

ISBN 3-88314-720-6

Forschungsbericht 147

**Bundesanstalt
für Materialforschung
und -prüfung (BAM) Berlin**

**Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme
von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen
Stäben mit offenem Querschnitt mittels
frequenzabhängiger Ansatzfunktionen**

von Dipl.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt

Dezember 1987
D 83

166 Seiten, 41 Abbildungen, 9 Tabellen

Die vorliegende Arbeit wurde während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am 1. Institut für Mechanik der Technischen Universität begonnen und in der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) fertiggestellt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Sander danke ich für die Anregung, Betreuung und stete Förderung der Arbeit. Ihm und Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Stühler gilt man besonderer Dank für die Mühe bei der Durchsicht der Arbeit und für die wertvollen Hinweise sowie Verbesserungsvorschläge. Ebenso danke ich Herrn Prof. H. Pfützner für das freundliche Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat.

Frau L. Borio und Frau E. Tessmann danke ich für das sorgfältige Schreiben des Manuskriptes.

Nicht zuletzt danke ich dem Präsidenten der Bundesanstalt Herrn Prof. Dr. rer. nat. G. W. Becker für die Genehmigung, diese Arbeit als BAM-Forschungsbericht zu veröffentlichen.

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon (030) 8104-1 Telex 183 261 bamb d Telefax (030) 8 112 029

Copyright © 1987 by Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Verlag und Vertrieb:
Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH
Postfach 10 11 10, 2850 Bremerhaven 1
Telefon (0471) 46093-95

Kurzfassung

Die auf der Finite-Element-Methode basierende Arbeit befaßt sich mit der Lösung von Eigenwertproblemen bei Verwendung von frequenzabhängigen Ansatzfunktionen, die für verschwindenden Frequenzparameter in statische Ansätze (z.B. Hermite-Polynome) übergehen. Hierzu werden aus den exakten Lösungen der ungekoppelten Biege- bzw. Torsionsschwingung mit Normalkrafteinfluß neue Ansatzfunktionen konstruiert, die entweder mit einem festgehaltenen Frequenzparameter zu einem algebraischen, allgemeinen Eigenwertproblem oder mit ständig angepaßtem Parameter zum impliziten Eigenwertproblem führen, bei dem alle Matrixglieder Funktion des Eigenwertes sind. Hierfür wird ein auf Sturmschen Ketten basierender Algorithmus vorgestellt, mit dem auch eng benachbarte und mehrfache Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren effizient ermittelt werden können. Beispielhaft werden Rahmen aus elastischen Stäben mit gekoppelter und ungekoppelter Biege- und Torsionsbewegung untersucht.

Bei Systemen, die nur zur Erzielung höherer Eigenwertgenauigkeiten feiner diskretisiert werden müssen als es die Topologie des mechanischen Systems erzwingt, bietet die Verwendung der frequenzabhängigen Ansatzfunktionen Vorteile gegenüber bisher gebräuchlichen Matrizenkondensationsverfahren, da auf die Bereitstellung größerer Systemmatrizen verzichtet werden kann.

Summary

The present paper is based on the finite-element-method and deals with the solution of eigenvalue-problems using frequency-dependent shape-functions that become static functions for frequency-parameters that equal zero, e.g. Hermite polynomials.

New shape-functions are derived from exact solutions of uncoupled bending or torsion vibration including axial-force effects. They lead either to an algebraic generalized eigenvalue-problem or to implicit eigenvalue-problems with continually adapted parameters with all terms of the matrix being functions of the eigenvalue. An algorithm based

on the Sturm sequence technique is presented which allows efficient evaluation of closely-spaced and multiple eigenvalues and the corresponding eigenvectors. Examples of frames of elastic beams with coupled and uncoupled bending and torsion vibration are examined.

To reach higher accuracy of the eigenvalues systems had to be divided into smaller elements than the topology of the mechanical system requires. With the use of frequency-dependent shape-functions the minimal size matrices of the structure can be utilized while both increasing the accuracy of the eigenvalues and the number of eigenvalues that can be calculated.

Stichworte

- Rahmenschwingungen
- Wölbkrafttorsion
- Biegetorsionskopplung
- Finite-Element-Methode (FEM)
- Eigenwertproblem
- frequenzabhängige Ansatzfunktionen
- Modalanalyse

Inhalt	Seite
Symbole und Abkürzungen	IV
1 Stand der Technik	1
1.1 Elementierungsverfahren	1
1.2 Vorhandene Matrizen	3
1.3 Lösungswege bei Eigenwertproblemen (EWP)	5
1.4 Neue Ansatzfunktionen zur näherungsweise Berechnung der höheren Eigenwerte	6
2 Matrizenkatalog	7
2.1 Exakte Elementmatrizen	7
2.1.1 Torsionsschwingung mit Verwölbung	7
2.1.2 Biegeschwingung mit Normalkrafteinfluß	15
2.2 Gekoppelte Energien der Biege-Torsionsschwingung	20
2.2.1 Frequenzabhängige Ansatzfunktionen	32
2.2.2 Polynomansatzfunktionen	41
3 Systemmatrix	47
3.1 Transformation der Elementmatrix	47
3.1.1 Transformation vom Hauptachsensystem auf lokale Systemachsen	48
3.1.2 Transformation von lokalen auf globale Achsensysteme	53
3.1.3 Transformation von globaler Ausgangslage in globale Endlage bei geometrisch nichtlinearer Berechnung	56
3.2 Einzelfedern und Einzelmassen	59
3.3 Aufbau der Systemmatrix und Berücksichtigung der Randbedingungen	61
4 Lösung des impliziten EWP der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix	64
4.1 Berechnung der Eigenwerte ω_i mit Sturmschen Ketten	65
4.1.1 Allgemeine Erläuterung des Algorithmus	67
4.1.2 Das implizite EWP mit $\underline{K}_{dyn}(\omega)$ im Vergleich zum allgemeinen EWP mit $\underline{K} - \omega^2 \underline{M}$ anhand eines einfachen Beispiels	70
4.2 Berechnung der Eigenvektoren aus $\underline{K}_{dyn}(\omega_i) \underline{d}_i = \underline{0}$	75
4.3 Die Problematik der numerischen Behandlung	79
4.4 Leistungsfähigkeit des Verfahrens anhand von Beispielen	85
5 Lösung des allgemeinen EWP mit Matrizen aus frequenzabhängigen Näherungsansätzen	95
5.1 Anwendungsgrenzen für statische Ansatzfunktionen	95
5.2 Berechnung höherer Eigenwerte durch Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter	96
5.3 Frequenzabhängige Ansatzfunktionen bei gekoppelten Biege-Torsionsschwingungsbeispielen	104
6 Das gelöste EWP als Grundlage der Berechnung gedämpfter erzwungener Schwingungen	113
7 Zusammenfassung	116
8 Literatur	117
 Anhang	 Seite
A.1 Torsionsschwingung ungekoppelt mit Normalkraftwirkung ohne Verwölbung	129
A.2 Längsschwingung	130
A.3 Seilschwingung	131
A.4 Integralwerte für \underline{N} -Matrizen	133
A.5 Integrale für \underline{N}_x -Matrizen	134
A.6 Integralmatrizen der Hermite-Polynome 2. und 4. Ordnung	135
A.7 Polynomansätze 3. und 6. Ordnung	137

A.8	Berechnung der Richtungskosinus zwischen \underline{b}_i und \underline{e}_j	139
A.9	Berechnung der Restbewegung durch Abspaltung der Starrkörperbewegung	141
A.10	Polstellen der Systemdeterminate beim impliziten EWP	143
A.11	Flußdiagramm zur Lösung des impliziten EWP	145

Symbole und Abkürzungen

$(\cdot)^\cdot$	Differentiation nach t
$(\cdot)_{,1}$	Differentiation nach $x_1 (=x)$
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial d_1} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial d_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial d_n} \end{bmatrix}$	Differentiation nach Vektor $\underline{d}^T = [d_1, d_2, \dots, d_n]$
$(\underline{\cdot})^T; (\underline{\underline{\cdot}})^T$	Transposition eines Vektors bzw. einer Matrix
$(\underline{\underline{\cdot}})^{-1}$	Inversion einer Matrix
$ \cdot ; \underline{\cdot} $	Absolutbetrag eines Skalars bzw. eines Vektors
$\ \underline{\underline{\cdot}}\ $	Norm einer Matrix
$A_1(t), \dots, A_{12}(t)$	Integrationskonstanten der Ortsfunktionen mit Zeitgesetz
$A_{k,1}, A_{k,2}$	Torsionsamplitude im k-ten Eigenvektor für Schwingwinkel 1 bzw. 2
$\underline{\underline{A}}_1, \underline{\underline{A}}_2, \underline{\underline{A}}_3, \hat{\underline{\underline{A}}}_1$	frequenzabhängige Matrizen zur Anpassung der allgemeinen Lösung an Randbedingungen
$\underline{\underline{A}}_2, \underline{\underline{A}}_3, \underline{\underline{A}}_6$	Matrizen zur Anpassung von Polynomansätzen an Randbedingungen
$a_{2-}, a_{2+}, a_{3-}, a_{3+}$	Abstände vom Schubmittelpunkt M zur Systemachse A
\underline{a}	Einheitsvektor der Drehachse eines Elementes
$\underline{a}_1(t), \underline{a}_2(t), \underline{a}_3(t)$	Vektoren der Integrationskonstanten mit Zeitgesetz
$B_{k,1}, B_{k,2}$	Biegeamplitude im k-ten Eigenvektor für Schwingwinkel 1 bzw. 2
$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$	lokale Basis eines Elementes im Ausgangszustand
$\hat{\underline{b}}_1, \hat{\underline{b}}_2, \hat{\underline{b}}_3$	mitgehende lokale Basis eines Elementes

$C_2(x), C_4(x), C_6(x)$	Abkürzungen für $\cosh \lambda_2 x$, $\cosh \lambda_4 x$, $\cosh \lambda_6 x$
C_2, C_4, C_6	Abkürzungen für $\cosh \lambda_2 l$, $\cosh \lambda_4 l$, $\cosh \lambda_6 l$
$\overset{i}{C}$	Einzelfedermatrix am Knoten \boxed{i}
$\underline{C}, \underline{C}_h, \underline{C}_{pq}$	Matrizen für Hilfskongruenz- transformationen
c	Konstante zur Säuberung von Eigen- vektoren bei mehrfachen Eigenwerten
$c_1(x), c_3(x), c_5(x)$	Abkürzungen für $\cos \lambda_1 x$, $\cos \lambda_3 x$, $\cos \lambda_5 x$
c_1, c_3, c_5	Abkürzungen für $\cos \lambda_1 l$, $\cos \lambda_3 l$, $\cos \lambda_5 l$
\hat{c}_1, c_0	Abkürzungen für $\cos \hat{\lambda}_1 l$, $\cos \lambda_0 l$
c_{v1}, c_{v2}, c_{v3}	Wegfedern in $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ -Richtung
$c_{\theta 1}, c_{\theta 2}, c_{\theta 3}$	Drehfedern um $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ -Richtung
c_φ	Wölbfeder
D_i	Dämpfungsgrad der i -ten Eigenform
\underline{D}	Diagonalmatrix nach Zerlegung der Systemmatrix
\underline{D}_v	Diagonalmatrix mit 1, -1 bzw. 0 besetzt
$\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3, \hat{\underline{D}}_1$	Matrizen zur Bildung von Ortsablei- tungen
$\underline{D}_{11}, \underline{D}_{22}, \underline{D}_{33}$	Matrizen zur Bildung von 2-fachen Ortsableitungen
d_{ii}	i -tes Diagonalelement in \underline{D}
\underline{d}	Verschiebungsvektor des Systems
$\underline{d}(\omega)$	Fouriertransformierte von $\underline{d}(t)$
$\underline{d}_e, \underline{d}_L, \underline{d}_G$	Elementverschiebungsvektoren, bezogen auf unterschiedliche Achsensysteme
$\overset{i}{\underline{d}}_G$	Verschiebungsvektor des \boxed{i} -ten Knotens
\underline{d}_i	i -ter Eigenvektor des Systems
$\hat{\underline{d}}_i$	bezüglich der Massenmatrix normier- ter Eigenvektor
$\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$	Verschiebungsvektoren der Element- submatrizen
E	kinetische Energie eines Elementes
$\overset{i}{E}$	kinetische Energie am Knoten \boxed{i} infolge Einzelmasse

$E(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$	Elastizitätsmodul eines Elementes
EF	Dehnsteifigkeit eines Elementes
EF_{22}, EF_{33}	Biegesteifigkeiten, bezogen auf Hauptachsensystem im elastischen Mittelpunkt S
$EF_{\psi\psi}$	Wölbsteifigkeit, bezogen auf Schubmittelpunkt M
$\underline{E}, \underline{E}_{11}, \underline{E}_{22}$	Matrizen für exzentrische Elementanschlüsse
e_{c1}, e_{c2}, e_{c3}	Abstände vom Knoten zum Angriffspunkt einer Einzelfeder
e_{m1}, e_{m2}, e_{m3}	Abstände vom Knoten zum Angriffspunkt einer Einzelmasse
$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$	globale Basis
F	Fläche des Elementquerschnitts
F_1^{00}, F_2^{00}	frequenzabhängige Terme der Elementsubmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}^{00}$
$\hat{F}_1^{11}, \hat{F}_2^{11}$	frequenzabhängige Terme der Elementsubmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}^{11}$
$F_1^{jj}, \dots, F_6^{jj}$	frequenzabhängige Terme der Elementsubmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}^{jj}$
$F_1^{ij}, \dots, F_{16}^{ij}$	frequenzabhängige Terme der Elementkoppelsubmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}^{ij} (i \neq j)$
\underline{F}	Matrix der Wölb- und Biegesteifigkeiten eines Elementes
f	Koeffizientendeterminante der Systemmatrix
f_0, f_1, \dots, f_n	Hauptabschnittsdeterminante der Systemmatrix
$f_{\text{gen}, i}$	generalisierte Erregung der i-ten Eigenform
\underline{f}	Kraftvektor des Systems
$\underline{f}(\omega)$	Fouriertransformierte von $\underline{f}(t)$
$\underline{f}_e, \underline{f}_L, \underline{f}_G$	Elementschnittkraftvektoren, bezogen auf unterschiedliche Achsensysteme
$\underline{f}_0, \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$	Schnittkraftvektoren der Elementsubmatrizen
$G(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$	Schubmodul
GJ_T	St. Venantsche Torsionssteifigkeit eines Elementes
\underline{G}	geometrische Systemmatrix

\underline{G}^{ij}	geometrische Elementsubmatrix
g_2, g_3	Abstände vom Schubmittelpunkt M zum Massenmittelpunkt G
$\underline{H}(\omega)$	Übertragungsfunktionsmatrix des Systems
\underline{H}	Matrix der Ortsfunktionen der Elementverschiebungsansätze
$\underline{H}, \underline{1}, \underline{\check{H}}, \underline{\check{H}}$	Matrizen mit abgeleiteten Ortsfunktionen
$\underline{H}_{ij}, \underline{H}_{xij}$	Integralmatrizen von i- und j-mal abgeleiteten Hermite-Polynomen ohne bzw. mit x als Gewichtsfunktion
$\underline{h}_4, \underline{h}_2, \underline{h}_3, \underline{h}_6$	Polynomansätze der Ordnung 4, 2, 3 und 6
$\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3, \hat{\underline{h}}_1$	frequenzabhängige Ansatzfunktionen
\underline{I}	Einheitsmatrix
i_M	Trägheitsradius bezügl. Schubmittelpunkt M
i_p	polarer Trägheitsradius
J_{11}, J_{22}, J_{33}	axiale Trägheitsmomente einer Einzelmasse
J_{12}, J_{13}, J_{23}	Deviationsmomente einer Einzelmasse
\underline{J}	Matrix der Massebelegung eines Elementes
\underline{i}	Einzelmassenmatrix am Knoten \boxed{i}
\underline{j}	imaginäre Einheit: $j^2 = -1$
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix des Systems
$\underline{K}(\omega_{\text{fest}})$	Steifigkeitsmatrix, gebildet aus Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter
\underline{K}^*	Steifigkeitsmatrix des Systems nach Hilfstransformation
$\underline{K}_{\text{dyn}}$	frequenzabhängige Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_{\text{edyn}}, \underline{K}_{\text{Ldyn}}, \underline{K}_{\text{Gdyn}}$	Elementmatrizen, bezogen auf unterschiedliche Achsensysteme
$\underline{K}_{\text{dyn}}^{jj}, \hat{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{ll}$	Elementdiagonalsubmatrizen
$\underline{K}_{\text{dyn}}^{ij}$	Elementkoppelsubmatrizen
$\underline{K}_{\text{dyn}}^{\text{red}}(\omega_i), \bar{\underline{K}}_{\text{dyn}}(\omega_i)$	modifizierte, reguläre Systemsteifigkeitsmatrix zur Berechnung des i-ten Eigenvektors
$k_{pq}, \underline{k}_{pq}^*, k_{pq}^{ij}$	Elemente der Matrizen $\underline{K}, \underline{K}^*, \underline{K}^{ij}$
$k_{\text{gen}, i}$	generalisierte Steifigkeit des i-ten Eigenvektors

$\underline{k}_k^{\text{red}}$	rechte Seite des reduzierten Gleichungssystems
L	Lagrangefunktion
L	Elementlänge
\underline{L} =	Linksdreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen
l	halbe Elementlänge
l_{ij}	Glieder der Matrix \underline{L}
M_1, M_ψ	Torsionsmoment und Bimoment eines Elementes bezügl. Schubmittelpunkt M
M_2, M_3	Biegemomente im Hauptachsensystem bezügl. elastischen Mittelpunkt S
$M_2^*(-l), M_3^*(-l)$	Schnittlasten am linken Elementrand in Schnittlastenkonvention
\underline{M} =	Massenmatrix des Systems
$\underline{M}(\omega_{\text{fest}})$ =	Massenmatrix aus Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter
\underline{M}^{ij} =	Submatrizen der Elementmassenmatrix
$\underline{\check{M}}, \underline{\check{M}}$ =	Matrizen der Biege- und Torsionsmomente aus statischen Vorlasten eines Elementes
m	Einzelmasse
m_2, m_3	Abstände vom Schubmittelpunkt M zum elastischen Mittelpunkt S
$m_j, \overset{*}{m}_j, \hat{m}_j$	Hilfsgrößen zur Beschreibung der Systemmatrizenhülle
$m_{\text{gen}, i}$	generalisierte Masse des i-ten Eigenvektors
N_1, N_2, N_3	frequenzabhängige Nenner der Matrixelemente von $\underline{A}_1^{-1}, \underline{A}_2^{-1}, \underline{A}_3^{-1}$
$\underline{N}^{ij}, \underline{N}_x^{ij}$ =	Integralmatrizen bei Verwendung von frequenzabhängigen Ansatzfunktionen
n	Ordnung der Systemmatrix
$\underline{n}_p(x), \underline{n}(\xi), \underline{n}_2, \underline{n}_3, \underline{n}_6$	Vektor der Ortsfunktionen für Polynomansätze
$\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3, \hat{\underline{n}}_1$	Vektoren der Ortsfunktionen für frequenzabhängige Ansätze
P	Normalkraft eines Elementes
\underline{P} =	Matrix der Normalkrafteinflüsse eines Elementes

P_i	Polstelle der frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix
P_{iT}, P_{iB}	Polstelle infolge Torsions- bzw. Biegeschwingung
Q_2, Q_3, Q_φ	Querkräfte aus statischen Vorlasten
q_0, q_u	Anzahl der negativen d_{ii} in $\underline{D}(\omega)$ bei ω_0 bzw. ω_u
q_{0-u}	Anzahl der Eigenwerte zwischen ω_0 und ω_u
$q_i(t)$	generalisierte Koordinate des i -ten Eigenvektors
R_{ij}	Komponenten des Drehtensors
R_T, \bar{R}_T	vorlastabhängige Terme der Torsion
R	Drehmatrix
\underline{r}_k	Ortsvektor zum Knoten \boxed{k}
$r_{M2}, r_{M3}, r_{M\varphi}$	Querschnittsparameter der Torsion
$S_2(x), S_4(x), S_6(x)$	Abkürzungen für $\sinh \lambda_2 x, \sinh \lambda_4 x, \sinh \lambda_6 x$
S_2, S_4, S_6	Abkürzungen für $\sinh \lambda_2 l, \sinh \lambda_4 l, \sinh \lambda_6 l$
\underline{S}_1	Matrix der Schnittlastrelationen bei Torsion
$\underline{S}_{xx}(\omega), \underline{S}_{dd}, \underline{S}_{ff}$	Spektraldichtematrizen des Systems
$s_1(x), s_3(x), s_5(x)$	Abkürzungen für $\sin \lambda_1 x, \sin \lambda_3 x, \sin \lambda_5 x$
s_1, s_3, s_5	Abkürzungen für $\sin \lambda_1 l, \sin \lambda_3 l, \sin \lambda_5 l$
\hat{s}_1, s_0	Abkürzungen für $\sin \hat{\lambda}_1 l, \sin \lambda_0 l$
$\underline{s}(l)$	Elementrandverschiebung infolge Rotation
T_1, T_2, T_3	Transversalkräfte parallel zum unausgelenkten lokalen Hauptachsensystem
$\underline{T}, \underline{T}_1, \underline{T}_{11}, \hat{\underline{T}}_1$	Transformationsmatrizen
t	Zeit
U	potentielle Energie eines Elementes
\underline{U}	potentielle Energie am Knoten \boxed{i} infolge Einzelfedern
u_1	Verschiebung des elastischen Mittelpunktes S

V_1, V_2, V_3	Verschiebungen eines Knotens bezogen auf die globale Basis
v_1, v_2, v_3	Verschiebungen eines Knotens bezogen auf die lokale Basis der Systemachse A
\underline{v}	Vektor der Translationsbewegung eines Elementes unter statischen Vorlasten
w_2, w_3	Verschiebungen des Schubmittelpunktes M in Richtung x_2, x_3
$\underline{w}(x, t)$	Verschiebungsfeld eines Elementes
x	Längskoordinate des Elementes
x_1, x_2, x_3	Hauptachsensystem bezügl. Schubmittelpunkt M
$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$	Hauptachsensystem bezügl. elastischen Mittelpunkt S
$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$	Hauptachsensystem bezügl. Massenmittelpunkt G
$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$	Linear-Koeffizienten
α_i, β_i	Strukturparameter der Elementdifferentialgleichungen
αL^2	dimensionsloser Vorlastparameter eines Elementes
βL^4	dimensionsloser Frequenzparameter eines Elementes
δ	kleine positive Zahl
δ_{ij}	Kronecker-Delta
ϵ	Dehnung
ϵ_{ijk}	Epsilon-Tensor
θ	Drehung um Achse \underline{a}
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Drehungen eines Knotens, bezogen auf die globale Basis
$\underline{\theta}$	Vektor der Rotationsbewegung eines Elementes unter statischen Vorlasten
$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$	Drehungen eines Knotens, bezogen auf die lokale Basis
ϖ	Grenzlinienparameter
$\lambda_1, \dots, \lambda_6, \lambda_0, \hat{\lambda}_1$	Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Elementdifferentialgleichungen
ν	Lastensteigerungsfaktor

ξ	dimensionslose Längskoordinate eines Elementes
$\rho(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$	Dichte
ρ^{I_P}, ρ^{I_M}	rotatorische Trägheit bezügl. elastischen Mittelpunkt S bzw. Schubmittelpunkt M
ρ^F	Massenbelegung eines Elementes
$\underline{\underline{G}}_{dd}$	Kovarianzmatrix der Systemverschiebungen
ψ	Einheitsverwölbung bezügl. Schubmittelpunkt M
ω	Kreisfrequenz
ω_{fest}	festgehaltener Frequenzparameter
$\omega_{-\text{gr. } j}, \omega_{+\text{gr. } j}$	Grenzlinien für brauchbare Eigenwertbereiche
ω_i	i-te Eigenfrequenz (Eigenwert)
$\omega_i \text{ exakt}$	i-ter Eigenwert aus exakter Lösung
$\omega_{k,1}, \omega_{k,2}$	k-ter Eigenwert für Schwingwinkel 1 bzw. 2 aus exakter Lösung des Biege-Torsions-Problems
ω_o, ω_u	obere bzw. untere Intervallgrenze

1 Stand der Technik

Als erster Schritt der dynamischen Untersuchung eines linearen Systems erfolgt meist die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenformen. Bei mechanischen Systemen genügt im allgemeinen die Berücksichtigung der unteren Eigenwerte zur Systembeschreibung. Bei schmalbandiger deterministischer oder stochastischer Erregung ist neben einer realistischen Dämpfungsannahme die genaue Kenntnis der Eigenfrequenzen von entscheidender Bedeutung für die zu berechnende Systemantwort.

1.1 Elementierungsverfahren

Bei Stabsystemen haben sich zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens Elementierungsverfahren durchgesetzt. Sofern es gelingt, ein Element matriziell zu beschreiben, kann auf die Systemmatrix durch multiplikative oder additive Verknüpfung der Elementmatrizen geschlossen werden. Beim Übertragungsverfahren werden aus der allgemeinen Lösung der Element-Differentialgleichung die freien Konstanten zugunsten der Randgrößen (Randverschiebungen und -schnittlasten) eliminiert, so daß eine Übertragung der Zustandsgrößen vom einen zum anderen Elementrand mathematisch beschrieben wird. Effektiv können mit diesem Verfahren jedoch nur unverzweigte Systeme berechnet werden, wobei die Zustandsgrößen des einen Randes durch multiplikative Verknüpfung der Elementübertragungsmatrizen in die Zustandsgrößen des anderen Randes überführt werden. Nach Berücksichtigung der Systemrandbedingungen ergibt sich bei der Ermittlung von Eigenfrequenzen ein homogenes Gleichungssystem, wobei die Determinante dieser Systemübertragungsmatrix verschwinden muß. Der Vorteil der klein bleibenden Systemmatrix (die Determinantenordnung ist unabhängig von der Elementanzahl) wird jedoch durch die beschränkte Anwendbarkeit (kettenförmige Systeme) und die numerischen Schwierigkeiten bei steifen Zwischenlagern bzw. bei hohen Frequenzen erkauft. Einzelheiten sowie Verbesserungsvorschläge zum Übertragungsverfahren sind aus der folgenden Literaturliste zu ersehen: Myklestad (1945), Thomson (1950), Fuhrke (1955,1956), Zurmühl (1958), Pestel und Mahrenholtz (1959), Marguerre und Uhrig (1964), Schrader (1965), Petersen (1970).

Werden die Integrationskonstanten der exakten allgemeinen Lösung der Differentialgleichung durch die Randkräfte ausgedrückt

(Kraftgrößenverfahren), wird die Frequenzdeterminante der Struktur durch die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen erhalten (Hohenemser und Prager (1933)).

Eine duale Formulierung der Frequenzdeterminante wird über die Gleichgewichtsbedingungen erzielt, wenn die Integrationskonstanten durch die Randverschiebungen (Verschiebungsgrößenverfahren) ausgedrückt werden (Koloušek (1953, 1962)).

Die beiden letztgenannten Verfahren verknüpfen die Elementmatrizen additiv zur Systemmatrix, deren Ordnung mit der Knotenzahl (Verbindungspunkte der Elemente) wächst, jedoch keiner Einschränkung des Systemaufbaus unterliegt. Auch numerisch reagieren diese, zur Familie der Finite-Element-Methode (FEM) gehörenden Verfahren viel stabiler als das Übertragungsverfahren.

Im weiteren erfolgt eine Beschränkung auf das Verschiebungsgrößenverfahren, dessen Systemmatrix die Steifigkeit der mechanischen Struktur repräsentiert und dessen Unbekannte die Knotenpunktverschiebungen bezüglich eines globalen Koordinatensystems darstellen. Argyris (1954/55, 1957, 1966) hat wohl als erster das Verschiebungsgrößenverfahren der Statik in Matrizenschreibweise umgesetzt. Da die exakte Lösung der Elementdifferentialgleichung oft sehr aufwendig oder nicht möglich ist, wird die Systemmatrix häufig mit Hilfe von Variationsprinzipien, die an die Stelle der Gleichgewichts-, Rand- und Übergangsbedingungen treten, aufgebaut (Bathe (1986)). Die übersichtliche Systematisierung und die vielfältige Verwendbarkeit verhalfen dem Verfahren in Verbindung mit der Entwicklung leistungsfähiger Großrechenanlagen zum Durchbruch.

Das verbesserte Kraftgrößenverfahren läßt sich nach Marguerre und Wölfel (1979) wohl ähnlich programmierfreundlich aufbereiten und hat auch für manche Problemstellungen Vorteile, z.B. wenn nur die Schnittkräfte gesucht sind; jedoch arbeiten nahezu alle z.Z. auf dem Softwaremarkt erhältlichen Programmsysteme nach dem Verschiebungsgrößenverfahren. Auch sog. gemischte Verfahren, in denen Verschiebungen und Schnittkräfte als Unbekannte im Gleichungssystem mitgenommen werden, sind erarbeitet worden. Sie sind jedoch schlechter systematisierbar und meist auf spezielle Problemstellungen zugeschnitten. Letztlich sei noch auf die Finite-Streifen-Methode hingewiesen (Cheung (1976), Benito u.a.

(1985), Puckett u.a. (1986)), die die Querschnittsdeformation (Profilverformung bzw. lokales Knicken) mit erfaßt.

1.2 Vorhandene Matrizen

Die in Abschnitt 2 und im Anhang aufgeführten Elementmatrizen sind zum Teil bekannt, werden jedoch zur besseren Übersicht in einer einheitlichen Nomenklatur zusammengestellt.

Die Eigenwerte (Eigenfrequenzen ω_i) sind in der exakten frequenzabhängigen (dynamischen) Steifigkeitsmatrix implizit enthalten, d.h., jedes Element der Matrix ist Funktion von ω . Dieser Sachverhalt wird im weiteren als implizites Eigenwertproblem bezeichnet. Beispielsweise gehören die Matrizen von Koloušek (1962) in diese Kategorie. Die Verwendung von Variationsprinzipien führt i.a. über ein algebraisches Matrizenpaar, in denen die Eigenwerte nicht mehr implizit enthalten sind, auf das allgemeine Eigenwertproblem.

Ausgehend von den Energieausdrücken der Stäbe haben Zurmühl (1963) und Archer (1963) zusätzlich zur bekannten statischen Steifigkeitsmatrix eine Elementmassenmatrix angegeben, wobei als Ansatzfunktionen für den Verschiebungsverlauf im Element Hermite-sche Interpolationspolynome verwendet wurden.

Im Falle der Statik stellen diese Ansätze für elementweise konstante Steifigkeiten und Systembelastung durch Knotenkräfte noch die exakte Lösung dar. Im Fall der Schwingung sind diese Ansätze "zulässige Funktionen", die es gestatten, die geometrischen (wesentlichen) Rand- und Übergangsbedingungen zu erfüllen. Falk (1963) und Habedank (1972) haben verschiedene Verfahren zur Konstruktion von "Vergleichsfunktionen" angegeben, die zusätzlich die dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Jedoch werden diese verbesserten Näherungsansätze immer mit einem erheblich höheren Organisations- und Numerikaufwand im Rechner erkauft. Bezüglich verbesserter Ansatzfunktionen sei noch auf Gladwell (1964a, b), Cohen und McCallion (1969) und Sotiropoulos (1978) hingewiesen.

Für gerade, dünnwandige, elastische Stäbe mit offenem Querschnitt wurde die exakte statische Steifigkeitsmatrix erstmals von Kra-hula (1967), später von Balmer (1969) sowie Argyris und Radaj

(1970) angegeben. Krajconovic (1969) verwendete die exakte statische Lösung der Wölbkrafttorsion, Mei (1970) die Hermite-Polynome als Ansatzfunktionen für die gekoppelte Biege-Torsionsschwingung. Barsoum (1970) und Tebedge (1972) untersuchten mit den gleichen Ansatzfunktionen die statische Biege-Torsionsstabilität, Rajasekaran (1971) berücksichtigte zusätzlich plastische Verformungen. Für die Schwingungsuntersuchung von Hochhäusern wurden von Schalk (1973) bzw. Coull und Mukherjee (1978) Stabmodelle entwickelt, mit denen auch Schubeinflüsse berücksichtigt werden konnten. Die exakte statische Steifigkeitsmatrix der Biege-Torsionsstabilität wurde für wölbbehinderte Stabenden von Chaudhary (1982) angegeben. Yang u.a. (1984) diskutierten die Wirkung wölbbelastischer Stabanschlüsse. Von den gleichen Autoren (1986a, b) sind Matrizen und Algorithmen für geometrisch nichtlineare Analysen von räumlichen Stabwerken entwickelt worden.

Konstruktionsvorschriften für statische Steifigkeitsmatrizen von ebenen bzw. räumlich gekrümmten Stäben sind u.a. von Beverungen (1976), Jirousek (1981) und Wunderlich u.a. (1986) angegeben worden. Bezüglich vorverdrehter gerader Stäbe sei auf Krenk u.a. (1981) verwiesen.

Neben dem Weg, über die Energien die Steifigkeits- und Massenmatrizen herzuleiten, ist bei geschlossen darstellbarer exakter Matrix auch eine Potenzreihenentwicklung möglich, die bei ungekoppelten Stäben in den ersten beiden Reihengliedern zu den gleichen Matrizen führen wie Hermiteansätze (Paz und Dung (1975)). Richards und Leung (1977) leiten die Massenmatrix per Differentiation aus der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix ab. Mit der Methode von Hopper u.a. (1980) können aus der exakten Matrix mittels numerischer Linearisierung algebraische Matrizen gewonnen werden. Wenn hiermit z.B. die erstmals von Frieberg (1983, 1985) angegebenen exakten Biege-Torsionsschwingungsmatrizen für prismatische Stäbe bzw. die ungekoppelten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrizen für konische Stäbe von Banerjee u.a. (1985) und Gupta (1985, 1986) vereinfacht werden, so kann der erhebliche analytische und numerische Aufwand zur Eigenwertbestimmung in Grenzen gehalten werden.

1.3 Lösungswege bei Eigenwertproblemen (EWP)

Das Ziel fast aller aufgeführten Näherungsmethoden ist also die Ermittlung von Matrizen, in denen die Eigenwerte nicht mehr implizit enthalten sind. Dieses allgemeine EWP kann dann im Rechner mit gängigen Verfahren, z.B. dem Jacobi-Verfahren, sofern alle Eigenwerte gewünscht sind, oder der simultanen Vektoriteration, sofern nur einige Eigenwerte am oberen oder unteren Rand des Spektrums interessieren, ermittelt werden (siehe Schwarz (1980)). Bei sehr großen Systemen haben sich vor allem die Subspace-Iteration von Bathe u.a. (1976) mit konvergenzbeschleunigenden Maßnahmen von Bathe u.a. (1980) und Stein u.a. (1982) sowie der Lanczos-Algorithmus (siehe Nour-Omid u.a. (1983)) bewährt. Werden lediglich wenige Eigenwerte aus dem Lösungsspektrum gesucht, eignen sich besonders Intervallhalbierungsmethoden auf der Basis Sturmscher Ketten mit nachfolgender Nullstellensuche (Peters und Wilkinson (1969)) oder inverser Vektoriteration (Gupta (1973)). Eine Erweiterung dieser Verfahren auf komplexe Matrizenpaare und EWP höherer Ordnung erfolgte u.a. von Gupta (1981) und Williams (1986a, b).

Beim impliziten EWP muß zur Ermittlung der Eigenfrequenzen die Systemmatrix im Rechner jeweils neu aufgestellt und der Wert der Determinante gebildet werden. Wechselt das Vorzeichen der Determinante zwischen zwei Frequenzen ω_I und ω_{II} , so ist im Bereich $\Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I$ mindestens eine Eigenfrequenz zu vermuten, die über einen Nullstellensuchalgorithmus weiter eingeschränkt werden kann (Wang (1973)), oder eine Polstelle der Determinante. Um sicher zu gehen, keine Eigenfrequenzen zu übersehen, mußte früher ein relativ dichtes Raster über den interessierenden Frequenzbereich gelegt werden. Ob eine gefundene Nullstelle zu einem einfachen oder dreifachen Eigenwert gehört, war jedoch aus dem Determinantenverlauf schlecht zu ersehen. Eine gezielte Suche nach Eigenwerten gelang Wittrick und Williams (1971), die erstmals die Eigenschaften Sturmscher Ketten bei der Lösung des impliziten EWP verwendeten.

Entsprechend den Verfahrensoptimierungen beim allgemeinen EWP wird in der vorliegenden Arbeit zu einigen rechentechnischen Problemen Stellung genommen. Im einzelnen bietet der in Abschnitt 4 diskutierte Algorithmus folgende Vorteile:

- Auf die Berechnung der Determinante entlang eines dichten Rasters mit der Schrittweite $\Delta\omega$ kann verzichtet werden.

Es werden die Eigenwerte gezielt eingeschränkt.

- Die Unterscheidung zwischen einfachen und mehrfachen Eigenwerten ist möglich.
- Die Berechnung der Eigenformen bereitet auch bei mehrfachen Eigenwerten keine Probleme.
- Sofern die Polstellen der Determinante nicht vorab bekannt sind, werden sie innerhalb des Algorithmus ermittelt. Mögliche Vorzeichenwechsel der Determinante bei Polstellen werden nicht mit denen bei Nullstellen verwechselt.
- Die Symmetrie der Systemmatrix bleibt erhalten und das Matrizenprofil ändert sich nur unwesentlich.

Die Eigenwerte können so auf wirtschaftliche Weise auch aus der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix berechnet werden.

1.4 Neue Ansatzfunktionen zur näherungsweise Berechnung der höheren Eigenwerte

Mit statischen Ansatzfunktionen (z.B. Hermite-Polynome) können nur die unteren Eigenwerte aus dem allgemeinen EWP als brauchbar angesehen werden. Schwingungsformen, die zu höheren Eigenwerten gehören, können durch die unflexiblen Ansätze nicht mehr genau genug approximiert werden. Werden jedoch frequenzabhängige Ansatzfunktionen verwendet, die aus der Lösung der ungekoppelten Biege- bzw. Torsionsschwingung gewonnen werden, so können auch höhere Eigenfrequenzen ermittelt werden ohne feinere Elementierung des Systems. Für ungekoppelte bzw. schwachgekoppelte Schwingungen lassen sich damit Eigenwerte, die über der Matrizenordnung liegen, näherungsweise ermitteln.

Bei der Verwendung frequenzabhängiger Ansatzfunktionen bieten sich zwei Vorgehensweisen an:

- Die Ansatzfunktionen werden mit einem "festgehaltenem" Frequenzparameter zum Aufbau eines allgemeinen EWP verwendet. Die Matrizen enthalten also die Eigenwerte nicht implizit und können mit bekannten Lösungsalgorithmen ermittelt werden. Jedoch sind die daraus berechneten Eigenwerte nur in einem gewissen Bereich in der Nähe des Frequenzparameters brauchbar.
- Probleme, bei denen die Ermittlung der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix zu aufwendig oder gar nicht möglich ist, können durch frequenzabhängige Näherungsansätze besser approximiert werden als durch statische. Werden die Matrizen für jede Frequenz neu aufgebaut, kann wiederum von einem impliziten EWP gesprochen werden.

2 Matrizenkatalog

Zunächst werden einige ungekoppelte exakte Steifigkeitsmatrizen angegeben. Die exakten Biege-Torsionssteifigkeitsmatrizen bei gekoppelten Schwingungen von Friberg (1983, 1985) können nicht explizit dargestellt werden, da sie nur mit einem erheblichen numerischen Aufwand berechenbar sind. Deshalb werden im weiteren, ausgehend von den gekoppelten Energien, mit frequenzabhängigen- bzw. Polynom-Ansatzfunktionen Elementmatrizen angegeben, die auf Näherungsmethoden basieren. Sämtliche Matrizingenerierungen können hierbei ohne numerische Integrationen bzw. Matrizeninversionen geschlossen durchgeführt werden.

2.1 Exakte Elementmatrizen

Die exakte frequenzabhängige Elementsteifigkeitsmatrix der ungekoppelten Wölbkrafttorsion ist in der folgenden Form bisher wohl noch nicht angegeben worden. An der Herleitung dieser Matrix aus der Differentialgleichung wird ein Weg zu ihrer direkten Ermittlung aufgezeigt, der als Nebenprodukt die Konstruktionsvorschrift für frequenzabhängige Ansatzfunktionen liefert. Ein anderer Weg zur Berechnung exakter Matrizen geht über die Übertragungsmatrix, siehe z.B. Waller und Krings (1975). Durch den ähnlichen Aufbau der Differentialgleichungen und der Randbedingungen lassen sich aus der Torsionsschwingungsmatrix auch leicht die Biegeschwingungsmatrizen mit Normalkrafteinfluß herleiten. Die Matrix der Torsionsschwingung ohne Verwölbung sowie die der Längs- und Seilschwingung sind im Anhang A.1 bis A.3 zu finden.

2.1.1 Torsionsschwingung mit Verwölbung

Sofern die Steifigkeits- und Massenverteilung des Querschnittes doppelt symmetrisch sind und als Systemachse die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Symmetrieachsen gewählt wird, ist bei geraden Balken die Torsions- und Biegeschwingung entkoppelt. Sie bleiben auch bei Berücksichtigung einer zentrischen Normalkraft ungekoppelt. In Abschnitt 2.2 wird auf die Entkoppelungsbedingungen näher eingegangen.

Im weiteren wird die Differentialgleichung eines Elementes mit konstanter Steifigkeit und Massenbelegung sowie konstanter Normalkraft längs der Koordinatenachse x_1 betrachtet. Mit den

bekanntem Vernachlässigungen der Wölbkrafttortionstheorie für dünnwandige offene Querschnitte ergibt sich nach Wlassow (1965) in Anlehnung an die Schreibweise von Bornscheuer (1952)

$$(GJ_T + i_p^2 P) \vartheta_{1,11} - EF_{\varphi\varphi} \vartheta_{1,1111} - \varrho I_p \ddot{\vartheta}_1 = 0, \quad (2.1)$$

wobei $\vartheta_1 = \vartheta_1(x_1, t)$ die Drehung und ϱI_p die rotatorische Trägheit um die x_1 -Achse (Systemachse), $EF_{\varphi\varphi}$ die Wölbsteifigkeit, GJ_T die St. Venantsche Torsionssteifigkeit, i_p der polare Trägheitsradius und P die Normalkraft (bei Zug positiv) im Balken ist. Bei inhomogenen Querschnitten möge z.B. ϱI_p als Abkürzung des Integrals $\int_F \varrho (x_2^2 + x_3^2) dF$ verstanden werden, wobei $\varrho = \varrho(x_2, x_3)$ ist.

Um die Schreibweise zu entlasten, wird häufig die Abhängigkeit der Variablen nicht angegeben. Weiterhin wird, sofern eine Verwechslung ausgeschlossen ist, statt x_1 nur x geschrieben, z.B. $\vartheta_1(x, t) = \vartheta_1(x_1, t)$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.1) kann über einen Produktansatz nach Bernoulli leicht gefunden werden:

$$\vartheta_1(x, t) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_1 x, & \cos \lambda_1 x, & \sinh \lambda_2 x, & \cosh \lambda_2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \\ A_4(t) \end{bmatrix}$$

oder kürzer

$$\vartheta_1 = \begin{bmatrix} s_1(x), & c_1(x), & s_2(x), & c_2(x) \end{bmatrix} \underline{a}_1(t)$$

$$\vartheta_1 = \underline{n}_1^T(x) \underline{a}_1(t) \quad (2.2)$$

mit

$$\lambda_{1/2} = \sqrt{\mp \frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \beta_1}} \quad (2.3)$$

$$\alpha_1 = \frac{GJ_T + i_p^2 P}{EF_{\varphi\varphi}}, \quad \beta_1 = \frac{\varrho I_p}{EF_{\varphi\varphi}} \omega^2. \quad (2.4)$$

Zwischen (2.3) und (2.4) besteht noch der Zusammenhang

$$\alpha_1 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2, \quad \beta_1 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2. \quad (2.5)$$

Aus rechentechnischen Gründen wird das lokale Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 in die Mitte des Elementes der Länge $L = 2 \ell$ gelegt (Bild 2.1).

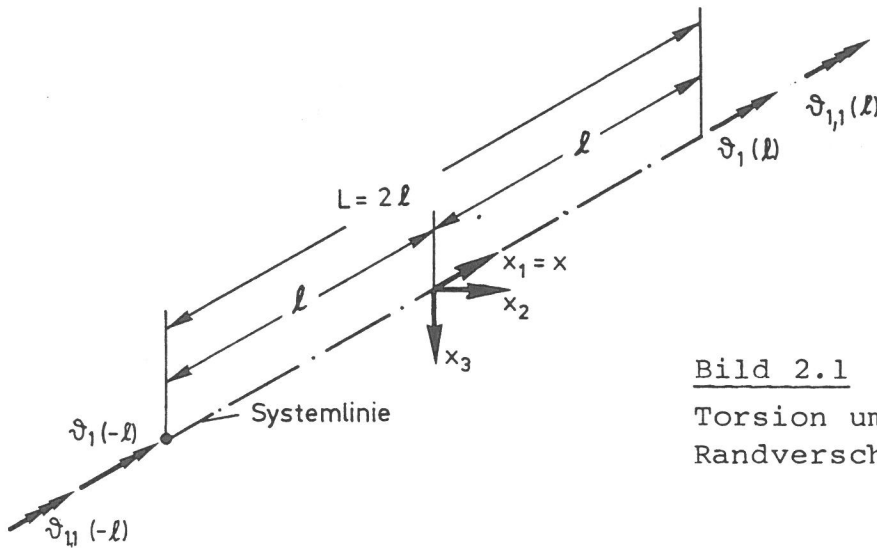


Bild 2.1
Torsion um x -Achse,
Randverschiebungsgrößen

Um die Kompatibilität zu den Nachbarelementen zu ermöglichen, wird die allgemeine Lösung (2.2) und deren partielle Ableitung nach x an den Elementrändern $x = \ell$ und $x = -\ell$ als Randverschiebungsvektor \underline{d}_1 zusammengestellt:

$$\begin{bmatrix} v_1(-\ell) \\ v_{1,1}(-\ell) \\ v_1(\ell) \\ v_{1,1}(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & -s_2 & c_2 \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_1 s_1 & \lambda_2 c_2 & -\lambda_2 s_2 \\ s_1 & c_1 & s_2 & c_2 \\ \lambda_1 c_1 & -\lambda_1 s_1 & \lambda_2 c_2 & \lambda_2 s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_1(t) = \underline{A}_1 \underline{a}_1(t) \quad (2.6)$$

mit den Abkürzungen

$$s_1 = \sin \lambda_1 \ell, \quad c_1 = \cos \lambda_1 \ell, \quad s_2 = \sinh \lambda_2 \ell, \quad c_2 = \cosh \lambda_2 \ell. \quad (2.7)$$

Der Vektor \underline{a}_1 kann nun durch \underline{d}_1 ausgedrückt werden

$$\underline{a}_1 = \underline{A}_1^{-1} \underline{d}_1, \quad (2.8)$$

wobei die Inverse der Matrix \underline{A}_1 noch geschlossen darstellbar ist

$$\underline{\underline{A_1}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} = -\bar{a}_{11} & \bar{a}_{14} = \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} = \bar{a}_{21} & \bar{a}_{24} = -\bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} = -\bar{a}_{31} & \bar{a}_{34} = \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{41} & \bar{a}_{42} & \bar{a}_{43} = \bar{a}_{41} & \bar{a}_{44} = -\bar{a}_{42} \end{bmatrix}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \frac{1}{N_1} (-\lambda_1 \lambda_2 s_1 c_2^2 - \lambda_2^2 c_1 c_2 s_2) \\ \bar{a}_{21} &= \frac{1}{N_1} (-\lambda_1 \lambda_2 c_1 s_2^2 + \lambda_2^2 s_1 c_2 s_2) \\ \bar{a}_{31} &= \frac{1}{N_1} (\lambda_1 \lambda_2 c_1^2 s_2 + \lambda_1^2 c_1 s_1 c_2) \\ \bar{a}_{41} &= \frac{1}{N_1} (\lambda_1 \lambda_2 s_1^2 c_2 - \lambda_1^2 c_1 s_1 s_2) \\ \bar{a}_{12} &= \frac{1}{N_1} (-\lambda_1 s_1 c_2 s_2 - \lambda_2 c_1 s_2^2) \\ \bar{a}_{22} &= \frac{1}{N_1} (-\lambda_1 c_1 c_2 s_2 + \lambda_2 s_1 c_2^2) \\ \bar{a}_{32} &= \frac{1}{N_1} (\lambda_1 s_1^2 c_2 + \lambda_2 c_1 s_1 s_2) \\ \bar{a}_{42} &= \frac{1}{N_1} (\lambda_1 c_1^2 s_2 - \lambda_2 c_1 s_1 c_2) \end{aligned} \right\} (2.9)$$

und

$$N_1 = 2 (\lambda_1 s_1 c_2 + \lambda_2 c_1 s_2) (\lambda_2 s_1 c_2 - \lambda_1 c_1 s_2).$$

Die Matrix $\underline{\underline{A_1}}^{-1}$ existiert, wenn $N_1 \neq 0$ ist. Physikalisch interpretiert markieren die Stellen $N_1 = 0$ die Eigenfrequenzen des beidseitig eingespannten Elementes, d.h. hierfür gilt $\underline{d}_1 = 0$. Diese Elementfrequenzen verursachen die Polstellen in der Systemdeterminante. Bis auf diese singulären Stellen läßt sich der Verschiebungsverlauf in einem Element als Funktion der Rand-

verschiebungen darstellen. Wird (2.9) in (2.2) eingesetzt, folgt

$$\mathcal{V}_1(x, t) = \underline{h}_1^T(x) \underline{d}_1(t) \quad (2.10)$$

mit

$$\underline{h}_1^T(x) = \underline{n}_1^T(x) \underline{A}_1^{-1} \quad (2.11)$$

Gleichung (2.11) wird in Abschnitt 2.2.1 als frequenzabhängige Ansatzfunktionen verwendet. Sowohl in \underline{n}_1 als auch in \underline{A}_1^{-1} ist implizit die Frequenz ω enthalten, die die Schwingungsform längs x mitbeeinflusst.

Um den Zusammenhang zwischen Randverschiebungsgrößen und Randschnittlasten angeben zu können, werden noch die bekannten Schnittlastdifferentialgleichungen für das Torsionsmoment

$$M_1 = (GJ_T + i_p^2 P) \mathcal{V}_{1,1} - EF_{\varphi\varphi} \mathcal{V}_{1,111} \quad (2.12)$$

bzw. mit der ersten Gleichung (2.4)

$$M_1(x, t) = EF_{\varphi\varphi} (\alpha_1 \mathcal{V}_{1,1}(x, t) - \mathcal{V}_{1,111}(x, t)) \quad (2.13)$$

und die Beziehung für das Bimoment

$$M_\varphi(x, t) = EF_{\varphi\varphi} \mathcal{V}_{1,11}(x, t) \quad (2.14)$$

benötigt, wobei hier der Vorzeichenregelung von Schade (1969) gefolgt wird.

Entsprechend der Verschiebungsgrößenkonvention sind die Randschnittlasten am negativen Schnittufer bei $x = -l$ entgegengesetzt der positiven Schnittlastendefinition (Bild 2.2).

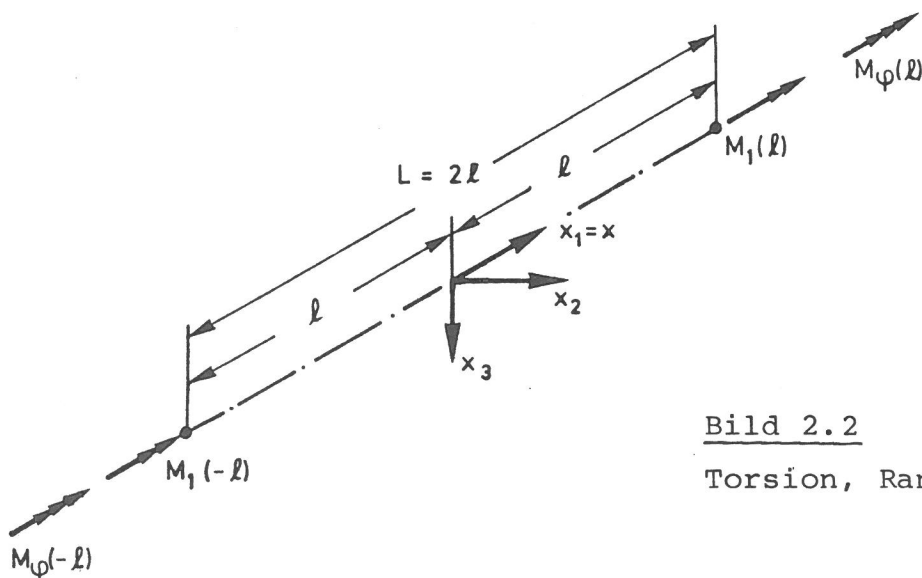


Bild 2.2

Torsion, Randschnittlasten

Somit ergeben sich an den Elementrändern aus (2.13) und (2.14)

$$\begin{aligned}
 M_1(-l) &= -EF_{\varphi\varphi} (\alpha_1 \vartheta_{1,1}(-l) - \vartheta_{1,111}(-l)) \\
 M_\varphi(-l) &= -EF_{\varphi\varphi} \vartheta_{1,11}(-l) \\
 M_1(l) &= EF_{\varphi\varphi} (\alpha_1 \vartheta_{1,1}(l) - \vartheta_{1,111}(l)) \\
 M_\varphi(l) &= EF_{\varphi\varphi} \vartheta_{1,11}(l)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Die Ortsableitungen von Gleichung (2.10) mit (2.11)

$$\begin{aligned}
 \vartheta^{(x)}_{1,1} &= \underline{n}^T(x)_{1,1} \underline{A}_1^{-1} \underline{d}_1 \\
 \vartheta^{(x)}_{1,11} &= \underline{n}^T(x)_{1,11} \underline{A}_1^{-1} \underline{d}_1 \\
 \vartheta^{(x)}_{1,111} &= \underline{n}^T(x)_{1,111} \underline{A}_1^{-1} \underline{d}_1
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \underline{n}^T(x)_{1,1} &= \left[\lambda_1 c_1(x), -\lambda_1 s_1(x), \lambda_2 c_2(x), \lambda_2 s_2(x) \right] \\
 \underline{n}^T(x)_{1,11} &= \left[-\lambda_1^2 s_1(x), -\lambda_1^2 c_1(x), \lambda_2^2 s_2(x), \lambda_2^2 c_2(x) \right] \\
 \underline{n}^T(x)_{1,111} &= \left[-\lambda_1^3 c_1(x), \lambda_1^3 s_1(x), \lambda_2^3 c_2(x), \lambda_2^3 s_2(x) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

eingesetzt in (2.15) ergeben die Verschiebungs-Schnittlastrelation der Randgrößen

$$\underline{f}_1 = \underline{S}_1 \underline{A}_1^{-1} \underline{d}_1, \tag{2.18}$$

wobei

$$\underline{f}_1^T = \left[M_1(-l), M_\varphi(-l), M_1(l), M_\varphi(l) \right]$$

$$\underline{\underline{S}}_1 = EF_{\varphi\varphi} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_1^3 c_1 & -\alpha_1 \lambda_1 s_1 - \lambda_1^3 s_1 & -\alpha_1 \lambda_2 c_2 + \lambda_2^3 c_2 & \alpha_1 \lambda_2 s_2 - \lambda_2^3 s_2 \\ -\lambda_1^2 s_1 & \lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 s_2 & -\lambda_2^2 c_2 \\ \alpha_1 \lambda_1 c_1 + \lambda_1^3 c_1 & -\alpha_1 \lambda_1 s_1 - \lambda_1^3 s_1 & \alpha_1 \lambda_2 c_2 - \lambda_2^3 c_2 & \alpha_1 \lambda_2 s_2 - \lambda_2^3 s_2 \\ -\lambda_1^2 s_1 & -\lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 s_2 & \lambda_2^2 c_2 \end{bmatrix}$$

gilt.

