

ISBN 3-88314-265-4

Forschungsbericht 91

BUNDESANSTALT FÜR
MATERIALPRÜFUNG (BAM)

BERLIN

Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz

von Dr.-Ing. Michael Weber

April 1983

83 Seiten, 48 Abbildungen

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon 030/8104-1 Telex 183261 bamb d

Copyright © 1983 by Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Verlag und Vertrieb:
Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH
Postfach 10 11 10, 2850 Bremerhaven 1
Telefon 0471 /46093-95

Kurzfassung

Für unbewehrten Beton unter vorwiegend dreiaxialer Druckbeanspruchung wird ein Materialgesetz entwickelt, das Mikrorißbildung als Ursache der Nichtlinearität postuliert. Es teilt den Beton in einen linear-elastischen und einen nichtlinearen, durch Mikrorisse gestörten Anteil auf, die miteinander durchdrungen sind („Durchdringungsmodell“). Der Grad der Nichtlinearität wird bestimmt durch die Höhe der Beanspruchung, die sich an der Bruchspannungsglocke des Beton im dreidimensionalen Hauptspannungsraum orientiert.

Das Materialgesetz wird in ein Finite-Elemente-Verfahren eingebettet, welches das nichtlineare Gleichungssystem nach Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno löst. Das Erreichen des Gleichgewichtszustandes wird durch Minimierung der Restkräfte kontrolliert.

Eine Algorithmen- und Verfahrensstudie zeigt gute Kopplungseigenschaften zwischen Materialgesetz und Berechnungsverfahren. Das Materialgesetz wird an Würfeldruckversuchen der Bundesanstalt für Materialprüfung justiert. Als praktisches Anwendungsbeispiel wird eine Bogen-Gewichts-Staumauer unter Eigengewicht, Wasserdruck und eingepprägten Fundamentverschiebungen analysiert. Die Ergebnisse belegen die Eignung des methodischen Ansatzes für ein vereinfachtes Berechnungsverfahren.

Abstract

For plain concrete under predominantly triaxial compression a material law is developed which postulates microcracking to be the source of nonlinearity. It divides the concrete into a linear-elastic and a nonlinear part which is disturbed by microcracks, both of them penetrating each other („Penetration Model“). The degree of nonlinearity is determined by the amount of stress relating to the compressive failure envelope of concrete in threedimensional stress space.

The material law is embedded into a Finite Element procedure which solves the nonlinear equation system after Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Achievement of the equilibrium state is controlled by minimization of residual forces.

A study of algorithms and method shows good coupling characteristics between material law and overall system procedure. The material law is adjusted to cube pressure tests performed by the Bundesanstalt für Materialprüfung. As an example of practical application an arch-gravity-dam is analysed under dead load, water pressure, and specified boundary displacements. The results prove the usability of the methodical principle for a simplified calculation procedure.

Vorwort

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit bekam ich während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent im Fachgebiet Theoretische Methoden der Bau- und Verkehrstechnik an der TU Berlin.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. P. J. Pahl für sein engagiertes und kritisches Interesse, mit dem er im wissenschaftlichen Gespräch diese Arbeit gefördert und bereichert hat.

Ebenso danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. R. Damrath für wertvolle Hinweise und hilfreiche Unterstützung.

Herrn Professor Dipl.-Ing. P. Franke danke ich sehr für seine Kooperation und sein Interesse an dieser Arbeit.

Die Technische Universität Berlin und die Bundesanstalt für Materialprüfung haben mir Rechnerkapazität und zugehörige Dienstleistungen zur Verfügung gestellt.

Hierfür sei allen Beteiligten sowie auch allen, die diese Arbeit mit Aufmerksamkeit begleitet haben, sehr herzlich gedankt.

Frau Jutta Becke danke ich für das Schreiben des Manuskriptes sowie die außerordentlich sorgfältige Gestaltung.

Berlin, im Dezember 1982

Michael Weber

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bezeichnungen	IV — VI
1. Einleitung	1
2. Materialgesetz von Beton	2
2.1 Vorbemerkung	2
2.2 Bruchspannungsglocke	3
2.3 Beanspruchungszahl β	8
2.4 Gradient der Bruchspannungsglocke	9
2.5 Durchdringungsmodell	12
2.6 Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	17
3. Nichtlineares Berechnungsverfahren	20
3.1 Vorbemerkung	20
3.2 Quasi-Newton-Verfahren	21
3.3 Berechnung primärer Größen	28
3.4 Berechnung sekundärer Größen	32
4. Beispiele	35
4.1 Vorbemerkung	35
4.2 Algorithmen- und Verfahrensstudie	36
4.3 Materialgesetzstudie	43
4.4 Demonstrationsbeispiel Staumauer	54
5. Folgerungen	62
5.1 Bewertung des Materialgesetzes	62
5.2 Bewertung des nichtlinearen Berechnungsverfahrens	62
5.3 Interaktion der Algorithmen	63
6. Zusammenfassung	64
Anhang	
A1. Äquivalenz von Summenform und Produktform	65
A2. Invertierung von Produktformen	67
A3. Eigenwerte und Determinante der Matrix $I + vw^T$	69
A4. Symmetrie und Positiv-Definitheit von Produktformen	71
A5. Quadratische Termination von Produktformen	73
Literatur	79

Bezeichnungen

Allgemeines

a, b, c, A, B, C usw.	Skalare Größen
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ usw.	Vektoren
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ usw.	Matrizen
\mathbf{a}^T	Transponierter Vektor
\mathbf{A}^T	Transponierte Matrix
\mathbf{A}^{-1}	Inverse Matrix
a_i	Vektorelement oder Skalare Größe zur Iterationsstufe i
$\mathbf{a}_i, \mathbf{A}_i$	Vektor bzw. Matrix zur Iterationsstufe i
$a_{i,j}$	Matrizelement
$\bar{a}, \tilde{a}, \hat{a}, \mathbf{A}^*$ usw.	Physikalische Modifikation zu einer ohne Sonderzeichen geschriebenen Größe
$\frac{\partial}{\partial a}$	Ableitung nach einem Skalar
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}$	Ableitung nach einem Vektor
[]	Feldbegrenzung für Vektoren und Matrizen
I	Einheitsmatrix

Bruchspannungsglocke, Gradient

\mathbf{s}	kartesische Darstellung der Hauptspannungen
\mathbf{z}	zylindrische Darstellung der Hauptspannungen
\mathbf{R}	Rotationsmatrix im Hauptspannungsraum
$\mathbf{T}, \mathbf{t}, \mathbf{c}$	Bildungsgesetz Deviatorische Ebenen
$\mathbf{X}, \mathbf{r}, \mathbf{a}$	Bildungsgesetz Meridianebenen (Druckbereich)
$\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{i}, \mathbf{b}$	Bildungsgesetz Meridianebenen (Zugbereich)
\mathbf{s}_c	Hauptspannungszustand auf der Bruchspannungsglocke

β	Beanspruchungszahl
$F(\mathbf{s})$	Implizite Funktion der Bruchspannungsglocke
$\mathbf{g} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}$	Gradient der Bruchspannungsglocke
\mathbf{S}	Transformationsmatrix des Gradienten

Materialgesetz

\mathbf{E}_o	Elastizitätsmatrix
E_o	Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl
\mathbf{N}	von ν abhängiger Teil der Elastizitätsmatrix
\mathbf{E}_{ep}	nichtlinear-elastische Materialmatrix (allgemein)
$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T$	nichtlinear-elastische Materialmatrix (Durchdringungsmodell)
$\mathbf{E}_{To}, \mathbf{E}_{T1}$	Tangenten-Materialmatrix
\mathbf{E}_{so1}	Sekanten-Materialmatrix
p	Gefügeauflockerungsgrad
\mathbf{g}	Gradient einer Versagensfläche
\mathbf{s}	allgemeiner Spannungszustand
$d\mathbf{s}$	infinitesimaler Spannungszuwachs
$\Delta\mathbf{s}$	inkrementeller Spannungszuwachs
\mathbf{e}	allgemeiner Dehnungszustand
$d\mathbf{e}$	infinitesimaler Dehnungszuwachs
$\Delta\mathbf{e}$	inkrementeller Dehnungszuwachs
$d\mathbf{e}_e$	linear-elastischer Anteil
$d\mathbf{e}_p$	nichtlinear-elastischer Anteil
$\hat{\mathbf{E}}$	orthogonal anisotrope Materialmatrix
\mathbf{C}	Rotationsmatrix für Materialmatrizen

Berechnungsverfahren

K	Systemsteifigkeitsmatrix (allgemein)
K₀	Systemsteifigkeitsmatrix (Anfangs-Tangentenmatrix)
L , D	Zerlegungsfaktoren der Systemmatrix
p	Systembelastung
Δp	Lastinkrement
Δp^σ	Gleichgewichtskräfte
r	Restkräfte
f	Quadrat der Restkräfte
u	Systemverschiebung
Δu	Verschiebungszuwachs
Δū	Verschiebungszuwachs zur Schrittweite 1
s	Schrittweite
B	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen
v , w	BFGS-Vektoren
i	Iterationsstufenindex

1. Einleitung

Der technologische Fortschritt im Bauwesen steht zunehmend im Zeichen einer Öffnung nach Innen für wissenschaftliche Disziplinen untereinander. Die Weiterentwicklung klassischer Ingenieurtechnologie, die schnelle Entfaltung der Elektronischen Datenverarbeitung sowie der Austausch zwischen Theorie und Experiment führen zu einer gegenseitigen Befruchtung, die Lücken der Vergangenheit schließt und neue Felder für die Zukunft eröffnet.

Forschung im Bauwesen wird heute zunehmend getragen durch die Forderung nach mehr Sicherheit, sowie generell nach mehr Aussagekraft über bestehende Verhältnisse und Sicherheitsreserven in einem Bauwerk.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem dreidimensionalen Materialverhalten von unbewehrtem Beton im Druckbereich. Ziel der Arbeit ist es, Aussagen zum nichtlinearen statischen Tragverhalten von Beton rechnerisch zu gewinnen, durch vorhandene experimentelle Ergebnisse zu bestätigen und einer möglichen praktischen Anwendung zuzuführen. Dazu wird ein numerisches Materialmodell entwickelt, das in seinem methodischen Ansatz versucht, die als Hauptursache für die Nichtlinearität erkannte Mikrorißbildung durch einen einzigen Modellparameter zu beschreiben und zu verifizieren. Ein solches Vorgehen erlaubt eine klare Beurteilung der Wirklichkeitsnähe und führt im Falle der Akzeptanz zu einem vereinfachten Berechnungsverfahren für die Praxis.

Für die Durchführung der Arbeit wird umfangreiches Handwerkzeug benötigt. Das Materialmodell wird in ein Berechnungsverfahren nach der Methode der Finiten Elemente eingebettet. Dabei ergeben sich Fragen der Kopplung mit Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme. Es wird Bezug genommen auf den derzeitigen Stand der Technik und die Wechselwirkung zwischen Materialmodell und Berechnungsverfahren untersucht. Nach Sicherstellung der formalen Rechenfähigkeit wird in einer Materialgesetzstudie das Verhalten des Rechenmodells experimentellen Ergebnissen zu Würfeldruckversuchen an Betonprobekörpern gegenübergestellt.

Als möglicher Anwendungsfall für die statische Analyse von unbewehrtem Beton wird schließlich eine Bogen-Gewichts-Staumauer mit nichtlinearem Materialgesetz berechnet.

Die während der Durchführung dieser Arbeit anfallenden umfangreichen datentechnischen Aspekte schlagen sich in einem Programmsystem nieder, das in [36], [37] dokumentiert ist.

2. Materialgesetz von Beton

2.1 Vorbemerkung

Das nichtlineare Materialverhalten von Beton ist gekennzeichnet durch eine Vielzahl von Phänomenen statischer, dynamischer, thermischer, chemischer und zeitlicher Art, deren Erfassung mit hohem theoretischem und besonders praktischem Aufwand verbunden ist. Wirklichkeitsnahe Materialmodelle sind gekennzeichnet durch eine große Anzahl von Parametern, deren Quantifizierung nur mit geeigneten Testdaten möglich ist. Bei Einsatz von Materialmodellen im Rechner stellt sich zusätzlich die Frage der rechnerischen Effizienz im Verhältnis zur Aussagekraft der Ergebnisse. Im folgenden wird ein nichtlineares Materialmodell vorgeschlagen, das für quasistatische Berechnungen von Betonkörpern vorwiegend im dreiaxialen Druckzustand geeignet ist. Das Materialmodell zeichnet sich gleichermaßen durch einfache Formulierung, numerisch-verfahrensfreundliches Verhalten und gute Übereinstimmung mit Testdaten aus und wird daher gegenüber komplizierteren Modellen bevorzugt.

Nichtlineare Materialmodelle von Beton nehmen häufig Bezug auf die für Beton typische Bruchspannungsglocke [25], [31], [35] - die Einhüllende aller denkbaren Spannungszustände bis zum Bruch, deren prinzipielle Kenntnis heute zum Stand des Wissens gehört.

Über die Frage jedoch, welche analytischen Annahmen zur Nichtlinearität von Beton vor dem Bruch zu treffen sind, herrscht in der Literatur weitgehende Uneinigkeit. Hier reichen die Vorschläge von nichtlinearer Elastizität über Plastizität und Viskoplastizität bis hin zur vollständigen Aufspaltung aller denkbaren Phänomene und Darstellung im Oktaederspannungsraum [18], [19], [21], [35].

Es soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein, eine Wertung der verschiedenen Schulen vorzunehmen, die allein schon wegen unterschiedlicher Zielsetzung ihre Existenzberechtigung haben. Eben- sowenig ist beabsichtigt, zu der vorhandenen Vielfalt von Mate- rialmodellen ein weiteres hinzuzufügen. Im Mittelpunkt der Be- trachtung steht vielmehr die Wirkung eines einzigen, Nichtline- arität verursachenden Parameters, das Zusammenspiel des Modells mit einem modell - unabhängigen nichtlinearen Berechnungsverfah- ren, die rechnerische Effizienz sowie die Brauchbarkeit der Er- gebnisse.

Das im folgenden beschriebene Materialgesetz wird aufgrund sei- nes analytischen Ansatzes "Durchdringungsmodell" genannt. Es postuliert das Phänomen der kontinuierlichen Mikrorißbildung als Hauptursache für die Nichtlinearität. Mit Hilfe der Bruch- spannungsglocke als Versagensfläche wird eine Restriktionsbedin- gung für das Spannungs-Umlagerungsverhalten im Bruchzustand for- muliert, die über affine Teil-Versagensflächen auf Zustände vor dem Bruch ausgedehnt werden kann.

2.2 Bruchspannungsglocke

Das Festigkeitsverhalten von Beton unter dreiaxialer Druckbean- spruchung ist in den vergangenen Jahren Gegenstand umfangrei- cher experimenteller Untersuchungen gewesen [7], [15], [31]. Dabei wurden meist vollständige Spannungs - Dehnungs-Verläufe zu unterschiedlichen Laststrategien protokolliert und einer nach- folgenden Auswertung zugeführt. Während die Diskussion über die Nichtlinearität vor dem Bruch noch nicht abgeschlossen ist, kön- nen die Erkenntnisse über die Gestalt von Bruchspannungsglocken praktisch als gesichert gelten. Danach zeichnet sich die typi- sche Gestalt einer Bruchspannungsglocke u.a. durch folgende Merkmale aus:

- dreifache Symmetrie bezüglich der Raumdiagonale des Haupt- spannungsraumes (Äquisektrix),
- Konvexität (zumindest im Druckbereich),
- Kontinuität und Knickfreiheit.

Das hier gewählte algebraische Interpolationsmodell einer Bruch- spannungsglocke berücksichtigt die obigen Merkmale, wobei Kon-

vexität sowohl im Druck- wie im Zugbereich angenommen wird. Die Gültigkeit der Bruchspannungsglocke ist an folgende weitere Voraussetzungen geknüpft:

- Der Bruchzustand läßt sich als Funktion der Hauptspannungen darstellen (Raumfläche im Hauptspannungsraum).
- Die Bruchfunktion stellt eine obere Schranke aller denkbaren Spannungszustände dar, die sich zu einer bestimmten Referenz-Belastungszeit erzielen lassen.
- Die Bruchfunktion gilt im Mittel für alle denkbaren quasi-statischen Spannungspfade unter kurz- bis mittelfristiger Belastungsdauer (z.B. Zeiträume von Minuten).
- Langzeitliche, dynamische, thermische und sonstige Einflüsse werden ausgeschlossen.

Das algebraische Interpolationsmodell setzt sich aus insgesamt fünf Ansätzen (algebraische Gleichungen 2. Grades) zusammen, die in Meridian- und deviatorischen Ebenen der Bruchspannungsglocke formuliert und in Übergangspunkten miteinander verknüpft sind (siehe Bild 2.1). Als Stützpunkte dienen sieben Spannungspunkte A bis G, die z.B. über die in Bild 2.2 zusammengestellten Spannungspfade experimentell ermittelt werden können. Sind diese bekannt, so lassen sich nach Koordinatentransformation aus den Hauptspannungskordinaten $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ in geeignetere Polarkordinaten x, r, ϕ alle benötigten Koeffizienten der algebraischen Bildungsgesetze numerisch festlegen.

Die Koordinatentransformation besteht aus zwei Schritten:

Schritt 1: (Rotation)

$$\mathbf{R} \mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} \quad , \quad (2.1)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(s_1, \sigma_1) & \cos(s_1, \sigma_2) & \cos(s_1, \sigma_3) \\ \cos(s_2, \sigma_1) & \cos(s_2, \sigma_2) & \cos(s_2, \sigma_3) \\ \cos(s_3, \sigma_1) & \cos(s_3, \sigma_2) & \cos(s_3, \sigma_3) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad ,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = Koordinaten des Hauptspannungsraumes,
 s_1 = Raumdiagonale des Hauptspannungsraumes,
 $s_2 \perp s_1$ in der Meridianebene zu σ_1 und s_1 ,
 $s_3 \perp s_1, s_2$ im Sinne eines Rechtssystems.

Schritt 2: (Polarkoordinaten)

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \sqrt{s_2^2 + s_3^2} \\ \arctan(s_3/s_2) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

In den deviatorischen Ebenen gilt die Ellipsengleichung:

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{c_4 \cos^2 \theta - c_3} - c_2 \cos \theta}{1 + (c_1 - 1) \cos^2 \theta}, \quad (2.3)$$

wobei die Koeffizienten c_1 bis c_4 jeweils für eine bestimmte deviatorische Ebene aus zugehörigen Stützradien ermittelt werden:

$$\mathbf{Tc} = \mathbf{t}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_2 & 2 & 0 \\ r_2^2 & 4r_2 & 4 \\ r_1^2 & 2r_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} r_2 \\ -3r_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= c_2^2 - c_1 c_3 + c_3, \\
 r_1 &= \text{Stützradius 1 (z.B. P-E oder Q-G)}, \\
 r_2 &= \text{Stützradius 2 (z.B. P-D oder Q-F)}, \\
 \theta &= \phi - \pi/3 \quad (\text{siehe Bild 2.1}).
 \end{aligned}$$

Insgesamt werden drei deviatorische Stützebenen durch die Punkte P, Q sowie - nach Errechnung einiger Hilfsdaten - durch C aufgestellt. Diese Stützebenen dienen zur Aufsattelung eines parabolischen Bildungsgesetzes im Druckbereich für beliebige Meridianebenen, in Bild 2.1 z.B. die Parabeln B-D-F-H oder C-E-G-K.

Alle Parabeln folgen dem Ansatz:

$$r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (2.5)$$

mit den Koeffizienten a_0, a_1, a_2 , die wie folgt zu bestimmen sind:

$$\mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_c & x_c^2 \\ 1 & x_p & x_p^2 \\ 1 & x_q & x_q^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_c \\ r_p \\ r_q \end{bmatrix}$$

x_c, x_p, x_q = x-Koordinaten der Punkte C, P, Q,
 r_c, r_p, r_q = r-Koordinaten der Punkte C, P, Q.

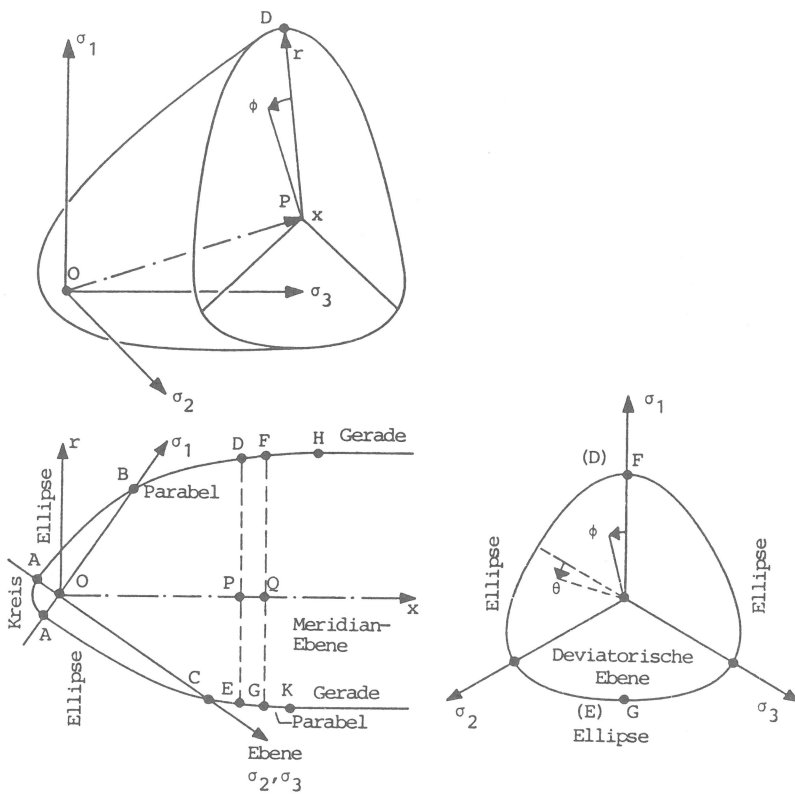


BILD 2.1 Bruchspannungsglocke mit Interpolationsmodell

Aus numerischen Gründen (siehe Abschnitt 2.3, Bild 2.3) wird eine Schätzung für die Gestalt der Bruchspannungsglocke im Bereich sehr hoher hydrostatischer Druckzustände benötigt. Die wahre Gestalt kann experimentell derzeit nicht ermittelt werden, da es keine Prüfmaschinen gibt, die die hierzu erforderlichen hohen Drucklasten erzeugen könnten. Bis auf weiteres wird angenommen, daß die Glocke sich in Richtung der Äquisektrix öffnet. Für ihre Gestalt im Öffnungsbereich wird eine prismatische Verlängerung beginnend an den Scheitelpunkten H bzw. K des Parabelbereiches gewählt.

Stützpunkt	zugehöriger Spannungspfad		
A	O - A	$\sigma_1 < 0$	einaxial Zug
B	O - B	$\sigma_1 > 0$	einaxial Druck
C	O - C	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$	zwei axial Druck
D	O - P	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$	hydrostatisch
	P - D	$\Delta\sigma_1 > 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = -\frac{\Delta\sigma_1}{2}$	deviatorisch
E	O - P	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$	hydrostatisch
	P - E	$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 > 0, \Delta\sigma_3 = -2\Delta\sigma_1$	deviatorisch
F	O - Q	(analog D)	hydrostatisch
	Q - F		deviatorisch
G	O - Q	(analog E)	hydrostatisch
	Q - G		deviatorisch

BILD 2.2

Stützpunkte des Interpolationsmodells und zugehörige Spannungspfade für ihre experimentelle Bestimmung

Das Bildungsgesetz lautet:

$$r = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \quad (2.7)$$

a_0, a_1, a_2 = Parabelkoeffizienten,

r = r-Koordinate eines Parabelscheitelpunktes.

Im reinen Zugbereich wird Kugelgestalt der Bruchspannungsglocke angenommen, wobei der Kugelradius der einaxialen Zugfestigkeit entspricht.

Als letzte zu schließende Lücke innerhalb der Glocke bleibt der Zug-Druckbereich übrig, in Bild 2.1 dargestellt durch den Bogen A-B bzw. A-C. Obwohl hierfür in der Literatur teilweise konkave Bruchkurven angegeben worden sind (z.B. experimentelle Ergebnisse in [19]), soll hier aus Gründen einheitlicher Formulierung ebenfalls ein konvexer Verlauf postuliert werden. Dieses wird durch eine Ellipsengleichung wie folgt erreicht:

$$r(x) = \frac{\sqrt{b_3 - (b_1 b_3 - b_2^2)(x-x_0)^2} - b_2(x-x_0)}{b_3} + r_0 \quad (2.8)$$

Darin werden die Koeffizienten b_1, b_2, b_3, x_0, r_0 mit Hilfe von Übergangsbedingungen an den Schnittstellen zum sphärischen bzw. parabolischen Meridianbereich ermittelt:

$$\bar{\mathbf{X}} \mathbf{b} = \mathbf{i}, \quad (2.9)$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{r}_1 + \bar{x}_1 \bar{r}_1' & \bar{r}_1 \bar{r}_1' \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 \bar{r}_1 & \bar{r}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 \bar{r}_2 & \bar{r}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_1 = x_{\dot{u}1} - x_0,$$

$$\bar{r}_1 = r_{\dot{u}1} - r_0,$$

$$\bar{r}_1' = r_{\dot{u}1}' ,$$

$$\bar{x}_2 = x_{\dot{u}2} - x_0,$$

$$\bar{r}_2' = r_{\dot{u}2}' ,$$

$$x_0 = \frac{r_{\dot{u}2} - r_{\dot{u}1} + r_{\dot{u}2}' x_{\dot{u}1} - r_{\dot{u}1}' x_{\dot{u}2}}{r_{\dot{u}2}' - r_{\dot{u}1}'},$$

$$r_0 = r_{\dot{u}2}' (x_0 - x_{\dot{u}1}) + r_{\dot{u}1}.$$

Die in diesen Formeln auftretenden Größen x_0 , r_0 stellen die Mittelpunktskoordinaten der Zug-Druck-Ellipse dar. Die mit $\dot{u}1$ und $\dot{u}2$ indizierten Größen sind die Koordinaten und Steigungen der Übergangspunkte zum Kreisbogen bzw. zur Parabel, in Bild 2.1 z.B. die Punkte A und B oder A und C. Zur weiteren Erläuterung sei darauf hingewiesen, daß alle diese Größen sich mit Drehung der Meridianebenen ändern, d.h. stets für eine aktuell gültige Meridianebene berechnet werden müssen.

2.3 Beanspruchungszahl β

Im Rahmen des hier postulierten nichtlinearen Materialgesetzes von Beton hat die relative Nähe eines Spannungspunktes S im Hauptspannungsraum (siehe Bild 2.3) zur Bruchgrenze maßgebenden Einfluß auf die Nichtlinearität. Diese relative Nähe wird hier definiert als "Beanspruchungszahl" β . Ihre Berechnung erfolgt für einen bestimmten Spannungspunkt S bei Kenntnis der Bruchspannungsglocke (siehe Abschnitt 2.2) durch:

$$\beta = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}_c\|}, \quad (2.10)$$

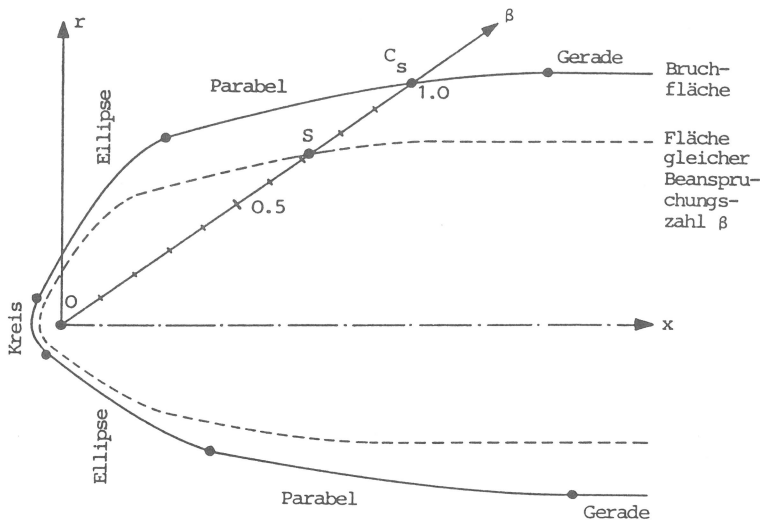


BILD 2.3

Beanspruchungszahl β zum Spannungspunkt S

wobei \mathbf{S} der aktuelle Spannungszustand am Punkt S und \mathbf{S}_C der durch geradlinige Verlängerung des Vektors $\mathbf{O} - \mathbf{S}$ erreichte Punkt \mathbf{C}_S auf der Bruchspannungsglocke ist (siehe Bild 2.3).

Die rechnerische Ermittlung von β ist in [36] ausführlich dokumentiert. Sie erfolgt, indem zunächst die Meridianebene des Punktes S festgestellt und die dort geltenden Bruchkurven mit ihren Interpolations-Koeffizienten zur Verfügung gestellt werden. In Abhängigkeit vom jeweils geltenden Kurvenabschnitt (Kreis, Ellipse, Parabel, Gerade) wird der Schnittpunkt mit der Verlängerung von $\mathbf{O} - \mathbf{S}$ gesucht und schließlich β nach (2.10) berechnet.

Aus Bild 2.3 wird deutlich, daß alle Spannungspunkte S des Hauptspannungsraumes, die die gleiche Beanspruchungszahl β besitzen, eine zur Bruchspannungsglocke affine Fläche beschreiben.

Definitionsgemäß ist β für alle zulässigen Spannungspunkte unterhalb der Bruchgrenze eine Zahl zwischen 0 und 1. Auf der Bruchspannungsglocke ist $\beta = 1$. Für andere Spannungszustände, die numerisch auftreten können, aber physikalisch unzulässig sind, ist β größer als 1.

Die Verwendung von β für das nichtlineare Verhalten von Beton vor dem Bruch ist in Abschnitt 2.5 beschrieben.

