

Detektion der Einhüllenden in SAFT-Daten durch Anwendung multidimensionaler analytischer Signale mit single-orthant-Spektren

Christian HÖHNE*, Rainer BOEHM*, Jens PRAGER*

* Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Unter den Eichen 87, 12205 Berlin
E-mail: christian.hoehne@bam.de, rainer.boehm@bam.de, jens.prager@bam.de

Kurzfassung. Die Synthetic Aperture Focusing Technique (SAFT) ist ein Verfahren zur Verarbeitung von HF-Bildern, die an unterschiedlichen Prüfkopfpositionen aufgenommen wurden. Es wird in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung genutzt, um eine Abbildung von Materialfehlern innerhalb des Gebietes zu erstellen, auf das die Rekonstruktion angewandt wird. Die nach Abschluss der SAFT-Rekonstruktion zusammengestellten Informationen über Reflektoren liegen zunächst nach wie vor in Form von HF-Daten vor. Die Interpretierbarkeit der SAFT-Bilder ist im Allgemeinen davon abhängig, wie diese Daten vor der endgültigen Darstellung aufbereitet werden. Die Bildung der Amplitudeneinhüllenden aus dem zugehörigen analytischen Signal stellt eine Möglichkeit einer solchen Aufbereitung nach Anwendung des SAFT-Algorithmus dar. Sie ist jedoch nur im eindimensionalen Fall eindeutig definiert. In diesem Beitrag wird das Konzept der analytischen Signale mit single-orthant-Spektren aufgegriffen, um eine Detektion der Einhüllenden an mehrdimensionalen HF-Daten durchzuführen. Dabei wird über die Betragsquadrate aller möglichen nach dieser Definition zu bildenden analytischen Signale gemittelt. Es wird gezeigt, dass die Anwendung des beschriebenen Verfahrens einem Separationsansatz entspricht. Außerdem wird eine Möglichkeit aufgezeigt die Gültigkeit dieses Ansatzes anhand der totalen und partiellen Hilberttransformationen des Signals im konkreten Fall zu überprüfen. Die Ergebnisse dieser Methode zur Verbesserung von SAFT Bildern werden unter Verwendung synthetischer und experimenteller Daten an rekonstruierten Abbildungen verschiedener Reflektorarten beispielhaft dargestellt.

Einführung

In der modernen Ultraschallprüfung, findet die Synthetic Aperture Focusing Technique (SAFT) als bildgebendes Verfahren zur Lage- und Größenbestimmung von Materialfehlern Anwendung. Eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus findet sich zum Beispiel in [1]. Die Grundidee des SAFT-Verfahrens besteht darin, mit einem Prüfkopf an mehreren Punkten entlang einer Scanstrecke auf der Oberfläche des Testkörpers Daten aufzunehmen, und diese anschließend an allen Orten innerhalb der Region of Interest (ROI) unter Berücksichtigung der Phaseninformation zu überlagern. Befindet sich am jeweils betrachteten Punkt ein Reflektor, so werden sich die einzelnen Signale phasenrichtig überlagern was zu einer sehr hohen resultierenden Amplitude führt während sie andernfalls mit zufälliger Phasenverschiebung addiert werden und sich im Mittel aufheben. Wird dies für alle Punkte innerhalb der ROI wiederholt, so erhalten wir eine Abbildung sämtlicher Fehler im betreffenden Gebiet.



Da nach Anwendung des SAFT-Algorithmus die Informationen über Fehler in der ROI nach wie vor in Form positiver und negativer Amplitudenwerte vorliegen, ist eine weitere Aufbereitung notwendig bevor sie interpretiert werden können. Zu diesem Zweck wurden in der Vergangenheit eine Vielzahl verschiedener pre- und post-processing Verfahren angewandt [1],[2],[3],[4]. Hüllkurvenberechnung mittels analytischer Signale [1],[2] und durch andere Methoden, wie Finite Impulse Response (FIR) [3] oder der Anwendung nichtlinearer Filter [4], sind dabei bereits seit den frühen Anwendungen von SAFT in Gebrauch. Die Anwendung analytischer Signale war dabei jedoch stets auf den eindimensionalen Fall beschränkt, was in einem post-processing Verfahren, also nach erfolgter SAFT-Rekonstruktion anzuwendender Aufbereitung der zweidimensionalen Daten, im Allgemeinen nicht ausreichend ist um ein gutes Ergebnis zu liefern. Durch das Aufgreifen von, hauptsächlich durch Hahn [5],[6],[7], angestellten Überlegungen zur Erweiterung des Konzepts analytischer Signale auf höhere Dimensionen, war es uns möglich, ein post-processing Verfahren zur Aufbereitung von SAFT-Daten in Form einer zweidimensionalen Hüllkurvenberechnung zu entwickeln.