Mit der ersten Gleichung von (2.5) läßt sich die Matrix $\underline{\underline{S}}_1$ zusammenfassen zu

$$\underline{\underline{S}}_1 = EF_{\varphi\varphi} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_2^2 c_1 & -\lambda_1 \lambda_2^2 s_1 & \lambda_1^2 \lambda_2 c_2 & -\lambda_1^2 \lambda_2 s_2 \\ -\lambda_1^2 s_1 & \lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 s_2 & -\lambda_2^2 c_2 \\ \lambda_1 \lambda_2^2 c_1 & -\lambda_1 \lambda_2^2 s_1 & -\lambda_1^2 \lambda_2 c_2 & -\lambda_1^2 \lambda_2 s_2 \\ -\lambda_1^2 s_1 & -\lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 s_2 & \lambda_2^2 c_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Die exakte frequenzabhängige Steifigkeitsmatrix der ungekoppelten Wölbkrafttorsionsschwingung errechnet sich letztlich aus

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{11} = \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{A}}_1^{-1}, \quad (2.20)$$

so daß die gesuchte Matrizenbeziehung angegeben werden kann zu

$$\begin{bmatrix} M_1(-l) \\ M_\varphi(-l) \\ M_1(l) \\ M_\varphi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{11} = F_1^{11} & k_{12}^{11} = F_2^{11} & k_{13}^{11} = F_3^{11} & k_{14}^{11} = F_4^{11} \\ & k_{22}^{11} = F_5^{11} & k_{23}^{11} = -F_4^{11} & k_{24}^{11} = F_6^{11} \\ & & k_{33}^{11} = F_1^{11} & k_{34}^{11} = -F_2^{11} \\ \text{sym} & & & k_{44}^{11} = F_5^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1(-l) \\ \mathcal{V}_{1,1}(-l) \\ \mathcal{V}_1(l) \\ \mathcal{V}_{1,1}(l) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{f}}_1(t) = \underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{11}(\omega) \underline{\underline{d}}_1(t), \quad (2.21)$$

wobei von den 16 Matrizelementen nur 6 Funktionen betragsmäßig verschieden sind: Es ist

$$\begin{aligned}
 F_1^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[(\lambda_1^3 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2^4) (c_1^2 - s_1^2) c_2 s_2 \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda_1^4 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_2^3) c_1 s_1 (c_2^2 + s_2^2) \right] \\
 F_2^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[(\lambda_1^3 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^3) (s_1^2 c_2^2 - c_1^2 s_2^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 c_1 s_1 c_2 s_2 \right] \\
 F_3^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[- (\lambda_1^4 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_2^3) c_1 s_1 - (\lambda_1^3 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2^4) c_2 s_2 \right] \\
 F_4^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[(\lambda_1^3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^3) (c_2^2 - c_1^2) \right] \\
 F_5^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[- (\lambda_1^3 + \lambda_1 \lambda_2^2) (c_1^2 - s_1^2) c_2 s_2 \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2^3) c_1 s_1 (c_2^2 + s_2^2) \right] \\
 F_6^{11} &= \frac{EF_{\varphi\varphi}}{N_1} \left[- (\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2^3) c_1 s_1 + (\lambda_1^3 + \lambda_1 \lambda_2^2) c_2 s_2 \right] \\
 N_1 &= 2 (\lambda_1 s_1 c_2 + \lambda_2 c_1 s_2) (\lambda_2 s_1 c_2 - \lambda_1 c_1 s_2)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit den Abkürzungen der Gleichungen (2.3), (2.4) und (2.7).

Die Symmetrie der Matrix (2.20) entspricht dem Satz von Betti-Maxwell.

Für den Spezialfall $\alpha_1 = 0$, d.h. $GJ_T + i_P^2 P = 0$, wird $\lambda_1 = \lambda_2$. Die Funktionen F_1^{11} bis F_6^{11} lassen sich entsprechend vereinfachen.

Der Spezialfall $\beta_1 = 0$, d.h. $\varrho I_p \omega^2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$ (statische Wölbkrafttorsion) ist etwas problematischer, da sich in den F-Funktionen unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ einstellen. Der Grund hierfür ist in der nicht mehr zutreffenden allgemeinen Lösung (2.2) zu suchen. Die Lösungsfunktionen lauten nun

$$\underline{n}_1^T(x) = \left[x, 1, \sinh \lambda_2 x, \cosh \lambda_2 x \right].$$

Die statische Matrix läßt sich dann entsprechend dem obigen Weg berechnen (siehe Chen und Atsuta (1977)). Natürlich läßt sich die Matrix (2.20) auch entsprechend Paz und Dung (1975) nach Potenzen von ω^2 entwickeln, wobei das erste Reihenglied die statische Wölbkrafttorsionsmatrix ergibt; jedoch ist dieser Weg sehr mühsam. Da für kleine Argumente ($\lambda_1 x \ll 1$) $\sin \lambda_1 x \approx \lambda_1 x$ und $\cos \lambda_1 x \approx 1$ wird, läßt sich (2.20) mit guter Näherung auch für statische Probleme verwenden, wenn statt $\beta_1 = 0$ z.B. $\beta_1 \approx \left(\frac{1}{100} \alpha_1\right)^2$ gesetzt wird. Dies entspricht einer sehr niederfrequenten, quasistatischen Bewegung.

Ein weiterer Spezialfall $\alpha_1 \rightarrow \infty$ und $\beta_1 \rightarrow \infty$ bei $EF_{\varphi\varphi} \rightarrow 0$ wird sinnvoller mit der Torsionsmatrix ohne Verwölbung (s. Anhang A.1) berechnet, da sich für $EF_{\varphi\varphi} = 0$ die Ordnung der Differentialgleichung und damit auch die Ordnung der Elementmatrix vermindert.

2.1.2 Biegeschwingung mit Normalkrafteinfluß

Bei der Behandlung der Biegeschwingungen mit zentrischer Normalkraft aus statischer Vorlast ergeben sich bei Einhaltung der sonstigen Entkoppelungsbedingungen (Abschnitt 2.2) Differentialgleichungen, die analog der Wölbkrafttorsion aufgebaut sind.

Trotzdem werden diese Gleichungen angegeben, da später darauf zurückgegriffen wird. Bei Vernachlässigung des Schubeinflusses und der rotatorischen Trägheit ergeben sich die bekannten Gleichungen der Balkenbiegung nach der Theorie II. Ordnung

$$P w_{2,11} - EF_{22} w_{2,1111} - \varrho^F \ddot{w}_2 = 0 \quad (2.23)$$

$$P w_{3,11} - EF_{33} w_{3,1111} - \varrho^F \ddot{w}_3 = 0, \quad (2.24)$$

wobei $w_2(x_1, t)$, $w_3(x_1, t)$ die Verschiebungen der Systemachse, ϱ^F die Massenbelegung (beim inhomogenen Querschnitt $\varrho^F = \int_F (x_2, x_3) dF$), EF_{22} , EF_{33} die Biegesteifigkeiten um die

x_3 - bzw. x_2 -Achse und P die bei Zug positive Normalkraft sind.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (2.23) und (2.24) lautet analog (2.2)

$$w_2(x, t) = \underline{n}_2^T(x) \underline{a}_2(t) \quad (2.25)$$

$$w_3(x, t) = \underline{n}_3^T(x) \underline{a}_3(t) \quad (2.26)$$

mit

$$\underline{a}_2^T(t) = [A_5(t), A_6(t), A_7(t), A_8(t)] \quad (2.27)$$

$$\underline{a}_3^T(t) = [A_9(t), A_{10}(t), A_{11}(t), A_{12}(t)] \quad (2.28)$$

$$\underline{n}_2^T(x) = [s_3(x), c_3(x), s_4(x), c_4(x)] \quad (2.29)$$

$$\underline{n}_3^T(x) = [s_5(x), c_5(x), s_6(x), c_6(x)] , \quad (2.30)$$

wobei z.B. $s_3(x) = \sin \lambda_3 x$ mit

$$\lambda_{3/4} = \sqrt{\mp \frac{\alpha_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \beta_2}} \quad (2.31)$$

$$\lambda_{5/6} = \sqrt{\mp \frac{\alpha_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2 + \beta_3}} \quad (2.32)$$

$$\alpha_2 = \frac{P}{EF_{22}} = \lambda_4^2 - \lambda_3^2, \quad \beta_2 = \frac{p^F}{EF_{22}} \omega^2 = \lambda_3^2 \cdot \lambda_4^2 \quad (2.33)$$

$$\alpha_3 = \frac{P}{EF_{33}} = \lambda_6^2 - \lambda_5^2, \quad \beta_3 = \frac{p^F}{EF_{33}} \omega^2 = \lambda_5^2 \cdot \lambda_6^2 \quad (2.34)$$

sind.

Mit den Vorzeichendefinitionen nach Bild 2.3 lassen sich entsprechend (2.6) die Randverschiebungen

$$\underline{d}_2(t) = \underline{A}_2 \underline{a}_2(t) \quad (2.35)$$

$$\underline{d}_3(t) = \underline{A}_3 \underline{a}_3(t) \quad (2.36)$$

angeben,

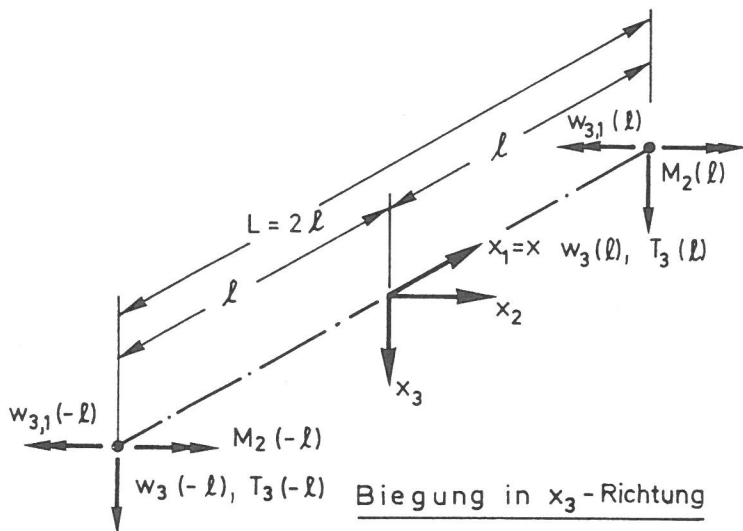
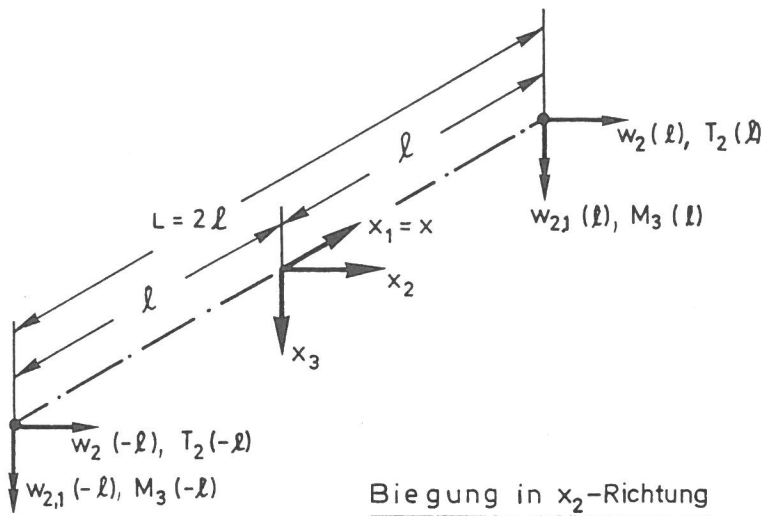


Bild 2.3

Vorzeichenregelung für die Biegung in x_2 - und x_3 -Richtung

wobei

$$\underline{d}_2^T = \left[w_2(-l), w_{2,1}(-l), w_2(l), w_{2,1}(l) \right] \quad (2.37)$$

$$\underline{d}_3^T = \left[w_3(-l), w_{3,1}(-l), w_3(l), w_{3,1}(l) \right] \quad (2.38)$$

sind.

Die Matrix \underline{A}_2 ergibt sich nach Indexänderung aus \underline{A}_1 , z.B. ist s_1 durch $s_3 = \sin \lambda_3 l$, C_2 durch $C_4 = \cosh \lambda_4 l$ usw. zu ersetzen. Analog wird die Matrix \underline{A}_3 ermittelt.

Mit den Gleichungen (2.35) und (2.36) lassen sich die allgemeinen Lösungen (2.25) und (2.26) entsprechend (2.10) formulieren

$$w_2(x, t) = \underline{h}_2^T(x) \underline{d}_2(t) \quad (2.39)$$

$$w_3(x, t) = \underline{h}_3^T(x) \underline{d}_3(t) \quad (2.40)$$

mit

$$\underline{h}_2^T(x) = \underline{n}_2^T(x) \underline{A}_2^{-1} \quad (2.41)$$

$$\underline{h}_3^T(x) = \underline{n}_3^T(x) \underline{A}_3^{-1} \quad (2.42)$$

Die Matrizen \underline{A}_2^{-1} und \underline{A}_3^{-1} lassen sich wieder nach Indexveränderung aus \underline{A}_1^{-1} (s. Gl. (2.9)) angeben.

Die Schnittlastdifferentialgleichungen werden, wie bei Theorie II. Ordnung üblich, bezüglich der Transversalkraft T (Schnittkraft parallel zum unausgelenkten lokalen Koordinatensystem) und des Momentes formuliert.

Für die Biegung in x_2 -Richtung ergeben sich auch hier der Wölbkrafttorsion (2.12) und (2.13) analoge Beziehungen

$$T_2 = EF_{22} \left(\frac{P}{EF_{22}} w_{2,1} - w_{2,111} \right) \quad (2.43)$$

$$M_3 = EF_{22} w_{2,11} \quad (2.44)$$

Um die Systematik nicht zu stören, wird bei der Biegung in x_3 -Richtung das Vorzeichen des Momentes M_2 vorerst auf der linken Seite belassen:

$$T_3 = EF_{33} \left(\frac{P}{EF_{33}} w_{3,1} - w_{3,111} \right) \quad (2.45)$$

$$-M_2 = EF_{33} w_{3,11} \quad (2.46)$$

Die Verschiebungs-Schnittlastrelation der Randgrößen (Bild 2.3) errechnet sich entsprechend (2.18) für die Biegung in x_2 -Richtung zu

$$\begin{bmatrix} T_2(-l) \\ M_3(-l) \\ T_2(l) \\ M_3(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{22} = F_1^{22} & | & k_{12}^{22} = F_2^{22} & | & k_{13}^{22} = F_3^{22} & | & k_{14}^{22} = F_4^{22} \\ \hline & & k_{22}^{22} = F_5^{22} & | & k_{23}^{22} = -F_4^{22} & | & k_{24}^{22} = F_6^{22} \\ \hline & & & & k_{33}^{22} = F_1^{22} & | & k_{34}^{22} = -F_2^{22} \\ \hline \text{sym.} & & & & & & k_{44}^{22} = F_5^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2(-l) \\ w_{2,1}(-l) \\ w_2(l) \\ w_{2,1}(l) \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}_2(t) = \underline{K}_{\text{dyn}}^{22}(\omega) \underline{d}_2(t) \quad (2.47)$$

und für die Biegung in x_3 -Richtung zu

$$\begin{bmatrix} T_3(-l) \\ -M_2(-l) \\ T_3(l) \\ -M_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{33} = F_1^{33} & k_{12}^{33} = F_2^{33} & k_{13}^{33} = F_3^{33} & k_{14}^{33} = F_4^{33} \\ \hline & k_{22}^{33} = F_5^{33} & k_{23}^{33} = -F_4^{33} & k_{24}^{33} = F_6^{33} \\ \hline & & k_{33}^{33} = F_1^{33} & k_{34}^{33} = -F_2^{33} \\ \hline \text{sym.} & & & k_{44}^{33} = F_5^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_3(-l) \\ w_{3,1}(-l) \\ w_3(l) \\ w_{3,1}(l) \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}_3(t) = \underline{K}_{\text{dyn}}^{33}(\omega) \underline{d}_3(t) \quad (2.48)$$

Die F-Funktionen ergeben sich nach Indexänderung aus (2.22), z.B.

$$F_1^{22} = \frac{EF_{22}}{N_2} \left[(\lambda_3^3 \lambda_4^2 + \lambda_3 \lambda_4^4) (c_3^2 - s_3^2) c_4 s_4 + (\lambda_3^4 \lambda_4 + \lambda_3^2 \lambda_4^3) c_3 s_3 (c_4^2 + s_4^2) \right]$$

mit

$$N_2 = 2(\lambda_3 s_3 c_4 + \lambda_4 c_3 s_4) (\lambda_4 s_3 c_4 - \lambda_3 c_3 s_4)$$

und den Abkürzungen der Gleichung (2.31) bis (2.34).

Für den Spezialfall $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, d.h. $P = 0$, folgt $\lambda_3 = \lambda_4$ und $\lambda_5 = \lambda_6$. Die F-Funktionen vereinfachen sich zu den von Koloušek (1953) angegebenen Beziehungen, wobei z.B. $\sin \lambda_3 l$ durch $\sin(\lambda_3 \frac{l}{2})$ zu ersetzen ist und einige trigonometrische Umformungen durchzuführen sind.

Der Spezialfall $\beta_2 = \beta_3 = 0$, d.h. $\varphi F \omega^2 = 0$ und $\lambda_3 = \lambda_5 = 0$, ergibt nach entsprechenden Grenzübergängen (siehe Ende des Abschnittes 2.1.1) die exakte statische Stabilitätsmatrix.

Ein weiterer Spezialfall $EF_{22} \rightarrow 0$, $EF_{33} \rightarrow 0$ bei vorhandener Normalkraft $P > 0$ entspricht der Seilschwingung. Die zugehörige Elementmatrix im globalen Koordinatensystem ist im Anhang A.3 zu finden.

2.2 Gekoppelte Energien der Biege-Torsionsschwingung

Für die weiteren Betrachtungen wird das Hamiltonsche Prinzip zugrundegelegt. Dieses lautet nach Szabó (1977) für konservative Systeme

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \text{stationär}, \quad (2.49)$$

wobei sich die Lagrangefunktion

$$L = E - U \quad (2.50)$$

aus der kinetischen Energie E und der potentiellen Energie U zusammensetzt. Die Stationaritätsforderung von Gleichung (2.49) ist äquivalent der Lösung der Eulerschen Gleichungen des Hamiltonschen Prinzips (Duschek (1960)), d.h., bei bekannter Lagrangefunktion ist hieraus das Differentialgleichungssystem leicht anzugeben (siehe Abschnitt 5.3). Wird die Lagrangefunktion diskretisiert, so werden die Eulerschen Gleichungen zu den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Für diesen Lösungsweg werden zunächst die Energien unseres Problems benötigt.

Die in Abschnitt 2.1 angegebenen ungekoppelten Lösungen sind Spezialfälle der räumlich gekoppelten Biege-Torsionsschwingung. Letztere treten immer dann auf, wenn der Schubmittelpunkt M nicht mit dem Massenmittelpunkt G des Querschnittes zusammenfällt, wenn also die sogenannte Massenkopplung vorliegt. Unabhängig davon kann jedoch auch die Berücksichtigung von statischen Vorlasten und die damit verbundene Verformung des ursprünglich geraden Balkens eine geometrische Kopplung bewirken.

Gekoppelte Energien bzw. Differentialgleichungen wurden für die Biege-Torsionsschwingung u.a. von Federhofer (1947), Chwalla (1950), Heilig (1951), Lembcke (1952), Speier (1960), Schrader (1962), Wlassow (1964, 1965), Linnert (1970a, b) und Schalk (1973) angegeben; auf den statischen Anteil beschränken sich die Arbeiten von Kappus (1937), Steinbach (1965), Reuschling (1969), Carl (1969), Wagenknecht (1974) und Nishino u.a. (1974). Hier wird auf eine erneute Herleitung der Energien verzichtet und nur auf die Voraussetzungen der unter aufgeführten Form eingegangen:

- 1) Es wird ein linear-elastisches und isotropes Materialverhalten angenommen (Hookesches Gesetz).

- 2) Der ursprünglich gerade Stab mit offenem Querschnitt nimmt unter konservativen statischen Vorlasten eine Gleichgewichtslage ein, um die der Stab schwingt.
- 3) Die statischen und dynamischen Verformungen des Stabes sind klein gegenüber den Abmessungen des Querschnittes.
- 4) Die Querschnittsform bleibt bei der Verformung des Stabes erhalten.
- 5) Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnittes gilt weiterhin für reine Biegebeanspruchung.
- 6) Der Querschnitt des Stabes ist so dünnwandig, daß die Verwölbung infolge Torsion näherungsweise durch die Verwölbung der Profilmittellinie ersetzt werden kann.
- 7) Die Verformungen des Stabes infolge der Schubspannungen aus Querkräften und der sekundären Schubspannungen aus Wölbkraft-torsion werden vernachlässigt.
- 8) Eigenspannungen und Vorverformungen bleiben unberücksichtigt.
- 9) Die rotatorische Trägheit aus Biegung sowie die Wölbmassen-trägheit und die Kreiselwirkung werden vernachlässigt.

Für die Berechnung der Elementmatrizen wird weiter vorausgesetzt, daß die Steifigkeiten und Massenbelegungen längs x konstant sind. Weiterhin mögen die Biegemomente $M_2(x)$, $M_3(x)$ und das Bimoment $M_\varphi(x)$ aus statischen Vorlasten näherungsweise als linear veränderlich und die Normalkraft P sowie das Torsionsmoment M_1 als konstant über die Elementlänge angesehen werden. Bis auf den linearen M_φ -Verlauf sind diese Einschränkungen der Schnittlastverläufe bei Theorie I. Ordnung erfüllt, wenn an den Elementrändern nur Einzellasten und Einzelmomente (Knotenlasten) zugelassen sind. Bei Kenntnis der Randschnittlasten aus der Theorie II. Ordnung, die nach der Berechnung der statischen Ruhelage bekannt sind, ist die lineare Interpolation innerhalb des Elementes eine ausreichende Näherung für den Schnittlastverlauf.

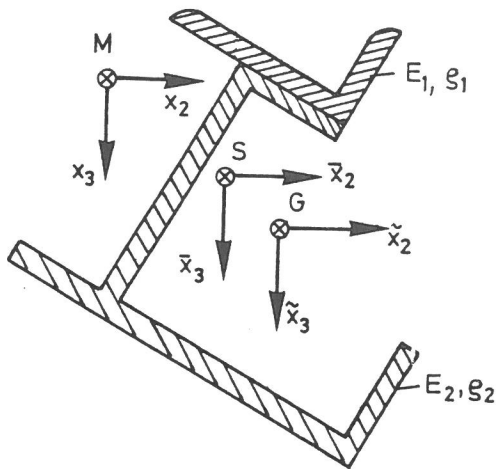


Bild 2.4
Zusammenwirkender,
inhomogener Querschnitt

Bild 2.4 zeigt einen Querschnitt, auf dem 3 Punkte definiert werden:

S: elastischer Mittelpunkt mit dem zugehörigen Hauptachsensystem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$

$$\int_F E \bar{x}_2 dF = \int_F E \bar{x}_3 dF = 0 \quad E = E(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = \text{E-Modul}$$

$$\int_F E \bar{x}_2 \bar{x}_3 dF = 0 \quad \text{Hauptachsenbedingung}$$

G: Massenmittelpunkt mit zugehörigem Koordinatensystem $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$

$$\int_F \varrho \tilde{x}_2 dF = \int_F \varrho \tilde{x}_3 dF = 0 \quad \varrho = \varrho(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \text{Dichte}$$

M: Schubmittelpunkt mit dem Koordinatensystem x_1, x_2, x_3

$$\int_F E \varphi dF = 0$$

$$\int_F E \varphi \bar{x}_2 dF = \int_F E \varphi \bar{x}_3 dF = 0$$

$\varphi = \text{Einheitsverwölbung}$
bezogen auf M .

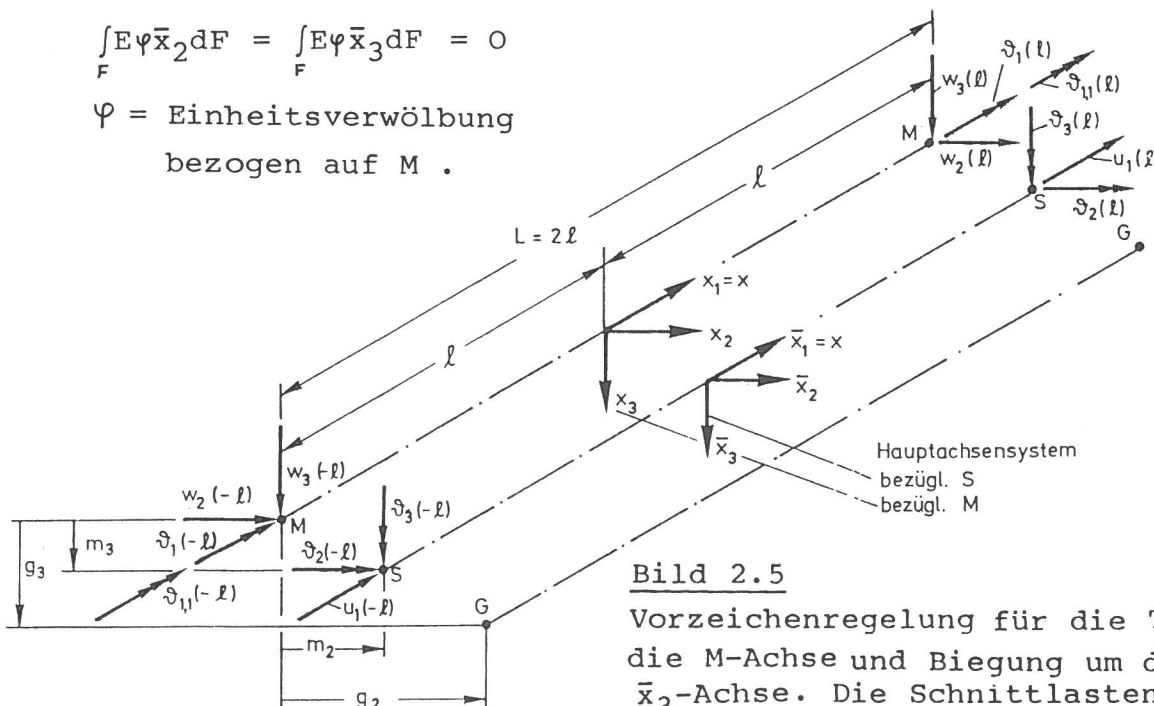


Bild 2.5
Vorzeichenregelung für die Torsion um die M-Achse und Biegung um die \bar{x}_2 - und \bar{x}_3 -Achse. Die Schnittlasten sind entsprechend den Verschiebungsgrößen orientiert.

Die einfachste Darstellung der Energien für ein Element der Länge $L = 2l$ (Bild 2.5) ergibt sich, wenn als Stabachse die Verbindungslinie der Schubmittelpunkte M angenommen wird, wobei $w_2(x_1, t)$ die Verschiebungsfunktionen in den Hauptachsenrichtungen und $\vartheta_1^{\prime}(x_1, t)$ die Drehung um diese Stabachse sind.

Wird die Längsschwingung $u_1(\bar{x}_1, t)$ in Richtung der Tangente an die Verbindungslinie der elastischen Mittelpunkte S als annähernd ungekoppelt aus den Energien herausgenommen, verbleibt für die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left\{ \underline{w}_{,1}^T \underline{P} \underline{w}_{,1} + \underline{w}_{,11}^T \underline{F} \underline{w}_{,11} + \underline{w}^T \underline{M} \underline{w} + \underline{w}^T \underline{M} \underline{w} \right\} dx_1 + \text{Rand-terme,} \quad (2.51)$$

wobei

$$\underline{w}_{,1}^T \underline{P} \underline{w}_{,1} = \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} & w_{2,1} & w_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GJ_T + R_T & -m_3 P & m_2 P \\ -m_3 P & P & \\ m_2 P & & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\underline{w}_{,11}^T \underline{F} \underline{w}_{,11} = \begin{bmatrix} \vartheta_{1,11} & w_{2,11} & w_{3,11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EF_{\varphi\varphi} & & \\ & EF_{22} & \\ & & EF_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{1,11} \\ w_{2,11} \\ w_{3,11} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\underline{w}^T \underline{M} \underline{w} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & w_{2,1} & w_{3,11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & M_3 \\ & & -\frac{1}{2}M_1 \\ M_3 & -\frac{1}{2}M_1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_{2,1} \\ w_{3,11} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\underline{w}^T \underline{M} \underline{w} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & w_{2,11} & w_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & M_2 & \\ M_2 & & \frac{1}{2}M_1 \\ & \frac{1}{2}M_1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_{2,11} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mit den Abkürzungen

$$R_T = i_M^2 P - r_{M2} M_3(x) + r_{M3} M_2(x) + r_{M\varphi} M_\varphi(x) \quad (2.56)$$

$$\left. \begin{aligned} i_M &= i_p^2 + m_2^2 + m_3^2 && \text{polarer Trägheitsradius bez. M} \\ i_p &= \sqrt{\frac{EF_{22} + EF_{33}}{EF}} && \text{polarer Trägheitsradius bez. S} \\ r_{M2} &= \frac{\int_F E \bar{x}_2 (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) dF}{EF_{22}} + 2m_2 \\ r_{M3} &= \frac{\int_F E \bar{x}_3 (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) dF}{EF_{33}} + 2m_3 \\ r_{M\varphi} &= \frac{\int_F E \varphi (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) dF}{EF_{\varphi\varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

sowie den Steifigkeiten

$$\left. \begin{aligned} EF_{\varphi\varphi} &= \int_F E \varphi \varphi dF && \text{bezogen auf M} \\ EF_{22} &= \int_F E \bar{x}_2 \bar{x}_2 dF && \text{bezogen auf S} \\ EF_{33} &= \int_F E \bar{x}_3 \bar{x}_3 dF && \text{bezogen auf S} \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

und der St. Venantschen Torsionssteifigkeit GJ_T sind. Die Abstände m_2 und m_3 von M nach S sind im Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 definiert. Die Normalkraft P (bei Zug positiv) greift in S an. Die Energieanteile mit dem konservativen (richtungstreuen) Torsionsmoment M_1 sind erstmals von Ziegler (1952) angegeben worden.

Mit den oben angeführten Vernachlässigungen verbleibt für die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \dot{\underline{w}}^T \underline{J} \dot{\underline{w}} dx_1, \quad (2.59)$$

wobei

$$\dot{\underline{w}}^T \underline{J} \dot{\underline{w}} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 & \dot{w}_2 & \dot{w}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta^I_M & -g_3 \vartheta^F & g_2 \vartheta^F \\ -g_3 \vartheta^F & \vartheta^F & \\ g_2 \vartheta^F & & \vartheta^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

und die Massenterme

$$\varrho I_M = \int_F \varrho (x_2^2 + x_3^2) dF \quad \text{Torsionsdrehmasse bez. M}$$

$$\varrho^F = \int_F \varrho dF$$

sind.

Die Abstände g_2 und g_3 von M nach G sind wiederum im Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 definiert.

Da es sich hier entsprechend den Voraussetzungen um ein konservatives Problem handelt, sind alle Energieanteile aus quadratischen Formen zusammensetzbar. Die Außendiagonalelemente in den Matrizen \underline{P} , $\underline{\check{M}}$, $\underline{\check{M}}$ und \underline{J} bewirken die Kopplung zwischen Biegung und Torsion. Die Entkoppelungsbedingungen sind nun leicht zu erkennen. Für $g_2 = g_3 = 0$ entfällt in Gleichung (2.60) die Massenkopplung.

Wird zusätzlich die Wirkung statischer Vorlasten vernachlässigt (Theorie I. Ordnung), entfallen die Anteile (2.54) und (2.55), und es verbleibt in der Matrix \underline{P} nur $\underline{GJ_T}$.

Ein weiterer Sonderfall, der zu einer entkoppelten potentiellen Energie führt, kann erst nach einigen Umformungen erkannt werden. Wird die Wirkung von M_1 auf die Biegung vernachlässigt und werden konstante Momentenverläufe M_2 und M_3 vorausgesetzt, ergeben sich aus den verbleibenden Termen in Gleichung (2.54) und (2.55) durch partielle Integration folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} M_3 \int_{-l}^l w_{3,11} \vartheta_1 dx &= M_3 w_{3,1} \vartheta_1 \Big|_{-l}^l - M_3 \int_{-l}^l w_{3,1} \vartheta_{1,1} dx \\ M_2 \int_{-l}^l w_{2,11} \vartheta_1 dx &= M_2 w_{2,1} \vartheta_1 \Big|_{-l}^l - M_2 \int_{-l}^l w_{2,1} \vartheta_{1,1} dx \end{aligned} \right\} (2.61)$$

Die Integrale haben den gleichen Aufbau wie Gleichung (2.52) und können mit dieser zusammengefaßt werden zu

$$\underline{w}_{,1}^T \underline{P} \underline{w}_{,1} = \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} & w_{2,1} & w_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{GJ_T + R_T} & - (M_2 + m_3 P) & -M_3 + m_2 P \\ - (M_2 + m_3 P) & P & \\ -M_3 + m_2 P & & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Eine Entkoppelung tritt also auf, wenn

$$M_2 = -m_3 P \quad \text{und} \quad M_3 = m_2 P \quad (2.63)$$

ist, d.h. wenn die konstanten Momente M_2 und M_3 den Versetzungsmomenten entsprechen, die durch eine exzentrisch im Schubmittelpunkt M angreifende Normalkraft entstehen. Die Randterme von Gleichung (2.61) sind bei homogenen Randbedingungen Null bzw. heben sich bei Knotenpunkten mit mehreren anschließenden Elementen gegenseitig heraus.

Zur Diskretisierung der Lagrangefunktion eines Elementes werden ungekoppelte Verschiebungsansätze verwendet, d.h., es werden für die Drehung ϑ_1 und die Verschiebungen w_2 und w_3 getrennte Ortsfunktionen mit ihren zugehörigen zeitabhängigen Parametern (Elementrandverschiebungen) angesetzt:

$$\vartheta_1(x, t) = \underline{h}_1^T(x) \underline{d}_1(t)$$

$$w_2(x, t) = \underline{h}_2^T(x) \underline{d}_2(t)$$

$$w_3(x, t) = \underline{h}_3^T(x) \underline{d}_3(t) .$$

Dabei ist z.B.

$$\underline{d}_1^T(t) = \left[\vartheta_1(-\ell), \vartheta_{1,1}(-\ell), \vartheta_1(\ell), \vartheta_{1,1}(\ell) \right] .$$

Diese Ansätze sind entsprechend den Gleichungen (2.10), (2.39) und (2.40) aufgebaut, jedoch wird vorerst über die Form der Ortsfunktionen nur insoweit verfügt, daß für die Ränder $x = -\ell$ und $x = \ell$

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}^T(-\ell) &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{h}_{,1}^T(-\ell) &= \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{h}^T(\ell) &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{h}_{,1}^T(\ell) &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (2.64)$$

gelten soll. Diese Bedingungen werden sowohl von den Hermite-Polynomen (siehe Abschnitt (2.2.2)) als auch von den frequenzabhängigen Ansatzfunktionen (Gleichung (2.11), (2.41) und (2.42)) erfüllt.

Die Vektoren $\dot{\underline{w}}$, $\underline{w}_{,1}$, $\underline{w}_{,11}$, $\check{\underline{w}}$ und $\check{\underline{w}}$ lassen sich nun leicht aus dem Verschiebungsfeld

$$\begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \\ \underline{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_1^T & & \\ & \underline{h}_2^T & \\ & & \underline{h}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}(x,t) = \underline{\underline{H}}^T(x) \underline{d}(t) \quad (2.65)$$

ableiten, z.B. gilt

$$\dot{\underline{w}} = \underline{\underline{H}}^T \dot{\underline{d}}$$

$$\underline{w}_{,1} = \underline{\underline{H}}_{,1}^T \underline{d}$$

$$\check{\underline{w}} = \check{\underline{\underline{H}}}^T \underline{d}$$

mit

$$\underline{\underline{H}}_{,1}^T = \begin{bmatrix} \underline{h}_{1,1}^T & & \\ & \underline{h}_{2,1}^T & \\ & & \underline{h}_{3,1}^T \end{bmatrix} \quad \check{\underline{\underline{H}}}^T = \begin{bmatrix} \underline{h}_1^T & & \\ & \underline{h}_{2,1}^T & \\ & & \underline{h}_{3,11}^T \end{bmatrix}$$

Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \underline{w}^T \underline{\underline{J}} \underline{w} \, dx - \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left\{ \underline{w}_{,1}^T \underline{\underline{P}} \underline{w}_{,1} + \underline{w}_{,11}^T \underline{\underline{F}} \underline{w}_{,11} + \check{\underline{w}}^T \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{w}} + \check{\underline{w}}^T \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{w}} \right\} dx$$

lautet in diskretisierter Form

$$L = \frac{1}{2} \underline{d}^T \int_{-l}^l \underline{\underline{H}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{H}}^T \, dx \underline{d} - \frac{1}{2} \underline{d}^T \int_{-l}^l \left\{ \underline{\underline{H}}_{,1} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{H}}_{,1}^T + \underline{\underline{H}}_{,11} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{H}}_{,11}^T + \check{\underline{\underline{H}}} \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{\underline{H}}}^T + \check{\underline{\underline{H}}} \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{\underline{H}}}^T \right\} dx \underline{d}, \quad (2.66)$$

wobei das erste Integral von (2.66) als Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$ und das zweite als Summe von Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ und geometrischer Matrix $\underline{\underline{G}}$ bezeichnet wird.

Als Lagrangesche Bewegungsgleichungen (Dankert (1977))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\underline{d}, \dot{\underline{d}})}{\partial \dot{\underline{d}}} \right) - \frac{\partial L(\underline{d}, \dot{\underline{d}})}{\partial \underline{d}} = \underline{0} \quad (2.67)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie der Matrizen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{d}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{d}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{d}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{d}} \right) = \underline{\underline{M}} \dot{\underline{d}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{d}} = \frac{\partial}{\partial \underline{d}} \left(-\frac{1}{2} \underline{d}^T [\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}}] \underline{d} \right) = -(\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}}) \underline{d}$$

die Beziehung

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{d}}(t) + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}}) \underline{d}(t) = \underline{0}, \quad (2.68)$$

die mit einem harmonischem Ansatz

$$\underline{d}(t) = \hat{\underline{d}} \sin \omega t$$

auf das allgemeine EWP

$$(\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \hat{\underline{d}} = \underline{0} \quad (2.69)$$

führt, wobei im weiteren $\hat{\underline{d}}$ zur Entlastung der Schreibweise entfällt.

Die 12 x 12 Massenmatrix eines Elementes lautet

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} &= \int_{-l}^l \underline{\underline{H}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{H}}^T dx \\ &= \int_{-l}^l \begin{bmatrix} \underline{h}_1 & | & | & | \\ \hline & \underline{h}_2 & | & | \\ \hline & & \underline{h}_3 & | \\ & & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^I \underline{I}_M & | & -g_3 \varrho^F & | & g_2 \varrho^F \\ \hline -g_3 \varrho^F & | & \varrho^F & | & \\ \hline g_2 \varrho^F & | & & | & \varrho^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{h}_1^T & | & | & | \\ \hline & \underline{h}_2^T & | & | \\ \hline & & \underline{h}_3^T & | \\ & & & | \end{bmatrix} dx \\ \underline{\underline{M}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^{11} & | & \underline{\underline{M}}^{12} & | & \underline{\underline{M}}^{13} \\ \hline \underline{\underline{M}}^{21} & | & \underline{\underline{M}}^{22} & | & \\ \hline \underline{\underline{M}}^{31} & | & & | & \underline{\underline{M}}^{33} \\ & & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

mit den Submatrizen der Ordnung 4 x 4

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{M}}^{11} &= \int_{-l}^l \varrho^I \underline{\underline{I}}_M \underline{\underline{h}}_1 \underline{\underline{h}}_1^T dx, \\
 \underline{\underline{M}}^{22} &= \int_{-l}^l \varrho^F \underline{\underline{h}}_2 \underline{\underline{h}}_2^T dx, & \underline{\underline{M}}^{33} &= \int_{-l}^l \varrho^F \underline{\underline{h}}_3 \underline{\underline{h}}_3^T dx, \\
 \underline{\underline{M}}^{12} &= \underline{\underline{M}}^{21^T} = \int_{-l}^l -g_3 \varrho^F \underline{\underline{h}}_1 \underline{\underline{h}}_2^T dx, \\
 \underline{\underline{M}}^{13} &= \underline{\underline{M}}^{31^T} = \int_{-l}^l g_2 \varrho^F \underline{\underline{h}}_1 \underline{\underline{h}}_3^T dx.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Die Summe aus Steifigkeitsmatrix und geometrischer Matrix lautet

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}} &= \int_{-l}^l \left\{ \underline{\underline{H}}_{,1} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{H}}_{,1}^T + \underline{\underline{H}}_{,11} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{H}}_{,11}^T + \check{\underline{\underline{H}}} \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{\underline{H}}}^T + \check{\underline{\underline{H}}} \check{\underline{\underline{M}}} \check{\underline{\underline{H}}}^T \right\} dx \\
 &= \int_{-l}^l \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_{1,1} & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,1} & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} GJ_T + R_T & -m_3 P & m_2 P \\ \hline -m_3 P & P & \\ \hline m_2 P & & P \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_{1,1}^T & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,1}^T & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,1}^T \end{array} \right] \\
 + \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_{1,11} & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,11} & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,11} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} EF_{\varphi\varphi} & & \\ \hline & EF_{22} & \\ \hline & & EF_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_{1,11}^T & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,11}^T & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,11}^T \end{array} \right] \\
 + \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_1 & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,1} & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,11} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} & & M_3 \\ \hline & & -\frac{1}{2} M_1 \\ \hline M_3 & -\frac{1}{2} M_1 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_1^T & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,1}^T & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,11}^T \end{array} \right] \\
 + \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_1 & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,11} & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} & & M_2 \\ \hline M_2 & & \frac{1}{2} M_1 \\ \hline & & \frac{1}{2} M_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{h}}_1^T & & \\ \hline & \underline{\underline{h}}_{2,11}^T & \\ \hline & & \underline{\underline{h}}_{3,1}^T \end{array} \right] \end{array} \right\} dx \\
 \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^{11} + \underline{\underline{G}}^{11} & \underline{\underline{G}}^{12} & \underline{\underline{G}}^{13} \\ \underline{\underline{G}}^{21} & \underline{\underline{K}}^{22} + \underline{\underline{G}}^{22} & \underline{\underline{G}}^{23} \\ \underline{\underline{G}}^{31} & \underline{\underline{G}}^{32} & \underline{\underline{K}}^{33} + \underline{\underline{G}}^{33} \end{bmatrix} \tag{2.72}
 \end{aligned}$$

mit den Submatrizen der Steifigkeitsmatrix

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{K}}^{11} &= \int_{-l}^l GJ_T \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx + \int_{-l}^l EF_{\varphi\varphi} \underline{h}_{1,11} \underline{h}_{1,11}^T dx, \\ \underline{\underline{K}}^{22} &= \int_{-l}^l EF_{22} \underline{h}_{2,11} \underline{h}_{2,11}^T dx, \quad \underline{\underline{K}}^{33} = \int_{-l}^l EF_{33} \underline{h}_{3,11} \underline{h}_{3,11}^T dx \end{aligned} \right\} (2.73)$$

und den geometrischen Submatrizen

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{G}}^{11} &= \int_{-l}^l R_T \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx, \\ \underline{\underline{G}}^{22} &= \int_{-l}^l P \underline{h}_{2,1} \underline{h}_{2,1}^T dx, \quad \underline{\underline{G}}^{33} = \int_{-l}^l P \underline{h}_{3,1} \underline{h}_{3,1}^T dx, \\ \underline{\underline{G}}^{12} &= \underline{\underline{G}}^{21T} = \int_{-l}^l -m_3 P \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{2,1}^T dx + \int_{-l}^l M_2 \underline{h}_1 \underline{h}_{2,11}^T dx, \\ \underline{\underline{G}}^{13} &= \underline{\underline{G}}^{31T} = \int_{-l}^l m_2 P \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{3,1}^T dx + \int_{-l}^l M_3 \underline{h}_1 \underline{h}_{3,11}^T dx, \\ \underline{\underline{G}}^{23} &= \underline{\underline{G}}^{32T} = \frac{1}{2} \int_{-l}^l -M_1 \underline{h}_{2,1} \underline{h}_{3,11}^T dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l M_1 \underline{h}_{2,11} \underline{h}_{3,1}^T dx. \end{aligned} \right\} (2.74)$$

Bei entkoppelter Bewegung verbleiben nur die Submatrizen auf den Diagonalen der Gleichungen (2.70) und (2.72).

Die Massenbelegungen in (2.71) und die Steifigkeitsverteilungen in (2.73) könnten hier auch in Längsrichtung veränderlich sein. Um den erforderlichen Integrationsaufwand in Grenzen zu halten, werden nur in den geometrischen Matrizen (2.74) linear veränderliche Koeffizienten M_2 , M_3 und M_φ zugelassen (siehe oben).

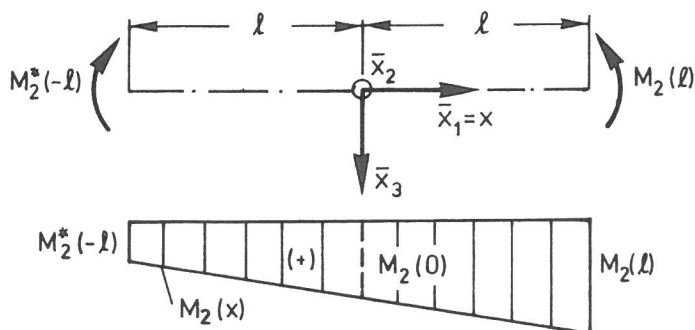


Bild 2.6
M₂-Verlauf

Bild 2.6 zeigt den Momentenverlauf

$$M_2(x) = \frac{M_2(l) + M_2^*(-l)}{2} + \frac{M_2(l) - M_2^*(-l)}{2l} x_1$$

$$M_2(x) = M_2(0) + Q_3 x_1 . \quad (2.75)$$

Bei Übergang von Schnittlast- auf Steifigkeitskonvention ($M_2^*(-l) = -M_2(-l)$) folgt

$$M_2(0) = \frac{M_2(l) - M_2(-l)}{2} , \quad Q_3 = \frac{M_2(l) + M_2(-l)}{2l} ,$$

wobei die Elementrandmomente nach Ermittlung der statischen Ruhelage bekannt sind.

Entsprechend folgt

$$M_3(x) = M_3(0) + Q_2 x_1 \quad (2.76)$$

mit

$$M_3(0) = \frac{M_3(l) - M_3(-l)}{2} , \quad Q_2 = \frac{M_3(l) + M_3(-l)}{2l} ,$$

wobei Q_2 das entgegengesetzte Vorzeichen der Querkraft nach der Schnittlastdefinition hat. Analog wird der Bimomentenverlauf aus statischen Vorlasten angenähert durch

$$M_\varphi(x) = M_\varphi(0) + Q_\varphi x_1 \quad (2.77)$$

mit

$$M_\varphi(0) = \frac{M_\varphi(l) - M_\varphi(-l)}{2} , \quad Q_\varphi = \frac{M_\varphi(l) + M_\varphi(-l)}{2l} .$$

Die geometrischen Submatrizen (2.74) lassen sich mit (2.75) bis (2.77) teilweise umformen und partiell integrieren entsprechend (2.61):

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{G}}^{11} &= R_T(0) \int_{-l}^l \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx + \bar{R}_T \int_{-l}^l x \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx \\ \underline{\underline{G}}^{22} &= P \int_{-l}^l \underline{h}_{2,1} \underline{h}_{2,1}^T dx & \underline{\underline{G}}^{33} &= P \int_{-l}^l \underline{h}_{3,1} \underline{h}_{3,1}^T dx \\ \underline{\underline{G}}^{12} = \underline{\underline{G}}^{21T} &= -(M_2(0) + m_3 P) \int_{-l}^l \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{2,1}^T dx + Q_3 \int_{-l}^l x \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{2,11}^T dx \\ \underline{\underline{G}}^{13} = \underline{\underline{G}}^{31T} &= (-M_3(0) + m_2 P) \int_{-l}^l \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{3,1}^T dx + Q_2 \int_{-l}^l x \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{3,11}^T dx \\ \underline{\underline{G}}^{23} = \underline{\underline{G}}^{32T} &= \frac{1}{2} M_1 \left\{ - \int_{-l}^l \underline{h}_{2,1} \underline{h}_{3,11}^T dx + \int_{-l}^l \underline{h}_{2,11} \underline{h}_{3,1}^T dx \right\} . \end{aligned} \right\} (2.78)$$

Die Abkürzungen bedeuten

$$\left. \begin{aligned} R_T(0) &= i_M^2 P - r_{M2} M_3(0) + r_{M3} M_2(0) + r_{M\varphi} M_\varphi(0) \\ \bar{R}_T &= -r_{M2} Q_2 + r_{M3} Q_3 + r_{M\varphi} Q_\varphi . \end{aligned} \right\} (2.79)$$

2.2.1 Frequenzabhängige Ansatzfunktionen

Es liegt nahe, für die Berechnung der Eigenfrequenzen oder bei harmonischer bzw. schmalbandiger Erregung Ansatzfunktionen zu wählen, die die exakte Lösung gut approximieren. Als Ansatzfunktionen werden die Lösungen der ungekoppelten Stabschwingungen gewählt. Diese Ansätze enthalten implizit die Frequenz ω und werden deshalb frequenzabhängige Ansatzfunktionen genannt. Sie haben folgende Vorzüge:

- 1) Falls die Kopplungsglieder in den Gln. (2.70) u. (2.72) verschwinden, liefern die Ansätze die exakte Lösung.
- 2) Bei schwacher Kopplung sind wesentlich mehr Eigenfrequenzen brauchbar als mit Polynomansätzen.
- 3) Es müssen nur die Koppel-Submatrizen per Integration ermittelt werden (siehe unten).
- 4) Alle erforderlichen Integrationen sind geschlossen durchführbar.

Ein gewisser Mehraufwand gegenüber den Hermiteansätzen ist ähnlich wie bei der Verwendung der exakten Matrizen darin zu sehen, daß bei der Eigenfrequenzermittlung die Gesamtmatrix jeweils neu aufgebaut werden muß. Im Hinblick auf den Lösungsalgorithmus für das implizite EWP (siehe Abschnitt 4) fällt dies gegenüber dem Genauigkeitsgewinn nicht sehr ins Gewicht.

Die frequenzabhängigen Ansatzfunktionen sind entsprechend den Gleichungen (2.11), (2.41) und (2.42)

$$\begin{aligned} \underline{h}_1^T(x, \omega) &= \underline{n}_1^T(x, \omega) \underline{A}_1^{-1}(\omega) \\ \underline{h}_2^T(x, \omega) &= \underline{n}_2^T(x, \omega) \underline{A}_2^{-1}(\omega) \\ \underline{h}_3^T(x, \omega) &= \underline{n}_3^T(x, \omega) \underline{A}_3^{-1}(\omega), \end{aligned}$$

wobei z.B.

$$\underline{n}_1^T(x, \omega) = \left[s_1(x), c_1(x), S_2(x), C_2(x) \right]$$

ist. Die Frequenzabhängigkeit ist z.B. bei $s_1(x) = \sin \lambda_1 x$ in $\lambda_1(\omega)$ enthalten (siehe Gln. (2.3) und (2.4)). In α_1 wird der Term aus statischer Vorlast entsprechend (2.79) ergänzt, und in β_1 wird φI_P durch φI_M ersetzt:

$$\alpha_1 = \frac{GJ_T + R_T(0)}{EF_{\varphi\varphi}}, \quad \beta_1 = \frac{\varphi I_M}{EF_{\varphi\varphi}} \omega^2. \quad (2.80)$$

Die Vektoren \underline{n}_2 und \underline{n}_3 sind ohne Veränderung aus (2.29) und (2.30) zu übernehmen.

