

E-Modul Schwelle	$E_s = 3 \cdot 10^6$ [KN/cm ²]
E-Modul Schiene	$E_{sch} = 2.1 \cdot 10^7$ [KN/cm ²]
Poissonzahl Schwelle	$\nu_s = 0.16$ [/]
Poissonzahl Schiene	$\nu_{sch} = 0.30$ [/]
Materialdichte Schwelle	$\rho_s = 1540$ [kg/m ³]
Materialdichte Schiene	$\rho_{sch} = 7850$ [kg/m ³]

beschrieben.

STAB NR.	KNOTEN PUNKTE	FLAECHE (CM**2)	TRAEGHEITSMOMENTE		
			IY	IZ (CM**4)	IT
1	1 3	0.2472E+03	0.5266E+04	0.8860E+04	0.1412E+05
2	3 2	0.0	0.0	0.0	0.0
3	3 6	0.7686E+02	0.3774E+03	0.3055E+04	0.3568E+04
4	3 6	0.0	0.0	0.0	0.0
5	3 11	0.0	0.0	0.0	0.0
6	3 4	0.1970E+03	0.4572E+04	0.5563E+04	0.1013E+05
7	4 5	0.0	0.0	0.0	0.0
8	4 9	0.0	0.0	0.0	0.0
9	4 14	0.0	0.0	0.0	0.0
10	7 6	0.4945E+03	0.1051E+05	0.1772E+05	0.2823E+05
11	6 8	0.0	0.0	0.0	0.0
12	6 11	0.7686E+02	0.3774E+03	0.3055E+04	0.3568E+04
13	6 11	0.0	0.0	0.0	0.0
14	6 16	0.0	0.0	0.0	0.0
15	6 9	0.3940E+03	0.9144E+04	0.1113E+05	0.2027E+05
16	9 10	0.0	0.0	0.0	0.0
17	9 14	0.0	0.0	0.0	0.0
18	9 19	0.0	0.0	0.0	0.0
19	12 11	0.4945E+03	0.1051E+05	0.1772E+05	0.2823E+05
20	11 13	0.0	0.0	0.0	0.0
21	11 16	0.7686E+02	0.3774E+03	0.3055E+04	0.3568E+04
22	11 16	0.0	0.0	0.0	0.0
23	11 14	0.3940E+03	0.9144E+04	0.1113E+05	0.2027E+05
24	14 15	0.0	0.0	0.0	0.0
25	14 19	0.0	0.0	0.0	0.0
26	17 16	0.4945E+03	0.1051E+05	0.1772E+05	0.2823E+05
27	16 18	0.0	0.0	0.0	0.0
28	16 19	0.3940E+03	0.9144E+04	0.1113E+05	0.2027E+05
29	19 20	0.0	0.0	0.0	0.0

Tab. 2:

Stab- und Knotennummerierung sowie geometrische Kenngrößen des Schienenschwellensystems.

Als Belastung wird eine vertikale Einheitskraft $P_z = 1 e^{i\omega t}$ angesetzt, die in der Symmetrieebene des Systems auf die Schienenköpfe einwirkt. Andere Belastungsmoden werden hier nicht betrachtet. Das System wird im Frequenzbereich $0 \leq f \leq 200$ Hz berechnet, wobei die Symmetrieeigenschaften des Systems ausgenutzt werden. Dargestellt werden die Amplituden und Phasen der translatorischen Verschiebungen u_x, u_y, u_z an jedem Knotenpunkt, soweit diese aus Symmetriegründen nicht identisch Null sind. Zum Vergleich sind im allgemeinen Ergebnisse aus /36/, die das Schwingungsverhalten desselben Schienenschwellensystems betreffen, jedoch ohne Einbeziehung der Koppelung durch den Untergrund berechnet wurden, mit eingetragen. Hierbei muß jedoch beachtet werden, daß die in /36/ mitgeteilten Ergebnisse die Bodennachgiebigkeiten in der Sohlfläche einer Einzelschwelle mit Hilfe von Näherungslösungen beschreiben. Ein Vergleich beider Systeme ist deshalb nur unter Einbeziehung der Veränderungen des Schwingungsverhaltens der einzelnen elastischen Schwelle (s. Abschnitt 9.5, dort die Abb. 43-48) infolge der hier verwendeten exakten Lösungen möglich.

9.7.2 u_x -Translationen

In den Abb. 73-76 sind die horizontalen Translationen u_x für jede Schwelle und in den Abb. 77-79 für die Knotenpunkte längs der Gleisachse dargestellt. Aus den erstbezeichneten Abbildungen ist das Schwingungsverhalten der Einzelschwelle, aus den zweiten der Grad der Koppelung für die einzelnen Schwellen in dieser Bewegungsmode abzulesen.

Aus den Abb. 73 - 76 für die einzelnen Schwellen ist zu erkennen, daß bei Berücksichtigung der Koppelung durch den Boden durchwegs größere Amplituden als bei einem System das nur über die Schienen gekoppelt ist, auftreten. Ein exakter Vergleich ist hier jedoch schwierig, da bei der elastischen Einzelschwelle diese Bewegungsmode bei den untersuchten Lastfällen nicht auftritt. Bemerkenswert ist jedoch, daß bei dem hier berechneten System Amplitudenmaximas in höheren Frequenzbereichen auftreten, als bei dem früher berechneten System ohne Bodenkoppelung. Dies ist eine gegenläufige Tendenz im Vergleich zu den Abb. 43 bis 48. Dort trat im Vergleich der Ergebnisse der exakten

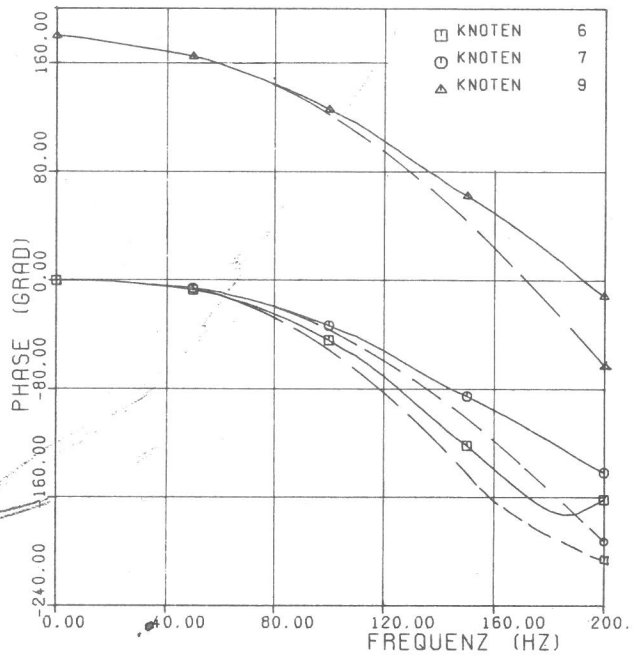
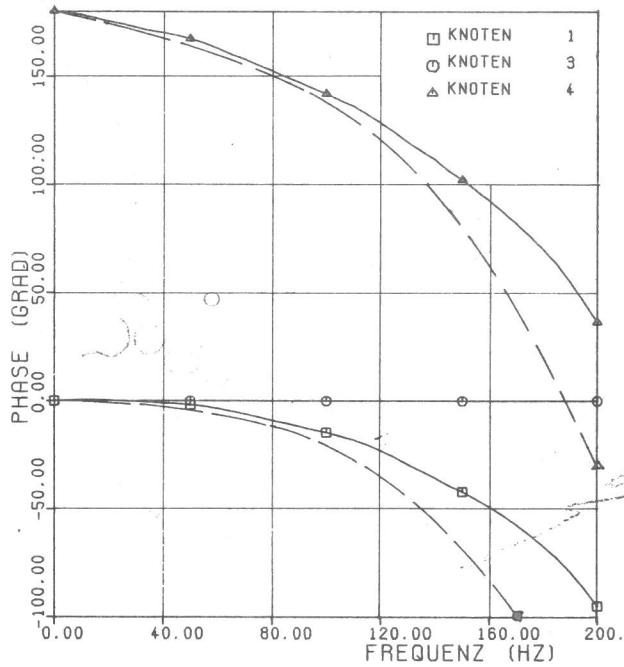
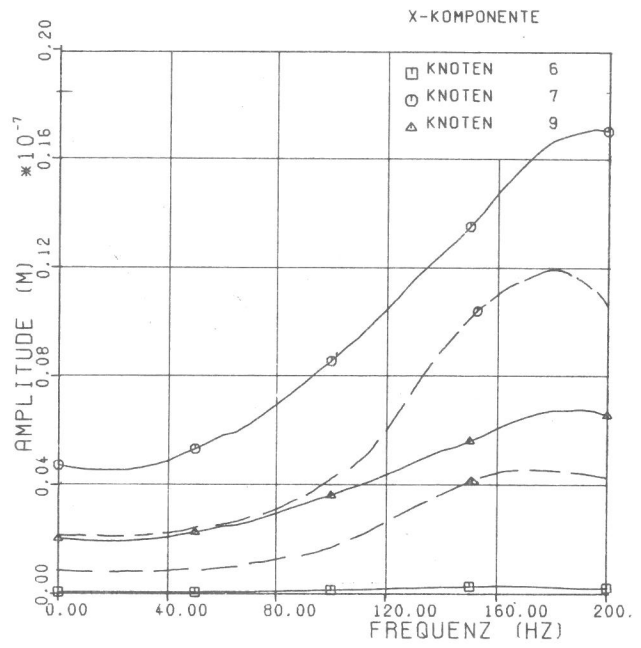
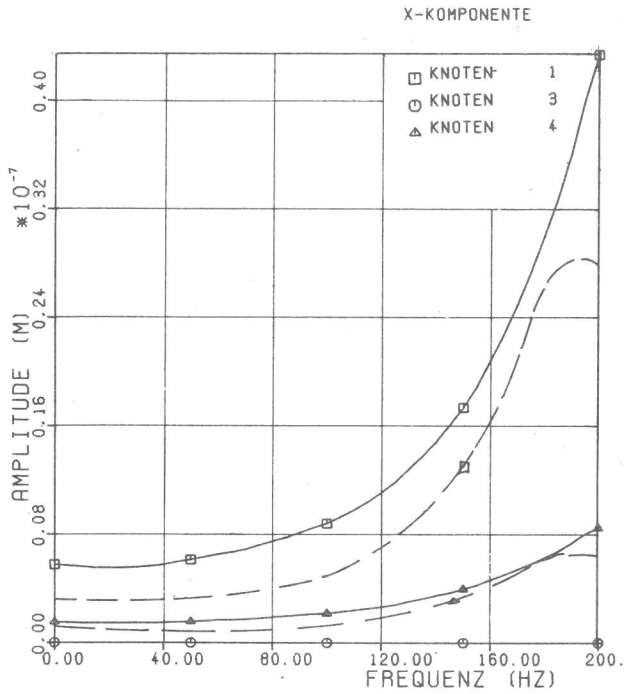


Abb. 73:

u_x -Translationen Knoten 1, 3, 4
(Schwelle 1)

Abb. 74:

u_x -Translationen Knoten 6, 7, 9
(Schwelle 2)

Theorie mit der Näherungstheorie eine Verschiebung von Amplitudenmaximas in niedrige Frequenzbereiche auf.

Der Grad der Koppelung dieser Bewegungsmode ist aus den Abb. 77-79 zu erkennen. Bezieht man die Amplituden der einzelnen Schwellen zweckmäßigerweise auf die Amplituden der Schwelle Nr. 2 (Knotenpunkte 7,6,9) da die x-Amplitu-

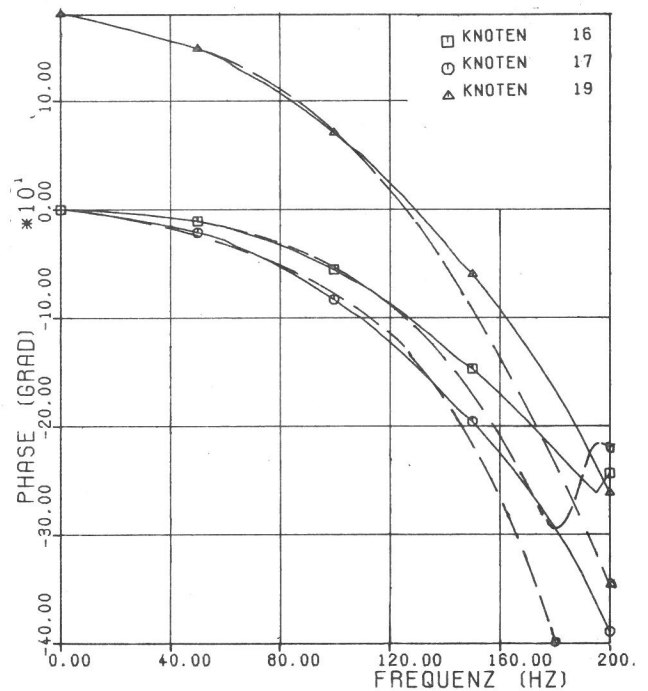
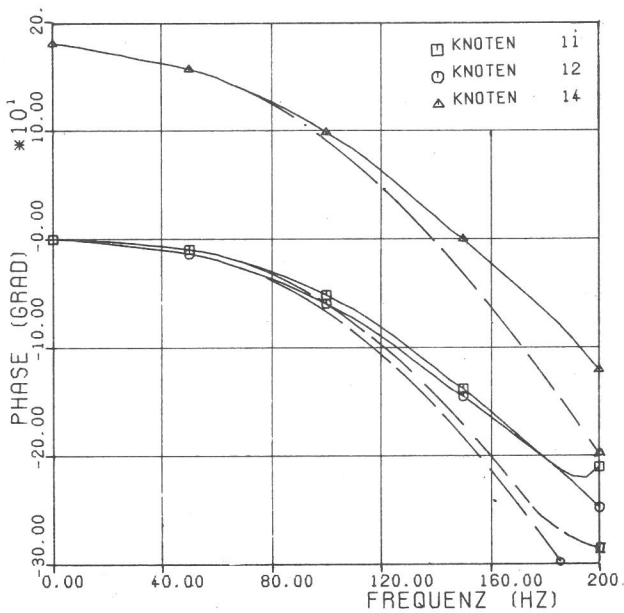
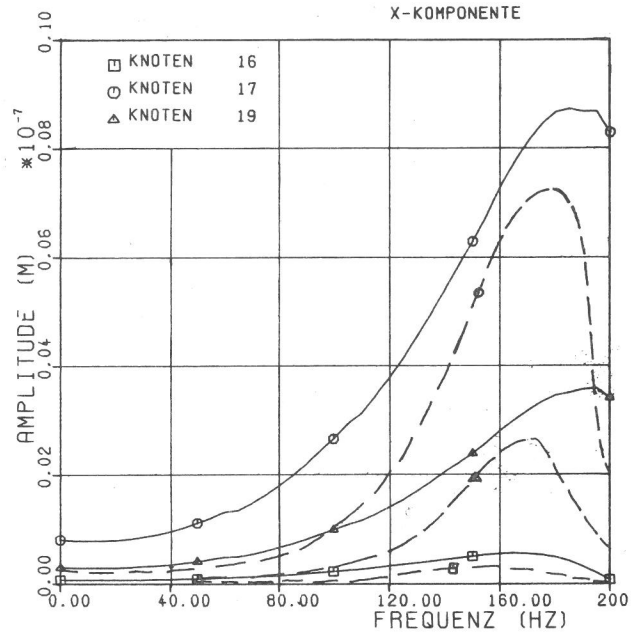
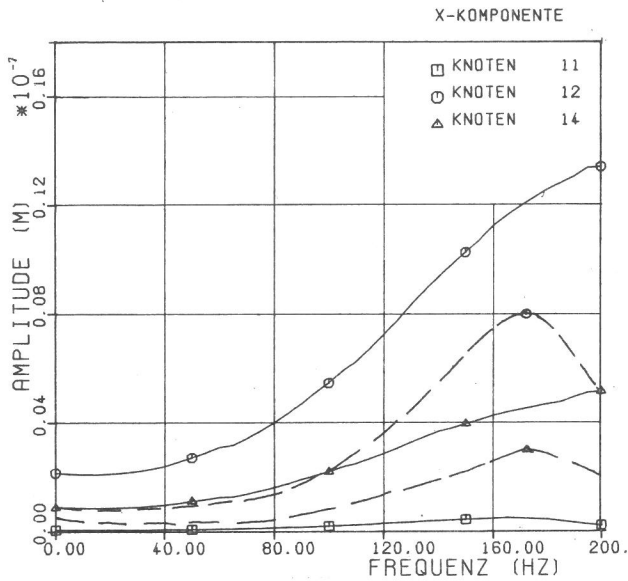


Abb. 75:

u_x -Translationen Knoten 11, 12, 14
(Schwelle 3)

Abb. 76:

u_x -Translationen Knoten 16, 17, 19
(Schwelle 4)

den der Schwelle Nr. 1 am Schienenauflagerpunkt Null sein müssen, so ergeben sich für die Schienenachse Werte der Koppelung von 1.35 - 1.56 für die 3. Schwelle und von 1.45 - 1.76 für die 4. Schwelle. Am Schwellenende und für die Schwellenmitte ergeben sich Werte von 0.45 - 0.75 für die dritte und 0.20 - 0.45 für die vierte Schwelle.

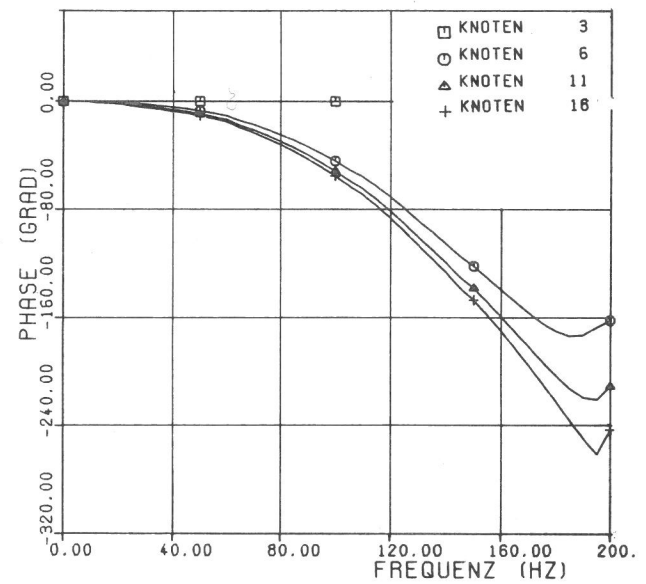
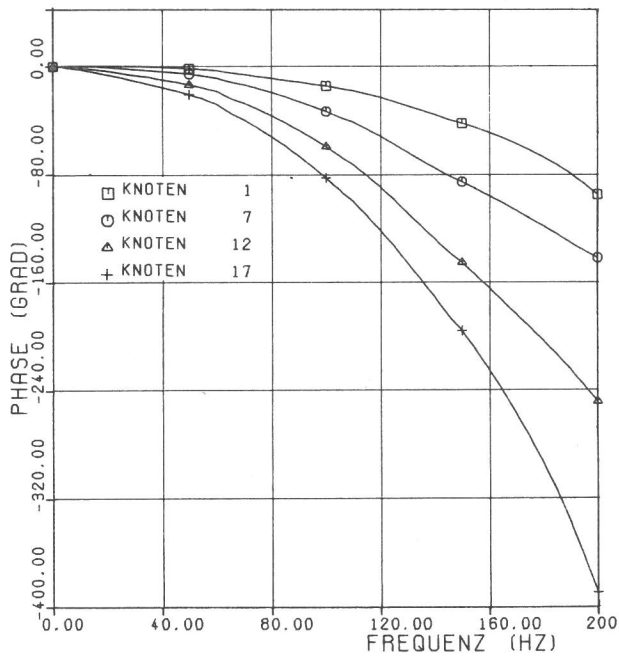
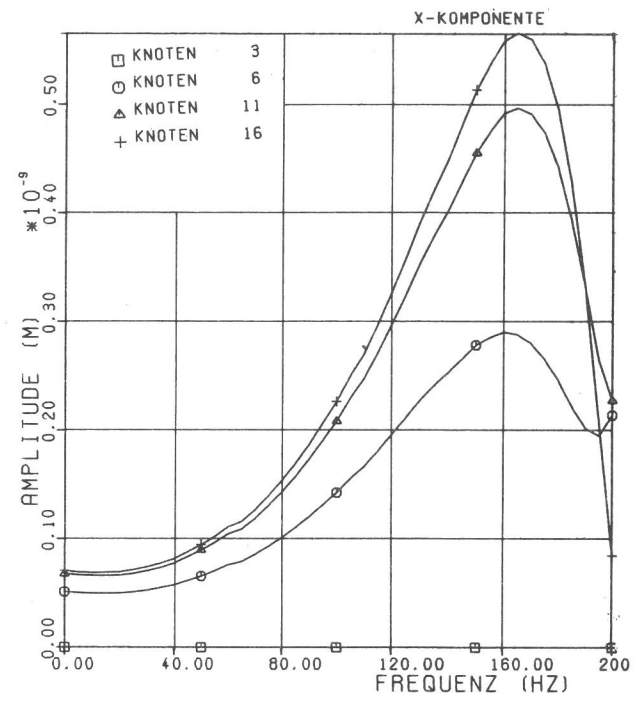
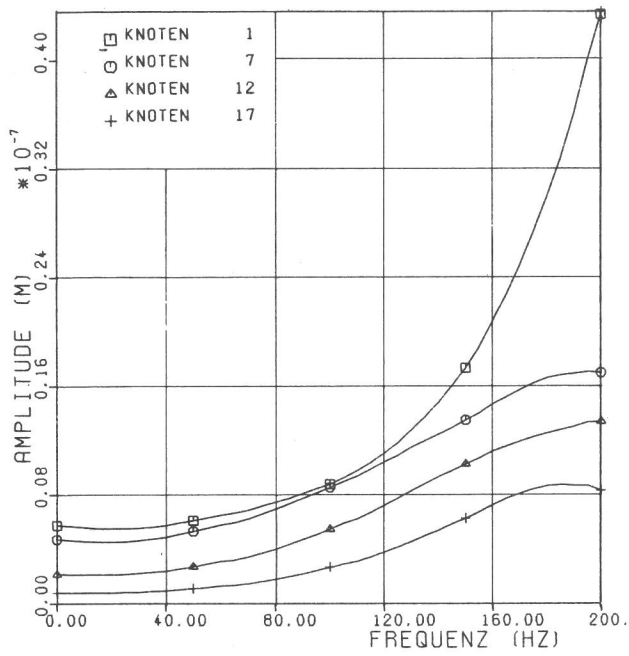


Abb. 77:

u_x -Translationen Knoten 1,7,12,19
(Schwellenenden)

Abb. 78:

u_x -Translationen Knoten 3,6,11,16
(Schienenachse)

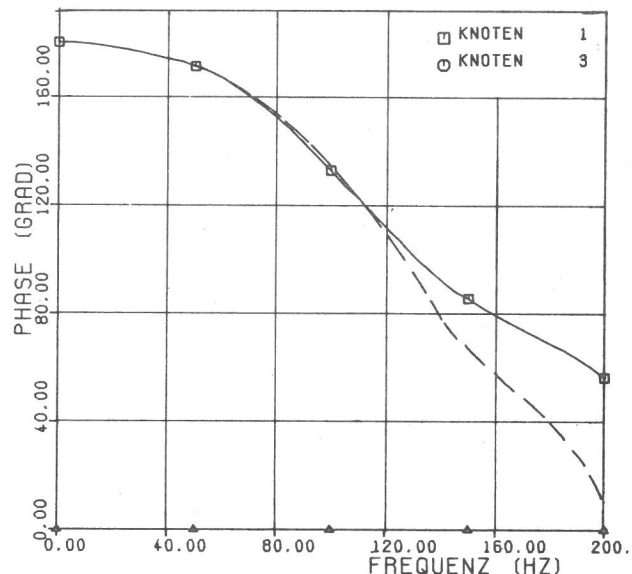
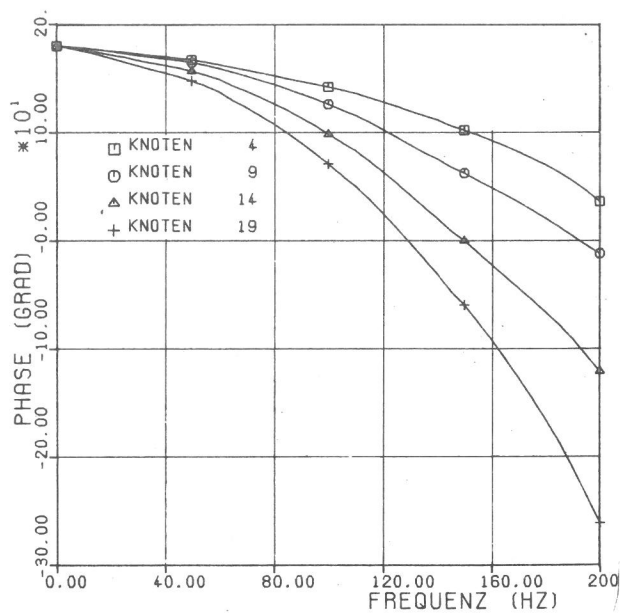
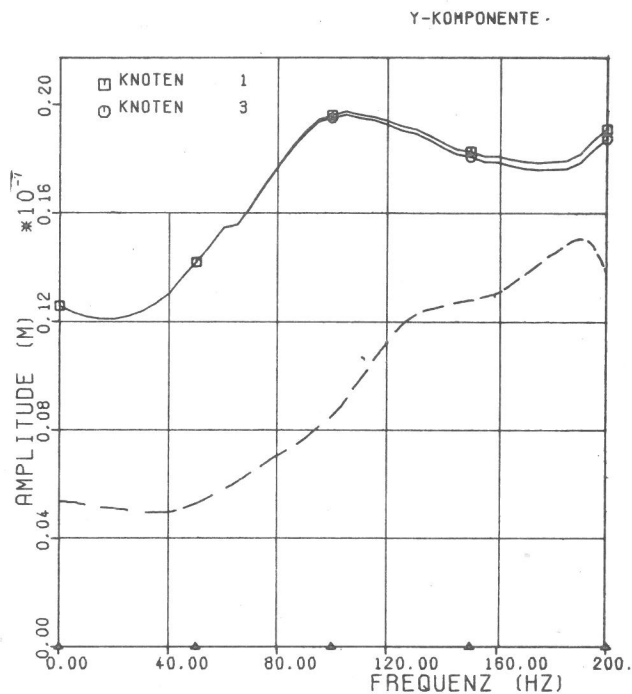
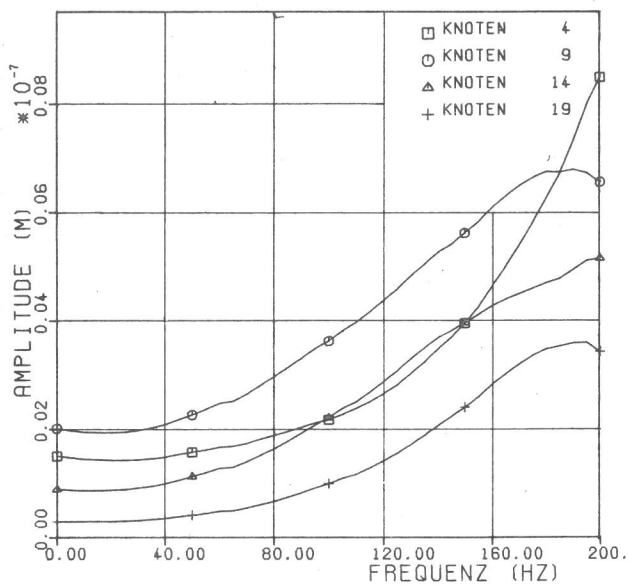


Abb. 79:

u_x -Translationen Knoten 4, 9, 14, 19
(Schwellenmitte)

Abb. 80:

u_y -Translationen Knoten 1, 3
(Schwelle 1)

9.7.3 u_y -Translationen

Die Amplituden- und Phasenfrequenzgänge dieser Bewegungsmode sind in den Abb. 80 - 83 für die Einzelschwelle, und in den Abb. 84 und 85 für die Gleislängsrichtung dargestellt. In Schwellenmitte sind diese Translationen aus Symmetriegründen identisch Null.

Wie bei der u_x -Translation sind auch hier die Amplituden unter Berücksichtigung der Bodenkoppelung größer als bei ausschließlicher Berücksichtigung der Schienenkoppelung.

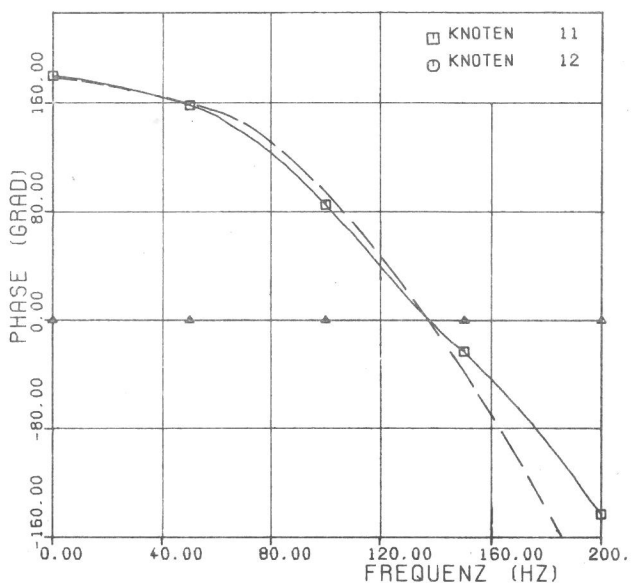
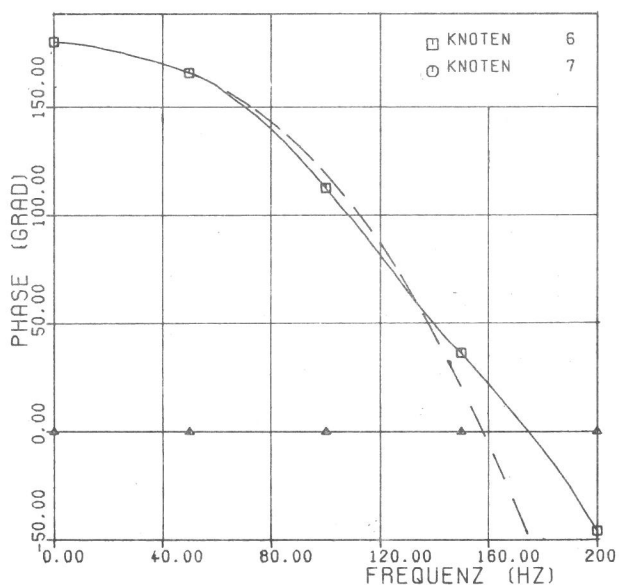
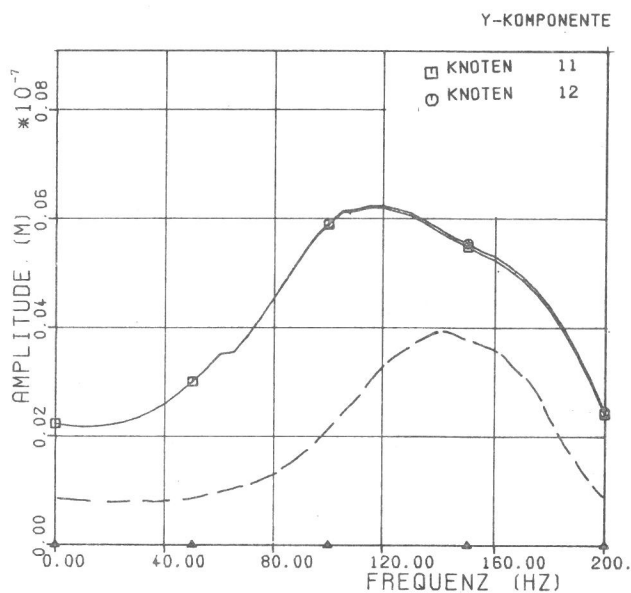
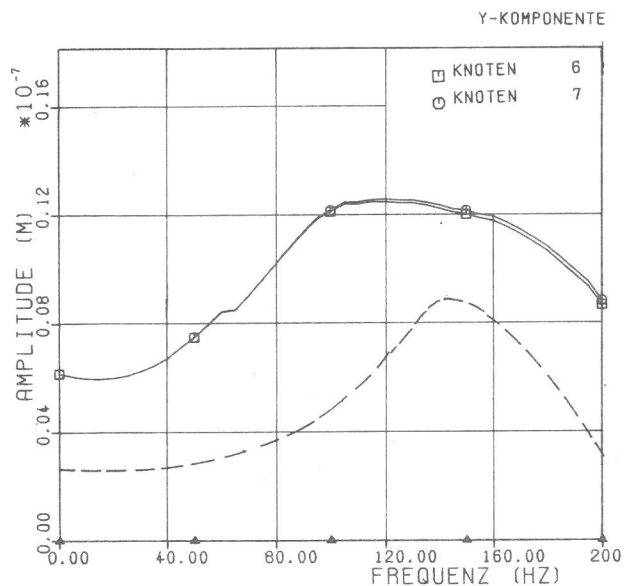


Abb. 81:

u_y -Translationen Knoten 6, 7
(Schwelle 2)

Abb. 82:

u_y -Translationen Knoten 11, 12
(Schwelle 3)

Beim Vergleich ist jedoch zu beachten, daß entsprechend den Ergebnissen für die elastische Einzelschwelle (s. Abb. 45) die hier angewendete exakte Theorie um ca. den Faktor 1.35 größere Werte liefert als die früher angewendete Näherungstheorie. Da hier im Durchschnitt im niedrigen Frequenzbereich bis zu ca. 120 Hz um ca. den Faktor 2.0 - 2.5 größere Werte als bei den früheren Rechnungen auftreten, ist die Differenz unter Ausschluß von Rechenfehlern, der Kopplung durch den Boden zuzuordnen.

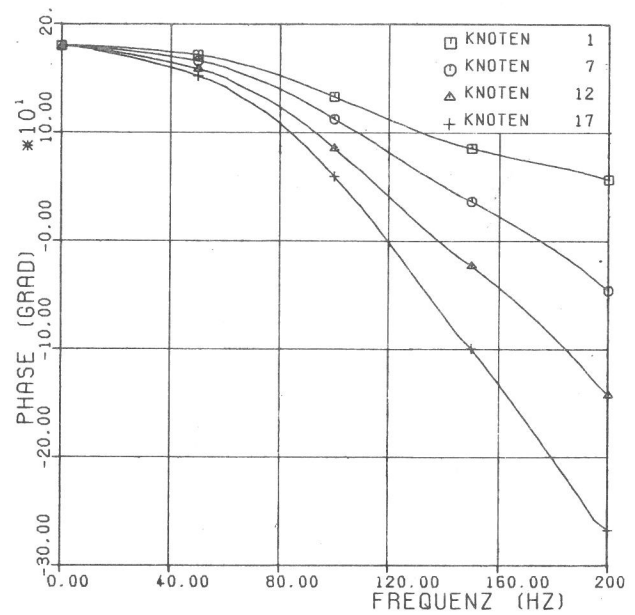
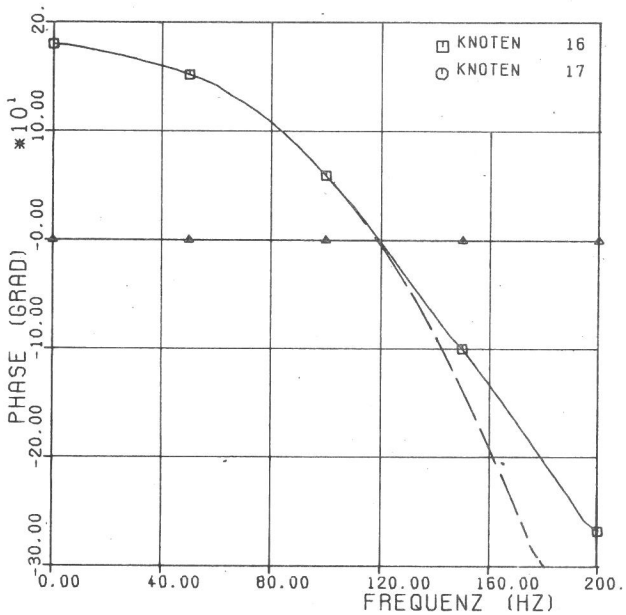
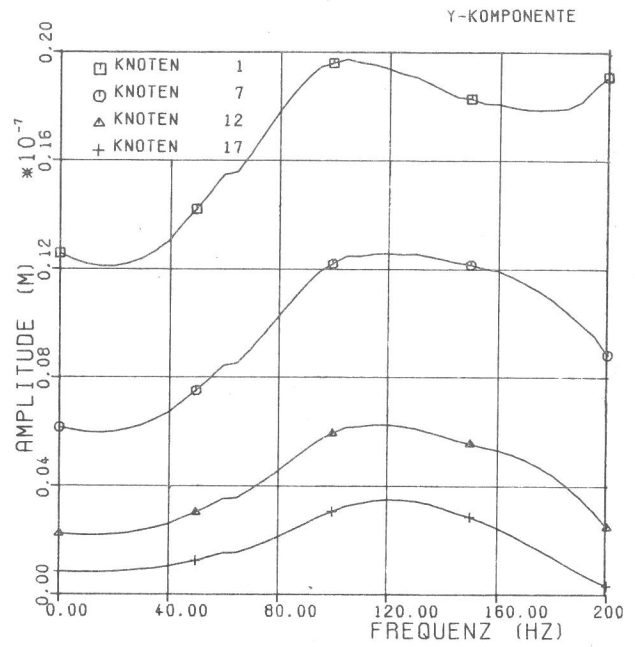
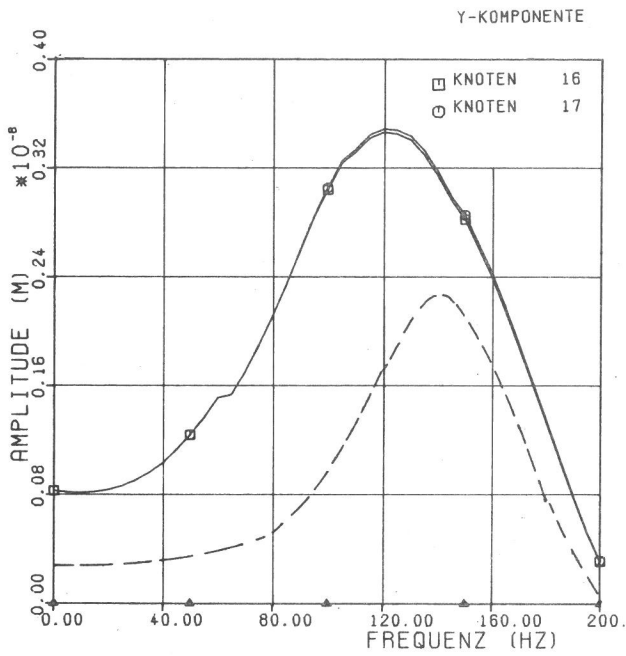


Abb. 83:

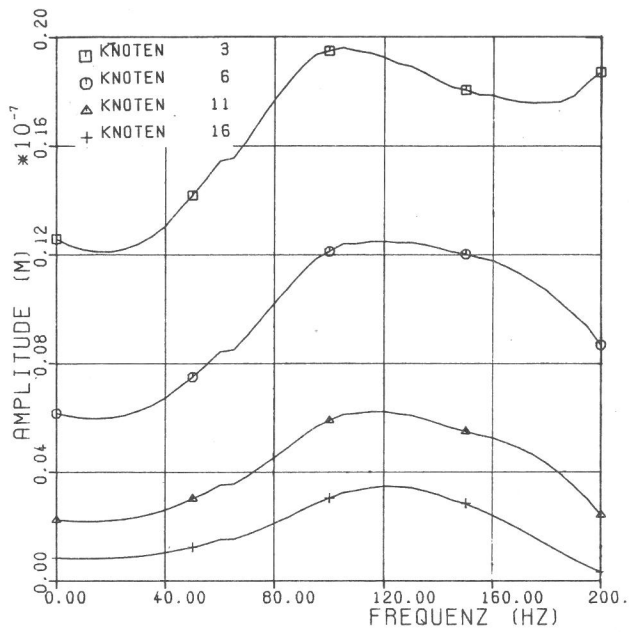
u_y -Translationen Knoten 16, 17
(Schwelle 4)

Abb. 84:

u_y -Translationen Knoten 1, 7, 12, 17
(Schwellenenden)

Bezogen auf die Amplituden der erregten Schwelle ergeben sich für die Koppelung Werte von 0.50 - 0.66 für die zweite, 0.20 - 0.30 für die dritte und 0.10 - 0.15 für die vierte Schwelle.