In dieser Arbeit soll ein Überblick über dieses Verfahren gegeben werden, welches zum Großteil auf dem in [5] vorgeschlagenem Konzept analytischer Signale mit single-orthant Spektren, d.h. im zweidimensionalen Fall Signale deren Spektrum auf einen Quadranten eingeschränkt ist, beruht.

Zunächst werden wir dafür die wesentlichen Punkte des Konzepts analytischer Signale wiederholen und einen Überblick über die Erweiterung auf höhere Dimensionen geben. Anschließend werden wir darauf eingehen welche Bedeutung der Frage zukommt ob das betrachtete Signal separabel oder nicht-separabel ist und welche Einschränkungen sich daraus für die Hüllkurvenberechnung ergeben. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich diese Einschränkungen überwinden lassen, welches anschließend sowohl auf synthetische als auch auf experimentelle Daten angewandt wird.

1. Hüllkurvenberechnung mittels analytischer Signale

1.1 eindimensionale analytische Signale

Das Konzept analytischer Signale wurde 1946 durch Gabor eingeführt [8]. Wenn $S(t)$ ein zeitabhängiges Signal bezeichnet, so kann die Bildung des zugehörigen analytischen Signals $S^A(t)$ durch die Anweisung "Unterdrücke die zu negativen Frequenzen gehörenden Amplituden und multipliziere die Amplituden positiver Frequenzen mit 2" (nach [8]) beschrieben werden. Im Folgenden bezeichnen F die Fouriertransformation, F^{-1} die inverse Fouriertransformation und H die Hilberttransformation. Die Anweisung zur Bildung des analytischen Signals nach Gabor kann dann als

$$S^A(t) = F^{-1} [F(S)(1 + \text{sgn}(\omega))] \quad (1)$$

dargestellt werden. Mit der Definition der Hilberttransformation H

$$H(S(t)) = \frac{1}{\pi} \int \frac{S(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2)$$

lässt sich leicht zeigen, dass (1) identisch ist mit

$$S^A(t) = S(t) + iH(S(t)) \quad (3)$$

und somit einem komplexen Signal entspricht, dessen Realteil mit dem ursprünglichen Signal $S(t)$ und dessen Imaginärteil mit dessen Hilberttransformierter $H(S(t))$ identisch ist. Umschreiben in die Polardarstellung liefert

$$S^A(t) = A(t)e^{i\varphi(t)} \quad (4)$$

und drückt das analytische Signal nun durch eine Amplitudenfunktion $A(t)=|S^A(t)|$, die im eindimensionalen Fall gerade der Einhüllenden der Amplituden entspricht, und eine Phasenfunktion $\phi(t)$ mit $\tan(\phi(t))=(H(S(t))/S(t))$ aus. Im eindimensionalen Fall entspricht die Einhüllende also gerade der Betragsfunktion des aus dem Signal selbst und seiner Hilberttransformation gebildeten analytischen Signals und ist somit eindeutig definiert.

1.2 Erweiterung des analytischen Signals auf höhere Dimensionen

Im Falle einer SAFT-Rekonstruktion, werden die Amplituden bestimmten Ortskoordinaten und nicht bestimmten Zeiten zugeordnet. Die Fouriertransformation F stellt damit nun einen Wechsel zwischen Ortsraum $[x,y]$ und dem Raum der Wellenzahlen $[k_x,k_y]$ dar und die Bildung des analytischen Signals muss in zwei Dimensionen erfolgen. Eine derartige Erweiterung des Konzepts analytischer Signale ist keine triviale Aufgabe, da es hierfür keine eindeutige Definition gibt. Über die verschiedenen Ansätze für die Beschreibung mehrdimensionaler analytischer Signale, die zum Beispiel in [9] oder [10] zusammengefasst wurden, soll hier zunächst noch einmal ein kurzer Überblick gegeben werden.