Die so konstruierten Ansatzfunktionen gehen für $\alpha = 0$ und $\omega \rightarrow 0$, d. h. $\beta \rightarrow 0$ in die Hermiteschen Ansatzfunktionen über. In den Bildern 2.7 bis 2.9 sind die Ansätze, die zu den linken Randverschiebungen gehören, in Abhängigkeit der dimensionslosen Parameter αL^2 und βL^4 für ein Element der Länge L dargestellt.

Bild 2.7 zeigt für konstantes $\alpha L^2 = 10$ den Einfluß des mit ω wachsendem βL^4 . Beim Erreichen der ersten Eigenfrequenz ($\beta L^4 = 625$) des beidseitig eingespannten Balkens der Länge L schlagen die Ansatzfunktionen durch, d.h., sie haben danach jeweils einen Nulldurchgang. Ähnliches wiederholt sich beim Durchlaufen der höheren Eigenfrequenzen.

Die Lagen der Durchschlagpunkte $(\beta L^4)_i$ werden durch die Größe von αL^2 beeinflusst:

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha L^2 \geq 0 \text{ folgt } (\beta L^4)_1 &\geq 500,55 \quad \text{und} \quad (\beta L^4)_2 \geq 3803,55 \\ \text{für } \alpha L^2 \leq 0 \text{ folgt } (\beta L^4)_1 &\leq 500,55 \quad \text{und} \quad (\beta L^4)_2 \leq 3803,55. \end{aligned}$$

Bild 2.8 zeigt die Veränderung der Ansatzfunktionen mit positiv wachsendem αL^2 für quasistatische Bewegung, d.h. $\beta L^4 \rightarrow 0$. Für $\alpha L^2 \rightarrow +\infty$ gehen diese Ansätze in lineare Funktionen über. Bei negativem αL^2 und $\beta L^4 \rightarrow 0$ (Bild 2.9) ist eine Steigerung nur bis $\alpha L^2 = -39,48$ physikalisch sinnvoll, da dies z.B. bei Biegung dem Erreichen der Euler-Knicklast des beidseitig eingespannten Balkens entspricht. Die Ansatzfunktion Bild 2.9 unten schlägt bei diesem Punkt durch. In Bild 2.9 oben ist zu erkennen, daß die Funktion für $\alpha L^2 = -50$ nicht mehr stabil sein kann.

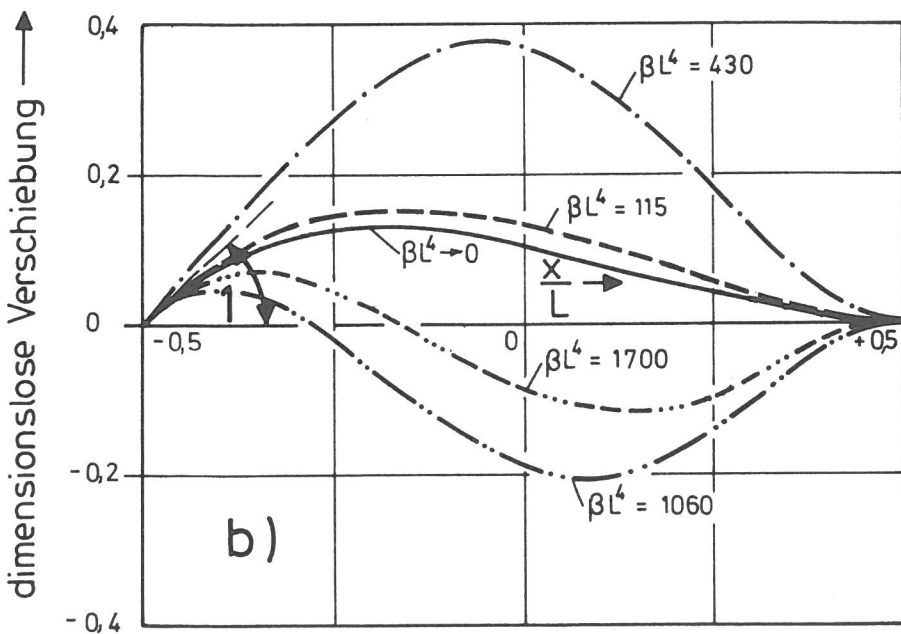
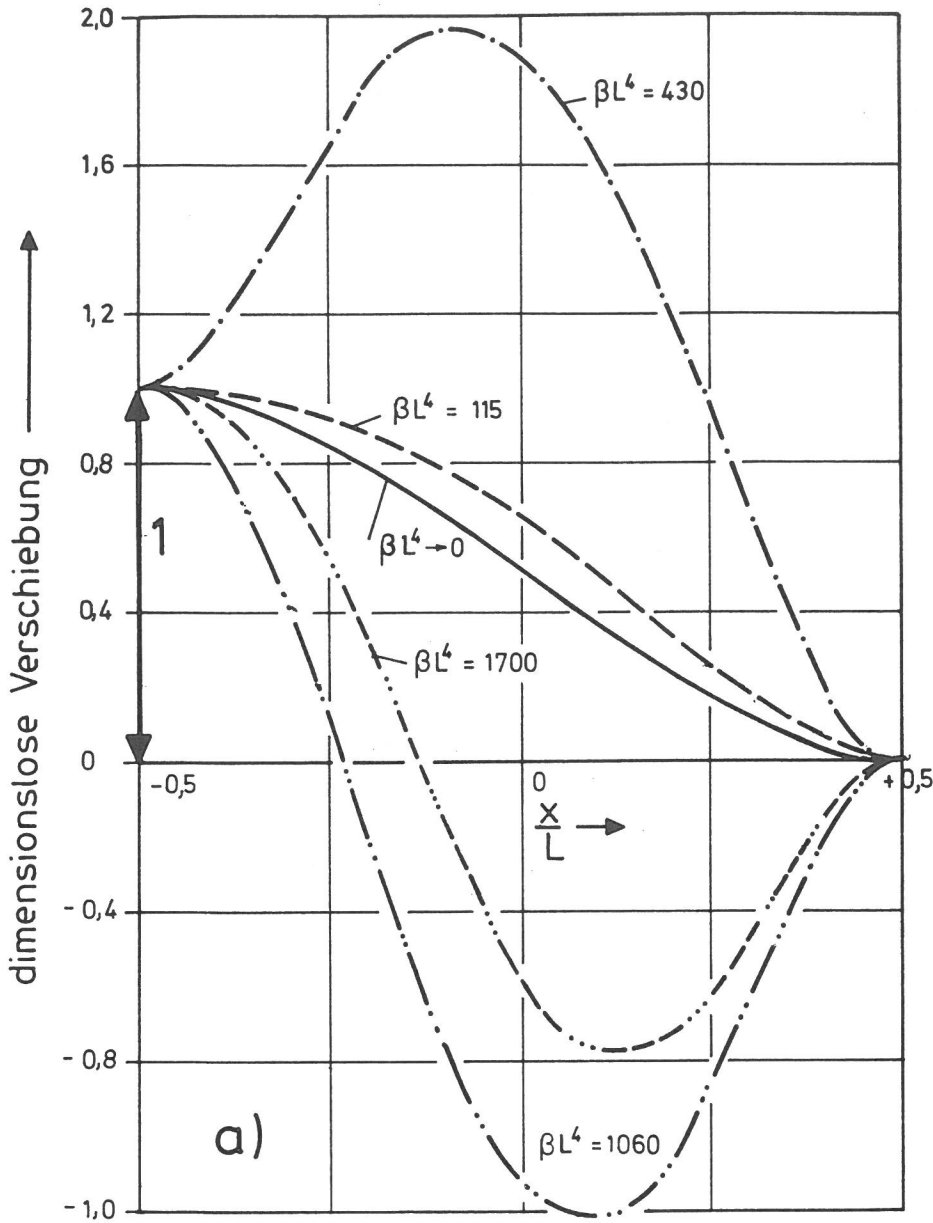


Bild 2.7
 Frequenzabhängige
 Ansatzfunktionen
 mit $\alpha L^2=10$ und
 variablem βL^4
 a) der linken
 Randverschiebung,
 b) der linken
 Randverdrehung

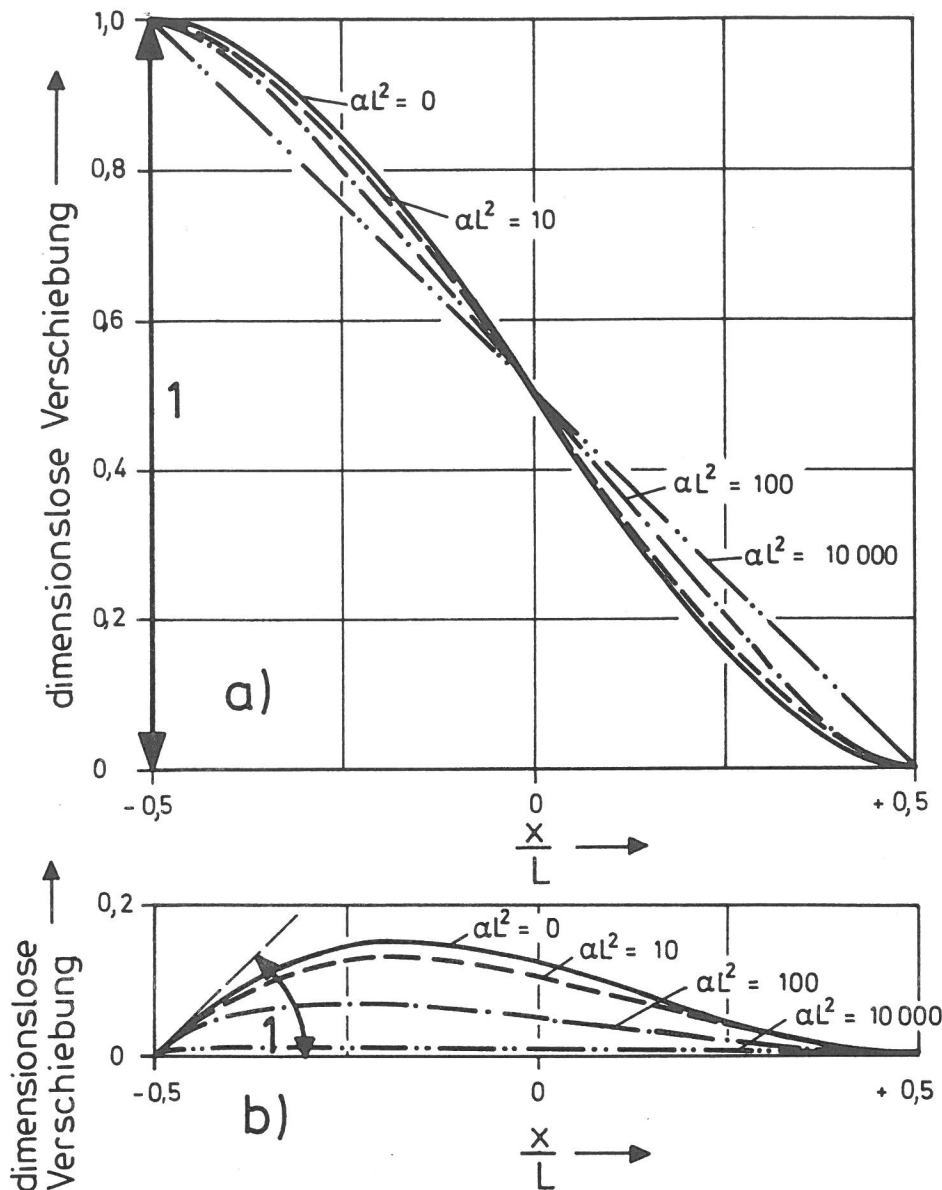


Bild 2.8
 Quasistatische
 Ansatzfunktionen
 ($\beta L^4 \rightarrow 0$) mit
 positivem αL^2
 a) der linken
 Randverschiebung,
 b) der linken
 Randverdrehung

Nach Umformung von (2.80) mit (2.5) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} GJ_T + R_T(0) &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) EF_{\varphi\varphi} \\ \omega^2 \mathcal{I}_M &= \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 EF_{\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} (2.81)$$

Die Submatrizen 11 der Gleichung (2.71), (2.73) und (2.78) lassen sich nun mit (2.81) zu einer dynamischen Steifigkeitsmatrix zusammenfassen

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{11} = \underline{\underline{K}}^{11} + \underline{\underline{G}}^{11} - \omega^2 \underline{\underline{M}}^{11} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} &= EF_{\varphi\varphi} \left[(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_{-l}^l \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx + \int_{-l}^l \underline{h}_{1,11} \underline{h}_{1,11}^T dx - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \int_{-l}^l \underline{h}_1 \underline{h}_1^T dx \right] \\ &\quad + \bar{R}_T \int_{-l}^l x \underline{h}_{1,1} \underline{h}_{1,1}^T dx \end{aligned}$$

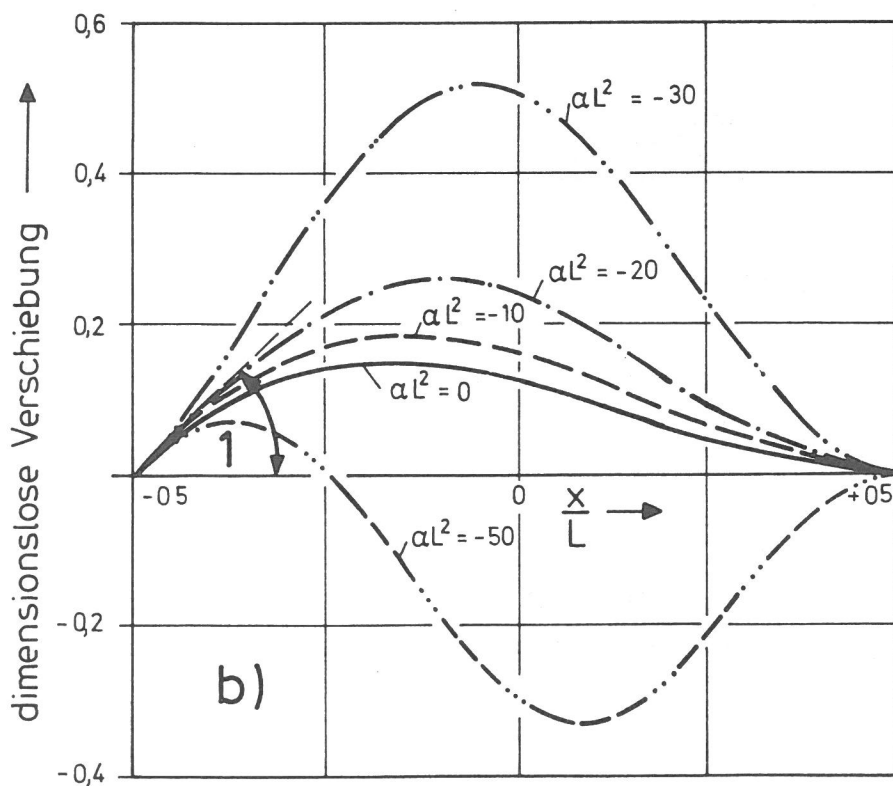
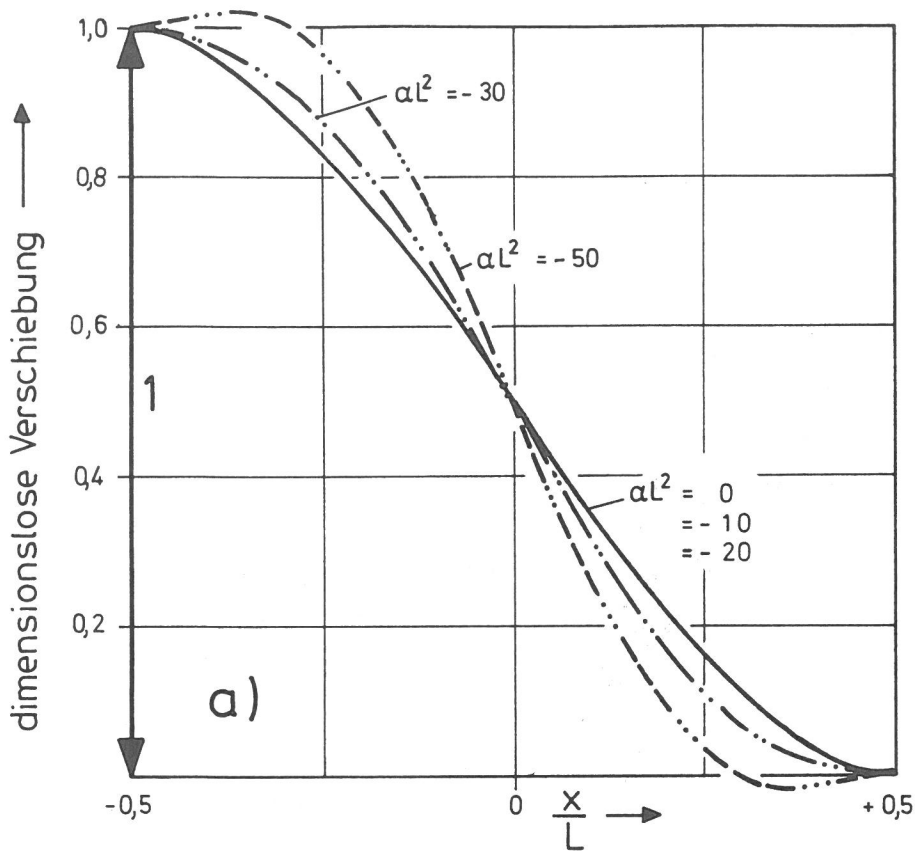


Bild 2.9
 Quasistatische
 Ansatzfunktionen
 ($\beta L^4 \rightarrow 0$) mit negativem
 αL^2
 a) der linken
 Randverschiebung,
 b) der linken
 Randverdrehung

Die Integrationen der ersten drei Anteile müssen nicht durchgeführt werden, da sie exakt auf die Matrix (2.20) bzw. auf die F-Werte (2.22) führen. Anders ausgedrückt: Die neue dynamische Steifigkeitssubmatrix der gekoppelten Torsionsschwingung wird aus der alten dynamischen Matrix mit nach (2.80) geänderten α_1 und

β_1 ermittelt, ergänzt durch den letzten Term von (2.82), der durch Integration bestimmt werden muß.

Analog lassen sich auch die Diagonalsubmatrizen der Biegung zusammenfassen. Mit den Gleichungen (s. Gl. (2.33))

$$P = (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) E F_{22}, \quad \omega^2 \varrho F = \lambda_3^2 \cdot \lambda_4^2 E F_{22}$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{K}_{\text{dyn}}^{22} &= \underline{K}^{22} + \underline{G}^{22} - \omega^2 \underline{M}^{22} \\ &= E F_{22} \left[(\lambda_4^2 - \lambda_3^2) \int_{-l}^l \underline{h}_{2,1} \underline{h}_{2,1}^T dx + \int_{-l}^l \underline{h}_{2,11} \underline{h}_{2,11}^T dx - \lambda_3^2 \lambda_4^2 \int_{-l}^l \underline{h}_2 \underline{h}_2^T dx \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

bzw. mit (2.34) folgt

$$\begin{aligned} \underline{K}_{\text{dyn}}^{33} &= \underline{K}^{33} + \underline{G}^{33} - \omega^2 \underline{M}^{33} \\ &= E F_{33} \left[(\lambda_6^2 - \lambda_5^2) \int_{-l}^l \underline{h}_{3,1} \underline{h}_{3,1}^T dx + \int_{-l}^l \underline{h}_{3,11} \underline{h}_{3,11}^T dx - \lambda_5^2 \lambda_6^2 \int_{-l}^l \underline{h}_3 \underline{h}_3^T dx \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

wobei $\underline{K}_{\text{dyn}}^{22}$ und $\underline{K}_{\text{dyn}}^{33}$ jeweils der Matrix aus (2.47) und (2.48) entsprechen.

Die Koppelsubmatrizen und der letzte Term in Gleichung (2.82) werden nun soweit aufbereitet, daß eine einfache numerische Behandlung möglich wird. Letztlich wird jede Submatrix aus zwei Matrizenmultiplikationen errechnet, wobei die Ausgangsmatrizen der Ordnung 4x4 geschlossen darstellbar sind.

Die Massenkoppelmatrizen aus Gl. (2.71) werden mit (2.11), (2.41) und (2.42) zu

$$\begin{aligned} \underline{M}^{12} &= -g_3 \varrho F \int_{-l}^l \underline{h}_1 \underline{h}_2^T dx = -g_3 \varrho F \underline{A}_1^{-1T} \int_{-l}^l \underline{n}_1 \underline{n}_2^T dx \underline{A}_2^{-1} \\ &= -g_3 \varrho F \underline{A}_1^{-1T} \underline{N}^{12} \underline{A}_2^{-1}, \\ \underline{M}^{13} &= g_2 \varrho F \underline{A}_1^{-1T} \underline{N}^{13} \underline{A}_3^{-1}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

wobei

$$\underline{N}^{12} = \int_{-l}^l \underline{n}_1 \underline{n}_2^T dx, \quad \underline{N}^{13} = \int_{-l}^l \underline{n}_1 \underline{n}_3^T dx \quad (2.86)$$

gilt. Z.B. ergibt sich ausgeschrieben

$$\underline{N}^{12} = \begin{bmatrix} \int_{-l}^l s_1(x) s_3(x) dx & \int_{-l}^l s_1(x) c_3(x) dx & \int_{-l}^l s_1(x) s_4(x) dx & \int_{-l}^l s_1(x) c_4(x) dx \\ \int_{-l}^l c_1(x) s_3(x) dx & \int_{-l}^l c_1(x) c_3(x) dx & \int_{-l}^l c_1(x) s_4(x) dx & \int_{-l}^l c_1(x) c_4(x) dx \\ \int_{-l}^l s_2(x) s_3(x) dx & \int_{-l}^l s_2(x) c_3(x) dx & \int_{-l}^l s_2(x) s_4(x) dx & \int_{-l}^l s_2(x) c_4(x) dx \\ \int_{-l}^l c_2(x) s_3(x) dx & \int_{-l}^l c_2(x) c_3(x) dx & \int_{-l}^l c_2(x) s_4(x) dx & \int_{-l}^l c_2(x) c_4(x) dx \end{bmatrix}$$

Die Hälfte der Elemente der \underline{N} -Matrizen verschwinden, da die Integration bei symmetrisch zum Ursprung liegenden Grenzen nur über gerade Funktionen von Null verschiedene Werte liefert. Diese Reduzierung des Aufwandes begründet nachträglich das lokale Koordinatensystem in Elementmitte. Mit den Integralwerten aus Anhang A.4 ergibt sich für die Matrix

$$\underline{N}^{12} = 2 \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_1 c_1 s_3 + \lambda_3 c_3 s_1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} & 0 & \frac{\lambda_4 s_1 c_4 - \lambda_1 c_1 s_4}{\lambda_1^2 + \lambda_4^2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1 c_3 s_1 - \lambda_3 c_1 s_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} & 0 & \frac{\lambda_4 c_1 s_4 + \lambda_1 s_1 c_4}{\lambda_1^2 + \lambda_4^2} \\ \frac{\lambda_2 s_3 c_2 - \lambda_3 c_3 s_2}{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} & 0 & \frac{\lambda_2 c_2 s_4 - \lambda_4 c_4 s_2}{\lambda_2^2 - \lambda_4^2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 c_3 s_2 + \lambda_3 s_3 c_2}{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} & 0 & \frac{\lambda_2 c_4 s_2 - \lambda_4 c_2 s_4}{\lambda_2^2 - \lambda_4^2} \end{bmatrix}$$

Nach Indexveränderungen ergibt sich die Matrix \underline{N}^{13} analog \underline{N}^{12} . Im Anhang sind auch die Integralwerte für $\lambda_q \rightarrow \lambda_r$ angegeben. Sie entsprechen den Grenzwerten der unbestimmten Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ auf den Diagonalen der Integralmatrizen.

wobei

$$\begin{aligned} \underline{\underline{N}}^{23} &= \int_{-l}^l \underline{\underline{n}}_2 \underline{\underline{n}}_3^T dx \\ \underline{\underline{N}}_x^{12} &= \int_{-l}^l x \underline{\underline{n}}_1 \underline{\underline{n}}_2^T dx, & \underline{\underline{N}}_x^{13} &= \int_{-l}^l x \underline{\underline{n}}_1 \underline{\underline{n}}_3^T dx \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{-l}^l} \right\} (2.91)$$

die Integralmatrizen sind, die ebenfalls zur Hälfte mit Null besetzt sind. Es gilt z.B.

$$\underline{\underline{N}}_x^{13} = \begin{bmatrix} \int_{-l}^l x s_1(x) s_5(x) dx & \int_{-l}^l x s_1(x) c_5(x) dx & \int_{-l}^l x s_1(x) s_6(x) dx & \int_{-l}^l x s_1(x) c_6(x) dx \\ \int_{-l}^l x c_1(x) s_5(x) dx & \int_{-l}^l x c_1(x) c_5(x) dx & \int_{-l}^l x c_1(x) s_6(x) dx & \int_{-l}^l x c_1(x) c_6(x) dx \\ \int_{-l}^l x s_2(x) s_5(x) dx & \int_{-l}^l x s_2(x) c_5(x) dx & \int_{-l}^l x s_2(x) s_6(x) dx & \int_{-l}^l x s_2(x) c_6(x) dx \\ \int_{-l}^l x c_2(x) s_5(x) dx & \int_{-l}^l x c_2(x) c_5(x) dx & \int_{-l}^l x c_2(x) s_6(x) dx & \int_{-l}^l x c_2(x) c_6(x) dx \end{bmatrix}.$$

Die Integralwerte hierfür sind im Anhang A.5 angegeben. Der letzte Term aus Gleichung (2.82) lautet mit (2.87)

$$\bar{R}_T \int_{-l}^l x \underline{\underline{h}}_{1,1} \underline{\underline{h}}_{1,1}^T dx = \bar{R}_T \underline{\underline{A}}_1^{-1T} \underline{\underline{D}}_1^T \underline{\underline{N}}_x^{11} \underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{A}}_1^{-1}, \quad (2.92)$$

wobei

$$\underline{\underline{N}}_x^{11} = \int_{-l}^l x \underline{\underline{n}}_1 \underline{\underline{n}}_1^T dx$$

ist.

Die $\underline{\underline{D}}$ -Matrizen bewirken jeweils nur eine Umsortierung und skalare Multiplikation der Integralmatrizenelemente mit λ bzw. λ^2 .

Bei gekoppelten Biege-Torsionsschwingungen ohne Verwölbung ($EF_{\varphi\varphi} = 0$) ist $\underline{\underline{A}}_1^{-1}$ durch $\hat{\underline{\underline{A}}}_1^{-1}$ aus Anhang A.1 und $\underline{\underline{D}}_1$ durch

$$\hat{\underline{\underline{D}}}_1 = \begin{bmatrix} & & & -\hat{\lambda}_1 \\ & & & \\ & & & \\ \hat{\lambda}_1 & & & \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda}_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho I_M}{GJ_T + R_T(0)}} \quad (2.93)$$

zu ersetzen. Von den Integralmatrizen bleiben jeweils nur die

ersten beiden Zeilen erhalten, die mit \hat{s}_1 und \hat{c}_1 zu bilden sind. Die Koppelmatrizen haben daher die Ordnung 2×4 .

Die im Abschnitt 1.3 angesprochenen Ansatzfunktionen mit "festgehaltenem" Frequenzparameter werden aus den oben aufgeführten Ansätzen durch ein festes ω in den λ -Werten gewonnen. Dieser Frequenzparameter ω_{fest} wird so gewählt, daß er in der Nähe des Frequenzbereiches liegt, in dem z.B. die Eigenfrequenzen ω_i ermittelt werden sollen. Eine Zusammenfassung der Diagonalsubmatrizen zu $\underline{K}_{\text{dyn}}$, wie in den Gleichungen (2.82) bis (2.84), ist hier nicht mehr möglich. Die Integrationen über die Ansatzfunktionen sind bei jeder Teilmatrix durchzuführen. Z.B. ergibt sich statt Gl. (2.84)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{K}^{33}(\omega_{\text{fest}}) \\ + \underline{G}^{33}(\omega_{\text{fest}}) \\ - \omega^2 \underline{M}^{33}(\omega_{\text{fest}}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{E} \underline{F}_{33} \underline{A}_3^{-1T} \quad \underline{D}_{33}^T \quad \underline{N}^{33} \quad \underline{D}_{33} \quad \underline{A}_3^{-1} \\ + \quad \underline{P} \underline{A}_3^{-1T} \quad \underline{D}_3^T \quad \underline{N}^{33} \quad \underline{D}_3 \quad \underline{A}_3^{-1} \\ - \quad \omega^2 \underline{F} \underline{A}_3^{-1T} \quad \underline{N}^{33} \quad \underline{A}_3^{-1} \end{array} \right\} \quad (2.94)$$

Hierin sind alle Matrizen der rechten Seite mit $\lambda(\omega_{\text{fest}})$ gebildet, d.h., bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen müssen die Matrizen \underline{K} , \underline{G} und \underline{M} nur einmal aufgebaut werden und können im allgemeinen EWP entsprechend Gleichung (2.69) weiter verarbeitet werden (siehe Abschnitt 5.2). Der Frequenzparameter ω_{fest} beeinflusst dabei die Form der Ansatzfunktionen. Für $\omega_{\text{fest}} \rightarrow 0$ ergeben sich quasistatische Ansatzfunktionen, die für $\alpha = 0$ in die Hermite-Polynome 3. Grades übergehen. Da diese Grenzwertbildung analytisch sehr mühsam ist, werden im folgenden direkt Polynome als Ansätze gewählt.

2.2.2 Polynomansatzfunktionen

Um die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen zu können, sind bei der Balkenbiegung und bei der Wölbkrafttorsion Polynome mindestens 3. Grades als Ansatzfunktionen erforderlich. Natürlich lassen sich auch Ansätze höheren Grades konstruieren (siehe Anhang A.7), jedoch wächst damit die Ordnung der Elementmatrizen und die Bandbreite der Systemmatrizen.

Für ein Element der Länge $L = 2l$ mit dem Koordinatensystem in Elementmitte lauten die Ansätze

$$\underline{h}_1^T(x) = \underline{n}_p^T(x) \underline{A}_p^{-1}$$

$$\underline{h}_2^T(x) = \underline{n}_p^T(x) \underline{A}_p^{-1}$$

$$\underline{h}_3^T(x) = \underline{n}_p^T(x) \underline{A}_p^{-1}$$

mit

$$\underline{n}_p^T(x) = [1, x, x^2, x^3]$$

und der Matrix \underline{A}_p^{-1} , die analog der Gleichung (2.8) ermittelt werden kann. Da hier für alle Ansätze die gleichen Funktionsverläufe gelten, wird im weiteren auf die Indizierung verzichtet.

Mit der dimensionslosen Koordinate

$$\xi = \frac{x}{l}$$

und deren Ableitungen nach x ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}^T(x) &= \underline{n}^T(\xi) \underline{A}^{-1} \\ \underline{h}_{,1}^T &= \frac{1}{l} \underline{n}_{,\xi}^T \underline{A}^{-1} \\ \underline{h}_{,11}^T &= \frac{1}{l^2} \underline{n}_{,\xi\xi}^T \underline{A}^{-1} \end{aligned} \right\} (2.95)$$

wobei für

$$\underline{n}^T = [1, \xi, \xi^2, \xi^3] \quad (2.96)$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & | & l & | & 2 & | & -l \\ -3 & | & -l & | & 3 & | & -l \\ 0 & | & -l & | & 0 & | & l \\ 1 & | & l & | & -1 & | & l \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

gilt.

Die Submatrizen der Steifigkeitsmatrix Gleichung (2.73) lauten mit (2.95)

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{K}}^{11} &= GJ_T \underline{\underline{H}}_{11} + EF_{\psi\psi} \underline{\underline{H}}_{22} \\ \underline{\underline{K}}^{22} &= EF_{22} \underline{\underline{H}}_{22}, \quad \underline{\underline{K}}^{33} = EF_{33} \underline{\underline{H}}_{22}, \end{aligned} \right\} (2.98)$$

wobei für

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{H}}_{11} &= \frac{1}{l} \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\ \underline{\underline{H}}_{22} &= \frac{1}{l^3} \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}}_{,\xi\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \end{aligned} \right\} (2.99)$$

gilt.

Die Integralmatrizen $\underline{\underline{H}}_{ik}$ sind im Anhang A.6 angegeben.

Die Indizes i und k weisen auf die Anzahl der Ortsableitungen in den Ansatzfunktionen hin.

Die Submatrizen der geometrischen Matrix (2.78) lauten mit (2.95)

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{G}}^{11} &= R_T(0) \underline{\underline{H}}_{11} + \bar{R}_T \underline{\underline{H}}_{x11} \\ \underline{\underline{G}}^{22} &= P \underline{\underline{H}}_{11}, \quad \underline{\underline{G}}^{33} = P \underline{\underline{H}}_{11} \\ \underline{\underline{G}}^{12} &= - (M_2(0) + m_3 P) \underline{\underline{H}}_{11} + Q_3 \underline{\underline{H}}_{x02} \\ \underline{\underline{G}}^{13} &= (-M_3(0) + m_2 P) \underline{\underline{H}}_{11} + Q_2 \underline{\underline{H}}_{x02} \\ \underline{\underline{G}}^{23} &= \frac{1}{2} M_1 \underline{\underline{H}}_{21-12}, \end{aligned} \right\} (2.100)$$

wobei für

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{H}}_{x11} &= \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \xi \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\ \underline{\underline{H}}_{x02} &= \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \xi \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}_{,\xi\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\ \underline{\underline{H}}_{21-12} &= \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 (\underline{\underline{n}}_{,\xi\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T - \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi\xi}^T) d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \end{aligned} \right\} (2.101)$$

gilt.

Die Integralmatrizen sind wiederum im Anhang A.6 verzeichnet.

Die Submatrizen der Massenmatrix (2.71) lauten mit (2.95)

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{M}}^{11} &= \varrho \underline{\underline{I}}_M \underline{\underline{H}}_{00}, & \underline{\underline{M}}^{22} &= \underline{\underline{M}}^{33} = \varrho \underline{\underline{F}} \underline{\underline{H}}_{00} \\ \underline{\underline{M}}^{12} &= -\varrho_3 \underline{\underline{S}}^F \underline{\underline{H}}_{00}, & \underline{\underline{M}}^{13} &= \varrho_2 \underline{\underline{S}}^F \underline{\underline{H}}_{00}, \end{aligned} \right\} (2.102)$$

wobei für

$$\underline{\underline{H}}_{00} = \ell \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (2.103)$$

gilt.

Die Integralmatrix ist im Anhang A.6 zu finden.

Die Diagonalsubmatrizen (2.102) wurden erstmals von Zurmühl (1963) und Archer (1963), die Massenkoppelsubmatrizen von Mei (1970) angegeben. Die geometrischen Koppelsubmatrizen (2.100) sind von Barsoum (1970) und Tebedge (1972) hergeleitet worden.

Bei gekoppelten Biege-Torsionsschwingungen ohne Verwölbung ($EF_{\psi\psi} = 0$) kann für die Torsion ein linearer Ansatz gewählt werden gemäß

$$\underline{\underline{\hat{h}}}^T(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\hat{n}}}^T(\underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{A}}^{-1}, \quad (2.104)$$

wobei

$$\underline{\underline{\hat{n}}}^T(\underline{\underline{\xi}}) = [1, \xi] \quad (2.105)$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & | & 1 \\ \hline -1 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

ist.

In Gleichung (2.98), (2.100) und (2.102) ergeben sich folgende Änderungen

$$\begin{aligned}
 \hat{\underline{K}}^{11} &= GJ_T \underline{\underline{H}}_{11}^{22} \\
 \hat{\underline{G}}^{11} &= R_T(0) \underline{\underline{H}}_{11}^{22} + \bar{R}_T \underline{\underline{H}}_{x11}^{22} \\
 \hat{\underline{G}}^{12} &= -(M_2(0) + m_3 P) \underline{\underline{H}}_{11}^{24} + Q_3 \underline{\underline{H}}_{x02}^{24} \\
 \hat{\underline{G}}^{13} &= (-M_3(0) + m_2 P) \underline{\underline{H}}_{11}^{24} + Q_2 \underline{\underline{H}}_{x02}^{24} \\
 \hat{\underline{M}}^{11} &= \mathcal{I}_M \underline{\underline{H}}_{00}^{22} \\
 \hat{\underline{M}}^{12} &= -g_3 \mathcal{I}_F \underline{\underline{H}}_{00}^{24}, \quad \underline{\underline{M}}^{13} = g_2 \mathcal{I}_F \underline{\underline{H}}_{00}^{24},
 \end{aligned}
 \tag{2.107}$$

wobei für

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{H}}_{11}^{22} &= \frac{1}{l} \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\
 \underline{\underline{H}}_{x11}^{22} &= \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \xi \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{H}}_{11}^{24} &= \frac{1}{l} \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}}_{,\xi} \underline{\underline{n}}_{,\xi}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\
 \underline{\underline{H}}_{00}^{22} &= l \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1} \\
 \underline{\underline{H}}_{00}^{24} &= l \underline{\underline{A}}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T d\xi \underline{\underline{A}}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.108}$$

gilt.

Die Integralmatrizen sind ebenfalls im Anhang A.6 verzeichnet.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, weisen Paz und Dung (1975) nach, daß bei der Reihenentwicklung der exakten dynamischen Steifigkeitsmatrix mit Normalkrafteinfluß die ersten Reihenglieder identisch den Matrizen mit Hermiteschen Ansätzen sind. Z.B. gilt

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega) = \underline{\underline{K}}^{33} + \underline{\underline{G}}^{33} - \omega^2 \underline{\underline{M}}^{33} + \dots \tag{2.109}$$

Eine Methode zur näherungsweise Linearisierung der dynamischen Steifigkeitsmatrix an einer beliebigen Stelle ω_{fest} geht auf Hopper u.a. (1980) zurück. Für den Fall ohne Normalkrafteinfluß gilt z.B.

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega) = \underline{\underline{K}}^{33}(\omega_{\text{fest}}) - \omega^2 \underline{\underline{M}}^{33}(\omega_{\text{fest}}) + \dots \quad , \quad (2.110)$$

wobei die Matrizen für $\omega_{\text{fest}} = \sqrt{\omega_u \cdot \omega_o}$ mit $\omega_o = 1,01 \omega_u$ aus den Näherungen

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_{\text{fest}}) \approx \frac{\omega_o^2 \underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_u) - \omega_u^2 \underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_o)}{\omega_o^2 - \omega_u^2} \quad (2.111)$$

$$\underline{\underline{M}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_{\text{fest}}) \approx \frac{\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_u) - \underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{33}(\omega_o)}{\omega_o^2 - \omega_u^2} \quad (2.112)$$

errechnet werden können. Die Gleichungen (2.111) und (2.112) sind gute Näherungen der entsprechenden Matrizen von Gl. (2.94), sofern auch dort der Normalkrafteinfluß nicht berücksichtigt wird. Für $\omega_{\text{fest}} \rightarrow 0$ ergeben sich aus Gl. (2.111) und (2.112) die Matrizen von Gl. (2.109).

3 Systemmatrix

Wie eingangs erwähnt, wird die Systemmatrix aus den Elementmatrizen aufgebaut. Um die Kompatibilitäts- und die Gleichgewichtsbedingungen an den Knotenpunkten erfüllen zu können, werden im ersten Schritt alle Elementmatrizen auf ein gemeinsames, i. allg. raumfestes, globales Koordinatensystem bezogen. Dies geschieht durch Transformation der lokalen Freiheitsgrade und Randschnittlasten auf globale Koordinatenrichtungen. Durch Zuordnung dieser Elementgrößen zu Systemgrößen kann nun im zweiten Schritt die Systemmatrix elementweise vervollständigt werden. Einzelfedern und Einzelmassen an den Knotenpunkten werden i. allg. erst in die Systemmatrix eingebaut. Nach Berücksichtigung der globalen Randbedingungen steht uns somit eine matrizielle Systembeschreibung zur Verfügung. In den folgenden Abschnitten werden auch kurze Hinweise zur Programmierung gegeben.

3.1 Transformation der Elementmatrix

Wie Bild 2.5 zeigt sind die lokalen Elementverschiebungen und damit auch die lokalen Elementrandschnittgrößen (Bild 3.1) auf unterschiedliche Achsen bezogen. Als erste Transformation ist deshalb der Bezug auf eine sinnvoll zu wählende lokale Systemachse erforderlich. Die zweite Transformation bewirkt die Umrechnung dieses lokalen Achsensystems auf das globale. Falls vor der Schwingungsberechnung eine geometrisch nichtlineare Berechnung zur Bestimmung der statischen Ruhelage erforderlich ist, muß noch eine dritte Transformation von der globalen Ausgangslage in die globale Endlage durchgeführt werden.

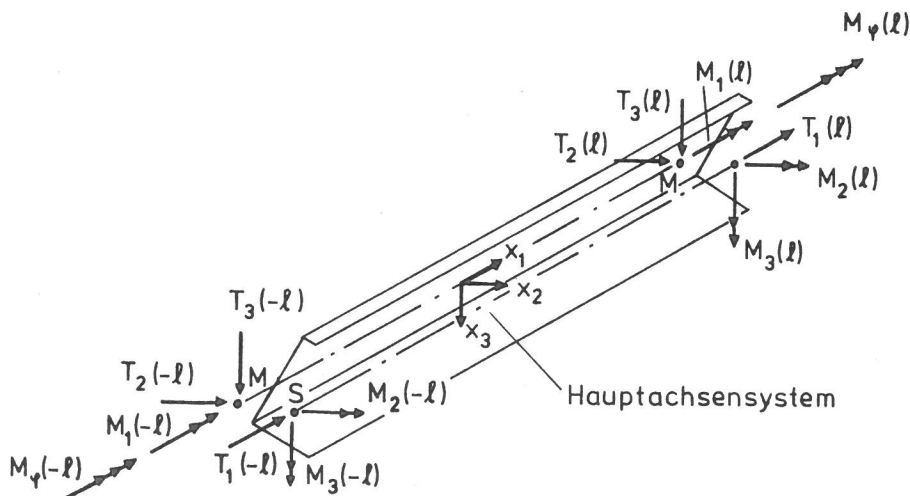


Bild 3.1

Elementrandschnittgrößen, bezogen auf M- und S-Achse

3.1.1 Transformation vom Hauptachsensystem auf lokale Systemachsen

Um nicht mehrere Systemmatrizen getrennt beschreiben zu müssen, wird exemplarisch die dynamische Steifigkeitsmatrix mit allen Koppelsubmatrizen als Elementmatrix in folgender Form gewählt:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_0 \\ \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \underline{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{\text{dyn}}^{00} & & & \\ & \underline{K}_{\text{dyn}}^{11} & \underline{K}_{\text{dyn}}^{12} & \underline{K}_{\text{dyn}}^{13} \\ & & \underline{K}_{\text{dyn}}^{22} & \underline{K}_{\text{dyn}}^{23} \\ \text{sym} & & & \underline{K}_{\text{dyn}}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f} = \underline{K}_{\text{dyn}} \underline{d}, \quad (3.1)$$

wobei gilt:

$$\underline{K}_{\text{dyn}}^{00} = \begin{bmatrix} F_1^{00} & F_2^{00} \\ \text{sym} & F_1^{00} \end{bmatrix} \quad (\text{siehe Anhang A.2})$$

$$\underline{K}_{\text{dyn}}^{ii} = \begin{bmatrix} F_1^{ii} & F_2^{ii} & F_3^{ii} & F_4^{ii} \\ & F_5^{ii} & -F_4^{ii} & F_6^{ii} \\ & & F_1^{ii} & -F_2^{ii} \\ \text{sym} & & & F_5^{ii} \end{bmatrix}$$

für $i = 1$ siehe Gleichungen (2.22) oder Gleichung (2.82)
wobei hier der letzte Term mit \bar{R}_T noch zusätzlich zu F_1^{11} berücksichtigt werden muß

für $i = 2$ bzw. 3 siehe Gleichung (2.47) bzw. (2.48)

$$\underline{K}_{\text{dyn}}^{ij} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} & F_2^{ij} & F_3^{ij} & F_4^{ij} \\ F_5^{ij} & F_6^{ij} & F_7^{ij} & F_8^{ij} \\ F_9^{ij} & F_{10}^{ij} & F_{11}^{ij} & F_{12}^{ij} \\ F_{13}^{ij} & F_{14}^{ij} & F_{15}^{ij} & F_{16}^{ij} \end{bmatrix}$$

für $i = 1, j = 2, 3$ gilt $\underline{K}_{\text{dyn}}^{1j} = \underline{G}^{1j} + \omega^2 \underline{M}^{1j}$

entsprechend Gleichung (2.72) u. (2.70)

für $i = 2, j = 3$ gilt $\underline{K}_{\text{dyn}}^{23} = \underline{G}^{23}$

nach Gleichung (2.72).

Die Vektoren \underline{f} bzw. \underline{d} setzen sich aus den im Anhang (A.2) und den in Gleichung (2.21), (2.47) und (2.48) verwendeten Teilvektoren

$$\underline{f}_0^T = [T_1(-l), T_1(l)]$$

$$\underline{f}_1^T = [M_1(-l), M_\varphi(-l), M_1(l), M_\varphi(l)]$$

$$\underline{f}_2^T = [T_2(-l), M_3(-l), T_2(l), M_3(l)]$$

$$\underline{f}_3^T = [T_3(-l), -M_2(-l), T_3(l), -M_2(l)]$$

$$\underline{d}_0^T = [u_1(-l), u_1(l)]$$

$$\underline{d}_1^T = [\mathcal{V}_1(-l), \mathcal{V}_{1,1}(-l), \mathcal{V}_1(l), \mathcal{V}_{1,1}(l)]$$

$$\underline{d}_2^T = [w_2(-l), w_{2,1}(-l), w_2(l), w_{2,1}(l)]$$

$$\underline{d}_3^T = [w_3(-l), w_{3,1}(-l), w_3(l), w_{3,1}(l)]$$

zusammen.

Vor der Durchführung der Transformationen ist es zweckmäßig, die Vektoren \underline{f} und \underline{d} so zu sortieren, daß die Kraft- bzw. Verschiebungsgrößen der beiden Knotenpunkte geordnet nach Weg- und Drehgrößen zusammenstehen.

Weiterhin wird

$$\left. \begin{aligned} w_{2,1}(-l) &= \mathcal{V}_3(-l) \\ w_{2,1}(l) &= \mathcal{V}_3(l) \end{aligned} \right\} (3.2)$$

und

$$\left. \begin{aligned} w_{3,1}(-l) &= -\mathcal{V}_2(-l) \\ w_{3,1}(l) &= -\mathcal{V}_2(l) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

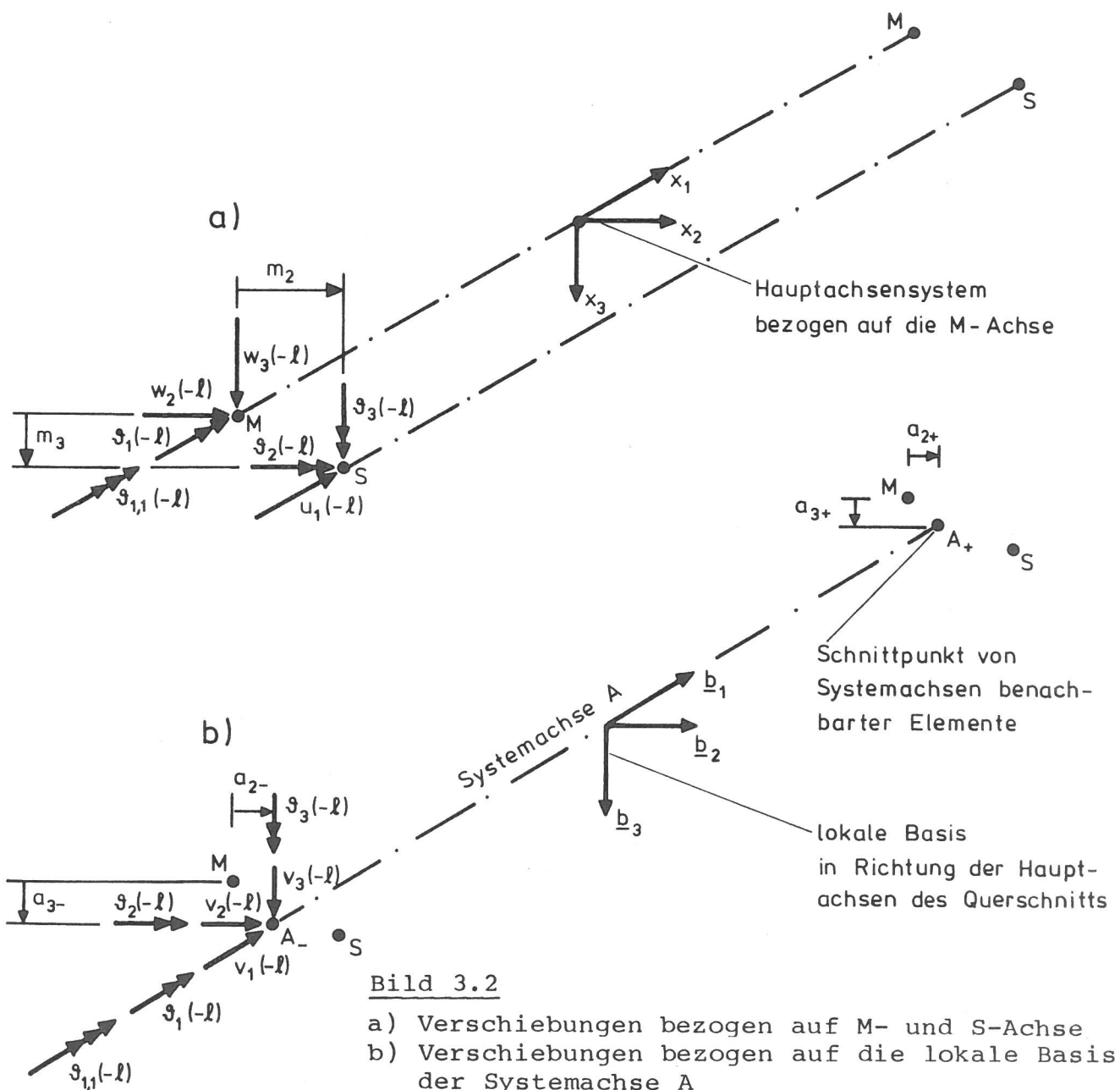
gesetzt. Dies ist bei den vorausgesetzten kleinen Elementverformungen ohne Einschränkungen möglich. Werden letztlich die mit M_2 und \mathcal{V}_2 korrespondierenden Zeilen und Spalten der Elementmatrix mit -1 durchmultipliziert, so ergibt sich

$T_1(-l)$	F_1^{00}						F_2^{00}							$u_1(-l)$	
$T_2(-l)$		F_1^{22}	F_1^{23}	F_1^{12}	$-F_2^{23}$	F_2^{22}	F_5^{12}		F_3^{22}	F_3^{23}	F_9^{12}	$-F_4^{23}$	F_4^{22}	F_{13}^{12}	$w_2(-l)$
$T_3(-l)$			F_1^{33}	F_1^{13}	$-F_2^{33}$	F_5^{23}	F_5^{13}		F_9^{23}	F_3^{33}	F_9^{13}	$-F_4^{33}$	F_{13}^{23}	F_{13}^{13}	$w_3(-l)$
$M_1(-l)$				F_1^{11}	$-F_2^{13}$	F_2^{12}	F_2^{11}		F_3^{12}	F_3^{13}	F_3^{11}	$-F_4^{13}$	F_4^{12}	F_4^{11}	$\mathcal{V}_1(-l)$
$M_2(-l)$					F_5^{33}	$-F_6^{23}$	$-F_6^{13}$		$-F_{10}^{23}$	F_4^{33}	$-F_{10}^{13}$	F_6^{33}	$-F_{14}^{23}$	$-F_{14}^{13}$	$\mathcal{V}_2(-l)$
$M_3(-l)$						F_5^{22}	F_6^{12}		$-F_4^{22}$	F_7^{23}	F_{10}^{12}	$-F_8^{23}$	F_6^{22}	F_{14}^{12}	$\mathcal{V}_3(-l)$
$M_\varphi(-l)$							F_5^{11}		F_7^{12}	F_7^{13}	$-F_4^{11}$	$-F_8^{13}$	F_8^{12}	F_6^{11}	$\mathcal{V}_{1,1}(-l)$
$T_1(l)$	F_1^{00}						F_1^{00}								$u_1(l)$
$T_2(l)$									F_1^{22}	F_{11}^{23}	F_{11}^{12}	$-F_{12}^{23}$	$-F_{12}^{22}$	F_{15}^{12}	$w_2(l)$
$T_3(l)$										F_1^{33}	F_{11}^{13}	F_2^{33}	F_{15}^{23}	F_{15}^{13}	$w_3(l)$
$M_1(l)$											F_1^{11}	$-F_{12}^{13}$	F_{12}^{12}	$-F_2^{11}$	$\mathcal{V}_1(l)$
$M_2(l)$												F_5^{33}	$-F_{16}^{23}$	$-F_{16}^{13}$	$\mathcal{V}_2(l)$
$M_3(l)$													F_5^{22}	F_{16}^{12}	$\mathcal{V}_3(l)$
$M_\varphi(l)$														F_5^{11}	$\mathcal{V}_{1,1}(l)$

$$\underline{f}_e = \underline{K}_{edyn} \underline{d}_e \quad (3.4)$$

Die Größen \underline{f}_e , \underline{d}_e und \underline{K}_{edyn} sind die durch Umsortierung entstandenen Elementvektoren und die Elementmatrix, wobei die Schnittkraft- bzw. Verschiebungsgrößen entsprechend Bild 3.2 a zum Teil auf die M-Achse und zum Teil auf die S-Achse bezogen sind. Die lokale Systemachse wird nun so gewählt, daß der Anschluß benach-

barter Elemente ohne Probleme möglich ist. Dies ist der Fall, wenn alle an einem Knoten zusammentreffenden lokalen Systemachsen sich in einem Punkte schneiden. Die so konstruierten Achsen sind u. U. nicht mehr parallel zu den M- und S-Achsen der Elemente (Bild 3.2 b). Da die windschiefe Lage dieser Achsen zueinander nicht weiter berücksichtigt werden soll, muß der Winkel zwischen der Systemachse und der M- bzw. S-Achse klein sein. Weiterhin sollte die Systemachse möglichst nahe bei der M-Achse liegen, da die Wölbgrößen nicht auf diese allgemeine Bezugslinie transformiert werden. Die hierdurch verursachte Näherung ist jedoch, wie Argyris und Radaj (1970) und Radaj (1970) zeigten, in vielen Fällen ausreichend genau. Es wird bei der Transformation also so verfahren, als ob es sich um Stäbe mit Vollquerschnitt handelt.