Y-KOMPONENTE



Z-KOMPONENTE

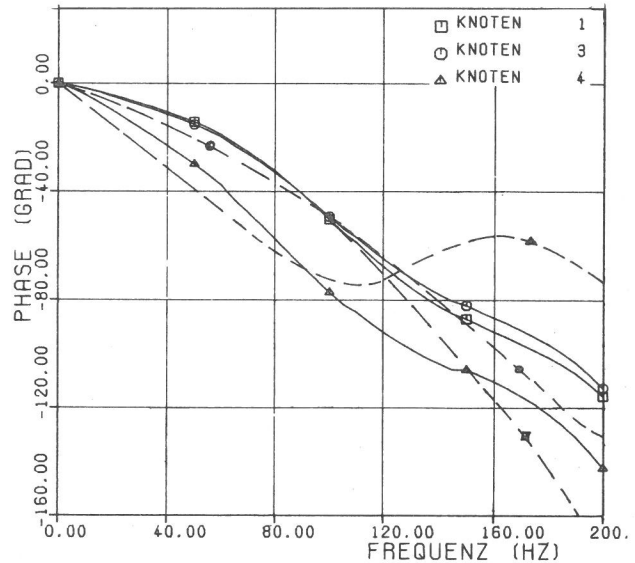
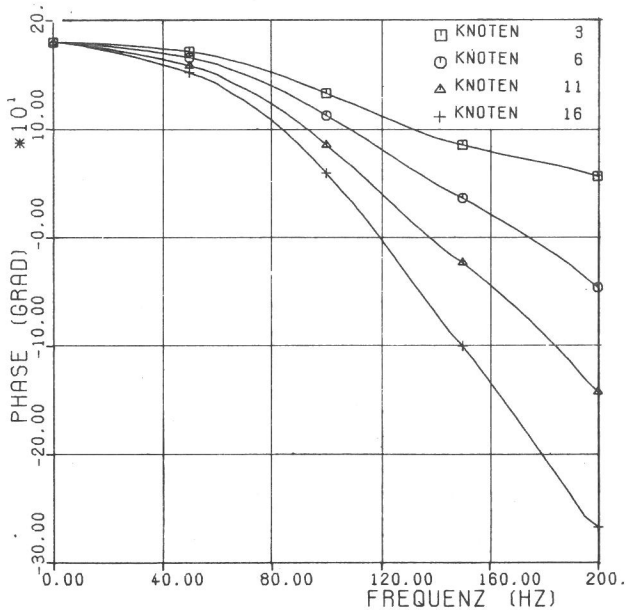
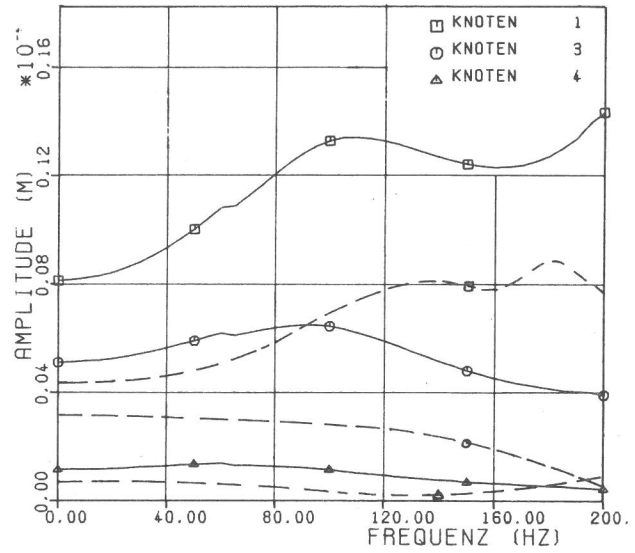


Abb. 85:

u_y -Translationen Knoten 3,6,11,16
(Schienenachse)

Abb. 86:

u_z -Translationen Knoten 1,3,4
(Schwelle 1)

9.7.4 u_z -Translationen

Auch bei den Translationen u_z (Abb. 86 - 89) ergeben sich unter Berücksichtigung der Bodenkoppelung höhere Beträge für die Amplituden, als bei Koppelung nur über die Schienen. Berücksichtigt man die allgemeine Erhöhung dieser Verschiebungen infolge Anwendung der exakten Theorie anstatt der früher verwendeten Näherungstheorie - die Erhöhungsfaktoren liegen je nach Frequenz und geometrischer

Z-KOMPONENTE

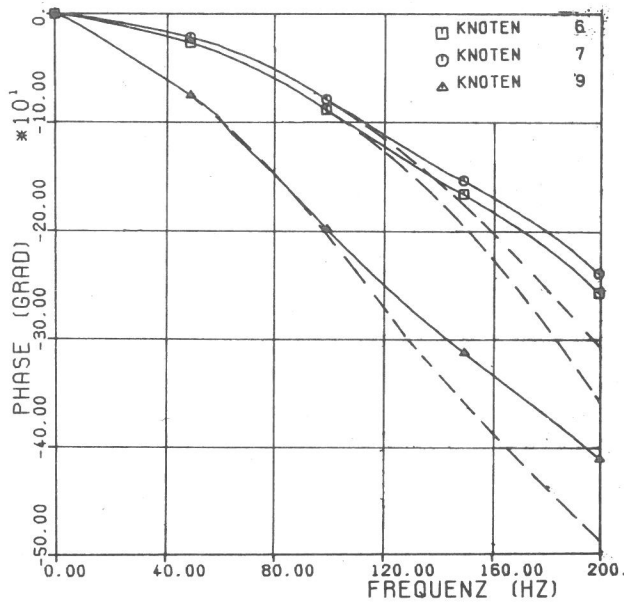
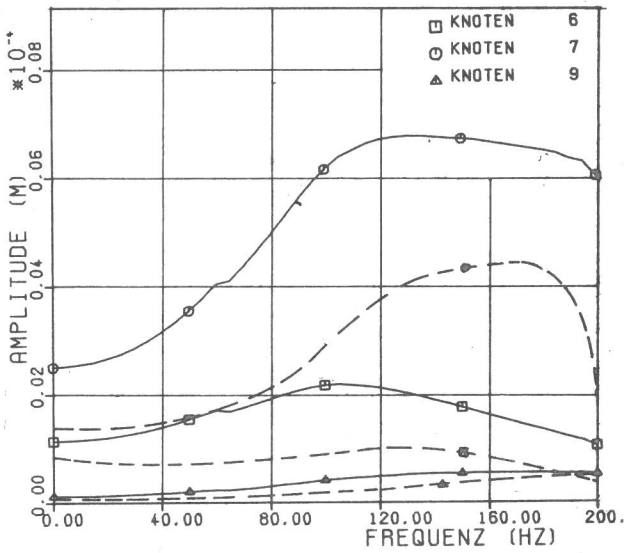


Abb. 87:

u_z -Translationen Knoten 6,7,9
(Schwelle 2)

Z-KOMPONENTE

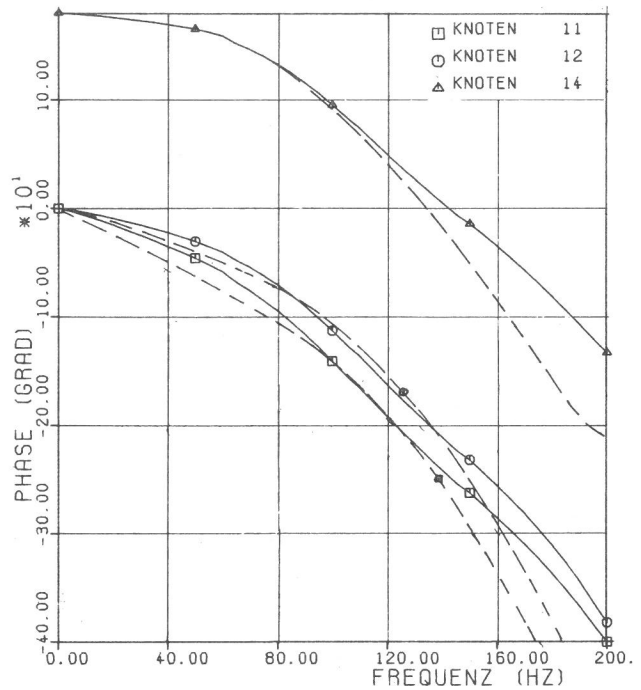
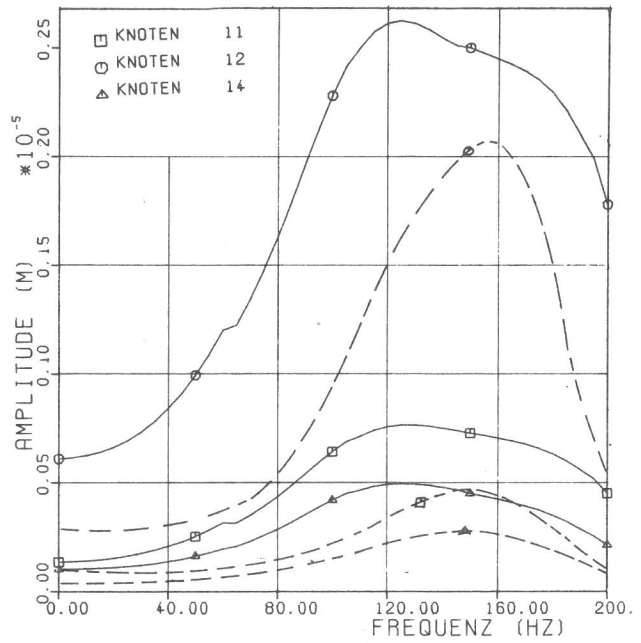


Abb. 88:

u_z -Translationen Knoten 11,12,14
(Schwelle 3)

Lage des betrachteten Schwellenpunktes zwischen 1.0-1.45, - so ergeben sich hier mit Berücksichtigung beider Kopplungen, Werte, die das 1.5 - 2.0 fache derjenigen Amplituden ohne Bodenkoppelung sind.

Der Koppelungsgrad der einzelnen Schwellen, der aus den Abb. 90 - 92 entnommen werden kann, nimmt mit wachsender Frequenz zu und erreicht für das Schwellenende und in der Schienenachse Werte von etwa 0.30 - 0.55 für die zweite,

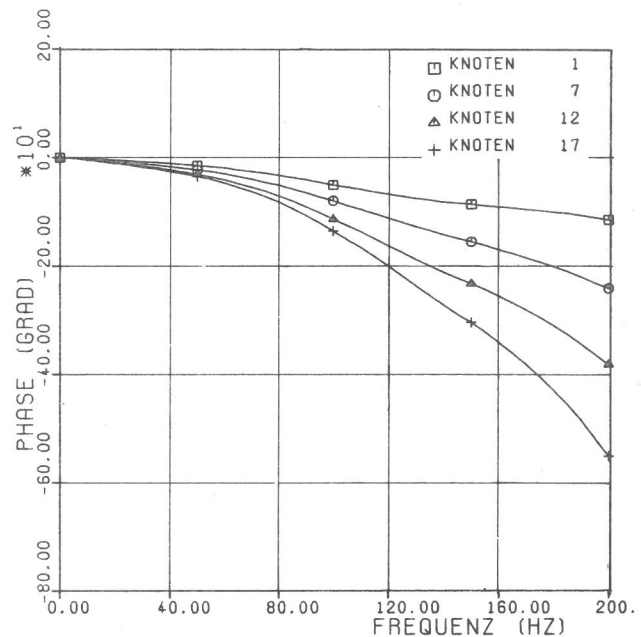
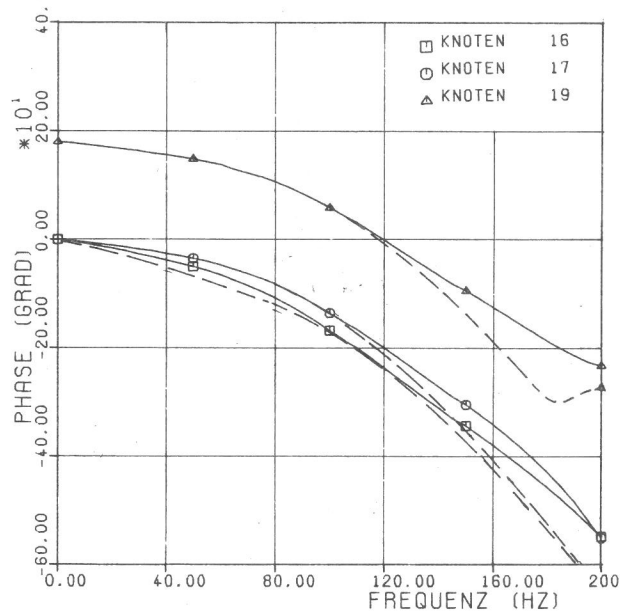
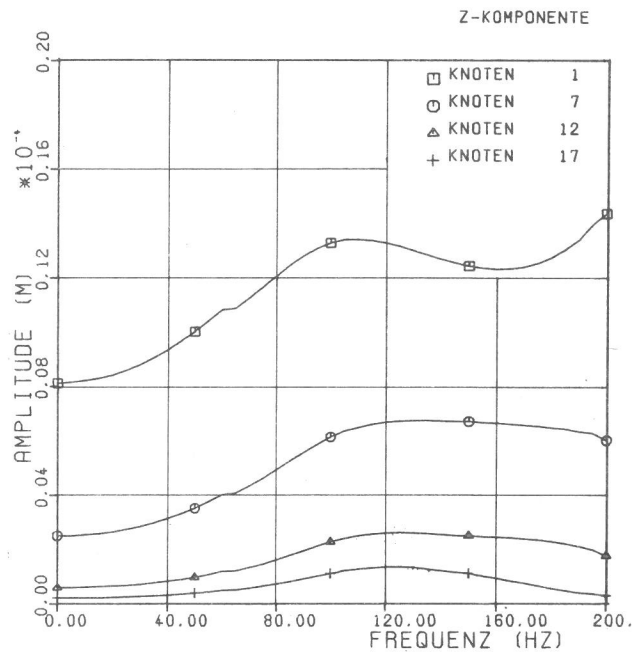
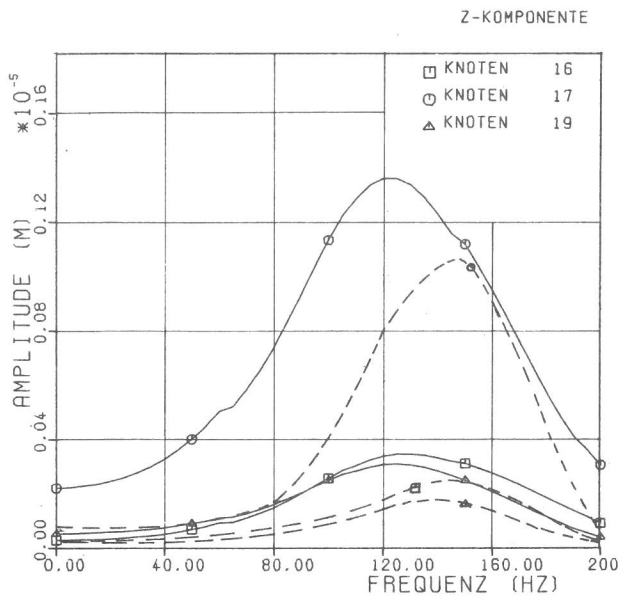


Abb. 89:

u_z -Translationen Knoten 16,17,19
(Schwelle 4)

Abb. 90:

u_z -Translationen Knoten 1,7,12,17
(Schwellenenden)

0.10 - 0.20 für die dritte und 0.05 - 0.10 für die vierte Schwelle. In Schwellenmitte dagegen wird ein Koppelungsgrad erreicht, der für die zweite Schwelle 0.10 - 0.80, für die dritte Schwelle 0.10 - 0.65 und für die vierte Schwelle 0.10 - 0.40, beträgt. Diese Werte liegen im Mittel bei den Werten, wie sie für die Systeme "starrer Schwellen" ermittelt wurden. (s. Abschnitt 9.6). Es ergeben sich aber auch Werte, insbesondere für weiter entfernte Schwellen im unteren Frequenzbereich, die teils erheblich kleiner sind als bei ausschließlicher Betrachtung der Bodenkoppelung.

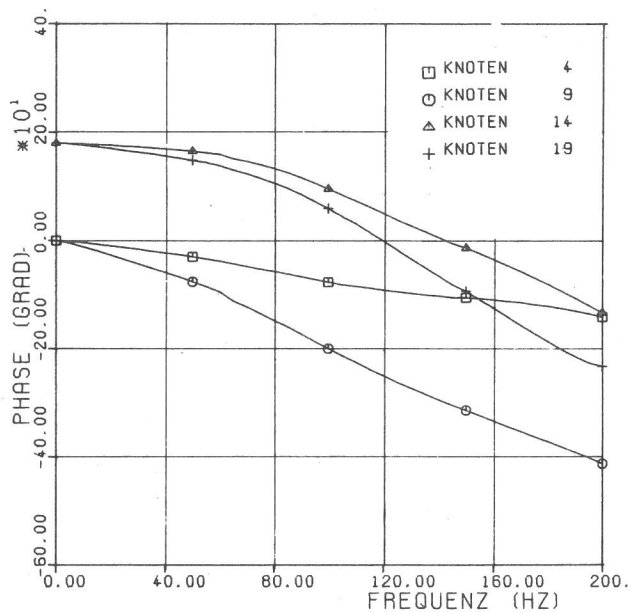
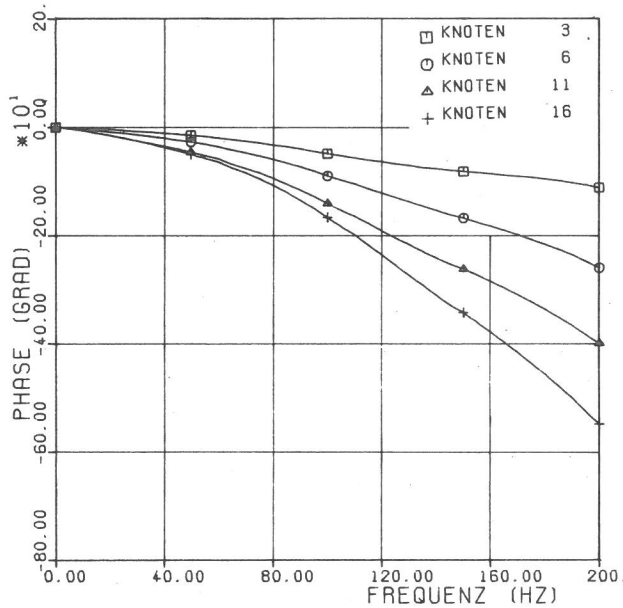
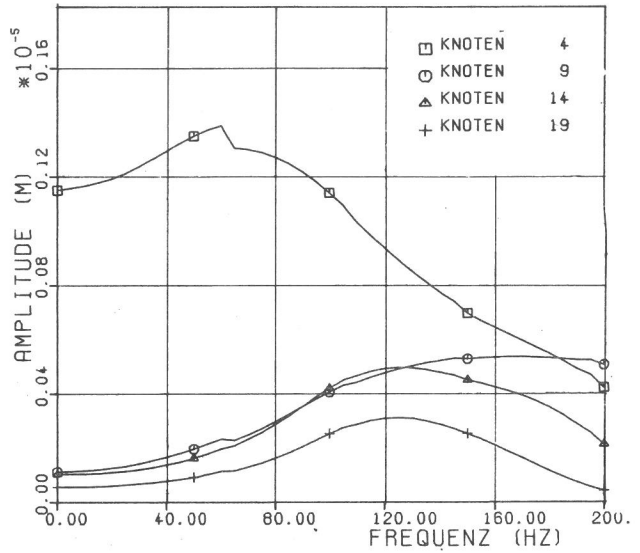
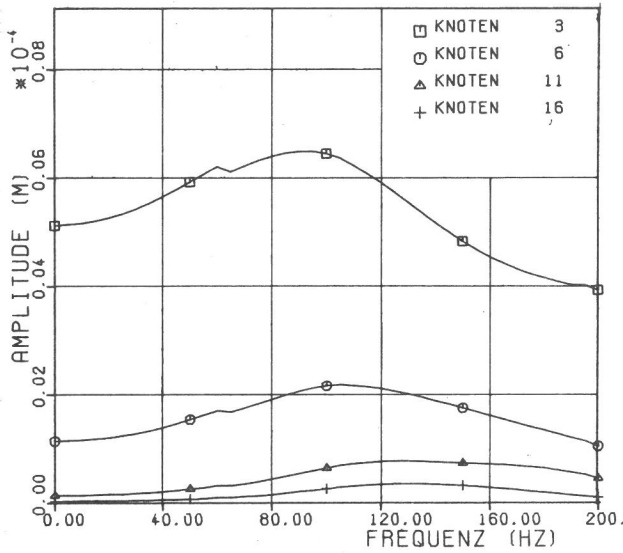


Abb. 91:

u_z -Translationen Knoten 3,6,11,16
(Schienenachse)

Abb. 92:

u_z -Translationen Knoten 4,9,14,19
(Schwellenmitte)

Dies könnte ihre Ursache darin haben, daß die Schienen die Koppelung über den Boden reduzieren. Wahrscheinlicher ist jedoch, darauf deuten die z.T. im Vergleich zu früheren Ergebnissen und zu den Ergebnissen der elastischen Schwelle sehr großen Verschiebungen in der Achse der Schienen hin, daß die Zusammenfassung der über die Schwellenfläche verteilten Steifigkeiten zu drei Einzelfedern und -dämpfern für dieses System (Koppelung über die Schienen) die Steifigkeit des Bodens unterschätzt. Infolge der Versteifung des Systems durch die Schienen findet die Lastabtragung

vorzugsweise in dem Bereich der Schwellen statt, an dem sich die Schienen befinden. Damit würde sich als geeigneteres Modell für dieses System ein System mit z.B. zwei Bodenfedern und -dämpfern im Bereich der Schienenauflagerung bzw. ein Modell mit mehreren Bodenfedern und -dämpfern, die im Bereich der Schienenauflagerung konzentriert sind, empfehlen. Vor einer abschließenden Wertung sind diese Ergebnisse jedoch vorerst mit Meßergebnissen zu überprüfen.

10. Zusammenfassung und Ausblick

Es war ein Ersatzsystem für die Dynamik eines Schienenschwellenrostes als Fahrbahn schnellfahrender Züge zu entwickeln, das sowohl die Koppelung über den Boden wie die Koppelung über die Schienen berücksichtigt. Dieses als "Rückwirkungsmodell" bezeichnete Ersatzsystem soll eine schwingungstechnische Optimierung des schienengebundenen Fahrzeugs im Hinblick auf die Fahrsicherheit und den Fahrkomfort bei hohen Geschwindigkeiten ermöglichen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zunächst die Einzelschwellen betrachtet. Für diese Systemkomponente wurden aus der Theorie des linear elastischen Halbraums auf analytischer Basis exakte Nachgiebigkeitsfunktionen für die Belastungsmoden vertikal und Rotation um beide horizontale Achsen einer Einzelschwelle berechnet. Zur Ermittlung dieser Nachgiebigkeitsfunktionen wurde eine neue Methode entwickelt, die von den Verschiebungsfeldern harmonisch variierender Einzellasten Gebrauch macht. Für die beiden horizontalen Belastungsmoden und Translationsmoden einer Schwelle wurden Näherungslösungen angegeben. Die Berechnungsmethode wurde danach auf ein System von mehreren starren Flächen erweitert. Damit wurde die Bodenkoppelungsmatrix für vertikale Belastung und Momentenbelastung um die lange Schwellenachse (quer zur Gleislängsrichtung) für Gründungssysteme mit 1 - 7 Schwellen errechnet. Die durch die angewendete analytische Methode nicht erfaßbaren Einflüsse, wie Einbettung der Schwellen in das Erdreich, sowie die Heterogenität des Bodens wurde näherungsweise berücksichtigt. Für die Schwellen und Schienen wurde ein dreidimensionales Ersatzsystem auf der Basis der fini-

ten Elemente entwickelt und die algorithmische Beschreibung angegeben. Zur Überprüfung des Ersatzsystems wurden die Teilsysteme starre Einzelschwelle, elastische Einzelschwelle, System starrer Einzelschwellen die über den Boden gekoppelt sind, sowie ein Schienenschwellenrost der sowohl über den Boden wie über die Schienen gekoppelt ist, in verschiedenen Belastungsmoden berechnet und mit Messungen verglichen. Der Vergleich ergab, daß die Theorie das Schwingungsverhalten der Teilsysteme "starre Einzelschwelle" und "elastische Einzelschwelle" in der Belastungsmode vertikal ausgezeichnet beschreibt. Für die Belastungsmode horizontal und Moment um die kurze Schwellenachse ist die Übereinstimmung befriedigend. Für die Koppelung über den Boden konnte für die vertikale Belastung ebenfalls sehr gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen festgestellt werden. Ein Vergleich für die berechnete Momentenbelastung um die lange Schwellenachse konnte wegen fehlender Meßergebnisse nicht durchgeführt werden.

Für vertikale Belastung einer Einzelschwelle ergeben sich für die Bodenkoppelung Werte von ca. 0.40 für die zweite, 0.26 für die dritte und 0.20 für die vierte Schwelle, bezogen auf die belastete Schwelle. Der Einfluß unbelasteter Nachbarschwellen auf den Amplitudenfrequenzgang einer belasteten Schwelle, kann dadurch beschrieben werden, daß sich eine Reihe von Amplitudenmaxima ausbilden, deren frequenzmäßige Lage und Ausprägung von der Anzahl der Schwellen, der Schwellenbreite, dem Abstand der Schwellen sowie den Steifigkeitsverhältnissen des Untergrundes bestimmt werden.

Den Abschluß bildete die Berechnung eines Schienen-Schwellenrostes der durch vertikale harmonische Einzellasten belastet wird. Ein Vergleich mit Messungen wurde hier ebenfalls nicht durchgeführt. Für den Koppelungsgrad k der einzelnen Schwellen ergaben sich je nach Bewegungsrichtung Werte von $k_y = 0.50 - 0.66$, $k_z = 0.30 - 0.55$ für die zweite Schwelle, $k_y = 0.20 - 0.30$, $k_z = 0.10 - 0.20$ für die dritte und $k_y = 0.10 - 0.15$, $k_z = 0.05 - 0.10$ für die vierte Schwelle. Der Vergleich mit früheren Ergebnissen bei denen nur die Schienenkoppelung berücksichtigt wurde, ergab, daß die

Koppelung über den Boden eine Amplitudenerhöhung um ca. den Faktor 1.5 - 2.5 bewirkt. Diese Werte können jedoch noch nicht als endgültig betrachtet werden, da eine Überprüfung der Rechenergebnisse mit Meßergebnissen noch nicht durchgeführt wurde.

Für die Ziele weiterer Untersuchungen ist zu unterscheiden nach Theorie und Experiment. Hinsichtlich theoretischer Untersuchungen sollten folgende Fragestellungen untersucht werden:

1. Ermittlung einer exakten Lösung für die Nachgiebigkeitsfunktionen einer Einzelschwelle in den beiden horizontalen Belastungs- und Bewegungsmoden sowie Ermittlung der Bodenkoppelungsmatrix für ein System mehrerer starrer masseloser Flächen in den Moden horizontale Translation in x- und y-Richtung sowie Rotation um die x-Achse. Mit diesen beiden Aktivitäten wird dann eine vollständige Lösung zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens einer Einzelschwelle und einem System von Schwellen in allen möglichen Belastungsmoden erreicht.
2. FE-Rechnungen zur Untersuchung relevanter Einflüsse für die Bestimmung eines äquivalenten Schubmoduls für die Bewegungsmoden der horizontalen Translationen und Rotationen um beide Achsen im Falle nichthomogener Untergrundverhältnisse. Mit der Methode der finiten Elemente könnten auch die Wellenfelder harmonisch variierender Einzellasten für Systeme mit variabler Untergrundsteifigkeit berechnet werden. Werden dann solchermaßen ermittelte Lösungen, anstatt der oben verwendeten Einzellastlösungen für den linear elastischen Halbraum in die Lösungsmethodik zur Ermittlung der Nachgiebigkeiten von Einzelschwellen und der Bodenkoppelung mehrerer Schwellen eingeführt, ist es praktisch möglich das Schwingungsverhalten eines Schienenschwellensystems auf beliebigem Untergrund zu berechnen.
3. Weitere theoretische Aktivitäten beinhalten Untersuchungen zur optimalen Modellierung eines Schienenschwellensystems. Insbesondere ist hier im Zusammenhang mit Messungen die notwendige Anzahl der diskreten Bodenfedern und -dämpfer genauer zu untersuchen.

4. Letzendlich ist ein Verfahren zu entwickeln, mit dem die Erschütterungsausbreitung seitlich des Fahrweges für beliebige Untergrundverhältnisse berechnet werden kann. Als Grundlage hierfür kann das in dieser Arbeit entwickelte Modell mehrerer starrer Schwellen verwendet werden.

Im experimentellen Teil weiterer Untersuchungen wären folgende Aktivitäten wertvoll:

1. Experimentelle Überprüfung der Antworten einer Einzelschwelle und eines Systems starrer Schwellen für horizontale Belastung und Momentenbelastung um die kurze Schwellenachse (φ_y -Richtung).
2. Ausmessen der Antworten eines Schienenschwellensystems infolge harmonischer Belastung in allen Belastungsmoden.
3. Statistische Untersuchungen zur Erschütterungsausbreitung seitlich der Fahrbahn unter verschiedenen geometrischen Randbedingungen (Ebene, Einschnitt, Damm) und Untergrundverhältnissen.

Nach Durchführung dieser Aktivitäten liegt ein vollständiges, experimentell abgesichertes Rechenmodell zur Beschreibung eines Schienenschwellensystems (bzw. auch einer festen Fahrbahn) auf elastischem Untergrund in allen Bewegungs- und Belastungsmoden vor. Reduzierung dieses Modells anhand numerisch durchgeführter Sensibilitätsuntersuchungen für relevante Freiheitsgrade führt dann letztendlich zu einem Modell, das im Sinne eines Mehrkörpersystems für weitere praktische Untersuchungen im Rollprüfstand bzw. in andere numerische Modelle zur Beschreibung des Gesamtsystems Fahrzeug- Fahrbahn eingeführt werden kann.

Literaturverzeichnis

- /1/ Hardin, B.O., V.P. Drnevich:
Shear modulus and damping in soils,
Techn. Report UKY 27-70 CE2 und CE3, University of
Kentucky, Lexington Kentucky, 1970
- /2/ Lysmer, J., T. Udaka, C.-F. Tsai, H.B. Seed:
Flush, a computer program for approximate 3-D analysis
of soil-structure interaction problems.
Report No. EERC 75-30, University of California,
Berkeley 1955
- /3/ Waas, G.:
Analysis method for footing vibrations through layered
media, US-Army-Engineer-Waterways Experiment Station, 1972
- /4/ Rucker, W.:
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienen-
gebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des
Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von
Erschütterungen in Tunnel und dessen Umgebung.
Diss. TU Berlin, 1979
- /5/ Holzlöhner, U.:
Zusammenstellung analytischer Lösungen
1. Techn. Bericht zum R/S Vorhaben TV 78172 Teil D, 1979
- /6/ Awojobi, A.O.:
Approximate solution of high-frequency-factor vibrations
of rigid bodies on elastic media.
Journal of Appl. Mech. Transact. ASME, 1972, 111-117
- /7/ Bycroft, G.N.:
Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-
infinite elastic space and on an elastic stratum.
Phil. Trans. Royal Soc., London Series A,
Vol. 248, 1956, 327-368
- /8/ Prange, B.:
Mechanische und dynamische Parameter des Untergrundes
der Versuchsstrecke Feld I,
1. Techn. Bericht zum R/S Vorhaben 78150 Teil B, 1979
- /9/ Rucker, W., U. Holzlöhner:
Abschätzung von Schichtung und Einbettung, Rechenprogramm
Einzelschwelle, Erweiterung des Rechenprogramms
3. Techn. Bericht zum R/S Vorhaben TV 78172 Teil D, 1980
- /10/ Hadjian, A.H., D. Niehoff, F. Guss:
Simplified soil-structure interaction analysis with
strain dependent soil properties
Nucl. Eng. Design 31, 1974, 218-233
- /11/ Beredugo, Y.O., M. Novak:
Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded
footings. Can. Geot. Journal, 1972, 477-497
- /12/ Warburton, G.B.:
Forced vibrations of a body on an elastic stratum.
Trans. ASME, J. Appl. Mech. 24, 1959, 55-58

- /13/ Luco, J.E. und R.A. Westmann:
Dynamic response of circular footings.
J.Eng.Mech.Div.ASCE 97, 1971, 1381-1395
- /14/ Veletsos, A.S. und Y.T.Wei:
Lateral and rocking vibrations of footing.
J.Soil Mech.Found.Div.ASCE 97, 1971, 1227-1248
- /15/ Luco, J.E.:
Impedance functions for a rigid foundation on a layered
medium.
Nuclear Eng. and Design 31, 1974, 204-217
- /16/ Karasudhi, P., L.M.Keer und S.L.Lee:
Vibratory motion of a body on an elastic half plane.
J.Appl.Mech.ASME 35, 1968, 697-705
- /17/ Oien, M.A.:
Steady motion of a rigid strip bonded to an elastic
half-space.
J.Appl.Mech.ASME 38, Ser.E, No. 2, 1971, 328-334
- /18/ Luco, J.E. und R.A. Westmann:
Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic
half-space.
J.Appl.Mech.ASME 39, 1972, 527-534
- /19/ Thomson, W.T. und T. Kobori:
Dynamical compliance of rectangular foundations on an
elastic half-space.
J.Appl.Mech.ASME 30, 1963, 579-584
- /20/ Kobori, T., R. Minai, T.Suzuki und K. Kusakabe:
Dynamical ground compliance of rectangular foundations
Proc.16th Japan Natl.Congress Appl.Mech., 1966
- /21/ Kobori, T., R. Minai und T.Suzuki:
Dynamic ground compliance of rectangular foundation on
an elastic stratum
Proc.2nd Japan Natl. Symp. Earthq.Engng, 1966, 261-266
- /22/ Lysmer, J.:
Vertical motion of rigid footings
Dept.of Civil Engineering Univ.of Michigan,Report to WES
Contract Report No. 3-115, 1965
- /23/ Wong, H.L. und J.E. Luco:
Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape.
Earthq.Eng.and Struct.Dyn.Vol.4, No.6, 1976, 579-587
- /24/ Savidis, S.A. und T.Richter:
Dynamic interaction of rigid foundations
9th ICSMFE, Tokyo, 1977
- /25/ Holzlöhner, U.:
Schwingungen des elastischen Halbraums bei Erregung
auf einer Rechteckfläche
Ing.Archiv 38, 1969, 370-379

- /26/ Holzlöhner, U.:
Vibrations of the elastic half-space due to vertical surface loads.
Earthq.Eng.and structural Dyn. Vol.8, 1980, 405-414
- /27/ Rücker, W.:
Ein einfaches und schnelles Verfahren zur Berechnung der dynamischen Reaktion starrer Fundamente beliebiger Form auf den Halbraum.
Amts- und Mitteilungsblatt, BAM Berlin, Heft 2, Juni 1981
- /28/ Holzlöhner, U.:
Behaviour of dynamically loaded building on the soil.
Int. Baugrundtagung Stockholm, 1981
- /29/ Pekeris, C.L.:
The seismic surface pulse
Proc. of the Nat.Acad.of Science Vol.41, 1955, 469-480
- /30/ Rücker, W.:
Entwicklung und Erstellung von Rechenprogramm für die starre und die elastische Schwelle auf den Boden und für ein Gleisstück mit Schienenkoppelung.
2.Tech.Bericht zu R/S Vorhaben TV 78172 Teil D, 1979
- /31/ Holzlöhner, U.:
The use of an equivalent homogeneous half-space in soil-structure interaction analysis
SMRT, Vol. M 10/3, Berlin 1980
- /32/ Zienkiewicz, O.S.:
The finite element method in engineering science
McGraw-Hill, London, 1971
- /33/ Matthees, W.:
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Belastung.
Diss. TU Berlin, 1980
- /34/ Kolar, V., J.Kratochvil, F. Leitner, A. Zenisek:
Berechnung von Flächen- und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente.
Springer Verlag, Wien, New York, 1975
- /35/ Kolsky, H.:
Stress waves in solids.
Dover Publications, Inc. New York, 1963
- /36/ Prange, B.:
Dynamisches Modell des einzelnen Gründungskörpers
2. Techn. Bericht zum R/S-Vorhaben TV 78150, Teil B, 1980
- /37/ Rücker, W.:
Messung der Reaktionen mehrerer Schwellen, die über den Untergrund gekoppelt sind, infolge harmonischer Erregung einer starren Schwelle in verschiedenen Erregermoden.
4. Techn. Bericht zum R/S Vorhaben TV 78172, Teil D, 1980

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/September 1968

Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/Juli 1970 (vergriffen)

Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebern
von Dr.-Ing. Götz Andreae

Nr. 3/September 1970 (vergriffen)

Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungseilen als Beispiel für Verbundbauteile
von Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 4/Dezember 1970 (vergriffen)

Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren
von Dr. rer. nat. Arno Burmester

Nr. 5/März 1971

Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
von Dr. rer. nat. Norbert Steiner

Nr. 6/April 1971

Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
von Prof. Dr.-Ing. Paul Schneider

Nr. 7/Juli 1971

Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Petrowitz

Nr. 8/November 1971

Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Helmut Veith

Nr. 9/November 1971

Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Möller

Nr. 10/Januar 1972

Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
von Dr.-Ing. Dietmar Aurich und Prof. Dr. phil. Erich Martin

Nr. 11/Februar 1972

Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Krause

Nr. 12/Mai 1972

Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
von Dir. u. Prof. Dr. rer. nat. Hubert Feuerberg

Nr. 13/Juni 1972

Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig (Berichter), Prof. Dr.-Ing. Kurt Kirschke, Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig und Dipl.-Phys. Harald Tischer

Nr. 14/Juli 1972

Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
von Eberhard Fischer

Nr. 15/August 1972

Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Heinz Pohl

Nr. 16/August 1972

Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
von Dr.-Ing. Erwin Knublauch

Nr. 17/August 1972

Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
von Dr.-Ing. Peter Reimers

Nr. 18/Januar 1973

Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 19/Januar 1973

Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. K. Kaffanke und Dr.-Ing. H. Czichos

Nr. 20/April 1973

Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 21/Juli 1973

Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. D. Klaffke und Dr.-Ing. W. Maennig

Nr. 22/Juli 1973

Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi und Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 23/November 1973

Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin

Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen

von Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Ruske

Nr. 24/November 1973

Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung

von Dipl.-Ing. J. Stanke, Ing. grad. E. Klement und Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 25/Dezember 1973

Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen

von Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 26/August 1974

Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen —

von Dipl.-Ing. P. Jost, Dr.-Ing. P. Reimers und Dr.-Ing. P. Weise

Nr. 27/August 1974

Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall

von Dr.-Ing. Hermann Wüstenberg

Nr. 28/August 1974

Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern

von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 29/August 1974

Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem Idealisotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall

von Prof. Dr.-Ing. P. Schneider

Nr. 30/September 1974 (vergriffen)

The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology

von Dr. Horst Czichos und Dr. Geert Salomon

Nr. 31/August 1975

Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung

von Dr.-Ing. Gerhard Fuhrmann

Nr. 32/September 1975

Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen

von Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Bernhard Böttcher

Nr. 33/November 1975

Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens

von Dipl.-Ing. Armin Wagner, Dipl.-Phys. Gerhard Kieper und Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 34/Januar 1976 (vergriffen)

Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoffen

von Dipl.-Forsting. Dr. rer. sylv. Hans-Joachim Deppe

Nr. 35/Januar 1976

Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren —

von Dipl.-Ing. Ernst Limberger

Nr. 36/Januar 1976 (vergriffen)

Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles

von Dipl.-Ing. Jürgen Hundt

Nr. 37/Februar 1976

Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren —

von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 38/Juni 1976

Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionitriertem Stahl 42 CrMo 4

von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig

Nr. 39/Juni 1976

Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newtonschem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung

von Prof. Dr.-Ing. K. Kirschke und Dipl.-Phys. G. Kempf

Nr. 40/Juni 1976

Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren

von Dr. rer. nat. H. Hantsche

Nr. 41/Okttober 1976

Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten

von Dr. rer. nat. Bernhard Böttcher

Nr. 42/Okttober 1976

Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft

von Dr.-Ing. Siegmund Dietlen

Nr. 43/Okttober 1976

Das Sprödbbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches

von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 44/November 1976

Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“

von Dipl.-Ing. W. Matthees

Nr. 45/Dezember 1976

Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten

von Dr.-Ing. W. Paatsch

Nr. 46/Mai 1977 (vergriffen)

Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung

Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses

von Dipl.-Ing. Gerald Schickert und Dipl.-Ing. Helmut Winkler

Nr. 47/Juni 1977

Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen

von Dr.-Ing. Arno Plank

Nr. 48/Okttober 1977

Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn

von Dr.-Ing. U. Holzlöhner

Nr. 49/Dezember 1977

Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung

von Dr.-Ing. Günther Wittig

Nr. 50/Juni 1978 (vergriffen)

Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern

von Prof. Dipl.-Phys. Norbert Czaika, Dipl.-Phys. Norbert Mayer, Dipl.-Ing. Claus Amberg, Dipl.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Götz Andrae und Dipl.-Ing. Winfried Markowski

Nr. 51/Juni 1978

Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen

von Dr. rer. nat. J. Sickfeld

Nr. 52/August 1978

Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung

von Dr.-Ing. Aleksandar Tomov

Nr. 53/Okttober 1978

Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge

von Rolf Günter Rohrmann und Reinald Rudolphi

Nr. 54/Okttober 1978

Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung

von Dr.-Ing. Harro Sander

Nr. 55/November 1978

Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung

von Dr.-Ing. Dieter Klaffke

Nr. 56/Januar 1979

Stabilität von Sandwichbauteilen

von Dipl.-Ing. W. Brünner und Prof. Dr.-Ing. C. Langli

Nr. 57/März 1979

Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung

Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing

von Dipl.-Ing. Meinhard Stadthaus

Nr. 58/März 1979

Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau

von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 59/Juli 1979

Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl

von Dr.-Ing. Günther Plauk

Nr. 60/August 1979

Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken

von Dr.-Ing. H. Spreckelmeyer, Dr.-Ing. R. Helms und Dr.-Ing. J. Ziebs

Nr. 61/Dezember 1979

Beschreibung von Problemen der höheren Farbmeterik mit Hilfe des Gegenfarbensystems

von Dr. Klaus Richter

Nr. 62/Dezember 1979

Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle

von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Gerisch und Prof. Dr. habil. Dr. h. c. Günther Becker

Nr. 63/Dezember 1979

Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase

von Dipl.-Ing. E. Behrend und Dipl.-Ing. J. Ludwig

Nr. 64/Februar 1980

Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung

von Dr.-Ing. Werner Rücker

Nr. 65/Februar 1980

Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte

von Dr.-Ing. Peter Schmidt, Dr.-Ing. Dietmar Aurich, Dr.-Ing. Rolf Helms, Dr.-Ing. Helmut Veith und Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 66/Mai 1980

Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung

von Dr. rer. nat. Martin Hattwig

Nr. 67/Mai 1980

Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees

Nr. 68/Mai 1980

Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik. Entwicklung eines volleukzentrischen Präzisions-Gonlometers
von Dr. rer. nat. Dieter Petersohn

Nr. 69/Juni 1980

Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitshüllen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt und Dipl.-Ing. Peter Brandl

Nr. 70/August 1980 (vergriffen)

Schwellenwerte beim Betondruckversuch
von Dr.-Ing. Gerald Schickert

Nr. 71/August 1980

Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und Dipl.-Ing. Götz Magiera

Nr. 72/September 1980

Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 73/November 1980

Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
von Dipl.-Ing. Peter Wegener

Nr. 74/November 1980

ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dipl.-Inform. Renate Müller

Nr. 75/November 1980

Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
von Dir. u. Prof. Dr. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 76/November 1980

Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig

Nr. 77/April 1981

Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
von Dipl.-Ing. Michael Gierloff und Dr.-Ing. Matthias Maultzsch

Nr. 78/September 1981

Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund
von Dr.-Ing. Werner Rucker