1.2.1 Partielle Hilberttransformation

Die partielle Hilberttransformation (PHT) ist im wesentlichen eine eindimensionale Hilberttransformation, die entlang einer ausgewählten Raumrichtung ausgeführt wird. Ein komplexes Signal, welches eine in beliebiger Richtung gebildete PHT als Imaginärteil verwendet, kann über

$$S_{\hat{\mathbf{e}}}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 + \text{sgn}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}})) \right] \quad (5)$$

definiert werden [9]. Für unser weiteres Vorgehen von Interesse sind die PHTs entlang der Hauptachsen eines zweidimensionalen Koordinatensystems, also die PHT in x - und in y -Richtung wie sie in Gleichung (6) und (7) beschrieben werden.

$$H_x(S(x, y)) = \frac{1}{\pi} \int \frac{S(\xi, y)}{x - \xi} d\xi \quad (6)$$

$$H_y(S(x, y)) = \frac{1}{\pi} \int \frac{S(x, \eta)}{y - \eta} d\eta \quad (7)$$

Bei dieser Variante handelt es sich nicht im eigentlichen Sinne um eine Erweiterung des Konzepts analytischer Signale auf höhere Dimensionen, sondern um eine streifenartige eindimensionale Bildung der Einhüllenden entlang der ausgewählten Richtung. Obwohl zum Beispiel in [11] gezeigt wurde, dass alle nach (5) möglichen gerichteten eindimensionalen analytischen Signale im Sinne der enthaltenen Informationen äquivalent zueinander sind, kann die Gestalt der Hüllkurve in dieser Konstruktion stark von der gewählten Richtung abhängen.

1.2.2 Totale Hilberttransformation

Die totale Hilberttransformation (THT) wird durch eine sukzessive Ausführung der eindimensionalen Hilberttransformationen entlang der verschiedenen Raumrichtungen gebildet.

$$H_{xy} = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{S(\xi, \eta)}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta \quad (8)$$

Ein komplexes Signal mit dem ursprünglichen Signal S als Real- und der THT $H_{xy}(S)$ als Imaginärteil kann durch

$$S_{THT}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 - i \operatorname{sgn}(k_x) \operatorname{sgn}(k_y)) \right] \quad (9)$$

beschrieben werden, erfüllt jedoch nicht die in [6] beschriebenen Voraussetzungen um als analytisches Signal betrachtet werden zu können und hat daher für sich genommen in der Anwendung keine Bedeutung.

1.2.3 Single-Orthant Spektren

Das Konzept komplexer Signale mit single-orthant Spektren (SO-Spektren) wurde erstmals 1992 durch Hahn vorgeschlagen [5] und erweitert die Grundidee der Konstruktion analytischer Signale aus [8] auf höhere Dimensionen, indem das Spektrum des Signals auf einen Orthanten eingeschränkt wird (also eine Halbachse im eindimensionalen, einen Quadranten im zweidimensionalen, einen Oktanten im dreidimensionalen Fall usw. [5]). Obwohl diese Konstruktion die Anforderungen an analytische Signale nach Hahn [6] erfüllt, liegt ihr Nachteil darin, dass auch hier das zweidimensionale analytische Signal nicht eindeutig ist, sondern von der Wahl des Quadranten abhängt. Die je nach Wahl des Quadranten möglichen zweidimensionalen analytischen Signale mit SO-Spektren sind

$$S_{SO1}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 + \operatorname{sgn}(k_x))(1 + \operatorname{sgn}(k_y)) \right] \quad (10)$$

$$S_{SO2}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 - \operatorname{sgn}(k_x))(1 + \operatorname{sgn}(k_y)) \right] \quad (11)$$

$$S_{SO3}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 - \operatorname{sgn}(k_x))(1 - \operatorname{sgn}(k_y)) \right] \quad (12)$$

$$S_{SO4}^A = F^{-1} \left[F(S)(1 + \operatorname{sgn}(k_x))(1 - \operatorname{sgn}(k_y)) \right] \quad (13)$$

und lassen sich leicht durch die in (6) und (7) beschriebenen PHT und die in (8) beschriebene THT ausdrücken