Die Transformation des gesamten Verschiebungsvektors lautet mit den Gleichungen (3.5) und (3.6)

$$\begin{bmatrix} \underline{d}_e(-\ell) \\ \underline{d}_e(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{11} & | \\ \hline & \underline{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_L(-\ell) \\ \underline{d}_L(\ell) \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_e = \underline{E} \underline{d}_L \quad (3.7)$$

Der Schnittkraftvektor muß einer ähnlichen Transformation unterworfen werden wie der Verschiebungsvektor:

$$\underline{f}_L = \underline{E}^T \underline{f}_e \quad (3.8)$$

Gleichung (3.7) und (3.8) in (3.4) eingesetzt, ergibt die auf die lokale Systemachse A bezogene Gleichung

$$\underline{f}_L = \underline{K}_{Ldyn} \underline{d}_L \quad (3.9)$$

mit

$$\underline{K}_{Ldyn} = \underline{E}^T \underline{K}_{edyn} \underline{E} \quad (3.10)$$

Durch diese Transformation bleibt die Symmetrie der Elementmatrix \underline{K}_{Ldyn} erhalten.

Im Rechner wird Gleichung (3.10) nicht als zweimalige Matrizenmultiplikation der Ordnung (14 x 14) durchgeführt, sondern lediglich die 4. bis 6. sowie die 11. bis 13. Spalte und Zeile der Matrix \underline{K} entsprechend der Besetzung der Matrix \underline{E} neu belegt. Weiterhin sei noch darauf hingewiesen, daß die Matrix \underline{E} des exzentrischen Anschlusses nicht orthogonal ist, d. h. die Rücktransformation von Gleichung (3.7) lautet z. B.

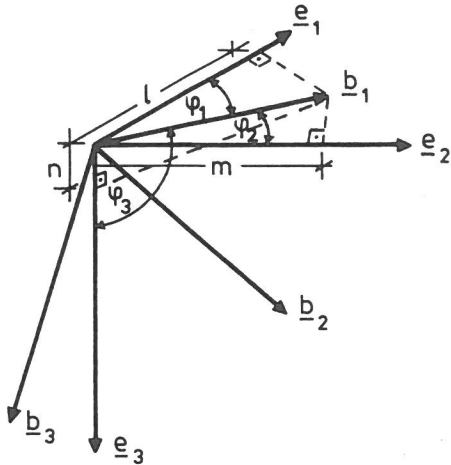
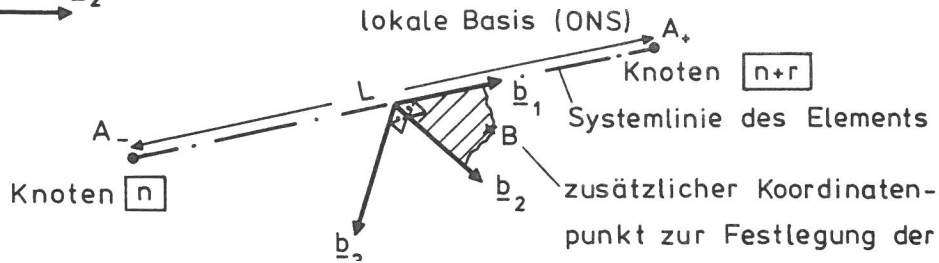
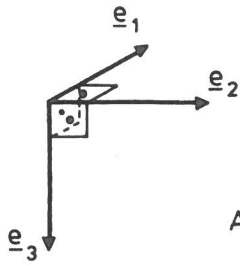
$$\underline{d}_L = \underline{E}^{-1} \underline{d}_e,$$

wobei \underline{E}^{-1} sofort aus \underline{E} berechenbar ist, indem alle Außendiagonalglieder das Vorzeichen wechseln.

3.1.2 Transformation von lokalen auf globale Achsensysteme

Sowohl die lokale Basis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ als auch die globale Basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ werden als orthonormierte Systeme (ONS) gewählt. Damit ist die gegenseitige Überführung des einen in das andere System, bei Kenntnis der Richtungskosinus zwischen den einzelnen lokalen und globalen Basisvektoren, durch orthogonale Transformationen möglich (Bild 3.3).

globale Basis (ONS)



$$\underline{b}_1 = l\underline{e}_1 + m\underline{e}_2 + n\underline{e}_3$$

mit $l = \cos \psi_1$ Richtungskosinus
zwischen \underline{b}_1 und \underline{e}_1

Bild 3.3

Lokale und globale Basis

Der lokale Basisvektor \underline{b}_1 ist durch die Lage der Elementknoten bestimmt, wobei die Richtung vom Knoten \underline{n} zum Knoten $\underline{n+r}$ zeigen soll. Die Lage der Hauptachsen \underline{b}_2 und \underline{b}_3 bezüglich der globalen Basis muß durch besondere Konvention festgelegt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, außer den Koordinaten der Elementknoten noch einen weiteren Punkt B anzugeben, der mit der Systemlinie des Elementes eine Ebene aufspannt, in der die Hauptachse \underline{b}_2 liegt. Mittels Kreuzprodukt zwischen dem Vektor \underline{b}_1 und einem Hilfsvektor, der von einem Punkt der Systemlinie des Elementes zum Punkt B zeigt, kann nach Normierung \underline{b}_3 errechnet werden. Nach erneuter Kreuzproduktbildung zwischen \underline{b}_1 und \underline{b}_3 ergibt sich schließlich \underline{b}_2 . Für den häufig vorkommenden Fall, daß \underline{b}_2 parallel zur $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ Ebene liegt, ist die Berechnung der Richtungskosinus im Anhang A.8 angegeben. Der Punkt B wird dabei nicht benötigt. Die Transformation von globalen in lokale Größen lautet

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n \\ o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \underline{T}_1 \underline{e} \quad (3.11)$$

und entspricht einer Starrkörperdrehung. Sowohl die Weg- als auch die Drehgrößen transformieren sich nach der gleichen Beziehung,

$$\begin{bmatrix} v_1(-\ell) \\ v_2(-\ell) \\ v_3(-\ell) \\ \vartheta_1(-\ell) \\ \vartheta_2(-\ell) \\ \vartheta_3(-\ell) \\ \vartheta_{1,1}(-\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n & & & & \\ o & p & q & & & & \\ r & s & t & & & & \\ & & & l & m & n & \\ & & & o & p & q & \\ & & & r & s & t & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(-\ell) \\ V_2(-\ell) \\ V_3(-\ell) \\ \theta_1(-\ell) \\ \theta_2(-\ell) \\ \theta_3(-\ell) \\ \vartheta_{1,1}(-\ell) \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_L(-\ell) = \underline{T}_{11} \underline{d}_G(-\ell), \quad (3.12)$$

wobei V_1, V_2, V_3 die Verschiebungen und $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ die Drehungen des Knotenpunktes in Richtung der globalen Achsen sind. Die Verwölbung wurde bei dieser Transformation als Skalar behandelt. Da sich die Randgrößen bei $x = \ell$ mit der gleichen Matrix \underline{T}_{11} umrechnen lassen, lautet die Transformation des gesamten Verschiebungsvektors

$$\begin{bmatrix} \underline{d}_L(-\ell) \\ \underline{d}_L(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{11} & \\ & \underline{T}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_G(-\ell) \\ \underline{d}_G(\ell) \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_L = \underline{T} \underline{d}_G. \quad (3.13)$$

Da die Transformationsmatrix \underline{T} orthogonal ist, d. h., es gilt $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T$, und der Schnittkraftvektor der gleichen Transformation wie der Verschiebungsvektor unterworfen werden muß, folgt

$$\underline{f}_G = \underline{T}^T \underline{f}_L. \quad (3.14)$$

Gleichung (3.13) und (3.14) in (3.9) eingesetzt. Das ergibt die auf die globale Basis bezogene Elementgleichung

$$\underline{f}_G = \underline{K}_{Gdyn} \underline{d}_G \quad (3.15)$$

mit

$$\underline{K}_{Gdyn} = \underline{T}^T \underline{K}_{Ldyn} \underline{T}. \quad (3.16)$$

Diese Kongruenztransformation der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix läßt sich sehr effizient ausführen, wenn die Blockdiagonalstruktur der Matrix \underline{T} berücksichtigt und aus Symmetrie-

gründen nur die obere oder untere Dreiecksmatrix von \underline{K}^{Gdyn} berechnet wird. Damit ist der sonst erforderliche Rechenaufwand auf ca. ein Zwanzigstel reduzierbar. Die Submatrizen der globalen Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{K}^{Gdyn} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^{Gdyn} & \underline{K}_{12}^{Gdyn} & \underline{k}_1^{Gdyn} & \underline{K}_{13}^{Gdyn} & \underline{K}_{14}^{Gdyn} & \underline{k}_2^{Gdyn} \\ & \underline{K}_{22}^{Gdyn} & \underline{k}_3^{Gdyn} & \underline{K}_{23}^{Gdyn} & \underline{K}_{24}^{Gdyn} & \underline{k}_4^{Gdyn} \\ & & \underline{k}_1^{Gdyn} & \underline{k}_5^T Gdyn & \underline{k}_7^T Gdyn & \underline{k}_2^{Gdyn} \\ & & & \underline{K}_{33}^{Gdyn} & \underline{K}_{34}^{Gdyn} & \underline{k}_6^{Gdyn} \\ & \text{sym} & & & \underline{K}_{44}^{Gdyn} & \underline{k}_8^{Gdyn} \\ & & & & & \underline{k}_3^{Gdyn} \end{bmatrix}$$

errechnen sich aus den entsprechenden Submatrizen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}_{ij}^{Gdyn} &= \underline{T}_i^T \underline{K}_{ij}^{Ldyn} \underline{T}_j & i = 1, \dots, 4 \text{ und } j = 1, \dots, 4 \\ \underline{k}_i^{Gdyn} &= \underline{T}_i^T \underline{k}_i^{Ldyn} & i = 1, \dots, 8 \\ \underline{k}_i^{Gdyn} &= \underline{k}_i^{Ldyn} & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Sofern bei der Schwingungsberechnung keine statischen Vorlasten berücksichtigt werden müssen, steht somit die Elementmatrix zum Einbau in die Systemmatrix zur Verfügung.

3.1.3 Transformation von globaler Ausgangslage in globale Endlage bei geometrisch nichtlinearer Berechnung

Jedes Stabsystem steht, zumindest infolge seines Eigengewichts, unter statischen Vorlasten. Bei "steifen" Systemen ist der Einfluß dieser Lasten auf das Schwingungsverhalten vernachlässigbar. Bei "weichen" Systemen und bei vorgespannten Konstruktionen kön-

nen Vorlasten jedoch größere Deformationen verursachen, die das Schwingungsverhalten wesentlich verändern. Wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, werden hier vereinfachend nur Knotenlasten zugelassen, wobei dies keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, da bei Elementierungsverfahren verteilte Lasten immer in Knotenlasten umgerechnet werden müssen (siehe Schwarz (1980)). Die Knotenlasten sind im Systemkraftvektor \underline{f} entsprechend dem Systemverschiebungsvektor \underline{d} anzuordnen und bilden mit den statischen Systemmatrizen \underline{K} und \underline{G} bzw. mit der quasistatischen

Systemmatrix

$$\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega) = \underline{K} + \underline{G} \quad \text{wenn } \omega \rightarrow 0$$

das Gleichungssystem

$$\underline{d} = \int \underline{K}_{\text{dyn}}^{-1}(\omega) d\underline{f} \quad \omega \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

aus dem \underline{d} berechnet werden kann. Da sowohl \underline{G} als auch \underline{K} bei geometrisch nichtlinearer Berechnung von der Höhe der Vorlast \underline{f} abhängen, kann das Gleichungssystem nur iterativ gelöst werden. Algorithmen zur Lösung von Gleichung (3.18) sind u. a. bei Chen und Atsuta (1977) zu finden.

Im Systemverschiebungsvektor \underline{d} sind neben den Knotenpunktverschiebungen auch die Knotenpunktverdrehungen gegenüber der Ausgangslage enthalten. Die mittleren Elementverdrehungen

$$\theta_i = \frac{\theta_i(l) + \theta_i(-l)}{2} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

errechnet aus den Knotenverdrehungen bei $x = -l$ und $x = +l$, beschreiben bezüglich der raumfesten Basis \underline{e}_i (siehe auch Bild 3.2), eine Starrkörperdrehung des Elementes, die zusammen mit der Starrkörpertranslation des Elementes

$$V_i = \frac{V_i(l) + V_i(-l)}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

die gesamte Starrkörperbewegung bilden. Die nach Abspaltung der Starrkörperbewegung vom Verschiebungsvektor \underline{d}_G des Elementes verbleibenden Restbewegungen (siehe Anhang A.9) verursachen die Verformungen des Elementes und müssen nach Voraussetzung 4 in Abschnitt 2.2 klein gegenüber den Querschnittsabmessungen sein.

Die dynamische Elementsteifigkeitsmatrix ist also von der globalen Ausgangslage einer Starrkörperdrehung um den Vektor

$$\underline{\theta}^T = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] \quad (3.21)$$

auszusetzen, um die für die Schwingungsberechnung relevante statische Ruhelage zu erreichen. Die zur globalen Endlage noch fehlenden Elementverformung (Restbewegung) wird durch die Vorlastanteile in der geometrischen Matrix näherungsweise erfaßt. Die Starrkörperdrehung des Elementes kann zweckmäßig mit Hilfe des Drehtensors, der aus dem Drehvektors $\underline{\theta}$ gebildet wird, durchgeführt werden (siehe Duschek u. a. (1961)). Werden seine Komponenten in Form einer Matrix angeordnet (siehe Anhang A.9), so wird die gedrehte (mitgehende) lokale Basis $\hat{\underline{b}}_i$ aus der lokalen Basis \underline{b}_i des Ausgangszustandes durch folgende Transformation berechnet

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}_1 \\ \hat{\underline{b}}_2 \\ \hat{\underline{b}}_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{b}} = \underline{\underline{R}} \underline{b} . \quad (3.22)$$

Die Transformation von globalen in lokale Größen entsprechend Gleichung (3.11) lautet nun

$$\hat{\underline{b}} = \hat{\underline{\underline{T}}}_1 \underline{e} \quad (3.23)$$

mit der modifizierten Transformationsmatrix

$$\hat{\underline{\underline{T}}}_1 = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{T}}_1 . \quad (3.24)$$

Das heißt, bei vorgeschalteter geometrisch nichtlinearer Berechnung wird die dynamische Steifigkeitsmatrix aus Elementmatrizen zusammengesetzt, die mit der um eine Starrkörperdrehung modifizierten Matrix $\hat{\underline{\underline{T}}}_1$ anstelle von $\underline{\underline{T}}_1$ transformiert werden. Da die Matrix $\underline{\underline{R}}$ ähnlich wie $\underline{\underline{T}}_1$ orthogonal ist, d. h. $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$, muß auch $\hat{\underline{\underline{T}}}_1$ orthogonal sein, so daß der Transformationsalgorithmus analog Abschnitt 3.1.2 durchgeführt werden kann.

Durch die Wölbfeder c_φ kann die Wirkung einer Wölbsteife beschrieben werden (siehe Bild 3.5).

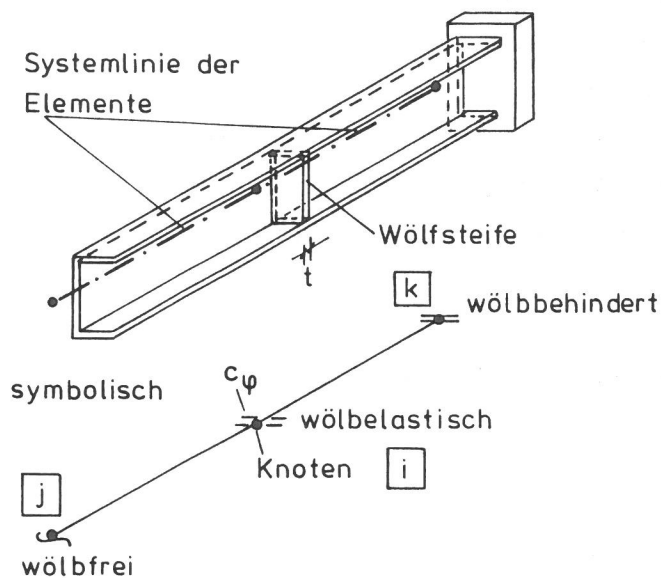


Bild 3.5
Einzelwölbfeder

Nach Wlassow (1964) läßt sich die Wölbfeder näherungsweise ermitteln aus

$$c_\varphi = \frac{E t^3}{12 (1 + \nu)} \cdot 2 F_{\text{Steife}} \quad (3.26)$$

wobei die Geometrie der Steife durch ihre Fläche F_{Steife} und ihre Dicke t beschrieben wird und die Materialeigenschaften durch den Elastizitätsmodul E und die Poissonschen Konstante ν erfaßt sind.

Die kinetische Energie am Knoten i infolge Einzelmassen lautet

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{1}{2} \frac{\dot{d}_G^T}{d_G} \frac{\dot{J}}{J} \frac{\dot{d}_G}{d_G} \quad (3.27)$$

mit dem globalen Geschwindigkeitsvektor $\frac{\dot{d}_G}{d_G}$ am Knoten i und der Einzelmassenmatrix

$$\frac{\dot{J}}{J} = \begin{bmatrix} m & & & & e_{m3}^m & -e_{m2}^m \\ & m & & -e_{m3}^m & & e_{m1}^m \\ & & m & e_{m2}^m & -e_{m1}^m & \\ & & & J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ & & & & J_{22} & -J_{23} \\ \text{sym} & & & & & J_{33} \end{bmatrix}$$

wobei der Massenmittelpunkt der Einzelmasse m exzentrisch zum Knoten i liegen kann (siehe Bild 3.6).

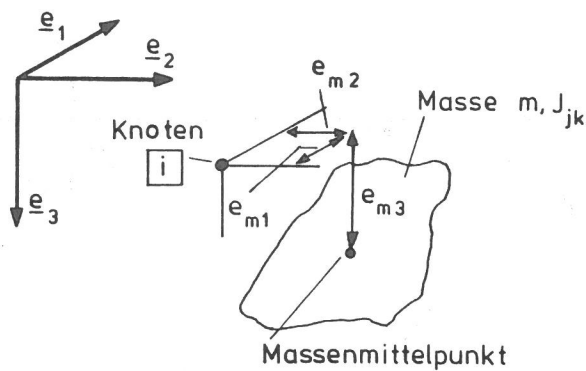


Bild 3.6
Einzelweg- und -drehmassen

Die axialen Massenträgheitsmomente z. B. J_{11} und die Deviationsmomente, z. B. J_{23} , sind auf ein durch den Massenmittelpunkt gehendes, zum globalen System paralleles Koordinatensystem bezogen.

Sofern die Matrizen $\underline{\underline{C}}^i$ und $\underline{\underline{J}}^i$ nicht im globalen, sondern im lokalen Koordinatensystem gegeben sind, ist vor dem Einbau der Matrizen in die Systemmatrix eine Kongruenztransformation analog Gleichung (3.16) bzw. (3.17) durchzuführen.

In der dynamischen Systemmatrix $\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}$ wird die Wirkung von Einzelfedern und -massen berücksichtigt durch Addition der Matrix $(\underline{\underline{C}}^i - \omega^2 \underline{\underline{J}}^i)$ zu den Gliedern, die die dynamische Steifigkeiten am Knoten $\underline{\underline{i}}$ repräsentieren.

3.3 Aufbau der Systemmatrix und Berücksichtigung der Randbedingungen

Der Aufbau der Systemmatrix aus den Elementmatrizen wird nun anhand eines Beispiels gezeigt. Ein aus 4 Elementen bestehender ebener Rahmen aus Stäben mit offenem Querschnitt ist entsprechend Bild 3.7 a gefesselt. Die verbleibenden Freiheitsgrade des Systems sind in Bild 3.7 b angegeben. Die Durchnummerierung der Freiheitsgrade erfolgt mit steigender Knotennummer in der Reihenfolge der Anordnung im Knotenverschiebungsvektor. An Fesselungspunkten sind die zugehörigen Verschiebungsgrößen bekannt, z. B. bei einer Wegfessel in 2-Richtung folgt $V_2 = 0$. Die zu gefesselten Größen gehörenden Spalten und Zeilen der Elementmatrizen werden also nicht in die Systemmatrix eingebaut. Unter der Annahme, daß die Elementmatrizen voll besetzt sind, ist in Bild 3.7 c die Struktur der Systemmatrix dargestellt. Die additiven Beiträge der einzelnen Elemente zur Systemmatrix sind durch entsprechende Symbole gekennzeichnet.

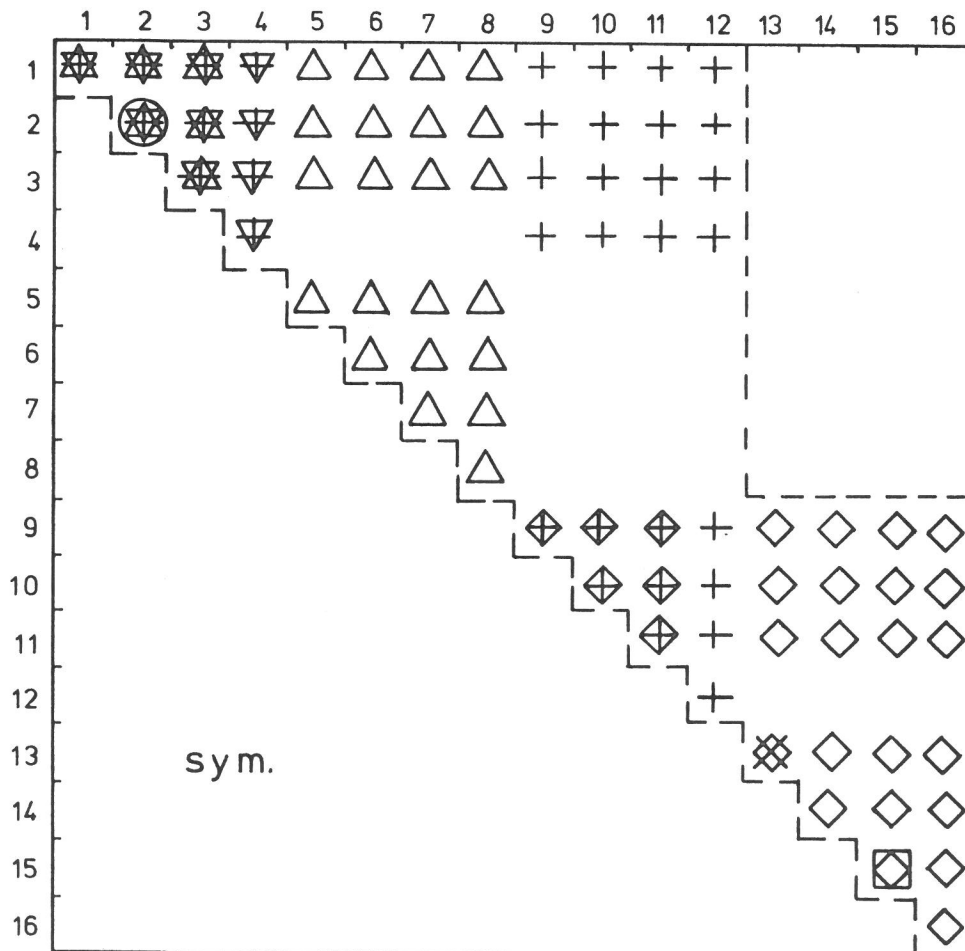
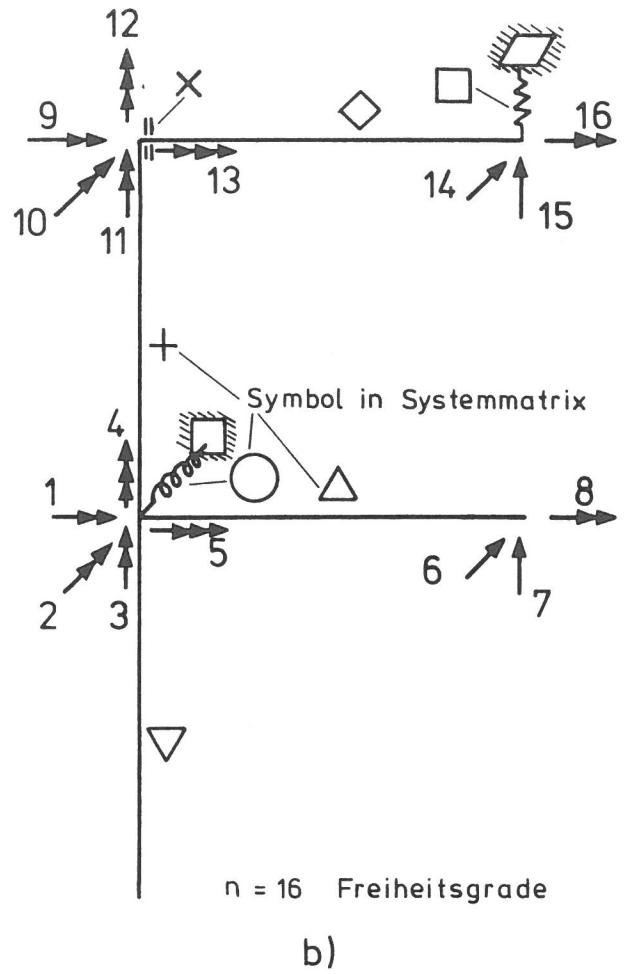
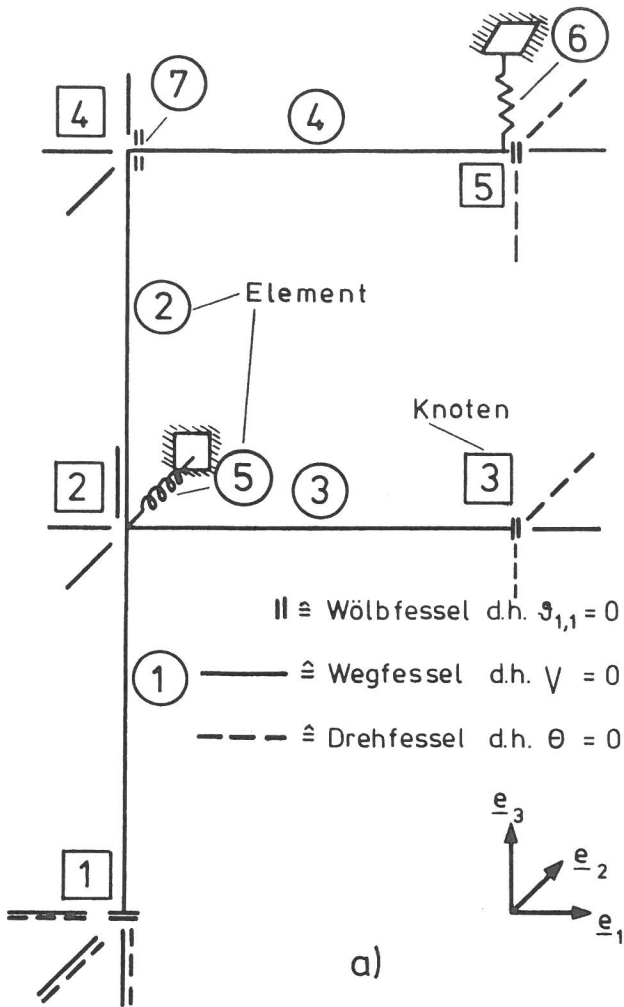


Bild 3.7
 Aufbau der Systemmatrix
 a) Fesselung,
 b) Freiheitsgrade,
 c) Matrixstruktur

Für die weiteren Berechnungen müssen von der Systemmatrix lediglich jeweils die Glieder von der Hauptdiagonalen bis zum letzten von Null verschiedenen Glied der Spalte in ein eindimensionales Feld abgespeichert werden. Diese hüllenorientierte Speichertechnik reduziert den Aufwand z. B. bei der Lösung der EWP erheblich, da unnötige Rechenoperationen vermieden werden. Die Art der Knotennummerierung beeinflusst die das Matrizenprofil bildende Anzahl der abzuspeichernden Matrixglieder. Im oberen Beispiel Bild 3.7 würde durch Vertauschen der Knotennummern 2 und 3 das Profil der Systemmatrix verkleinert. Weitere Einzelheiten bezüglich optimaler Kompilierung der Systemmatrix sind u. a. bei Schwarz (1980) und Bathe u. a. (1976) angegeben.

4 Lösung des impliziten EWP der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix

Die Ermittlung der Eigenwerte (Eigenfrequenzen ω_i) und der zugehörigen Eigenvektoren \underline{d}_i folgt aus dem homogenen Gleichungssystem. Es lautet für das implizite EWP

$$\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega) \underline{d} = \underline{0} , \quad (4.1)$$

wobei $\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega)$ die frequenzabhängige (dynamische) Systemsteifigkeitsmatrix ist, in die alle Randbedingungen eingearbeitet sind. Bei Berücksichtigung von statischen Vorlasten sind die Matrix und der Systemverschiebungsvektor \underline{d} auf die statische Ruhelage zu beziehen.

Die reelle symmetrische Matrix bedingt, daß alle Eigenwerte reell sind. Aus physikalischen Gründen können die Eigenwerte nur $\omega_i \geq 0$ sein. Nulleigenwerte gehören zu Starrkörperbewegungen des mechanischen Systems. Die Eigenvektoren erfüllen die verallgemeinerten Orthogonalitätsrelationen (siehe Abschnitt 4.2).

Nichttriviale Lösungen von Gl. (4.1) existieren nur für den Fall, daß die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det [\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega_i)] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \infty . \quad (4.2)$$

Aus der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix der Ordnung n lassen sich theoretisch unendlich viele Eigenwerte bestimmen. Numerisch sind dem jedoch Grenzen gesetzt. Ein Beispiel in Abschnitt 4.4 zeigt z. B., daß auch der 5·n-te Eigenwert noch sicher berechnet werden kann. Im Vergleich hierzu konnten aus dem mit Hermiteschen Ansätzen (zulässige Ansatzfunktionen) gewonnenen allgemeinen EWP bestenfalls $1/2 \cdot n$ brauchbare Eigenwerte ermittelt werden. Die Eigenwerte ω_i müssen nun nach einem geeigneten Suchalgorithmus eingeschränkt werden. Hierzu ist es jeweils erforderlich, für ein vorgegebenes ω den Determinantenwert zu errechnen:

$$\det [\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega)] = f(\omega) . \quad (4.3)$$

Dies geschieht am effektivsten durch Zerlegung der Matrix mit einem modifiziertem Choleskyverfahren (Bathe u. a. 1976)) gemäß

$$\underline{K}_{\text{dyn}} = \underline{L}(\omega) \underline{D}(\omega) \underline{L}^T(\omega) , \quad (4.4)$$

wobei \underline{L} eine Linksdreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und \underline{D} eine Diagonalmatrix ist. Die Determinante von Gl. (4.3)

errechnet sich schließlich mit

$$\det \begin{bmatrix} \underline{L} & \underline{D} & \underline{L}^T \end{bmatrix} = \det \underline{L} \det \underline{D} \det \underline{L}^T = \det \underline{D}$$

zu

$$f(\omega) = \det \left[\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega) \right] = \prod_{i=1}^n d_{ii}(\omega) , \quad (4.5)$$

wobei d_{ii} die Diagonalelemente von \underline{D} sind und n die Ordnung der Matrix bezeichnet.

Wie bereits in Abschnitt 1.3 ausgeführt, bereiten bei den früheren Suchalgorithmen vor allem jene Nullstellen der Determinante Gl. (4.2) Schwierigkeiten, die zu mehrfachen Eigenwerten gehören. Das Gleiche gilt für sehr eng aufeinanderfolgende Nullstellen. Der im folgenden vorgestellte Algorithmus findet gezielt die Eigenwerte in einem gegebenen Intervall. Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiel erläutert, an dem auch die numerische Problematik kurz aufgezeigt wird. Einige größere Beispiele dokumentieren die Leistungsfähigkeit des Verfahrens.

4.1 Berechnung der Eigenwerte ω_i mit Sturmschen Ketten

Da das allgemeine EWP mit algebraischen Matrizen gebildet wird, die als erste Glieder einer Reihenentwicklung der exakten dynamischen Steifigkeitsmatrix verstanden werden können (siehe Gl. (2.109)), liegt es nahe, Lösungsalgorithmen, die sich beim allgemeinen EWP bewährt haben, auf das implizite EWP zu übertragen.

Von Peters und Wilkinson (1969) stammt ein später von Gupta (1972, 1973) und Schwarz (1977) modifizierter Algorithmus, der auf der Tatsache beruht, daß die Folge der führenden Hauptabschnittsdeterminanten der symmetrischen Matrix $\underline{K} - \omega^2 \underline{M}$ eine Sturmsche Kette bilden, allerdings nur im schwachen Sinn, indem aufeinanderfolgende Determinanten für einen gegebenen Wert ω^2 verschwinden können. Zur numerisch sicheren Berechnung der Hauptabschnittsdeterminanten sind u. U. partielle Pivotisierungen erforderlich, die zu einer gewissen Erweiterung des Profils der Matrix führen, wobei jedoch die Symmetrie der Matrix erhalten werden kann (Schwarz (1980)).

Beim impliziten EWP nutzte Wittrick u.a. (1971) erstmals die Eigenschaften der Sturmschen Kette zur Eigenwertberechnung. Als wesentlichen Unterschied gegenüber dem algebraischen EWP tre-

ten beim impliziten EWP Polstellen in der Koeffizientendeterminante auf. Diese Unstetigkeitsstellen sind jedoch nicht vom mechanischen System abhängig, sondern nur von der Art der Elementierung. Polstellen treten genau dort auf, wo die Elemente bei beidseitiger Einspannung Einzelstabeigenfrequenzen besitzen. Wird das für die Polstellen verantwortliche Element unterteilt, z. B. in der Mitte, so ändert sich die Lage der Polstelle entsprechend der neuen Einzelstabeigenfrequenz der halbsolangen neuen Elemente. Polstellen würden sich so auf Kosten einer aufwendigeren Elementierung in den höheren Frequenzbereich verschieben lassen. Dies ist im allgemeinen jedoch nicht erforderlich, da die Lagen der Polstellen vorabbestimmt werden können (siehe Anhang A.10). Hierzu müssen die Nullstellen der Nenner (z. B. N_1 in Gl. (2.22), N_2 in Gl. (2.47) usw.) von allen Elementen des mechanischen Systems bestimmt werden, da bei diesen Nullstellen die Glieder der entsprechenden Elementmatrix über alle Grenzen wachsen und so die Polstellen in der Systemmatrix verursachen.

Mit Gleichung (4.5) kann die Folge der führenden Hauptabschnittsdeterminanten der frequenzabhängigen Matrix angegeben werden durch

$$f_r(\omega) = \prod_{i=1}^r d_{ii}(\omega) \quad 1 \leq r \leq n . \quad (4.6)$$

Wird per Definition

$$f_0(\omega) < 0$$

gesetzt und für die Funktionen $f_r(\omega)$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ im Intervall $\omega_u \leq \omega \leq \omega_0$ Stetigkeit gefordert, so bildet die Folge von reellen Funktionen (Hauptabschnittsdeterminanten) $f_0(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega) \dots f_{n-1}(\omega)$, $f_n(\omega) = f(\omega)$ in diesem Intervall eine Sturmische Kette im schwachen Sinn, da mehrfache Nullstellen von $f(\omega)$ nicht ausgeschlossen werden sollen.

Die wichtigste Eigenschaft einer Sturmischen Kette ermöglicht die Berechnung der Anzahl q_{0-u} reeller Nullstellen von $f(\omega)$ im Intervall $\omega_u \leq \omega \leq \omega_0$ nach der Beziehung

$$q_{0-u} = q_0 - q_u , \quad (4.7)$$

wobei $q_u = q(\omega_u)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f_0(\omega_u)$, $f_1(\omega_u) \dots f_n(\omega_u)$ und $q_0 = q(\omega_0)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f_0(\omega_0)$, $f_1(\omega_0) \dots f_n(\omega_0)$ bezeichnen. Die Intervallgrenzen ω_u und ω_0 sollen vorerst nicht mit Nullstellen von $f(\omega)$ zusammenfallen. Weiterhin darf voraussetzungsgemäß keine Polstelle im Intervall vorhanden sein.

Da die Anzahl von Vorzeichenwechsel z. B. $q(\omega_0)$ identisch mit der Anzahl der negativen Diagonalelemente $d_{ii}(\omega_0)$ in Gl. (4.6) bzw. (4.5) ist, muß zur Berechnung von q_{0-u} die Systemmatrix lediglich für ω_0 und ω_u jeweils nach Gl. (4.4) zerlegt, und die Differenz der Anzahl von negativen d_{ii} festgestellt werden.

Für den Fall, daß z. B. ω_0 m-fache Nullstelle von $f(\omega)$ ist, sind m Diagonalelemente $d_{ii}(\omega_0)$ in Gl. (4.5) Null.

4.1.1 Allgemeine Erläuterung des Algorithmus

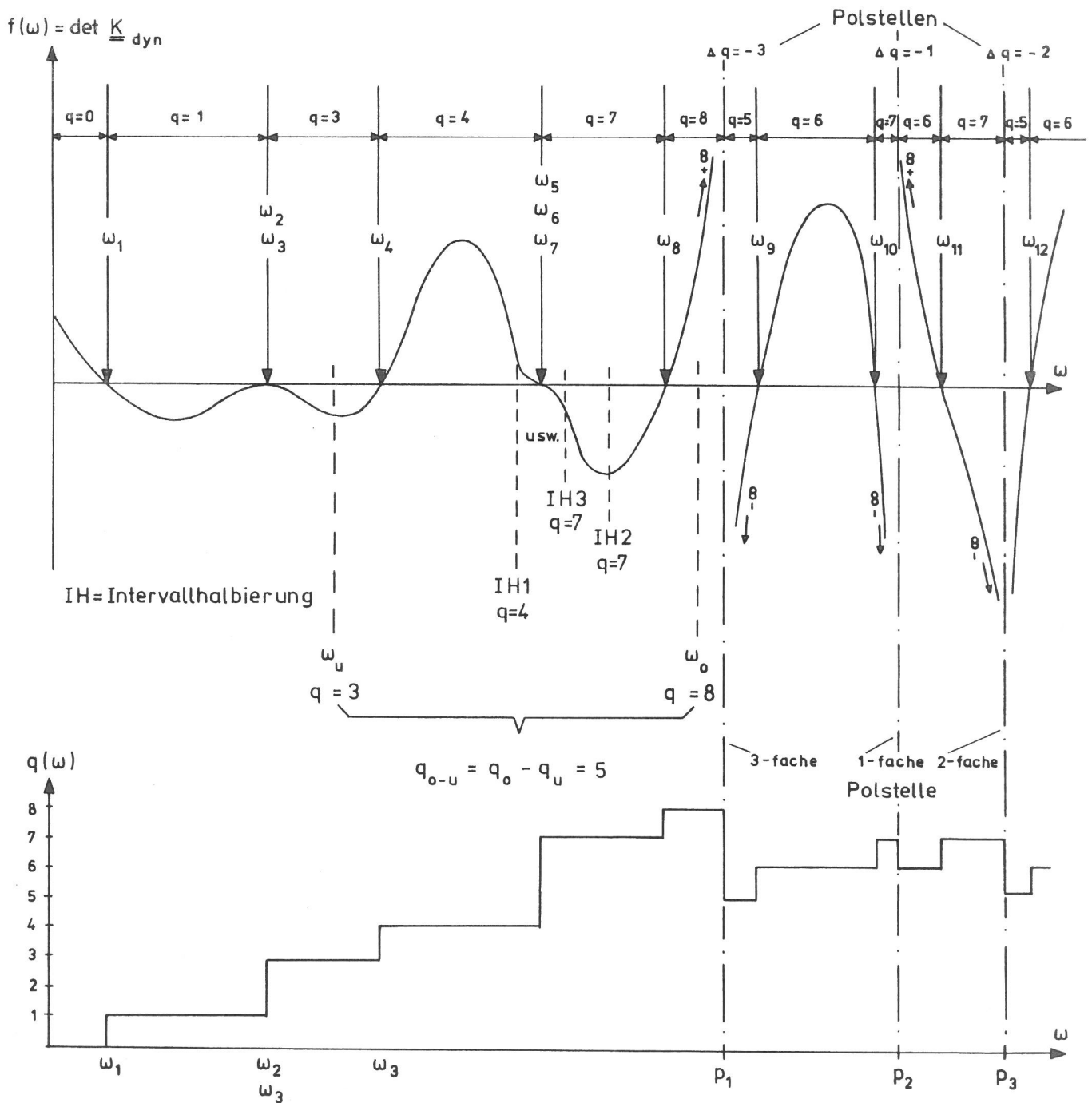


Bild 4.1

Determinantenverlauf und Lösungsstrategie beim impliziten EWP

Im Bild 4.1 ist exemplarisch der Verlauf einer Koeffizienten-determinante von $K_{\text{dyn}}(\omega)$ dargestellt. In einem vorgegebenen Intervall $\omega_u \leq \omega \leq \omega_o$, in dem vorerst keine Polstelle liegen soll, können die Eigenwerte nach der Intervallhalbierungsmethode (Bisektionsmethode) mit Hilfe der Sturmschen Kette gezielt eingeschränkt werden. Liegt ω_o unterhalb der ersten Polstelle p_1 , kann aus der Anzahl q negativer Diagonalelemente in Gl. (4.5) sofort darauf geschlossen werden, daß q Eigenwerte ω_i im Bereich zwischen $0 < \omega \leq \omega_o$ liegen. Sofern keine Nulleigenwerte vorhanden sind, ist die Matrix unterhalb des ersten Eigenwertes ($\omega < \omega_1$) positiv definit, d. h. die Determinante und alle d_{ii} in Gleichung (4.5) sind größer Null, folglich ist $q=0$. Für den Fall, daß für $\omega=0$ eine m -fach Nullstelle vorliegt, ergibt sich $q=m$ für $\omega \rightarrow 0$.

Zur Isolierung der Eigenwerte im Intervall $\omega_u \leq \omega \leq \omega_o$ werden nun im ersten Schritt Intervallhalbierungen durchgeführt, bis in jedem Teilintervall nur noch ein Eigenwert enthalten ist. Bei mehrfachen Eigenwerten muß die Intervallhalbierung bis zur gewünschten Toleranzgrenze weitergeführt werden. Da die Intervallhalbierungsmethode lediglich linear konvergiert, ist es sinnvoll, bei Teilintervallen mit nur einem Eigenwert zu dessen weiterer Lokalisierung auf höher konvergente Verfahren umzusteigen. Die hier verwendete Sekantenvariante der "regula falsi" besitzt eine gebrochene Konvergenzordnung, konvergiert jedoch in hinreichend kleiner Umgebung der Nullstelle quadratisch (Stoer (1976)). Um die numerische Stabilität der Sekanteniteration zu gewährleisten, wird nun im zweiten Schritt in jedem Teilintervall mit nur einem Eigenwert nochmals ein Intervallhalbierungsschritt durchgeführt. Liefert die nun folgende Sekanteniteration einen Schätzwert für die Nullstelle, der außerhalb der bereits gefundenen Grenzen liegt, wird sie wiederum durch einen Intervallhalbierungsschritt ersetzt. Beim Erreichen der gewünschten Toleranzgrenze, bzw. beim Überschreiten der vorgegebenen maximalen Iterationsschritte, wird die Berechnung abgebrochen.

Weitere Methoden zur Konvergenzbeschleunigung bei der Nullstellensuche (siehe u. a. Stoer(1976)) sind bei dem hier behandelten impliziten EWP durchaus sinnvoll, da der Mehraufwand für die Berechnung eines besseren Schätzwertes durch eine geringere Anzahl an Iterationsschritten bei weitem wieder wettgemacht werden kann.

An Polstellen von $f(\omega)$ wächst der Determinantenwert über alle Grenzen. Die Anzahl q der negativen Diagonalelemente in Gl. (4.5) nimmt beim Passieren der Polstellen (siehe Bild 4.1) entsprechend ihrer Vielfachheit um Δq ab. Zwischen zwei benachbarten Polstellen nimmt q entsprechend der in diesem Intervall befindlichen Eigenwerte zu. Aus programmiertechnischer Sicht wäre es wünschenswert, auf die Vorbestimmung der Polstellen verzichten zu können. Die folgende Erweiterung des oben beschriebenen Algorithmus soll dies ermöglichen.

Ein vorgegebenes Intervall $\omega_u \leq \omega \leq \omega_o$, in dem auch Polstellen liegen können, wird im ersten Schritt in k gleiche Abschnitte unterteilt. Hierbei sollte k so gewählt werden, daß die Teilintervalle $\Delta\omega = (\omega_o - \omega_u)/k$ in etwa dem kleinsten zu erwartenden Abstand der Polstellen entspricht (Bild 4.2).

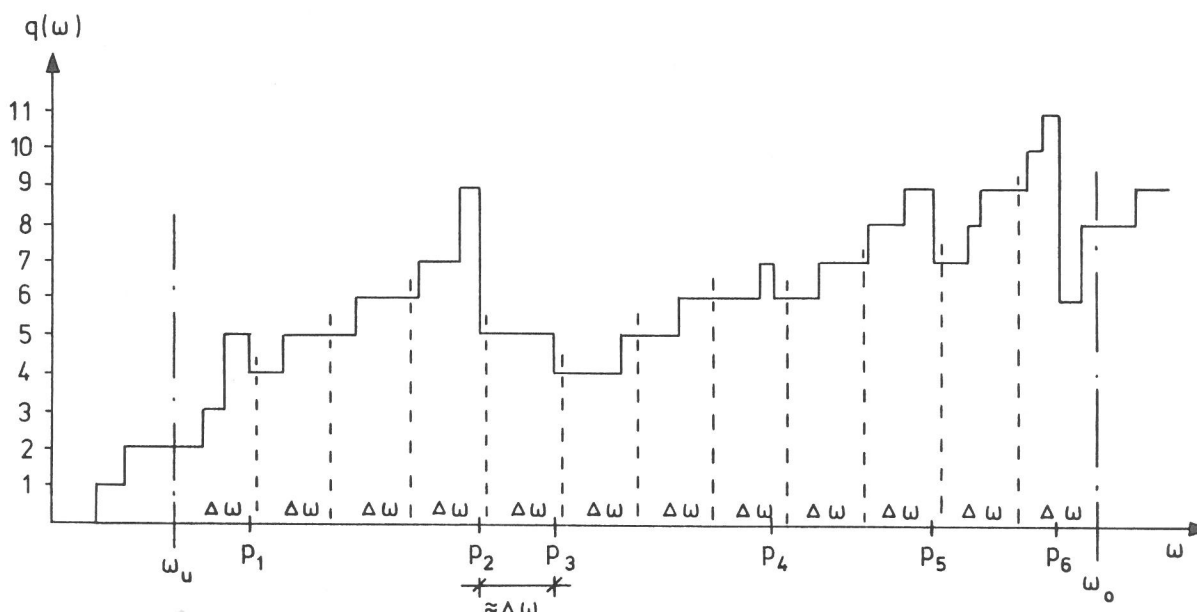


Bild 4.2

Wahl eines gleichmäßigen Rasters $\Delta\omega$ in Abhängigkeit vom kleinsten Polstellenabstand.

Im zweiten Schritt werden in jedem Teilintervall $\Delta\omega$ die Eigenwerte und Polstellen nach der Intervallhalbierungsmethode eingeschränkt. Hierbei kann bei der Isolierung der Polstellen auf kein konvergenzbeschleunigendes Verfahren umgestiegen werden, vielmehr muß bis zur gewünschten Toleranz die Intervallhalbierungsmethode beibehalten werden. Der dritte Schritt entspricht nun wieder völlig dem zweiten Schritt des oben beschriebenen Verfahrens zur Lokalisierung eines einfachen Eigenwertes.

Abschließend sei noch auf zwei Probleme hingewiesen:

1. Fällt ein Eigenwert ω_i des Systems mit einer Polstelle p_i zusammen ($\omega_i = p_i$), so kann dies aus $q(\omega)$ nur erkannt werden, wenn die Vielfachheit der Polstelle bekannt ist.
2. Werden die Polstellen nicht vorab ermittelt und wird $\Delta\omega$ zu groß gewählt, so kann an den Intervallgrenzen von $\Delta\omega$ die Größe q jeweils gleich sein, obwohl k Eigenwerte und k Polstellen in dem Intervall vorhanden sind.

Die Vielfachheit einer Polstelle verursacht z. B. bei Längsschwingungselementen i. a. jeweils 1-fache Polstellen und bei Torsionselementen mit Verwölbung jeweils 2-fache Polstellen. Die Anzahl der Vielfachheit kann oft nur bei einfachen mechanischen Systemen sofort erkannt werden. Deshalb ist es besser, zur Kontrolle unmittelbar vor und nach der Polstelle die Werte der Diagonalelemente mit denen von Gl. (4.5) zu vergleichen. Dabei zeichnet sich eine Polstelle dadurch aus, daß ein vergleichsweise großes negatives d_{ii} beim Überschreiten der Polstelle zu einem großen positiven d_{ii} wird, ohne daß das unmittelbar davorliegende $d_{i-1,i-1}$ einen Nulldurchgang verzeichnet. Bei einer m -fachen Polstelle tritt dies bei m Diagonalelementen auf. Im Gegensatz hierzu sind Eigenwerte des Systems dadurch gekennzeichnet, daß ein d_{ii} einen Nulldurchgang besitzt, ohne daß gleichzeitig das nachfolgende $d_{i+1,i+1}$ eine Polstelle aufweist. Auch dieses Verhalten tritt bei m -fachen Eigenwerten gleichzeitig bei m Diagonalelementen auf. Somit können auch an Polstellen Eigenwerte des Systems erkannt werden. Sind die Polstellen jedoch vorab nicht bestimmt worden, kann das oben erwähnte 2. Problem durchaus auftreten. Bild 4.2 zeigt z. B., daß in dem Teilintervall $\Delta\omega$, in dem p_4 bzw. p_5 liegt, jeweils $q(\omega)$ an den Intervallgrenzen gleich sein kann. Deshalb sollte jedes Intervall $\Delta\omega$ auch bei gleichem $q(\omega)$ an den Grenzen mindestens noch einem Intervallhalbierungsschritt unterworfen werden.

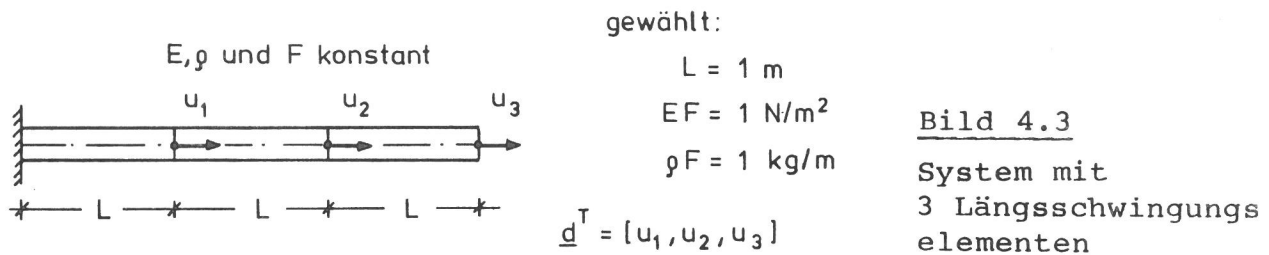
4.1.2 Das implizite EWP mit $\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega)$ im Vergleich zum allgemeinen EWP mit $\underline{K} - \omega^2 \underline{M}$ anhand eines einfachen Beispiels

Das implizite EWP Gl. (4.1) wird nun im Vergleich zum allgemeinen EWP

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{d} = \underline{0} \quad (4.8)$$

anhand eines längsschwingenden Kragträgers dargestellt. Hierzu

wird das mechanische System entsprechend Bild 4.3 diskretisiert.