2.4 Gradient der Bruchspannungsglocke

Die in Abschnitt 2.2 beschriebene Bruchspannungsglocke dient im Rahmen eines nichtlinearen Materialgesetzes als Versagensfläche,

mit der eine Restriktion für das Spannungs - Umlagerungsverhalten formuliert werden kann. Dieses soll hier geschehen, wobei gleichzeitig die Gültigkeit der Drucker'schen Normalitätsregel [10], [28], [38] vorausgesetzt wird. Für analytische Formulierungen dieser Art wird der Gradient der Versagensfläche benötigt. Hier wird nun der Gradient auf die Bruchspannungsglocke bezogen und richtungsgleich auf alle innenliegenden affinen Flächen (siehe Bild 2.3, Bild 2.4) angewendet. Die Berechnung des Gradienten ist in [36] in algorithmischer Reihenfolge behandelt. Wird die Bruchspannungsglocke (Abschnitt 2.2) allgemein durch die implizite Funktion

$$F(\mathbf{S}) = 0 \quad (2.11)$$

dargestellt, so ist ihr Gradient:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.12)$$

Zweckmäßigerweise wird auch hier in Polarkoordinaten transformiert:

$$\mathbf{S} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \sigma_1 & \partial r / \partial \sigma_1 & \partial \phi / \partial \sigma_1 \\ \partial x / \partial \sigma_2 & \partial r / \partial \sigma_2 & \partial \phi / \partial \sigma_2 \\ \partial x / \partial \sigma_3 & \partial r / \partial \sigma_3 & \partial \phi / \partial \sigma_3 \end{bmatrix} ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \partial F / \partial x \\ \partial F / \partial r \\ \partial F / \partial \phi \end{bmatrix} , \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \partial F / \partial \sigma_1 \\ \partial F / \partial \sigma_2 \\ \partial F / \partial \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{g} .$$

Da \mathbf{S} ähnlich wie in (2.1), (2.2) zwei Transformationsschritte umfassen muß, gilt - wie sich zeigen läßt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2/r & -s_3/r^2 \\ 0 & s_3/r & s_2/r^2 \end{bmatrix} , \quad (2.14)$$

\mathbf{R} = Rotationsmatrix wie in (2.1),
 s_2, s_3, r = Koordinaten eines Spannungspunktes
im rotierten bzw. Polar-System.

Um den Gradienten an jeder Stelle der Bruchspannungsglocke zu erhalten, muß (2.11) für jeden Bereich des Interpolationsmodells aufgestellt und gemäß (2.13) differenziert werden. So gilt für den Parabelbereich des Druckspannungsoktanten der Glocke (siehe Bild 2.4) unter Bezugnahme auf (2.5):

$$\begin{aligned}
 F(x, r, \phi) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - r = 0, & (2.15) \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= a_1 + 2a_2 x, \\
 \frac{\partial F}{\partial r} &= -1, \\
 \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial a_0}{\partial \theta} + \frac{\partial a_1}{\partial \theta} x + \frac{\partial a_2}{\partial \theta} x^2.
 \end{aligned}$$

Im Geradenbereich des Druckspannungsoktanten folgt aus (2.7):

$$\begin{aligned}
 F(x, r, \phi) &= a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} - r = 0, & (2.16) \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial F}{\partial r} &= -1, \\
 \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial a_0}{\partial \theta} - \frac{a_1}{2a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \theta} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 \frac{\partial a_2}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

Für den reinen Zugbereich (siehe Bild 2.4) gilt mit dem Kugelradius ρ :

$$\begin{aligned}
 F(x, r, \phi) &= x^2 + r^2 - \rho^2 = 0, & (2.17) \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 2r, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0.
 \end{aligned}$$

Bei dem gemischten Zug-Druck-Bereich ist es nicht lohnend, die Gradientenkomponente $\partial F/\partial \phi$ exakt zu bestimmen, zumal dieses nur mit hohem Rechenaufwand möglich ist. Stattdessen wird für $\partial F/\partial \phi$ linear bezüglich der Übergangspunkte interpoliert. Es folgt mit (2.8):

$$\begin{aligned}
 F(x, r, \phi) &= b_1(x-x_0)^2 + 2b_2(x-x_0)(r-r_0) + b_3(r-r_0)^2 - 1 = 0, & (2.18) \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 2b_1(x-x_0) + 2b_2(r-r_0), \\
 \frac{\partial F}{\partial r} &= 2b_2(x-x_0) + 2b_3(r-r_0), \\
 \frac{\partial F}{\partial \phi} &\approx \frac{x-x_{\dot{u}1}}{x_{\dot{u}2}-x_{\dot{u}1}} * \left(\frac{\partial a_0}{\partial \theta} + \frac{\partial a_1}{\partial \theta} x_{\dot{u}2} + \frac{\partial a_2}{\partial \theta} x_{\dot{u}2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

In (2.15) bis (2.18) treten Ableitungen der Parabelkoeffizienten a_0, a_1, a_2 nach dem Winkel θ (siehe Bild 2.1) auf, die sich wie folgt berechnen:

$$\mathbf{X} \mathbf{a}_\theta = \mathbf{r}_\theta, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{X} \text{ siehe (2.6), } \mathbf{a}_\theta = \begin{bmatrix} \partial a_0 / \partial \theta \\ \partial a_1 / \partial \theta \\ \partial a_2 / \partial \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} \partial r_C / \partial \theta \\ \partial r_P / \partial \theta \\ \partial r_Q / \partial \theta \end{bmatrix}.$$

Darin sind \mathbf{r}_θ die Ableitungen von (2.3) bezüglich drei deviatorischer Stützebenen durch C, P, Q (siehe Bild 2.1) und für eine durch θ festgelegte Meridianebene.

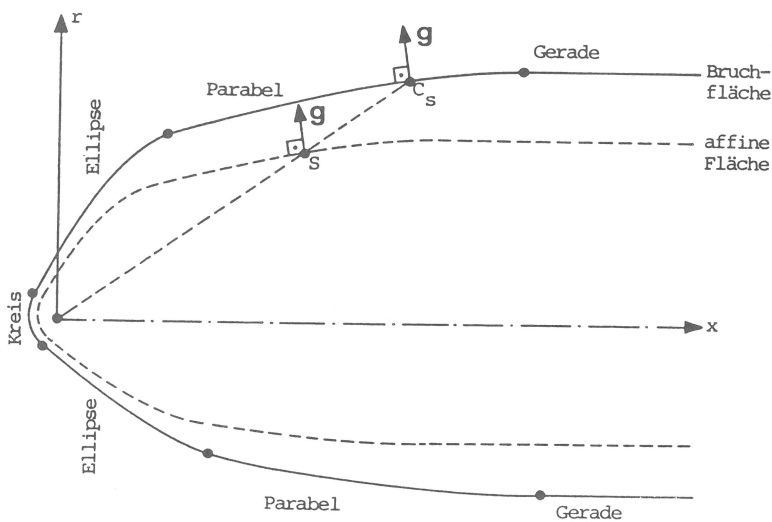


BILD 2.4

Gradient \mathbf{g} der Bruchspannungsglocke zum Spannungspunkt S bzw. C_S

2.5 Durchdringungsmodell

Die vielfältigen Ursachen der Nichtlinearität von Beton sind in der Literatur bis heute Gegenstand umfangreicher phänomenologischer Betrachtungen [24], [30], [32]. Es ist jedoch eine Frage der Grundsatzentscheidung, ob Materialmodelle in ihrer Tendenz umfassend oder vereinfachend sein sollen. Die vorliegende Arbeit geht im Hinblick auf nur beschränkt vorhandene Testdaten den letzteren Weg.

Als Hauptursache für die Nichtlinearität des Beton vor dem Bruch wird hier kontinuierliche Mikrorißbildung angesehen. Gleichzeitig wird postuliert, daß andere Einflüsse von untergeordneter Bedeutung für die Nichtlinearität sind und vernachlässigt werden können. Insbesondere werden Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl konstant gesetzt. Trotz dieser Einschränk-

kungen ist es möglich, ein stetig gekrümmtes und knickfreies Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton rechnerisch herzustellen. Dieses wird erreicht durch das nachfolgend beschriebene "Durchdringungsmodell". Erste Ansätze, die in die hier verfolgte Richtung weisen, sind in [23], [26] zu finden, wo durch Schichtenmodelle mit individuellem Materialverhalten der einzelnen Schichten ein multilineares Verhalten erzeugt wird.

In dieser Arbeit wird die Idee verwirklicht, ein vollkommenes Modell mit quasi unendlich vielen überlagerten Schichten aufzubauen. Da die Überlagerung dreidimensional ist, wird hier der Begriff Durchdringung gebraucht. Das Modell ist in Bild 2.5 gezeigt und wird im folgenden analytisch entwickelt.

Im unbelasteten Anfangszustand ist der Beton homogen und isotrop und folgt der linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{E}_0 d\mathbf{e}, \quad (2.20)$$

$d\mathbf{s}$ = Spannungszuwachs,

$d\mathbf{e}$ = elastischer Dehnungszuwachs,

$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{N}$ = Elastizitätsmatrix,

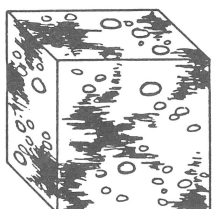
$$\mathbf{N} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$\mu = \frac{1-2\nu}{2},$$

E_0 = Anfangstangenten-Elastizitätsmodul,

ν = Querkontraktionszahl.

Realkörper:



gestörte Zone
(Mikrorisse-Netz, örtliche
Gefügauflockerung)

Modell:

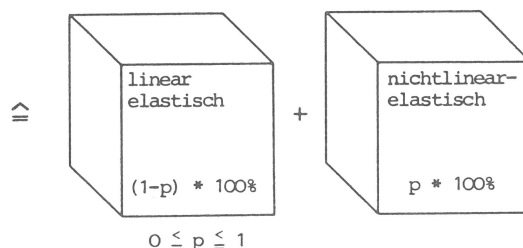


BILD 2.5

Durchdringungsmodell eines durch Gefügauflockerung teilweise gestörten Betonkörpers mit vollelastischem Rest-Körper

E_0 und ν bleiben während der Berechnung konstant. Nach dem Aufbringen des ersten infinitesimalen Spannungs-Dehnungs-Zuwachses $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{e}$ setzt in diesem Modell bereits der Prozeß der Mikrorißbildung ein. Dieser führt dazu, daß örtliche Zonen des Beton gestört sind und sich nicht mehr linear-elastisch verhalten. Fortschreitende Belastung bewirkt die Ausbildung eines Mikrorisse-Netzes, Gefügebrauchlockerung und schließlich vollständige Gefügezerstörung. Das zu diesem Prozeß gehörige nichtlinear-elastische Spannungs-Dehnungs-Gesetz wird zunächst für den Bruchzustand entwickelt und dann auf Zustände vor dem Bruch erweitert. Es beruht auf der Annahme, daß gebrochener Beton im dreiaxialen Druckzustand beliebige Gestaltänderungen, aber keine beliebigen Spannungsänderungen mehr aufnehmen kann.

(Unter Zug fällt der Beton ganz aus. Dieser Fall ist jedoch in der vorliegenden Arbeit von untergeordneter Bedeutung).

Für den Bruchzustand teilt sich der Dehnungszuwachs $d\mathbf{e}$ in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil auf:

$$d\mathbf{e} = d\mathbf{e}_e + d\mathbf{e}_p = \mathbf{E}_0^{-1} d\mathbf{s} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} k, \quad (2.21)$$

$d\mathbf{e}$ = vollständiger Dehnungszuwachs,

$d\mathbf{e}_e$ = linearer Anteil,

$d\mathbf{e}_p$ = nichtlinearer Anteil,

\mathbf{E}_0 = Elastizitätsmatrix,

$d\mathbf{s}$ = Spannungszuwachs,

$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{g}$ = Gradient der Bruchspannungsglocke $F(\mathbf{s})=0$,
 k = zu bestimmende Konstante.

Die in (2.21) auftretende Bruchspannungsglocke $F(\mathbf{s}) = 0$ ist im Rahmen dieser Arbeit allein eine Funktion der Hauptspannungen. Drehungen des Hauptspannungszustandes sowie weitere Parameter bleiben mangels Testdaten hier unberücksichtigt. Die Bruchspannungsglocke liefert als Versagensfläche eine Restriktionsbedingung für Spannungsänderungen nach Erreichen des Bruchzustandes. Totale Differentiation ergibt:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}^T} d\mathbf{s} = 0, \quad (2.22)$$

d.h. Spannungsänderungen infolge weiterer Belastung sind nur noch in der Versagensfläche selbst möglich. Nun wird vorausgesetzt, daß für Beton das Stabilitätskriterium von Drucker für "Indifferentes Materialverhalten im Kleinen" gilt [10], [28]:

$$d\mathbf{e}_p^T d\mathbf{s} = 0. \quad (2.23)$$

Das Kriterium besagt, daß für Spannungszustände auf der Bruchspannungsglocke die nichtlinearen Anteile weiterer Dehnungsänderungen keine Arbeit an weiteren Spannungsänderungen leisten. Da $d\mathbf{s}$ eine beliebige Richtung innerhalb der zum vorliegenden Spannungszustand gehörigen Tangentialebene an die Bruchspannungsglocke einnehmen kann, muß $d\mathbf{e}_p$ stets orthogonal zu ihr stehen, so daß die Normalitätsregel gilt. Durch Koeffizientenvergleich von (2.22) und (2.23) folgt:

$$d\mathbf{e}_p = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} k, \quad (2.24)$$

wie bereits in (2.21) angegeben. Zur Bestimmung von k wird (2.21) nach $d\mathbf{s}$ aufgelöst und in (2.22) substituiert. Mit der Abkürzung \mathbf{g} für $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= \mathbf{E}_0 (d\mathbf{e} - \mathbf{g}k), & (2.25) \\ \mathbf{g}^T d\mathbf{s} &= \mathbf{g}^T \mathbf{E}_0 (d\mathbf{e} - \mathbf{g}k) = 0, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{E}_0 d\mathbf{e} &= \mathbf{g}^T \mathbf{E}_0 \mathbf{g}k. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{N}$ gemäß (2.20) fällt E_0 heraus, so daß:

$$k = \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{N}}{\mathbf{g}^T \mathbf{N} \mathbf{g}} d\mathbf{e}. \quad (2.26)$$

Der nichtlineare Anteil am Dehnungszuwachs ist mit (2.24) und (2.26):

$$d\mathbf{e}_p = \frac{\mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{N}}{\mathbf{g}^T \mathbf{N} \mathbf{g}} d\mathbf{e}. \quad (2.27)$$

Durch Substitution von (2.26) in (2.25) folgt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{E}_{ep} d\mathbf{e} \quad (2.28)$$

mit der um einen nichtlinearen Korrekturterm erweiterten Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E}_0 - E_0 \frac{\mathbf{N} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{N}}{\mathbf{g}^T \mathbf{N} \mathbf{g}}. \quad (2.29)$$

Diese Matrix gilt - wie oben erwähnt - für den Bruchzustand und beschreibt das nichtlineare Verhalten infolge totaler Gefügezerstörung. In ähnlicher Weise sollen nun Zustände vor dem Bruch, d.h. örtliche Gefügauflockerungen des Beton infolge Mikrorißbildung beschrieben werden. (2.28) gilt dann nur für einen Teil

des Materials. Der Beton ist teilweise von gestörten Zonen "durchdrungen". In welchem Maße dieses der Fall ist, hängt weitgehend von der Belastungsgeschichte sowie anderen Einflüssen ab. Im hier vorliegenden Fall wird wegen des quasistatischen Charakters der Belastung angenommen, daß die Gefügebrauflockerung allein von der Nähe eines erreichten Spannungszustandes zur Bruchgrenze abhängt. Eine Aussage hierüber liefert die Beanspruchungszahl β (siehe Abschnitt 2.3).

Das Durchdringungsmodell besagt, daß bei einem bestimmten Spannungszustand \mathbf{S} ein gewisser Teil p des Materials gestört ist, während der restliche Teil $1-p$ weiterhin intakt ist und sich linear-elastisch verhält.

p wird "Gefügebrauflockerungsgrad" genannt. Es gilt:

$$0 \leq p \leq 1 \quad (2.30)$$

Mit anderen Worten: der von örtlicher Gefügebrauflockerung betroffene Anteil p wird mit dem intakten Gefügebraanteil $1-p$ verschmiert. Der Faktor p ist eine noch zu bestimmende Funktion von β . Beispiele hierzu sind in Bild (2.6) dargestellt. Vergleichsrechnungen haben jedoch gezeigt, daß bereits der einfachste Fall

$$p = \beta \quad (2.31)$$

zu erstaunlich guten Ergebnissen für das kontinuierlich-nicht-lineare Materialverhalten führt.

Überlagert man nun die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.20) und (2.28) mit den Faktoren $1-p$ bzw. p , so folgt für das Durchdringungsmodell:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{E} d\mathbf{e} \quad (2.32)$$

mit der nichtlinear-elastischen Materialmatrix

$$\mathbf{E} = (1-p) \mathbf{E}_0 + p \mathbf{E}_{ep}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{E}_0 \quad \text{siehe (2.20),}$$

$$\mathbf{E}_{ep} \quad \text{siehe (2.29).}$$

Während jedoch die Matrix \mathbf{E}_{ep} anfangs für Spannungszustände auf der Bruchspannungsglocke entwickelt wurde, gilt sie nun für einen beliebigen Spannungszustand vor dem Bruch mit einer zugehörigen zur Bruchspannungsglocke affinen Teil-Versagensfläche (vgl. Bild 2.4).

Durch Substitution von (2.29) in (2.33) folgt für \mathbf{E} schließlich:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - p \mathbf{E}_0 \frac{\mathbf{N} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{N}}{\mathbf{g}^T \mathbf{N} \mathbf{g}} . \quad (2.34)$$

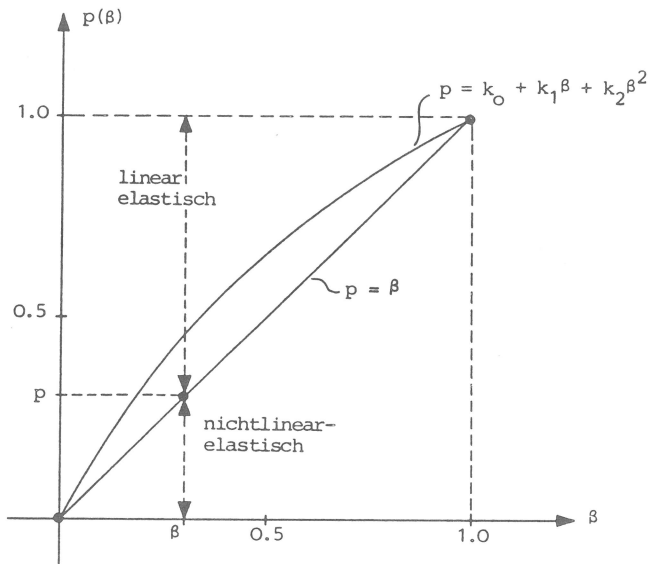


BILD 2.6

Beispiele für den Zusammenhang zwischen Gefügeauflockerungsgrad p und Beanspruchungszahl β

2.6 Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Das in Abschnitt 2.5 entwickelte Durchdringungsmodell führt auf eine Tangenten-Materialmatrix \mathbf{E} (2.34), die vom jeweils aktuellen Spannungszustand \mathbf{s} abhängt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T(\mathbf{s}) . \quad (2.35)$$

Bei Implementierung des Materialmodells in ein Finite-Elemente-Berechnungsverfahren wird für die Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.32)

$$\Delta \mathbf{s} = \int_{\mathbf{e}_0}^{\mathbf{e}_1} \mathbf{E}_T(\mathbf{s}) d\mathbf{e} \quad (2.36)$$

eine numerische Integrationsregel benötigt. Das hier verwendete F.E.-Verfahren basiert auf der inkrementellen Methode, so daß (2.36) schrittweise jeweils für ein Spannungs-Dehnungs-Inkrement $\Delta \mathbf{s}$, $\Delta \mathbf{e}$ mit Hilfe der Crank-Nicolson-Methode gelöst werden kann:

$$\Delta \mathbf{s} = \left[\xi \mathbf{E}_{T0} + (1-\xi) \mathbf{E}_{T1} \right] \Delta \mathbf{e} + \mathbf{r}_A, \quad (2.37)$$

\mathbf{E}_{T0} = Tangentenmatrix am Anfang des Inkrementes,

\mathbf{E}_{T1} = Tangentenmatrix am Ende des Inkrementes,

ξ = Gewichtungsfaktor ($0 \leq \xi \leq 1$),

\mathbf{r}_A = numerischer Approximationsfehler.

Der in (2.37) enthaltene Ausdruck

$$\mathbf{E}_{s_{o1}} = \xi \mathbf{E}_{T_0} + (1-\xi) \mathbf{E}_{T_1} \quad (2.38)$$

ist die lokale Sekanten-Materialmatrix des aktuellen Inkrementes (siehe Bild 2.7). Zu Beginn des Inkrementes sind die Systemgrößen \mathbf{s}_0 , \mathbf{e}_0 , \mathbf{E}_{T_0} bekannt. Gesucht sind \mathbf{s}_1 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{E}_{T_1} am Ende des Inkrementes, wobei:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0, \\ \Delta \mathbf{e} &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

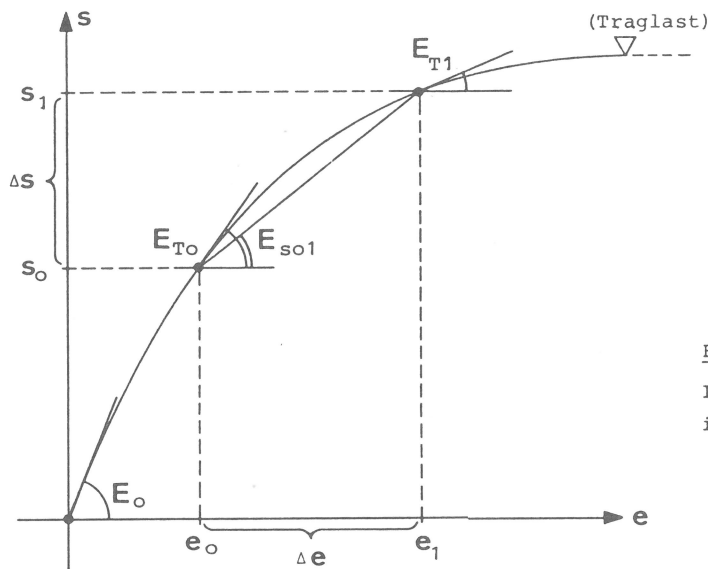


BILD 2.7

Inkrementelle Spannungs-Dehnungs-Beziehungen
in symbolisierter eindimensionaler Darstellung

Der Dehnungszuwachs $\Delta \mathbf{e}$ ist zum Zeitpunkt der Integration (2.37) bekannt. Seine Berechnung folgt aus der Lösung der Systemgleichungen (siehe Abschnitt 3.4). Der Spannungszuwachs $\Delta \mathbf{s}$ und die Tangentenmatrix \mathbf{E}_{T_1} können mit (2.37) nur gleichzeitig und iterativ bestimmt werden, wobei sich für (2.38) als Startlösung anbietet:

$$\mathbf{E}_{s_{o1}} \approx \mathbf{E}_{T_0}. \quad (2.40)$$

Der numerische Approximationsfehler \mathbf{r}_A wird vernachlässigt. Wie sich durch Taylorentwicklung zeigen läßt, wird er für $\xi = 1/2$ am kleinsten. Seine Vernachlässigung wirkt sich jedoch nur auf das Materialverhalten aus und hat keinen Einfluß auf das Gleichgewicht des Systems.

Die in (2.38) enthaltenen Tangentenmatrizen \mathbf{E}_0 und \mathbf{E}_1 sind i.a. orthogonal anisotrop, was durch die Art der Spannungsrestriktion des vorliegenden Materialgesetzes (Abschnitt 2.5) induziert

wird [20]. Orthogonale Anisotropie zeichnet sich durch Verschwinden der Nebendiagonalblöcke und Diagonalisierung der Schubkoeffizienten innerhalb einer Materialmatrix $\hat{\mathbf{E}}$ aus:

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & & & \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & & 0 & \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & & & \\ \hline & & & e_{44} & & \\ & 0 & & & e_{55} & \\ & & & & & e_{66} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

wobei jedoch Bezug genommen wird auf die Achsrichtungen der Anisotropie. (Diese Achsen haben die Eigenschaft, daß ein in ihrer Richtung eingepprägter Hauptspannungszustand nur Hauptdehnungen zur Folge hat - und umgekehrt.) Bezeichnet man die Anisotropieachsen mit r, s, t und stellt ihnen ein globales Koordinatensystem x, y, z gegenüber, so gilt die Transformation:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{E}} \mathbf{C}, \quad (2.42)$$

$\hat{\mathbf{E}}$ = orthotrope Matrix im r, s, t -System,

\mathbf{E} = rotierte Matrix im x, y, z -System,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(i, j)^2 & | & \cos(i, j) \cos(i, l) \\ \hline 2 \cos(i, j) \cos(k, j) & | & \cos(i, j) \cos(k, l) \\ & & + \cos(k, j) \cos(i, l) \end{bmatrix},$$

$i = x, y, z / j = r, s, t / k = y, z, x / l = s, t, r$.

Die Transformation (2.42) hat zur Folge, daß \mathbf{E} trotz orthogonaler Anisotropie vollbesetzt ist. Da die in (2.38) beteiligten Matrizen \mathbf{E}_{T_0} und \mathbf{E}_{T_1} für verschiedene Hauptspannungszustände und somit verschiedene Hauptrichtungen r, s, t gelten, verliert die Sekantenmatrix \mathbf{E}_{s_01} - abgesehen von Ausnahmefällen - jegliche Richtungseigenschaften und wird allgemein anisotrop.

Die Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.36) mit Hilfe von (2.37) wirft die Frage nach der zulässigen Inkrementgröße für $\Delta \mathbf{e}$ auf. Allgemein dürfte diese Frage nicht beantwortbar sein. Vergleichsrechnungen für ein- und dieselbe Lastgeschichte - jedoch mit unterschiedlich großen Laststufen - haben gezeigt, daß die Integrationsregel (2.37) außerordentlich leistungsfähig ist. Kritisch werden die Ergebnisse in der Regel erst dann, wenn örtliche Grenzlastzustände nicht mehr durch

Tragreserven der Umgebung aufgefangen werden können, weil die Traglast des Systems erreicht ist (siehe Bild 2.7).

Bei dem hier implementierten F.E.-Verfahren wird eine Lastgeschichte in Laststufen eingeteilt, die ihrerseits eine Folge von Lastschritten für die Restkräfteabsorbktion beinhalten (siehe Abschnitt 3.3). Das größte Inkrement Δe entfällt dabei in der Regel auf den ersten Lastschritt, dem daher besondere Aufmerksamkeit zu widmen ist. Im übrigen liefert die in Abschnitt 3.4 beschriebene Schrittweitenoptimierung ein verlässliches Regulatoriv gegen überhöhte Inkremente.

Die Spannungs-Dehnungs-Linien, die vom Durchdringungsmodell in Verbindung mit dem oben beschriebenen Integrationsverfahren berechnet werden, sind kontinuierlich gekrümmt. Dieses wird an Beispielen (siehe Abschnitt 4.3) gezeigt.

3. Nichtlineares Berechnungsverfahren

3.1 Vorbemerkung

Die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme stellt einen Problemkreis von großer Tragweite dar, der seit langem Gegenstand intensiver Forschungen gewesen ist. Hinter dem Begriff der Nichtlinearität verbergen sich jedoch so vielfältige unterschiedliche Forderungen an einen Lösungsprozeß, daß trotz der Existenz bewährter Verfahren bis heute wesentliche Fragen unbeantwortet geblieben sind. Im allgemeinen hat ein Lösungsverfahren gleichermaßen Vor- und Nachteile, und es bleibt zu prüfen, inwieweit es geeignet ist, eine spezielle nichtlineare Aufgabe zu lösen. Setzt man die Lösbarkeit an sich einmal voraus, so ergeben sich folgende Grundfragen:

- Ist ein Verfahren prinzipiell in der Lage, die gesuchte Lösung zu finden ?
- Ist das Verfahren numerisch zuverlässig ?
- Ist das Verfahren wirtschaftlich ?

Mathematisch numerische sowie ingenieurmäßige Betrachtungen hierzu finden sich u.a. in [3], [9], [16], [27], [29].

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein nichtlineares Berechnungsverfahren ausgewählt, dessen numerische Stabilität gesichert ist [8], [9], [13], [34] und dessen Wirtschaftlichkeit Gegenstand aktueller Untersuchungen ist [4], [11], [14], [22] . Es handelt sich um das Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren (BFGS), das zur Klasse der Quasi-Newton-Verfahren zählt und als inverse Form des Davidon-Fletcher-Powell-Verfahrens (DFP) dargestellt werden kann. Das Grundprinzip dieser Verfahren ist seit langem bekannt [13], [34], konnte jedoch erst mit zunehmender Entwicklung der EDV an Aktualität gewinnen [22].

Im folgenden wird gezeigt, wie sich das BFGS-Verfahren durch Invertierung des DFP-Verfahrens gewinnen läßt. Für beide Verfahren werden Umwandlungen zwischen Darstellung in Summenform und Produktform angegeben. Die Produktform erlaubt auf einfache Weise, die numerische Stabilität beider Verfahren nachzuweisen sowie ihre algorithmische Wirtschaftlichkeit zu vergleichen. Anschließend wird die Verwendung des BFGS-Verfahrens zur Berechnung primärer Größen und das Zusammenwirken mit der Berechnung sekundärer Größen beschrieben.

In Anhang A5 wird gezeigt, daß das BFGS-Verfahren bei Anwendung auf Minimierungsaufgaben mit quadratischer Zielfunktion die Eigenschaft hat, nach höchstens n Schritten die exakte Lösung zu finden [27].

3.2 Quasi-Newton-Verfahren

Das Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren (BFGS) stellt die inverse Form des Davidon-Fletcher-Powell-Verfahrens (DFP) dar. Beide gehören zur Klasse der Quasi-Newton-Verfahren und eignen sich gleichermaßen zur Minimierung allgemeiner Zielfunktionen von Optimierungsaufgaben wie zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme. Letzteres ist Gegenstand dieser Arbeit.

Der Grundgedanke für den Einsatz von Quasi-Newton-Verfahren besteht darin, für ein inkrementweise zu lösendes nichtlineares Gleichungssystem die Systemmatrix durch eine lokale Sekantenmatrix zu approximieren. Gefordert wird, daß die Quasi-Newton-Gleichung gilt:

$$\mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{r}_i, \quad (3.1)$$

- \mathbf{K}_i = lokale Sekantenmatrix,
- $\Delta \mathbf{u}_i$ = Verschiebungszuwachs des letzten Inkrementes,
- $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i$, Differenz der Restkräfte,
- \mathbf{r}_{i-1} = Restkräfte am Anfang des letzten Inkrementes,
- \mathbf{r}_i = Restkräfte am Ende des letzten Inkrementes,
- i = Iterationsindex, Nr. des letzten Inkrementes.

Die Bedeutung von (3.1) ist in Bild 3.1 dargestellt. Für einen gegebenen Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}_i$ und gegebene Differenz der Restkräfte $\Delta \mathbf{r}_i$ aus einem bereits berechneten Inkrement wird nachträglich eine Matrix \mathbf{K}_i gesucht, die (3.1) erfüllt und sich zur Berechnung eines neuen Verschiebungszuwachses $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ eignet:

$$\mathbf{K}_i \Delta \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{r}_i . \quad (3.2)$$

An die Stelle eines echten Newton-Raphson-Lösungsschrittes tritt also das lineare Gleichungssystem (3.2), bei dem \mathbf{K}_i nicht die Tangentenmatrix, sondern eine Näherung dazu ist.

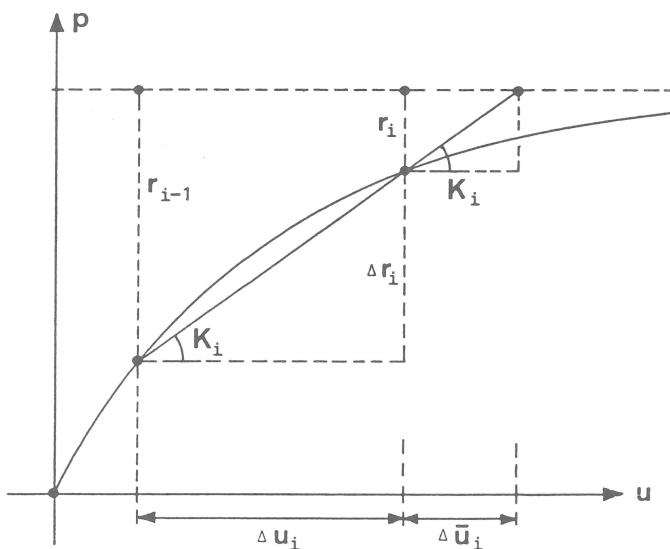


BILD 3.1
Graphische Deutung der Quasi-Newton-Gleichung für das DFP- oder BFGS-Verfahren zur Bestimmung der Sekantensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_i

Es sei ausdrücklich betont, daß nur (3.2) - nicht aber (3.1) - als lineares Gleichungssystem verwendet wird. Die Quasi-Newton-Gleichung (3.1) dient lediglich als Bedingung, die von \mathbf{K}_i stets einzuhalten ist. Gleichzeitig zeigt (3.1), daß es grundsätzlich beliebig viele Möglichkeiten gibt, \mathbf{K}_i zu bestimmen. Um der Aufgabenstellung gerecht zu werden, soll \mathbf{K}_i noch folgende weitere Bedingungen erfüllen:

- Die Matrix \mathbf{K}_i soll die Systeminformationen der vorangehenden Matrix \mathbf{K}_{i-1} mitbeinhalten.
- Bei symmetrischem \mathbf{K}_{i-1} soll auch \mathbf{K}_i symmetrisch sein.
- Bei positiv definitem \mathbf{K}_{i-1} soll auch \mathbf{K}_i positiv definit sein.

Die ursprünglich für Minimierungsaufgaben entwickelte DFP-Formel [9], [27], [29] erfüllt alle oben gestellten Forderungen, wie im folgenden gezeigt wird. Die DFP-Formel wird üblicherweise in der Schreibweise der Summenform für die Inverse \mathbf{K}_i^{-1} angegeben:

$$\mathbf{K}_i^{-1} = \mathbf{K}_{i-1}^{-1} + \frac{\Delta \mathbf{u}_i \Delta \mathbf{u}_i^T}{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i} - \frac{\mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i \Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{-1}}{\Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i}. \quad (3.3)$$

Multipliziert man (3.3) von rechts mit $\Delta \mathbf{r}_i$, so folgt:

$$\mathbf{K}_i^{-1} \Delta \mathbf{r}_i = \Delta \mathbf{u}_i. \quad (3.4)$$

Dieses ist die invertierte Form von (3.1), womit die Quasi-Newton-Gleichung erfüllt ist.

Aus der Struktur der Korrekturterme der rechten Seite von (3.3) geht hervor, daß für symmetrisches \mathbf{K}_{i-1}^{-1} auch \mathbf{K}_i^{-1} symmetrisch ist. Um die Erhaltung der Positiv-Definitheit in einem Korrekturschritt von \mathbf{K}_{i-1}^{-1} nach \mathbf{K}_i^{-1} nachzuweisen, wird zunächst die Summenform (3.3) gemäß Anhang A1 in eine äquivalente Produktform überführt. Durch Koeffizientenvergleich zwischen (3.3) und (A1.1) folgt aus (A1.8) und (A1.4) für die DFP-Produktform:

$$\mathbf{K}_i^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{x} \Delta \mathbf{r}_i^T) \mathbf{K}_{i-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{x} \Delta \mathbf{r}_i^T)^T, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i}} \frac{\Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i} - \frac{\mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i}.$$

Wie nun aus Anhang A4, Formel (A4.7) hervorgeht, bleibt \mathbf{K}_i^{-1} genau dann positiv definit, wenn gilt, daß:

$$1 + \Delta \mathbf{r}_i^T \mathbf{x} \neq 0. \quad (3.6)$$

Um die Bedingung (3.6) zu erfüllen, ist es notwendig, daß $\Delta \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ und $\Delta \mathbf{r}_i \neq \mathbf{0}$ sind. Dieses ist aber bei einer Iteration im Rahmen einer F.E.-Analyse im allgemeinen zu erwarten. $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ stellt den bei großen Systemen unwahrscheinlichen

Fall dar, daß sich trotz $\Delta \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ keine Komponente der Restkräfte ändert. Auf die in (3.3) und (3.5) zusätzlich zu machende Voraussetzung $\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i > 0$ wird noch eingegangen.

Eine Alternative zur DFP-Formel stellt die BFGS-Formel [9], [13], [34] dar, die ebenfalls die Quasi-Newton-Gleichung (3.1) und die übrigen Forderungen erfüllt. Als inverse Form zu DFP läßt sie sich sofort aus (3.3) entwickeln, indem dort alle Größen entsprechend einem Koeffizientenvergleich zwischen (3.4) und (3.1) vertauscht werden:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i-1} + \frac{\Delta \mathbf{r}_i \Delta \mathbf{r}_i^T}{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i} - \frac{\mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1}}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i} . \quad (3.7)$$

Auch (3.7) läßt sich gemäß Anhang A1 in eine äquivalente Produktform überführen. Aus (A1.1), (A1.8) und (A1.4) folgt für die BFGS-Produktform:

$$\mathbf{K}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{z} \Delta \mathbf{u}_i^T) \mathbf{K}_{i-1} (\mathbf{I} + \mathbf{z} \Delta \mathbf{u}_i^T)^T , \quad (3.8)$$

$$\mathbf{z} = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i}} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i} - \frac{\mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i} .$$

In einem Iterationsalgorithmus wird jedoch die BFGS-Formel weder in der Gestalt (3.7) noch (3.8), sondern - ähnlich wie (3.5) - in einer solchen Produktform verwendet, die sich auf die Inverse \mathbf{K}_{i-1}^{-1} bezieht. Um diese Form zu gewinnen, wird (3.8) gemäß Anhang A2 invertiert. Durch Koeffizientenvergleich zwischen (3.8) und (A2.1) folgt dann mit (A2.2), (A2.6) und (A2.8) die invertierte BFGS-Produktform:

$$\mathbf{K}_i^{-1} = (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{u}_i \mathbf{y}^T) \mathbf{K}_{i-1}^{-1} (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{u}_i \mathbf{y}^T)^T , \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i}} \frac{\mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i} - \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i} .$$

Im folgenden soll für (3.9) die Erfüllung der in Anhang A1 bis A4 gemachten Voraussetzungen abgesichert werden. (In Anhang A5 ist darüberhinaus gezeigt, daß das BFGS-Verfahren ähnlich dem DFP-Verfahren die Eigenschaft der quadratischen Termination hat.) In den zur Disposition stehenden Formeln (3.3), (3.5), (3.7), (3.8) und (3.9) wird einheitlich gefordert, daß:

$$\mathbf{K}_{i-1}, \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \quad \text{symmetrisch, positiv definit,} \quad (3.10)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

$$\Delta \mathbf{r}_i \neq \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i > 0. \quad (3.13)$$

Bedingungen (3.11) und (3.12) sind - wie oben erwähnt - im allgemeinen erfüllt. Bedingung (3.10) ist erfüllt, wenn die Finite-Elemente-Analyse mit einer exakt aufgestellten positiv definiten, symmetrischen Systemmatrix \mathbf{K}_0 beginnt, und in allen folgenden Korrekturschritten (von $i-1$ nach i) gemäß Anhang A4 die Determinanten der Korrekturmatriizen \mathbf{Q} ungleich Null sind (vgl. auch Formel (3.6)). Bezüglich (3.9) wird demnach gefordert:

$$1 + \mathbf{y}^T \Delta \mathbf{u}_i = \det [\mathbf{Q}] \neq 0. \quad (3.14)$$

Substituiert man \mathbf{y} gemäß (3.9) in (3.14), so folgt umgekehrt als Versagensbedingung für Formel (3.9):

$$1 + \mathbf{y}^T \Delta \mathbf{u}_i = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{r}_i^T \Delta \mathbf{u}_i}} = \det [\mathbf{Q}] = 0. \quad (3.15)$$

Der Zähler der Wurzel von (3.15) ist positiv, solange $\Delta \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, da \mathbf{K}_{i-1} positiv definit vorliegt. Numerische Schwierigkeiten können auftreten, wenn $\Delta \mathbf{u}_i$ fast $\mathbf{0}$ ist. In diesem Fall befindet sich die Rechnung jedoch in einem Stadium unmittelbarer Nähe zur gesuchten Lösung, wo auf weitere BFGS-Korrekturen ggf. verzichtet werden kann.

Damit eine reelle Wurzel (3.15) existiert, muß die Bedingung (3.13) erfüllt sein. Wäre (3.13) nicht erfüllt, so ließe sich dieses an der Quasi-Newton-Gleichung (3.1) durch Linksmultiplikation mit $\Delta \mathbf{u}_i^T$ wie folgt deuten:

$$\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i \leq 0. \quad (3.16)$$

Gesucht wäre für gegebene $\Delta \mathbf{u}_i$, $\Delta \mathbf{r}_i$ also eine (nachträglich zu bestimmende) Sekantenmatrix \mathbf{K}_i , die nicht mehr positiv definit ist. Dieses widerspräche der Zielsetzung, alle \mathbf{K}_i positiv definit zu machen.

Entscheidend für die Erfüllung von (3.13) sind die Größe und Beschaffenheit von $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i$ (Differenz der Restkräf-

te, Gleichgewichtskräfte). Diese werden ausschließlich durch die Eigenschaften des bei der Berechnung sekundärer Größen verwendeten Materialgesetzes (siehe Abschnitt 2) bestimmt. Der Fall

$$\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.17)$$

stellt das auf der Systemebene inkrementell angegebene Stabilitätskriterium von Drucker für "Indifferentes Materialverhalten im Großen" [10], [28] dar (vgl. Formel (2.23)).

Das in Abschnitt 2.5 beschriebene Durchdringungsmodell stellt sicher, daß im allgemeinen (3.13) erfüllt ist und (3.17) als Grenzfall nur dann eintritt, wenn im gesamten F.E.-System keine Spannungsumlagerung mehr möglich ist. In diesem Fall ist die Traglast des Systems erreicht, so daß die F.E.-Analyse beendet werden muß.

Zusammenfassend läßt sich zur Erfüllung obiger Voraussetzungen feststellen:

- Die Versagensbedingung $\det [\mathbf{Q}] = 0$ gemäß (3.15) tritt praktisch nicht ein.
- Die Existenz einer reellen Wurzel von (3.15) ist unter dem gegebenen Materialgesetz gesichert, solange das F.E.-System über Tragreserven verfügt.

Unter den oben dargestellten Korrekturformeln für die Systemmatrix wird diejenige ausgewählt, die den geringsten Rechenaufwand erfordert. Hierzu werden zwei Forderungen gestellt:

- Die Systemmatrizen \mathbf{K}_{i-1} , \mathbf{K}_i sollen mit Ausnahme einer Startmatrix \mathbf{K}_0 nicht explizit aufgestellt und trianguliert werden.
- Die Inversen \mathbf{K}_{i-1}^{-1} , \mathbf{K}_i^{-1} sollen nicht explizit berechnet werden.

Die Formeln (3.7) und (3.8) sind ineffizient, da sich explizite Korrekturen der Systemmatrix oder ihrer Zerlegungsfaktoren nicht vermeiden lassen.

Bei den Formeln (3.3), (3.5) und (3.9) gelingt es dagegen, Rekursionsvorschriften zu entwickeln, die die Berechnung der Inversen umgehen. Diese unterscheiden sich jedoch in der Höhe des Rechenaufwandes.

Ohne hier die Rekursionsvorschriften für (3.3) und (3.5) anzugeben, läßt sich durch Inspektion erkennen, daß dort ein Term

$\mathbf{K}_{i-1}^{-1} \Delta \mathbf{r}_i$ als Gleichungssystem gelöst werden muß, der einen Zusatzaufwand gegenüber (3.9) mit sich bringt. Der in (3.9) enthaltene vergleichbare Term $\mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{u}_i$ ist dagegen zum Zeitpunkt der Berechnung von \mathbf{y} bekannt, wie im folgenden gezeigt wird.

Der in den Formeln (3.1) bis (3.17) auftretende Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}_i$ wird im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung einer Schrittweitenoptimierung berechnet, so daß gilt:

$$\Delta \mathbf{u}_i = s_{i-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{i-1}, \quad (3.18)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{i-1} = \text{Suchrichtung für Verschiebungszuwachs,}$$

$$s_{i-1} = \text{optimale Schrittweite.}$$

Darin ist die Suchrichtung $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{i-1}$ die Lösung eines linearen Gleichungssystems analog (3.2):

$$\mathbf{K}_{i-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{i-1} = \mathbf{r}_{i-1}. \quad (3.19)$$

Substituiert man (3.18) und (3.19) in (3.9), so vereinfacht sich dort die Berechnung des Vektors \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \sqrt{s_{i-1} \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{r}_{i-1}}} \frac{\mathbf{r}_{i-1}}{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i} - \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i}. \quad (3.20)$$

Formel (3.20) zeigt, daß sich \mathbf{y} allein durch Skalarproduktoperationen berechnen läßt, wobei alle benötigten Größen zum Zeitpunkt der Berechnung bekannt sind.

Abschließend wird die Korrekturformel (3.9) des BFGS-Verfahrens in der Form angegeben, wie sie in der nachfolgend beschriebenen Berechnung primärer Größen (Abschnitt 3.3) sowie in [36], [37] verwendet wird. Mit der Definition der BFGS-Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} für die Korrekturstufe i :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_{i-1} \sqrt{s_{i-1} \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{r}_{i-1}}} - \Delta \mathbf{r}_i = (\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i) \mathbf{y},$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{\Delta \mathbf{u}_i}{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{r}_i} \quad (3.21)$$

ergibt sich äquivalent zu (3.9) und (3.20) die BFGS-Korrekturformel für Systemmatrizen:

$$\mathbf{K}_i^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T) \mathbf{K}_{i-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T) . \quad (3.22)$$

Die Entwicklung einer Rekursionsvorschrift zur Vermeidung der expliziten Inversenberechnung wird in Abschnitt 3.3 gezeigt.

3.3 Berechnung primärer Größen

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte F.E.-Analyse mit nichtlinearem Materialgesetz gliedert sich in eine Folge von Laststufen, jeweils bestehend aus einer Folge von Lastschritten für die Restkräfteabsorbtion (siehe Bild 3.2). Jede Laststufe stellt eine in sich abgeschlossene Teilanalyse dar, die mit der Aufstellung einer exakten Tangentenmatrix \mathbf{K}_0 (Newton-Raphson) beginnt und mit approximierten lokalen Sekantenmatrizen \mathbf{K}_i (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) fortgesetzt wird. Der Lösungsfortschritt des BFGS-Verfahrens innerhalb eines Lastschrittes liegt zwischen dem des NR-Verfahrens und modifizierten NR-Verfahrens (siehe Bild 3.3). Der Rechenaufwand des BFGS-Verfahrens zur Aktualisierung der Tangentenmatrizen \mathbf{K}_i ist jedoch erheblich niedriger als der Aufwand des NR-Verfahrens, und kaum größer als der des modifizierten NR-Verfahrens.

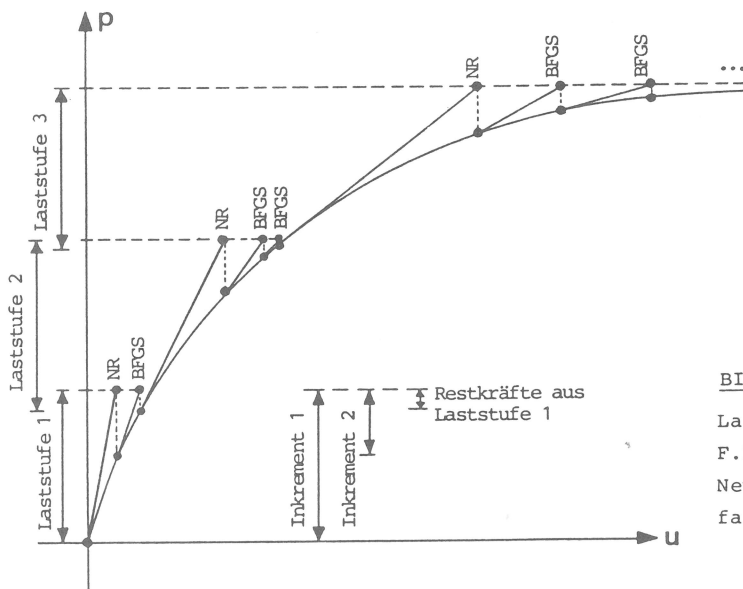


BILD 3.2

Laststufen und Lastschritte (Inkmente) einer F.E.-Analyse mit Systemmatrixkorrektur nach Newton-Raphson (NR) und Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)

Im folgenden wird der Algorithmus der Berechnung primärer Größen einer Laststufe beschrieben.

Gegeben ist zu Beginn das Gleichungssystem:

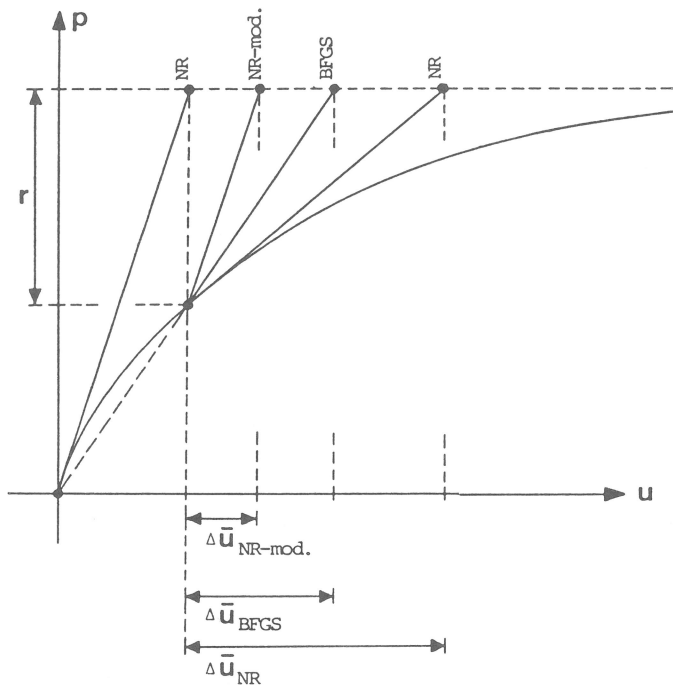


BILD 3.3

Vergleich des nichtlinearen Lösungsfortschritts beim Newton-Raphson-Verfahren (NR), modifizierten NR- und Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren (BFGS)

$$\mathbf{K}_0 \Delta \bar{\mathbf{u}}_0 = \Delta \mathbf{p} , \quad (3.23)$$

\mathbf{K}_0 = exakte Tangentematrix (Systemsteifigkeitsmatrix),

$\Delta \bar{\mathbf{u}}_0$ = Verschiebungszuwachs (Suchrichtung, s.u.),

$\Delta \mathbf{p}$ = Lastvektor der aktuellen Laststufe.

Gleichung (3.23) wird als lineares Gleichungssystem mit der Zerlegung

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T, \quad (3.24)$$

\mathbf{L} = Linksdreiecksmatrix,

\mathbf{D} = Diagonalmatrix

gelöst. Der berechnete Verschiebungszuwachs $\Delta \bar{\mathbf{u}}_0$ wird im Zuge der Berechnung sekundärer Größen (siehe Abschnitt 3.4) einer Schrittweitenoptimierung unterworfen, so daß gilt:

$$\Delta \mathbf{u}_1 = s_0 \Delta \bar{\mathbf{u}}_0 , \quad (3.25)$$

$\Delta \bar{\mathbf{u}}_0$ = Verschiebungszuwachs (Suchrichtung),

s_0 = optimale Schrittweite,

$\Delta \mathbf{u}_1$ = endgültiger Verschiebungszuwachs.

Nach der Berechnung sekundärer Größen sind die zu $\Delta \mathbf{p}$ korrespondierenden Gleichgewichts- und Restkräfte bekannt:

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 , \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_1 &= \text{Gleichgewichtskräfte zu } \Delta \mathbf{p}, \\ \mathbf{r}_0 &\equiv \text{Lastvektor } \Delta \mathbf{p}, \\ \mathbf{r}_1 &= \text{Restkräfte zu } \Delta \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Zur Vereinheitlichung der Schreibweise wird in (3.26) $\Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{r}_0$ gesetzt. Der zu (3.23) gehörige Lastschritt hat den Iterationsindex $i = 1$ (vgl. Formeln (3.1) bis (3.22)). Für den folgenden Lastschritt wird erstmalig mit $i = 1$ eine lokale Sekantenmatrix \mathbf{K}_i nach dem BFGS-Verfahren berechnet, die die Quasi-Newton-Gleichung (3.1) erfüllt und in das Gleichungssystem (3.2) eingesetzt wird (vgl. Abschnitt 3.2). Die Matrix \mathbf{K}_i wird dabei nicht explizit aufgestellt und trianguliert. Stattdessen wird \mathbf{K}_i in eine Rekursionsvorschrift eingebettet, die für eine beliebige Iterationsstufe i im folgenden entwickelt wird. Mit dem Produktansatz (3.21), (3.22) gilt zur Iterationsstufe i :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^{-1} &= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T) \mathbf{K}_{i-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T), \quad (3.27) \\ \mathbf{K}_{i-1}^{-1} &= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{v}_{i-1}^T) \mathbf{K}_{i-2}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_{i-1} \mathbf{w}_{i-1}^T), \\ &\dots \\ \mathbf{K}_1^{-1} &= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_1 \mathbf{v}_1^T) \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1^T). \end{aligned}$$

Invertiert man das Gleichungssystem (3.2) und setzt dort \mathbf{K}_i^{-1} gemäß (3.27) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{r}_i = \mathbf{A} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.28) \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T) (\mathbf{I} + \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{v}_{i-1}^T) \cdots (\mathbf{I} + \mathbf{w}_1 \mathbf{v}_1^T), \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{I} + \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1^T) (\mathbf{I} + \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2^T) \cdots (\mathbf{I} + \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T) \mathbf{r}_i. \end{aligned}$$

Der in (3.28) enthaltene Vektor \mathbf{b} läßt sich allein durch Skalarproduktoperationen von rechts nach links berechnen. Mit bekanntem \mathbf{b} wird dann der Term $\mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b}$ durch Lösung eines linearen Gleichungssystems ermittelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} &= \mathbf{c}, \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{c} &= \mathbf{LDL}^T \mathbf{c} = \mathbf{b}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

In (3.29) wird die bereits vorhandene Zerlegung (3.24) wiederverwendet, so daß sich hier das Problem auf die Berechnung einer

Vor- und Rückwärtsauflösung reduziert. Schließlich wird auch \mathbf{A} in (3.28) nicht explizit berechnet. Die gesuchte Lösung $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ ergibt sich stattdessen allein durch Skalarproduktoperationen von rechts nach links:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{A} \mathbf{c} , \quad (3.30)$$

\mathbf{A} siehe (3.28),

\mathbf{c} siehe (3.29).

Der berechnete Verschiebungszuwachs $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ wird analog (3.25) im Zuge der Berechnung sekundärer Größen einer Schrittweitenoptimierung unterworfen (vgl. auch (3.18)):

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = s_i \Delta \bar{\mathbf{u}}_i , \quad (3.31)$$

$\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ = Verschiebungszuwachs (Suchrichtung),

s_i = optimale Schrittweite,

$\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ = endgültiger Verschiebungszuwachs.

Die zu \mathbf{r}_i (siehe (3.28)) korrespondierenden Gleichgewichts- und Restkräfte folgen aus der Berechnung sekundärer Größen:

$$\Delta \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1} , \quad (3.32)$$

$\Delta \mathbf{r}_{i+1}$ = Gleichgewichtskräfte zu \mathbf{r}_i ,

\mathbf{r}_i = Lastvektor,

\mathbf{r}_{i+1} = Restkräfte zu \mathbf{r}_i .

In den Formeln (3.31) und (3.32) findet die Indexerhöhung zur Iterationsstufe $i+1$ statt, womit sich der Zyklus der Berechnung primärer Größen schließt.

Die Rekursionsvorschrift (3.27) zeigt, daß sich der Aufwand zur impliziten Aktualisierung von \mathbf{K}_i mit zunehmender Anzahl Lastschritte erhöht, da in jedem Schritt die gesamte bisherige Aktualisierungsfolge neu durchlaufen werden muß. Der hierdurch steigende Rechenaufwand bleibt jedoch unkritisch.

Wesentlicher ist die Frage, ob die nach (3.28) berechneten Verschiebungszuwächse $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ bei großem i dem nichtlinearen F.E.-System genügend gerecht werden. Die Akzeptanz der $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ wird durch die Schrittweitenoptimierung kontrolliert (siehe Abschnitt 3.4). Werden die $\Delta \bar{\mathbf{u}}_i$ durch Schrittweiten $s_i \ll 1$ zurückgewiesen,

so empfiehlt es sich, die Iteration der Laststufe abubrechen und mit der Aufstellung einer exakten Tangentenmatrix \mathbf{K}_0 (siehe 3.23) neu zu beginnen.

3.4 Berechnung sekundärer Größen

Für jeden aus (3.23) oder (3.28) berechneten Verschiebungszuwachs zur Iterationsstufe i werden eine optimale Schrittweite sowie sekundäre Größen berechnet. Zur Vereinfachung der Schreibweise kann der Index i im folgenden weggelassen werden, wenn vereinbart wird, daß:

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{\mathbf{u}} &\equiv \Delta \bar{\mathbf{u}}_{i-1}, && \text{Verschiebungszuwachs zu } s=1, \\
 \Delta \mathbf{u} &\equiv \Delta \mathbf{u}_i, && \text{endgültiger Verschiebungszuwachs,} \\
 s &\equiv s_{i-1}, && \text{optimale Schrittweite,} \\
 \Delta \mathbf{p} &\equiv \mathbf{r}_{i-1}, && \text{Lastvektor,} \\
 \Delta \mathbf{p}^\sigma &\equiv \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i, && \text{Gleichgewichtskräfte,} \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{r}_i, && \text{Restkräfte.}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Der endgültige Verschiebungszuwachs gemäß (3.18), (3.25) oder für das Folgeinkrement (3.31) wird damit:

$$\Delta \mathbf{u} = s \Delta \bar{\mathbf{u}}. \tag{3.34}$$

Die Bestimmung der optimalen Schrittweite s erfolgt nach einem Polynomverfahren (quadrat. Parabel) zur Minimierung der Zielfunktion:

$$f = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \rightarrow \text{Minimum.} \tag{3.35}$$

Da die Ableitungen der Zielfunktion f nicht explizit berechnet werden können, kann (3.35) nur iterativ gelöst werden. Der zugehörige Algorithmus ist in [36], [37] beschrieben.

Die Bestimmung des Minimums von f erfordert, daß mehrere Schätzwerte für s angegeben und die zugehörigen Zielfunktionswerte f berechnet werden. Jeder Schätzwert s zieht damit die vollständige Berechnung aller sekundären Größen nach sich, was sehr rechenaufwendig ist. Für eine gegebene Schrittweite s gliedert sich die Berechnung sekundärer Größen in die nachfolgenden Schritte.

Zunächst wird aus dem Systemverschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}$ für jedes Element des F.E.-Systems der Elementverschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}_e$ selektiert:

$$\Delta \mathbf{u}_e \leftarrow \Delta \mathbf{u} . \quad (3.36)$$

Für jeden Integrationspunkt (Gausspunkt) eines Elementes wird mit der Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} der Dehnungszuwachs $\Delta \mathbf{e}$ berechnet:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e . \quad (3.37)$$

Unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialgesetzes wird gemäß Abschnitt 2.6., Formeln (2.36) bis (2.40) der zugehörige Spannungszuwachs $\Delta \mathbf{s}$ berechnet:

$$\Delta \mathbf{s} = \int_{(\Delta \mathbf{e})} \mathbf{E}_T(\mathbf{s}) d\mathbf{e} = \mathbf{E}_{s01} \Delta \mathbf{e} . \quad (3.38)$$

Aus dem Spannungszuwachs $\Delta \mathbf{s}$ eines Integrationspunktes folgen die zugehörigen Element-Gleichgewichtskräfte eines Integrationspunktes:

$$\Delta \mathbf{p}_g^\sigma = \int \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{s} dV = \alpha_i \alpha_j \alpha_k \det [\mathbf{J}] \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{s} , \quad (3.39)$$

$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ = Gausspunkt-Gewichtsfaktoren,

$\det [\mathbf{J}]$ = Jacobi-Determinante.

Die Summation der Gleichgewichtskräfte über das Element sowie über das ganze F.E.-System ergibt schließlich:

$$\Delta \mathbf{p}_e^\sigma = \sum_{(\text{Element})} \Delta \mathbf{p}_g^\sigma , \quad (3.40)$$

$$\Delta \mathbf{p}^\sigma = \sum_{(\text{System})} \Delta \mathbf{p}_e^\sigma . \quad (3.41)$$

Aus der Kenntnis des Lastvektors $\Delta \mathbf{p}$ und der Gleichgewichtskräfte $\Delta \mathbf{p}^\sigma$ folgen die Restkräfte \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \Delta \mathbf{p} - \Delta \mathbf{p}^\sigma . \quad (3.42)$$

Damit ist die einmalige Berechnung aller sekundären Größen abgeschlossen.

Formeln (3.36) bis (3.42) wiederholen sich im Zuge der Schrittweitenoptimierung für jeden vorgeschlagenen Wert von s . Der zu s korrespondierende Wert f der Zielfunktion folgt durch Substitution von (3.42) in (3.35).

Wegen des hohen Rechenaufwandes ist es nicht wirtschaftlich, das Minimum von (3.35) sehr genau zu bestimmen. Die eigentliche Bedeutung der Schrittweitenoptimierung liegt in der Kontrollfunktion, die sie über die nichtlineare F.E.-Analyse ausübt. Sind nämlich die mit (3.23) bzw. (3.28) berechneten Verschiebungszuwächse $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ gut geeignet, noch vorhandene Restkräfte \mathbf{r} abzutragen, so wird dieses durch Schrittweiten $s > 1$ bestätigt. Wird dagegen als optimale Schrittweite ein Wert $0 < s < 1$ festgestellt, so kann dieses folgende Ursachen haben:

1. Die Suchrichtung $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ ist ungünstig.
2. Das nichtlineare Umlagerungsverhalten des Systems ist stark ausgeprägt und verlangt kleinere Linearisierungsschritte.
3. Die Traglast des Systems ist fast erreicht.

Schließlich deutet eine negative Schrittweite s darauf hin, daß die Traglast überschritten wurde.

Welche der oben genannten Ursachen tatsächlich vorliegt, läßt sich allein aus der optimalen Schrittweite nicht ablesen. Soll mit Sicherheit ausgeschlossen werden, daß lediglich die Suchrichtung $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ ungünstig ist, so empfiehlt sich als Schlußkontrolle der Restkräfteiteration die Neuaufstellung einer exakten Systemmatrix \mathbf{K}_0 und ein Rechenschritt gemäß (3.23) mit $\Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{r}$.

Abschließend eine Zusatzbemerkung zur Formel (3.35). In der Literatur wird statt (3.35) häufig das Kriterium (3.43) verwendet [11], [22]:

$$f = \Delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{r} \rightarrow 0 . \quad (3.43)$$

Dieses Kriterium fordert, daß die zur optimalen Schrittweite s sich ergebenden Restkräfte \mathbf{r} keine Komponente in Richtung von $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ mehr enthalten sollen. $f \rightarrow 0$ wird iterativ nach der regula falsi bestimmt. Dabei ist in jedem Iterationsschritt die vollständige Berechnung aller sekundären Größen erforderlich.

Eine Gegenüberstellung von (3.35) und (3.43) ergibt:

1. Beide Iterationsverfahren ermitteln Schätzwerte von s ohne direkte Kenntnis von Ursache und Eigenschaften der Nichtlinearität.
2. Das Kriterium (3.35) beinhaltet ein Minimierungsproblem, das Kriterium (3.43) dagegen eine Säuberungsvorschrift. (3.35)

erzwingt die ständige Verkleinerung der Restkräfte \mathbf{r} auch im Rahmen der Lastschrittfolge. (3.43) läßt dagegen zu, daß in einem folgenden Lastschritt eine Komponente von \mathbf{r} wieder eingeschleppt wird, die im vorangehenden Schritt durch Säuberung zu Null gemacht wurde. (Sukzessive Säuberungen, die diesen Effekt vermeiden, sind i.a. nur bei Problemen mit konstanter Systemmatrix möglich [27].)

3. Bei nicht-gutartigem Systemverhalten liefert (3.35) ein Abbruchkriterium für die F.E.-Analyse, da ein Wiederanstieg der Restkräfte ausgeschlossen wird. Dagegen eignet sich (3.43) für die Lösung von Problemen, die den Wiederanstieg der Restkräfte erfordern. (Hierbei können jedoch Fälle auftreten, in denen ggf. Konvergenzschwierigkeiten nicht erkannt werden, z.B. zyklisches Verhalten von $\Delta \mathbf{u}$ und \mathbf{r} .)

Für die Bestimmung der Schrittweite s gibt es beliebige weitere Möglichkeiten. In Anhang A5 wird für das Problem der Minimierung quadratischer Zielfunktionen gezeigt, daß zur Lösung in n Schritten die zugehörigen Schrittweiten eindeutig festliegen.

Ein Effizienzvergleich verschiedener Schrittweitenoptimierungskriterien ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Das Kriterium (3.35) wird jedoch - wie oben erwähnt - wegen seiner Kontrollfunktion bevorzugt.

4. Beispiele

4.1 Vorbemerkung

Die folgenden Beispiele wurden mit einem FORTRAN-Programmsystem bearbeitet, welches im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und auf Rechenanlagen des Typs SIEMENS 7.738, CD 170-730 sowie TR 440 (für Postprocessing) implementiert wurde. Das Programm und ein zugehöriges Benutzerhandbuch sind in [36], [37] dokumentiert.

Die Beispiele sind in drei Gruppen eingeteilt:

1. Algorithmen- und Verfahrensstudie,
2. Materialgesetzstudie,
3. Demonstrationsbeispiel Staumauer.

Die Beispiele der Gruppe 1 dienen ausschließlich zur Kontrolle

des numerisch-mathematischen Systemverhaltens. Anhand eines normierten Ein-Element-Systems (Testwürfel) werden typische Merkmale des nichtlinearen Berechnungsverfahrens untersucht. Gruppe 2 beinhaltet die rechnerische Simulation von Würfelldruckversuchen an Beton-Probekörpern mit dem Ziel, die Spannungs-Dehnungs-Verläufe zwischen Versuch und Rechnung soweit möglich in Einklang zu bringen.

Als Demonstrationsbeispiel für ein typisches Bauwerk mit unbewehrtem Beton wird schließlich eine Bogen-Gewichts-Staumauer unter Eigengewicht, Wasserdruck und Fundamentverschiebungen mit nichtlinearem Materialgesetz für Beton untersucht.

4.2 Algorithmen- und Verfahrensstudie

Beispiel 1: Testwürfel (Charakterist.Merkmale der nichtlin. Analyse)

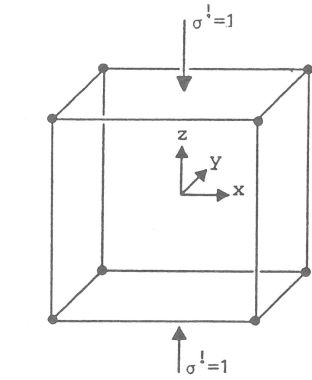
Das F.E.-System dieses Beispiels (siehe Bild 4.1) besteht aus einem einzigen Achtpunkte-Quaderelement mit inkompatiblen Verschiebungsansatz [5] in Würfelform. Abmessungen, Belastung und Materialparameter sind normiert auf dimensionslose, leicht kontrollierbare Werte. Die eingegebene Bruchspannungsglocke erfüllt die Plausibilitätskriterien für eine konvexe Form, repräsentiert aber nicht eine spezielle Betonsorte. Die Belastung wird als Gesamtlast in einer Laststufe aufgebracht (einaxiale Druckbelastung in Höhe der Bruchlast), gefolgt von einer Reihe von Korrektur-Lastschritten für die Abtragung von Restkräften. Die wesentlichen Ergebnisse der Analyse sind zahlenmäßig in Bild 4.2 zusammengetragen und werden im folgenden diskutiert.

Die nichtlineare Analyse entwickelt innerhalb der aufgebrachten Laststufe 6 Lastschritte (0 bis 5), bestehend aus dem linearen Tangenten-Anfangsschritt und 5 nachfolgenden lokalen Sekanten-Korrekturschritten. Die linearen Ergebnisse stimmen mit der erwarteten exakten Lösung (Hooke'sches Gesetz) überein. Die nichtlinearen Zwischenergebnisse zeigen klares Konvergenzverhalten. Insbesondere ist zu beobachten:

- Die Determinante der Systemmatrix nimmt während der lokalen Sekantenschritte (BFGS-Verfahren, siehe Abschnitt 3.3) sukzessive ab und hat am Ende der Rechnung weniger als 3% ihres

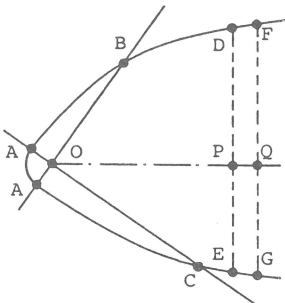
Ausgangswertes. (Der exakte Wert wäre Null wegen Erreichens der Bruchlast.) In Bild 4.2 sind die Determinantenwerte normiert auf den Ausgangswert dargestellt:

$$\bar{D} = \frac{\det [\mathbf{K}]}{\det [\mathbf{K}_0]}, \quad \det [\mathbf{K}_0] = 0.968 \cdot 10^{39}. \quad (4.1)$$



$E_0 = 100.0$ (Elastizitätsmodul)
 $\nu = 0.3$ (Querkontraktionszahl)

$\sigma_{zz} = -1.0$
 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$
 $\epsilon_{zz} = -0.01$ (linear)
 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0.003$ (linear)



Bruchspannungsglocke :

O - A = 0.1
 O - B = 1.0
 O - C = 1.2
 O - P = 2.0
 O - Q = 3.0
 P - D = 1.25
 P - E = 1.1
 Q - F = 1.35
 Q - G = 1.2

BILD 4.1

Ein-Element-System (Testwürfel) mit normierten Last- und Materialparametern für Algorithmus- und Verfahrensstudie

Lastschritt i	Determinante \bar{D}	Quadrat Restkr. f	Schrittweite		Dehnungen		Spannungen		Tangenten-Materialmatrizen			
			s	m	$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$	ϵ_{zz}	$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$	σ_{zz}	$E_{xx} = E_{yy}$	E_{xy}	$E_{xz} = E_{yz}$	E_{zz}
0	1.000	40000.00	0.917	3	0.0	0.0	0.0	0.0	134.615	57.692	57.692	134.615
1	0.887	2569.22	0.960	3	0.0028	-0.0092	-0.1329	-0.8940	97.195	20.272	64.222	133.476
2	0.433	1684.51	1.458	6	0.0043	-0.0115	-0.1184	-1.0063	86.643	9.720	63.787	133.841
3	0.215	616.69	2.100	5	0.0076	-0.0150	-0.0629	-1.0595	72.851	-4.072	61.679	134.358
4	0.075	11.64	2.237	8	0.0106	-0.0171	-0.0066	-0.9874	66.270	-10.653	59.063	134.588
5	0.026	1.84	3.000	6	0.0138	-0.0201	-0.0038	-1.0018	65.429	-11.494	59.130	134.585
		0.04			0.0169	-0.0228	-0.0003	-1.0008	64.249	-12.674	58.914	134.594

BILD 4.2 Ergebnisse der nichtlinearen Analyse eines normierten Testwürfels (vgl. Bild 4.1)

- Die Restkräfte aus der vorgegebenen Belastung werden erwartungsgemäß vom System absorbiert. Das Konvergenzkriterium für das Quadrat der Restkräfte ist wie folgt gewählt:

$$f = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \leq 1.00. \quad (4.2)$$

- Die Schrittweitenoptimierung ergibt, daß in den ersten Lastschritten die Verschiebungskremente gebremst, in den fol-

genden Lastschritten beschleunigt werden. Die Anzahl m der Stützstellen zur iterativen Bestimmung des Minimums der Zielfunktion $f = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$ (Berechnung sekundärer Größen) liegt zwischen 3 und 8 für einen Lastschritt. Dabei ist das Abbruchkriterium für die Verbesserung der optimalen Schrittweite s bewußt scharf gewählt:

$$|s_i - s_{i+1}| \leq 0.01 . \quad (4.3)$$

Die Entwicklung der Verschiebungen und dazu proportionalen Dehnungen im nichtlinearen Bereich ist plausibel, aber nicht nachprüfbar, da kein bekanntes Betonmodell zugrundeliegt. Da die aufgebrachte Belastung die Bruchlast darstellt, müssen theoretisch die Verschiebungen und Dehnungen gegen ∞ gehen (unbeschadet der Voraussetzung kleiner Verschiebungen und linearer Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen). Infolge Erfüllung des Konvergenzkriteriums für f besitzt hier das System am Ende der Rechnung in unmittelbarer Umgebung des Versagenszustandes noch eine gewisse Restfestigkeit, die es ihm ermöglicht, weitere sehr große nichtlineare Verschiebungs- und Dehnungszuwächse aufzunehmen und ins Gleichgewicht zu bringen. Dieses wird rechnerisch dadurch begünstigt, daß die Systemmatrix des letzten Lastschrittes nicht die exakte Tangentenmatrix des Versagenszustandes, sondern die lokale Sekantenmatrix eines unmittelbar davorliegenden Zustandes ist (BFGS-Verfahren, siehe Abschnitt 3.3).

Die Normalspannungen σ_{zz} konvergieren erwartungsgemäß gegen die Bruchspannung $\sigma_B = -1.0$, die Querspannungen $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ erwartungsgemäß gegen Null.

Die in Bild 4.2 eingetragenen Materialmatrizen-Werte sind die nichtlinear reagierenden Koeffizienten der Tangenten-Materialmatrizen jeweils am Ende eines Inkrementes bzw. Lastschrittes (vgl. Bild 2.7), wobei hier:

$$(2.36): \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 + \int \mathbf{E}_T d\mathbf{e} , \quad (4.4)$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \hline 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{E}_T = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} & | & & \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} & | & 0 & \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} & | & & \\ \hline & & & | & * & \\ & 0 & & | & & * \\ & & & | & & * \end{bmatrix} .$$

Die Tangentenmatrizen E_T zeigen folgenden Einfluß der Nichtlinearität:

Die Diagonalkoeffizienten E_{xx} , E_{yy} für die Querrichtungen nehmen sukzessive ab. Der Nebendiagonalkoeffizient E_{xy} der Querrichtungen untereinander wechselt über zum negativen Vorzeichen. Dieses Phänomen ist jedoch nicht wirklichkeitsnah. (Eine Querdehnung $d\varepsilon_{yy}$ in Druckrichtung induziert nicht eine Querspannung $d\sigma_{xx}$ in Zugrichtung.) Hervorgerufen wird es durch die Gestalt der Bruchspannungsglocke, insbesondere die Richtung des Gradienten \mathbf{g} am eindimensionalen Bruchpunkt (vgl. (2.34)). Der Effekt wird vermieden, wenn der zugehörige Bruchspannungsmeridian einen flacheren Verlauf nimmt, als durch die hier postulierte Bruchspannungsglocke erzwungen. Dieses ist bei einem wirklichkeitsnahen Betonmodell zu erwarten. Die Koeffizienten der Hauptbelastungsrichtung E_{zz} und E_{xz} , E_{yz} zeigen Schwankungen, mit denen die "falschen" Iterations-Zwischenergebnisse kompensiert werden (vgl. Spannungen). Am Ende der Iteration konvergieren sie gegen ihre ursprünglichen Werte. Die Schubkoeffizienten bleiben durch das nichtlineare Materialgesetz erwartungsgemäß unberührt. Da keine Drehungen von Hauptspannungszuständen aus der Lage des globalen Koordinatensystems heraus stattfinden, bleibt der orthogonal anisotrope Charakter der Tangenten-Materialmatrizen sichtbar: Die Nebendiagonalblöcke bleiben unbesetzt.

Beispiel 2: Testwürfel (Verletzung der Bruchbedingung)

In diesem Beispiel (siehe Bild 4.3) wird das Iterationsverhalten der Spannungs-Dehnungs-Integration (2.37) bei Überschreitung der Bruchgrenze demonstriert. Ein Testwürfel wird nun dehnungskontrolliert belastet, indem genau solche äußeren Dehnungen eingeprägt und festgehalten werden, die für lineares Material einaxiale Spannungen (Hooke'sches Gesetz) zur Folge haben. Die Höhe der eingeprägten Dehnungen wird so gewählt, daß die einaxiale Bruchfestigkeit um 100% überschritten wird. In diesem Zustand wird das System einer erstmaligen Berechnung sekundärer Größen mit nichtlinearem Materialgesetz (siehe Abschnitt 2.6) zugeführt. Das Spannungs-Dehnungs-Inkrement beginnt am Punkt $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ mit der Ausgangsmatrix E_0 (Ursprung des \mathbf{s} - \mathbf{e} -Diagramms in Bild 2.7, Ursprung des Hauptspannungsraumes in Bild 4.3). Gesucht ist der Endzustand \mathbf{s}_1 , E_1 des Inkrementes

bei gegebenem ϵ_1 . (Wegen der Dehnungskontrolle kann vorausgeschickt werden, daß Konvergenz der Spannungen möglich ist. Dieses ist aber wegen primärer Berechnung der Dehnungen bei jedem Aufruf sekundärer Größen der Fall.)

Bild 4.3 zeigt die schrittweise Entwicklung der nichtlinearen Spannungsumlagerung am Ende des Inkrementes. Bereits nach zwei Iterationsschritten liegt der Endpunkt des Spannungspfades wieder im zulässigen Bereich unterhalb der Bruchgrenze. Die zugehörige Beanspruchungszahl β (siehe Abschnitt 2.3) nimmt Werte $\beta < 1$ an. Die nichtlineare Spannungsumlagerung ist plausibel: Wegen der Behinderung zusätzlicher Querdehnungen entstehen Stützspannungen in Querrichtung.

Das in diesem Beispiel demonstrierte Umlagerungsverhalten ist typisch für das "Durchdringungsmodell" von Beton. Es macht das

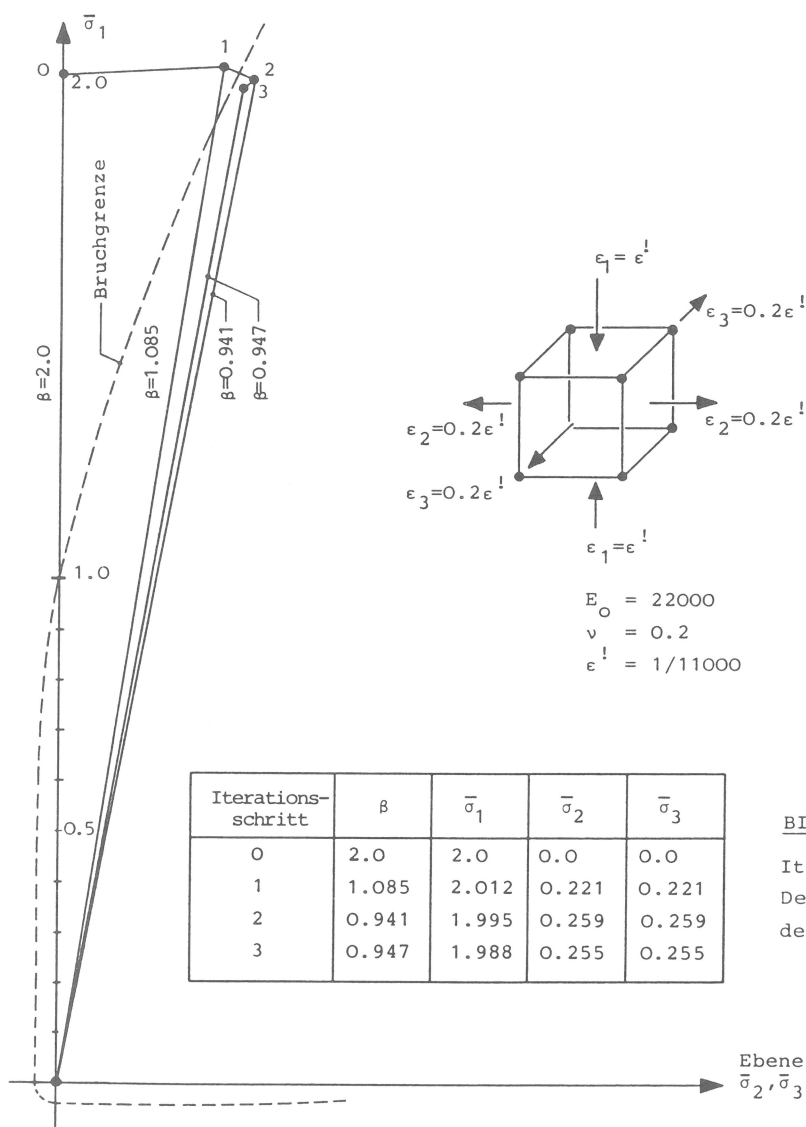


BILD 4.3

Iterationsverhalten der Spannungs-Dehnungs-Integration bei Verletzung der Bruchgrenze

Materialgesetz gutmütig im Vergleich zu bilinearen Gesetzen (z.B. von Mises), die bei Überschreitung der Bruchgrenze eine Aufteilung des Spannungsinkrementes in einen zulässigen und einen unzulässigen Anteil erfordern [33]. Bei Wahl kleinerer Inkremente als in diesem Beispiel läßt sich tendenziell derselbe Effekt beobachten: Spannungspunkte, die in die Nähe der Bruchgrenze geraten, werden durch die Nichtlinearität vor dem Bruch iterativ von der Bruchgrenze weggedrängt, zurück auf ein Niveau kleinerer Beanspruchungszahl β . Dieses ist auch verständlich, da die Startlösung (2.40) für (2.38), (2.37) die Nähe der Bruchgrenze in der Regel zu "pessimistisch" vorausschätzt.

Beispiel 3: Testwürfel (Variation der Inkrementgrößen)

Die Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mit der Trapezregel (2.37) wirft die Frage nach der numerischen Genauigkeit und damit der zulässigen Inkrementgrößen auf. Im folgenden Beispiel (siehe Bild 4.4) wird ein Testwürfel auf einaxialem Spannungspfad bis zur Bruchgrenze belastet, wobei Parallelrechnungen mit unterschiedlicher Anzahl Laststufen durchgeführt werden.

Es ist davon auszugehen, daß in jeder Laststufe das erste Inkrement das größte ist, da jeweils die folgenden Inkremente (Lastschritte) nur Restkräfte abtragen. Das erste Inkrement ent-

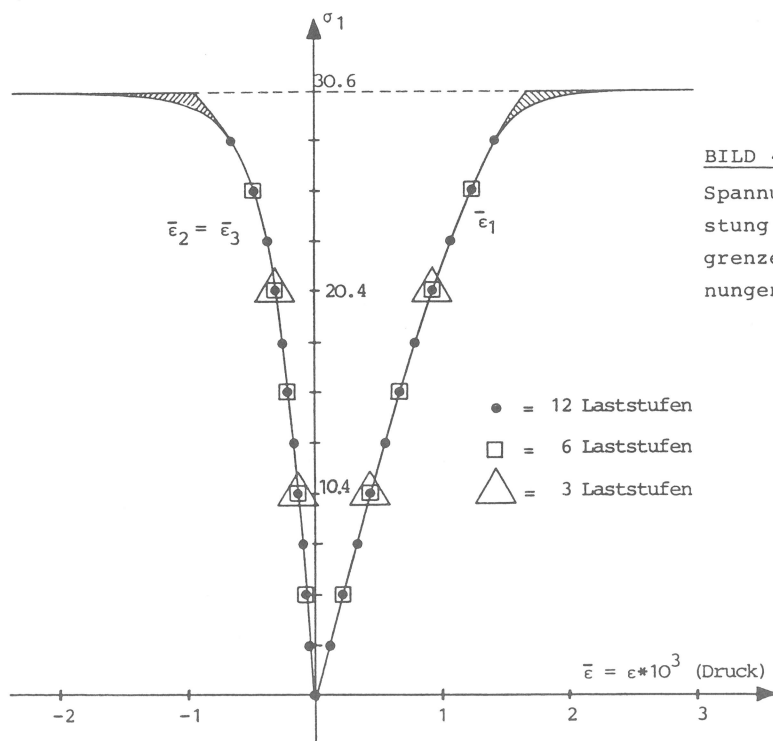


BILD 4.4
Spannungs-Dehnungs-Verlauf für einaxiale Belastung mit 3, 6 bzw. 12 Laststufen bis zur Bruchgrenze (auf mind. 3 Dezimalstellen in den Rechnungen übereinstimmend)

scheidet also über eventuell eingeschleppte numerische Spannungs-Dehnungs-Pfadabweichungen.

Das Ergebnis der Vergleichsrechnungen ist in Bild 4.4 und Bild 4.5 für Läufe mit 1, 3, 6 und 12 Laststufen dargestellt. An vergleichbaren Stationen stimmen die berechneten Dehnungen auf 3 Dezimalstellen überein. Die Abweichungen in unmittelbarer Nähe der Bruchgrenze sind nicht verfahrensbedingt. Sie werden vielmehr verursacht durch zunehmende Singularität der Materialmatrix in den Restkräfte-Iterationsschritten der letzten Laststufe.

σ_1	Laststufen: 1 Inkrement : $\Delta\sigma_1 = 30.6$			Laststufen: 3 Inkrement : $\Delta\sigma_1 = 10.2$			Laststufen: 6 Inkrement : $\Delta\sigma_1 = 5.1$			Laststufen: 12 Inkrement : $\Delta\sigma_1 = 2.55$		
	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$
2.55										0.116	-0.024	-0.024
5.10							0.233	-0.050	-0.050	0.233	-0.050	-0.050
7.65										0.352	-0.079	-0.079
10.20				0.471	-0.110	-0.110	0.471	-0.110	-0.110	0.471	-0.110	-0.110
12.75										0.593	-0.146	-0.146
15.30							0.716	-0.186	-0.186	0.716	-0.186	-0.186
17.85										0.842	-0.233	-0.233
20.40				0.974	-0.289	-0.289	0.973	-0.290	-0.290	0.973	-0.290	-0.290
22.95										1.111	-0.363	-0.363
25.50							1.261	-0.463	-0.463	1.260	-0.463	-0.463
28.05										1.439	-0.629	-0.629
30.60	2.597	-3.004	-3.004	2.598	-3.026	-3.026	1.736	-1.002	-1.002	2.648	-3.148	-3.148

BILD 4.5 Vergleich Spannungs-Dehnungs-Verläufe für einaxiale Belastung mit 1, 3, 6 oder 12 Laststufen bis zur Bruchgrenze

Beispiel 4: Testwürfel (Belastung-Entlastung)

Die durch das Materialgesetz (siehe Abschnitt 2) beschriebenen nichtlinearen Dehnungen werden im Rahmen dieser Arbeit als vollständig reversibel behandelt. Vergleichsrechnungen mit alternierenden Laststufen $\Delta \mathbf{p}$, $-\Delta \mathbf{p}$ auf einaxialem Spannungspfad (siehe Bild 4.4) bestätigen, daß durch Belastung erzeugte nichtlineare Dehnungen bei Entlastung vollständig zurückgenommen werden.

4.3 Materialgesetzstudie

Beispielserie: Rechnerische Simulation von Würfeldruckversuchen

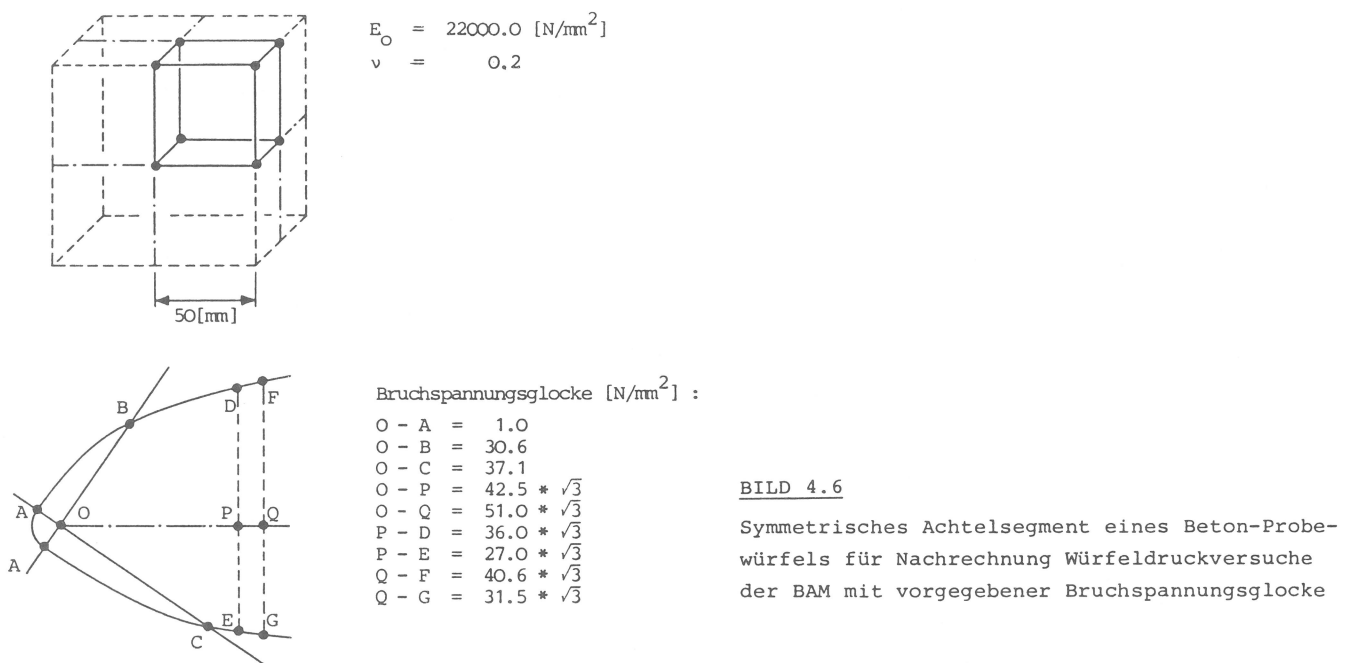
Die praktische Eignung des in Abschnitt 2 beschriebenen Materialgesetzes (Durchdringungsmodell) wird mit Rechenläufen untersucht, in denen Würfeldruckversuche an Beton-Probekörpern simuliert werden. Die Rechenläufe werden ausgerichtet auf die in [31] berichteten Würfeldruckversuche der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) in Berlin. Das im "Durchdringungsmodell" als Ursache für die Nichtlinearität postulierte Phänomen der Gefügebrauchung (Mikrorißbildung) wird rechnerisch durch einen einzigen Parameter beschrieben - den Gefügebrauchungsgrad p . Die folgenden Beispiele zeigen den Grad der Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung. Auf eine analytische Verfeinerung des Materialgesetzes wird im Interesse der Klarheit der Darstellung bewußt verzichtet.

Die Würfeldruckversuche werden durch Finite-Element-Analysen simuliert, indem Versuchsaufbau und Versuchsstrategie durch ein F.E.-System und eine inkrementelle Belastungsgeschichte ersetzt werden. Die eingegebenen Materialparameter E_0 und ν (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl) werden zunächst geschätzt. E_0 kann später durch Regressionsanalyse so justiert werden, daß die Spannungs-Dehnungs-Verläufe aus Versuch und Rechnung möglichst gut übereinstimmen. Folgende Angaben werden aus dem Bericht der BAM [31] entnommen und zur Grundlage der Berechnungen gemacht:

- Den Rechnungen werden nur Würfeldruckversuche mit sogenannten "schlaffen Druckplatten" zugrundegelegt (Konstante ein-geprägte Flächenlast mit Dehnungsausgleich im Polymer-Lager, keine Querdehnungsbehinderung wegen Bürstenanordnung der Lasteinleitungsstäbe), nicht jedoch "starre Druckplatten".
- Es werden nur Versuche an Beton-Probekörpern (Betonmischungen C1 bis C4 und T1 bis T9) betrachtet, nicht jedoch Mörtel-Probekörper.
- Von den erzielten Meßergebnissen werden nur die daraus nachträglich berechneten Mittelwerte berücksichtigt.
- Es werden einaxiale, zwei- und dreiaxiale Versuche simuliert. Die Belastung folgt den in Bild 4.7 beschriebenen Spannungspfaden.

- Die dreiaxialen Spannungspfade bleiben zunächst hydrostatisch und verzweigen dann in eine von vier festgelegten deviatorischen Ebenen. Die Verzweigungspunkte auf der Äquisektrix liegen bei $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k \cdot f'_c$ mit dem Bezugswert $f'_c = 34.0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ und den Faktoren $k = 0.75, 1.00, 1.25$ bzw. 1.50 .
- Die aus den Versuchsergebnissen errechneten mittleren Druckfestigkeiten sind in Bild 4.7 eingetragen. Aus ihnen werden Stützwerte zum Aufspannen der Bruchspannungsglocke ausgewählt. Sämtliche Druckfestigkeiten werden einer rechnerischen Verifizierung unterzogen.

Das Finite-Element-Modell (siehe Bild 4.6) besteht aus einem einzigen Quaderelement, mit dem unter Ausnutzung der Symmetrie ein Achtelsegment eines Beton-Würfels dargestellt wird. Der Quader hat die Kantenlänge 50 [mm] und ist gegen Verschiebung senkrecht zu den Symmetrieebenen gefesselt. Für alle Rechenläufe wird einheitlich dieselbe Bruchspannungsglocke verwendet, deren Stützwerte (Programm-Eingabedaten) Bild 4.7 zu entnehmen sind. (Für den Zugbereich wird formal eine kleine Zugfestigkeit $\sigma_{\text{zug}} = 1.0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ angegeben.)



Bei den Belastungsgeschichten wird unterschieden zwischen ein-, zwei- und dreiaxialen Versuchen. Die ein- und zweiaxialen Versuche werden simuliert durch drei aufeinander folgende proportionale Laststufen bis zur erwarteten Bruchlast, gefolgt von einer vierten Kontroll-Laststufe. Die Proportionalität der Last-

steigerung wird lediglich gestört durch die jeweilige Übernahme von Restkräften einer vorangehenden Laststufe in die darauf folgende. Die gewählten Lasten sind in Bild 4.8 zusammengestellt. Sie beziehen sich auf die in Bild 4.7 angegebenen Mittelwerte der Druckfestigkeiten.

Spannungspfad	DAfStb-Heft 277 Bild Nr.	Mittelwerte der Druckfestigkeiten [N/mm ²]					Stuetzwerte der Bruchspannungsglocke				
		σ_1	σ_2	σ_3	σ_{Okta}	τ_{Okta}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{Okta}	τ_{Okta}
EINAXIAL	6.3-3	30.6	0	0			30.6	0	0		
$\sigma_1/\sigma_2 = 3/1$	6.3-3	43.1	14.2	0							
$\sigma_1/\sigma_2 = 3/2$	6.3-3	42.6	28.2	0							
$\sigma_1/\sigma_2 = 3/3$	6.3-3	37.1	37.1	0			37.1	37.1	0		
0.75f _c ^t , PFAD 1	6.5-4	62.1	7.1	7.3	25.5	25.9					
1.00f _c ^t , PFAD 1	6.5-4	78.9	12.0	12.0	34.3	31.5					
1.25f _c ^t , PFAD 1	6.5-4	93.5	17.2	17.1	42.6	36.0				42.5	36.0
1.25f _c ^t , PFAD 2	6.5-5	80.3	43.4	6.0	43.2	30.3					
1.25f _c ^t , PFAD 3	6.5-6	61.3	61.3	4.1	42.2	27.0				42.5	27.0
1.50f _c ^t , PFAD 1	6.5-4	108.3	22.2	22.3	50.9	40.6				51.0	40.6
1.50f _c ^t , PFAD 2	6.5-5	93.7	51.4	8.6	51.2	34.7					
1.50f _c ^t , PFAD 3	6.5-6	73.5	73.4	5.8	50.9	31.9				51.0	31.5

BILD 4.7 Mittlere Bruchfestigkeiten aus Würfeldruckversuchen der BAM und daraus entnommene Stuetzwerte (Programm-Eingabedaten) für eine Bruchspannungsglocke DAfStb-Heft 277, Bild 6.5-12

Rechenlauf Dimension der Ebene Spannungspfad Studie	DAfStb-Heft 277 Bild	Spannungspfad	Belastungszuwachs			Gesamtbelastung		
			$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_3$	σ_1	σ_2	σ_3
BAM.CC 1002	6.3-3 6.4-21A	$\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 3/0/0$	10.2	0	0	10.2	0	0
			10.2	0	0	20.4	0	0
			10.2	0	0	30.6	0	0
			10.2	0	0	-	-	-
BAM.CC 2012	6.3-3 6.4-22A	$\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 3/1/0$	14.37	4.73	0	14.37	4.73	0
			14.37	4.73	0	28.74	9.46	0
			14.37	4.73	0	43.11	14.19	0
			14.37	4.73	0	-	-	-
BAM.CC 2022	6.3-3 6.4-23A	$\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 3/2/0$	14.2	9.4	0	14.2	9.4	0
			14.2	9.4	0	28.4	18.8	0
			14.2	9.4	0	42.6	28.2	0
			14.2	9.4	0	-	-	-
BAM.CC 2032	6.3-3 6.4-24A	$\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 3/3/0$	12.37	12.37	0	12.37	12.37	0
			12.37	12.37	0	24.74	24.74	0
			12.37	12.37	0	37.11	37.11	0
			12.37	12.37	0	-	-	-

BILD 4.8 Ein- und zweiachiale Lastpfade für Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM

Rechen- lauf Dimension dev. Ebene Sp.-Pfad Studie	DAfStb- Heft 277 Bild	Spannungspfad	Belastungszuwachs			Gesamtbelastung		
			$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_3$	σ_1	σ_2	σ_3
BAM.CC 3112	6.5-4 6.6-17	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.75 f_c'$	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5
		deviatorisch :	12.2	-6.1	-6.1	37.7	19.4	19.4
		$\Delta\sigma_1$	12.2	-6.1	-6.1	49.9	13.3	13.3
		$\Delta\sigma_2 = -\Delta\sigma_1/2$	12.2	-6.1	-6.1	62.1	7.2	7.2
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1/2$	12.2	-6.1	-6.1	-	-	-
BAM.CC 3212	6.5-4 6.6-18	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.0 f_c'$	34.0	34.0	34.0	34.0	34.0	34.0
		deviatorisch :	14.8	-7.4	-7.4	48.8	26.6	26.6
		$\Delta\sigma_1$	14.8	-7.4	-7.4	63.6	19.2	19.2
		$\Delta\sigma_2 = -\Delta\sigma_1/2$	14.8	-7.4	-7.4	78.4	11.8	11.8
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1/2$	14.8	-7.4	-7.4	-	-	-
BAM.CC 3312	6.5-4 6.6-19	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.25 f_c'$	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5
		deviatorisch :	17.0	-8.5	-8.5	59.5	34.0	34.0
		$\Delta\sigma_1$	17.0	-8.5	-8.5	76.5	25.5	25.5
		$\Delta\sigma_2 = -\Delta\sigma_1/2$	17.0	-8.5	-8.5	93.5	17.0	17.0
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1/2$	17.0	-8.5	-8.5	-	-	-
BAM.CC 3322	6.5-5 6.6-21	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.25 f_c'$	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5
		deviatorisch :	12.4	0	-12.4	54.9	42.5	30.1
		$\Delta\sigma_1$	12.4	0	-12.4	67.3	42.5	17.7
		$\Delta\sigma_2 = 0$	12.4	0	-12.4	79.7	42.5	5.3
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1$	12.4	0	-12.4	-	-	-

BILD 4.9 Dreiaxiale Lastpfade für Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM

Rechen- lauf Dimension dev. Ebene Sp.-Pfad Studie	DAfStb- Heft 277 Bild	Spannungspfad	Belastungszuwachs			Gesamtbelastung		
			$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_3$	σ_1	σ_2	σ_3
BAM.CC 3332	6.5-6 6.6-23	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.25 f_c'$	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5	42.5
		deviatorisch :	6.3	6.3	-12.6	48.8	48.8	29.9
		$\Delta\sigma_1$	6.3	6.3	-12.6	55.1	55.1	17.3
		$\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_1$	6.3	6.3	-12.6	61.4	61.4	4.7
		$\Delta\sigma_3 = -2 \Delta\sigma_1$	6.3	6.3	-12.6	-	-	-
BAM.CC 3412	6.5-4 6.6-20	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.5 f_c'$	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0
		deviatorisch :	19.1	-9.55	-9.55	70.1	41.45	41.45
		$\Delta\sigma_1$	19.1	-9.55	-9.55	89.2	31.9	31.9
		$\Delta\sigma_2 = -\Delta\sigma_1/2$	19.1	-9.55	-9.55	108.3	22.35	22.35
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1/2$	19.1	-9.55	-9.55	-	-	-
BAM.CC 3422	6.5-5 6.6-22	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.5 f_c'$	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0
		deviatorisch :	14.2	0	-14.2	65.2	51.0	36.8
		$\Delta\sigma_1$	14.2	0	-14.2	79.4	51.0	22.6
		$\Delta\sigma_2 = 0$	14.2	0	-14.2	93.6	51.0	8.4
		$\Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_1$	14.2	0	-14.2	-	-	-
BAM.CC 3432	6.5-6 6.6-24	hydrostatisch: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.5 f_c'$	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0	51.0
		deviatorisch :	7.5	7.5	-15.0	58.5	58.5	36.0
		$\Delta\sigma_1$	7.5	7.5	-15.0	66.0	66.0	21.0
		$\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_1$	7.5	7.5	-15.0	73.5	73.5	6.0
		$\Delta\sigma_3 = -2 \Delta\sigma_1$	7.5	7.5	-15.0	-	-	-

BILD 4.10 Dreiaxiale Lastpfade für Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM

Die dreiaxialen Versuche werden nachgerechnet unter Übernahme der dort gewählten zweiteiligen Spannungspfade im Hauptspannungsraum (hydrostatisch, deviatorisch). Wegen der Linearität des postulierten Materialgesetzes längs der Äquisektrix können die hydrostatischen Belastungszustände in einer Laststufe gerechnet werden. Danach werden die deviatorischen Belastungen bis zur erwarteten Bruchlast in drei aufeinander folgenden proportionalen Laststufen, gefolgt von einer Kontroll-Laststufe, gerechnet. Auch hier werden die Restkräfte zwischen den Laststufen

übertragen. Die gewählten Lasten sind in Bild 4.9, 4.10 zusammengestellt.

Die Ergebnisse der Finite-Element-Analysen sind in Bild 4.11 bis Bild 4.25 in Form von Spannungs-Dehnungs-Diagrammen dargestellt. Die Diagramme zeigen Hauptdehnungen ε_1 , ε_2 , ε_3 unter Bezugnahme auf die Hauptspannung σ_1 . Für jeden untersuchten Spannungspfad sind die Ergebnisse aus Versuch und Rechnung einander gegenübergestellt, so daß korrespondierende Diagramme direkt miteinander verglichen werden können. Dieses führt zu folgenden Feststellungen:

- Die erwarteten Bruchfestigkeiten werden bis auf iterationsbedingte Toleranzen richtig erkannt.
- Die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Linien (Bild 4.11) sind in Versuch und Rechnung sehr ähnlich. Insbesondere krümmt sich die ε_1 -Linie in beiden Fällen sehr gleichmäßig. Die ε_2 - und ε_3 -Linie wächst zunächst nur schwach an und nimmt im letzten Belastungsdrittel vor der Bruchlast stark zu.
- Die zweiaxialen Spannungs-Dehnungs-Linien (Bild 4.12, 4.13, 4.14) zeigen wie die einaxialen Linien gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung. Die jeweiligen ε_1 -Linien krümmen sich sehr gleichmäßig - und zwar um so schwächer, je größer die "stützende" Belastung ε_2 ist. Die ε_3 -Linien nehmen grundsätzlich erst im letzten Belastungsdrittel einen deutlich nichtlinearen Verlauf an. Die ε_2 -Linien neigen sich entsprechend dem Belastungsanteil σ_2 .
- Alle aus dreiaxialer Belastung berechneten Spannungs-Dehnungs-Linien sind prinzipiell denen aus Versuchen vergleichbar (Bild 4.15 bis 4.22). Voneinander abweichend sind stets die hydrostatischen Dehnungsverläufe infolge hydrostatischer Belastung, da hierfür in der Rechnung lineares Materialverhalten angenommen wurde. Auch nach dem Verzweigungspunkt infolge deviatorischer Weiterbelastung weichen die berechneten Linien in der Regel weniger stark von der Linearität ab als in den Versuchen (siehe insbesondere Bild 4.19, 4.22).

Das bei den dreiaxialen Berechnungen beobachtete fast-lineare Verhalten ist auf den dominierenden Einfluß der Stützwirkung dreiaxialer Spannungszustände in der Umgebung des hydrostatischen Zustandes zurückzuführen. Je mehr diese Stützwirkung zu-

rückgenommen wird, desto stärker krümmen sich die berechneten Dehnungslinien. Um hier Abhilfe zu schaffen und Versuch und Rechnung näher aneinander zu bringen, müßte das der Rechnung zugrundeliegende Materialmodell (siehe Abschnitt 2) geändert werden. Ein möglicher Änderungsvorschlag ist in Bild 4.26 dargestellt. Würde nämlich das affin zur (offenen) Bruchspannungsglocke postulierte Verfestigungsgesetz ersetzt werden durch ein Verfestigungsgesetz von allseitig geschlossener Form, so würden bereits hydrostatische Spannungspfade von Nichtlinearität begleitet sein und deviatorische Pfade einen größeren Grad von Nichtlinearität aufweisen (vgl. Abschnitt 2.3). Auf die Durchführung einer solchen Änderung wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

Allen berechneten Spannungs-Dehnungs-Linien liegt der E-Modul $E_0 = 22000.0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ zugrunde (siehe Bild 4.6). Durch eine Regressionsanalyse für die Gruppe der ein- und zwei axialen Versuche und Rechnungen siehe Bild 4.11 bis 4.14 soll nun eine optimale Justierung des E-Moduls vorgenommen werden. (Eine Regressionsanalyse, die auch drei axiale Versuchs- und Rechenergebnisse umfaßt, sollte - wie oben erläutert - auf der Grundlage eines verfeinerten rechnerischen Materialmodells beruhen und wird daher hier nicht durchgeführt.) Aus Abschnitt 2.5, Formel (2.32) folgt, daß sich der E-Modul E_0 als skalare Größe abspalten läßt:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{E} d\mathbf{e} = E_0 \bar{\mathbf{E}} d\mathbf{e} . \quad (4.5)$$

Für einen optimierten E-Modul $\tilde{E}_0 = \frac{1}{k} E_0$ lautet (4.5):

$$d\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{E}} d\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{k} E_0 \bar{\mathbf{E}} d\tilde{\mathbf{e}} . \quad (4.6)$$

Aus (4.5) und (4.6) folgt, daß für gleiche Spannungszuwächse $d\mathbf{s}$ die Dehnungszuwächse $d\mathbf{e}$ und $d\tilde{\mathbf{e}}$ proportional sind:

$$d\tilde{\mathbf{e}} = k d\mathbf{e} . \quad (4.7)$$

Die in Bild 4.11 bis 4.22 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Linien unterscheiden sich bei Veränderung des E-Moduls also nur durch Skalenveränderung auf der $\bar{\epsilon}$ - Achse.

Das Regressionsproblem wird wie folgt formuliert (siehe Bild 4.27):

$$F = \sum_{i=1}^n g_i \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (k \epsilon_i^* - \epsilon_i)^2 \rightarrow \text{Minimum}, \quad (4.8)$$

F = gewichtete Summe der Fehlerquadrate,

g_i = Gewichtungsfaktoren,

- k = Optimierungsparameter,
- ϵ_i = berechnete Dehnung bei gegebenem E_0 ,
- ϵ_i^* = gemessene Dehnung (Versuch).

Durch Differentiation folgt für k und den optimalen E-Modul \tilde{E}_0 :

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \sum_{i=1}^n 2g_i (k\epsilon_i - \epsilon_i^*) \epsilon_i = 0, \quad (4.9)$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \epsilon_i \epsilon_i^*}{\sum_{i=1}^n g_i \epsilon_i^2},$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{k} E_0. \quad (4.10)$$

Wertet man die Ergebnisse zu Bild 4.11 bis 4.14 dahingehend aus, daß alle Fehlerbeiträge δ_i unterhalb der Bruchgrenze (siehe Bild 4.27) mit Faktor $g_i = 1$ in (4.8), (4.9) eingehen und Beiträge auf der Bruchgrenze durch $g_i = 0$ ausgeschlossen werden (vgl. Abschnitt 4.2, Beispiel 3), so ergibt sich der E-Modul zu:

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{1.12} * 22000.0 = 19650 \text{ [N/mm}^2\text{]}. \quad (4.11)$$

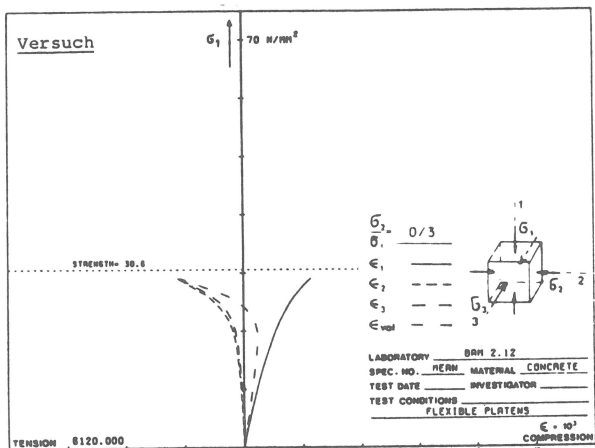


BILD 4.11 Spannung-Dehnungs-Linien einaxial

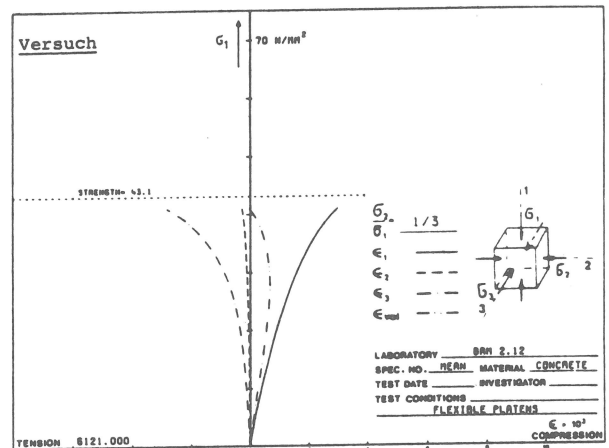


BILD 4.12 Spannung-Dehnungs-Linien zwei axial, Spannungspfad $\sigma_1/\sigma_2=3/1$

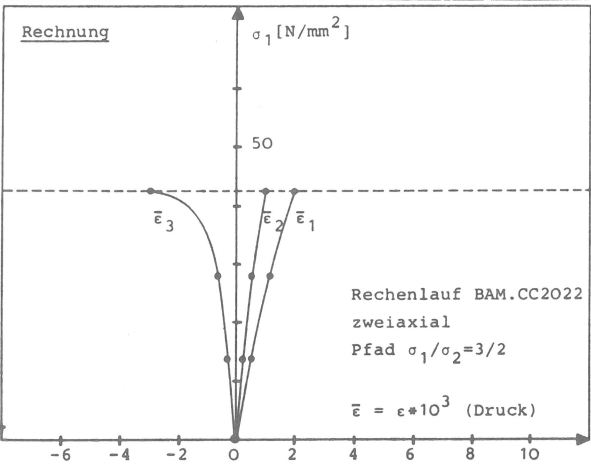
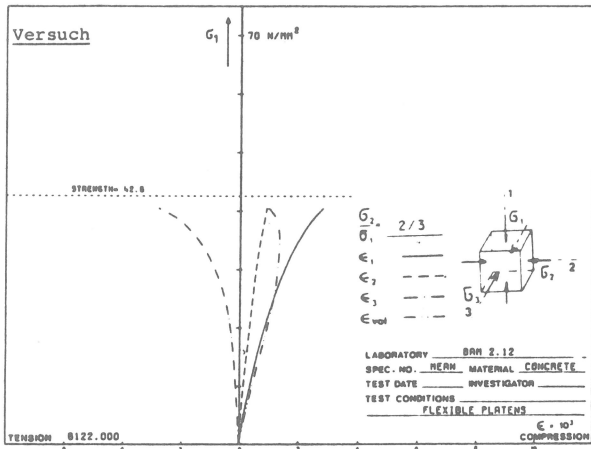


BILD 4.13 Spannungs-Dehnungs-Linien zwei axial, Spannungspfad $\sigma_1/\sigma_2=3/2$

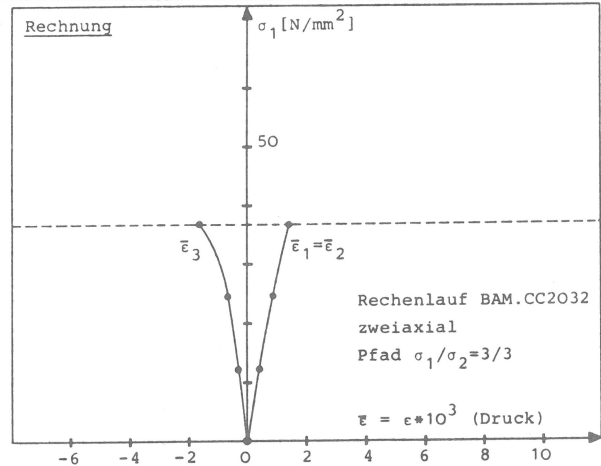
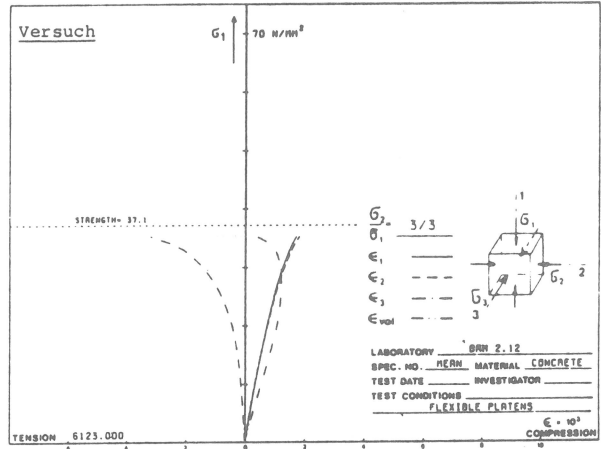


BILD 4.14 Spannungs-Dehnungs-Linien zwei axial, Spannungspfad $\sigma_1/\sigma_2=3/3$

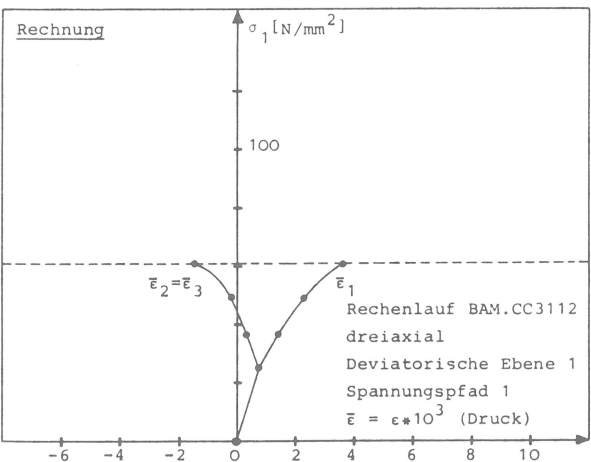
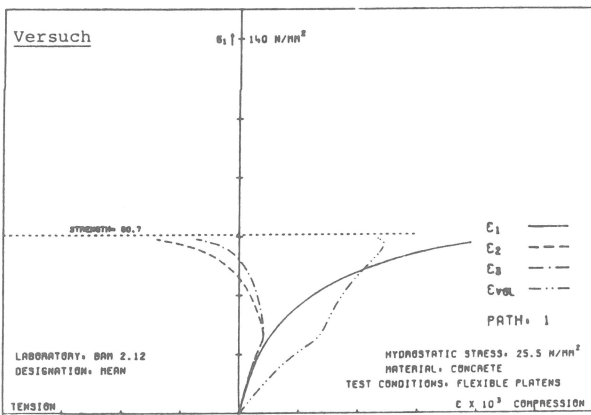


BILD 4.15 Spannungs-Dehnungs-Linien drei axial, Deviatorische Ebene 1, Spannungspfad 1

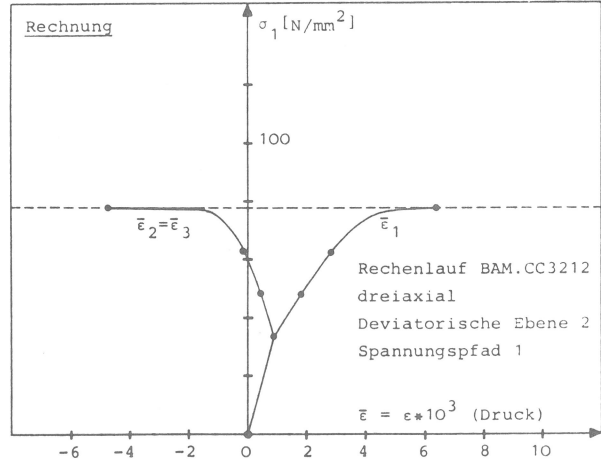
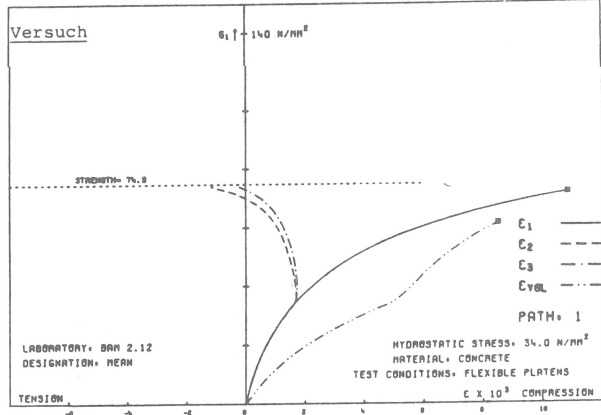


BILD 4.16 Spannungs-Dehnungs-Linien drei axial, Deviatorische Ebene 2, Spannungspfad 1

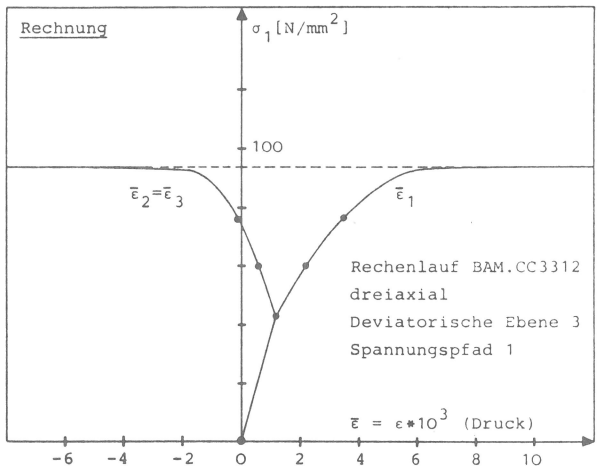
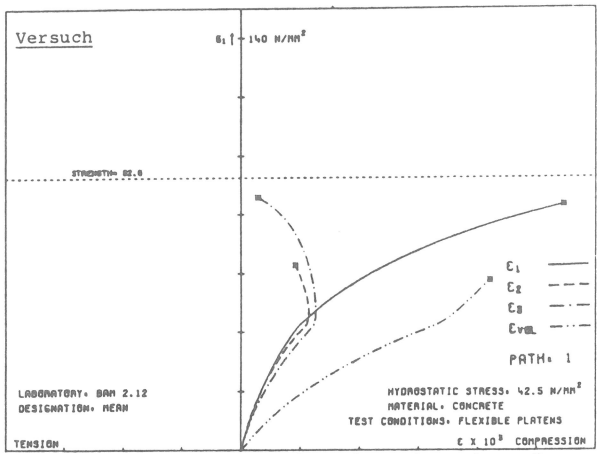


BILD 4.17 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 3, Spannungspfad 1

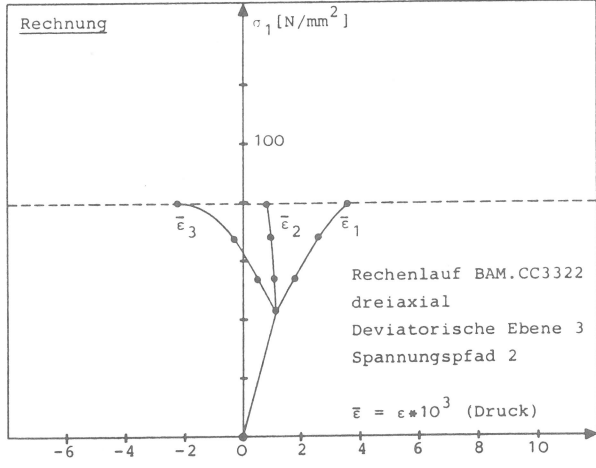
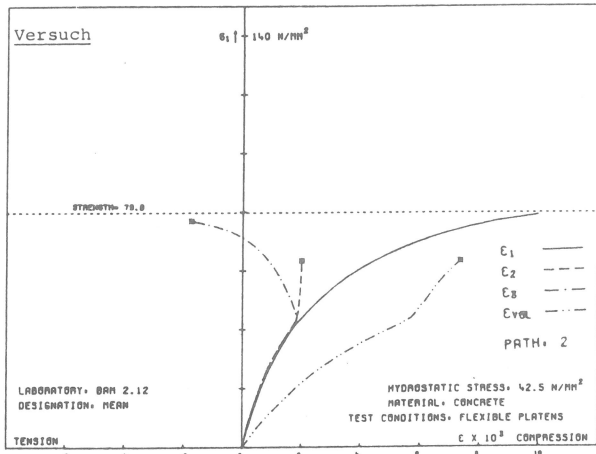


BILD 4.18 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 3, Spannungspfad 2

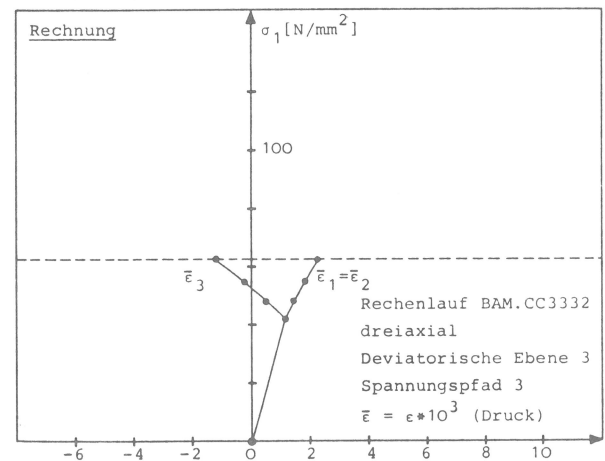
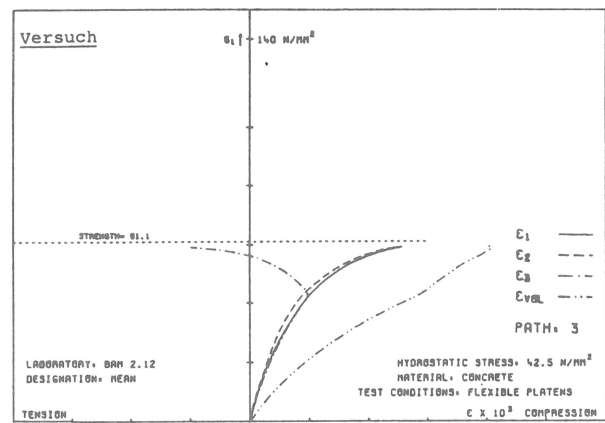


BILD 4.19 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 3, Spannungspfad 3

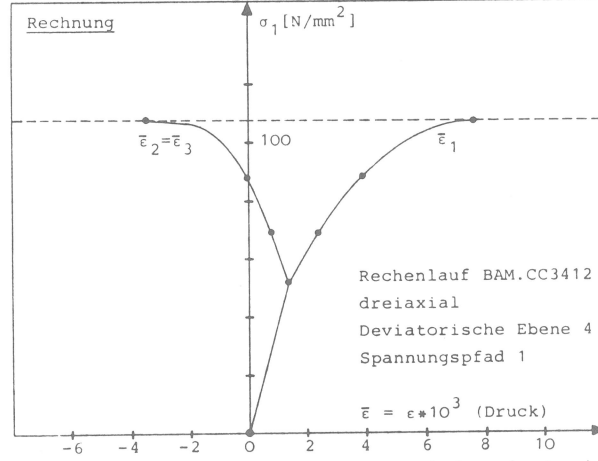
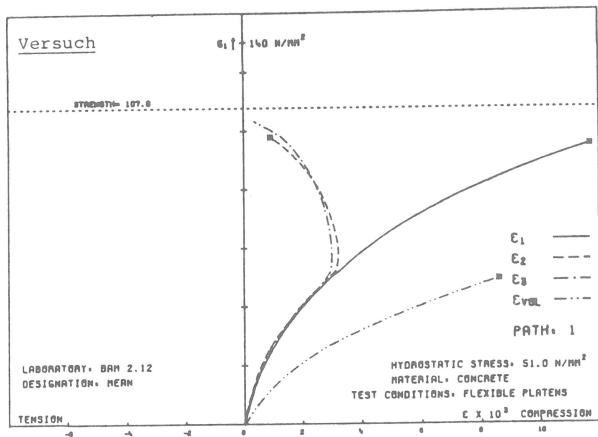


BILD 4.20 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 4, Spannungspfad 1

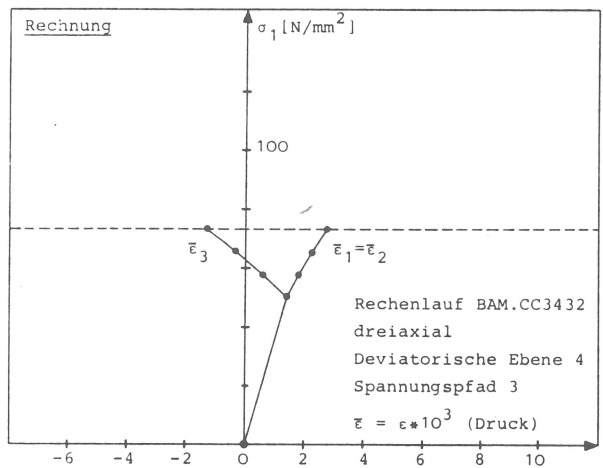
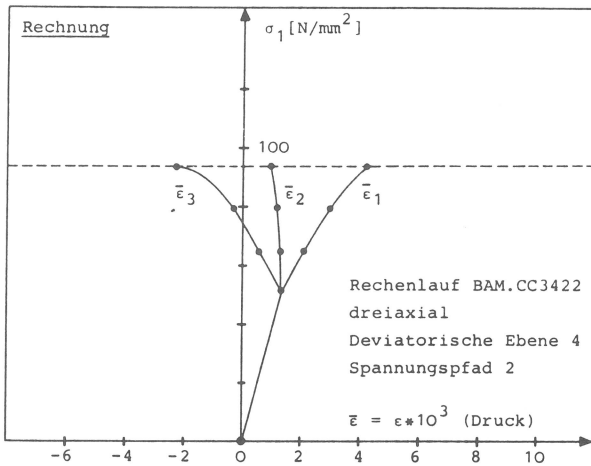
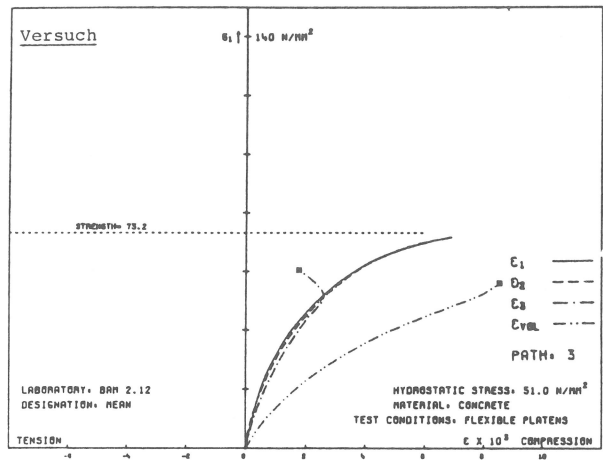
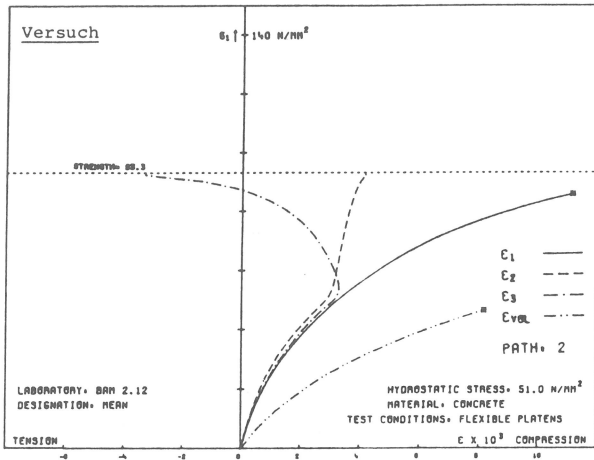


BILD 4.21 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 4, Spannungspfad 2

BILD 4.22 Spannungs-Dehnungs-Linien dreiaxial, Deviatorische Ebene 4, Spannungspfad 3

Rechenlauf	Laststufe	Hauptspannungen			Hauptdehnungen		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$
BAM.CC1002	1	10.200	0.000	0.000	0.471	-0.110	-0.110
	2	20.400	0.000	0.000	0.974	-0.289	-0.289
	3 (Bruch)	30.599	0.003	0.003	1.984	-1.622	-1.622
	4	-	-	-	-	-	-
BAM.CC2012	1	14.370	4.730	0.000	0.615	0.081	-0.196
	2	28.740	9.460	0.000	1.249	0.158	-0.489
	3 (Bruch)	43.068	14.205	0.216	2.311	0.087	-2.998
	4	-	-	-	-	-	-
BAM.CC2022	1	14.200	9.400	0.000	0.563	0.298	-0.235
	2	28.400	18.800	0.000	1.137	0.600	-0.554
	3 (Bruch)	42.594	28.200	0.043	1.980	0.971	-2.902
	4	-	-	-	-	-	-
BAM.CC2032	1	12.370	12.370	0.000	0.452	0.452	-0.245
	2	24.740	24.740	0.000	0.910	0.910	-0.568
	3 (Bruch)	37.106	37.106	0.035	1.430	1.430	-1.610
	4	-	-	-	-	-	-

BILD 4.23 Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM, Spannungen und Dehnungen aus ein-/zweiachialer Berechnung

Rechenlauf	Laststufe	Hauptspannungen			Hauptdehnungen		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$
BAM.CC3112	1	25.500	25.500	25.500	0.695	0.695	0.695
	2	37.700	19.400	19.400	1.411	0.338	0.338
	3	49.900	13.300	13.300	2.228	-0.112	-0.112
	4 (Bruch)	61.839	7.601	7.601	3.527	-1.476	-1.476
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3212	1	34.000	34.000	34.000	0.927	0.927	0.927
	2	48.800	26.600	26.600	1.809	0.486	0.486
	3	63.600	19.200	19.200	2.864	-0.086	-0.086
	4 (Bruch)	78.450	12.019	12.019	6.427	-4.826	-4.826
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3312	1	42.500	42.500	42.500	1.159	1.159	1.159
	2	59.500	34.000	34.000	2.186	0.646	0.646
	3	76.500	25.500	25.500	3.470	-0.038	-0.038
	4 (Bruch)	93.518	17.000	17.000	11.897	-11.386	-11.386
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3322	1	42.500	42.500	42.500	1.159	1.159	1.159
	2	54.900	42.500	30.100	1.848	1.145	0.484
	3	67.300	42.500	17.700	2.600	1.083	-0.242
	4 (Bruch)	79.740	42.326	6.348	3.668	0.930	-2.270
	5	-	-	-	-	-	-

BILD 4.24 Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM, Spannungen und Dehnungen aus dreiaxialer Berechnung

Rechenlauf	Laststufe	Hauptspannungen			Hauptdehnungen		
		σ_1	σ_2	σ_2	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_3$
BAM.CC3332	1	42.500	42.500	42.500	1.159	1.159	1.159
	2	48.800	48.800	29.900	1.507	1.507	0.463
	3	55.100	55.100	17.300	1.862	1.862	-0.260
	4 (Bruch)	61.400	61.400	4.700	2.231	2.231	-1.130
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3412	1	51.000	51.000	51.000	1.391	1.391	1.391
	2	70.100	41.450	41.450	2.560	0.806	0.806
	3	89.200	31.900	31.900	4.088	0.007	0.007
	4 (Bruch)	108.300	22.350	22.350	7.769	-3.546	-3.546
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3422	1	51.000	51.000	51.000	1.391	1.391	1.391
	2	65.200	51.000	36.800	2.182	1.373	0.618
	3	79.400	51.000	22.600	3.052	1.289	-0.205
	4 (Bruch)	93.753	50.860	8.940	4.285	1.081	-2.261
	5	-	-	-	-	-	-
BAM.CC3432	1	51.000	51.000	51.000	1.391	1.391	1.391
	2	58.500	58.500	36.000	1.806	1.806	0.560
	3	66.000	66.000	21.000	2.232	2.232	-0.309
	4 (Bruch)	73.514	73.514	5.845	2.673	2.673	-1.330
	5	-	-	-	-	-	-

BILD 4.25 Nachrechnung Würfeldruckversuche der BAM, Spannungen und Dehnungen aus dreiaxialer Berechnung

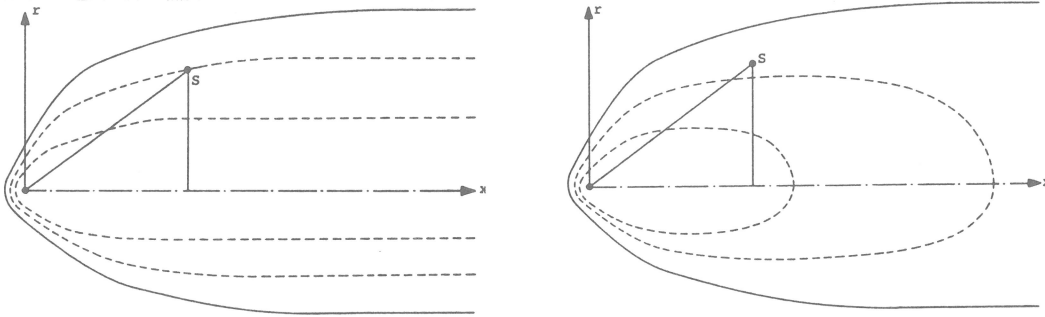


BILD 4.26

Bruchspannungsglocke mit isotropem Verfestigungsgesetz und Modifikationsvorschlag für Nichtlinearität längs der hydrostatischen Achse x

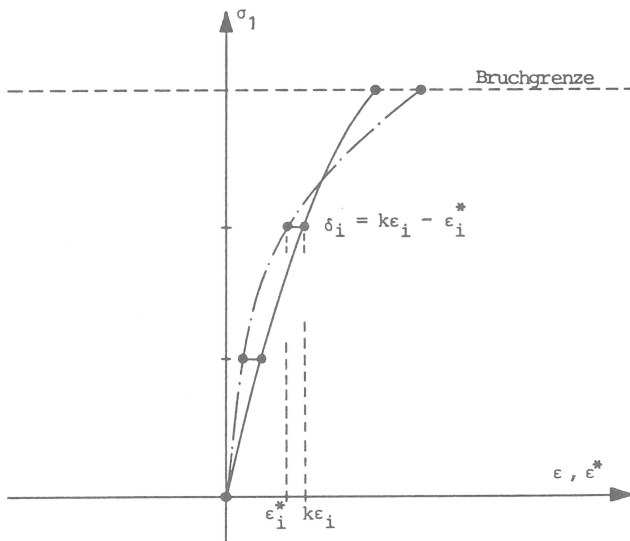


BILD 4.27

Abweichung der Dehnungen aus Versuch (ϵ^*) und Rechnung (ϵ), Ansatz für Regressionsanalyse

4.4 Demonstrationsbeispiel Staumauer

Das folgende Beispiel beinhaltet einen typischen Anwendungsfall für vorwiegend druckbeanspruchten unbewehrten Massenbeton. Es soll daher zum Gegenstand einer nichtlinearen statischen Analyse gemacht werden. Ziel der Berechnung ist es, die Wirkungsweise des hier formulierten Materialgesetzes und nichtlinearen Berechnungsverfahrens anhand eines größeren Finite-Elemente-Systems zu demonstrieren.

Das gewählte Bauwerk ist eine kombinierte Bogen-Gewichts-Staumauer mit symmetrischer Form in einem nahezu V-förmigen Tal (siehe Bild 4.28). Das statische System erstreckt sich auf eine symmetrische Hälfte vom linken Stausee-Ufer bis zur Mauermitte. Das zugehörige Finite-Elemente-Netz besteht aus insgesamt 28 Quader-elementen mit inkompatiblen Verschiebungsansatz [5]. Die Generierung der Knotenkoordinaten ist in Bild 4.29 dargestellt und wird wie folgt beschrieben.

Gegeben sind die Gleichungen der Mauermittelfläche (4.12), einer im Mauerbereich prismatischen Talform (4.13) und der Mauerdicke (4.14):

$$x = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \quad , \quad (4.12)$$

$$y^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{b} \quad , \quad (4.13)$$

$$t = \mathbf{z}^T \mathbf{t} \quad , \quad (4.14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23.75 & 0.105697 \cdot 10^{-1} & -0.179153 \cdot 10^{-6} \\ -0.46 & -0.145010 \cdot 10^{-3} & 0.428786 \cdot 10^{-8} \\ 0.4125 \cdot 10^{-2} & 0.687626 \cdot 10^{-6} & -0.251620 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 63.8792 \\ 66.9286 \\ 3.0422 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 32.8333 \\ -0.3 \\ 0.4167 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ y^2 \\ y^4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \quad .$$

Für die in Bild 4.29 dargestellten Abschnitte auf der y-Achse lassen sich mit (4.13) und (4.12) insgesamt fünf Koordinaten-tripel von Punkten auf der Fußlinie der Mauermittelfläche bestimmen. Ihnen werden Vertikalebene $y = \text{konst.}$ zugeordnet und mit der Mauermittelfläche zum Schnitt gebracht. Auf diesen Schnittlinien liegen in gleichem vertikalem Abstand z vier wei-

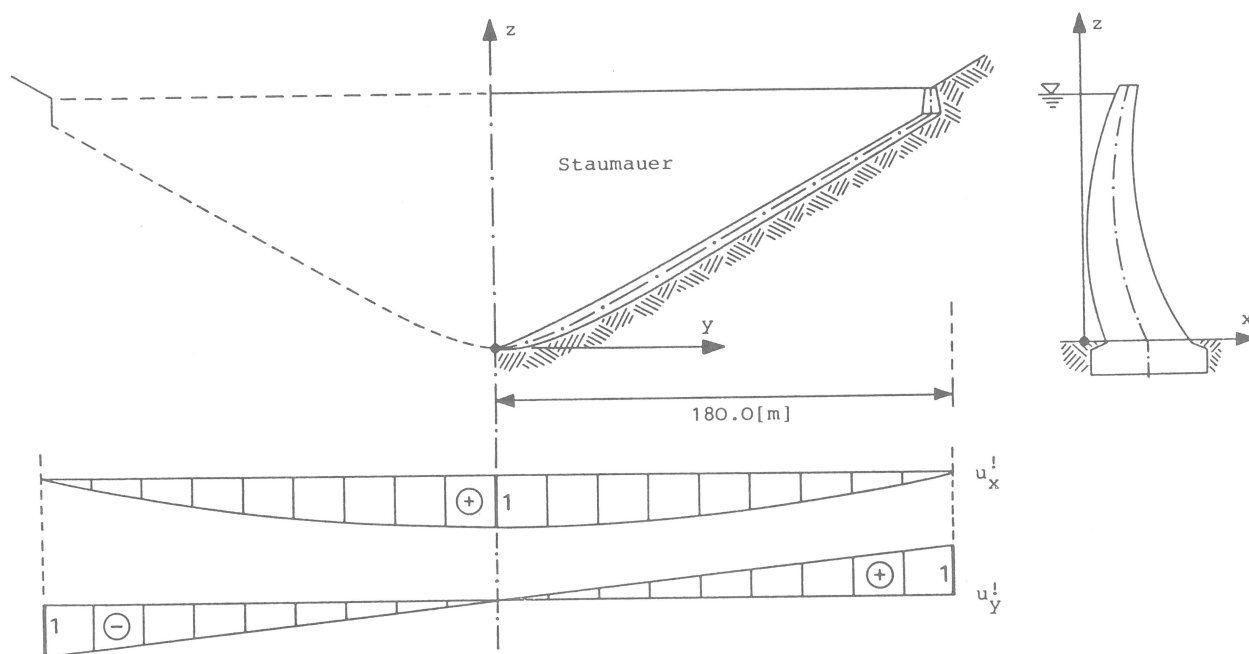


BILD 4.28 Talform des Stausees mit Staumauer in y-z-Ebene, Querschnitt in x-z-Ebene, Eingeprägte Fundamentverschiebungen $u_x^!$, $u_y^!$ (Einheitsverschiebungen)

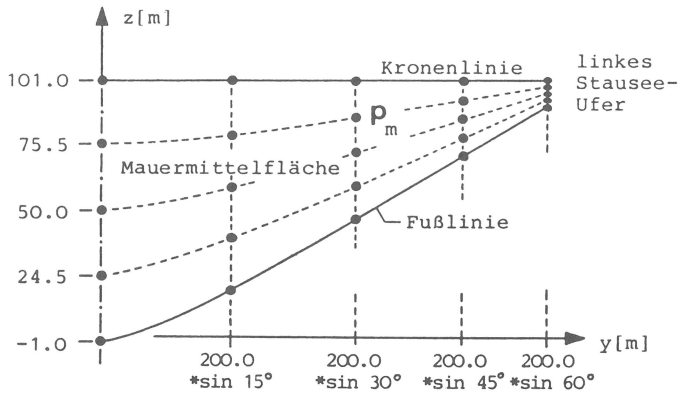
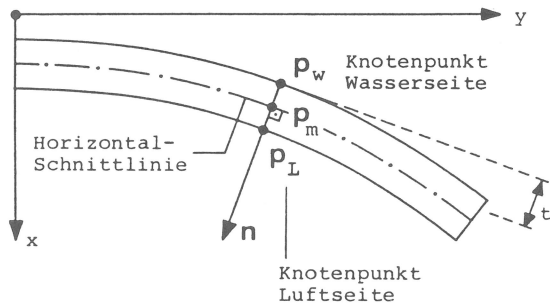


BILD 4.29

Generierung von Knotenpunkten für Finite-Elemente-Netz der Staumauer



tere Punkte aufsteigend bis zur Kronenlinie $z=101.0$, in der die Mauermittelfläche endet. So sind insgesamt 25 Punkte auf der Mauermittelfläche (4.12) festgelegt, deren Koordinaten jeweils durch einen Vektor \mathbf{p}_m beschrieben werden:

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Ausgehend von \mathbf{p}_m werden nun die Knotenpunkte auf der Maueroberfläche gesucht. Durch jeden Punkt der Mittelfläche wird eine Horizontalschnittlinie gelegt und deren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} bestimmt:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + n_2^2}} * \begin{bmatrix} 1 \\ -n_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$n_2 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{y}),$$

wobei n_2 durch Differentiation von (4.12) und Einsetzen von y_m , z_m berechnet wird. Die gesuchten Knotenpunkte auf der Maueroberfläche folgen paarweise für Wasser- und Luftseite aus je einem Mauermittelflächenpunkt mit (4.14), (4.15) und (4.16):

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{p}_m - \frac{1}{2} t \mathbf{n} , \quad (4.17)$$

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{p}_m + \frac{1}{2} t \mathbf{n} .$$

Zusätzlich werden Knotenpunkte für ein Fundament generiert. Diese ergeben sich ausgehend von den Punkten \mathbf{p}_m auf der Fußlinie zu:

$$\mathbf{p}_w^F = \mathbf{p}_m - \tilde{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} (t + \tilde{t}) \mathbf{n} , \quad (4.18)$$

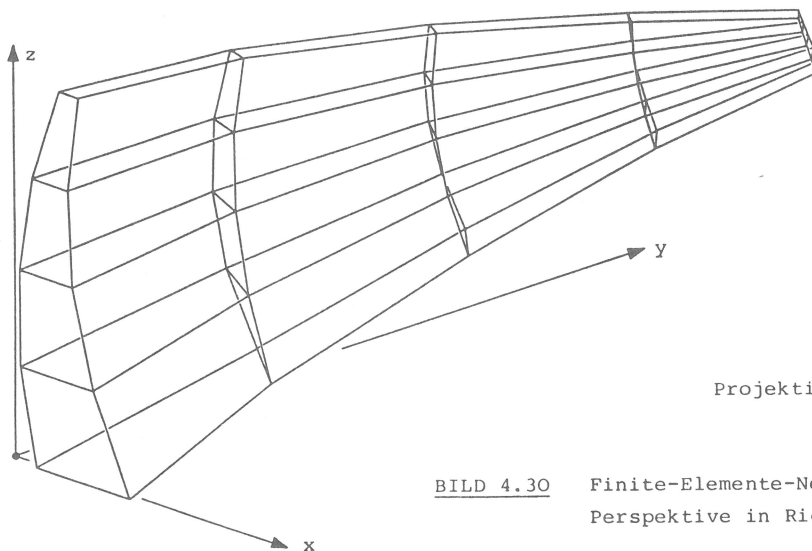
$$\mathbf{p}_L^F = \mathbf{p}_m - \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (t + \tilde{t}) \mathbf{n} ,$$

wobei für drei Punktepaare jeweils einzusetzen sind:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.0 \end{bmatrix} ,$$

$$\tilde{t} = 12.0 , \quad 12.0 , \quad 0 .$$

Mit den so festgelegten Knotenpunkten läßt sich ein regelmäßiges Finite-Elemente-Netz aufspannen. 16 Elemente entfallen auf die Mauer selbst (siehe Bild 4.30). 12 Elemente bilden ein Streifen-



Projektionsrichtung: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

BILD 4.30 Finite-Elemente-Netz der Staumauer (ohne Fundament), Perspektive in Richtung des Vektors \mathbf{v}

fundament, dessen äußerer Rand starr gefesselt ist, jedoch durch eingeprägte Verschiebungen bewegt werden kann. Das Fundament wirkt als elastische Bettung für die Mauer und trägt (als Ersatzsystem für den fehlenden Untergrund) tendenziell zum Abbau von Spannungsspitzen im Fußpunktbereich bei.

Die übrigen Systemdaten werden wie folgt vereinbart:

- Elastizitätsmodul: $E_0 = 25000.0[\text{MN}/\text{m}^2]$,
- Querkontraktionszahl: $\nu = 0.2$,
- spezifisches Gewicht Beton: $\gamma = 0.024[\text{MN}/\text{m}^3]$,
- Bruchspannungsglocke: (siehe Abschnitt 4.3).

Die hier gewählte Belastung der Staumauer enthält die Lastfälle Eigengewicht, Wasserdruck und Eingeprägte Fundamentverschiebungen. Diese werden in mehreren Laststufen nacheinander auf das System aufgebracht (siehe Bild 4.31). Für den Lastfall Eingeprägte Fundamentverschiebungen wird (nach Auswertung einer Vorstudie) folgende Verschiebungskonfiguration gewählt (siehe Bild 4.28):

$$\mathbf{u}^I(y) = k * \begin{bmatrix} u_x^I \\ -u_y^I \end{bmatrix} = k * \begin{bmatrix} 1 - (y/180)^2 \\ -y/180 \end{bmatrix} . \quad (4.19)$$

Gleichung (4.19) beschreibt Einheitsverschiebungen an jeder Stelle des Tales im Fundamentbereich der Staumauer in Abhängigkeit von der Koordinate y . Der Faktor k bestimmt die Intensität der Verschiebung. Beispielsweise bedeutet $k=0.01$ eine Horizontalverschiebung der Talsohle um 1[cm] in x -Richtung, begleitet von einer Verkürzung des Uferabstandes um 2[cm] in y -Richtung. Die in Bild 4.31 eingetragenen Laststufen basieren auf den Faktoren $k=-0.005$ und $k=+0.005$.

Die Ergebnisse der nichtlinearen statischen Analyse sind für die Berechnungsstationen am Ende der Laststufen 1, 4, 8A und 8B in Bild 4.32 bis 4.38 dargestellt.

Bild 4.32 und 4.33 zeigen die Systemverschiebungen in der Symmetrieebene der Staumauer.

Als charakteristische Aussage zur Nichtlinearität werden die Gefügauflockerungsgrade p (siehe Abschnitt 2.5) graphisch dargestellt. Diese werden jedoch - ebenso wie die Spannungen - nicht am Ort ihrer Berechnung (Gausspunkte) ausgegeben, sondern auf die Oberfläche des Systems interpoliert (siehe Bild 4.34). Als Interpolationspunkte werden dabei die Mittelpunkte der Finite-Element-Oberflächen auf der Wasserseite bzw. Luftseite der Mauer gewählt. Die interpolierten Spannungen werden nun aus dem x,y,z -Koordinatensystem in eine solche Lage transformiert, die den Flächennormalenvektor \mathbf{h} (siehe Bild 4.34) beinhaltet und in der zugehörigen Tangentialebene die Hauptlage einnimmt.

Schließlich wird ein Projektionszylinder definiert, der sich zur Darstellung der Ergebnisse bei geringstmöglicher graphischer Verzerrung eignet. Die berechneten Hauptspannungen an der Elementoberfläche sowie Gefügauflockerungsgrade werden in Richtung \mathbf{k} (siehe Bild 4.34) auf den Zylinder projiziert. Bild 4.35 bis 4.38 zeigen die Abwicklung des Zylinders mit der projizierten Staumauer und den Ergebnissen.

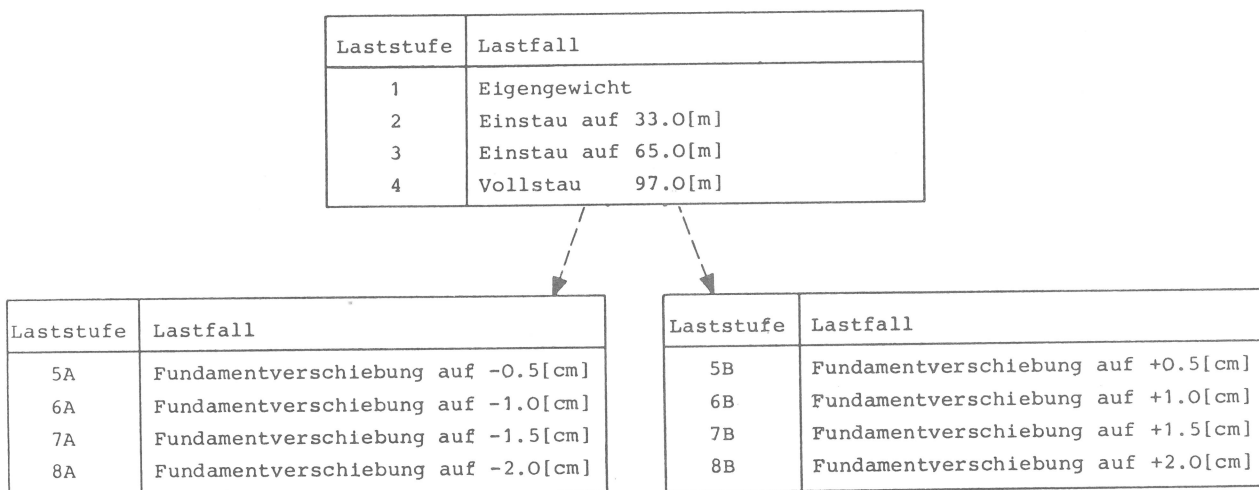


BILD 4.31 Laststufenfolge für nichtlineare statische Analyse der Staumauer

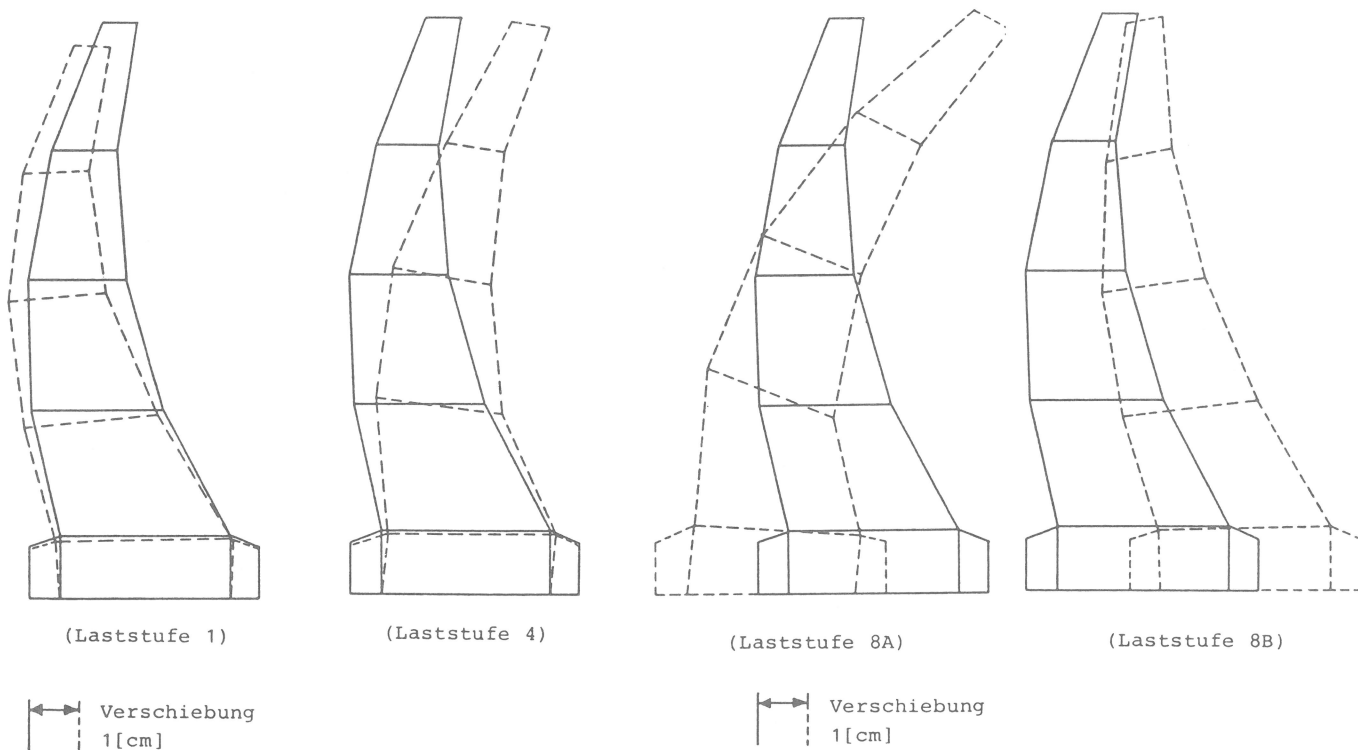


BILD 4.32

Verschiebungen (Symmetrieebene) am Ende der Laststufen 1 (Eigengewicht) und 4 (Eigengewicht + Vollstau)

BILD 4.33

Verschiebungen (Symmetrieebene) am Ende der Laststufen 8A und 8B (Eigengewicht + Vollstau + Eingeprägte Fundamentverschiebungen)

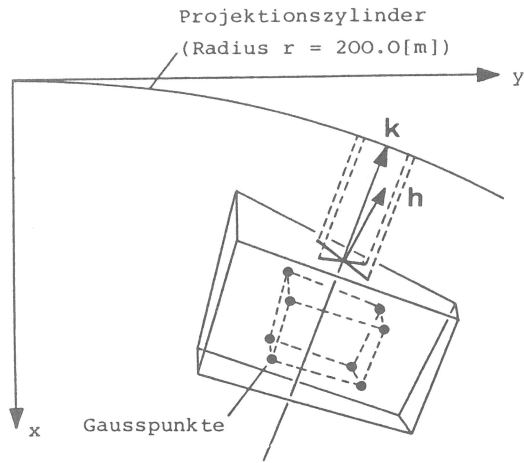


BILD 4.34

Interpolation der Spannungen und Gefügeauflockerungsgrade auf die Elementoberfläche, Flächennormalenvektor h , Projektionszylinder und Projektionsrichtung k

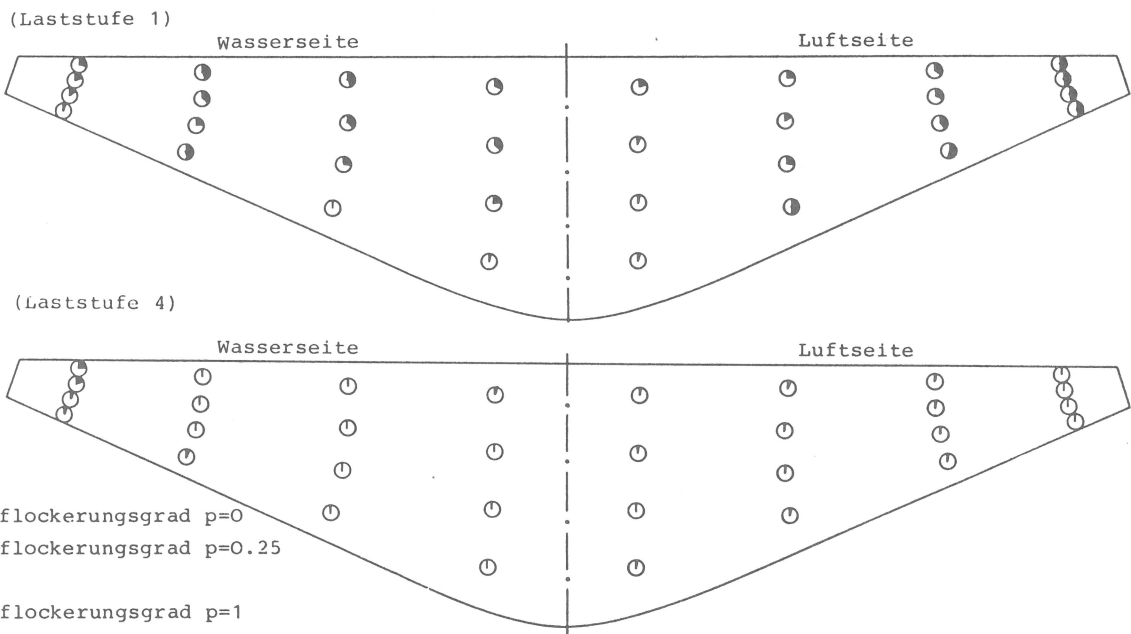


BILD 4.35 Abwicklung der Zylinderprojektion der Staumauer, interpolierte Gefügeauflockerungsgrade am Ende der Laststufen 1 (Eigengewicht) und 4 (Eigengewicht + Vollstau)

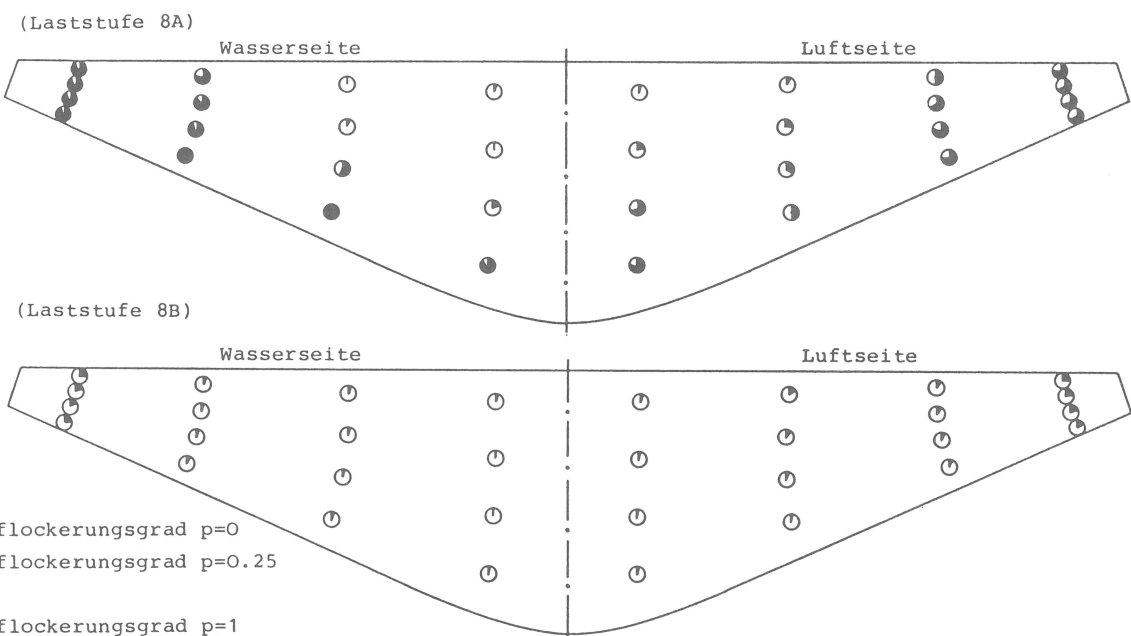
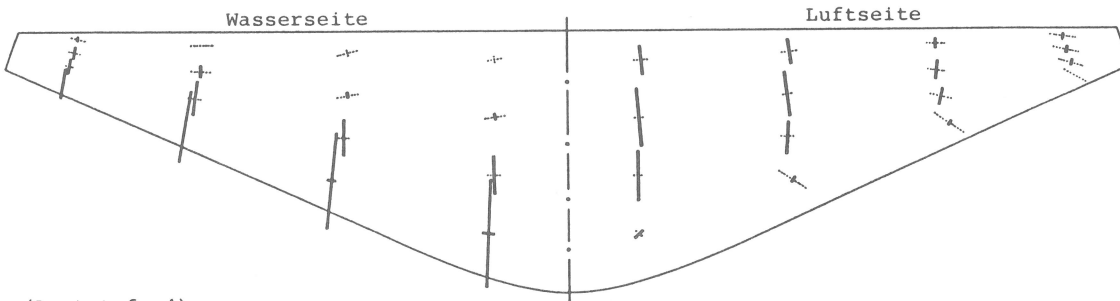
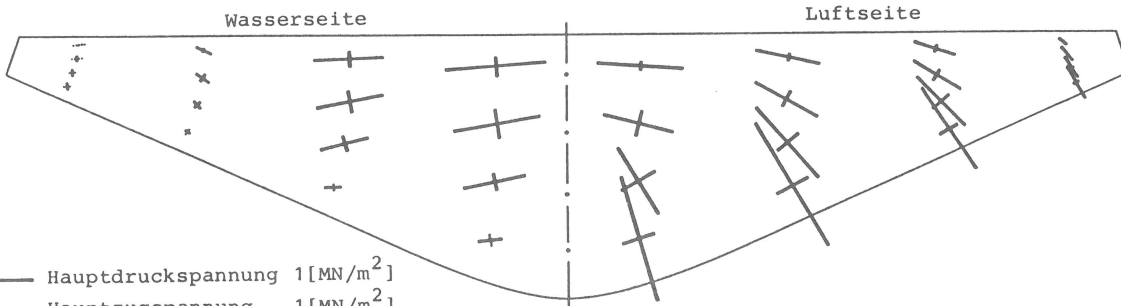


BILD 4.36 Abwicklung der Zylinderprojektion der Staumauer, interpolierte Gefügeauflockerungsgrade am Ende der Laststufen 8A und 8B (Eigengewicht + Vollstau + Eingeprägte Fundamentverschiebungen)

(Laststufe 1)



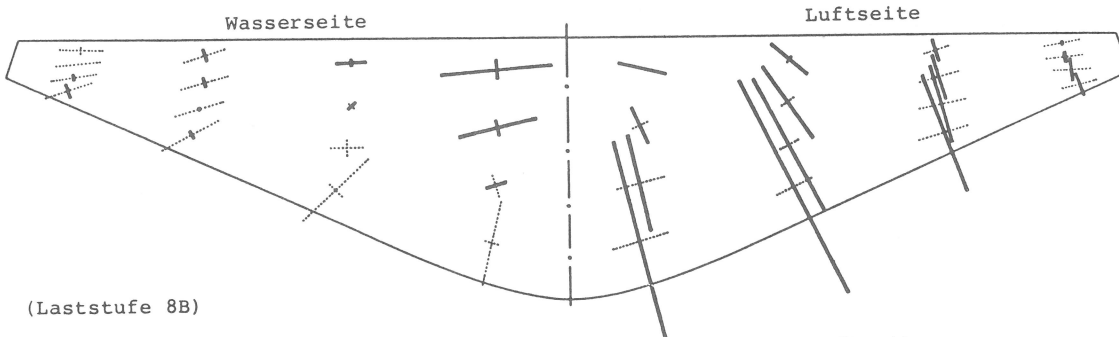
(Laststufe 4)



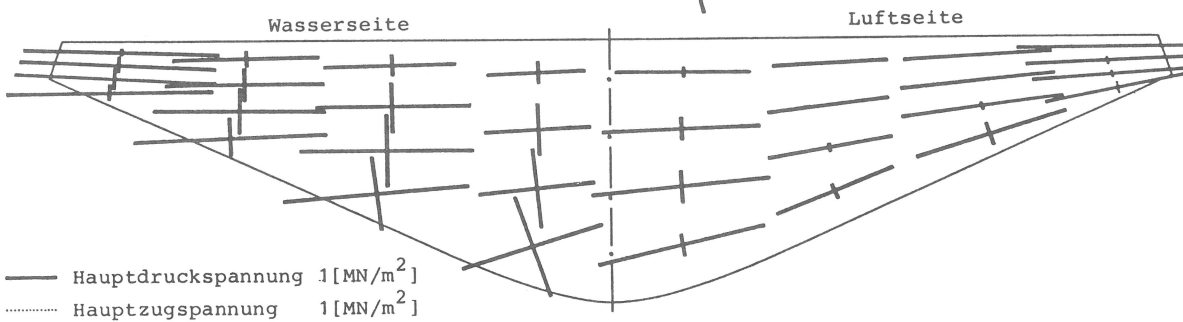
— Hauptdruckspannung $1 \text{ [MN/m}^2\text{]}$
..... Hauptzugspannung $1 \text{ [MN/m}^2\text{]}$

BILD 4.37 Abwicklung der Zylinderprojektion der Staumauer, interpolierte Spannungen (Hauptspannungen in der Oberflächen-Tangentialebene) am Ende der Laststufen 1 (Eigengewicht und 4 (Eigengewicht + Vollstau)

(Laststufe 8A)



(Laststufe 8B)



— Hauptdruckspannung $1 \text{ [MN/m}^2\text{]}$
..... Hauptzugspannung $1 \text{ [MN/m}^2\text{]}$

BILD 4.38 Abwicklung der Zylinderprojektion der Staumauer, interpolierte Spannungen (Hauptspannungen in der Oberflächen-Tangentialebene) am Ende der Laststufen 8A und 8B (Eigengewicht + Vollstau + Eingeprägte Fundamentverschiebungen)

5. Folgerungen

Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Schwerpunkte

- nichtlineares Materialgesetz für Beton,
- nichtlineares Berechnungsverfahren,
- Rechner-Implementierung und
- Beispielanalyse

geben aus der Sicht ihrer gesamtheitlichen Bearbeitung Anlaß zu einer Reihe von Feststellungen, die im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

5.1. Bewertung des Materialgesetzes

Das Verhalten von unbewehrtem Beton im Druckbereich wird durch das in Abschnitt 2 beschriebene Materialgesetz gut erfaßt. Eine weitere Anpassung - insbesondere an dreidimensionale Testergebnisse - ist unter Beibehaltung des methodischen Ansatzes möglich. Ob dieses zweckmäßig ist, sollte unter dem Gesichtspunkt praktischer Anwendbarkeit eines verfeinerten Modells beantwortet werden. Zunächst hätten hier jedoch die Einführung eines wirklichkeitsnahen Zugspannungsverhaltens (Rißbildung und Verwaltung) sowie Material-Zusammenbruch Vorrang.

Für die Bedürfnisse eines vereinfachten Berechnungsverfahrens zeigt sich das Materialgesetz verfahrensfreundlich, aber rechenaufwendig. Insbesondere ist aus praktischer Sicht zu empfehlen, das Interpolationsmodell der Bruchspannungsglocke weiter zu vereinfachen. Während einer Finite-Elemente-Analyse steht das Materialgesetz nämlich auf unterster Stufe der Rechenprogramm-Hierarchie und wird dort mit am häufigsten aufgerufen. Andererseits steht das Materialgesetz im Zentrum der Berechnung sekundärer Größen und nimmt dort die Funktion wahr, eingeschleppte Verfahrensfehler zu korrigieren. Hieraus resultiert ein Konflikt zwischen den Forderungen nach Effizienz und Genauigkeit.

5.2. Bewertung des nichtlinearen Berechnungsverfahrens

Während der Beispielanalyse zeigt das implementierte BFGS-Verfahren hohe Geschwindigkeit des einzelnen Lösungsschrittes, ziel-
sichereren Richtungswechsel im n-dimensionalen Verschiebungsraum

und Stabilität der Lösung. Versuche, das BFGS-Verfahren im Rahmen dieser Arbeit weiter zu beschleunigen, sind erfolglos geblieben. Zwar ist es möglich, zu Beginn einer Laststufe den ersten Lastschritten größere Verschiebungszuwächse in scheinbar günstigeren Richtungen zu verleihen, jedoch wird das beschleunigte Vorgehen sehr bald durch den Algorithmus der Schrittweitenoptimierung (kleinstes Quadrat der Restkräfte) gebremst und schließlich durch langsamere Konvergenz bestraft. Die Berechnung primärer Größen ist aber ohnehin nicht rechenzeitkritisch (siehe Abschnitt 5.3).

Die gesicherte Positiv-Definitheit (Semidefinitheit) des BFGS-Verfahrens hat gleichzeitig Einschränkungen für die Verwendbarkeit zur Folge. Bei eventueller Kopplung mit einem Materialgesetz, das Entfestigung und Materialzusammenbruch beschreibt, kann die Überschreitung des Traglastpunktes mit nachfolgender rechnerischer Kontrolle der Zusammenbruchphase nur über eine globale Sekantenmethode erreicht werden. Hierbei würden statt kleiner Inkremente iterativ zu korrigierende Gesamtschritte in Last und Verschiebung berechnet werden müssen.

5.3. Interaktion der Algorithmen

Der wechselseitige Aufruf von Primär- und Sekundärrechnung ist begleitet von gegenseitiger Datenversorgung zur Weiterverarbeitung:

Die Primärrechnung liefert Verschiebungszuwächse für die Ermittlung sekundärer Größen.

Die Sekundärrechnung liefert u.a. Restkräfte für die approximative Korrektur der Systemmatrix.

Für einen stabilen Lösungsprozeß ist hierbei gleichermaßen die Qualität von Sende- und Empfangsalgorithmus von Bedeutung. Da das hier formulierte Materialgesetz frei von Sprüngen, Knicken und starken Krümmungen ist, ist es in der Lage, aus der Sicht des Materialverhaltens "im Kleinen" frühzeitig dem problemunabhängigen BFGS-Verfahren Systemänderungstendenzen anzukündigen. Das BFGS-Verfahren reagiert hierauf mit vorsichtigen Richtungsänderungen im nächsten Verschiebungszuwachs. Dieses ist besonders wichtig, da von der Wahl der Verschiebungsrichtungen letztlich die Richtigkeit des gesamten beschrittenen Lösungs-

pfades abhängt. Je größer die Inkremente, desto größer sind auch die in der Primärrechnung mit der Verschiebungsrichtung eingeschleppten nichtkorrigierbaren Fehler. Falsche Richtungen werden später nicht grundsätzlich verworfen, jedoch durch die Schrittweitenoptimierung gedämpft. Hierzu ist die mehrfache vollständige Berechnung sekundärer Größen notwendig, die sehr rechenaufwendig ist. Bei dem in Abschnitt 4.4 behandelten Beispiel liegen die Rechenzeiten zwischen Primär- und Sekundärrechnung in dem Verhältnis:

$$t_{\text{primär}} / t_{\text{sekundär}} = 1 / 200 .$$

Bei konsequenter Ausschaltung der Schrittweitenoptimierung verbessert sich das Verhältnis auf etwa 1/50, mindestens jedoch 1/100. Weitere Verbesserungen können nur durch einfachere Operationen auf der Materialgesetzebene erzielt werden (vgl. Abschnitt 5.1).

6. Zusammenfassung

Es wird ein Materialmodell für die nichtlineare statische Analyse von unbewehrtem Beton vorgeschlagen, bei dem die Nichtlinearität rechnerisch durch Spannungsumlagerungs-Restriktion erfaßt wird. Das Modell führt auf ein kontinuierlich gekrümmtes Spannungs-Dehnungs-Verhalten bis zum Bruch. Es zeigt gute numerische Kopplungseigenschaften mit einem modellunabhängigen nichtlinearen Berechnungsverfahren nach der Finite-Elemente-Methode. Eine Parameterstudie zwischen Materialmodell und Testergebnissen aus Würfeldruckversuchen ergibt gute Anschmiegung des Modells an ein- und zweiachsiges experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Linien sowie enge Verwandtschaft im dreiaxialen Verhalten. Die Brauchbarkeit des Materialmodells für statische Analysen wird anhand einer Bogen-Gewichts-Staumauer demonstriert.

Zur wirklichkeitsnahen Erfassung kritischen Verhaltens von unbewehrtem Beton ist neben dem hier behandelten Druckbereich eine eingehende Beschreibung des Zugbereiches von Interesse. Hier öffnet sich für weitere Forschung in Theorie und Experiment ein wesentliches Betätigungsfeld.

Anhang

A1. Äquivalenz von Summenform und Produktform

Gegeben sei ein Korrekturansatz für positiv definite, symmetrische Matrizen \mathbf{A} in der Summenform:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}} - \frac{\mathbf{A} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}, \quad (\text{A1.1})$$

\mathbf{A} = positiv definite, symmetrische Matrix,

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{a}^T \mathbf{b} > 0$,

\mathbf{A}^* = korrigierte Matrix.

Der Ansatz (A1.1) läßt sich überführen in einen äquivalenten Korrekturansatz für positiv definite, symmetrische Matrizen \mathbf{M} in der Produktform:

$$\mathbf{M}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{m} \mathbf{p}^T) \mathbf{M} (\mathbf{I} + \mathbf{m} \mathbf{p}^T)^T, \quad (\text{A1.2})$$

\mathbf{M} = positiv definite, symmetrische Matrix,

$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$,

\mathbf{M}^* = korrigierte Matrix.

Beweis:

Der Ansatz (A1.1) wird durch Expansion des Termes $\mathbf{a} \mathbf{a}^T / (\mathbf{a}^T \mathbf{b})$ in eine erweiterte Summenform gebracht.

Expansion:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}} &= (\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}} \left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right] \left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right]^T \\ &= (\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}) \left[\sqrt{\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right] \left[\sqrt{\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

Mit der Definition:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} - \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \quad (\text{A1.4})$$

vereinfacht sich (A1.3) zu:

$$\frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}} = (\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}) \left[\mathbf{x} + \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right] \left[\mathbf{x} + \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right]^T \quad (\text{A1.5})$$

Durch Substitution von (A1.5) in (A1.1) ergibt sich die erweiterte Summenform:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + (\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}) \left[\mathbf{x} + \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right] \left[\mathbf{x} + \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \right]^T - \frac{\mathbf{A} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} \quad (\text{A1.6})$$

In Parallelrechnung wird nun der Produktansatz (A1.2) durch Expansion ebenfalls in die erweiterte Summenform gebracht.

Expansion:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= (\mathbf{I} + \mathbf{m} \mathbf{p}^T) \mathbf{M} (\mathbf{I} + \mathbf{m} \mathbf{p}^T)^T \\ &= \mathbf{M} + \mathbf{m} \mathbf{p}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{m}^T + \mathbf{m} \mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{m}^T \\ &= \mathbf{M} + (\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}) \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{m}^T + \mathbf{m} \mathbf{p}^T \mathbf{M} \\ &= \mathbf{M} + (\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}) \left[\mathbf{m} \mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{M} \mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} \mathbf{m}^T + \mathbf{m} \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{M}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{M}}{(\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p})^2} \right] - \frac{\mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{M}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} \\ \mathbf{M}^* &= \mathbf{M} + (\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}) \left[\mathbf{m} + \frac{\mathbf{M} \mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} \right] \left[\mathbf{m} + \frac{\mathbf{M} \mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} \right]^T - \frac{\mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{M}}{\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}} \quad (\text{A1.7}) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich von (A1.6) und (A1.7) folgt die Äquivalenz der beiden Korrekturansätze (A1.1) und (A1.2), indem gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &\equiv \mathbf{M}^*, & \mathbf{x} &\equiv \mathbf{m}, \\ \mathbf{A} &\equiv \mathbf{M}, & \mathbf{b} &\equiv \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Die Summenform (A1.1) läßt sich also in die folgende Produktform überführen (und umgekehrt):

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T)^T, \quad (\text{A1.8})$$

\mathbf{x} siehe (A1.4).

A2. Invertierung von Produktformen

Gegeben sei ein Korrekturansatz für positiv definite, symmetrische Matrizen \mathbf{A} in der Produktform:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T)^T, \quad (\text{A2.1})$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}} - \frac{\mathbf{A} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}},$$

\mathbf{A} = positiv definite, symmetrische Matrix,

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{a}^T \mathbf{b} > 0$,

\mathbf{A}^* = korrigierte Matrix.

Gesucht sei ein Korrekturansatz für positiv definite, symmetrische Matrizen \mathbf{H} in der Produktform:

$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{y}^T) \mathbf{H} (\mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{y}^T)^T, \quad (\text{A2.2})$$

\mathbf{H} = positiv definite, symmetrische Matrix,

$\mathbf{c}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

\mathbf{H}^* = korrigierte Matrix.

In (A2.2) sollen \mathbf{c}, \mathbf{y} so bestimmt werden, daß mit (A2.1) folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{A2.3})$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{A}^{*-1}.$$

Die Bedingungen (A2.3) werden erfüllt, wenn gilt, daß:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{A}^* \mathbf{H}^* \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T)^T (\mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{y}^T) \mathbf{H} (\mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{y}^T)^T \quad (\text{A2.4}) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{H} \end{aligned}$$

Wie aus (A2.4) ersichtlich, bietet es sich an, \mathbf{c} und \mathbf{y} so zu bestimmen, daß das Produkt der inneren Klammern die Einheitsmatrix ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{b}^T)^T (\mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{y}^T) \quad (\text{A2.5}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{b} \mathbf{x}^T + \mathbf{c} \mathbf{y}^T + \mathbf{b} \mathbf{x}^T \mathbf{c} \mathbf{y}^T \end{aligned}$$

Mit der Wahl von \mathbf{c}

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (\text{A2.6})$$

kann \mathbf{y} aus (A2.5) ermittelt werden:

$$\mathbf{b}\mathbf{x}^T + \mathbf{b}\mathbf{y}^T + \mathbf{b}(\mathbf{x}^T\mathbf{b})\mathbf{y}^T = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}\mathbf{y}^T = -\frac{\mathbf{b}\mathbf{x}^T}{1 + \mathbf{x}^T\mathbf{b}},$$

$$\mathbf{y} = -\frac{1}{1 + \mathbf{x}^T\mathbf{b}}\mathbf{x}. \quad (\text{A2.7})$$

Mit (A2.6) und (A2.7) reduziert sich (A2.4) auf das Produkt der äußeren Klammern, das ebenfalls die Einheitsmatrix ergibt.

Durch Substitution von \mathbf{x} gemäß (A2.1) in (A2.7) folgt:

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{b}}} \frac{\mathbf{A}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{b}} \quad (\text{A2.8})$$

Mit (A2.6) und (A2.8) sind also die Bedingungen (A2.3) erfüllt.

A3. Eigenwerte und Determinante der Matrix $I + \mathbf{v}\mathbf{w}^T$

Gegeben sei eine Matrix der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T, \\ \mathbf{v} &\neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{w} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{A3.1}$$

Die Eigenwerte und Determinante von \mathbf{Q} sind:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 1, \tag{A3.2}$$

$$\lambda_n = 1 + \mathbf{w}^T \mathbf{v},$$

$$\det [\mathbf{Q}] = 1 + \mathbf{w}^T \mathbf{v}. \tag{A3.3}$$

Beweis:

Für die Matrix \mathbf{Q} wird unter Berücksichtigung ihrer besonderen Struktur das zugehörige spezielle Eigenwertproblem untersucht:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{v}\mathbf{w}^T - (\lambda-1) \mathbf{I}) \mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}\mathbf{w}^T \mathbf{x} &= (\lambda-1) \mathbf{x}, \\ \mathbf{v} \mu &= \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{A3.4}$$

Darin sind $\mu = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ und $\mathbf{x} = \lambda - 1$.

Nun sei angenommen, daß Eigenwerte $\lambda \neq 1$ existieren, so daß:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Dann folgt aus (A3.4) für zugehörige Eigenvektoren \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \frac{\mu}{\mathbf{x}} \mathbf{v} = c \mathbf{v}. \tag{A3.5}$$

Wegen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ist auch $\mu \neq 0$, $c \neq 0$.

Da die Eigenvektoren \mathbf{x} eine linear unabhängige Basis bilden, kann $\mathbf{x} = c \mathbf{v}$ gemäß (A3.5) höchstens einmal auftreten. D.h.: Es gibt höchstens einen Eigenwert $\lambda \neq 1$.

Folglich gilt mindestens $(n-1)$ mal:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \\ \text{(A3.4): } \mu \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ \mu &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} = 0. \end{aligned} \tag{A3.6}$$

Gemäß (A3.6) sind mindestens $(n-1)$ Eigenvektoren \mathbf{x} orthogonal zu \mathbf{w} . Falls jedoch (A3.6) n mal gelten würde, bildeten

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w}$ eine $(n+1)$ -dimensionale Basis. Im n -dimensionalen Raum sind aber $n+1$ Vektoren stets linear abhängig. Folglich gilt genau einmal:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n \neq 0, \\ \lambda_n &\neq 1, \\ \mathbf{x}_n &= c \mathbf{v} \quad (\text{gemäß (A3.5)}). \end{aligned} \tag{A3.7}$$

Aus (A3.4) und (A3.7) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n &= (\lambda_n - 1) \mathbf{x}_n, \\ \mathbf{v} \mathbf{w}^T c \mathbf{v} &= (\lambda_n - 1) c \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} \mathbf{w}^T \mathbf{v} &= \mathbf{v} (\lambda_n - 1), \\ \mathbf{w}^T \mathbf{v} &= (\lambda_n - 1), \\ \lambda_n &= 1 + \mathbf{w}^T \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{A3.8}$$

Da die Determinante einer Matrix das Produkt ihrer Eigenwerte ist, sind hiermit (A3.2) und (A3.3) bewiesen.

A4. Symmetrie und Positiv-Definitheit von Produktformen

Gegeben sei ein Korrekturansatz für positiv definite, symmetrische Matrizen \mathbf{A} in der Produktform:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= (\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T)^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T,\end{aligned}\tag{A4.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \text{positiv definite, symmetrische Matrix,} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T, \text{ Korrekturmatrix,} \\ \mathbf{v} &\neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{w} &\neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}^* &= \text{korrigierte Matrix.}\end{aligned}$$

Aus (A4.1) wird sofort ersichtlich, daß bei symmetrischer Matrix \mathbf{A} auch die korrigierte Matrix \mathbf{A}^* symmetrisch ist. Ist \mathbf{A} positiv definit, so ist \mathbf{A}^* mindestens positiv semidefinit. Dieses folgt aus (A4.1) bei Bildung der quadratischen Form mit einem Vektor $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^T \mathbf{A}^* \mathbf{h} &= \mathbf{h}^T (\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T)^T \mathbf{h} \\ &= [\mathbf{h}^T + (\mathbf{h}^T \mathbf{v}) \mathbf{w}^T] \mathbf{A} [\mathbf{h} + (\mathbf{v}^T \mathbf{h}) \mathbf{w}] \\ &= \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \geq 0.\end{aligned}\tag{A4.2}$$

Für bestimmte \mathbf{v}, \mathbf{w} läßt sich der Fall $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = 0$ zeigen, bei dem \mathbf{A}^* singulär ist. Um diesen Fall mit (A4.2) darzustellen, muß wegen der gesicherten Positiv-Definitheit von \mathbf{A} der Vektor \mathbf{h} so gewählt werden, daß $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ wird:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \mathbf{h} + (\mathbf{v}^T \mathbf{h}) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h} &= - (\mathbf{v}^T \mathbf{h}) \mathbf{w}.\end{aligned}\tag{A4.3}$$

Damit $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ergibt, müssen also \mathbf{h} und \mathbf{w} richtungsgleich sein. Mit der Wahl $\mathbf{h} = k\mathbf{w}$ folgt aus (A4.3) die Bedingung:

$$1 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0.\tag{A4.4}$$

Ein Vergleich zwischen (A4.4) und (A3.3) ergibt, daß \mathbf{A}^* genau dann singulär wird, wenn:

$$\det [\mathbf{Q}] = 0.\tag{A4.5}$$

Für die Determinanten von \mathbf{A} , \mathbf{Q} und \mathbf{A}^* gilt gemäß (A4.1) und (A3.3) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{A}^*] &= \det [\mathbf{Q}] \det [\mathbf{A}] \det [\mathbf{Q}^T] \\ &= (1 + \mathbf{w}^T \mathbf{v})^2 \det [\mathbf{A}] . \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

Formel (A4.6) bestätigt obige Aussagen zur Singularität von \mathbf{A}^* . Umgekehrt zeigen (A4.6) und (A4.2), daß \mathbf{A}^* genau dann nicht-singulär und positiv definit ist, wenn:

$$\det[\mathbf{Q}] = 1 + \mathbf{w}^T \mathbf{v} \neq 0. \quad (\text{A4.7})$$

Insbesondere hat eine evtl. auftretende negative Determinante von \mathbf{Q} keinen Einfluß auf die Positiv-Definitheit von \mathbf{A}^* .

A5. Quadratische Termination von Produktformen

Die Minimierung quadratischer Zielfunktionen mit konstanter Systemmatrix führt bei Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens nach höchstens n Schritten zur exakten Lösung [27].

Im folgenden wird gezeigt, daß die Produktform (A2.2) mit den Vektoren (A2.6) und (A2.8) diese Eigenschaft besitzt.

Gegeben sei die quadratische Zielfunktion:

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} , \quad (\text{A5.1})$$

\mathbf{A} = konstante, positiv definite, symmetrische Matrix,

\mathbf{p} = konstant,

\mathbf{u} = so zu bestimmen, daß $f(\mathbf{u}) \rightarrow \text{Minimum}$.

Damit das gesuchte Minimum nach höchstens n Schritten gefunden wird, soll ein Verfahren konjugierter Richtungen gewählt werden. Dieses enthält folgende Bedingungen:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^n s_j \mathbf{d}_j \quad (\text{A5.2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k &= 0, & j \neq k, & \quad j, k = 1, \dots, n \\ \mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

Darin sind:

\mathbf{u}^* = gesuchte Lösung,

\mathbf{u}_0 = beliebig gewählte Ausgangslösung,

s_j = optimale Schrittweite,

\mathbf{d}_j = Suchrichtung.

Die gesuchte Lösung soll sich als Linearkombination (A5.2) mit n Suchrichtungen ergeben, wobei die Suchrichtungen untereinander eine \mathbf{A} -konjugierte Basis (A5.3) bilden. Ist die Forderung (A5.3) erfüllt, so liegen die optimalen Schrittweiten s_j eindeutig fest. Durch Substitution von (A5.2) in (A5.3) folgt:

$$s_j = \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j} , \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A5.4})$$

Der während des Lösungsprozesses noch unbekannte Vektor \mathbf{u}^* sowie die Ausgangslösung \mathbf{u}_0 können durch Einführung des Gradienten der Zielfunktion (A5.1) eliminiert werden:

$$\mathbf{g} = \frac{df}{d\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p} \quad (\text{A5.5})$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{A}\mathbf{u}_0 - \mathbf{p}$$

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{A}\mathbf{u}^* - \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Daraus folgt die optimale Schrittweite:

$$s_j = - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{g}_0}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A5.6})$$

Zwischen den Gradienten zu den Lösungsschritten i und $i-1$ ergeben sich aus (A5.5) die Beziehungen:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{A}\mathbf{u}_i - \mathbf{p}$$

$$\mathbf{g}_{i-1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{p} \quad (\text{A5.7})$$

Substituiert man (A5.7) in den aus (A5.2) folgenden Lösungsschritt

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + s_i \mathbf{d}_i = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^i s_j \mathbf{d}_j \quad (\text{A5.8})$$

so folgt für die zugehörigen Gradienten:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{i-1} + s_i \mathbf{A} \mathbf{d}_i = \mathbf{g}_0 + \sum_{j=1}^i s_j \mathbf{A} \mathbf{d}_j \quad (\text{A5.9})$$

Für die Bestimmung einer \mathbf{A} -konjugierten Basis der Suchrichtungen wird nun angenommen, daß die ersten i Vektoren bereits bekannt sind und die Bedingung (A5.3) erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k &= 0, & j \neq k, & \quad j, k = 1, \dots, i \\ \mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A5.10})$$

Dann erhebt sich für den nächsten Vektor \mathbf{d}_{i+1} die Forderung:

$$\mathbf{d}_r^T \mathbf{A} \mathbf{d}_{i+1} = 0, \quad r = 1, \dots, i \quad (\text{A5.11})$$

Für seine Bestimmung wird folgender Ansatz gemacht:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i+1} &= \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g}_i, \\ \mathbf{R}_{i+1} &= \text{symmetrisch.} \end{aligned} \quad (\text{A5.12})$$

Die Matrix R_{i+1} muß so gewählt werden, daß die Bedingungen (A5.11), (A5.9), (A5.6) eingehalten werden. Substituiert man (A5.12) in (A5.11) und anschließend in (A5.9), so folgt mit (A5.10):

$$\begin{aligned}
 d_r^T A R_{i+1} g_i &= 0 \\
 d_r^T A R_{i+1} \left(g_o + \sum_{j=1}^i s_j A d_j \right) &= 0 \\
 d_r^T A R_{i+1} g_o + s_r d_r^T A R_{i+1} A d_r &= 0 \\
 s_r &= - \frac{d_r^T A R_{i+1} g_o}{d_r^T A R_{i+1} A d_r} \quad (A5.13)
 \end{aligned}$$

Damit nun auch (A5.6) eingehalten wird, folgt durch Koeffizientenvergleich zwischen (A5.6) und (A5.13) als Zusatzbedingung für R_{i+1} :

$$R_{i+1} A d_r = d_r, \quad r = 1, \dots, i \quad (A5.14)$$

wobei im allgemeinen $R_{i+1} A \neq I$ ist. Für die Bestimmung der Matrix R_{i+1} gibt es grundsätzlich beliebig viele Möglichkeiten. Im folgenden wird gezeigt, daß ihre Bestimmung nach dem Produktansatz (A2.2) alle obigen Forderungen für ein Verfahren konjugierter Richtungen erfüllt.

Entsprechend (A2.2), (A2.6) und (A2.8) wird der Ansatz gewählt:

$$R_{i+1} = (I + v_i w_i^T) R_i (I + v_i w_i^T)^T \quad (A5.15)$$

$$v_i = s_i d_i \quad (A5.16)$$

$$w_i = r_i \frac{R_i^{-1} d_i}{h_i^T d_i} - \frac{h_i}{s_i h_i^T d_i} \quad (A5.17)$$

$$r_i = \sqrt{\frac{h_i^T d_i}{s_i d_i^T R_i^{-1} d_i}}$$

$$h_i = g_i - g_{i-1} \quad (A5.18)$$

Zur Erläuterung sei gesagt, daß wegen $R_i A \neq I$ in (A5.17) nicht A , sondern R_i^{-1} gesetzt werden muß (vergleiche dagegen (A2.3), (A2.8)).

Der Ansatz (A5.15) muß die Bedingung (A5.14) erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{A} \mathbf{d}_r &= (\mathbf{I} + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T) \mathbf{R}_i (\mathbf{I} + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T)^T \mathbf{A} \mathbf{d}_r \quad (\text{A5.19}) \\ &= \mathbf{d}_r \end{aligned}$$

Dieses wird für $r = 1, \dots, i-1$ und $r = i$ getrennt überprüft.

Für $r = 1, \dots, i-1$ muß gelten:

$$(\text{A5.19}): \quad (\mathbf{R}_i + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i) (\mathbf{A} \mathbf{d}_r + \underbrace{s_i \mathbf{w}_i \mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_r}_0) = \mathbf{d}_r \quad (\text{A5.20})$$

(A5.10):

$$\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{d}_r + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{d}_r = \mathbf{d}_r$$

Unter der Voraussetzung, daß die Matrix \mathbf{R}_i die Bedingung (A5.14) bereits erfüllt, folgt:

$$\begin{aligned} (\text{A5.14}): \quad \mathbf{d}_r + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{d}_r &= \mathbf{d}_r \\ s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{d}_r &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$(\text{A5.17}): \quad s_i \mathbf{d}_i \left[r_i \frac{\mathbf{d}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{d}_r}{\mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_i} - \frac{\mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_r}{s_i \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_i} \right] = \mathbf{0}$$

Wegen $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_i \neq 0$ folgt mit (A5.12), (A5.18):

$$s_i r_i \mathbf{g}_{i-1}^T \mathbf{d}_r - (\mathbf{g}_i - \mathbf{g}_{i-1})^T \mathbf{d}_r = \mathbf{0}$$

$$(\text{A5.9}): \quad s_i r_i \mathbf{g}_{i-1}^T \mathbf{d}_r - \underbrace{s_i \mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_r}_0 = \mathbf{0}$$

(A5.10):

$$(\text{A5.9}): \quad s_i r_i (\mathbf{g}_0^T \mathbf{d}_r + \sum_{j=1}^{i-1} s_j \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_r) = \mathbf{0}$$

Mit (A5.10) und (A5.6) folgt, daß obiger Klammerausdruck Null wird. Damit ist für $r=1, \dots, i-1$ gezeigt, daß die Produktform (A5.15) die Bedingung (A5.14) erfüllt.

Für $r = i$ muß gelten:

$$(\text{A5.19}): \quad (\mathbf{R}_i + s_i \mathbf{d}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i) (\mathbf{A} \mathbf{d}_i + s_i \mathbf{w}_i \mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i) = \mathbf{d}_i \quad (\text{A5.21})$$

Nach Substitution von (A5.9), (A5.18) folgt:

$$(R_{i+s_i} d_i w_i^T R_i) (h_i/s_i + w_i d_i^T h_i) = d_i$$

$$(A5.17): (R_{i+s_i} d_i w_i^T R_i) r_i R_i^{-1} d_i = d_i$$

$$r_i d_i + s_i r_i d_i w_i^T d_i = d_i$$

Wegen $d_i \neq 0$ muß gelten:

$$r_i + s_i r_i w_i^T d_i = 1$$

Mit (A5.17) wird obige Forderung verifiziert. Damit ist auch für $r = i$ gezeigt, daß die Produktform (A5.15) die Bedingung (A5.14) erfüllt.

Durch vollständige Induktion (Indexverschiebung von i nach $i+1$) ergibt sich der Nachweis der Konjugiertheitseigenschaften für alle $i = 2, \dots, n$. Für $i = 1$ wird der Nachweis nur mit (A5.21) geführt, da (A5.20) gegenstandslos ist. Hieraus folgt, daß die Matrix R_1 beliebig gewählt werden kann, da für sie auch (A5.14) gegenstandslos ist. Alle übrigen Matrizen R_i , $i = 2, \dots, n$ erfüllen die Bedingung (A5.14).

Damit ist die Eigenschaft der Produktform (A2.2), quadratische Zielfunktionen mit konstanter Systemmatrix in höchstens n Schritten exakt zu minimieren (quadratische Termination), bewiesen.

Abschließend eine Zusatzbetrachtung:

Die gesuchte Lösung \mathbf{u}^* kann aus (A5.5) direkt durch Lösung eines linearen Gleichungssystems gewonnen werden. Wählt man die Ausgangslösung $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ und setzt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^*$, so folgt mit (A5.5), (A5.7), (A5.8):

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_1 = \mathbf{p} \quad , \quad (A5.22)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{g}_0 = -\mathbf{p} \quad ,$$

$$\mathbf{u}_1 = s_1 \mathbf{d}_1 \quad , \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \quad .$$

Wird nun die Matrix R_1 als Inverse $R_1 = \mathbf{A}^{-1}$ gewählt, so folgt mit den Beziehungen (A5.22) aus (A5.17), daß der Produktansatz (A5.15) die Matrix \mathbf{R} nicht mehr verändert:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{0} \quad (A5.23)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1^T) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1$$

Die Deutung von (A5.23) ist sinnvoll: Für die exakte Lösung gibt es keine Verbesserung mehr. Diese Aussage wird durch (A5.12) bestätigt:

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{A5.24})$$

Bei Anwendung des oben untersuchten Verfahrens auf die Minimierung nicht-quadratischer Zielfunktionen oder die Lösung nicht-linearer Gleichungssysteme geht i.a. die Eigenschaft der quadratischen Termination verloren. In diesen Fällen ist jedoch zu erwarten, daß die Startmatrix $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}^{-1}$ eine gute Ausgangssituation für die Konvergenz des Verfahrens schafft.

Literatur

- [1] Abel, J.F.,
Desai, C.S.: Introduction to the Finite Element Method.
Van Nostrand Reinhold Comp., New York,
(1972)
- [2] Argyris, J.H.,
Faust, G.,
Willam, K.J.: Limit Load Analysis of Thick-Walled Concrete Structures - A Finite Element Approach to Fracture.
Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng., 8,
pp.215-243, (1976)
- [3] Argyris, J.H.,
Scharpf, D.W.: Methods of Elastoplastic Analysis.
ZAMP, 23, pp.517-551, (1972)
- [4] Bathe, K.J.,
Cimento, A.P.: Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations.
Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng., 22,
pp.59-85, (1980)
- [5] Bathe, K.J.,
Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs,
New Jersey, (1976)
- [6] Bergan, P.G.,
Holand, I.: Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures.
Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng., 17/18,
pp.443-467, (1979)
- [7] Bremer, F.: Mehraxiales Festigkeits- und Bruchverhalten des Betons.
DAfStb, Bericht BMFT-Projekt Spannbeton-Reaktordruckbehälter, Band 3/2, Berlin,
(13.-14.Okt.1975)
- [8] Brodlie, K.W.,
Gourlay, A.R.,
Greenstadt, J.: Rank-one and Rank-two Corrections to Positive Definite Matrices Expressed in Product Form.
J.Inst.Math.Appl., 11, pp.73-82, (1973)

- [9] Dennis,J.E., Moré,J.J.: Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory.
SIAM Review,Vol.19,No.1,pp.46-89,
(Jan.1977)
- [10] Drucker,D.C.: A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations.
Proc.Appl.Mech.,Illinois Institute of Technology,Chicago,(June 11-16,1951)
- [11] Geradin,M., Idelsohn,S., Hogge,M.: Nonlinear Structural Dynamics via Newton and Quasi-Newton Methods.
N.E.D.,58,pp.339-348,(1980)
- [12] Gerstle,K.H., et al.: Behavior of Concrete under Multiaxial Stress States.
J.of the Eng.Mech.Div.,pp.1383-1403,
(Dec.1980)
- [13] Goldfarb,D.: A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means.
Math.Comp.,24,pp.23-26,(1970)
- [14] Gomez,C.M.B., Owen,D.R.J.: An Appraisal of Numerical Solution Techniques for Elasto-Plastic and Elasto-Viscoplastic Material Problems.
SMIRT-6,M3/1,(Aug.1981)
- [15] Grasser,E., Linse,D., Aschl,H.: Festigkeit und Verformung von Beton bei Mehrachsiger Beanspruchung.
DAfStb,Bericht BMFT-Projekt Spannbeton-Reaktordruckbehälter,Band 3/6,Berlin,
(13.-14.Okt.1975)
- [16] Haisler,W.E., Stricklin,J.A.: Survey of Solution Procedures for Nonlinear Static and Dynamic Analyses.
Int.Conf.Vehicle Struct.Mech.,pp.1-17,
(1974)
- [17] Hannant,D.J., Frederick,C.O.: Failure Criteria for Concrete in Compression.
Magazine of Concrete Research,Vol.20,
No.64,pp.137-144,(Sep.1968)

- [18] Kotsovos, M.D.: A Mathematical Model of the Deformational Behavior of Concrete under Generalised Stress Based on Fundamental Material Properties.
Matériaux et Constructions, Vol.13, No.76
- [19] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung und unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung.
DAfStb, Heft 229, (1973)
- [20] Lekhnitskii, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body.
Holden-Day, Inc., San Francisco, (1963)
- [21] Link, J., Schäfer, H., Mehlhorn, G.: Eine Formulierung des zweiachsigen Bruch- und Verformungsverhaltens von Beton.
Beton- u. Stahlbetonbau, Heft 9, (1974)
- [22] Matthies, H., Strang, G.: The Solution of Nonlinear Finite Element Equations.
Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 14, pp. 1613-1626, (1979)
- [23] Nayak, G.C., Zienkiewicz, O.C.: Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalisation for Various Constitutive Relations Including Strain Softening.
Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 5, pp. 113-135, (1972)
- [24] Newman, K., Newman, J.B.: Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete.
Symp. on Materials, paper 83, Southampton, (1969)
- [25] Niwa, Y., Kobayashi, S.: Failure Criterion of Cement Mortar Under Triaxial Compression.
Mem. of Fac. of Eng., Kyoto University, Japan, XXIX, pp. 1-15, (1967)

- [26] Owen, D.R.J.,
Prakash, A.,
Zienkiewicz, O.C.: Finite Element Analysis of Non-Linear
Composite Materials by Use of Overlay
Systems.
Com.&Struct., Vol.4, pp.1251-1267, (1974)
- [27] Pahl, P.J.,
Damrath, R.: Systemplanung.
TU Berlin, FB7, Inst.f.Allg.Bauing.-meth.,
(1975)
- [28] Reckling, K.A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung
auf Festigkeitsprobleme.
Springer, Berlin, (1967)
- [29] Rheinboldt, W.C.: Methods for Solving Systems of Nonlinear
Equations.
SIAM Conf.Ser.14, Philadelphia, (1974)
- [30] Rüscher, H.: Physikalische Fragen der Betonprüfung.
Zement-Kalk-Gips, Heft 1, (Jan.1959)
- [31] Schickert, G.,
Winkler, H.: Versuchsergebnisse zur Festigkeit und
Verformung von Beton bei mehraxialer
Druckbeanspruchung.
DAfStb, Heft 277, (1977)=BAM-Bericht
Nr.46, (Mai 1977)
- [32] Schickert, G.: Schwellenwerte beim Betondruckversuch.
DAfStb, Heft 312, (1980)=BAM-Bericht
Nr.70, (Aug.1980)
- [33] Schmidt, B.: Ein Finite-Element-Verfahren zur Be-
rechnung vorverformter, ausgesteifter
Rechteckplatten unter Berücksichtigung
von geometrischer und Materialnicht-
linearität.
Diss., TU Berlin, FB7, (1975)
- [34] Shanno, D.: Conditioning of Quasi-Newton Methods
for Function Minimisation.
Math.Comp., 24, pp.647-656, (1970)

- [35] Warnke, E.P.,
Willam, K.J.: Constitutive Model for the Triaxial
Behavior of Concrete.
Sem. Concrete Struct. subjected to
Triaxial Stresses, Bergamo, Italy,
(May 1974)
- [36] Weber, M.: Programmsystem CONCRET (F.E.-Programm
für die statische 3D-Analyse von unbe-
wehrten, druckbeanspruchten Betonkörpern
mit nichtlinearem Materialgesetz).
FORTRAN-Code mit Dokumentation, Berlin,
(Dez. 1980)
- [37] Weber, M.: Programmsystem CONCRET-Benutzerhandbuch.
Manuskript, Berlin, (Feb. 1981)
- [38] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering
Science.
Mc Graw-Hill, London, (1971)

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

- Nr. 1/September 1968
Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft
- Nr. 2/Juli 1970 (vergriffen)
Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebern
von Dr.-Ing. Götz Andreae
- Nr. 3/September 1970 (vergriffen)
Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile
von Dr.-Ing. Josef Ziebs
- Nr. 4/Dezember 1970 (vergriffen)
Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren
von Dr. rer. nat. Arno Burmester
- Nr. 5/März 1971
Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
von Dr. rer. nat. Norbert Steiner
- Nr. 6/April 1971
Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
von Prof. Dr.-Ing. Paul Schneider
- Nr. 7/Juli 1971
Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Petrowitz
- Nr. 8/November 1971
Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Helmut Veith
- Nr. 9/November 1971
Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Möller
- Nr. 10/Januar 1972
Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
von Dr.-Ing. Dietmar Aurich und Prof. Dr. phil. Erich Martin
- Nr. 11/Februar 1972
Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Krause
- Nr. 12/Mai 1972
Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
von Dir. u. Prof. Dr. rer. nat. Hubert Feuerberg
- Nr. 13/Juni 1972
Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig (Berichter), Prof. Dr.-Ing. Kurt Kirschke, Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig und Dipl.-Phys. Harald Tischer
- Nr. 14/Juli 1972
Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
von Eberhard Fischer
- Nr. 15/August 1972
Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Heinz Pohl
- Nr. 16/August 1972
Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
von Dr.-Ing. Erwin Knublauch
- Nr. 17/August 1972
Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
von Dr.-Ing. Peter Reimers
- Nr. 18/Januar 1973
Das Spröbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 19/Januar 1973
Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. K. Kaffanke und Dr.-Ing. H. Czichos
- Nr. 20/April 1973
Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi
- Nr. 21/Juli 1973
Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. D. Klaffke und Dr.-Ing. W. Maennig
- Nr. 22/Juli 1973
Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi und Dr.-Ing. E. Knublauch
- Nr. 23/November 1973
Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen
von Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Ruske
- Nr. 24/November 1973
Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung
von Dipl.-Ing. J. Stanke, Ing. grad. E. Klement und Dipl.-Ing. R. Rudolphi
- Nr. 25/Dezember 1973
Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
von Dr.-Ing. E. Knublauch
- Nr. 26/August 1974
Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen —
von Dipl.-Ing. P. Jost, Dr.-Ing. P. Reimers und Dr.-Ing. P. Weise
- Nr. 27/August 1974
Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Hermann Wüstenberg
- Nr. 28/August 1974
Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern
von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Heinrich
- Nr. 29/August 1974
Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem idealisotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall
von Prof. Dr.-Ing. P. Schneider
- Nr. 30/September 1974 (vergriffen)
The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology
von Dr. Horst Czichos und Dr. Geert Salomon
- Nr. 31/August 1975
Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung
von Dr.-Ing. Gerhard Fuhrmann
- Nr. 32/September 1975
Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen
von Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Bernhard Böttcher
- Nr. 33/November 1975
Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens
von Dipl.-Ing. Armin Wagner, Dipl.-Phys. Gerhard Kieper und Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi
- Nr. 34/Januar 1976 (vergriffen)
Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoffen
von Dipl.-Forsting. Dr. rer. sylv. Hans-Joachim Deppe
- Nr. 35/Januar 1976
Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dipl.-Ing. Ernst Limberger

- Nr. 36/Januar 1976 (vergriffen)
Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles
von Dipl.-Ing. Jürgen Hundt
- Nr. 37/Februar 1976
Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 38/Juni 1976
Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionitriertem Stahl 42 CrMo 4
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig
- Nr. 39/Juni 1976
Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newton'schem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung
von Prof. Dr.-Ing. K. Kirschke und Dipl.-Phys. G. Kempf
- Nr. 40/Juni 1976
Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren
von Dr. rer. nat. H. Hantsche
- Nr. 41/Okttober 1976
Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten
von Dr. rer. nat. Bernhard Böttcher
- Nr. 42/Okttober 1976
Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft
von Dr.-Ing. Siegmund Dietlen
- Nr. 43/Okttober 1976
Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 44/November 1976
Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“
von Dipl.-Ing. W. Matthees
- Nr. 45/Dezember 1976
Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten
von Dr.-Ing. W. Paatsch
- Nr. 46/Mai 1977 (vergriffen)
Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung
Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses
von Dipl.-Ing. Gerald Schickert und Dipl.-Ing. Helmut Winkler
- Nr. 47/Juni 1977
Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
von Dr.-Ing. Arno Plank
- Nr. 48/Okttober 1977
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
von Dr.-Ing. U. Holzlöhner
- Nr. 49/Dezember 1977
Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
von Dr.-Ing. Günther Wittig
- Nr. 50/Juni 1978 (vergriffen)
Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
von Prof. Dipl.-Phys. Norbert Czaika, Dipl.-Phys. Norbert Mayer, Dipl.-Ing. Claus Amberg, Dipl.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Götz Andreae und Dipl.-Ing. Winfried Markowski
- Nr. 51/Juni 1978
Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
von Dr. rer. nat. J. Sickfeld
- Nr. 52/August 1978
Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
von Dr.-Ing. Aleksandar Tomov
- Nr. 53/Okttober 1978
Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
von Rolf Günter Rohrmann und Reinald Rudolphi
- Nr. 54/Okttober 1978
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Harro Sander
- Nr. 55/November 1978
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke
- Nr. 56/Januar 1979
Stabilität von Sandwichbauteilen
von Dipl.-Ing. W. Brünner und Prof. Dr.-Ing. C. Langlie
- Nr. 57/März 1979
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung
Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing
von Dipl.-Ing. Meinhard Stadthaus
- Nr. 58/März 1979
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 59/Juli 1979
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
von Dr.-Ing. Günther Plauk
- Nr. 60/August 1979
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
von Dr.-Ing. H. Spreckelmeyer, Dr.-Ing. R. Helms und Dr.-Ing. J. Ziebs
- Nr. 61/Dezember 1979
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmetrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
von Dr. Klaus Richter
- Nr. 62/Dezember 1979
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Gerisch und Prof. Dr. habil. Dr. h. c. Günther Becker
- Nr. 63/Dezember 1979
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
von Dipl.-Ing. E. Behrend und Dipl.-Ing. J. Ludwig
- Nr. 64/Februar 1980
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
von Dr.-Ing. Werner Rücker
- Nr. 65/Februar 1980
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
von Dr.-Ing. Peter Schmidt, Dr.-Ing. Dietmar Aurich, Dr.-Ing. Rolf Helms, Dr.-Ing. Helmut Veith und Dr.-Ing. Josef Ziebs
- Nr. 66/Mai 1980
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
von Dr. rer. nat. Martin Hattwig
- Nr. 67/Mai 1980
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees
- Nr. 68/Mai 1980
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik.
Entwicklung eines volleuzentrischen Präzisions-Goniometers
von Dr. rer. nat. Dieter Petersohn
- Nr. 69/Juni 1980
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitshüllen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt und Dipl.-Ing. Peter Brandl
- Nr. 70/August 1980 (vergriffen)
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
von Dr.-Ing. Gerald Schickert
- Nr. 71/August 1980
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und Dipl.-Ing. Götz Magiera

Nr. 72/September 1980

Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 73/November 1980

Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
von Dipl.-Ing. Peter Wegener

Nr. 74/November 1980

ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dipl.-Inform. Renate Müller

Nr. 75/November 1980

Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
von Dir. u. Prof. Dr. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 76/November 1980

Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig

Nr. 77/April 1981

Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
von Dipl.-Ing. Michael Gierloff und Dr.-Ing. Matthias Maultzsch

Nr. 78/September 1981

Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund
von Dr.-Ing. Werner Rücker

Nr. 79/Dezember 1981

Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflussten Kaltrißneigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
von Dr.-Ing. Volker Neumann

Nr. 80/Dezember 1981

Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
von Dr.-Ing. Arno Plank, Dr.-Ing. Werner Struck und Dr.-Ing. Manfred Tzschätzsch

Nr. 81/Dezember 1981

Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
von Dipl.-Ing. Jürgen Schmidt

Nr. 82/April 1982

Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches
Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test
von Rolf Helms, Hans-Joachim Kühn und Siegmund Ledworowski

Nr. 83/Juli 1982

Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen — Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen —
von Prof. Dr.-Ing. Horst Czichos und Dr.-Ing. Paul Feinle

Nr. 84/Juli 1982

Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
von Dipl.-Inform. Renate Müller und Dr.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/Okttober 1982

Technische Materialforschung und -prüfung — Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm „Basic Technological Research“ — Materials Research and Testing — Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme „Basic Technological Research“ —
von Prof. Dr. Horst Czichos

Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/November 1982

Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
von Dr.-Ing. Konrad Niesel und Dr. rer. nat. Peter Schimmelwitz

Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/Dezember 1982

Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
von Dr.-Ing. Bernd Isecke und Dr.-Ing. Wolfgang Stichel

Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/Februar 1983

Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Anton Erhard

Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/April 1983

Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
von Dr. rer. nat. Dietrich Conrad und Dr.-Ing. Siegmund Dietlen

Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/April 1983

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
von Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgeh Herter

Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/April 1983

Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
von Dr.-Ing. Michael Weber