$$S_{SO1}^A = S - H_{xy}(S) + i \left[H_x(S) + H_y(S) \right] \quad (14)$$

$$S_{SO2}^A = S + H_{xy}(S) - i \left[H_x(S) - H_y(S) \right] \quad (15)$$

$$S_{SO3}^A = S - H_{xy}(S) - i \left[H_x(S) + H_y(S) \right] \quad (16)$$

$$S_{SO4}^A = S + H_{xy}(S) + i \left[H_x(S) - H_y(S) \right] \quad (17)$$

Unter Beachtung der komplex konjugierten Paare

$$S_{SO1}^A = \overline{S_{SO3}^A} \quad (18)$$

$$S_{SO2}^A = \overline{S_{SO4}^A} \quad (19)$$

ergeben sich je nach Wahl des Quadranten zwei mögliche Amplitudenfunktionen

$$A_{SO1} = \sqrt{(S - H_{xy}(S))^2 + (H_x(S) + H_y(S))^2} \quad (20)$$

$$A_{SO2} = \sqrt{(S + H_{xy}(S))^2 + (H_x(S) - H_y(S))^2} \quad (21)$$

1.3 Hüllkurvenberechnung in 2D

Eine Berechnung der Einhüllenden unter Benutzung des mit einer PHT gebildeten analytischen Signals ist möglich, sofern das mehrdimensionale Signal eine intrinsische Vorzugsrichtung besitzt und diese bekannt ist, so dass die Richtung in der die PHT berechnet wird an diese angepasst werden kann.

Um ein Verfahren zur Hüllkurvenberechnung in zweidimensionalen Signalen zu finden, das keine zusätzlichen Kenntnisse über die Eigenschaften des Signals voraussetzt, muss eine tatsächliche Erweiterung des analytischen Signals verwendet werden. Ausgehend

von der Darstellung der zweidimensionalen analytischen Signale mit SO-Spektren, konstruieren wir einen, von zusätzlichen Bedingungen wie der Wahl des Quadranten im Raum der Wellenzahlen unabhängigen, Ausdruck für die zweidimensionale Einhüllende, indem wir über die Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen aller möglichen analytischen Signale mit SO-Spektren mitteln.

$$A_{SO} = \sqrt{\frac{A_{SO1}^2 + A_{SO2}^2}{2}} = \sqrt{S^2 + H_{xy}(S)^2 + H_x(S)^2 + H_y(S)^2} \quad (22)$$

2. Bedeutung der Separabilität

2.1 Separabilitätskriterium

Für ein separables Signal gilt

$$S(x, y) = S_x(x)S_y(y) \quad (23)$$

und damit für die partiellen und die totale Hilberttransformation

$$H_x(S(x, y)) = H(S_x(x))S_y(y) \quad (24)$$

$$H_y(S(x, y)) = S_x(x)H(S_y(y)) \quad (25)$$

$$H_{xy}(S(x, y)) = H(S_x(x))H(S_y(y)) \quad (26)$$

womit sich leicht zeigen lässt, dass im Fall separabler Signale

$$A_{SO1}^2 = A_{SO2}^2 = A_{SO}^2 \quad (27)$$

gilt.

Für separable Signale ist die Amplitudenfunktion also unabhängig von der Wahl des Quadranten im Raum der Wellenzahlen und identisch mit der Mittelung über die Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen aller Signale mit SO-Spektren. Eine solche Mittelung ist folglich identisch mit der Anwendung eines Separationsansatzes auf die aufzubereitenden Daten.

Aus der Identität (27), lässt sich als mögliches Separabilitätsmaß W_{SEP} mit dem für ein beliebiges zweidimensionales Signal geprüft werden kann in wie fern ein solcher Ansatz gerechtfertigt ist

$$W_{SEP} = A_{SO1}^2 - A_{SO2}^2 \quad (28)$$

ableiten. Für separable Signale gilt $W_{SEP}=0$.

2.2 Einschränkungen der Hüllkurvenberechnung in 2D

In Abbildung 1 werden die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Verfahren zur Hüllkurvenberechnung an einer kreisförmigen Teststruktur dargestellt. Dabei zeigt Abbildung 1 (a) ein gleichgerichtetes Amplitudenbild der Teststruktur und Abbildung 1 (b) die in der Teststruktur implementierte Einhüllende. In Abbildung 1 (c) wird die quasi eindimensionale Hüllkurvenberechnung mit PHT in y-Richtung dargestellt während Abbildung 1 (d) das Ergebnis der Hüllkurvenberechnung nach (22) zeigt.