Die Elementmatrizen sind dem Anhang A.2 zu entnehmen. Mit den in Bild 4.3 gewählten Abmessungen und Fesselungen des Systems ergeben sich folgende Systemmatrizen der Ordnung $n=3$:

$$\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ & 2 & -1 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \text{sym} & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2\omega \cos \omega}{\sin \omega} & -\frac{\omega}{\sin \omega} & \\ & \frac{2\omega \cos \omega}{\sin \omega} & -\frac{\omega}{\sin \omega} \\ \text{sym} & & \frac{\omega \cos \omega}{\sin \omega} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Wird die Determinante der Systemmatrix beim allgemeinen EWP analog Gl. (4.4) und (4.5) für eine Folge von ω -Werten

$$f(\omega) = \det \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right) = \det \left(\underline{\underline{L}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{L}}^T \right) = \prod_{i=1}^n d_{ii}(\omega) \quad (4.11)$$

gebildet, so können die $d_{11}(\omega)$, $d_{22}(\omega)$, $d_{33}(\omega)$ und $f(\omega) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}$ graphisch dargestellt werden (Bild 4.4). Da die Systemmassenmatrix $\underline{\underline{M}}$ in Gl. (4.9) positiv definit ist, hat die Determinante $f(\omega)$ entsprechend der Ordnung $n=3$ reelle Nullstellen ω_1 , ω_2 und ω_3 . Diese werden hier jeweils durch die Nullstellen von d_{33} hervorgerufen. Nulldurchgänge der anderen d_{ii} z. B. bei d_{22} verursachen beim nachfolgenden d_{33} Pole, wobei die Determinante $f(\omega)$ endlich bleibt. Dies wird durch den Zerlegungsalgorithmus von Gl. (4.11) bewirkt, da z. B. bei der Berechnung von d_{33} eine Division mit

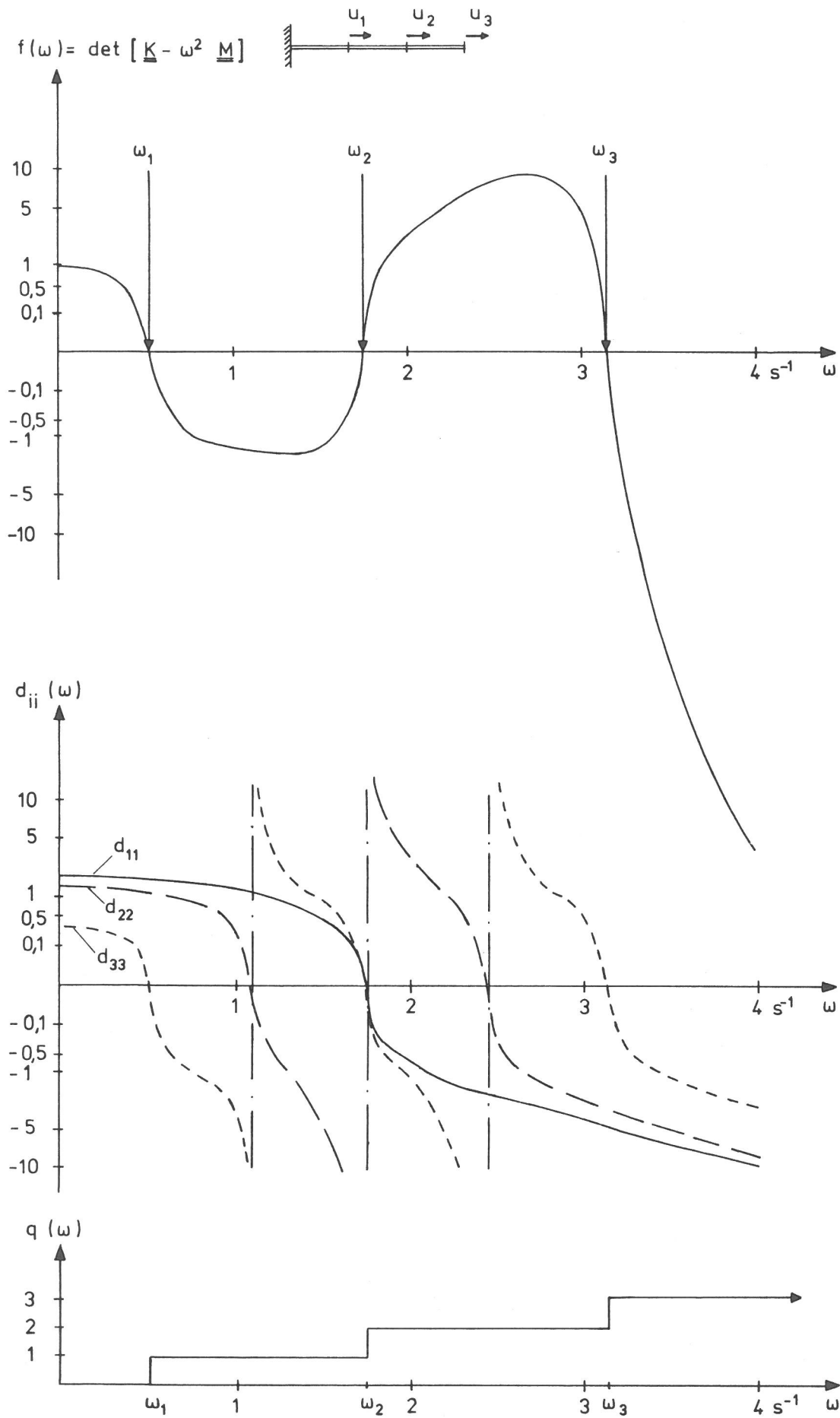
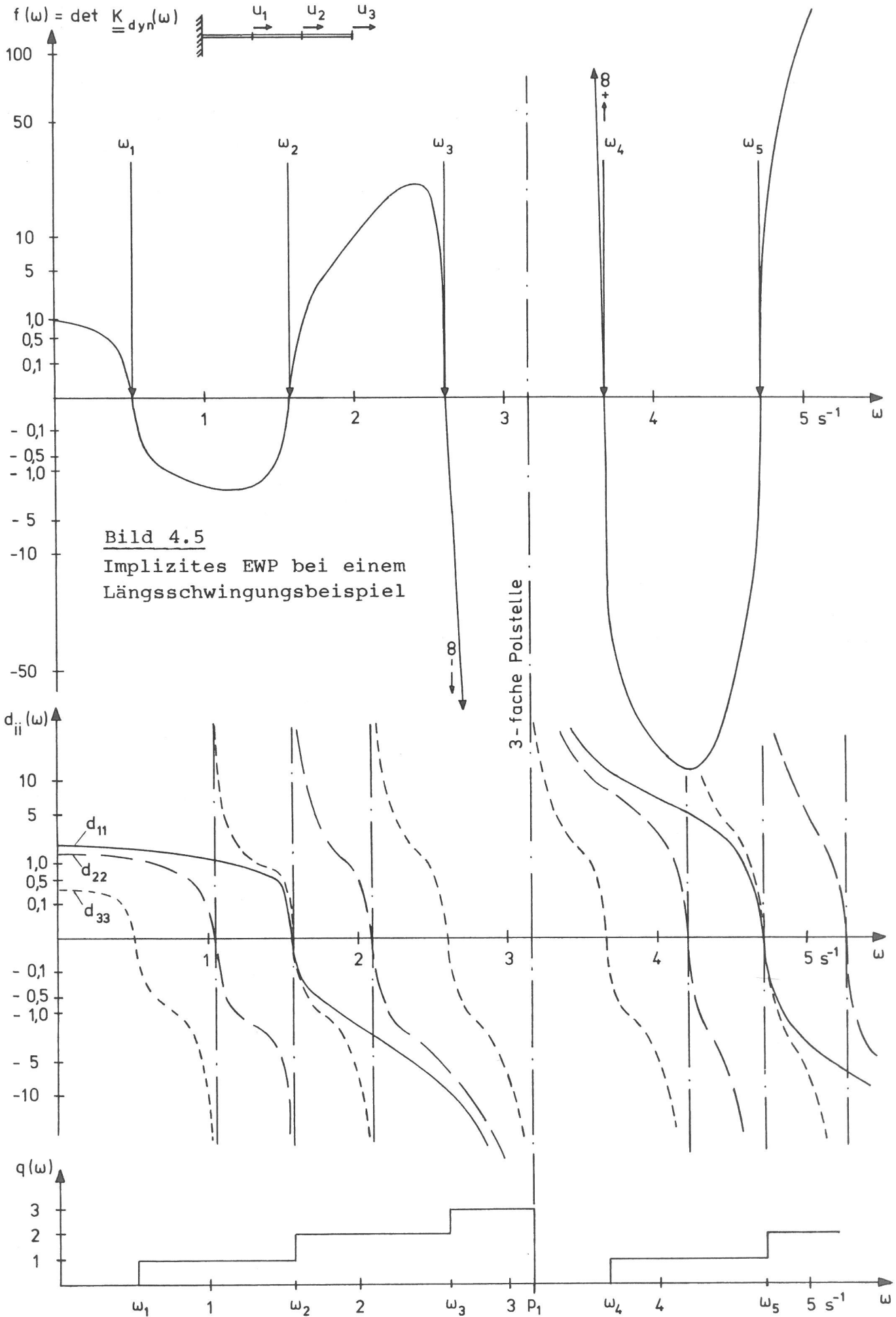


Bild 4.4

Allgemeines EWP bei einem Längsschwingungsbeispiel



d_{22} erforderlich ist. Wie dieses numerische Problem umgangen werden kann, wird in Abschnitt 4.3 erläutert. Die Anzahl $q(\omega)$ bleibt beim Passieren dieser Stelle jedoch konstant. Physikalisch läßt sich z. B. der erste Nulldurchgang von d_{22} als erste Eigenfrequenz eines versteiften Systems interpretieren, in dem die Verschiebung u_3 gefesselt worden ist ($u_3=0$).

Zur Berechnung der exakten Eigenfrequenzen aus dem impliziten EWP wäre eigentlich eine Unterteilung des Systems in 3 Elemente entsprechend Bild 4.3 nicht erforderlich. Um beide Verfahren jedoch direkt vergleichen zu können, wurden die Determinante $f(\omega)$ sowie die d_{ii} der dynamischen Steifigkeitsmatrix Gl. (4.10) entsprechend Gl. (4.5) für eine Folge von ω -Werten gebildet und in Bild 4.5 graphisch dargestellt. Der Vergleich mit Bild 4.4 zeigt, daß sich bis $\omega \approx \omega_3$ qualitativ der gleiche Verlauf, einstellt. Vor allem ist bis zu dieser Stelle ($\omega = \omega_0$) aus der Anzahl q_0 der negativen Diagonalelemente bei beiden Verfahren sofort auf die Anzahl der Eigenfrequenzen zu schließen, die im Intervall $0 \leq \omega \leq \omega_0$ liegen. Hinter ω_3 tritt in Bild 4.5 als nächstes eine Polstelle in der Determinante von $\underline{K}_{\text{dyn}}$ auf. Diese wird durch die erste Einzelstabeigenfrequenz eines beidseitig eingespannten Stabes der Länge L verursacht und liegt bei der ersten Nullstelle des Nenners der Elementmatrix. Für die hier verwendeten Elementabmessungen (Bild 4.3) werden die Einzelstabeigenfrequenzen durch die Nullstellen von $\sin \omega$ gebildet (vgl. Gl. (4.10)). Da alle 3 Elemente gleichzeitig ihre Einzelstabeigenfrequenz durchlaufen, bildet sich hier bei $\omega = \pi$ eine 3-fache Polstelle aus, d. h. 3 vergleichsweise große negative Diagonalelemente d_{ii} werden zu großen positiven d_{ii} , ohne, daß das jeweils unmittelbar davorliegende $d_{i-1,i-1}$ einen Nulldurchgang verzeichnet. Damit nimmt q an dieser Polstelle um 3 ab. Bis zur nächsten Polstelle bei $\omega = 2\pi$ (in Bild 4.5 nicht mehr dargestellt) nimmt q entsprechend den Eigenfrequenzen ω_4 bis ω_6 wieder zu. Dieses Verhalten setzt sich zwischen den weiteren Polstellen analog fort. Die relativen Minima und Maxima von $f(\omega)$ wachsen dabei ungefähr mit dem Faktor ω^3 .

Eine Gegenüberstellung der Eigenwerte aus beiden Verfahren zeigt Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1 Eigenwerte des Längsschwingungsbeispiels

i	implizites EWP	allgemeines EWP	
	ω_i exakt in s^{-1}	ω_i exakt in s^{-1}	rel. Fehler in % 1)
1	0,5236	0,5296	1,15
2	1,5708	1,7321	10,27
3	2,6180	3,1422	20,02
4	3,6652	-	
5	4,7124		

1)
$$\frac{\omega_i - \omega_i \text{ exakt}}{\omega_i \text{ exakt}} \cdot 100$$

Die Matrizen des allgemeinen EWP Gl. (4.9) ergeben sich entweder aus der Reihenentwicklung von Gl. (4.10) oder durch Verwendung "zulässiger Ansatzfunktionen", die hier aus linearen Verschiebungsverteilungen innerhalb des Elements bestehen. Die damit gewonnene Genauigkeit der Eigenwerte in Tabelle 4.1 dürfte für technische Anwendungsfälle nur für ω_1 ausreichend sein. Weitere Hinweise zur Diskretisierungsproblematik sind in Abschnitt 5 zu finden. Es wird dort auch ein Abschätzungsverfahren für den noch brauchbaren Bereich der Eigenwerte gegeben.

4.2 Berechnung der Eigenvektoren aus $\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega_i)\underline{d}_i = \underline{0}$

Bei reellen symmetrischen Matrizen sind nicht nur die Eigenwerte ω_i , sondern auch die Eigenvektoren \underline{d}_i reell:

$$\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega_i)\underline{d}_i = \underline{0} \quad (4.12)$$

Weiterhin genügen die Eigenvektoren den verallgemeinerten Orthogonalitätsrelationen, die in Analogie zum allgemeinen EWP für das implizite EWP wie folgt lauten:

$$\underline{d}_i^T [\underline{K}(\omega_i, \omega_j) + \underline{G}(\omega_i, \omega_j)] \underline{d}_j = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ k_{\text{gen},i} & j = i \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\underline{d}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_j)] \underline{d}_j = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ m_{\text{gen},i} & j = i. \end{cases} \quad (4.14)$$

Hierbei wird z. B. die Systemmassenmatrix in Gl. (4.14) aus Ele-

mentmatrizen \underline{M}_e zusammengesetzt, die mit frequenzabhängigen Ansatzfunktionen (Abschnitt 2.2.1) gebildet werden. Die Elementsubmatrix z. B. für die Biegung in 2-Richtung ergibt sich nach Gl. (2.70) zu

$$\underline{M}_e^{22}(\omega_i, \omega_j) = \int_{-\ell}^{\ell} \underline{h}_2(x, \omega_i) \mathcal{F}^T \underline{h}_2(x, \omega_j) dx, \quad (4.15)$$

wobei die Integrationen über x mit den Integralwerten von Anhang A.4 exakt ausführbar sind.

Für die Berechnung der Eigenvektoren wird die Gl. (4.12) geringfügig verändert. Die Nullforderung der Koeffizientendeterminante in Gl. (4.2) ist gleichbedeutend damit, daß die Systemmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}$ für ω_i singular wird. Für m -fache Eigenwerte erniedrigt sich der Rang der Matrix auf $r=n-m$. Im ersten Schritt werden nur 1-fache Eigenwerte vorausgesetzt. Da die Eigenvektoren durch die Singularität der Matrix jeweils nur bis auf eine Konstante bestimmbar sind, wird ein Glied im Vektor \underline{d}_i mit dem Wert "1" angenommen. Hierfür wird das k -te Glied in \underline{d}_i ausgewählt, wobei nach Durchführung des Zerlegungsalgorithmus Gl. (4.5) die Nullstelle in der Determinante gerade vom Diagonalelement $\underline{d}_{kk}(\omega_i)=0$ verursacht worden ist. Somit wird gewährleistet, daß nicht zufällig ein Wert mit "1" vorgegeben wird, der im Eigenvektor eigentlich Null wäre. Vielmehr ist das k -te Glied das letzte von Null verschiedene im Eigenvektor \underline{d}_i . In Gl. (4.12) wird also die k -te Spalte mit dem vorgegebenen Wert 1 multipliziert. Diese Spalte kann als "Belastungsvektor" \underline{k}_k auf die rechte Seite gebracht werden, und nach Streichung der k -ten Zeile steht ein reduziertes Gleichungssystem

$$\underline{K}_{\text{dyn}}^{\text{red}}(\omega_i) \underline{d}_i^{\text{red}} = -\underline{k}_k^{\text{red}} \quad (4.16)$$

mit regulärer Matrix der Ordnung $n-1$ für die Berechnung der noch unbekanntes Glieder in \underline{d}_i zur Verfügung. Diese Vorgehensweise entspricht dem aus der Statik bekannten Fall, daß die Verschiebungen des Systems infolge einer vorgeschriebenen Verschiebung am k -ten Freiheitsgrad berechnet werden soll. Rechentechnisch wird diese Aufgabe jedoch nicht mit Gl. (4.16) gelöst, sondern viel einfacher durch folgende Manipulation. In Gl. (4.12) wird lediglich das k -te Diagonalelement

$$\bar{k}_{kk} = \bar{M} \quad (\bar{M} \gg k_{ij}, \text{ z. B. } \bar{M}=10^{30}) \quad (4.17)$$

gesetzt und der Nullvektor wird durch den Vektor \underline{f}_k ersetzt, der

sich vom Nullvektor nur durch

$$\underline{f}_k = \bar{M} \quad (4.18)$$

unterscheidet.

Damit ist die Matrix wieder regulär und beim Lösen des Gleichungssystems

$$\bar{K}_{\text{dyn}}(\omega_i) \underline{d}_i = \underline{f}_k \quad (4.19)$$

ergibt sich im Eigenvektor $\underline{d}_k=1$. Über die Konstante im Eigenvektor wird nun im Zuge einer vernünftig zu wählenden Normierung verfügt. Wird die generalisierte Masse $m_{\text{gen},i}$ nach Gl. (4.14) berechnet und

$$\hat{\underline{d}}_i = \frac{1}{\sqrt{m_{\text{gen},i}}} \underline{d}_i \quad (4.20)$$

gesetzt, so ergibt sich ein bezüglich der Massenmatrix normierter Eigenvektor

$$\hat{\underline{d}}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \hat{\underline{d}}_i = 1 \quad (4.21)$$

Diese Normierungsmethode wird in Abschnitt 6 nachträglich motiviert.

Im zweiten Schritt werden nun auch 2-fache Eigenwerte $\omega_{i+1}=\omega_i$ zugelassen und die zugehörigen Eigenvektoren, die einen zweidimensionalen Unterraum aufspannen, berechnet. Beim Zerlegungsalgorithmus Gl. (4.5) wird die 2-fache Nullstelle in der Determinante durch die Diagonalelemente $\underline{d}_{kk}(\omega_i)=0$ und $\underline{d}_{pp}(\omega_i)=0$ verursacht. Der Rang der Matrix ist folglich $r=n-2$. Analog Gl. (4.17) werden nun zwei Diagonalelemente in \bar{K}_{dyn} gesetzt zu

$$\left. \begin{array}{l} \bar{k}_{kk} = \bar{M} \\ \bar{k}_{pp} = \bar{M} \end{array} \right\} (\bar{M} \gg k_{ij}) \quad (4.22)$$

Mit der nunmehr wieder regulären Matrix $\bar{K}_{\text{dyn}}(\omega_i)$ läßt sich aus Gl. (4.19) der Vektor \underline{d}_i berechnen, wobei im Eigenvektor $\underline{d}_k=1$ und $\underline{d}_p=0$ als Folge der Manipulationen Gl. (4.18) und (4.22) erhalten wird. Der zweite Eigenvektor $\tilde{\underline{d}}_{i+1}$ wird mit dem Vektor \underline{f}_p berechnet, der bis auf

$$\underline{f}_p = \bar{M}$$

überall mit Nullen besetzt ist. Analog Gl. (4.19) folgt

$$\bar{K}_{\text{dyn}}(\omega_i) \tilde{\underline{d}}_{i+1} = \underline{f}_p \quad (4.23)$$

wobei sich in \tilde{d}_{i+1} $\tilde{d}_k=0$ und $\tilde{d}_p=1$ errechnet. Damit sind zwei linear unabhängige Vektoren des 2-dimensionalen Unterraums gefunden, die jedoch untereinander i. a. noch nicht der Orthogonalitätsrelation Gl. (4.14) genügen. Die "Säuberung" des zweiten Eigenvektors von störenden Komponenten des ersten Vektors erfolgt durch

$$\underline{d}_{i+1} = \tilde{d}_{i+1} - c \underline{d}_i \quad (4.24)$$

mit

$$c = \frac{\underline{d}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \tilde{d}_{i+1}}{\underline{d}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \underline{d}_i}$$

und nach entsprechender Normierung analog Gl. (4.20) gilt

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \hat{d}_{i+1} &= 0 \\ \hat{d}_j^T [\underline{M}(\omega_j, \omega_j)] \hat{d}_j &= 1 \quad \text{für } j=i, i+1. \end{aligned} \right\} (4.25)$$

Die Orthogonalität nach Gl. (4.14) zu anderen Eigenvektoren, die zu Eigenwerten $\omega_j \neq \omega_i$ gehören, ist a priori erfüllt.

Die Verallgemeinerung auf die Berechnung von Eigenvektoren, die zu m-fachen Eigenwerten gehören, ist sofort zu erkennen. Der Vollständigkeit halber sei noch nachgewiesen, daß die Vektoren \tilde{d}_i bis \tilde{d}_{i+m-1} mit ihren jeweils m-1 Nullen keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellen. Zur Entlastung der Schreibweise möge angenommen werden, daß m=3 sei. Mit den voraussetzungsgemäß linear unabhängigen Eigenvektoren \hat{d}_i , \hat{d}_{i+1} und \hat{d}_{i+2} läßt sich z. B. für den analog Gl. (4.23) berechneten Vektor immer eine Linearkombination der Form

$$\tilde{d}_{i+1} = \hat{\alpha}_1 \hat{d}_i + \hat{\alpha}_2 \hat{d}_{i+1} + \hat{\alpha}_3 \hat{d}_{i+2} \quad (4.26)$$

finden, wobei die Linear-Koeffizienten $\hat{\alpha}_1$ bis $\hat{\alpha}_3$ durch das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \tilde{d}_k^{i+1} = 0 &= \hat{\alpha}_1 \hat{d}_k^i + \hat{\alpha}_2 \hat{d}_k^{i+1} + \hat{\alpha}_3 \hat{d}_k^{i+2} \\ \tilde{d}_p^{i+1} = 1 &= \hat{\alpha}_1 \hat{d}_p^i + \hat{\alpha}_2 \hat{d}_p^{i+1} + \hat{\alpha}_3 \hat{d}_p^{i+2} \\ \tilde{d}_s^{i+1} = 0 &= \hat{\alpha}_1 \hat{d}_s^i + \hat{\alpha}_2 \hat{d}_s^{i+1} + \hat{\alpha}_3 \hat{d}_s^{i+2} \end{aligned} \right\} (4.27)$$

bestimmt sind. Die Koeffizientenmatrix rekrutiert sich nur aus Zeilen, die für die Singularitäten in der Systemmatrix verantwortlich waren. Daß die Spalten der Koeffizientenmatrix Gl. (4.27) linear unabhängig sein müssen, ist zu erkennen, wenn analog Gl. (4.16) die restlichen Glieder des Eigenvektors aus dem um $m=3$ reduzierten Gleichungssystem berechnet werden:

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{\text{red}} \hat{\underline{d}}_{i+1}^{\text{red}} = - \left(\underline{\underline{k}}_k^{\text{red}} \hat{\underline{d}}_k^{i+1} + \underline{\underline{k}}_p^{\text{red}} \hat{\underline{d}}_p^{i+1} + \underline{\underline{k}}_s^{\text{red}} \hat{\underline{d}}_s^{i+1} \right) . \quad (4.28)$$

Das heißt, die Eigenvektoren in Gl. (4.26) sind nur dann linear unabhängig, wenn auch die Spalten der Koeffizientenmatrix Gl. (4.27) linear unabhängig sind. Damit ist die Regularität der Matrix und damit auch die Eindeutigkeit der Lösungen $\hat{\alpha}_1$ bis $\hat{\alpha}_3$ nachgewiesen.

Die gesäuberten Eigenvektoren errechnen sich aus

$$\underline{\underline{d}}_{i+j} = \tilde{\underline{\underline{d}}}_{i+j} - \sum_{\ell=1}^j \frac{\underline{\underline{d}}_{\ell}^T [\underline{\underline{M}}(\omega_i, \omega_i)] \tilde{\underline{\underline{d}}}_{i+j}}{\underline{\underline{d}}_{\ell}^T [\underline{\underline{M}}(\omega_i, \omega_i)] \underline{\underline{d}}_{\ell}} \underline{\underline{d}}_{\ell} \quad j=1, m-1 \quad (4.29)$$

und die Normierung bezüglich der Massenmatrix erfolgt analog Gl. (4.20).

4.3 Die Problematik der numerischen Behandlung

Numerische Probleme können bei der Lösung des exakten EWP's zum einen beim Aufbau der Elementmatrizen und zum anderen bei der Zerlegung der Systemmatrix auftreten.

In Abschnitt 2.1.1 ist bereits eine Methode angegeben worden, wie die unbestimmten Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ in den Matrizenelementen der exakten Elementmatrizen für den Fall $\omega \rightarrow 0$ vermieden werden können. Etwas problematischer sind die Nullstellen der Nenner in den Elementmatrizen Gl. (2.22), (2.47) und (2.48), welche die Einzelstabeigenfrequenzen markieren. Diese Polstellen der Systemdeterminante können jedoch, wie in Abschnitt 4.1 erwähnt, vorab bestimmt werden, was für den weiteren Algorithmus bezüglich der Sicherheit, alle Eigenwerte im Suchintervall zu finden, von Vorteil ist (siehe Abschnitt 4.1.1 und Anhang A.10). Wird auf die Vorabbestimmung verzichtet, muß im Programm eine Abfrage beim Er-

rechnen der Matrizelemente enthalten sein, die überprüft, ob die Nenner in den Elementmatrizen $\geq M$ sind, wobei z.B. $M = 10^{-20}$ gesetzt werden kann. Dadurch wird ein Zahlenüberlauf im Rechner vermieden, und beim Ansprechen der Schranke würden die vorher nicht bekannten Polstellen genügend genau lokalisiert werden.

Die beim klassischen Übertragungsverfahren bekannten numerischen Probleme in Form von Auslöschung ergebnisrelevanter Stellen (Differenz nahezu gleicher, großer Zahlen) werden bei den modifizierten Verfahren (siehe Marguerre und Uhrig (1964)) durch eine Erhöhung der Matrizenordnung entschärft. Bei dem hier verwendeten Steifigkeitsmatrizenverfahren ist von Hause aus eine Größe der Systemmatrix vorhanden, die bei den verbesserten Übertragungsverfahren erst durch Kunstgriffe auf diese Ordnung, und damit zu einer möglichst hohen numerischen Stabilität, gebracht werden kann. Diese großen Systemübertragungsmatrizen sind jedoch weiterhin unsymmetrisch.

Bei der Zerlegung der symmetrischen Systemsteifigkeitsmatrix nach Gl. (4.4) treten für $\omega < \omega_1$ keine Schwierigkeiten auf, da in diesem Bereich die Matrix positiv definit ist, d.h. in Gl. (4.5) gilt für alle Diagonalelemente $d_{ii}(\omega) > 0$. Das modifizierte Choleskyverfahren Gl. (4.4) arbeitet in diesem Falle auch ohne Pivotisierung der Matrix numerisch sehr stabil. Für $\omega > \omega_1$ ist die Systemmatrix jedoch bei gewissen Punkten ohne elementare Zeilen- und Spaltenoperationen nicht zerlegbar. Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 ausgeführt, werden diese Stellen durch die Nulldurchgänge der $d_{ii}(\omega)$ (wobei $i < n$) markiert, die nicht für die Nullstellen der Systemdeterminante verantwortlich sind. Auch die unmittelbare Umgebung dieser Nulldurchgänge reagiert numerisch sensibel auf die Zerlegung Gl. (4.4). In diesen Bereichen hilft die folgende Algorithmenerweiterung weiter, die im wesentlichen dem Verfahren von Schwarz (1980) und Waldvogel (1982) entspricht. Hierbei bleiben die Symmetrie der Systemmatrix und die Anzahl der negativen Diagonalelemente nach der Zerlegung erhalten. Lediglich das Matrizenprofil (siehe Abschnitt 3.3) wird durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen etwas erhöht.

Zu jeder symmetrischen Matrix \underline{K} existiert eine reguläre, aber nicht eindeutig bestimmte Matrix \underline{C} , so daß \underline{K} die kongruent transformierte Matrix einer Diagonalmatrix \underline{D}_v mit Diagonalelementen

zusätzliche Term in Gl. (4.33)

$$k_{pp}^+ = \pm 2k_{pq} + k_{qq} \quad (4.36)$$

betragsmäßig möglichst groß wird. Das Vorzeichen soll positiv sein, falls $k_{pq} \cdot k_{qq} > 0$, andernfalls negativ. Um beim Zerlegungsalgorithmus das Auslöschung von führenden Stellen zu vermeiden, ist bei dem hier verwendeten, hüllenorientierten, modifizierten Choleskyverfahren von Bathe u.a. (1976) folgende Vorgehensweise angebracht.

Ein Regelschritt für die j -te Spalte des Reduktionsalgorithmus $K = \underset{=}{L} \underset{=}{D} \underset{=}{L}^T$ lautet

$$g_{m_j, j} = k_{m_j, j} \quad (4.37)$$

$$g_{ij} = k_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ri} g_{rj} \quad i = m_j+1, \dots, j-1 \quad (4.38)$$

$$l_{ij} = \frac{g_{ij}}{d_{ii}} \quad i = m_j, \dots, j-1 \quad (4.39)$$

$$d_{jj} = k_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj}, \quad (4.40)$$

wobei z.B. m_j die Zeilennummer des ersten, von Null verschiedenen Elements in der j -ten Spalte bedeutet und $m_m = \max \{ m_i, m_j \}$.

Falls nach der Reduktion der p -ten Spalte das Diagonalelement $d_{pp}=0$, oder realistischer

$$|d_{pp}| < \delta ||\underline{K}||, \quad (4.41)$$

wobei $||\underline{K}||$ eine Matrixnorm (z.B. $||\underline{K}||_{\infty} = \max_{i,j} |k_{ij}|$) und δ die kleinste positive Zahl ist, die im Rechner $1 + \delta \neq 1$ ergibt, dann wird eine Kongruenztransformation mit \underline{C}_{pq} durchgeführt. Um eine größere Ausweitung des Matrizenprofils zu vermeiden, wird zunächst $q = p + 1$ gewählt. Damit erhöht sich die s -te Spalte um maximal 1 Element, sofern $k_{qs} \neq 0$ ($p < s \leq n$) und die p -te Spalte um $t = m_q - m_p$ Elemente, sofern $m_q > m_p$ ist. Die zusätzlichen Terme k_{ip} in der p -ten Spalte

$$k_{ip}^* = k_{ip} + k_{ip}^+ \quad i = m_q, \dots, p \quad (4.41)$$

bedürfen einer Nachreduktion, die entsprechend den Gleichungen

(4.37) bis (4.40) lautet

$$g_{m_q, p}^+ = k_{m_q, p}^+ \quad (4.42)$$

$$g_{ip}^+ = k_{ip}^+ - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ri}^+ g_{rp}^+ \quad i = m_q+1, \dots, p-1 \quad (4.43)$$

$$l_{ip}^* = l_{ip}^+ + \overset{+}{l}_{ip} \quad \text{mit} \quad \overset{+}{l}_{ip} = \frac{g_{ip}^+}{d_{ii}} \quad i = m_q, \dots, p-1 \quad (4.44)$$

$$d_{pp}^* = d_{pp}^+ + \overset{+}{d}_{pp} \quad \text{mit} \quad \overset{+}{d}_{pp} = k_{pp}^+ - \sum_{r=m_q}^{p-1} (2l_{rp}^+ + l_{rp}^+) g_{rp}^+, \quad (4.45)$$

wobei $m_m^+ = \max \{ m_i, m_q \}$ ist.

Ergibt sich auch für das veränderte Diagonalelement

$$| \overset{*}{d}_{pp} | < \delta \quad || \underline{K} ||, \quad (4.46)$$

so ist eine weitere Hilfskongruenztransformation mit der Matrix C_{pq} ($q = p + 2$) durchzuführen. Die Spalten $p + 1$ bis n können sich dadurch bei den oben dargestellten Voraussetzungen um maximal ein weiteres Element erhöhen. Wird auch für $q = n$ kein ausreichend großes Diagonalelement gefunden, so ist der Rang der Matrix $r = p - 1$. Werden die zur Hilfskongruenztransformation zugelassenen Zeilen und Spalten auf $q = p + 2$ begrenzt, so ist die maximale mögliche Ausweitung des Matrizenprofils vorab bestimmbar:

$$\hat{m}_j = \max \{ m_j - 2, 1 \} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.47)$$

$$\left. \begin{aligned} m_j^* &= \min \{ \hat{m}_j, \hat{m}_{j+1}, \hat{m}_{j+2} \} \quad j = 1, \dots, n-2 \\ m_{n-1}^* &= \min \{ \hat{m}_{n-1}, \hat{m}_n \} \\ m_n^* &= \hat{m}_n. \end{aligned} \right\} (4.48)$$

Aufwendige Umspeicherungen der Systemmatrix während des Zerlegungsalgorithmus können vermieden werden, wenn die Matrix sofort in der erweiterten Hülle zur Verfügung gestellt wird (Bild 4.6).

gungsalgorithmus aus dem Produkt mehrerer Matrizen vom Typ Gl. (4.32) entstanden sein.

Bei der Verwendung hochkonvergenter Verfahren zur Lokalisierung der Eigenwerte (siehe Abschnitt 4.1.1) ist die explizite Berechnung der Determinante Gl. (4.5) erforderlich. Um vor allem bei großen Matrizen keinen Zahlenüberlauf im Rechner zu riskieren, kann beispielsweise zuerst der logarithmierte Wert

$$\lg(\det K) = \sum_{i=1}^n \lg d_{ii} \quad (4.51)$$

berechnet werden, der nach geeigneter Normierung auch in de-logarithmierter Form darstellbar ist. Hilfskongruenztransformationen mit Matrizen der Art Gl. (4.32) ändern den Wert der Systemdeterminante nicht.

4.4 Leistungsfähigkeit des Verfahrens anhand von Beispielen

Die Systemabmessungen der folgenden Beispiele sind der Literatur entnommen. Ein Teil der hier dargestellten Ergebnisse ist auch in den Originalarbeiten enthalten und bestätigt damit die dort angegebenen Werte. Da die durch schwingende Massen aktivierten Kräfte proportional ω^2 sind, wird zur Beurteilung von Einflüssen und Näherungsgütern die Änderung der Eigenwerte ω_1^2 herangezogen.

Beskos (1977) führte u.a. an dem in Bild 4.7 dargestellten Rahmen Stabilitätsrechnungen mit der exakten Steifigkeitsmatrix durch. Bei Verwendung von 10 gleichen Elementen und der angegebenen Lastverteilung errechnete Beskos für den dimensionslosen Laststeigerungsfaktor ν einen Wert von 2,75. Die eigene Rechnung, die ebenfalls mit den exakten Elementmatrizen durchgeführt wurde, ergab $\nu_1 \text{ krit} = 2,753$.

In Bild 4.7 ist weiterhin die Änderung der Eigenwerte ω_1^2 und ω_2^2 als Funktion des Laststeigerungsfaktors ν dargestellt. Beim Erreichen des kritischen Wertes $\nu_1 \text{ krit}$ geht die 1. Schwingungseigenform in die 1. Knickform über. Die 2. Knickform mit dem zugehörigen Eigenwert $\nu_2 \text{ krit}$ kann sich, physikalisch gesehen, nicht einstellen. Gleiches gilt natürlich auch für die höheren Knickeigenwerte in Bild 4.8, die hier lediglich deshalb mitgeteilt wurden, um zu zeigen, daß die annähernd lineare Abhängig-

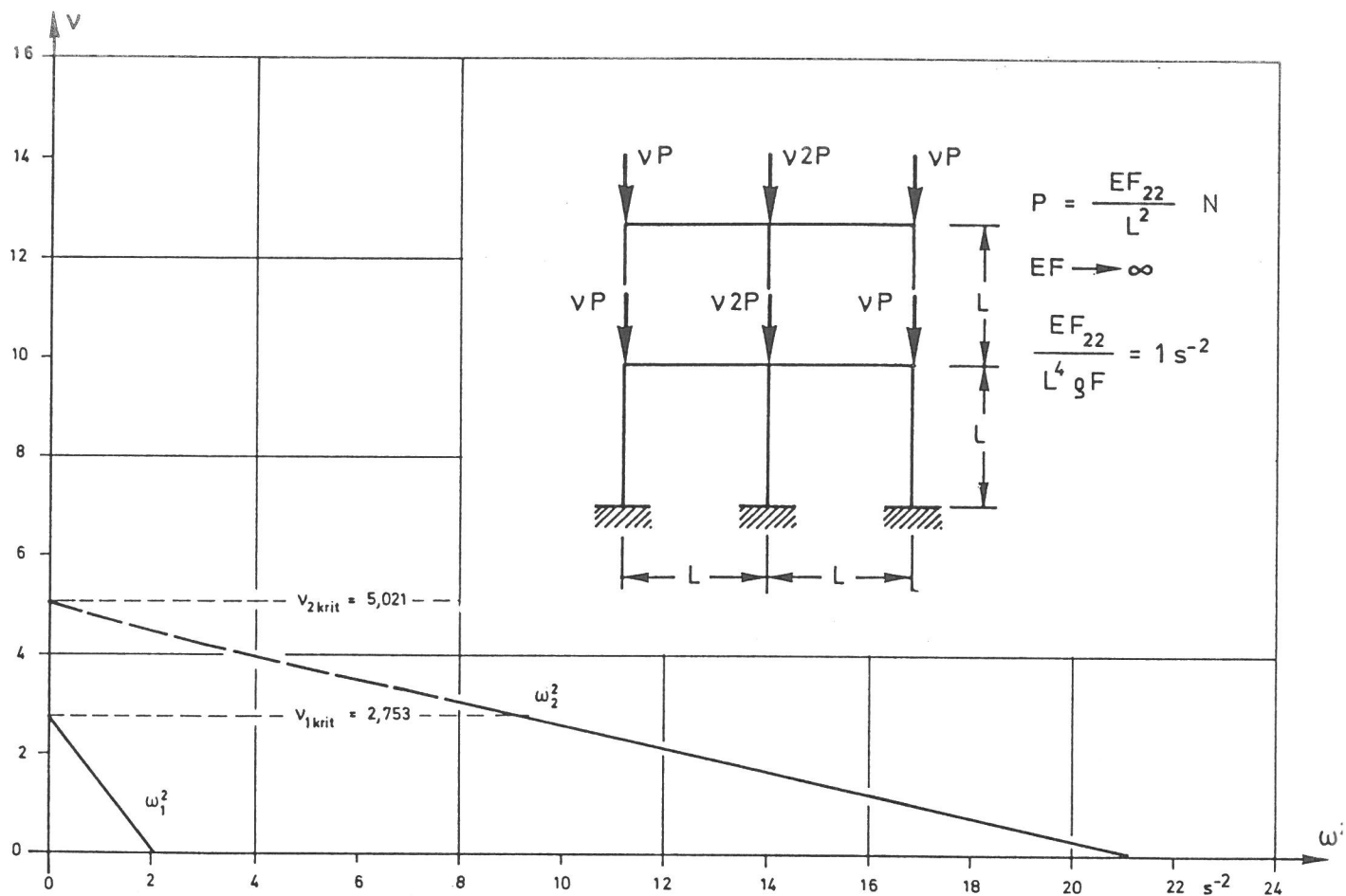


Bild 4.7

Rahmen nach Beskos (1977), Eigenwerte ω_1^2 und ω_2^2 in Abhängigkeit vom Laststeigerungsfaktor v

keit von ω_1^2 und ω_2^2 von v zufälliger Natur ist. Weiterhin bleibt die Ordnungszahl der Eigenform bei Erhöhung des Laststeigerungsfaktors nicht immer erhalten. Beispielsweise geht hier die 5. Schwingungsform in die 4. Knickform über.

Die Berechnung des zweiten und höherer Knickeigenwerte mit zugehörigen Eigenformen kann bei größeren Systemen von Interesse sein, wenn die unteren Knickformen lediglich lokales Versagen beschreiben, bei denen jedoch die Gesamtstabilität noch nicht beeinträchtigt ist.

Bei vielen technischen Fällen interessiert vor allem die Änderung des Schwingungsverhaltens bei unterschiedlicher Höhe der Gebrauchslast, die im allgemeinen weit unterhalb der ersten Knicklast liegt. Für den Beskos-Rahmen (Bild 4.8) sind in Tabelle 4.2 die Werte ω_1^2 bei $v = 0,5$ und $1,0$ denen im Zustand $v = 0$ gegenübergestellt. Die erste Eigenfrequenz ω_1 vermindert sich bei etwa $v_{1krit}/3$ um knapp 20 % im Vergleich zum unbelasteten Rahmen.

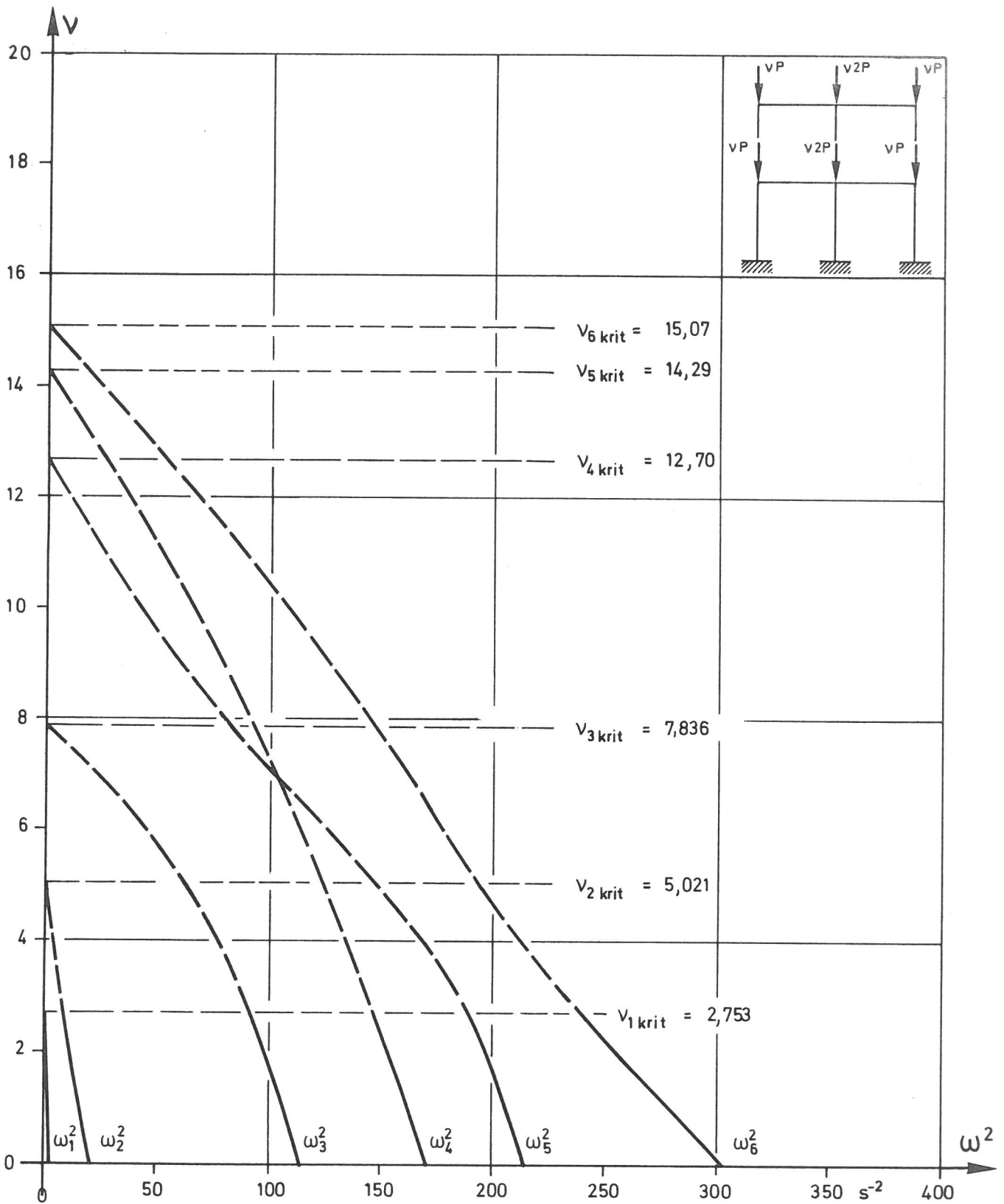


Bild 4.8

Eigenwerte ω_i^2 als Funktion des Laststeigerungsfaktors ν beim Beskos-Rahmen

Bei der numerischen Berechnung waren zur Isolierung eines Eigenwertes einschließlich Sicherung der Konvergenzrate etwa 4 Intervallhalbierungsschritte erforderlich. Zur weiteren Einschränkung eines Eigenwertes mittels "regula falsi" bis zu einer relativen

Genauigkeit von 10^{-4} waren durchschnittlich weitere 4 Zerlegungen der Systemmatrix notwendig.

Tabelle 4.2 Eigenwerte $\omega_i^2(\nu)$ des Beskos-Rahmens

i	$\nu = 0$	$\nu = 0,5$		$\nu = 1,0$	
	ω_i^2 in s^{-2}	ω_i^2 in s^{-2}	Änderung in % ¹⁾	ω_i^2 in s^{-2}	Änderung in % ¹⁾
1	2,101	1,731	-17,61	1,357	-35,41
2	21,15	18,98	-10,26	16,81	-20,52
3	115,4	111,5	-3,38	107,4	-6,93
4	172,9	168,5	-2,54	164,1	-5,09
5	214,6	210,9	-1,72	206,7	-3,86
6	303,5	292,1	-3,76	280,4	-7,61

$$1) \frac{\omega_i^2(\nu) - \omega_i^2(\nu=0)}{\omega_i^2(\nu=0)} \cdot 100$$

Das in Bild 4.9 dargestellte System idealisiert einen abgespannten Mast, wobei die Wirkung der Seile in den Abspannebenen durch lineare Wegfedern und Sprüngen in der Normalkraftlinie in Ansatz gebracht wurde. Petersen (1970) berechnete von diesem Mast die Eigenfrequenzen ω_1 bis ω_3 als Funktion des Laststeigerungsfaktors ν mit Hilfe der exakten Übertragungsmatrizen. Die mit den exakten Steifigkeitsmatrizen ermittelten ω_i^2 (Bild 4.9) stimmen bis auf den Faktor 0,981 mit den Werten von Petersen überein (bei der Übernahme der Systemdaten wurde für 1 kp vereinfacht 10 N gesetzt).

Die mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-4} errechneten Werte ω_1^2 bis ω_5^2 sind für $\nu=0, 1$ und 2 in Tabelle 4.3 angegeben. Die Änderung des Laststeigerungsfaktors um 1 gegenüber dem Bezugszustand $\nu=1$ hat bei diesem Beispiel auf die oberen Eigenfrequenzen einen größeren Einfluß als auf die Grundfrequenz. Er beträgt bei ω_2 bis ω_5 jeweils etwa 12 %.

Im nächsten Beispiel wird der exakten Lösung Ergebnisse aus dem allgemeinen EWP gegenübergestellt. Gladwell (1964b) berechnete

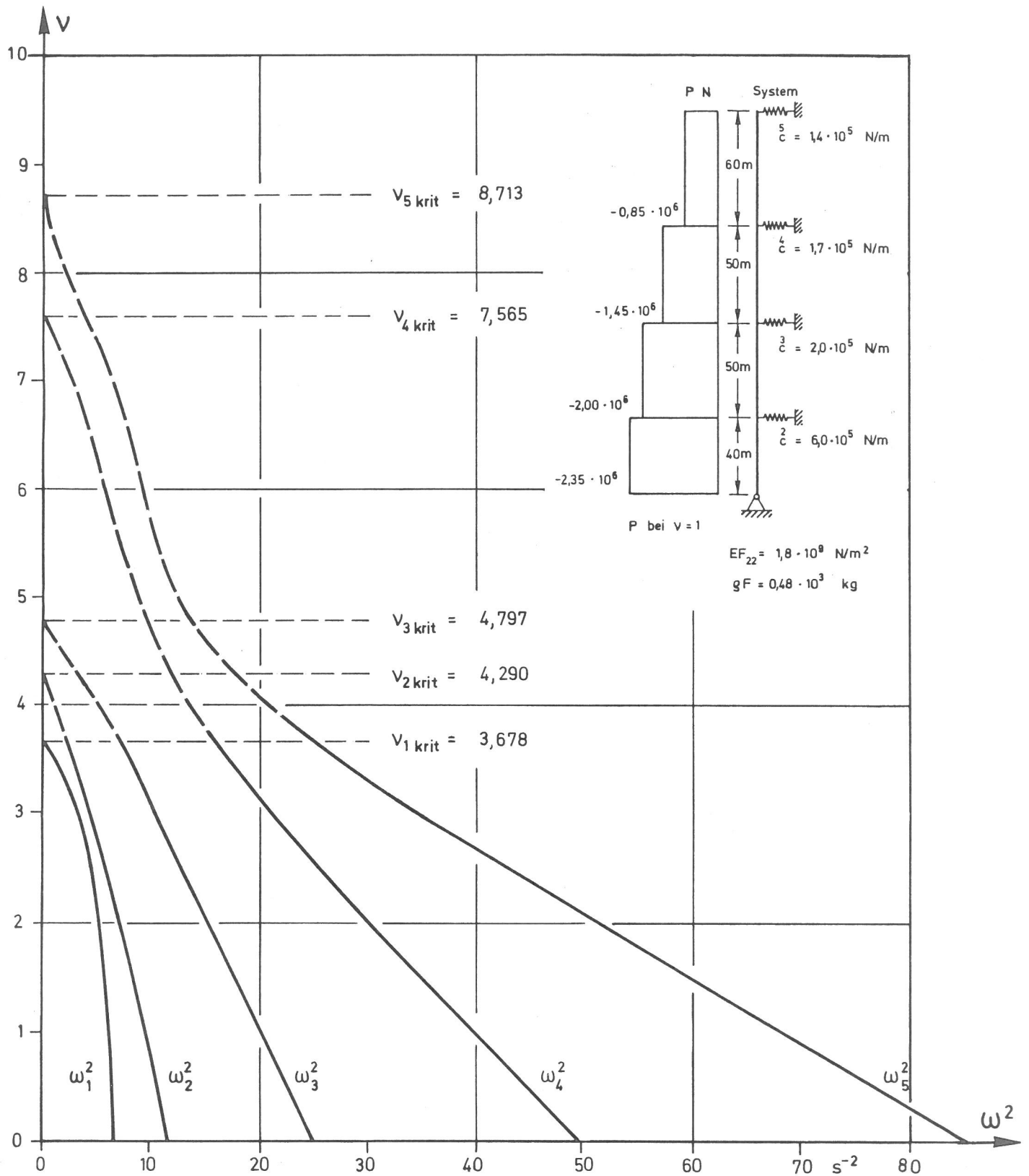


Bild 4.9

Eigenwerte ω_i^2 als Funktion des Laststeigerungsfaktors ν bei einem Mast nach Petersen (1970)

von dem in Bild 4.10 dargestellten Rahmen die ersten 10 Eigenwerte mit der exakten frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix. Durch eigene Berechnungen konnten diese Werte bestätigt und durch

Tabelle 4.3 Eigenwerte ω_i^2 des Petersen-Mastes

i	v = 0		v = 1	v = 2	
	ω_i^2 in s ⁻²	Änderung in % 1)	ω_i^2 in s ⁻²	ω_i^2 in s ⁻²	Änderung in % 1)
1	6,820	10,55	6,169	5,208	-15,58
2	11,84	21,59	9,738	7,327	-24,75
3	24,70	23,38	20,02	15,35	-23,33
4	49,29	24,31	39,65	30,13	-24,01
5	84,68	24,68	67,92	51,10	-24,76

$$1) \frac{\omega_i^2(v) - \omega_i^2(v=1)}{\omega_i^2(v=1)} \cdot 100$$

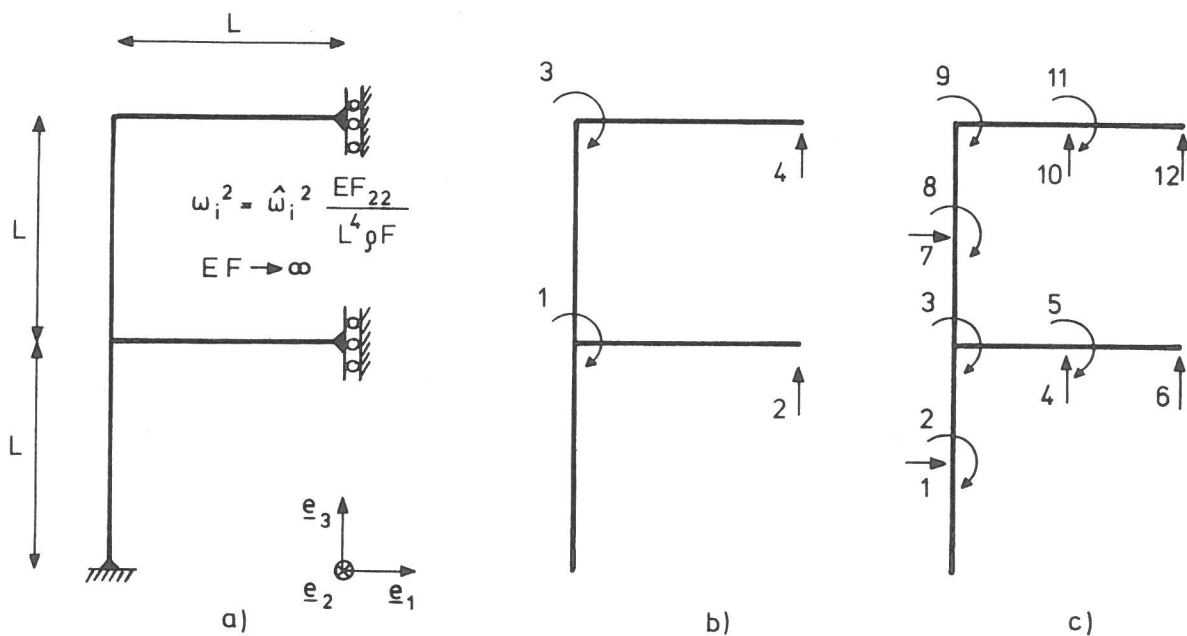


Bild 4.10

Ebene Schwingungen eines Rahmens nach Gladwell (1964 a)

- a) System mit Abmessungen
- b) Diskretisierung durch 4 Elemente n=4
- c) Diskretisierung durch 8 Elemente n=12

weitere 10 Eigenwerte ω_i^2 ergänzt werden (siehe Tabelle 4.4). Hierbei zeigte sich, daß auch noch der 20. Eigenwert aus der exakten 4 x 4 Matrix ohne Schwierigkeiten mit Hilfe des in Abschnitt 4.1.1 erläuterten Algorithmus ermittelt werden kann-

Tabelle 4.4 Eigenwerte ω_i^2 des Gadwellrahmens

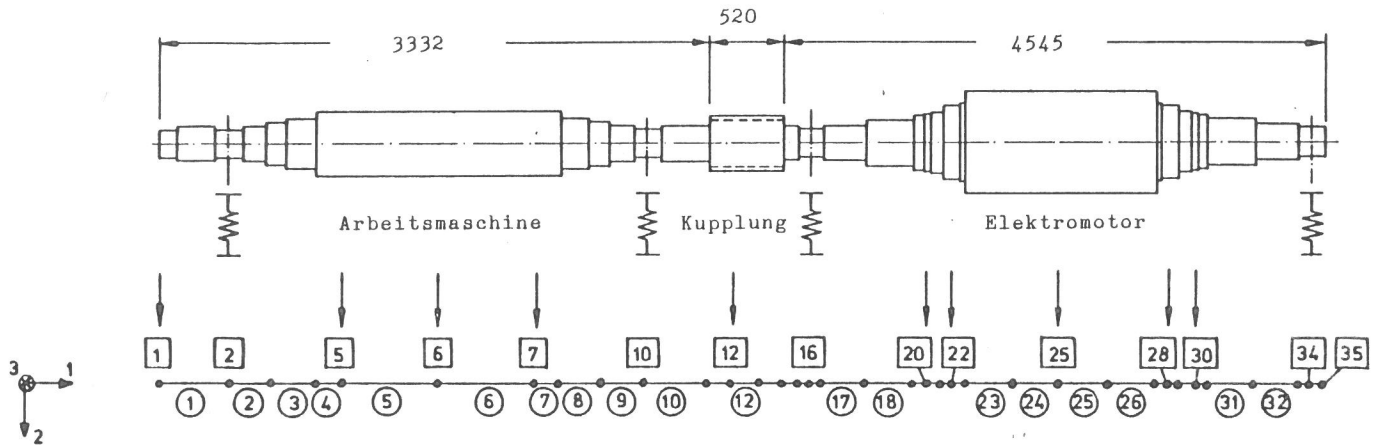
i	4 Elemente n=4					8 Elemente n=12			
	exakte Lös.	Vergleichsfunktionen		zulässige Ansatzfunkt.		Vergleichsfunktionen		zulässige Ansatzfunkt.	
	ω_i^2 exakt in s ⁻²	ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. 2) in %	ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. 2) in %	ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. 2) in %	ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. 2) in %
1	15,3068	15,3068	0,000	15,5970	1,896	15,3068	0,000	15,3264	0,128
2	21,9643	21,9643	0,000	22,5198	2,529	21,9643	0,000	22,0055	0,187
3	219,591	220,936	0,061	334,850	52,49	219,591	0,000	223,392	1,731
4	413,882	459,974	11,14	965,115	133,2	413,886	0,001	426,187	2,973
5	710,309					710,329	0,003	741,718	4,422
6	818,779					819,385	0,074	854,761	4,395
7	2381,34					2382,15	0,034	3094,61	29,95
8	3405,38					3410,14	0,140	5062,54	48,66
9	4749,19					4763,82	0,308	7670,05	61,50
10	5192,57					5218,52	0,500	8663,14	66,84
11	10519,6					10981,2	4,388	20761,0	97,36
12	13510,7					16037,1	18,70	31170,6	130,7
13	17147,0								
14	18297,4								
15	30999,7								
16	37575,9								
17	45247,7								
18	47617,2								
19	72527,5								
20	84794,4								

1) Habedank (1972)

2) $\frac{\omega_i^2 - \omega_i^2 \text{ exakt}}{\omega_i^2 \text{ exakt}} \cdot 100$

te. Die jeweils 4-fachen Pole in der Systemdeterminante ergaben sich nach dem 4., 8., 12., 16. und 20. Eigenwert an den Stelle $p_i^2 = 500,56 \text{ s}^{-2}$; $3803,5 \text{ s}^{-2}$; 14617 s^{-2} ; 39944 s^{-2} und 89135 s^{-2} . Habedank (1972) entwickelte ein Verfahren zur Konstruktion von Vergleichsfunktionen und erreicht damit, daß wesentlich mehr Eigenwerte als bei Verwendung von zulässigen Ansatzfunktionen mit genügender Genauigkeit aus dem allgemeinen EWP berechnet werden können (Tabelle 4.4). Die Matrizenordnung bleibt bei dieser Methode erhalten, jedoch sind die Systemmatrizen voll besetzt, da zu ihrer Ermittlung u.a. die Systemmassenmatrix, gebildet mit Hilfe zulässiger Ansatzfunktionen, invertiert werden muß. Vor allem bei großen Matrizen mit ausgeprägter Bandstruktur bietet deshalb die Verwendung von Vergleichsfunktion kaum Vorteile gegenüber dem impliziten EWP.

Daß auch größere Eigenwertaufgaben mit Verwendung der exakten Steifigkeitsmatrix problemlos gelöst werden können, soll durch das folgende Beispiel gezeigt werden. Hollburg (1981) diskretisiert einen realen Rotor, bestehend aus Arbeitsmaschine, Kupp-



ELEMENT NUMMER	LAENGE	STEIFIGKEITEN		MASSE/LAENGE RPO*F	DREHTRAEGHEIT RHO*IP
		GJT	EF22		
1	0.41200E+03	0.79937E+15	0.10112E+16	0.61654E-01	0.77067E+02
2	0.27500E+03	0.30709E+16	0.38848E+16	0.12084E+00	0.29606E+03
3	0.27500E+03	0.83914E+16	0.10616E+17	0.19976E+00	0.80902E+03
4	0.14050E+03	0.18726E+17	0.23689E+17	0.29840E+00	0.18053E+04
5	0.60950E+03	0.18726E+17	0.23689E+17	0.29840E+00	0.18053E+04
6	0.60950E+03	0.18726E+17	0.23689E+17	0.29840E+00	0.18053E+04
7	0.14050E+03	0.18726E+17	0.23689E+17	0.29840E+00	0.18053E+04
8	0.27500E+03	0.83914E+16	0.10616E+17	0.19976E+00	0.80902E+03
9	0.27500E+03	0.30709E+16	0.38848E+16	0.12084E+00	0.29606E+03
10	0.32000E+03	0.22831E+16	0.28882E+16	0.10419E+00	0.22011E+03
11	0.14000E+03	0.16104E+17	0.20372E+17	0.13256E+00	0.15526E+04
12	0.19000E+03	0.16104E+17	0.20372E+17	0.13256E+00	0.15526E+04
13	0.19000E+03	0.16104E+17	0.20372E+17	0.13256E+00	0.15526E+04
14	0.11500E+03	0.20487E+17	0.25917E+17	0.31212E+00	0.19751E+04
15	0.10500E+03	0.74972E+16	0.94844E+16	0.18881E+00	0.72281E+03
16	0.10500E+03	0.74972E+16	0.94844E+16	0.18881E+00	0.72281E+03
17	0.35000E+03	0.20487E+17	0.25917E+17	0.31212E+00	0.19751E+04
18	0.33750E+03	0.18726E+17	0.23689E+17	0.29840E+00	0.18053E+04
19	0.11500E+03	0.33799E+17	0.42758E+17	0.40090E+00	0.32586E+04
20	0.13000E+03	0.42482E+17	0.53742E+17	0.44946E+00	0.40957E+04
21	0.75000E+02	0.83820E+17	0.10604E+18	0.63133E+00	0.80811E+04
22	0.11000E+03	0.89183E+17	0.11282E+18	0.65122E+00	0.85981E+04
23	0.40875E+03	0.10068E+18	0.12736E+18	0.69191E+00	0.97062E+04
24	0.40875E+03	0.10068E+18	0.12736E+18	0.69191E+00	0.97062E+04
25	0.40875E+03	0.10068E+18	0.12736E+18	0.69191E+00	0.97062E+04
26	0.40875E+03	0.10068E+18	0.12736E+18	0.69191E+00	0.97062E+04
27	0.11000E+03	0.89183E+17	0.11282E+18	0.65122E+00	0.85981E+04
28	0.75000E+02	0.83820E+17	0.10604E+18	0.63133E+00	0.80811E+04
29	0.13000E+03	0.42482E+17	0.53742E+17	0.44946E+00	0.40957E+04
30	0.11500E+03	0.33799E+17	0.42758E+17	0.40090E+00	0.32586E+04
31	0.33750E+03	0.26521E+17	0.33551E+17	0.35513E+00	0.25559E+04
32	0.35000E+03	0.20487E+17	0.25917E+17	0.31212E+00	0.19751E+04
33	0.11500E+03	0.74972E+16	0.94844E+16	0.18881E+00	0.72281E+03
34	0.11500E+03	0.74972E+16	0.94844E+16	0.18881E+00	0.72281E+03

KNOTEN NUMMER	WEGFEDER			DEHFEDER		
	1-RI	2-RI	3-RI	1-RI	2-RI	3-RI
2.	0.0	0.1000E+10	0.0	0.0	0.0	0.0
10.	0.0	0.1000E+10	0.0	0.0	0.0	0.0
16.	0.0	0.1000E+13	0.0	0.0	0.0	0.0
34.	0.0	0.1000E+14	0.0	0.0	0.0	0.0

KNOTEN NUMMER	EINZEL- MASSE	DREHTRAEGHEITEN GLOBAL		
		1-RICHTUNG	2-RICHTUNG	3-RICHTUNG
1.	0.10000E+03	0.64000E+06	0.0	0.0
5.	0.20000E+03	0.65000E+07	0.0	0.0
6.	0.50000E+03	0.12000E+08	0.0	0.0
7.	0.20000E+03	0.65000E+07	0.0	0.0
12.	0.40000E+03	0.24000E+08	0.0	0.0
20.	0.25000E+03	0.16000E+08	0.0	0.0
22.	0.33000E+03	0.35000E+08	0.0	0.0
25.	0.40000E+03	0.21000E+08	0.0	0.0
28.	0.33000E+03	0.35000E+08	0.0	0.0
30.	0.25000E+03	0.16000E+08	0.0	0.0

Bild 4.11

Reales Rotorsystem, Finite Element Idealisierung nach Hollburg (1981) sowie Eingabedaten

lung und Elektromotor durch 34 Elemente (Bild 4.11). In den Knoten [2], [10], [16] und [34] ist das System bei Biegeschwingungen elastisch gelagert. In Torsionsrichtung kann sich der Rotor unbehindert bewegen. Weiterhin befinden sich an einigen Knoten ([1], [5] usw.) Einzelmassen mit Drehträgheiten.

Tabelle 4.5 Eigenwerte ω_i^2 des Hollburg-Rotors

i	Biegeschwingung n=70			Torsionsschwingung n=35		
	exakte Lös. ω_i^2 exakt in s ⁻²	zul. Ansatzfunktionen ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. in % 1)	exakte Lös. ω_i^2 exakt in s ⁻²	zul. Ansatzfunktionen ω_i^2 in s ⁻²	rel. Fehl. in % 1)
1	31317,4	31317,4	0,000	0	0	-
2	58676,5	58678,5	0,003	100592	100594	0,002
3	267227	267237	0,004	573847	573860	0,002
4	291238	291245	0,002	1941540	1941800	0,013
5	995867	996284	0,042	2298070	2298280	0,009
6	1363110	1363210	0,007	4644490	4647490	0,065
7	1975210	1975650	0,022	9275980	9295320	0,208
8	3822360	3823610	0,033	9423380	9426180	0,030
9	10396300	10423100	0,258	20329700	20424400	0,466
10	17831000	17904000	0,409	22572700	22631000	0,258
11	21916600	22328100	1,878	41051500	42094600	2,541
12	28682500	29091000	1,424	49103100		
13	35823400	36065800	0,677			

$$1) \frac{\omega_i^2 - \omega_i^2 \text{ exakt}}{\omega_i^2 \text{ exakt}} \cdot 100$$

In Tabelle 4.5 sind für das Suchintervall $0 \leq \omega^2 \leq 5 \cdot 10^7 \text{ s}^{-2}$ die Eigenwerte der Biege- und Torsionsschwingungen angegeben. Beispielsweise waren bis zur Isolierung eines Torsionseigenwertes einschließlich der Sicherung der Kornvergenzrate etwa 4 Intervallhalbierungsschritte erforderlich. Zur weiteren Einschränkung eines Eigenwertes mittels "regula falsi" bis zu einer relativen Genauigkeit von $< 10^{-5}$ waren durchschnittlich weitere 7 Zerlegungen der Systemmatrix notwendig.

Die häufigen Querschnittsänderungen sowie die Vielzahl der Feder- und Massenangriffspunkte bedingten eine feingliedrige Diskretisierung des Rotors, so daß die Ergebnisse aus dem allgemeinen EWP bei Verwendung zulässiger Ansatzfunktionen gegenüber den exakten Lösungen bis zur Eigenkreisfrequenz ω_{11} lediglich um $<2\%$ differierten. Das 5. und 6. Element (Bild 4.11) verursachte bei $p_{1T}^2 = 275580000 \text{ s}^{-2}$ die erste Torsionspolstelle und das 1. Element war bei $p_{1B}^2 = 284926000 \text{ s}^{-2}$ für die erste Biegepolstelle in der Systemdeterminante verantwortlich. Die obere Grenze des Suchintervalls lag weit unter diesen Polstellen. Im Abschnitt 5.1 wird ein Kriterium angegeben, mit dem abgeschätzt werden kann, in welchen Fällen der höhere Aufwand zur Lösung des impliziten gegenüber dem allgemeinen EWP in Kauf genommen werden sollte.

5 Lösung des allgemeinen EWP mit Matrizen aus frequenzabhängigen Näherungsansätzen

Sofern die Genauigkeit der Eigenwerte aus dem allgemeinen EWP unter Verwendung zulässiger (statischer) Ansatzfunktionen den technischen Erfordernissen nicht genügt, wird in der Regel bisher meist eine Verfeinerung der Diskretisierung vorgenommen. Im allgemeinen wird hierzu jedes Element durch einen zusätzlichen Knoten unterteilt, wobei die Ansatzfunktionstypen entweder beibehalten oder durch Polynome höherer Ordnung (siehe A.7) ersetzt werden können. Diese Maßnahme hat in etwa eine Verdopplung der Matrizenordnung zur Folge. Neben dem Aufwand zur Festlegung der neuen Elementierung erhöht sich auch die Rechenzeit für die Ermittlung eines Eigenwertes linear zur Änderung der Matrizenordnung und quadratisch zum mittleren Bandweitzuwachs.

Die Verwendung der unter Abschnitt 2.2.1 bereitgestellten frequenzabhängigen Ansatzfunktionen eröffnet einen Weg zur Erhöhung der Eigenwertgenauigkeit gegenüber dem allgemeinen EWP mit statischen Ansatzfunktionen ohne Veränderung des Matrizenprofils. Ab welchem Frequenzbereich die neuen Ansatzfunktionen wesentliche Verbesserungen gegenüber der klassischen Methode bringen, kann durch die Hinweise in Abschnitt 5.1 abgeschätzt werden.

Die unter Abschnitt 1.3 aufgezeigten Vorgehensweisen bei Verwendung von frequenzabhängigen Näherungsansätze werden anschließend durch einige Beispiele dokumentiert.

5.1 Anwendungsgrenzen für statische Ansatzfunktionen

In Bereichen jenseits der ersten Polstelle der exakten Systemdeterminante ($\omega > p_1$) würde das allgemeine EWP bei gleicher Diskretisierung gegenüber den exakten Eigenwerten nur noch mit großen Fehlern behaftete Werte ergeben, da die zugehörigen Eigenschwingungsformen von den statischen Ansatzfunktionen nicht mehr approximiert werden können. Die erste Polstelle p_1 wird vom "schwingungsweichsten" Element des Systems verursacht (siehe Anhang A. 10). Ohne die exakten Systemfrequenzen kennen zu müssen, kann durch folgendes Kriterium die Näherungsqualität abgeschätzt werden:

Eigenwerte $\omega_i(\omega_i^2)$ aus dem allgemeinen EWP, die kleiner sind als $p_1/2$ ($p_1^2/4$), können bei Verwendung statischer Ansatzfunktionen einen relativen Fehler bis ca. 10 % (20 %) aufweisen. Eigenwerte $\omega_i(\omega_i^2)$, die kleiner als $p_1/4$ ($p_1^2/16$) sind, haben höchstens noch einen Fehler von ca. 2 % (4 %).

Diese Grenzen wurden nach Vergleich vieler Beispiele aus der Literatur sowie nach eigener Rechenerfahrung festgelegt.

Andere häufig verwendete Kriterien legen die Anzahl der brauchbaren Eigenwerte fest und orientieren sich hierzu entweder an den Systemfreiheitsgraden und damit an der Ordnung n der Systemmatrix oder sie ziehen die Anzahl der zur Diskretisierung verwendeten Elemente zur Beurteilung heran. Das hier vorgestellte Kriterium erfaßt z.B., daß

- 1) bei einem System mit vielen Einzelmassen, die das Schwingungsverhalten wesentlich beeinflussen, mehr Eigenwerte brauchbar sind als sich aus den bisherigen Abzählmethoden ergeben würde und
- 2) bei sehr unterschiedlicher dynamischer Steifigkeit der Elemente die Anzahl der noch ausreichend genauen Eigenwerte aus dem allgemeinen EWP nicht überschätzt wird.

Weiterhin sind durch die Kenntnis der Polstellen die Elemente des Systems sofort ausgewiesen, die bei Beibehaltung statischer Ansatzfunktionen zur Verbesserung der Diskretisierung feiner unterteilt werden müßten.

Die Verwendung frequenzabhängiger Ansatzfunktionen lohnt erst, je nach Genauigkeitsanforderung, oberhalb der oben angegebenen Kriteriumsgrenzen.

5.2 Berechnung höherer Eigenwerte durch Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter

Der Aufbau des allgemeinen EWP's erfolgt hier analog zur Vorgehensweise bei statischen Ansatzfunktionen, lediglich die Elementmatrizen werden aus Teilmatrizen vom Typ Gl. (2.94) zusammengestellt. Für das gesamte EWP lautet die Beziehung

$$[\underline{K}(\omega_{\text{fest}}) + \underline{G}(\omega_{\text{fest}}) - \omega_{\text{fest}}^2 \underline{M}(\omega_{\text{fest}})] \underline{d} = \underline{0} , \quad (5.1)$$

wobei ω_{fest} ein entsprechend zu wählender "festgehaltener" Frequenzparameter ist. Da die Systemmatrizen die Eigenwerte nicht implizit enthalten, kann Gl. (5.1) mit bekannten Algorithmen gelöst werden. Die Qualität der Näherung von Gl. (5.1) hängt von ω_{fest} ab. Für $\omega_{\text{fest}} \rightarrow 0$ werden die Matrizen mit quasistatischen Ansatzfunktionen (siehe Bild 2.8 und 2.9) gebildet, die für $\alpha = 0$ den Hermite-Polynomen 3. Grades entsprechen. Wird der Parameter ω_{fest} so gewählt, daß er z.B. mit $\omega_{3\text{exakt}}$ übereinstimmt, errechnet sich aus Gl. (5.1) $\omega_3 = \omega_{3\text{exakt}}$, sofern das System nur aus Elementmatrizen ohne Koppelteilmatrizen nach Gl. (2.72) zusammengesetzt ist.

Zur Veranschaulichung der Näherungsqualität der Eigenwerte ω_i^2 als Funktion von ω_{fest}^2 wird ein unter Abschnitt 4.4 behandeltes Beispiel herangezogen.

Für den Gladwell-Rahmen von Bild 4.10 ergeben sich bei einer Diskretisierung durch 4 Elemente Systemmatrizen der Ordnung $n = 4$. Für verschiedene ω_{fest} wurde Gl. (5.1) gelöst, so daß der funktionelle Zusammenhang $\omega_i^2(\omega_{\text{fest}}^2)$ in Bild 5.1 und 5.2 dargestellt werden konnte.

Im Bereich $\omega_{\text{fest}}^2 < p_1^2$, d.h. unterhalb der ersten Einzelstabeigenfrequenz, ist $\omega_i^2 > \omega_{i\text{exakt}}^2$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $\omega_{\text{fest}}^2 = \omega_i^2$ gilt. Für $\omega_{\text{fest}}^2 > p_1^2$ kann auch $\omega_i^2 < \omega_{i\text{exakt}}^2$ sein (siehe Bild 5.2).

In Erweiterung der Anwendungsgrenzen von Abschnitt 5.1 lassen sich für Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter unter Zuhilfenahme der Grenzlinien

$$\omega_{\pm\text{gr}.j}^2 = p_j^2 + \frac{\alpha \mp 1}{\alpha} (\omega_{\text{fest}}^2 - p_j^2) \quad j = 1, 2 \dots \quad (5.2)$$

$\alpha > 2$

in Abhängigkeit vom Frequenzparameter ω_{fest}^2 brauchbare Bereiche der Eigenwerte ω_i^2 einschränken. In der Umgebung der j-ten Polstelle sind gute Näherungen für $\omega_i^2(\omega_{\text{fest}}^2)$ zu erwarten, wenn

$$\omega_{-\text{gr}.j}^2 < \omega_i^2 < \omega_{+\text{gr}.j}^2 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega_{\text{fest}}^2 < p_j^2 \quad ; \quad j = 1 \\ \frac{p_{j-1}^2 + p_j^2}{2} < \omega_{\text{fest}}^2 < p_j^2 \quad ; \quad j > 2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\omega_{+\text{gr}.j}^2 < \omega_i^2 < \omega_{-\text{gr}.j}^2 \quad \text{für} \quad p_j^2 < \omega_{\text{fest}}^2 < \frac{p_j^2 + p_{j+1}^2}{2} \quad ; \quad j > 1$$

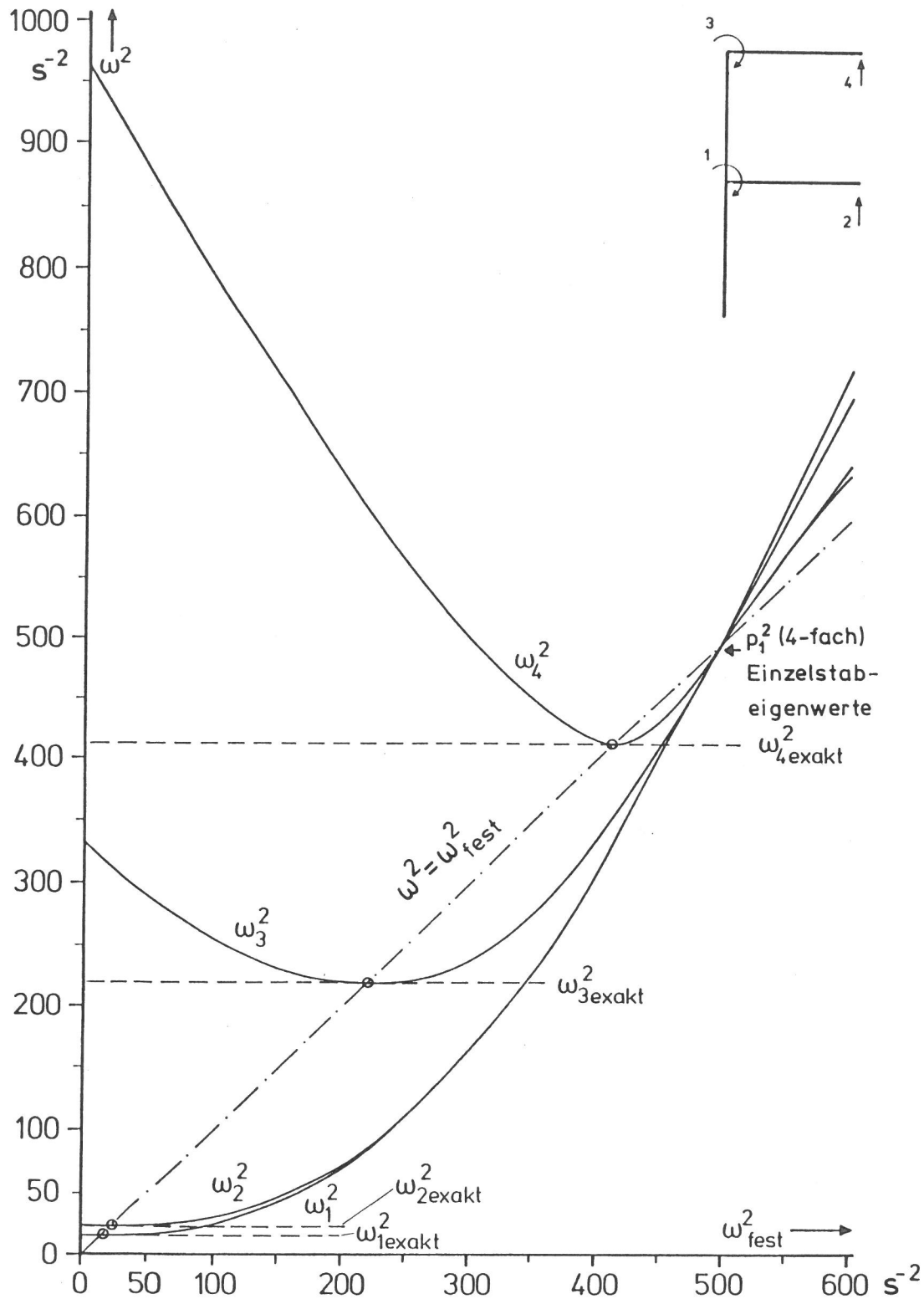


Bild 5.1

Eigenwerte ω_1^2 bis ω_4^2 des Gladwell-Rahmens ($n = 4$) bei Verwendung von Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter ω_{fest}^2

wobei sich die Größe der brauchbaren Bereiche durch die Konstante ε in Abhängigkeit von der gewünschten Näherungsqualität ergibt. Für $\omega_{\text{fest}}^2 = 0$ und $\varepsilon = 4$ bzw. 16 ergibt sich aus Gleichung (5.3) mit Gl. (5.2) der Spezialfall der statischen Ansatzfunktionen mit

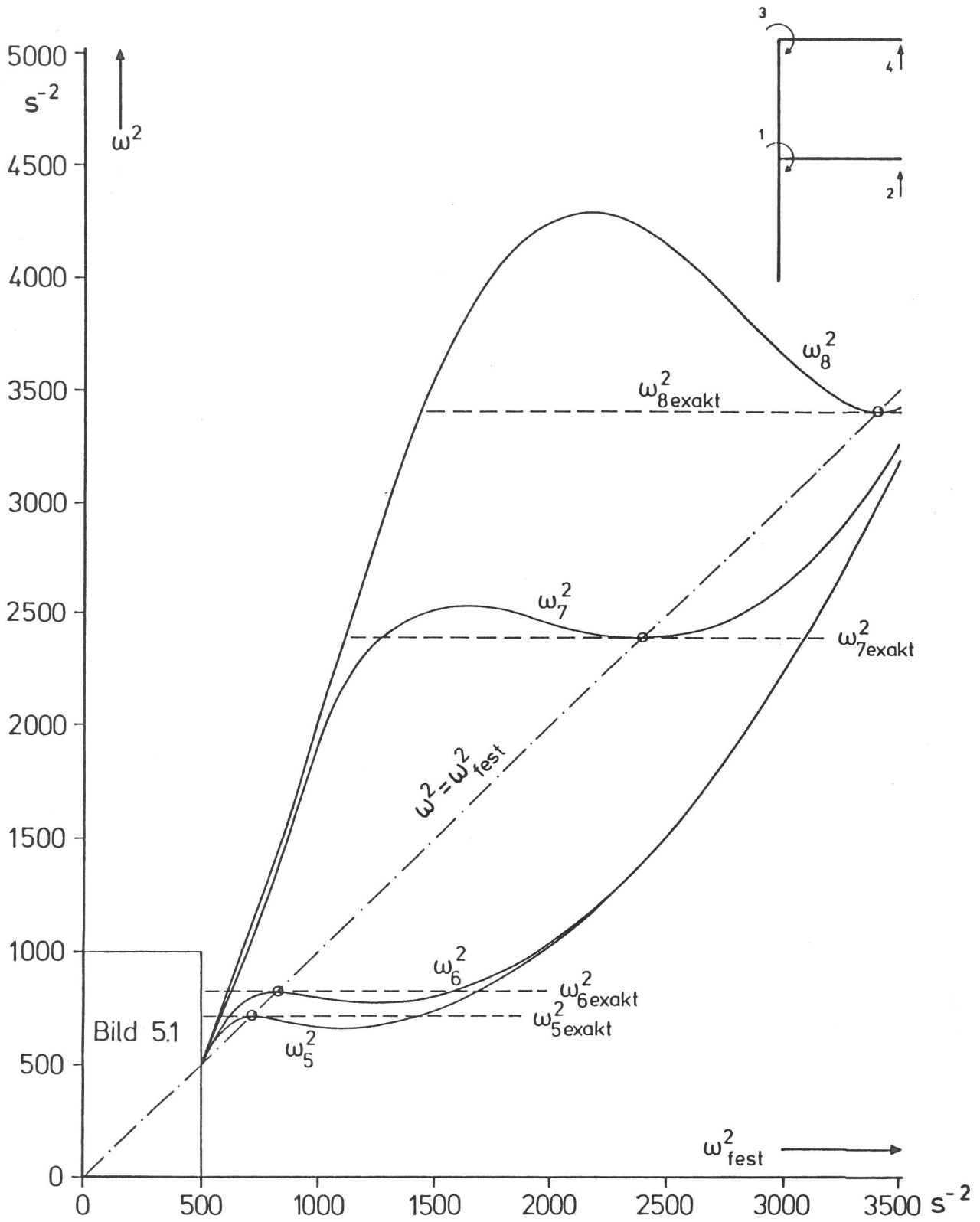


Bild 5.2

Eigenwerte ω_5^2 bis ω_8^2 des Gladwell-Rahmens ($n = 4$) bei Verwendung von Ansatzfunktionen mit festgehaltenem Frequenzparameter ω_{fest}^2

den unter Abschnitt 5.1 angegebenen Fehlergrenzen. Lediglich mit Kenntnis der Polstellen p_j (siehe Anhang A.10) lässt sich die Näherungsqualität für $\omega_{\text{fest}}^2 > 0$ wie folgt abschätzen:

Eigenwerte ω_i^2 aus dem mit ω_{fest}^2 gebildeten allgemeinen EWP haben in den Bereichen von Gleichung (5.3) für $\alpha = 4$ einen relativen Fehler von ca. 20 % und für $\alpha = 16$ nur noch einen relativen Fehler von ca. 4 %.

Lediglich im Bereich $\omega_i^2 < \frac{p_1^2}{\alpha}$ und $\omega_i^2 < \omega_{fest}^2$ können größere relative Fehler als die o.g. auftreten. Für die Eigenwerte des Gladwellrahmens von Bild 5.1 und 5.2 sind die Grenzlinien Gl. (5.2) für $\alpha = 4$ in Bild 5.3 dargestellt. Die schraffierte Fläche kennzeichnet den Bereich innerhalb der Grenzlinien, in dem die o.g. Fehlergrenzen überschritten werden können. Der brauchbare Bereich der Eigenwerte wird um so größer, je weiter ω_{fest}^2 von Polstellen entfernt liegt.

Bei Auftragung von ω und ω_{fest} im linearen Maßstab läßt sich ein großer Eigenwertbereich leichter grafisch darstellen. Für den

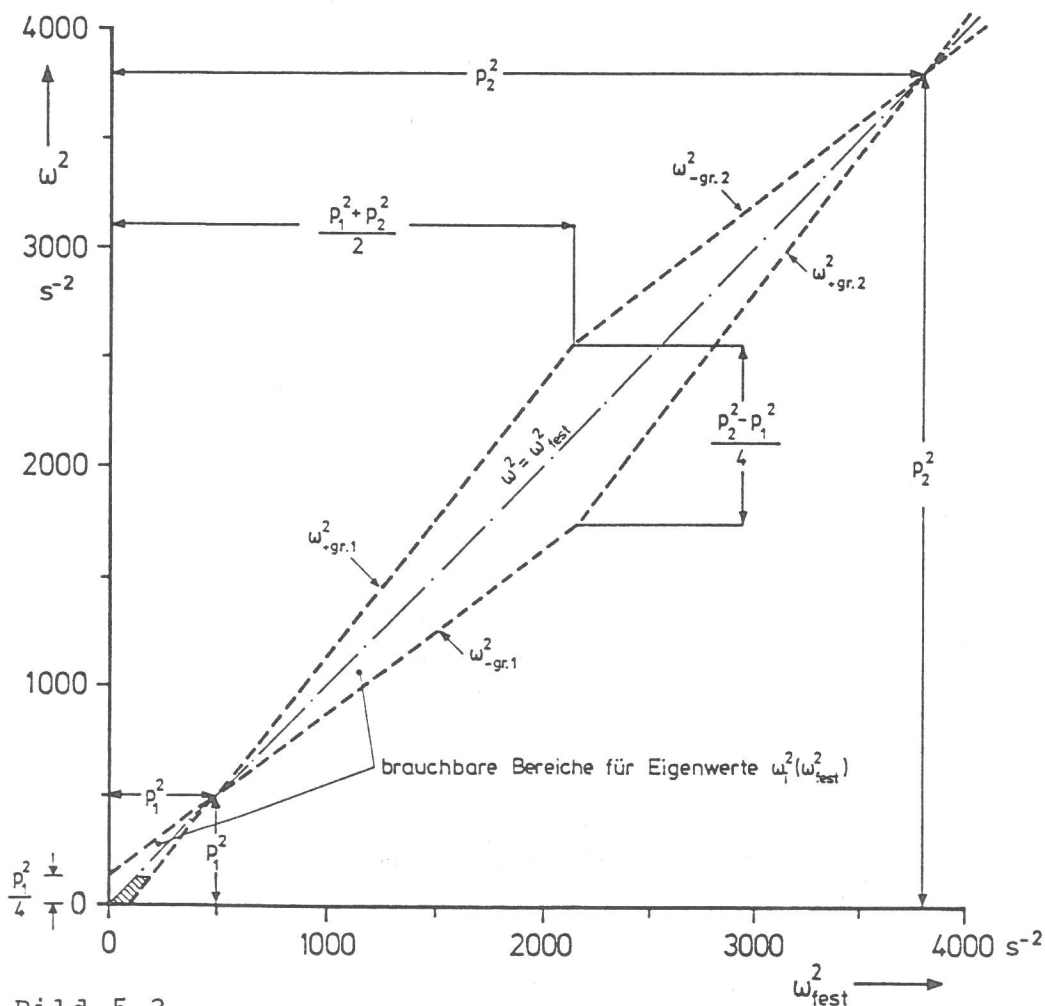


Bild 5.3

Eigenwertbereiche des Gladwell-Rahmens ($n = 4$), in denen die Eigenwerte ω_i^2 (ω_{fest}^2) einen relativen Fehler von ca. 20 % aufweisen können

Gladwell-Rahmen von Bild 4.10 ergeben sich bei einer Diskretisierung durch 8 Elemente Systemmatrizen der Ordnung $n = 12$. Die Verläufe der Eigenwerte $\omega_i(\omega_{\text{fest}})$ sind in Bild 5.4 und 5.5 zusammen mit den nun nicht mehr linear verlaufenden Grenzlinien für die brauchbaren Bereiche dargestellt.

Gegenüber dem impliziten EWP von Abschnitt 4, bei dem die Systemmatrix $\underline{K}_{\text{dyn}}(\omega)$ für jeden Wert ω neu aufgebaut werden mußte, sind die Matrizen in Gl. (5.1) für ein gewähltes ω_{fest} bei der Lösung des allgemeinen EWPs konstant. Da jedoch i.a. nur ein kleiner Teil des Eigenwertspektrums im brauchbaren Bereich zwischen den Grenzlinien Gl. (5.2) liegt, sind bei der Lösung von Gl. (5.1) Algorithmen vorzuziehen, die gezielt Eigenwerte und Eigenvektoren eines beliebig vorzugebenden Frequenzbereiches einschränken. Besonders gut eignet sich hierzu die "gebrochene inverse Vektoriteration", wie sie von Schwarz (1980) beschrieben wurde. Die Anzahl der rechenzeitintensiven Zerlegungen der Systemmatrix nach Gl. (4.4) kann somit klein gehalten werden.

Ein ähnlicher Verlauf der Eigenwerte wie in Bild 5.1 bis 5.5 ist zu erwarten, wenn die exakte frequenzabhängige Systemsteifigkeitsmatrix entsprechend Gl. (2.110) bis (2.112) linearisiert wird. Phänomenologisch läßt sich die Wirkung frequenzabhängiger Ansatzfunktionen auf die Näherungsqualität der Eigenwerte auch mit der frequenzabhängigen Matrizenkondensation (siehe z.B. Schwarz (1980)) vergleichen. Bei letzterem Verfahren müssen jedoch zunächst die Systemmatrizen \underline{K} und \underline{M} der Ordnung m aufgebaut werden, um sie anschließend auf die Ordnung $n < m$ zu kondensieren. Werden beispielsweise die Systemmatrizen für den Gladwell-Rahmen mit statischen Ansatzfunktionen und Diskretisierung durch 8 Elemente ($m = 12$) so kondensiert, daß lediglich die Freiheitsgrade der Diskretisierung mit 4 Elementen ($n = 4$) übrig bleiben, so zeigen die Eigenwerte des kondensierten allgemeinen EWPs qualitativ eine ähnliche Abhängigkeit vom festgehaltenen Frequenzparameter ω_{fest} , der zur frequenzabhängigen Kondensation verwendet wurde wie in Bild 5.1. Die Eigenwerte können jedoch bestenfalls für $\omega_i = \omega_{\text{fest}}$ die Genauigkeit des unkondensierten allgemeinen EWPs erreichen. Weiterhin muß bedacht werden, daß die kondensierten Matrizen wohl ihre Symmetrie nicht verlieren, jedoch i. allg. voll besetzt sind.

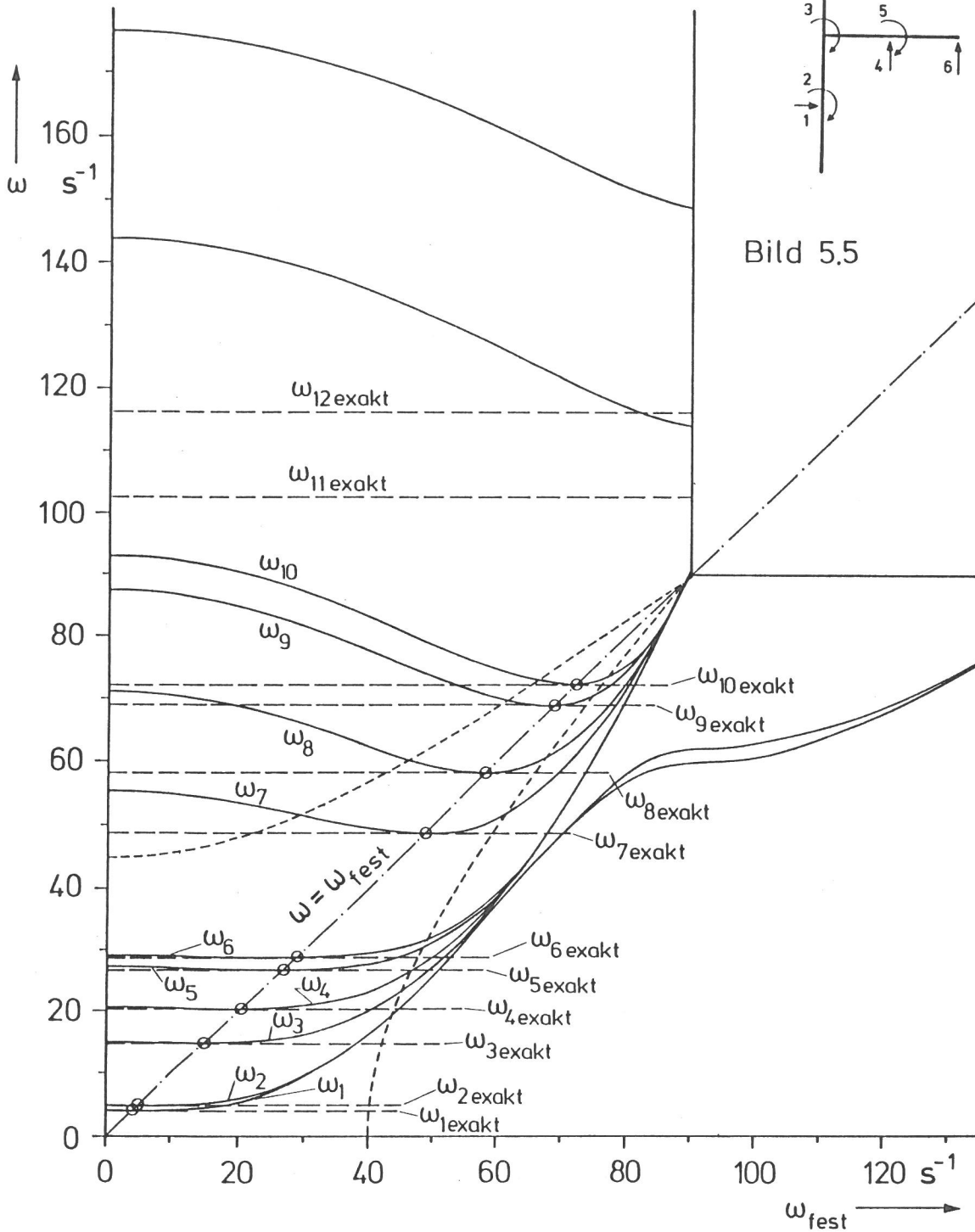


Bild 5.4

Eigenwerte $\omega_1(\omega_{\text{fest}})$ bis $\omega_{10}(\omega_{\text{fest}})$ des Gladwell-Rahmens ($n = 12$) sowie Grenzlinien nach Gl. (5.2) mit $\varrho = 4$

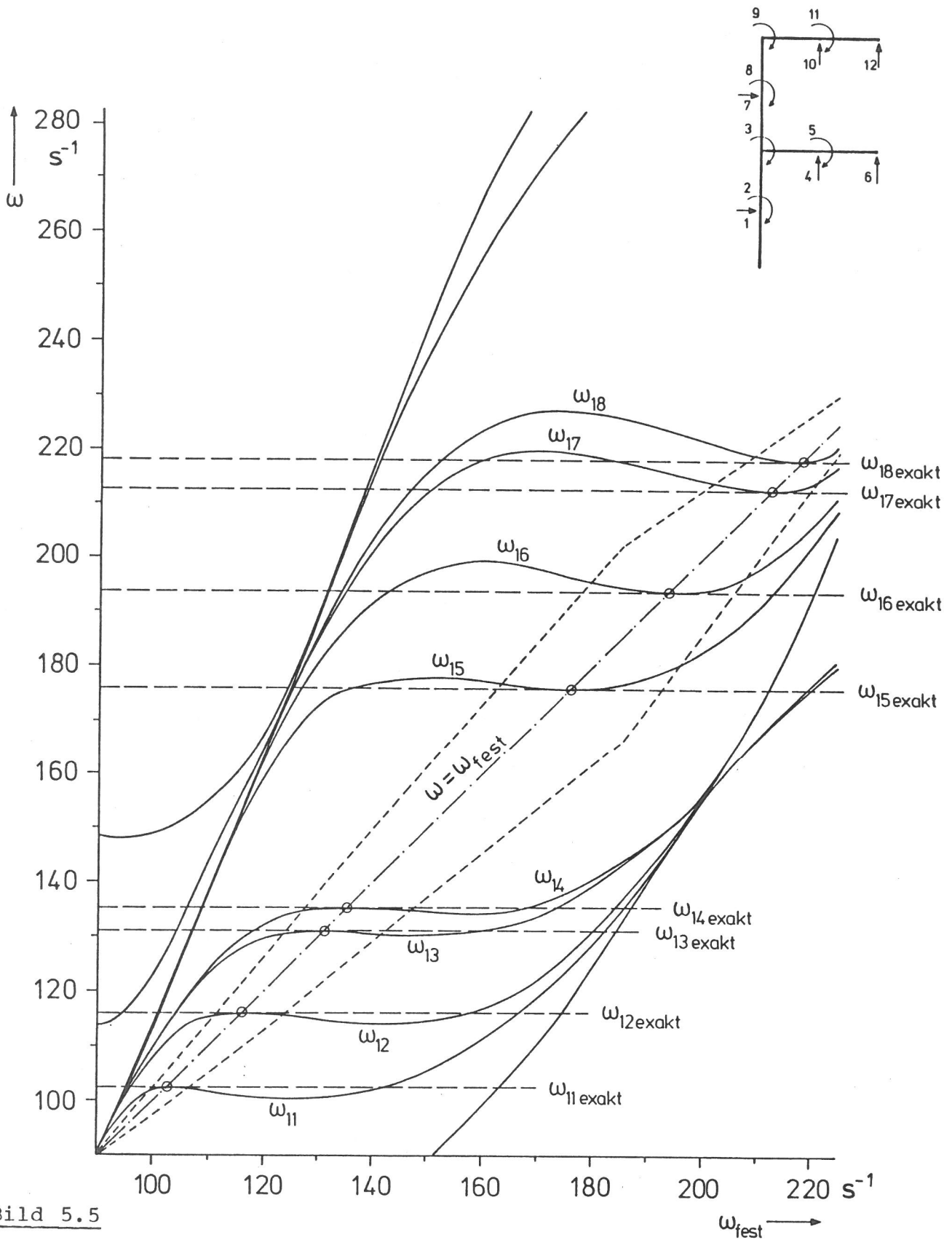


Bild 5.5

Eigenwerte $\omega_{11}(\omega_{\text{fest}})$ bis $\omega_{18}(\omega_{\text{fest}})$ des Gladwell-Rahmens ($n = 12$) sowie Grenzlinien nach Gl. (5.2) mit $\alpha = 4$

5.3 Frequenzabhängige Ansatzfunktionen bei gekoppelten Biege-Torsionsschwingungsbeispielen

Mit den in Abschnitt 2.2 zur Verfügung gestellten Matrizen wird zunächst an einem auch exakt geschlossen lösbarem Beispiel eines dünnwandigen Balkens mit offenem Querschnitt die Näherungsqualität der verschiedenen Ansatzfunktionen dargestellt, um abschließend die Eigenwerte eines aus den gleichen Balkenprofilen bestehenden Rahmens zu berechnen. Die Systemwerte, Fesselungen und Freiheitsgrade des Stabes mit einfachsymmetrischen Querschnitt sind in Bild 5.6 angegeben.

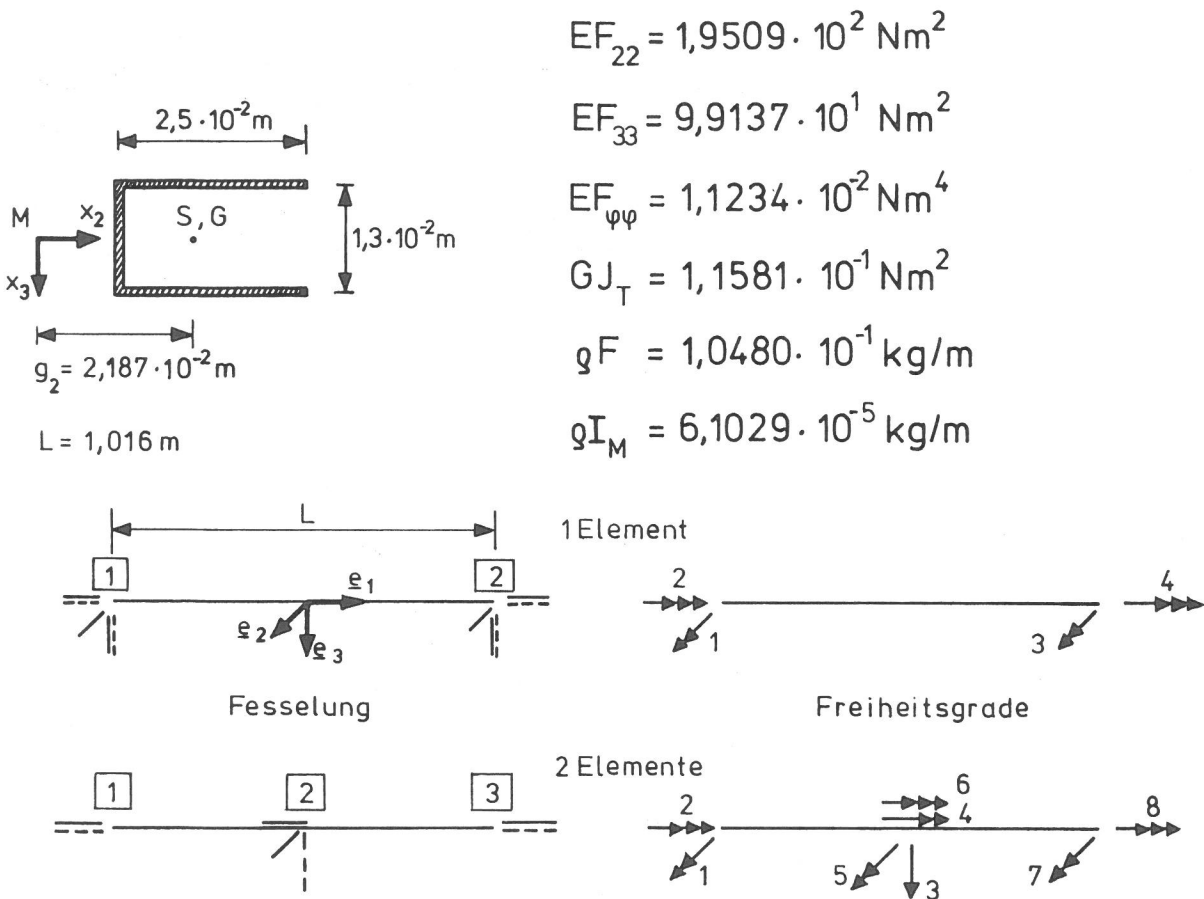


Bild 5.6

Systemwerte des dünnwandigen Stabes mit offenem Querschnitt

Die Schwingungskopplung der Biegung in x_3 -Richtung mit der Torsion um die x_1 -Achse ist bei dem angegebenen Exzentrizitätsmaß g_2 (Abstand vom Schubmittelpunkt M zum Massenmittelpunkt G) sehr stark, da g_2 in der Größenordnung der Außenabmessung des Querschnitts liegt.

Zur Bestimmung der exakten Lösung wird zunächst das gekoppelte Differentialgleichungssystem abgeleitet. Da im vorliegenden Beispiel

keine statischen Vorlasten berücksichtigt werden, verschwinden in der potentiellen Energie U von Gl. (2.51) die Terme Gl. (2.54) und (2.55), und in \underline{P} von Gl. (2.52) bleibt lediglich GJ_T übrig. Die Eulerschen Gleichungen des Hamiltonschen Prinzips lauten mit der Lagrangefunktion $L(x_1, \underline{w}, \underline{w}, \underline{w}, \underline{\dot{w}})$ von Gl. (2.50)

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{w}} - \frac{d}{dx_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{w}, 1} \right) + \frac{d^2}{dx_1^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{w}, 11} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{w}}} \right) = \underline{0}, \quad (5.4)$$

wobei hier der erste Term Null ist.

Für Elemente mit konstantem Querschnitt ergibt sich aus Gl. (5.4) mit den Gleichungen (2.51) und (2.59) das Differentialgleichungssystem

$$\underline{P} \underline{w}, 11 - \underline{F} \underline{w}, 1111 - \underline{J} \underline{\ddot{w}} = \underline{0}. \quad (5.5)$$

Bei den in Bild 5.6 vorgegebenen Systemwerten ist die Biegeschwingung in x_2 -Richtung entkoppelt ($g_3 = 0$) und wird zunächst nicht weiter betrachtet. Die Ortsfunktion $\sin\left(\frac{k\pi}{L} x_1\right)$ des Bernoullischen Produktansatzes für die k -te Eigenform, die neben Gl. (5.5) auch alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen erfüllen muß, kann bei diesen Fesselungen sowohl für \underline{v}_1 als auch für w_3 erraten werden. Es ist dann

$$\underline{w}(x_1, t) = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ w_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x_1\right) e^{j\omega_k t}. \quad (5.6)$$

Nach Einsetzen von Gl. (5.6) in (5.5) ergibt sich für jedes k ein homogenes Gleichungssystem, woraus die Eigenfrequenzen ω_k aus der Bedingung für nichttriviale Lösungen

$$\det \begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 GJ_T + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 EF_{\psi\psi} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 EF_{33} \end{bmatrix} - \omega_k^2 \begin{bmatrix} \xi I_M & g_2 \xi F \\ & \\ g_2 \xi F & \xi F \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.7)$$

folgen. Dies führt für ω_k^2 auf eine quadratische Gleichung mit 2 Lösungen $\omega_{k,1}^2$ und $\omega_{k,2}^2$. Aus dem homogenen Gleichungssystem lassen sich letztlich die zugehörigen Eigenvektoren $[A_{k,1}, B_{k,1}]$ und $[A_{k,2}, B_{k,2}]$ berechnen, so daß alle Parameter des Ansatzes Gl. (5.6) geschlossen bestimmbar sind, wobei sich für $g_2 \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} A_{k,1} \cdot B_{k,1} &> 0 \\ A_{k,2} \cdot B_{k,2} &< 0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.8)$$

ergibt. In Bild 5.7 sind die mit den Eigenvektoren und der Ortsfunktion gebildeten Eigenformen für $k = 1$ und 2 grafisch dargestellt. Bei vorgegebenem k gehört der 1. Eigenvektor (1. Schwingwinkel) zur niedrigeren, der 2. zur höheren Eigenfrequenz.