Wie man leicht sieht, liefert der eindimensionale Ansatz dort gute Ergebnisse, wo der Signalverlauf parallel zu der Richtung ist, in der die PHT gebildet wurde, scheitert jedoch wo der Signalverlauf senkrecht zur Richtung der PHT liegt. In Abbildung 1 (d) sehen wir, dass die Einhüllende lokal überschätzt wird was zu Scheinstrukturen führt. Um diesen Effekt zu verstehen, müssen wir uns vor Augen halten, dass das Separabilitätsmaß W_{SEP} wie es in (28) formuliert wurde eine Funktion der Ortskoordinaten (x,y) ist. Der implizit in der Hüllkurvenberechnung nach (22) enthaltene Separationsansatz kann also

lokal unterschiedlich stark verletzt sein, was zu örtlich unterschiedlicher Abweichung der berechneten Hüllkurve von der tatsächlichen Einhüllenden führt.

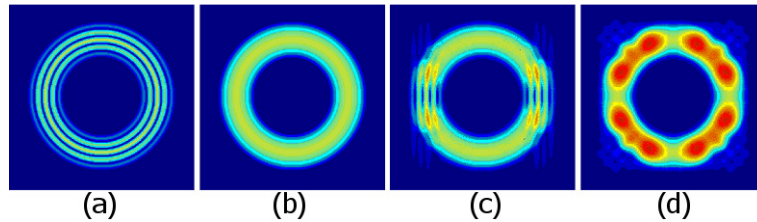


Abbildung 1: a) Modellstruktur mit gleichgerichtetem Signalverlauf, b) im Modell implementierte Einhüllende, c) eindimensionale Hüllkurvenberechnung mit PHT in y -Richtung und d) Hüllkurvenberechnung durch Mittelung über die Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen aller analytischen Signale mit SO-Spektren.

2.3 Rotated-Frame Verfahren

Wir haben im vorherigen Abschnitt festgestellt, dass Separabilität eine lokale Eigenschaft ist. Darüber hinaus hängt sie auch von der Wahl des Bezugssystems ab, das heißt ein Signal das in einem Bezugssystem nicht separabel ist, kann es einem Anderen durchaus sein.

Dieses Wissen liefert einen Ansatz mit dem die Schwierigkeiten bei der Hüllkurvenberechnung nach (22) überwunden werden können, welcher im folgenden als Rotated-Frame Verfahren bezeichnet werden soll. Dazu wird nun die Hüllkurve als Mittelung über die Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen aller analytischen Signale mit SO-Spektren in mehreren gegeneinander gedrehten Koordinatensystemen berechnet und der Wert der Einhüllenden lokal immer aus dem entnommen in dem das Separabilitätsmaß W_{SEP} minimal, also der Separationsansatz am wenigsten stark verletzt ist. Der grobe Ablauf des Verfahrens lässt sich wie folgt beschreiben:

1. Berechne die Hüllkurve nach (22) in mehreren gegeneinander rotierten Koordinatensystemen.
2. Berechne für einen Bildpunkt in jedem Koordinatensystem das Separabilitätsmaß W_{SEP} nach (28) und bestimme das Bezugssystem in dem der Separationsansatz am wenigsten verletzt ist.
3. Lies im unter 2. bestimmten Bezugssystem den Amplitudenwert am betrachteten Bildpunkt aus und übernehme diesen als finales Ergebnis für diesen Punkt.
4. Wiederhole diese Prozedur für alle Bildpunkte des SAFT-Bildes.

Bei zunehmender Anzahl betrachteter Bezugssysteme, nehmen die Abweichungen der berechneten Hüllkurve von der tatsächlichen Einhüllenden schnell ab. Bereits bei einer Gesamtzahl von 16 verschiedenen Bezugssystemen die gegeneinander um jeweils 5.625° gedreht sind, sind keine Scheinstrukturen mehr erkennbar.

3. Beispiele der Anwendung auf SAFT-Daten

3.1 Anwendung auf synthetische Daten

Das beschriebene Verfahren wird nun zunächst auf die SAFT-Rekonstruktion verschiedener Fehlerarten aus synthetischen Daten angewandt. Im vorliegenden Beispiel wurden Messdaten zu zwei Punktrefektoren, einem geneigten geraden Reflektor und einem gekrümmten Reflektor in einem homogenen, isotropen Material aus Simulationen erzeugt. Dabei zeigt Abbildung 2 das Ergebnis der Hüllkurvenberechnung durch Mittelung über die

Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen der analytischen Signale mit SO-Spektren, während Abbildung 3 die mittels Rotated-Frame Verfahren berechnete Hüllkurve des SAFT-Bildes zeigt.

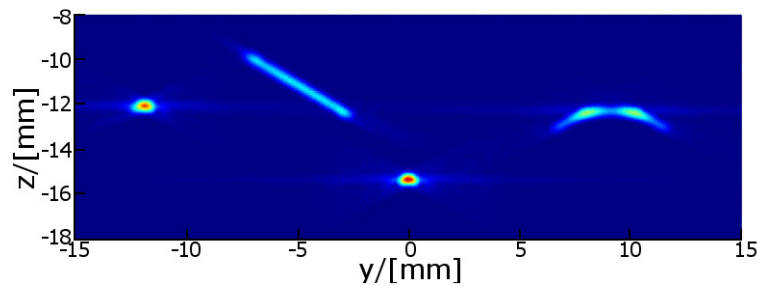


Abbildung 2: Darstellung einer 2D-SAFT-Rekonstruktion verschiedener Reflektorarten aus synthetischen Daten nach Hüllkurvenberechnung durch Amplitudenfunktionen analytischer Signale mit SO-Spektren.

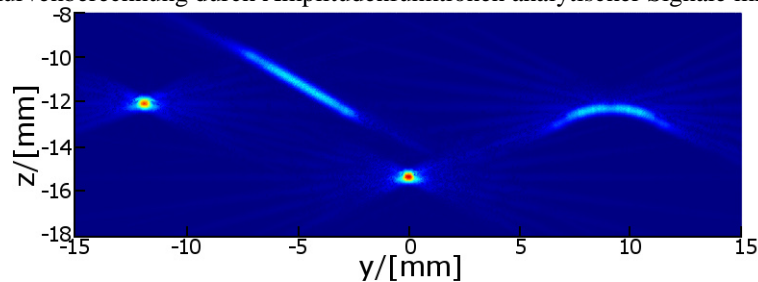


Abbildung 3: Darstellung einer 2D-SAFT-Rekonstruktion verschiedener Reflektorarten aus synthetischen Daten nach Hüllkurvenberechnung durch Rotated-Frame Verfahren.

Obwohl Abbildung 2 bereits überwiegend brauchbare Ergebnisse liefert, treten entlang des Abbilds des gekrümmten Reflektors deutlich sichtbare Scheinstrukturen auf, die leicht zu einer Fehlinterpretation der Anzeige als zwei nahe beieinanderliegende Punktreflektoren führen können. Im Gegensatz dazu sind in Abbildung 3 die Amplituden annähernd gleichmäßig über dem gekrümmten Reflektor verteilt. Zusätzlich fällt die Verzerrung der Punktreflektoren in y -Richtung im SAFT-Bild bei Anwendung des Rotated-Frame Verfahrens offenbar etwas geringer aus.

3.2 Anwendung auf experimentelle Daten

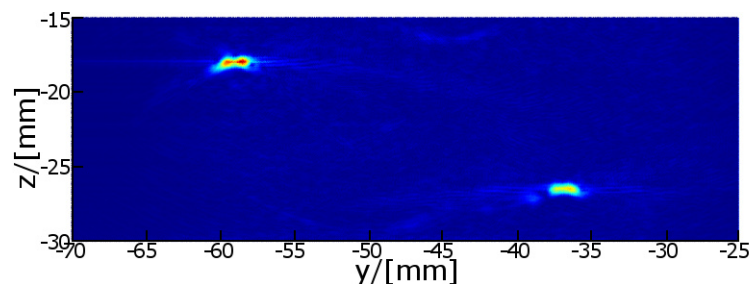


Abbildung 4: Darstellung einer 2D-SAFT-Rekonstruktion aus experimentellen Daten nach Hüllkurvenberechnung durch Amplitudenfunktionen analytischer Signale mit SO-Spektren.

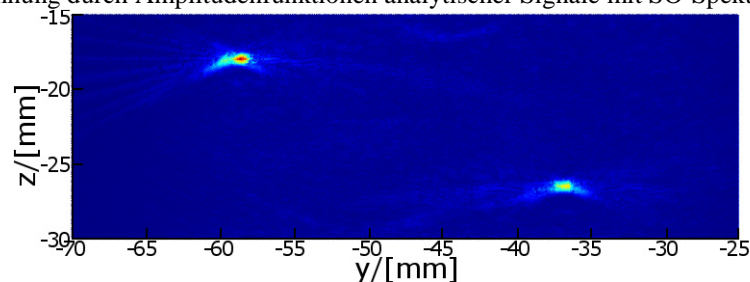


Abbildung 5: Darstellung einer 2D-SAFT-Rekonstruktion aus experimentellen Daten nach Hüllkurvenberechnung durch Rotated-Frame Verfahren.

Zum Abschluss wird das vorgestellte Verfahren an experimentellen Daten getestet. Es handelt sich hierbei um Messdaten die an, in einen Stahlblock eingebrachten, Querbohrungen von 3mm Durchmesser in Tauchtechnik aufgenommen wurden. Die Prüffrequenz lag bei 5 MHz.

Abbildung 4 zeigt hier das Ergebnis der Hüllkurvenberechnung durch Mittelung über die Betragsquadrate der Amplitudenfunktionen der analytischen Signale mit SO-Spektren. Wie man, insbesondere an der Rekonstruktion des linken Reflektors, sieht, treten auch hier aufgrund lokaler Verletzung des Separationsansatzes Scheinstrukturen auf durch die der Eindruck zweier nahe beieinanderliegender Punktreflektoren gefördert wird.

Abbildung 5 zeigt im Gegensatz dazu die Ergebnisse die durch Anwendung des Rotated-Frame Verfahrens aus den selben Ausgangsdaten erzeugt wurden. Hier liefert die Hüllkurvenberechnung tatsächlich nur ein Peak pro Reflektorposition, was sowohl das Risiko von Fehlinterpretationen in Bezug auf die Fehlerart verringert als auch eine genauere Bestimmung der Fehlerlage erlaubt.

Zusammenfassung

Das hier vorgestellte Rotated-Frame Verfahren ist geeignet, durch Ausgleich lokaler Verletzungen des Separationsansatzes bei der Hüllkurvenberechnung unter Verwendung von Amplitudenfunktionen analytischer Signale mit SO-Spektren, das Auftreten von Scheinstrukturen und Verzerrungen in SAFT-Bildern zu minimieren und damit eine korrekte Abbildung vorhandener Fehler sicherzustellen.

Referenzen

- [1] W. Müller, V. Schmitz und G. Schäfer, „Reconstruction by the synthetic aperture focussing technique (saft),“ *Nucl. Eng. Des.*, Bd. 94, pp. 393-404, 1986.
- [2] M. Jastrzebski, T. Dusatko, J. Fortin, F. Farzbod und A. N. Sinclair, „Enhancement of synthetic aperture focussing technique (saft) by advanced signal processing,“ in *s Proc. 16th WCNDT*, Montreal, 2004.
- [3] S. R. Doctor, H. D. Collins, S. L. Crawford, T. E. Hall, A. Baldwin, R. E. Bowey und R. P. Gribble, „Development and validation of a real time saft-ut system for inservice inspection of lwr's,“ *Nucl. Eng. Des.*, Bd. 89, pp. 357-369, 1985.
- [4] O. Martinez, M. Parilla, M. A. G. Izquierdo und L. G. Ullate, „Application of digital signal processing techniques to synthetic aperture focussing technique images,“ *Sensors and Actuators*, Bd. 76, pp. 448-456, 1999.
- [5] S. L. Hahn, „Multidimensional complex signals with single orthant spectra,“ *Proc. IEEE*, Bd. 80, pp. 1287-1300, 1992.
- [6] S. L. Hahn, „Complex signals with single orthant spectra as boundary distributions of multidimensional analytic functions,“ Warschau, 1999.
- [7] S. L. Hahn und K. M. Snopek, „The unified theory of n-dimensional complex and hypercomplex analytic signals,“ *Bull. Pol. Ac.: Tech.*, Bd. 59(2), pp. 167-181, 2011.
- [8] D. Gabor, „Theory of Communication,“ *J. Inst. Elect. Eng.*, Bd. 93, pp. 429-441, 1946.
- [9] T. Bülow und G. Sommer, „A novel approach to the 2d analytic signal,“ in *s Proc. CAIP'99*, Ljubljana, 1999.
- [10] X. Guanlei, W. Xiatong und X. Xiagang, „Generalized hilbert transform and its properties in 2d lct domain,“ *Signal Processing*, Bd. 89, pp. 1395-1402, 2009.
- [11] J. P. Havlicek, J. W. Havlicek, N. D. Mamuya und A. C. Bovik, „Skewed 2d hilbert transforms and computed am-fm models,“ in *s Proc. ICIP(1)*, Chicago, 1998.