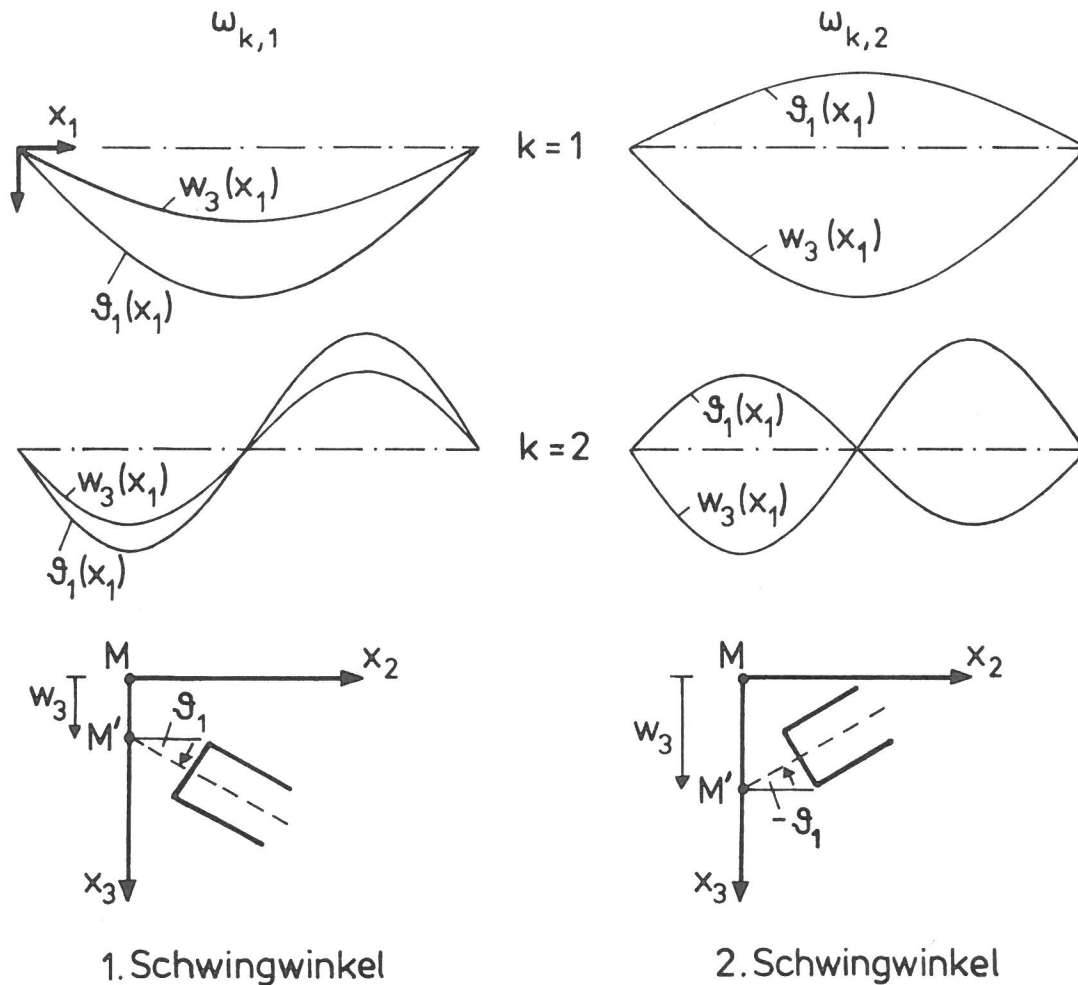


Bild 5.7

Qualitative Darstellung der Eigenformen für $k = 1$ und 2 des Systems von Bild 5.6

Die exakten Eigenwerte der gekoppelten und ungekoppelten ($g_2 = 0$) Schwingung des Beispiels von Bild 5.6 sind in Tabelle 5.1 verzeichnet.

Für $g_2 \rightarrow 0$ gelten folgende Grenzübergänge

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \omega_{k,1}^2 &\rightarrow \omega_k^2 \text{ Tors.} & \text{sowie} & \frac{B_{k,1}}{A_{k,1}} \rightarrow 0 \\ \omega_{k,2}^2 &\rightarrow \omega_k^2 \text{ Bieg.} & \text{sowie} & \frac{A_{k,2}}{B_{k,2}} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (5.9)$$

Tabelle 5.1 Exakte Eigenwerte und Eigenvektoren des 1-fach-symmetrischen Stabes von Bild 5.6 sowie ungekoppelte Biege- u. Torsionseigenwerte ($g_2 = 0$)

Schwing-Form		gekoppelte			ungekoppelte Eigenwert	
k	Winkel ℓ	Eigenvektoren $A_{k,\ell}$	$B_{k,\ell}$	Eigenwerte $\omega_{k,\ell}^2$	Biegung ω_k^2	Torsion ω_k^2
		-	cm	s^{-2}	s^{-2}	s^{-2}
1	1	1	0,934	25 887	86 477	34 971
	2	- 1	2,520	653 881		
2	1	1	0,561	282 356	1383 630	341 816
	2	- 1	2,566	9375 300		
3	1	1	0,493	1287 990	7004 610	1526 330
	2	- 1	2,575	46461 400		

Der hier skizzierte Weg für die exakte Lösung geht auf Federhofer (1947) zurück. Mei (1970) wies nach, daß die exakten Eigenfrequenzen unter Verwendung Hermitescher Ansatzfunktionen beliebig genau angenähert werden können, wenn z.B. ein Stab entsprechend Bild 5.6 immer feiner diskretisiert wird. Mit der vorliegenden

Tabelle 5.2

Näherungslösungen für die Eigenwerte des 1-fach-symmetrischen Stabes von Bild 5.6

	Schwing-Form		allgemeines EWP ($\underline{K} - \omega^2 \underline{M}$) $\underline{d} = \underline{0}$						implizites EWP	
	k	Winkel ℓ	Hermiteansätze		$\omega_{fest}^2 = 2,6 \cdot 10^4 s^{-2}$		$\omega_{fest}^2 = 2,8 \cdot 10^5 s^{-2}$		$\underline{K}_{dyn} \underline{d} = \underline{0}$	
			$\omega_{k,\ell}^2$	rel. Fehl.	$\omega_{k,\ell}^2$	rel. Fehl.	$\omega_{k,\ell}^2$	rel. Fehl.	$\omega_{k,\ell}^2$	rel. Fehl.
			s^{-2}	%	s^{-2}	%	s^{-2}	%	s^{-2}	%
1 Element	1	1	29690	14,69	27220	5,15	- 1)		27065	4,55
	2	1	428960	51,92	461740	63,53	304450	7,82	300430	6,40
	1	2	785540	20,14	713370	9,10	- 1)		- 1)	
	3	1	- 1)		- 1)		- 1)		1337000	3,81
2 Elemente	1	1	26017	0,50	25934	0,18	39610	53,01	25934	0,18
	2	1	337010	19,36	350910	24,28	291430	3,21	290520	2,89
	1	2	658340	0,68	655890	0,31	804200	22,99	- 1)	
	3	1	1925200	49,47	2014000	56,37	1870700	45,24	1361700	5,72

1) Die entsprechende Eigenform kann mit den Ansatzfunktionen nicht dargestellt werden

Arbeit wird das Ziel verfolgt, mit möglichst wenig Elementen eine technisch brauchbare Näherung zu erreichen. Deshalb werden beim folgenden Vergleich entsprechend Bild 5.6 lediglich 1 bzw. 2 Elemente zur Diskretisierung verwendet. In Tabelle 5.2 sind die Eigenwerte und ihre relativen Fehler gegenüber der exakten Lösung (Tabelle 5.1) bei Verwendung von Hermiteansätzen (Abschnitt 2.2.2) und frequenzabhängiger Ansatzfunktionen (Abschnitt 2.2.1) angegeben, wobei letztere mit festgehaltenen Frequenzparameter $\omega_{\text{fest}} \approx \omega_{1,1}$ bzw. $\omega_{2,1}$ als allgemeines EWP und mit ständig angepaßten Ansätzen als implizites EWP zu lösen waren.

In Tabelle 5.3 sind die Polstellen des impliziten EWP angegeben. Diese werden durch die Einzelstabeigenfrequenzen der ungekoppelten Biege- und Torsionsschwingung bei beidseitiger Einspannung der Elemente verursacht.

Tabelle 5.3 Polstellen des impliziten EWP bei einer Diskretisierung entsprechend Bild 5.6

	j	Biegung	Torsion
		p_j^2	p_j^2
		s^{-2}	s^{-2}
1 Element	1	444400	108930
	2	3377000	741570
	3	12971000	2707600
2 Elemente	1	7109000	1473000
	2	54047000	10850000

Die Ergebnisse von Tabelle 5.2 zeigen, daß sich bei Verwendung von Hermiteansätzen bereits beim 2. Eigenwert $\omega_{2,1}^2$ relative Fehler von ca. 50 % (1 Element, $n = 4$) bzw. von ca. 20 % (2 Elemente, $n = 8$) ergeben. Lösungen mit frequenzabhängigen Ansatzfunktionen weisen für den 2. Eigenwert bei gleicher Diskretisie-

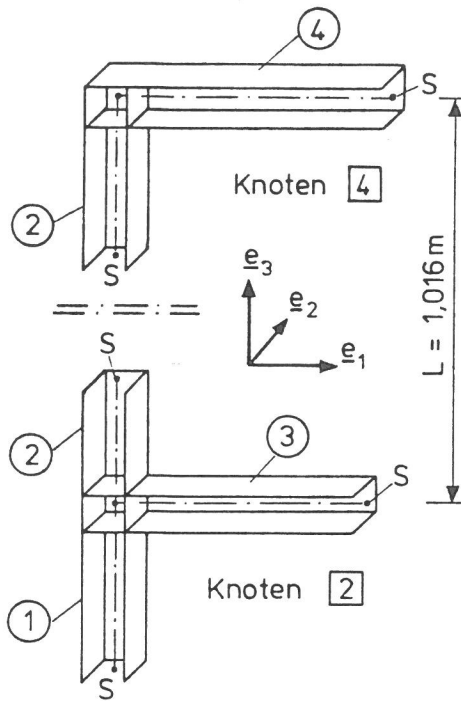
rung mit $\omega_{\text{fest}}^2 \approx \omega_{2,1}^2$ nur noch ca. $\frac{1}{7}$ der o.g. Fehler auf. Gleichzeitig sind jedoch die anderen Eigenwerte, die nicht in unmittelbarer Nähe von ω_{fest}^2 liegen, z.T. erheblich schlechter geworden. Letzteres kann weitgehend vermieden werden, wenn zur Ermittlung der Eigenwerte das implizite EWP, bei dem die Systemmatrix entsprechend Abschnitt 4 für jedes ω neu aufgebaut werden muß, gelöst wird. Damit sind die besten Näherungen mit den hier vorgestellten frequenzabhängigen Ansatzfunktionen erreichbar. Bei kleiner werdender Kopplung ($g_2 \rightarrow 0$) geht die Näherung in die exakte Lösung über.

An diesem einfachen Beispiel lassen sich auch gut die Anwendungsbereiche der verschiedenen Ansatzfunktionen aufzeigen. Mit Hermiteansätzen können bei der gewählten Diskretisierung die höherwelligen Schwingungsformen $k = 2$ und 3 nur noch sehr grob approximiert werden, wobei für gleiches k die relativen Fehler der Eigenwerte bei Schwingwinkel 1 und 2 von gleicher Größenordnung sind. Die frequenzabhängigen Ansatzfunktionen passen sich auch den höheren Schwingungsformen $k = 2$ bzw. 3 für den Schwingwinkel 1 gut an, jedoch kann es bei extrem starker Kopplung (wie im vorliegenden Beispiel) vorkommen, daß z.B. die Eigenform $k = 1$ mit Schwingwinkel 2 nicht mehr durch die in diesem Frequenzbereich bereits höherwelligen Ansatzfunktionen darzustellen ist. Fehlende Eigenwerte treten beim impliziten EWP frühestens in Bereichen auf, in denen die Lösungen mit Hermiteansätzen bei gleicher Diskretisierung keine technisch ausreichenden Näherungen mehr erwarten lassen. Als Anhaltspunkt für den brauchbaren Bereich kann das unter Abschnitt 5.1 angegebene Kriterium dienen.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, daß auch bei der frequenzabhängigen Matrizenkondensation (Schwarz (1980)) oder der Subspace-Iteration nach Bathe u.a. (1976) das Eigenwertspektrum eines vorgegebenen Frequenzbereiches aus den reduzierten allgemeinen EWP u.U. nicht vollständig bestimmt werden kann.

Abschließend werden die Eigenwerte eines ebenen Rahmens aus 4 Stäben entsprechend Bild 5.6 ermittelt. Die Topologie und Fesselung des Systems ist dem Bild 3.7 zu entnehmen, wobei die Dreh- und Wegfedern entfallen und zusätzliche Wölbfedern an Knoten 2 und 4 angeordnet sind. Als Systemlinien wird jeweils die Linie des elastischen Mittelpunkts S gewählt, die sich in den Knoten-

punkten schneiden. In Bild 5.8 sind zwei Knotenpunktdetails mit wölbelastischen Anschlüssen dargestellt.



Wölbfedern c_φ am
Knoten $\boxed{2}$ und $\boxed{4}$
in \underline{e}_1 - und \underline{e}_3 -Richtung
 $c_\varphi = 1,9678 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^3$

Bild 5.8

Knotenpunkte $\boxed{2}$ und $\boxed{4}$
des Rahmens entsprechend
Bild 3.7 mit Wölbsteifen
in globaler 1- und 3-Richtung

Die exakte Lösung dieses Rahmensystems kann nicht angegeben werden, deshalb sind als Bezugswerte für die Näherungsqualität bei Diskretisierung mit 4 Elementen ($n = 16$) die Eigenwerte des impliziten EWP's mit 8 Elementen ($n = 40$) in Tabelle 5.4 verwendet worden.

Tabelle 5.4 Näherungslösungen für die Eigenwerte eines Rahmens entsprechend Bild 5.8 mit Stäben nach Bild 5.6

i	4 Elemente n = 16				8 Elemente n=40
	Hermiteansätze $(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{d} = \underline{0}$		implizites EWP $\underline{K}_{\text{dyn}} \underline{d} = \underline{0}$		implizites EWP $\underline{K}_{\text{dyn}} \underline{d} = \underline{0}$
	ω_i^2	Fehl. bez. *)	ω_i^2	Fehl. bez. *)	ω_i^2 *)
	s^{-2}	%	s^{-2}	%	s^{-2}
1	4251,8	0,68	4240,2	0,40	4223,1
2	4626,1	0,69	4612,2	0,39	4594,3
3	10723	0,80	10640	0,02	10638
4	10782	0,80	10698	0,01	10697
5	42020	23,66	37205	11,00	33981
6	106060	40,96	87941	16,87	75243

In diesem Beispiel sind die Fehler der ersten sechs Eigenwerte aus dem impliziten EWP mit frequenzabhängigen Ansatzfunktionen weniger als halb so groß gegenüber dem mit Hermiteansätzen gebildeten allgemeinen EWP. Liegt z.B. als technische Forderung vor, daß der relative Fehler aller Eigenwerte unterhalb eines Grenzwertes $\omega_0^2 = 10^6 \text{ s}^{-2}$ ($\hat{=} 50 \text{ Hz}$) höchstens 20 % betragen darf, so wäre dies bei Verwendung von Hermiteansätzen erst mit einer Diskretisierung durch 6 bis 8 Elemente zu erreichen. Die Matrizenordnung würde sich in diesem Fall etwa verdoppeln. Wird weiterhin berücksichtigt, daß beim allgemeinen EWP der Speicherplatz für zwei Systemmatrizen zur Verfügung gestellt werden muß, so bietet das implizite EWP, vor allem bei Implementierung des Programmes auf Personal-Computer, Vorteile, da nur eine einzige und zudem relativ kleine Systemmatrix gespeichert werden muß.

In Bild 5.9 sind die nach Gl. (4.20) bezüglich der Massenmatrix normierten Eigenvektoren \hat{d}_i des impliziten EWPs angegeben.

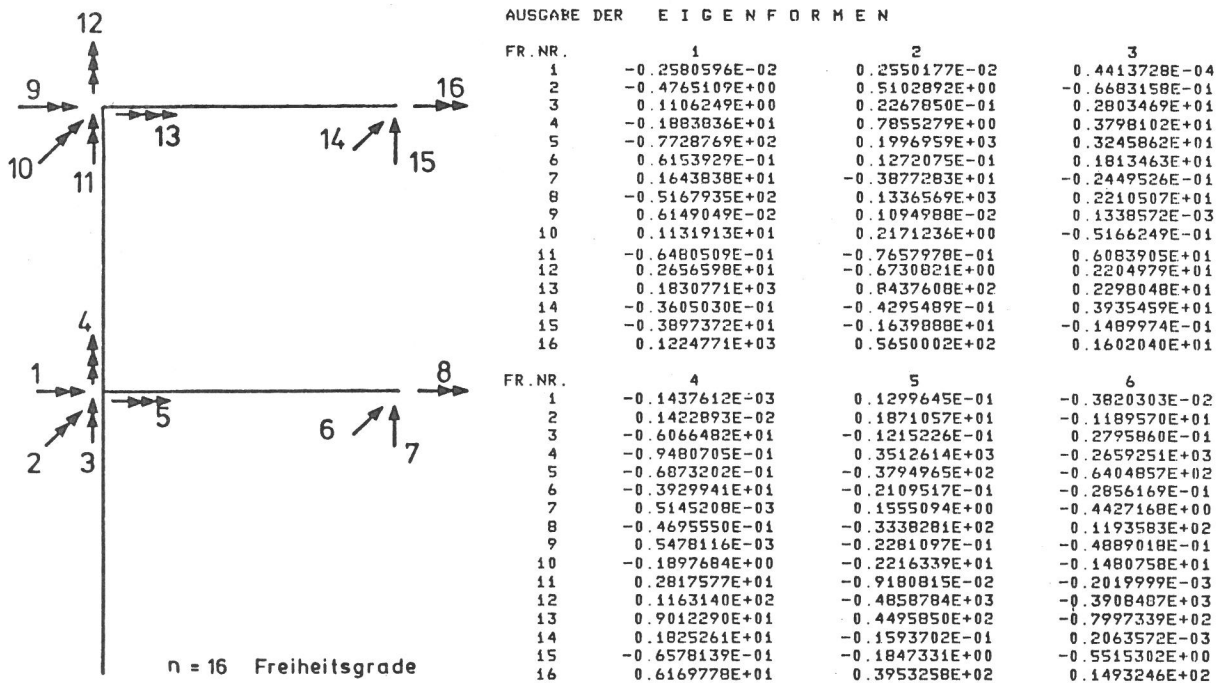


Bild 5.9

Normierte Eigenvektoren \hat{d}_i des impliziten EWP's eines Rahmens mit Knotenpunkten nach Bild 5.8 und Stäben nach Bild 5.6

Durch die gekoppelten Biegetorsionsbewegungen der einzelnen Stäbe treten über die biegesteifen Rahmenecken zusätzliche Kopplungen mit der Biegung in x_2 -Richtung auf, so daß alle Eigenvektoren in Bild 5.9 räumliche Schwingungsformen beschreiben. Die Hauptan-

teile des 1. Eigenvektors sind Gegentaktbewegungen der Freiheitsgrade 8 und 16 bzw. 7 und 15. Beim 2. Eigenvektor befinden sich diese Freiheitsgrade in Gleichtaktbewegung. Der 3. Eigenvektor zeigt eine gleichsinnige Bewegung der Freiheitsgrade 6 und 14, die beim 4. Eigenvektor gegensinnig verläuft, usw.. Der Eigenwert-Lösungsalgorithmus nach Abschnitt 4.1 und 4.2 arbeitet trotz der engen Nachbarschaft von ω_3^2 und ω_4^2 einwandfrei.

Neben der hier dargestellten Diskretisierungsproblematik, die lediglich die mathematisch, mechanische Seite des technischen Problems betrifft, werden die Ergebnisse natürlich wesentlich von einer treffenden Wahl der Systemparameter beeinflusst. Werden beispielsweise die Wölbfedern in Bild 5.8 zwischen $c_\varphi = 0$ und $c_\varphi \rightarrow \infty$ variiert; so vermindert sich der 1. Eigenwert in Tabelle 5.4 bei wölbfreier Lagerung um ca. 1,9 % und erhöht sich ω_1^2 bei wölbstarrem Anschluß um ca. 52 %. Wird die Massenkopplung bei allen Elementen nicht berücksichtigt ($g_2 = 0$), so erhöht sich der 1. Eigenwert in Tabelle 5.4 bei wölbbelastischer Lagerung um ca. 35 %. Die Eigenformen des Rahmens von Bild 5.9 stellen sich dann zum einen als reine Biegebewegungen in der Ebene und zum anderen als Biegeverformungen senkrecht zur Rahmenebene kombiniert mit Torsion der Elemente ein. Auch der in den Rechenbeispielen jeweils vorausgesetzte biegestarke Knotenanschluß ist oft eine zur grobe Idealisierung des realen Systems. Elastische Nachgiebigkeiten im Knotenbereich können z.B. durch Einführung von Gelenken mit Drehfedern oder entsprechend eines Vorschlags von Scharifi-Rogge (1987) durch Modifikationen der Elementmatrizen simuliert werden, wobei letztgenanntes Verfahren ohne zusätzliche Freiheitsgrade auskommt.

Eine Vielzahl von weiteren System- und Parameteruntersuchungen mit gekoppelten Biegetorselementen wäre möglich, würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Beispielsweise ist die Wirkung der geometrischen Kopplung der Elemente (siehe Abschnitt 2.2) erst kurz vor dem Erreichen der Kippinstabilität von größerem Einfluß auf die Eigenfrequenzen des Systems, so daß für eine Schwingungesuntersuchung unter Gebrauchslasten die Verwendung der hier vorgestellten frequenzabhängigen Ansatzfunktionen auch in höheren Frequenzbereichen sehr gute Näherungslösungen erwarten läßt.

6 Das gelöste EWP als Grundlage der Berechnung gedämpfter erzwungener Schwingungen

Mit den unter Abschnitt 2.2 getroffenen Voraussetzungen wurden nur lineare Schwingungen um die statische Ruhelage zugelassen. In den Abschnitten 3 bis 5 erfolgte die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenformen eines ungedämpften mechanischen Systems. Die weiteren Lösungswege bei deterministischer oder stochastischer Erregung unter Einbeziehung möglichst realistischer Dämpfungsannahmen sind aus der Literatur bekannt (Clough u.a. (1975), Waller u.a. (1975), Bathe (1986)), so daß hier lediglich auf die "Schnittstellen" zu diesen, als Modalanalyse bezeichneten Verfahren eingegangen wird.

Bei Annahme geschwindigkeitsproportionaler, modaler Dämpfung, die z.B. steifigkeits- und/oder massenproportional sein kann, läßt sich die Antwort eines linearen mechanischen Systems $\underline{d}(t)$ bei deterministischer Erregung durch einen konservativen Kraftvektor $\underline{f}(t)$ als Überlagerung der mit einer zeitabhängigen Koordinate versehenen Eigenvektoren $\hat{\underline{d}}_i$ darstellen. Es gilt

$$\underline{d}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\underline{d}}_i q_i(t). \quad (6.1)$$

Die generalisierten Koordinaten $q_i(t)$ lassen sich aus den Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_i(t) + 2D_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = f_{\text{gen},i}(t) \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (6.2)$$

berechnen, wobei durch die spezielle Normierungsmethode der Eigenvektoren von Gl. (4.20) die generalisierte Erregung angegeben werden kann zu

$$f_{\text{gen},i}(t) = \hat{\underline{d}}_i^T \underline{f}(t). \quad (6.3)$$

Mit ω_i wird die i -te Eigenfrequenz des Systems und mit D_i der Dämpfungsgrad (modale Dämpfung) der i -ten Eigenform charakterisiert. Die Anfangsbedingungen $q_i(t=0)$ und $\dot{q}_i(t=0)$ für Gl. (6.2) lassen sich aus dem Systembewegungszustand $\underline{d}(t=0)$ und $\dot{\underline{d}}(t=0)$ berechnen:

$$\left. \begin{aligned} q_i(t=0) &= \hat{\underline{d}}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \underline{d}(t=0) \\ \dot{q}_i(t=0) &= \hat{\underline{d}}_i^T [\underline{M}(\omega_i, \omega_i)] \dot{\underline{d}}(t=0). \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2, \dots, \infty \quad (6.4)$$

Sofern die Eigenvektoren $\hat{\underline{d}}_i$ mit Hilfe des allgemeinen EWP's berechnet wurden, sind in Gl. (6.4) die entsprechenden Massen-

matrizen $\underline{M}(\omega_{\text{fest}})$ bzw. \underline{M} aus Hermiteansätzen zu verwenden. Die Anzahl der Eigenvektoren ist dann durch die Ordnung n des EWPs beschränkt.

Für schwach gedämpfte Systeme ($0 < D_i < 1$) läßt sich Gl. (6.2) z.B. bei stückweise linearer Erregerfunktion mit exakten und unbedingt stabilen Integrationsalgorithmen von Krings u.a. (1979) im Zeitbereich lösen. Werden Gl. (6.1) bis (6.3) formal Fourier-Transformationen unterworfen, folgt die Systemantwort $\underline{d}(\omega)$ im Frequenzbereich durch

$$\underline{d}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{f}(\omega) \quad , \quad (6.5)$$

wobei die komplexe Übertragungsfunktionsmatrix des mechanischen Systems aus modalen Größen aufgebaut ist

$$\underline{H}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\underline{\hat{d}}_i \underline{\hat{d}}_i^T}{-\omega^2 + 2j\omega D_i \omega_i + \omega_i^2} \quad . \quad (6.6)$$

Die stochastische Schwingungsanalyse wird hier nur für stationäre, zentrierte Prozesse dargestellt. Wird weiterhin Ergodizität des Prozesses $\underline{x}(t)$ vorausgesetzt (siehe Heinrich u.a. (1977)), so ist eine Realisierung $\underline{x}(t)$ repräsentativ für den gesamten Prozeß. Aus Konvergenzgründen kann nur mit der "abgeschnittenen" Realisierung

$$\underline{x}_T(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \underline{x}(t) & \text{für } -\frac{T}{2} < t < +\frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (6.7)$$

die Fourier-Transformation

$$\underline{x}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.8)$$

durchgeführt werden. Die Spektraldichtematrix \underline{S}_{xx} errechnet sich zu

$$\underline{S}_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \underline{x}_T(\omega) \underline{x}_T^{\bar{T}}(\omega) \right], \quad (6.9)$$

wobei $(\bar{\cdot})$ konjugiert komplex bedeutet.

Wird $\underline{f}(t)$ als eine einzelne Realisierung aus einem Erregerprozeß aufgefaßt, so ergibt sich aus Gl. (6.5) mit (6.9)

$$\underline{S}_{dd}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{H}^{\bar{T}}(\omega) \quad (6.10)$$

die Spektraldichtematrix der Systemantwort und, nach Integration über den gesamten Frequenzbereich, die Kovarianzmatrix

$$\underline{\underline{C}}_{dd} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{S}}_{dd}(\omega) d\omega. \quad (6.11)$$

Diese im allgemeinen vollbesetzte symmetrische Matrix der Ordnung n ist im vorliegenden Falle reell und enthält z.B. auf der Diagonalen die Varianzen der Systemverschiebungsgrößen infolge der stochastischen Erregung.

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, liegt der Hauptvorteil der hier dargestellten Lösungsmethoden darin, daß in Gl. (6.1) bzw. (6.6) im allgemeinen nur sehr wenige Eigenformen, deren Eigenfrequenzen im Bereich des Erregerspektrums liegen, berücksichtigt werden müssen, da nur diese nennenswerte Beiträge zur Gesamtantwort des mechanischen Systems nach Gl. (6.5) bzw. (6.10) liefern.

7 Zusammenfassung

Bei statischen und dynamischen Analysen von mechanischen Systemen aus Stäben mit offenem Querschnitt haben sich Elementierungsverfahren auf der Basis der Finite-Element-Methode durchgesetzt. Bei linearen Schwingungen um die statische Ruhelage läßt sich die Antwort des Systems auf deterministische oder stochastische Erregungen aus modalen Größen (Eigenfrequenzen, Eigenvektoren und Dämpfungsparameter) zusammensetzen.

Mit der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, den durch die Ansatzfunktionen bedingten Diskretisierungsfehler bei dynamischen Untersuchungen von Rahmentragwerken ohne Änderung der Matrizenordnung klein zu halten. Ausgehend von der exakten Lösung der entkoppelten Biege- und Wölbkrafttorsionsschwingung unter Normalkräfteinfluß werden frequenzabhängige Elementverschiebungsverläufe formuliert, die auch als Ansatzfunktionen für das gekoppelte Problem verwendet werden. Mit einem entsprechend zu wählenden festgehaltenen Frequenzparameter ω_{fest} führen diese Ansätze zu einem algebraischen, allgemeinen Eigenwertproblem. Für $\omega_{\text{fest}} \rightarrow 0$ gehen die frequenzabhängigen Ansatzfunktionen in statische Ansätze (z.B. Hermite-Polynome) über. Mit ständig angepaßtem Frequenzparameter ergibt sich ein implizites Eigenwertproblem, bei dem alle Matrizenglieder Funktion des Eigenwertes sind. Sämtliche Matrizengenerierungen können jeweils ohne numerische Integrationen bzw. Matrizeninversionen geschlossen durchgeführt werden.

Zur Lösung des impliziten Eigenwertproblems wird ein auf Sturmschen Ketten basierender Algorithmus vorgestellt, mit dem auch eng benachbarte und mehrfache Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren effizient ermittelt werden können. Für Elemente mit gekoppelter Biege-Torsionsbewegung sind die frequenzabhängigen Ansatzfunktionen Näherungen, die für schwache Kopplung wesentlich geringere Fehler in den Eigenwerten gegenüber der Verwendung von Hermiteansätzen erwarten lassen und für verschwindende Kopplung in die exakte Lösung übergehen.

Beispielhaft werden Rahmen aus elastischen Stäben mit gekoppelter und ungekoppelter Biege- und Torsionsschwingung untersucht. Weiterhin werden Hinweise für die Einsatzbereiche statischer und frequenzabhängiger Ansatzfunktionen gegeben. Bei Systemen, die nur zur Erzielung höherer Eigenwertgenauigkeit feiner diskreti-

siert werden müssen als es die Topologie des mechanischen Systems erzwingt, bietet die Verwendung der frequenzabhängigen Ansatzfunktionen, vor allem bei Implementierung des Programmes auf einem Personal-Computer, Vorteile gegenüber bisher gebräuchlichen Matrizenkondensationsverfahren, da beim impliziten Eigenwertproblem nur eine einzige und zudem relativ kleine Systemmatrix gespeichert werden muß.

8 Literatur

- Archer, J. S. (1963):
Consistent mass matrix for distributed mass systems
J. Struct. Div., Proc. ASCE Vol. 89 ST4, S. 161 - 178
- Argyris, J. H. (1954/55):
Energy theorems and structural analysis
Part 1: General theory
Aircraft Engineering 26, S. 347 - 356, 383 - 387,
394; 27, S. 42 - 58, 80 - 94, 125 - 135, 145 - 158
- Argyris, J. H. (1957):
Die Matrizentheorie der Statik
Ingenieur-Archiv 25, S. 174 - 192
- Argyris, J. H. (1966):
Die Matrizentheorie der Statik (Deformationsmethode)
5. Lehrgang f. Raumfahrttechnik, Stuttgart,
Bd. IV: Bauwesen und Aeroelastizität,
Beitrag Nr. 301, Deutsche Gesellschaft f.
Flugwissenschaften e.V.
- Argyris, J. H. und Radaj, D. (1970):
Berechnung dünnwandiger Stabsysteme im Hauptsystem
unter Berücksichtigung wölbelastischer Lagerung
Institut für Statik und Dynamik der Luft- und
Raumfahrtkonstruktionen der Universität Stuttgart,
Rep. Nr. 78
- Balmer, H. A. (1969):
General beam element for ASKA
Institut für Statik und Dynamik der Luft- und
Raumfahrtkonstruktion der Universität Stuttgart,
Rep. No. 75

- Banerjee, J. R. und Williams, F. W. (1985):
 Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for
 a range of tapered beams
 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 21,
 S. 2289 - 2302
- Barsoum, R. (1970):
 A finite element formulation for the general
 stability analysis of thin-walled members
 Doctoral dissertation Cornell University,
 Ithaca, Michigan
- Bathe, K.-J. (1986):
 Finite-Element-Methoden
 Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann
 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,
 Tokyo, 820 S.
- Bathe, K.-J. und Ramaswamy, S. (1980):
 An accelerated subspace iteration method
 J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 23, S. 313 - 331
- Bathe, K.-J. und Wilson, E. (1976):
 Numerical methods in finite element analysis
 Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs,
 New Jersey, 528 S.
- Benito, R. und Sridharan, S. (1985):
 Interactive buckling analysis with finite strips
 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 21,
 S. 145 - 161
- Beskos, D. E. (1977):
 Frame work stability by finite element method
 J. Struct. Div., Proc. ASCE Vol. 103, S. 2273 - 2276
- Beverungen, G. (1976):
 Geometrisch nichtlineare Berechnung des Spannungs-
 und Stabilitätsproblems räumlich gekrümmter Stäbe
 Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven
 Ingenieurbau, Techn.-Wiss. Mitt. Nr. 76 - 13
- Bornscheuer, F. W. (1952):
 Systematische Darstellung des Biege- und Verdreh-
 vorganges unter besonderer Berücksichtigung der
 Wölbkrafttorsion
 Stahlbau 21, S. 1 - 9
- Carl, J. (1969):
 Näherungslösung des nichtlinearen Biege-
 Torsionsproblems für dünnwandige Stäbe mit
 offenem Profil
 Dissertation TU Berlin

- Chaudhary, A. B. (1982):
Generalized stiffness matrix for thin walled beams
J. Struc. Div., Proc. ASCE, Vol. 108, S. 559 - 577
- Chen, W. F. und Atsuta T. (1977):
Theory of beam columns, Vol. 2: Space behavior
and design
McGraw-Hill, Inc., New York, 732 S.
- Cheung, Y. K. (1976):
Finite strip method in structural analysis
Pergamon Press, Oxford, 232 S.
- Chawalla, E. (1950):
Über die gekoppelten Biegungs- und Torsionsschwin-
gungen belasteter Stäbe mit offenem, einfach
symmetrischem Querschnitt
Österreichische Bauzeitschrift 5, S. 60 - 64, 79 - 83
- Clough, R. W. und Penzien, J. (1975):
Dynamics of structures
Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD, 634 S.
- Cohen, E. und McCallion, H. (1969):
Improved deformation functions for the finite
element analysis of beam systems
Int. J. of Numerical Methods in Engineering 1,
S. 163 - 167
- Coull, A. und Mukherjee, P. R. (1978):
Natural vibrations of shear wall bulidings on
flexible supports
Earthquake Engineering a. Structural Dynamics 6,
S. 295 - 315
- Dankert, J. (1977):
Numerische Methoden der Mechanik
Springer-Verlag, Wien, New York, 318 S.
- Duschek, A. (1960):
Vorlesungen über höhere Mathematik, III. Band
Springer-Verlag, Wien, 512 S.
- Duschek, A. und Hochrainer A. (1961):
Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer
Darstellung, Teil II: Tensoranalysis
2. Auflage, Springer-Verlag, Wien, New York, 334 S.
- Falk, S. (1963):
Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit Hermite-
Interpolationspolynomen
ZAMM 43, S. 149 - 166

- Federhofer, K. (1947):
Eigenschwingungen von geraden Stäben mit dünnwandigen und offenen Querschnitten
Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, II a, Band 156, S. 393 - 416
- Fuhrke, H. (1955):
Exakte und näherungsweise Bestimmung von Stabwerksschwingungen
Ingenieur-Archiv 23, S. 329 - 348
- Fuhrke, H. (1956):
Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls
Ingenieur-Archiv 24, S. 27 - 42
- Friberg, P. O. (1983):
Coupled vibrations of beams - an exact dynamic element stiffness matrix
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 19, S. 479 - 493
- Friberg, P. O. (1985):
Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 21, S. 1205 - 1228
- Gladwell, G. M. L. (1964 a):
Branch mode analysis of vibrating systems
J. of Sound and Vibration 1, S. 41 - 59
- Gladwell, G. (1964 b):
The vibration of frames
J. of Sound and Vibration 1, S. 402 - 425
- Gupta, K. K. (1972):
Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 4, S. 379 - 404
- Gupta, K. K. (1973):
Eigenproblem solution by a combined Sturm sequence and iteration technique
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 7, S. 17 - 42
- Gupta, K. K. (1981):
Development of a unified numerical procedure for free vibration analysis of structures
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 17, S. 187 - 198

- Gupta, A. K. (1985):
 Vibration of tapered beams
 J. of Structural Engineering, ASCE
 Vol. 111, S. 19 - 36
- Gupta, A. K. (1986):
 Frequency-dependent matrices for tapered beams
 J. of Structural Engineering, ASCE
 Vol. 112, S. 85 - 103
- Habedank, G. (1972):
 Berechnung der Eigenfrequenzen von Stab- und
 Balken-Strukturen mit Hilfe von Vergleichsfunktionen
 Dissertation TH Darmstadt
- Heilig, R. (1951):
 Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen
 Trägern mit beliebiger offener Profilform mit
 Vorlasten
 Ingenieur-Archiv 19, S. 231 - 254
- Heinrich, W. und Hennig, K. (1977):
 Zufallsschwingungen mechanischer Systeme
 Vieweg Braunschweig, Reihe Wissenschaft, 228 S.
- Hohenemser, K. und Prager, W. (1933):
 Dynamik der Stabwerke
 Springer-Verlag, Berlin
- Hollburg, U. (1981):
 Das Verhalten von elektrisch angetriebenen dreh-
 und biegeelastischen Rotoren beim Hochlauf
 Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften
 Reihe 11 Nr. 42, 174 S.
- Hopper, C. T.; Simpson, A. und William, F. W. (1980):
 A study of the bound on eigenvalues of a transcenden-
 tal dynamic stiffness matrix provided by a simply
 derived linear matrix pencil
 J. Struct. Mech. 8, S. 365 - 422
- Jirousek, J. (1981):
 A family of variable section curved beam and thick-
 shell or membrane-stiffening isoparametric elements
 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 17,
 S. 171 - 186
- Kappus, R. (1937):
 Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem
 Profil im elastischen Bereich
 Luftfahrtforschung 14, S. 444 - 457

- Koloušek, V. (1953):
 Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen
 Fachbuchverlag GmbH, Leipzig
- Koloušek, V. (1962):
 Dynamik der Baukonstruktionen
 VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 276 S.
- Krahula, J. L. (1967):
 Analysis of bent and twisted bars using the
 finite element method
 AIAA 5, S. 1194 - 1197
- Krajcinovic, D. (1969):
 A consistent discrete element technique for
 thin-walled assemblages
 Int. J. Solids Struct. 5, S. 639 - 662
- Krenk, S. und Gunneskov, O. (1981):
 Statics of thin-walled pretwisted beams
 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 17,
 S. 1407 - 1426
- Krings, W. und Waller, H. (1979):
 Zur Berechnung von Bauwerksschwingungen bei
 Kernkraftwerken
 Bauingenieur 54, S. 291 - 298
- Lembcke, H.-R. (1952):
 Biege- und Torsionsschwingungen von Stäben mit
 beliebigen Querschnitten
 Ingenieur-Archiv 20, S. 91 - 105
- Linnert, M. (1970a):
 Zur Theorie der gekoppelten Biege-Torsions-Schwingungen
 Maschinenbautechnik 19, S. 197 - 200
- Linnert, M. (1970b):
 Die Berechnung der gekoppelten Biege-Torsions-
 Schwingungen eines einachsigen symmetrischen Balkens
 Maschinenbautechnik 19, S. 247 - 251
- Marguerre, K. und Uhrig, R. (1964):
 Berechnung vielgliedriger Schwingerketten
 I. Das Übertragungsverfahren und seine Grenzen
 ZAMM 44, S. 1 - 21
- Marguerre, K. und Wölfel, H. (1979):
 Technische Schwingungslehre, lineare Schwingungen
 vielgliedriger Strukturen
 BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 338 S.

Mei, C. (1970):

Coupled vibrations of thin-walled beams of open section using the finite element method
Int. J. Mechanical Sciences 12, S. 885 - 891

Myklestead, N. O. (1945):

New method of calculating natural modes of coupled bending-torsion vibration of beams
Transactions of the ASME Vol. 67

Nishino, F.; Kasemset, C. und Lee, S. L. (1974):

Variational formulation of stability problems of thin-walled members
Ingenieur-Archiv 43, S. 58 - 68

Nour-Omid, B.; Parlett, B. N. und Taylor, R. L. (1983):

Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue problems
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 19, S. 859 - 871

Paz, M. und Dung, L. (1975):

Power series expansion of the general stiffness matrix for beam elements
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 9, S. 449 - 459

Pestel, E. und Mahrenholtz, O. (1959):

Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen
Ingenieur-Archiv 28, S. 255 - 262

Peters, G. und Wilkinson, J. H. (1969):

Eigenvalues of $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{B} \underline{x}$ with band symmetric \underline{A} and \underline{B}
Comput. J. 12, S. 398 - 404

Petersen, C. (1970):

Abgespannte Maste und Schornsteine, Statik und Dynamik
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 111 S

Puckett, J. A. und Lang, G. J. (1986):

Compound strip method for free vibration analysis of continuous plates
J. of Engineering Mechanics. ASCE, Vol. 112, S. 1375 - 1389

Radaj, D. (1970):

Dünnwandige Stäbe und Stabsysteme mit allgemeiner Systemlinie und wölbelastischer Lagerung
Bericht des Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktion der Universität Stuttgart Nr. 79

- Rajasekaran, S. (1971):
 Finite element analysis of thin-walled members
 of open section
 Doctoral dissertation University of Alberta,
 Edmonton, Canada
- Renschling, D. (1969):
 Beitrag zur Berechnung mehrfeldriger, beliebig
 gelagerter dünnwandiger Stäbe mit einfach- oder
 unsymmetrischem offenem Querschnitt unter Normal-
 kraft- und Querbelastung als Verzweigungsproblem
 oder Spannungsproblem II. Ordnung nach dem
 Übertragungsmatrizen-Verfahren
 Dissertation TH Darmstadt, 210 S.
- Richards, T. H. und Leung, Y. T. (1977):
 An accurate method in structural vibration analysis
 J. of Sound and Vibration 55, S. 363 - 376
- Schade, D. (1969):
 Zur Wölbkrafttorsion von Stäben mit dünnwandigem
 Querschnitt
 Ingenieur-Archiv 38, S. 25 - 34
- Schalk, M. (1973):
 Zur Schwingungsberechnung balkenartiger Tragwerke;
 gekoppelte Biege-Torsions-Schwingungen von Bauwerken
 Dissertation TH Darmstadt
- Scharifi-Rogge (1987):
 Statische und dynamische FEM-Untersuchung räumlicher
 Rahmentragwerke mit nicht starren Knotenanschlüssen
 Dissertation TU Berlin
- Schrader, K. H. (1962):
 Erzwungene, gekoppelte Biege- und Drillschwingungen
 prismatischer Stäbe mit dünnwandigen Querschnitten
 unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion
 Dissertation TU Berlin
- Schrader, K. H. (1965):
 Übertragungsmatrizen bei Schwingungen dünnwandiger
 Stäbe mit offenen Profilen bei Kopplung von Biegung
 und Drillung
 Ingenieur-Archiv 34, S. 321 - 329
- Schwarz, H. R. (1977):
 Two algorithms for treating $\underline{Ax} = \lambda \underline{Bx}$
 Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 12, S. 181 - 199
- Schwarz, H. R. (1980):
 Methode der finiten Elemente
 Teubner Studienbücher: Mathematik, 320 S.

- Schwarz, H. R. (1981):
 Fortran-Programme zur Methode der finiten Elemente
 Teubner Studienbücher: Mathematik, 207 S.
- Sotiropoulos, G. H. (1978):
 Approximate determination of the dynamic stiffness
 coefficients of beams
 Ingenieur-Archiv 47, S. 319 - 327
- Speier, H. (1960):
 Gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen von
 beliebigen stabförmigen Körpern
 Mitteilungen des Instituts für Statik der
 TH-Hannover, Hrsg. A. Pflüger, Hannover
- Stein, E.; Klöhn, C. und Kießlich, H.-P. (1982):
 Zur Subspace-Iteration bei Stabilitäts- und
 Schwingungsproblemen ebener Stabwerke
 Bauingenieur 57, S. 231 - 236
- Steinbach, W. (1965):
 Die Theorie 2. Ordnung für den räumlich belasteten
 Stab mit dünnwandigem offenem Querschnitt
 Stahlbau u. Baustatik - Aktuelle Probleme,
 Festschrift H. Beer und K. Sattler, Springer-Verlag,
 Wien, S. 292 - 335
- Stoer, J. (1976):
 Einführung in die Numerische Mathematik I
 2. Auflage, Heidelberger Taschenbücher,
 Springer-Verlag, Berlin, 291 S.
- Szabó, I. (1977):
 Höhere Technische Mechanik
 Korr. Nachdruck der 5. Auflage, Springer-Verlag,
 Berlin, 546 S.
- Tebedge, N. (1972):
 Applications of the finite-element method to beam-
 column problems
 Doctoral dissertation Lehigh University, Bethlehem,
 176 S.
- Thomson, W. T. (1950):
 Matrix solution for the vibration of non uniform beams
 Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics,
 Vol. 17
- Yang, Y.-B. und McGuire, W. (1984):
 A procedure for analysing space frames with partial
 warping restraint
 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 20,
 S. 1377 - 1398

- Yang, Y.-B. und McGuire, W. (1986a):
Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis
J. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112,
S. 853 - 877
- Yang, Y.-B. und McGuire, W. (1986b):
Joint rotation and geometric nonlinear analysis
J. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112,
S. 879 - 905
- Wang, C. K. (1973):
Computer methods in advances structural analysis
Intext educational publishers, New York, 401 S.
- Wagenknecht, G. (1974):
Beitrag zur Berechnung von Systemen aus geraden
dünnwandigen Stäben mit offenem veränderlichen
Querschnitt nach Spannungstheorie 2. Ordnung
Institut für konstruktiven Ingenieurbau Ruhr-
Universität Bochum, Mitteilung Nr. 74 - 8
- Waldvogel, P. (1982):
Bisection for $A x = \lambda B x$ with matrices of variable
band width
Computing 28, S. 171 - 180
- Waller, H. und Krings, W. (1975):
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerks-
dynamik
BI-Wissenschaftsverlag, 377 S.
- Williams, F. W. (1986 a):
An algorithm for exact eigenvalue calculations for
rotationally periodic structures
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 23, S.
609 - 622
- Williams, F. W. (1986 b):
Exact eigenvalue calculations for structures with
rotationally periodic substructures
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 23,
S. 695 - 706
- Wittrick, W. H. und William, F. W. (1971):
A general algorithm for computing natural frequen-
cies of elastic structures
Q. J. Mech. Appl. Math., Vol. 24, S. 263 - 284
- Wlassow, W. S. (1964):
Dünnwandige elastische Stäbe, Bd. I
VEB Verlag für Bauwesen Berlin

- Wlassow, W. S. (1965)
Dünnwandige elastische Stäbe, Bd. II
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin
- Wunderlich, W.; Obrecht, H. und Schrödter, V. (1986):
Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying
behaviour of thin-walled spatial beam structures
with warping constraints
Int. J. for Numerical Methods in Engineering 22,
S. 671 - 695
- Ziegler, H. (1952):
Knickung gerader Stäbe unter Torsion
ZAMP 3, S. 96 - 119
- Zurmühl, R. (1950):
Matrizen
Springer-Verlag Berlin, 427 S.
- Zurmühl, R. (1958):
Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen
mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen
Ingenieur-Archiv 26, S. 398 - 407
- Zurmühl, R. (1963):
Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biege-
schwingungen nach der Deformationsmethode
Ingenieur-Archiv 32, S. 201 - 213

A.1 Torsionsschwingung ungekoppelt mit Normalkraftwirkung ohne Verwölbung

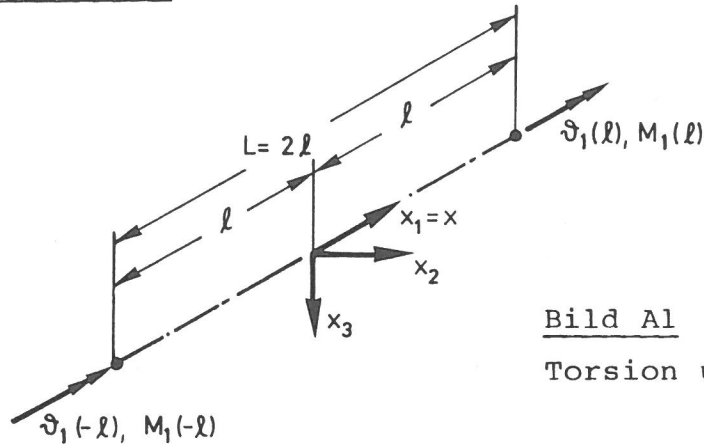


Bild A1

Torsion um die x-Achse

$$\vartheta_1(x, t) = \hat{h}_1^T(x) \hat{d}_1(t)$$

$$\hat{h}_1^T(x) = \hat{n}_1^T(x) \hat{A}_1^{-1}$$

$$\hat{n}_1^T(x) = \begin{bmatrix} \sin \hat{\lambda}_1 x & \cos \hat{\lambda}_1 x \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & \hat{c}_1 \\ -\frac{\hat{c}_1}{2\hat{c}_1\hat{s}_1} & \frac{\hat{c}_1}{2\hat{c}_1\hat{s}_1} \\ \hat{s}_1 & \hat{s}_1 \\ \frac{\hat{s}_1}{2\hat{c}_1\hat{s}_1} & \frac{\hat{s}_1}{2\hat{c}_1\hat{s}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1(-l) \\ M_1(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1^{11} & \hat{F}_2^{11} \\ \text{sym} & \hat{F}_1^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1(-l) \\ \vartheta_1(l) \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_1 = \sin \hat{\lambda}_1 l, \quad \hat{c}_1 = \cos \hat{\lambda}_1 l$$

$$\hat{\lambda}_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho I_p}{GJ_T + i_p^2 P}}$$

$$\hat{f}_1 = \hat{K}_{\text{dyn}}^{11} \hat{d}_1$$

$$\hat{F}_1^{11} = (GJ_T + i_p^2 P) \frac{\hat{\lambda}_1 (\hat{c}_1^2 - \hat{s}_1^2)}{2 \hat{c}_1 \hat{s}_1}, \quad \hat{F}_2^{11} = -(GJ_T + i_p^2 P) \frac{\hat{\lambda}_1}{2 \hat{c}_1 \hat{s}_1}$$

$$\hat{K}_{\text{dyn}}^{11} \approx \hat{K}^{11} + \hat{G}^{11} - \omega^2 \hat{M}^{11}$$

$$\hat{K}^{11} = \frac{GJ_T}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sym} & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{G}^{11} = \frac{i_p^2 P}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sym} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}^{11} = \rho I_p L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \text{sym} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

A.2 Längsschwingung

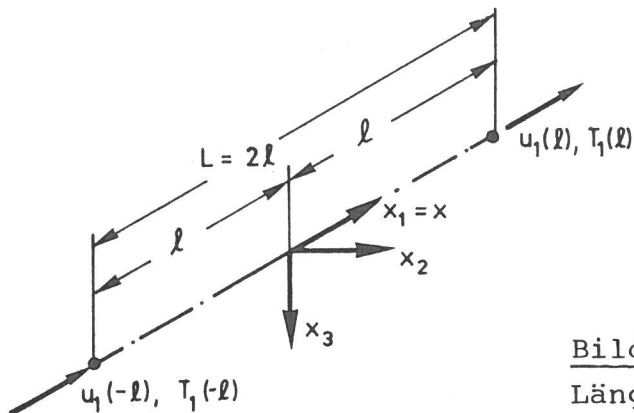


Bild A2

Längsschwingung in x_1 -Richtung

Es ergeben sich zu Anhang A.1 analoge Beziehungen:

$$\begin{bmatrix} T_1(-l) \\ T_1(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{00} & F_2^{00} \\ \text{sym} & F_1^{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(-l) \\ u_1(l) \end{bmatrix} \quad s_0 = \sin \lambda_0 l, \quad c_0 = \cos \lambda_0 l$$

$$\lambda_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho F}{EF}}$$

$$\underline{\underline{f}}_0 = \underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{00} \underline{\underline{d}}_0$$

$$F_1^{00} = EF \frac{\lambda_0 (c_0^2 - s_0^2)}{2 c_0 s_0}, \quad F_2^{00} = -EF \frac{\lambda_0}{2 c_0 s_0}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\text{dyn}}^{00} \approx \underline{\underline{K}}^{00} - \omega^2 \underline{\underline{M}}^{00}$$

$$\underline{\underline{K}}^{00} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sym} & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}^{00} = \rho FL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \text{sym} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

A.3 Seilschwingung

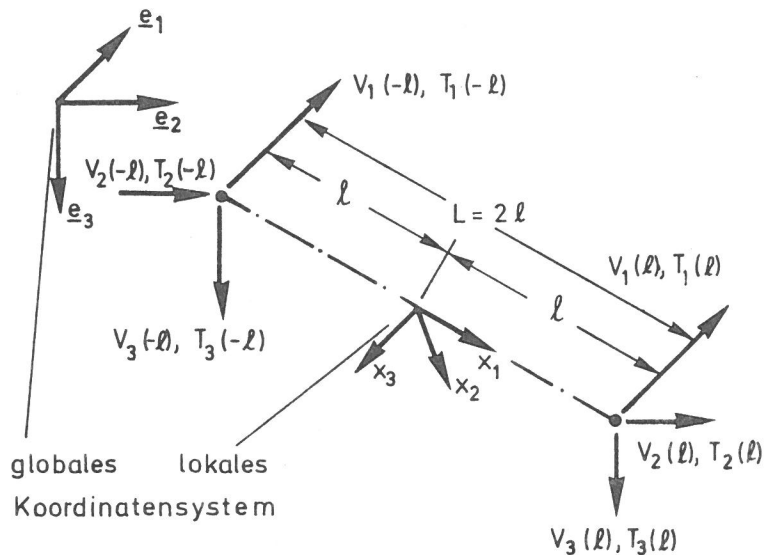


Bild A3

Seilschwingung um die statische Ruhelage

Für elementweise flachen Durchhang und konstanten Horizontalzug P im Seil ergeben sich für ein Element bezogen auf das globale Koordinatensystem (siehe Abschnitt 3.1.2) folgende Beziehungen:

$$\underline{f}_G = (\underline{K}_{Gdyn} + \underline{G}_{Gdyn}) \underline{d}_G$$

$$\underline{f}_G^T = [T_1(-l), T_2(-l), T_3(-l), T_1(l), T_2(l), T_3(l)]$$

$$\underline{d}_G^T = [V_1(-l), V_2(-l), V_3(-l), V_1(l), V_2(l), V_3(l)]$$

$$\underline{K}_{Gdyn} = \begin{bmatrix} F_1^{00} & \underline{K}^1 & & F_2^{00} & \underline{K}^1 \\ \text{sym} & & & F_1^{00} & \underline{K}^1 \end{bmatrix},$$

F_1^{00} und F_2^{00} von Anhang A.2

$$\hat{F}_1 = P \frac{\hat{\lambda}(\hat{c}^2 - \hat{s}^2)}{2\hat{c}\hat{s}},$$

$$\underline{G}_{Gdyn} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(\underline{I} - \underline{K}^1) & & \hat{F}_2(\underline{I} - \underline{K}^1) \\ \text{sym} & & \hat{F}_1(\underline{I} - \underline{K}^1) \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_2 = -P \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{c}\hat{s}},$$

$$\underline{K}^1 = \begin{bmatrix} l^2 & & lm & & ln \\ & & m^2 & & mn \\ \text{sym} & & & & n^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{c} = \cos \hat{\lambda} l,$$

$$\hat{s} = \sin \hat{\lambda} l,$$

$$\hat{\lambda} = \omega \sqrt{\frac{\rho F}{P}},$$

$$\underline{\underline{K}}_{Gdyn} + \underline{\underline{G}}_{Gdyn} \approx \underline{\underline{K}}_G + \underline{\underline{G}}_G - \omega^2 \underline{\underline{M}}_G ,$$

$$\underline{\underline{K}}_G + \underline{\underline{G}}_G = \frac{EF}{L} \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{K}}^1 + \varepsilon \underline{\underline{I}} & -\underline{\underline{K}}^1 - \varepsilon \underline{\underline{I}} \\ \hline \text{sym} & \underline{\underline{K}}^1 + \varepsilon \underline{\underline{I}} \end{array} \right] , \quad \varepsilon = \frac{P}{EF} ,$$

$$\underline{\underline{M}}_G = \rho FL \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} & \frac{1}{6} \underline{\underline{I}} \\ \hline \text{sym} & \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \end{array} \right] .$$

A.4 Integralwerte für N-Matrizen

$$\int_0^l s_q(x) s_r(x) dx = \begin{cases} \frac{-\lambda_q c_q s_r + \lambda_r s_q c_r}{\lambda_q^2 - \lambda_r^2} & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{1}{2}l - \frac{s_r c_r}{2\lambda_r} & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l c_q(x) c_r(x) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_q s_q c_r - \lambda_r c_q s_r}{\lambda_q^2 - \lambda_r^2} & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{1}{2}l + \frac{s_r c_r}{2\lambda_r} & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l S_q(x) S_r(x) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_q c_q s_r - \lambda_r s_q c_r}{\lambda_q^2 - \lambda_r^2} & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{s_r c_r}{2\lambda_r} - \frac{1}{2}l & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l C_q(x) C_r(x) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_q s_q c_r - \lambda_r c_q s_r}{\lambda_q^2 - \lambda_r^2} & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{s_r c_r}{2\lambda_r} + \frac{1}{2}l & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l s_q(x) S_r(x) dx = \frac{\lambda_r s_q c_r - \lambda_q c_q s_r}{\lambda_q^2 + \lambda_r^2}$$

$$\int_0^l c_q(x) C_r(x) dx = \frac{\lambda_r c_q s_r + \lambda_q s_q c_r}{\lambda_q^2 + \lambda_r^2}$$

A.5 Integrale für N_x -Matrizen

Abkürzungen: $s_{q+r} = \sin(\lambda_q + \lambda_r)l$, $s_{q-r} = \sin(\lambda_q - \lambda_r)l$, usw.

$$\int_0^l x s_q(x) c_r(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-l \left(\frac{c_{q-r}}{\lambda_q - \lambda_r} + \frac{c_{q+r}}{\lambda_q + \lambda_r} \right) + \frac{s_{q-r}}{(\lambda_q - \lambda_r)^2} + \frac{s_{q+r}}{(\lambda_q + \lambda_r)^2} \right] & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{1}{2} \left[\frac{l s_r^2}{\lambda_r} - \frac{l}{2\lambda_r} + \frac{s_r c_r}{2\lambda_r^2} \right] & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l x c_q(x) s_r(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[l \left(\frac{c_{q+r}}{\lambda_q + \lambda_r} + \frac{c_{q-r}}{\lambda_q - \lambda_r} \right) - \frac{s_{q+r}}{(\lambda_q + \lambda_r)^2} - \frac{s_{q-r}}{(\lambda_q - \lambda_r)^2} \right] & \text{für } \lambda_q \neq \lambda_r \\ \frac{1}{2} \left[\frac{l s_r^2}{\lambda_r} + \frac{l}{2\lambda_r} - \frac{s_r c_r}{2\lambda_r^2} \right] & \text{für } \lambda_q = \lambda_r \end{cases}$$

$$\int_0^l x c_q(x) s_r(x) dx = \frac{l(\lambda_r c_q c_r + \lambda_q s_q s_r)}{\lambda_q^2 + \lambda_r^2} + \frac{(\lambda_q^2 - \lambda_r^2) c_q s_r - 2\lambda_q \lambda_r s_q c_r}{(\lambda_q^2 + \lambda_r^2)^2}$$

$$\int_0^l x s_q(x) c_r(x) dx = \frac{l(\lambda_r s_q s_r - \lambda_q c_q c_r)}{\lambda_q^2 + \lambda_r^2} + \frac{(\lambda_q^2 - \lambda_r^2) c_q c_r + 2\lambda_q \lambda_r c_q s_r}{(\lambda_q^2 + \lambda_r^2)^2}$$

A.6 Integralmatrizen der Hermite-Polynome 2. und 4. Ordnung

$$H_{00} = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{22} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{x11} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 0 & 3L & 0 & -3L \\ & -2L^2 & -3L & 0 \\ & & 0 & 3L \\ \text{sym} & & & 2L^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{x02} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 30 & 21L & -30 & 9L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ 30 & 9L & -30 & 21L \\ -3L & -L^2 & 3L & -2L^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{21-12} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & L \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -L & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{00}^{22} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \text{sym.} & 2 \end{bmatrix} \quad H_{11}^{22} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sym.} & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{00}^{24} = \frac{L}{60} \begin{bmatrix} 21 & 3L & 9 & -2L \\ 9 & 2L & 21 & -3L \end{bmatrix}$$

$$H_{11}^{24} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{xO2}^{24} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 2L & -3 & L \\ 3 & L & -3 & 2L \end{bmatrix}$$

A.7 Polynomansätze 3. und 6. Ordnung

Neben den Randverschiebungen werden als zusätzliche Freiheitsgrade die Verschiebungen in Elementmitte berücksichtigt. Beispielsweise wird das Polynom 3. Ordnung für die Torsion ohne Verwölbung und das Polynom 6. Ordnung für die Wölbkrafttorsion angesetzt. Die Ansätze für Längs- bzw. Biegeschwingungen erfolgen analog. Mit einem Polynom 3. Ordnung (2. Grades) lautet der Ansatz

$$\vartheta_1(x, t) = \underline{h}^T(x) \underline{d}_1(t) \quad ,$$

wobei für

$$\underline{h}^T(x) = \underline{n}^T(\xi) \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{n}^T(\xi) = [1, \xi, \xi^2]$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & | & 2 & | & 0 \\ \hline -1 & | & 0 & | & 1 \\ \hline 1 & | & -2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_1^T = [\vartheta_1(-l), \vartheta_1(0), \vartheta_1(l)]$$

gilt.

Die Torsionsmassenmatrix errechnet sich zu

$$\underline{M}^{11} = \rho I_p \underline{H}_{00}^{33}$$

mit

$$\underline{H}_{00}^{33} = l \underline{A}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{n} \underline{n}^T d\xi \underline{A}^{-1} = \frac{L}{30}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & | & 2 & | & -1 \\ \hline & & 16 & & 2 \\ \hline \text{sym} & & & & 4 \end{bmatrix}$$

und für die Steifigkeitsmatrix ergibt sich

$$\underline{K}^{11} = G J_T \underline{H}_{11}^{33}$$

mit

$$\underline{H}_{11}^{33} = \frac{1}{l} \underline{A}^{-1T} \int_{-1}^1 \underline{n},_{\xi} \underline{n},_{\xi}^T d\xi \underline{A}^{-1} = \frac{1}{3L}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & | & -8 & | & 1 \\ \hline & & 16 & & -8 \\ \hline \text{sym} & & & & 7 \end{bmatrix} .$$

Mit einem Polynom 6. Ordnung (5. Grades) lautet der Ansatz

$$\mathcal{V}_1(x, t) = \underline{\underline{h}}^T(x) \underline{\underline{d}}_1(t) ,$$

wobei für

$$\underline{\underline{h}}^T(x) = \underline{\underline{n}}^T(\xi) \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{n}}^T(\xi) = [1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5]$$

gilt. Die Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ kann aus der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_1(-\ell) \\ \mathcal{V}_{1,1}(-\ell) \\ \mathcal{V}_1(0) \\ \mathcal{V}_{1,1}(0) \\ \mathcal{V}_1(\ell) \\ \mathcal{V}_{1,1}(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell} & -\frac{4}{\ell} & \frac{5}{\ell} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & \frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell} & \frac{4}{\ell} & \frac{5}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}}_1 = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{a}}$$

berechnet werden zu

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\ell & 0 & 0 \\ 4 & \ell & -8 & 0 & 4 & -\ell \\ -6 & -\ell & 0 & -8\ell & 6 & -\ell \\ -2 & -\ell & 4 & 0 & -2 & \ell \\ 3 & \ell & 0 & 4\ell & -3 & \ell \end{bmatrix} .$$

A.8 Berechnung der Richtungskosinus zwischen \underline{b}_i und \underline{e}_j

Für den Fall, daß \underline{b}_2 parallel zur $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ Ebene liegt, besteht nach Gleichung (3.11) zwischen \underline{b}_i und \underline{e}_j folgender Zusammenhang:

$$\underline{b}_1 = l\underline{e}_1 + m\underline{e}_2 + n\underline{e}_3$$

$$\underline{b}_2 = o\underline{e}_1 + p\underline{e}_2 + q\underline{e}_3$$

$$\underline{b}_3 = r\underline{e}_1 + s\underline{e}_2 + t\underline{e}_3$$

\underline{b}_1 und \underline{e}_1 sind ONS

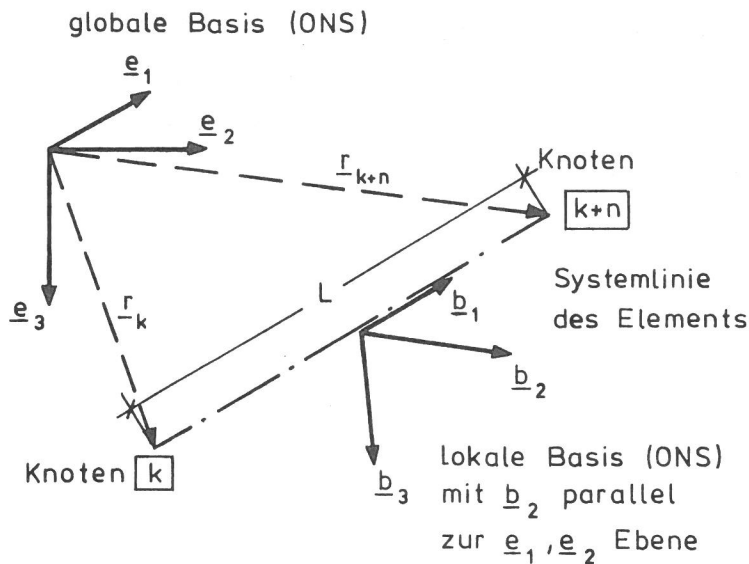


Bild A.4

Globale und lokale Basis

Die Richtungskosinus l bis t werden nun mit folgenden Konventionen berechnet:

1. \underline{b}_1 zeigt von der niedrigeren zur höheren Knotennummer:

$$\underline{b}_1 = \frac{\underline{r}_{k+n} - \underline{r}_k}{L} \quad \text{mit Stablänge } L = |\underline{r}_{k+n} - \underline{r}_k|$$

Damit sind l , m und n bekannt.

2. \underline{b}_2 liegt parallel zur $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ Ebene d. h. $q = 0$:

$$\text{Aus } |\underline{b}_2| = 1 \quad \text{und} \quad \underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2 = 0 \quad \text{folgt mit } l' = \sqrt{l^2 + m^2}$$

$$o = \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \frac{m}{l'}, \quad p = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \frac{l}{l'}, \quad \text{falls } l' \neq 0$$

$$o = 0, \quad p = -n, \quad \text{falls } l' = 0$$

3. \underline{b}_3 aus Kreuzproduktbildung:

$$\underline{b}_3 = \underline{b}_1 \times \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & | & \underline{e}_2 & | & \underline{e}_3 \\ \hline l & | & m & | & n \\ \hline o & | & p & | & 0 \end{bmatrix} = \underline{e}_1(-np) - \underline{e}_2(-no) + \underline{e}_3(lp - mo)$$

$$r = -np$$

$$s = no$$

$$t = p - mo.$$

Bei der Berechnung von o und p wurde im Falle $l' \neq 0$ über das Vorzeichen so verfügt, daß $t > 0$ wird, d. h. \underline{b}_3 und \underline{e}_3 schließen einen spitzen Winkel ein. Im Falle $l' = 0$, d. h. \underline{b}_1 ist parallel zu \underline{e}_3 , wird einschränkend gefordert, daß $\underline{b}_3 = \underline{e}_1$ ist.

A.9 Berechnung der Restbewegung durch Abspaltung der Starrkörperbewegung

Der Verschiebungsvektor eines Elements, bezogen auf die globale Basis, lautet

$$\underline{d}_G^T = [\underline{v}^T(-l), \underline{\theta}^T(-l), \mathcal{V}_{1,1}^T(-l), \underline{v}^T(l), \underline{\theta}^T(l), \mathcal{V}_{1,1}^T(l)],$$

wobei z. B. gilt $\underline{v}^T(-l) = [V_1(-l), V_2(-l), V_3(-l)]$

$$\underline{\theta}^T(l) = [\theta_1(l), \theta_2(l), \theta_3(l)].$$

Die Starrkörperbewegung des Elements wird aus den gemittelten Knotenbewegungen errechnet (siehe auch Bild A5):

$$\text{Translation } \underline{v} = \frac{1}{2} [v(-l) + v(l)]$$

$$\text{Rotation } \underline{\theta} = \frac{1}{2} [\underline{\theta}(-l) + \underline{\theta}(l)].$$

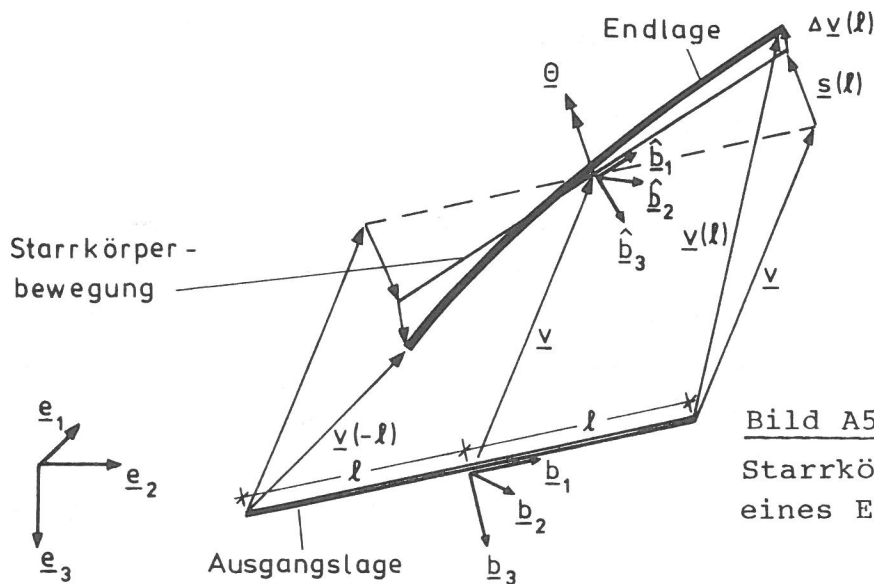


Bild A5

Starrkörper- und Restbewegung eines Elementes

Nach Abspaltung der Starrkörperbewegung verbleibt ein, die Verformung des Elements verursachender Restverschiebungsvektor

$$\Delta \underline{d}_G^T = [\Delta \underline{v}^T(-l), \Delta \underline{\theta}^T(-l), \mathcal{V}_{1,1}^T(-l), \Delta \underline{v}^T(l), \Delta \underline{\theta}^T(l), \mathcal{V}_{1,1}^T(l)]$$

mit den Teilvektoren

$$\Delta \underline{\theta}(l) = \underline{\theta}(l) - \underline{\theta} = \frac{1}{2} [\underline{\theta}(l) - \underline{\theta}(-l)]$$

$$\Delta \underline{\theta}(-l) = -\Delta \underline{\theta}(l)$$

$$\Delta \underline{v}(l) = \underline{v}(l) - \underline{v} - \underline{s}(l) = \frac{1}{2} [\underline{v}(l) - \underline{v}(-l)] - \underline{s}(l)$$

$$\Delta \underline{v}(-l) = -\Delta \underline{v}(l),$$

wobei $\underline{s}(\ell)$ die Verschiebung am Elementende infolge Rotation beschreibt:

$$\underline{s}(\ell) = \ell (\underline{R} - \underline{I}) \underline{b}_1 .$$

Die Matrix \underline{R} wird aus den Komponenten des Drehtensors (Duschek u. a. (1961)) gebildet, der in Tensorindexschreibweise wie folgt lautet (über gleiche Indizes wird summiert)

$$R_{ij} = a_i a_j + (\delta_{ij} - a_i a_j) \cos\theta - \epsilon_{ijk} a_k \sin\theta \quad i, j, k = 1, 3$$

mit δ_{ij} = Kronecker - Delta

ϵ_{ijk} = Epsilon - Tensor

$\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ Drehachse $|\underline{a}| = 1$

$a_i = \frac{\theta_i}{\theta}$ Koordinaten der Drehachse

θ_i Drehung bezüglich der raumfesten Basis \underline{e}_i

$\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$ Drehung um die Drehachse \underline{a} .

Für große Rotationen lautet die Matrix

$$\underline{R} = \frac{1}{\theta^2} \begin{bmatrix} \theta_1^2(1-\cos\theta) + \theta^2 \cos\theta & \theta_1\theta_2(1-\cos\theta) - \theta_3\theta \sin\theta & \theta_1\theta_3(1-\cos\theta) + \theta_2\theta \sin\theta \\ \theta_1\theta_2(1-\cos\theta) + \theta_3\theta \sin\theta & \theta_2^2(1-\cos\theta) + \theta^2 \cos\theta & \theta_2\theta_3(1-\cos\theta) - \theta_1\theta \sin\theta \\ \theta_1\theta_3(1-\cos\theta) - \theta_2\theta \sin\theta & \theta_2\theta_3(1-\cos\theta) + \theta_1\theta \sin\theta & \theta_3^2(1-\cos\theta) + \theta^2 \cos\theta \end{bmatrix} .$$

Werden nur Glieder bis quadratischer Ordnung berücksichtigt, so folgt

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_3^2}{2} & \frac{\theta_1\theta_2}{2} - \theta_3 & \frac{\theta_1\theta_3}{2} + \theta_2 \\ \frac{\theta_1\theta_2}{2} + \theta_3 & 1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_3^2}{2} & \frac{\theta_2\theta_3}{2} - \theta_1 \\ \frac{\theta_1\theta_3}{2} - \theta_2 & \frac{\theta_2\theta_3}{2} + \theta_1 & 1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \end{bmatrix} ,$$

woraus bei zusätzlicher Vernachlässigung der quadratischen Glieder die bekannte Matrix für kleine Drehungen sofort ersichtlich ist.

A.10 Polstellen der Systemdeterminante beim impliziten EWP

Die Polstellen der Systemdeterminante stimmen mit den Einzelstab-eigenfrequenzen bei beidseitiger Einspannung überein (siehe Abschnitt 4.1). Sie errechnen sich aus den Nennernullstellen der exakten Elementmatrizenglieder. Für die einzelnen Schwingungsformen ergibt sich die j -te Polstelle ($j=1,2,3\dots$) infolge eines Elementes der Länge L bei

Längsschwingung

$$p_j = \frac{j\pi}{L} \sqrt{\frac{EF}{\varrho F}},$$

Seilschwingung

$$p_j = \frac{j\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{\varrho F}},$$

Torsionsschwingung ohne Verwölbung

$$p_j = \frac{j\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ_T + i_p^2 P}{\varrho I_p}},$$

Torsionsschwingung mit Verwölbung

$$p_j \approx \left[\frac{(j+1/2)\pi}{L} \right]^2 \sqrt{\frac{EF_{\varphi\varphi} + \left[\frac{L}{(j+1)\pi} \right]^2 (GJ_T + i_p^2 P)}{\varrho I_p}},$$

Biegeschwingung in x_2 - bzw. x_3 -Richtung ($i=2,3$)

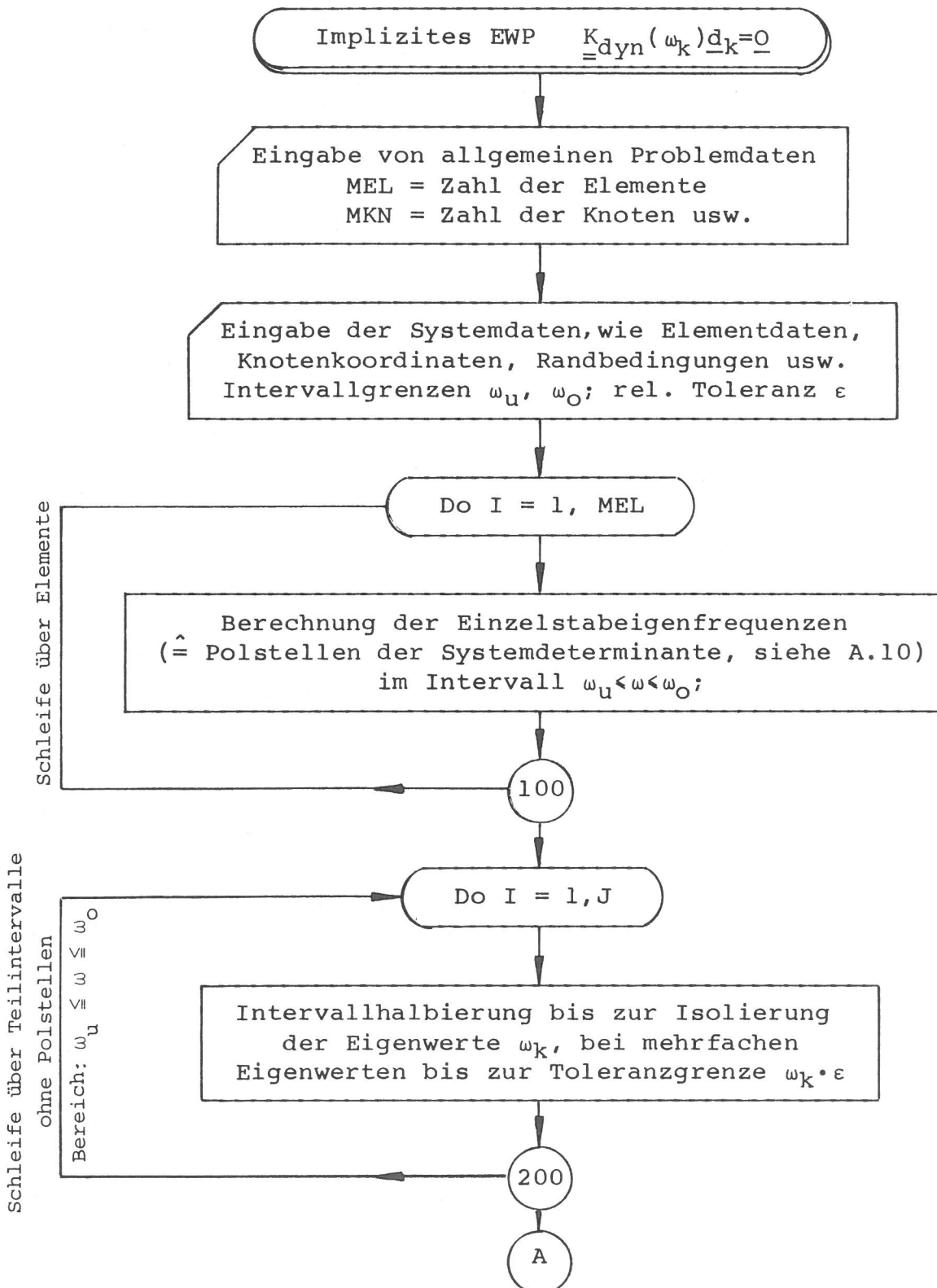
$$p_j \approx \left[\frac{(j+1/2)\pi}{L} \right]^2 \sqrt{\frac{EF_{ii} + \left[\frac{L}{(j+1)\pi} \right]^2 P}{\varrho F}}.$$

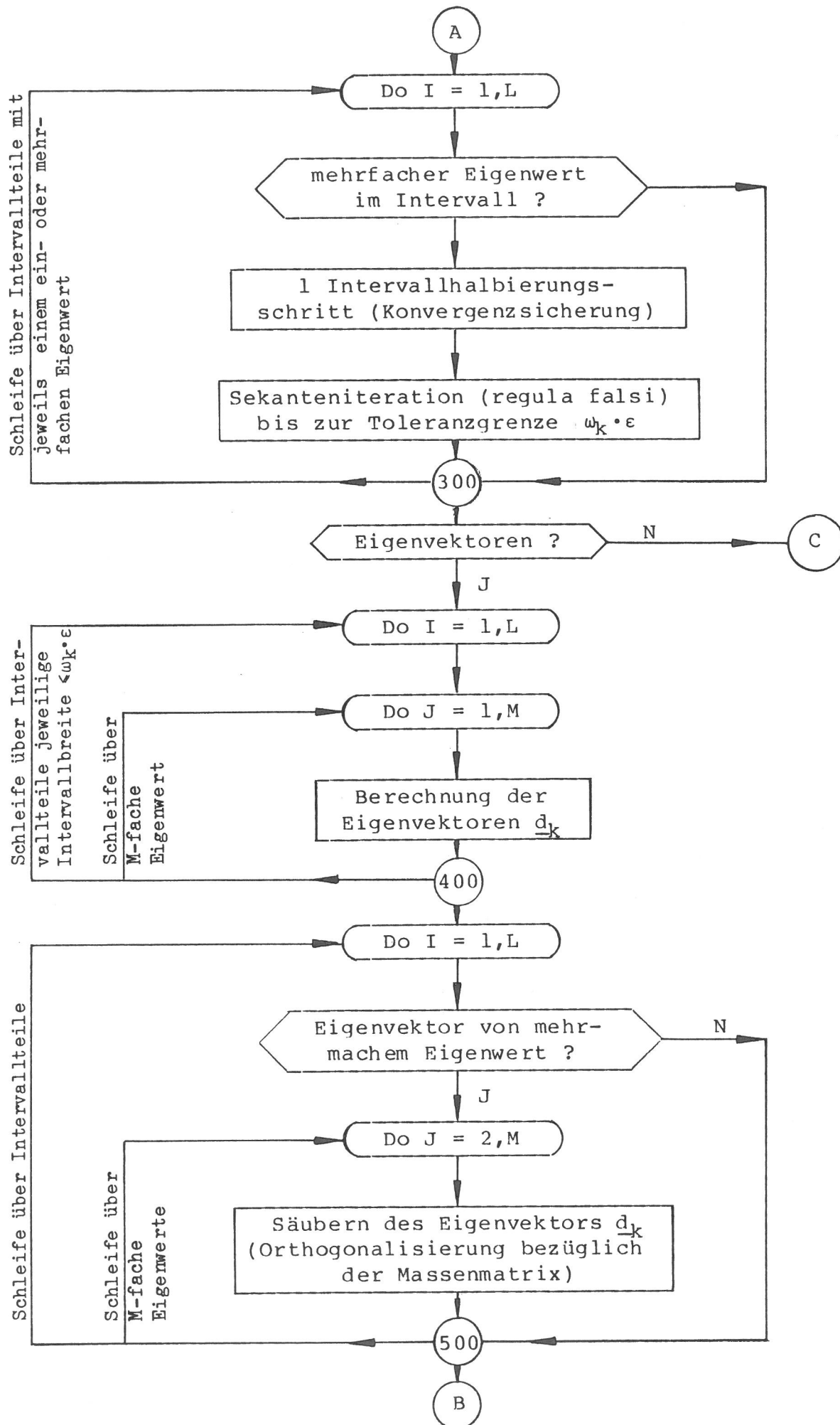
Die beiden letzten Beziehungen sind gute Näherungen für die exakten Polstellen. Beispielsweise ist bei der Biegeschwingung für den Fall $P \rightarrow 0$ lediglich mit einem relativen Fehler von $< 0,5\%$ zu rechnen. Mit einer größten Abweichung muß für den Fall $EF_{\varphi\varphi} \rightarrow 0$ bei Verwendung der Torsionsschwingungsformel mit Verwölbung gerechnet werden. Die relativen Fehler betragen dann bei $j=1$: $12,5\%$; $j=2$: $4,2\%$; $j=3$: $2,1\%$ Gleiches gilt für die Biegeschwingung bei $P > 0$ und $EF_{ii} \rightarrow 0$. Für den wichtigen Fall $P < 0$ und $EF_{ii} \neq 0$ ist lediglich mit einem relativen Fehler von $< 1,5\%$ für die Lage der Polstelle zu rechnen. Sofern auch diese Polstellen exakt lokali-

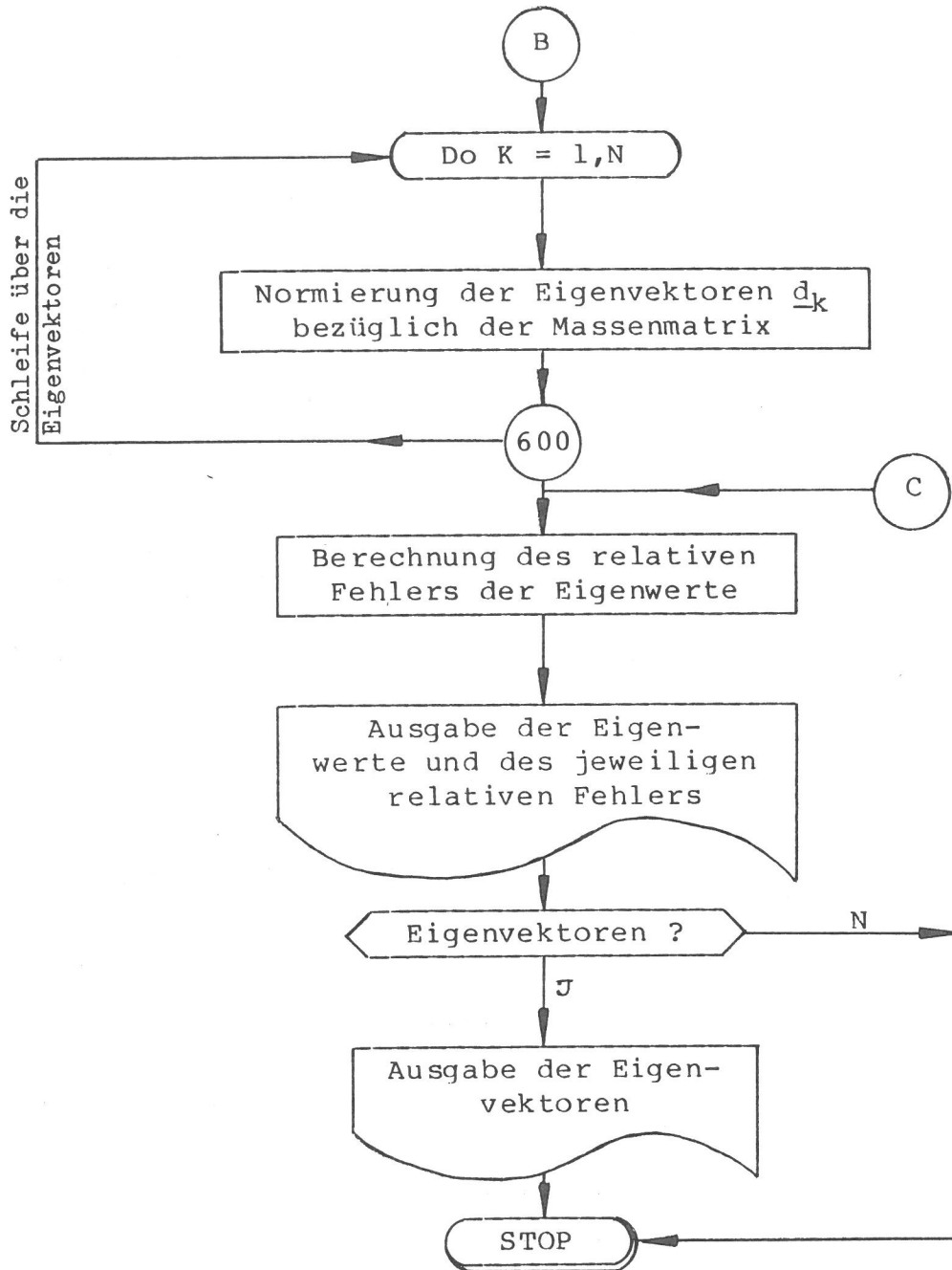
siert werden sollen, können die Näherungslösungen als Startwerte bei der "regula falsi" zur Berechnung der j-ten Nullstelle der entsprechenden Nennerfunktion (z.B. Gl. (2.22)) verwendet werden.

A.11 Flußdiagramm zur Lösung des impliziten EWP

Der in Abschnitt 4.1 und 4.2 erläuterte Algorithmus zur Lösung des impliziten Eigenwertproblems wird im folgenden als Blockdiagramm dargestellt:







Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/September 1968

Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/Juli 1970 (vergriffen)

Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitern
von Dr.-Ing. Götz Andraea

Nr. 3/September 1970 (vergriffen)

Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile
von Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 4/Dezember 1970 (vergriffen)

Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren
von Dr. rer. nat. Arno Burmester

Nr. 5/März 1971

Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
von Dr. rer. nat. Norbert Steiner

Nr. 6/April 1971

Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
von Prof. Dr.-Ing. Paul Schneider

Nr. 7/Juli 1971

Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Petrowitz

Nr. 8/November 1971

Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Helmut Veith

Nr. 9/November 1971

Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Möller

Nr. 10/Januar 1972 (vergriffen)

Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
von Dr.-Ing. Dietmar Aurich und Prof. Dr. phil. Erich Martin

Nr. 11/Februar 1972

Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Krause

Nr. 12/Mai 1972

Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
von Dir. u. Prof. Dr. rer. nat. Hubert Feuerberg

Nr. 13/Juni 1972

Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig (Berichter), Prof. Dr.-Ing. Kurt Kirschke, Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig und Dipl.-Phys. Harald Tischer

Nr. 14/Juli 1972

Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
von Eberhard Fischer

Nr. 15/August 1972

Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Heinz Pohl

Nr. 16/August 1972

Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
von Dr.-Ing. Erwin Knublauch

Nr. 17/August 1972

Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
von Dr.-Ing. Peter Reimers

Nr. 18/Januar 1973

Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 19/Januar 1973

Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. K. Kaffanke und Dr.-Ing. H. Czichos

Nr. 20/April 1973

Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 21/Juli 1973

Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. D. Klaffke und Dr.-Ing. W. Maennig

Nr. 22/Juli 1973

Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi und Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 23/November 1973

Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen
von Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Ruske

Nr. 24/November 1973

Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung
von Dipl.-Ing. J. Stanke, Ing. grad. E. Klement und Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 25/Dezember 1973

Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
von Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 26/August 1974

Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen —
von Dipl.-Ing. P. Jost, Dr.-Ing. P. Reimers und Dr.-Ing. P. Weise

Nr. 27/August 1974

Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Hermann Wüstenberg

Nr. 28/August 1974

Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern
von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 29/August 1974

Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem idealisotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall
von Prof. Dr.-Ing. P. Schneider

Nr. 30/September 1974 (vergriffen)

The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology
von Dr. Horst Czichos und Dr. Geert Salomon

Nr. 31/August 1975

Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung
von Dr.-Ing. Gerhard Fuhrmann

Nr. 32/September 1975

Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen
von Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Bernhard Böttcher

Nr. 33/November 1975

Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens
von Dipl.-Ing. Armin Wagner, Dipl.-Phys. Gerhard Kieper und Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 34/Januar 1976 (vergriffen)

Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoffen
von Dipl.-Forsting. Dr. rer. sylv. Hans-Joachim Deppe

Nr. 35/Januar 1976

Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dipl.-Ing. Ernst Limberger

Nr. 36/Januar 1976 (vergriffen)

Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles
von Dipl.-Ing. Jürgen Hundt

Nr. 37/Februar 1976

Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 38/Juni 1976

Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionisiertem Stahl 42CrMo 4
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig

Nr. 39/Juni 1976

Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newtonischem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung
von Prof. Dr.-Ing. K. Kirschke und Dipl.-Phys. G. Kempf

- Nr. 40/Juni 1976
Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren
von Dr. rer. nat. H. Hantsche
- Nr. 41/Okttober 1976
Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten
von Dr. rer. nat. Bernhard Böttcher
- Nr. 42/Okttober 1976
Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft
von Dr.-Ing. Siegmund Dieltjen
- Nr. 43/Okttober 1976
Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 44/November 1976
Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“
von Dipl.-Ing. W. Matthees
- Nr. 45/Dezember 1976
Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten
von Dr.-Ing. W. Paatsch
- Nr. 46/Mai 1977 (vergriffen)
Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung
Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses
von Dipl.-Ing. Gerald Schickert und Dipl.-Ing. Helmut Winkler
- Nr. 47/Juni 1977
Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
von Dr.-Ing. Arno Plank
- Nr. 48/Okttober 1977
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
von Dr.-Ing. U. Holzlöhner
- Nr. 49/Dezember 1977
Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
von Dr.-Ing. Günther Wittig
- Nr. 50/Juni 1978 (vergriffen)
Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
von Prof. Dipl.-Phys. Norbert Czaika, Dipl.-Phys. Norbert Mayer, Dipl.-Ing. Claus Amberg, Dipl.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Götz Andreae und Dipl.-Ing. Winfried Markowski
- Nr. 51/Juni 1978
Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
von Dr. rer. nat. J. Sickfeld
- Nr. 52/August 1978
Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
von Dr.-Ing. Aleksandar Tomov
- Nr. 53/Oktober 1978
Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
von Rolf Günter Rohrmann und Reinald Rudolphi
- Nr. 54/Oktober 1978
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Harro Sander
- Nr. 55/November 1978
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke
- Nr. 56/Januar 1979
Stabilität von Sandwichbauteilen
von Dipl.-Ing. W. Brünner und Prof. Dr.-Ing. C. Langlie
- Nr. 57/März 1979
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung
Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing
von Dipl.-Ing. Meinhard Stadthaus
- Nr. 58/März 1979
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 59/Juli 1979
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
von Dr.-Ing. Günther Plauk
- Nr. 60/August 1979
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
von Dr.-Ing. H. Spreckelmeyer, Dr.-Ing. R. Helms und Dr.-Ing. J. Ziebs
- Nr. 61/Dezember 1979
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmeterik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
von Dr. Klaus Richter
- Nr. 62/Dezember 1979
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Gerisch und Prof. Dr. habil. Dr. h. c. Günther Becker
- Nr. 63/Dezember 1979
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
von Dipl.-Ing. E. Behrend und Dipl.-Ing. J. Ludwig
- Nr. 64/Februar 1980
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
von Dr.-Ing. Werner Rucker
- Nr. 65/Februar 1980
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
von Dr.-Ing. Peter Schmidt, Dr.-Ing. Dietmar Aurich, Dr.-Ing. Rolf Helms, Dr.-Ing. Helmut Veith und Dr.-Ing. Josef Ziebs
- Nr. 66/Mai 1980
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
von Dr. rer. nat. Martin Hattwig
- Nr. 67/Mai 1980
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees
- Nr. 68/Mai 1980
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik.
Entwicklung eines volleuzentrischen Präzisions-Goniometers
von Dr. rer. nat. Dieter Petersohn
- Nr. 69/Juni 1980
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitschillen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt und Dipl.-Ing. Peter Brandl
- Nr. 70/August 1980 (vergriffen)
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
von Dr.-Ing. Gerald Schickert
- Nr. 71/August 1980
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und Dipl.-Ing. Götz Magiera
- Nr. 72/September 1980
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi
- Nr. 73/November 1980
Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
von Dipl.-Ing. Peter Wegener
- Nr. 74/November 1980
ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dipl.-Inform. Renate Müller
- Nr. 75/November 1980
Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
von Dir. u. Prof. Dr. Hans-Jürgen Heinrich
- Nr. 76/November 1980
Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig
- Nr. 77/April 1981
Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
von Dipl.-Ing. Michael Gierloff und Dr.-Ing. Matthias Maultzsch
- Nr. 78/September 1981
Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund
von Dr.-Ing. Werner Rucker
- Nr. 79/Dezember 1981
Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflussten Kalttrifneigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
von Dr.-Ing. Volker Neumann

- Nr. 80/Dezember 1981
Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
von Dr.-Ing. Arno Plank, Dr.-Ing. Werner Struck und Dr.-Ing. Manfred Tzschätzsch
- Nr. 81/Dezember 1981
Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
von Dipl.-Ing. Jürgen Schmidt
- Nr. 82/April 1982
Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches
Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test
von Rolf Helms, Hans-Joachim Kühn und Siegmund Ledworuski
- Nr. 83/Juli 1982
Triologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen — Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen —
von Prof. Dr.-Ing. Horst Czichos und Dr.-Ing. Paul Feinle
- Nr. 84/Juli 1982
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
von Dipl.-Inform. Renate Müller und Dr.-Ing. Reinald Rudolphi
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/Okttober 1982
Technische Materialforschung und -prüfung — Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm „Basic Technological Research“ — Materials Research and Testing — Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme „Basic Technological Research“ —
von Prof. Dr. Horst Czichos
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/November 1982
Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
von Dr.-Ing. Konrad Niesel und Dr. rer. nat. Peter Schimmelwitz
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/Dezember 1982
Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
von Dr.-Ing. Bernd Isecke und Dr.-Ing. Wolfgang Stichel
- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/Februar 1983
Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Anton Erhard
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/April 1983
Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
von Dr. rer. nat. Dietrich Conrad und Dr.-Ing. Siegmund Dietlen
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/April 1983
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonteilen
Konzeption für geregelte Versuche
Versuchseinrichtung
Vorversuche an Stahlbetonbalken
von Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/April 1983
Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
von Dr.-Ing. Michael Weber
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/August 1983
Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden
von Dipl.-Ing. Lutz Auersch
- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/August 1983
Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen
von Dr. rer. nat. Peter Studt
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/August 1983
Untersuchungen der Störschwingungen beim Kerbschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen
von Dr.-Ing. Xian-Quan Dong
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/August 1983
Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatten
von Dr.-Ing. Manfred Römer
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/Okttober 1983
Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem Betonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken
von Dr.-Ing. Heinz Eifler
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/November 1983
Typische Bruchflächenbildung thermoplastischer Kunststoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung
von Dipl.-Ing. Gerhard Fuhrmann und Prof. Dr. rer. nat. Wolfram Schwarz
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/Dezember 1983
Bestimmung des elastischen Verhaltens von Maschenwaren — Stretch- und Erholungsvermögen —
von Dr. rer. nat. Edmund Schnabel
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/Dezember 1983
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonteilen
Versuche an Stahlbetonbalken mit Biegebewehrung aus Betonstahl BSt 420/500 RK und BSt 1080/1320
von Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/Januar 1984
Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Frostwiderstand
von Günter Klamrowski und Paul Neustupny
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/Februar 1984
Röntgen- und Gammastrahlen Computer-Tomographie
von Dr.-Ing. Peter Reimers, Dr. rer. nat. Jürgen Goebels, Dr.-Ing. Heinrich Heidt, Dr.-Ing. Hans-Peter Weise und Dipl.-Phys. Kay Wilding
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/März 1984
Weiterentwicklung des hydraulischen Kompensationsverfahrens zur Druckspannungsmessung in Beton
von Dr.-Ing. Götz Magiera
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/März 1984
Radiographie mit Elektronen aus Metallverstärkerfolien
von Dr.-Ing. Dierk Schnitger
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/April 1984
Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen
von Dr.-Ing. Michael Gierloff
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/Juni 1984
Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen
von Dr.-Ing. Bernd Schulz-Forberg
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/Okttober 1984
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last
von Dr.-Ing. Jan Lehnert
- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/Okttober 1984
Korrosion von Stahlradiatoren
von Dr.-Ing. Wolfgang Stichel und Jörg Ehreke
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/Okttober 1984
Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen — Ergebnisse von Modellrechnungen
von Dipl.-Ing. Lutz Auersch
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/Februar 1985
Zur Wirkung der Schrumpfbegrenzung auf den Schweißspannungszustand und das Spröbruchverhalten von unterpulvergeschweißten Blechen aus St E 460 N
von Dr.-Ing. Mohamed Omar
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/Februar 1985
Wasserstoff als Energieträger
von Dr. Hermann Walde (Mitglied des Kuratoriums der BAM i. R.) und Dr. Bernhard Kropp
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/Februar 1985
Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Umsetzung von Anorex-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte
von Dr.-Ing. Kurt Ziegler
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/Juli 1985
Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen
von Dr.-Ing. Wolfgang Lützwow
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/Juli 1985
Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf die Schwingungsrißkorrosion von Offshore-Konstruktionen
von Rolf Helms, Horst Henke, Gerhard Oelrich (BAM, Berlin) und Tetsuya Saito (NRIM, Japan)
- Nr. 114/ISBN 3-88314-419-3/Juli 1985
Neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen
von Dipl.-Ing. Peter Rose, Dipl.-Ing. Peter Raabe, Dipl.-Ing. Werner Daum und Andreas Szameit
- Nr. 115/ISBN 3-88314-420-7/Juli 1985
Farbempfindungsmerkmal Elementarunton und Buntheitsabstände als Funktion von Farbart und Leuchtdichte von In- und Umfeld
von Privatdozent Dr. Klaus Richter
- Nr. 116/ISBN 3-88314-460-6/Okttober 1985
Theoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik
von Dr. rer. nat. Franz-Josef Kasper, Dipl.-Inform. Renate Müller, Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Armin Wagner
- Nr. 117/ISBN 3-88314-468-1/Okttober 1985
Materials Technologies and Techno-Economic Development
A study for the German Foundation for International Development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)
by Prof. Dr. H. Czichos in cooperation with Dr. G. Sievers, Bundesministerium für Forschung und Technologie (BMFT), Bonn

- Nr. 118/ISBN 3-88314-469-X/Oktober 1985
Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung
Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen
 von Dr. rer. nat. Hartwig Treumann, Dipl.-Ing. Hilmar Andre, Dr. rer. nat. Eduard Blossfeld, Dr. rer. nat. Norbert Pfeil und Ing. grad. Matthias-Michael Zindler
- Nr. 119/ISBN 3-88314-472-X/November 1985
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil I
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part I
 von Dipl.-Ing. Jürgen Herter, Dr.-Ing. Klaus Brandes und Dipl.-Ing. Ernst Limberger
- Nr. 120/ISBN 3-88314-514-9/April 1986
Zerstörungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückstreuung
 von Dr.-Ing. Andreas Hecht
- Nr. 121/ISBN 3-88 314-530-0/Juni 1986
Versagenskriterien von Stahlgleitpaarungen unter Mischreibungsbedingungen: Einflüsse von Stahlzusammensetzung und Wärmebehandlung
 von Dr.-Ing. Paul Feinle und Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig
- Nr. 122/ISBN 3-88 314-521-1/Juli 1986
Entsorgung kerntechnischer Anlagen
 von J. Mischke
 Sonderkolloquium der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) am 10. 12. 1985 mit Beiträgen von B. Schulz-Forberg, K. E. Wieser und B. Droste
- Nr. 123/ISBN 3-88 314-531-9/Juli 1986
Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organisch-chemischer Baustoffe entstehenden Brandgase
 von Dr. rer. nat. Detlef Rennoch
- Nr. 124/ISBN 3-88 314-538-6/Juli 1986
Zur Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung
 von Dr.-Ing. Hans-Martin Thomas
- Nr. 125/ISBN 3-88 314-540-8/Juli 1986
Untersuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzisolierung von Flüssiggas-Lagertanks
 von Dr.-Ing. Bernhard Droste und Dipl.-Ing. Ulrich Probst
- Nr. 126/ISBN 3-88 314-547-5/August 1986
Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmhallen
 von Dr.-Ing. Wolfgang Stichel
- Nr. 127/ISBN 3-88 314-564-5/November 1986
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil I
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part I
 von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 128/ISBN 3-88 314-568-8/November 1986
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil II
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part II
 von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 129/ISBN 3-88 314-569-6/November 1986
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load
Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit
Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates
 von / by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 130/ISBN 3-88 314-570-X /November 1986
Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material bei Belastung durch eine Einzelkraft
 von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 131/ISBN 3-88-314-585-8/November 1986
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil II
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part II
 von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 132/ISBN 3-88-314-595-5/Januar 1987
Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen
 von Dipl.-Ing. Christian Herold und Dipl.-Ing. Frank-Ulrich Vogdt
- Nr. 133/ISBN 3-88 314-609-9/Januar 1987
Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe
 von Dipl.-Ing. Mathias Woydt und Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig
- Nr. 134/ISBN 3-88 314-615-3/Februar 1987
Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen
 von Dr. Götz Andreae und Gottfried Niessen
- Nr. 135/ISBN 3-88 314-618-8/Februar 1987
Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen
 von Dipl.-Ing. Jörg Ludwig, Dipl.-Ing. Wolf-Dietrich Mischke und Dipl.-Ing. Armin Ulrich
- Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/April 1987
Untersuchung zur Beurteilung von Brettschichtverleimungen für den Holzbau
 von Prof. Dr. rer. silv. Hans-Joachim Deppe und Klaus Schmidt
- Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/Mai 1987
Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiet der Komponentensicherheit
 Projektleiter: Dr. Dietmar Aurich
- Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/Mai 1987
Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben.
 von Dipl.-Geol. Michael Dogunke und Dr.-Ing. Frank Buchhardt
- Nr.139/ISBN 3-88314-658-7/Juni 1987
Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle.
 von Dipl.-Ing. Jürgen Olschewski und Sven-Peter Scholz
- Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/Juni 1987
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
 von / by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/Okttober 1987
Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdbebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken
 von Dr.-Ing. Frank Buchhardt, Dr.-Ing. Wolfgang Matthees, Dr.-Ing. Götz Magiera und Dr.-Ing. Friedrich Mathiak
- Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/Okttober 1987
Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefahrezahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen
 von Dr. rer. nat. Hartwig Treumann, Ing. Günter Krüger, Dr. rer. nat. Norbert Pfeil und Dr. rer. nat. Sigrid von Zahn-Ullmann
- Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/November 1987
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung
Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load
 von/by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/November 1987
Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktorgebäudes
 von Dr.-Ing. Frank Buchhardt, Dr.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Wolfgang Matthees, Dr.-Ing. Michael Weber,
 Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
 Dr.-Ing. Jürgen Altes,
 Kernforschungsanlage Jülich GmbH (KFA)
- Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/November 1987
Untersuchung selbstähnlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden
 von Dr.-Ing. Ulrich Holzlöhner
- Nr. 146/ISBN 3-88314-714-1/November 1987
Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks
 von Dipl.-Ing. Wolfgang Schön und Dipl.-Ing. Michael Mallon
- Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/Dezember 1987
Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen
 von Dipl.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt