

ISBN 3-88314-785-0

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Berlin

Forschungsbericht 151

**Wechselwirkung starrer und flexibler
Strukturen mit dem Baugrund insbesondere
bei Anregung durch Bodenerschütterungen**

von Dipl.-Ing. Lutz Auersch-Saworski

Juni 1988

132 Seiten, 52 Abbildungen

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon (030) 8104-1 Telex 183261 bamb d
Telefax (030) 8112029 Teletex 2627-308372=bamb

Copyright © 1988 by Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Verlag und Vertrieb:
Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH
Postfach 10 11 10, 2850 Bremerhaven 1
Telefon (0471) 46093-95

Kurzfassung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der dynamischen Bauwerk-Boden-Wechselwirkung, dem Einfluß des Baugrundes auf das Schwingungsverhalten von Bauwerken. Für die Berechnung starrer und flexibler Strukturen auf dem Baugrund, wie starre Fundamente, Fundamentgruppen, flexible Gründungskörper, Bauwerksteilstrukturen und vollständige Gebäude, wird ein Rechenverfahren vorgestellt, das die Randelementmethode zur Beschreibung des Bodens mit der Finite-Element-Methode für das Bauwerk verbindet. Die Grundlagen zweier alternativer Randelementverfahren, die Punktlastlösungen des elastischen Vollraumes und des Halbraumes, werden dargestellt und miteinander verglichen. Am Grundproblem der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung, der dynamischen Steifigkeit starrer Fundamente auf dem Baugrund, werden diese Verfahren und einige Verfahrensvarianten erprobt und miteinander verglichen. Die Ergebnisse für Fundamentgruppen und Streifenfundamente beleuchten die Wechselwirkung benachbarter Fundamentflächen.

Ein wesentlicher Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Übertragung von Bodenerschütterungen in Gebäude. Es werden einige sehr verschiedene Strukturen untersucht, die durch horizontal im Boden sich ausbreitende Oberflächenwellen zu Schwingungen angeregt werden. Es zeigt sich, daß bei den für Erschütterungen typischen Frequenzen und Wellenlängen die hier berücksichtigte Flexibilität der Fundamente von entscheidender Bedeutung ist. Die Berechnungen ergeben in der Regel Abminderungen der Bauwerksamplituden gegenüber den Freifeldamplituden des Bodens, die je nach Struktur sehr verschiedenen Ursachen wie Kinematik, Bauwerksträgheit und Bauwerkssteifigkeit zugeordnet werden können. Überhöhungen der Bauwerksamplituden gegenüber dem Freifeld treten vor allem in der Kippeigenfrequenz hoher Strukturen auf. Messungen an einem Modellbauwerk, das durch ein Wellenfeld angeregt wird, bestätigt diese Aussagen, und der Vergleich mit der vollständigen dreidimensionalen Berechnung zeigt die Brauchbarkeit der entwickelten theoretischen Methoden.

Summary

The dynamic interaction of rigid or flexible structures with the soil is investigated by means of a combined finite-element- and boundary-element-method. The point load solutions of elastic halfspace and fullspace as the base of two different boundary-element formulations are discussed and compared. These two boundary element procedures and some possible modifications are checked by the well-known dynamic stiffness of a square foundation. New results for strip foundations and groups of foundations lead to an insight of the interaction between different parts of a foundation.

In the main part of the work the vibrations of different structures excited by horizontal travelling waves are examined. As the wavelengths of machine or traffic induced vibrations are in most cases shorter than the building's dimensions, the flexibility of the foundations is of great importance. The calculated amplitudes of the structure are often smaller than the free-field amplitudes of the soil. The comparison of different structures and the discussion of simplified models show that this reduction of amplitudes is caused by either kinematics, inertia or stiffness of the structure. Amplification of the free-field amplitudes may occur due to rocking resonance of tall structures. Measurements on a model structure excited by a wavefield are compared with a complete three-dimensional calculation showing a good agreement.

Bauwerk-Boden-Wechselwirkung, Baudynamik, Erschütterungen, Wellenfeld, Fundamente, Randelementmethode

soil-structure-interaction, structural dynamics, vibrations, foundations, elastic waves, travelling wave effects, boundary-element-method

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1985 bis 1987 im Labor 2.32 Baugrunddynamik und Erschütterungsschutz der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung. Sie wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität Bochum als Dissertation angenommen.

Allen Kollegen der BAM, die die Voraussetzungen für diese kombiniert theoretisch-numerisch-experimentelle Arbeit schufen, insbesondere Herrn Dr. W. Rücker, Herrn N. Semrau und Herrn M. Manjock, möchte ich recht herzlich danken. Eine Grundlage des vorgestellten Rechenverfahrens (die Punktlastlösung des Halbraumes) verdanke ich ebenfalls Herrn Dr. W. Rücker. Die Beschäftigung mit der alternativen Grundlage (der Punktlastlösung des Vollraumes) und die Verallgemeinerung des Verfahrens zur Randelementmethode verdanke ich der Anregung und der Gesprächsbereitschaft der Kollegen von der Ruhr-Universität Bochum, insbesondere von Herrn Prof. Dr. G. Schmid. Für die Aufbereitung des Finite-Element-Programms bedanke ich mich bei Herrn H. Hebener, für die Erstellung von Plotprogrammen und für die Berechnung von Beispielen bei Frau B. Ebner und Herrn S. Said. Für die gemeinsamen Messungen danke ich Herrn U. Schmidt und Herrn M. Manjock sowie Herrn Glaser und Herrn Heine von der Erprobungsstelle in Meppen. Schließlich möchte ich mich bei Frau R. Denaro für das Schreiben des Textes bedanken. Herrn Prof. Dr. G. Schmid und Herrn Prof. H. Waller danke ich für die Übernahme der Berichte.

Dezember 1987

Lutz Auersch-Saworski

Tag der Einreichung: 22. 6.1987

Tag der mündlichen Prüfung: 19.11.1987

Berichter: Prof. Dr. G. Schmid

Prof. Dr. H. Waller

Inhaltsverzeichnis		Seite
1.	Einleitung	
1.1	Einführung in die Problemstellung	7
1.2	Gliederung der Arbeit	7
1.3	Literaturüberblick und Einordnung der Arbeit	8
Teil I	Grundlagen	
2.	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	11
3.	Spezielle Lösungen der Elastodynamik: ebene und exponentielle harmonische Wellen	12
4.	Lösungen für eine harmonische Punktlast	15
4.1	Der elastische Vollraum	15
4.2	Der elastische Halbraum	18
4.3	Der Vergleich zwischen Halbraum und Vollraum	23
4.4	Das Spannungsfeld des elastischen Vollraumes bei Punktlasterregung	25
Teil II	Rechenverfahren	
5.	Grundlagen der Schwingungsberechnung von Strukturen in und auf dem Boden	29
5.1	Problemstellungen	29
5.2	Diskrete Rechenverfahren	29
6.	Die Randelementmethode zur Berechnung des Bodens	31
6.1	Eine einfache Formulierung der Randelementmethode	31
6.2	Verwendung der Punktlastlösung des Vollraumes	32
6.3	Verwendung der Punktlastlösung des Halbraumes	34
6.4	Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Bodens	35
7.	Die Finite-Element-Methode zur Berechnung des Bauwerks	37
Teil III	Starre Fundamente und Fundamentgruppen	
8.	Die dynamische Steifigkeit eines starren Fundaments auf dem Halbraum	39
8.1	Problemstellung	39
8.2	Verschiedene Lösungsmöglichkeiten und Verfahrensvarianten	40
8.2.1	Halbraummethode entkoppelt	40
8.2.2	Vollraummethode entkoppelt	41
8.2.3	Direkte Lösung für verschiebungsproportionalen Spannungsansatz	43
8.2.4	Sonstige Methoden	44
8.3	Ergebnisse für ein quadratisches Fundament	45
8.4	Vergleich der Verfahrensvarianten	49
9.	Zur Wechselwirkung über den Boden	51
9.1	Erstes Beispiel: Gruppenwirkung starr gekoppelter Fundamente	51
9.2	Zweites Beispiel: Starre Streifenfundamente	53
9.3	Der Einfluß der Wechselwirkung auf Steifigkeit und Dämpfung starrer Fundamente	55
9.4	Vereinfachte Betrachtungsweisen starrer Fundamente	59
Teil IV	Wellenfeldanregung starrer und flexibler Strukturen	
10.	Die Problemstellung der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung	61
11.	Die Anregung starrer masseloser Fundamente durch harmonische Wellen (kinematische Wechselwirkung)	63
11.1	Fundamentbeispiel, vollständig und näherungsweise Berechnung der kinematischen Wechselwirkung	63
11.2	Ergebnisse für ein Streifenfundament (schlankes Rechteck)	64
11.3	Diskussion der Einflußgrößen	68
12.	Die Wechselwirkung starrer Strukturen mit dem Boden	70
12.1	Systemgleichung, Eigenfrequenzen und Eigenformen	70
12.2	Starre Strukturen unter Wellenfeldanregung	72

	Seite
13. Die Wechselwirkung flexibler Strukturen mit dem Boden	
13.1 Flache Strukturen (Fundamente)	78
13.1.1 Der unendlich lange gebettete Balken	78
13.1.2 Der endlich lange Balken auf dem Halbraum	78
13.2 Niedrige Strukturen (Wandscheiben)	83
13.3 Hohe Strukturen (quadratische Wandscheiben)	86
13.3.1 Die halbunendliche gebettete Wandscheibe	88
13.3.2 Quadratische Wandscheiben auf dem Halbraum	88
13.4 Überblick über die Ergebnisse für starre und flexible Strukturen	92
	98
Teil V Anwendungsbeispiel und Vergleich mit Messungen	
14. Ein Anwendungsbeispiel: Ein hohlquaderförmiges Modellbauwerk	
14.1 Schwingungsformen ausgewählter Frequenzen	101
14.2 Das Übertragungsverhältnis Freifeld – Bauwerk	101
	104
15. Vergleich Theorie/Rechnung – Messung	
15.1 Das Versuchsprogramm	106
15.2 Bestimmung der Materialkennwerte des Bodens	106
15.3 Das Ausbreitungsgesetz im Vergleich zur Punktlastlösung des Halbraumes	107
15.4 Das Bauwerksverhalten unter Wellenfeldanregung	108
	110
16. Zusammenfassung	
	113
Bezeichnungen	
	114
Literaturverzeichnis	
	117
Anhang A Zur Kennzeichnung von Vektoren, Tensoren, Matrizen und Elementen	
Anhang B Die Spannungsfunktionen der Vollraumlösung	121
Anhang C Alternative Ableitung der Randelementmethode	122
Anhang D Die Transformationsmatrix für ein starres Fundament	123
Anhang E Die dynamische Steifigkeitsmatrix für die freie Oberfläche einer halbunendlichen elastischen Struktur (Wandscheibe oder Kontinuum)	125
Anhang F Überblick über die Rechenbeispiele	126
	127

1. Einleitung

1.1 Einführung in die Problemstellung

Erdbeben, Wind, Verkehr oder Maschinen erzeugen Schwingungen von Bauwerken. Bei der Planung von Bauwerken ist die Erfassung dieser Schwingungen und der Nachweis ihrer Unschädlichkeit notwendig. Bei bestehenden Gebäuden sind häufiger auch die Auswirkungen neu auftretender, in der Planung noch nicht berücksichtigter Schwingungsquellen abzuschätzen. Die Bauwerksdynamik stellt für diese Fragestellungen Rechenmethoden, theoretisches Wissen über die Phänomene und Zusammenhänge sowie experimentell/meßtechnische Befunde zur Verfügung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der sogenannten Bauwerk-Boden-Wechselwirkung, dem Einfluß des Baugrundes auf das Schwingungsverhalten von Bauwerken. Für die Berechnung starrer und flexibler Strukturen auf dem Baugrund wird ein Rechenverfahren entwickelt. Dazu wird ausgehend von den Punktlastlösungen des Halbraumes oder des Vollraumes ein Bodenelement aufgebaut, das in ein Finite-Element-Programm eingefügt wird. Mit diesem Rechenverfahren können folgende Systeme berechnet werden:

- starre Fundamente,
- Fundamentgruppen,
- flexible Gründungskörper (Balken, Platte),
- Bauwerksteilstrukturen (Wand, Rahmen),
- vollständige Gebäude .

Anhand von Beispielen aus diesen fünf Bereichen werden die Phänomene der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung herausgearbeitet.

Im Mittelpunkt der Untersuchungen steht die aus der Erschütterungsproblematik abgeleitete Fragestellung:

Wie werden die Schwingungen des Baugrundes in Bauwerke übertragen?

Als Anregung der Bauwerksschwingungen wirken dabei horizontal sich ausbreitende Oberflächenwellen, und es werden die Übertragungsverhältnisse zwischen den Bauwerksschwingungen und den Freifeldamplituden des Bodens sowie die Schwingungsformen des Bauwerks berechnet. Den theoretisch/numerischen Ergebnissen werden Meßergebnisse zum Bauwerks- und zum Bodenverhalten gegenübergestellt.

1.2 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit besteht aus den Teilen

- I Grundlagen,
- II Rechenverfahren,
- III Starre Fundamente und Fundamentgruppen,

- IV Wellenfeldanregung starrer und flexibler Strukturen,
- V Anwendungsbeispiel und Vergleich mit Messungen.

Im ersten Teil werden die Grundlagen für das Berechnungsverfahren des Bodens, das sind in erster Linie die Punktlastlösungen des Halbraumes und des Vollraumes, dargestellt. Im zweiten Teil folgt die Beschreibung des Rechenverfahrens, wobei die Berechnung des Bodens als ein besonders einfacher Spezialfall der Randelementmethode aufgefaßt wird.

Mit der Berechnung der dynamischen Steifigkeit starrer Fundamente im dritten Teil werden zwei Ziele verfolgt. Zum einen werden anhand eines bekannten Fundamentbeispiels verschiedene Verfahrensvarianten getestet und miteinander sowie mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Zum anderen werden neue Ergebnisse zu Streifenfundamenten und Fundamentgruppen dargestellt, die neben ihrer Verwendung bei typischen Gebäudegründungen auch einen Rückschluß auf die Wechselwirkung benachbarter Fundamentflächen zulassen und schließlich zu möglichen Vereinfachungen führen.

Der vierte Teil beschäftigt sich ausführlich mit den Bauwerksschwingungen bei einer Wellenfeldanregung durch den Boden. Die systematische Variation der Strukturmerkmale von

starr masselos (Abschnitt 11) über

starr massebehaftet (Abschnitt 12) bis zu

flexiblen Strukturen verschiedener Höhe (Abschnitt 13)

gestattet einen Überblick über die verschiedenen Auswirkungen auf das Übertragungsverhältnis Freifeld-Bauwerk (kinematische Wechselwirkung, Trägheitswirkung, Steifigkeitseinfluß). Der jeweilige Vergleich mit vereinfachten analytischen Modellen verschafft einen Einblick in die Parametereinflüsse.

Im fünften Teil wird ein Bauwerksbeispiel vollständig berechnet und die Ergebnisse werden mit Messungen verglichen. Das Versuchsprogramm beinhaltet auch die Messung der Freifeldschwingungen des Bodens, aus denen die Bodensteifigkeit ermittelt wird und deren Ausbreitungsgesetz mit der Punktlastlösung des Halbraums verglichen wird.

1.3 Literaturüberblick und Einordnung der Arbeit

Zur dynamischen Bauwerk-Boden-Wechselwirkung hat es in den letzten 20 Jahren eine Vielzahl von Veröffentlichungen gegeben. Dabei stand überwiegend die Entwicklung immer weitgehenderer Rechenmethoden im Vordergrund. Diese Entwicklung erklärt sich aus dem großen analytischen und numerischen Aufwand bei der vollständigen Lösung des Problems und geht einher mit der Bereitstellung immer umfangreicherer Rechnerleistungen.

Das Grundproblem der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung ist die Berechnung der dynamischen Steifigkeit eines starren Fundaments auf dem homogenen elastischen Halbraum /23/, /29/, /31/, /34/, /39/. Davon ausgehend versuchen eine Reihe von Autoren weitergehende Einflüsse wie die Schichtung des Untergrunds /12/, /19/, /35/, die Materialdämpfung des Bodens /11/, die Einbettung /20/ und die Flexibilität /30/ des Fundaments zu erfassen.

Die vorliegende Arbeit baut hinsichtlich der Methode auf den Ergebnissen von Rücker /29/ und von Schmid und Ottenstreuer /25/, /26/ auf. Das vorgestellte Rechenverfahren für den Boden stellt eine Vereinfachung sowohl der Halbraummethode als auch der Randelementmethode dar. Ein zweiter Schritt ist die Verknüpfung dieser Randelement-/Halbraum-Methode mit der Finite-Element-Methode in einem Rechenprogramm. Das Ziel war ein leicht handhabbares Programm, mit dem eine Vielfalt von Bauwerksstrukturen unter vollständiger Berücksichtigung der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung unmittelbar berechnet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen der Rechenverfahren, die Punktlastlösungen für den elastischen Halb- bzw. Vollraum, etwas näher betrachtet. Diese Lösungen sind zwar zum Teil schon sehr lange bekannt /7/, /22/, /24/, werden hier aber möglicherweise zum ersten Mal auf eine einheitliche Form gebracht und miteinander verglichen.

Einen weiteren Beitrag zur Methodik der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung stellt die eingehendere Diskussion der entkoppelten Berechnungsweisen dar. Bei allen Ausführungen zum Rechenverfahren wird versucht, die physikalischen Grundlagen zu betonen und ihre Auswirkungen auf die Rechenergebnisse überschaubar zu machen.

Die in dieser Arbeit berechneten Fundamentsteifigkeiten ergänzen die in der letzten Zeit veröffentlichten Ergebnisse für langgestreckte Fundamente /29/, /32/, /34/ und ermöglichen eine Interpretation der auftretenden Effekte. Dies gilt auch für die Gruppenwirkung von Fundamenten, die bei Pfahlgründungen /14/ ähnliche Effekte wie bei den hier berechneten Flachgründungen aufweist.

Bei der Schwingungsübertragung vom Baugrund ins Bauwerk sind drei Bereiche zu trennen:

die Erdbeben-,

die Erschütterungs-

und die Körperschallproblematik,

die sich durch den Frequenzbereich und die Fragestellung unterscheiden. Bei der tieffrequenten Erdbebenanregung (unter 10 Hz) interessieren die Bean-

spruchungen des Bauwerks, bei den Erschütterungen (5-100 Hz) sind meist die Schwingungen selbst der Untersuchungsgegenstand, während beim Körperschall (über 50 Hz) letztlich der vom Bauteil abgestrahlte Luftschall von Interesse ist. Weiterhin führen die unterschiedlichen Wellenlängen zu verschiedenen Bauwerksmodellen. Bei der langwelligen Erdbebenanregung genügen in der Regel sehr einfache Bauwerksmodelle zur Erfassung des Schwingungsverhaltens /5/. Es wird meistens nur die erste horizontale Eigenschwingung des Bauwerks betrachtet. Auf der anderen Seite sind die Wellenlängen beim Körperschall so kurz, daß die Wellenausbreitung durch Bauteile mit einfacheren theoretischen Modellen verfolgt werden kann /6/, ohne die gesamte Bauwerksstruktur mitabzubilden. Für den dazwischenliegenden Bereich der Erschütterungen bestehen im allgemeinen nicht solche Vereinfachungsmöglichkeiten. Aus diesem Grund wird die Erschütterungsübertragung vom Freifeld ins Bauwerk fast ausschließlich durch Messungen ermittelt /8/, wobei große Streuungen zwischen verschiedenen Bauwerken und auch innerhalb eines Bauwerks zwischen verschiedenen Meßpunkten auftreten.

Die Berechnung starrer und flexibler Strukturen unter Wellenanregung soll ein wesentlicher Beitrag dazu sein, die Erschütterungsübertragung in Bauwerke auch theoretisch zu durchdringen. Insbesondere werden die Erschütterungsminderungen gegenüber dem Freifeld, die in der Regel (abgesehen von Deckenresonanzen) gemessen werden /1/, verschiedenen Ursachen wie Kinematik, Trägheit und Steifigkeit zugeordnet.

Die gewählten Strukturbeispiele knüpfen einerseits an die Erdbebenmethodik an, bei der in der Regel starre Fundamente betrachtet werden. Insbesondere zur kinematischen Interaktion gibt es eine Reihe von Arbeiten /20/, /37/, in /18/ werden auch experimentelle Ergebnisse mitgeteilt. Bei flexiblen Strukturen, die unter Erdbebenanregung berechnet werden, handelt es sich meist um hohe schlanke Bauwerke auf starrem Fundament /36/, bei denen die Bauwerk-Boden-Wechselwirkung oft nur eine geringe Bedeutung hat. Bei den flexiblen Bauwerksbeispielen in der vorliegenden Arbeit ist das Wesentliche die Flexibilität in der Fundamentebene. An die Stelle der kinematischen Interaktion bei starrer Fundamenten tritt eine Wechselwirkung zwischen der endlichen Bauwerkssteifigkeit und dem anregenden Wellenfeld. Die vollständig gekoppelte Berechnung der flexiblen Strukturbeispiele wird ergänzt durch die Diskussion unendlich ausgedehnter Strukturen (Balken, Wandscheiben), die an eine ähnliche Thematik (unendliche Platte auf dem Halbraum /15/) aus dem Körperschallbereich anknüpft. Auf diese Weise wird versucht, eine Verbindung zwischen den Erdbeben-, den Erschütterungs- und den Körperschallmethoden herzustellen.

Teil I Grundlagen

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die beiden Grundgesetze der Mechanik, der Impuls- und der Drallsatz, lauten für ein Kontinuum

$$T_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.2)$$

beziehungsweise

$$\text{div } T + \underline{f} = \rho \underline{\ddot{u}} \quad (2.1)$$

$$T^T = T \quad , \quad (2.2)$$

mit dem Spannungstensor T , der Volumenkraftdichte \underline{f} , der Massendichte ρ und den Verschiebungen \underline{u} .

Für ein isotropes elastisches Material gilt weiterhin ein Materialgesetz

$$T = f(D) \quad , \quad (2.3)$$

das den Spannungstensor mit dem Verzerrungstensor D verknüpft. Bei einem linearen Zusammenhang (physikalische Linearisierung) ergibt sich unter Berücksichtigung der Isotropie das Materialgesetz

$$T = 2 \mu D + \lambda \text{spur } D \ I \quad (2.4)$$

mit den beiden Laméschen Konstanten μ und λ .

Der Verzerrungstensor D berechnet sich aus den Ortsableitungen des Verschiebungsfeldes \underline{u} . Bei kleinen Verschiebungsableitungen gilt

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.5)$$

(geometrische Linearisierung).

Verknüpft man diese Verschiebungs-Verzerrungsrelation mit dem Materialgesetz (2.4)

$$T_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad , \quad (2.6)$$

so hat man einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld und den Spannungen. Setzt man diese Beziehung wiederum in die Impulsbilanz (2.1) ein, erhält man die Feldgleichung der Elastodynamik

$$\begin{aligned} & \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad , \\ \text{bzw.} & \mu \text{div grad } \underline{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \underline{u} = \rho \underline{\ddot{u}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

eine partielle Differentialgleichung für das zeitabhängige Verschiebungsfeld \underline{u} .

3. Spezielle Lösungen der Elastodynamik: ebene und exponentielle harmonische Wellen

Für die Feldgleichungen der Elastodynamik (2.7) lassen sich spezielle Lösungen der Form

$$\underline{u} = \underline{A} e^{i(\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x})} \quad (3.1)$$

ableiten. Dies sind ebene harmonische Wellen (siehe Bild 3.1) mit der Amplitude \underline{A} und der Phase $\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x}$. $\underline{\xi}$ ist der Wellenzahlvektor, der in Richtung der Wellenausbreitung zeigt, und ω ist die Kreisfrequenz. Zwischen der Wellenzahl $\xi = \sqrt{\underline{\xi} \cdot \underline{\xi}}$, der Kreisfrequenz ω und den Begriffen Wellenlänge λ , Periode τ und Ausbreitungsgeschwindigkeit v bestehen folgende Zusammenhänge

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad v = \frac{\omega}{\xi} = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (3.2)$$

Der Lösungsansatz (3.1) in die Feldgleichung (2.7) eingesetzt, ergibt

$$\mu \xi^2 \underline{A} + (\lambda + \mu) (\underline{A} \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi} = \rho \omega^2 \underline{A} \quad (3.3)$$

wobei der gemeinsame Faktor $e^{i(\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x})}$ weggelassen ist. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, diese Gleichung zu erfüllen:

$$\underline{A} = \alpha \underline{\xi} \quad \text{und} \quad (\lambda + 2\mu) \xi^2 = \rho \omega^2 \quad (3.4)$$

oder

$$\underline{A} \cdot \underline{\xi} = 0 \quad \text{und} \quad \mu \xi^2 = \rho \omega^2. \quad (3.5)$$

Die Gleichungen (3.4) kennzeichnen eine Longitudinalverschiebung in Ausbreitungsrichtung $\underline{\xi}$ mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{\xi} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} =: v_L, \quad (3.6)$$

die Gleichungen (3.5) eine Transversalverschiebung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung mit

$$v = \frac{\omega}{\xi} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} =: v_T. \quad (3.7)$$

Ein elastisches Material besitzt demnach zwei charakteristische Wellengeschwindigkeiten v_T und v_L , mit denen sich Transversal- und Longitudinalbewegungen ausbreiten. Da immer $v_L > v_T$ ist, werden die schnelleren Longitudinalwellen auch als "primary waves" (P-Wellen, v_p) und die langsameren Transversalwellen auch als "secondary waves" (S-Wellen, v_s) bezeichnet. Weiterhin sind noch die Bezeichnungen Kompressions- (korrekter Dehn-) und Scherwellen für die Longitudinal- und Transversalwelle gebräuchlich.

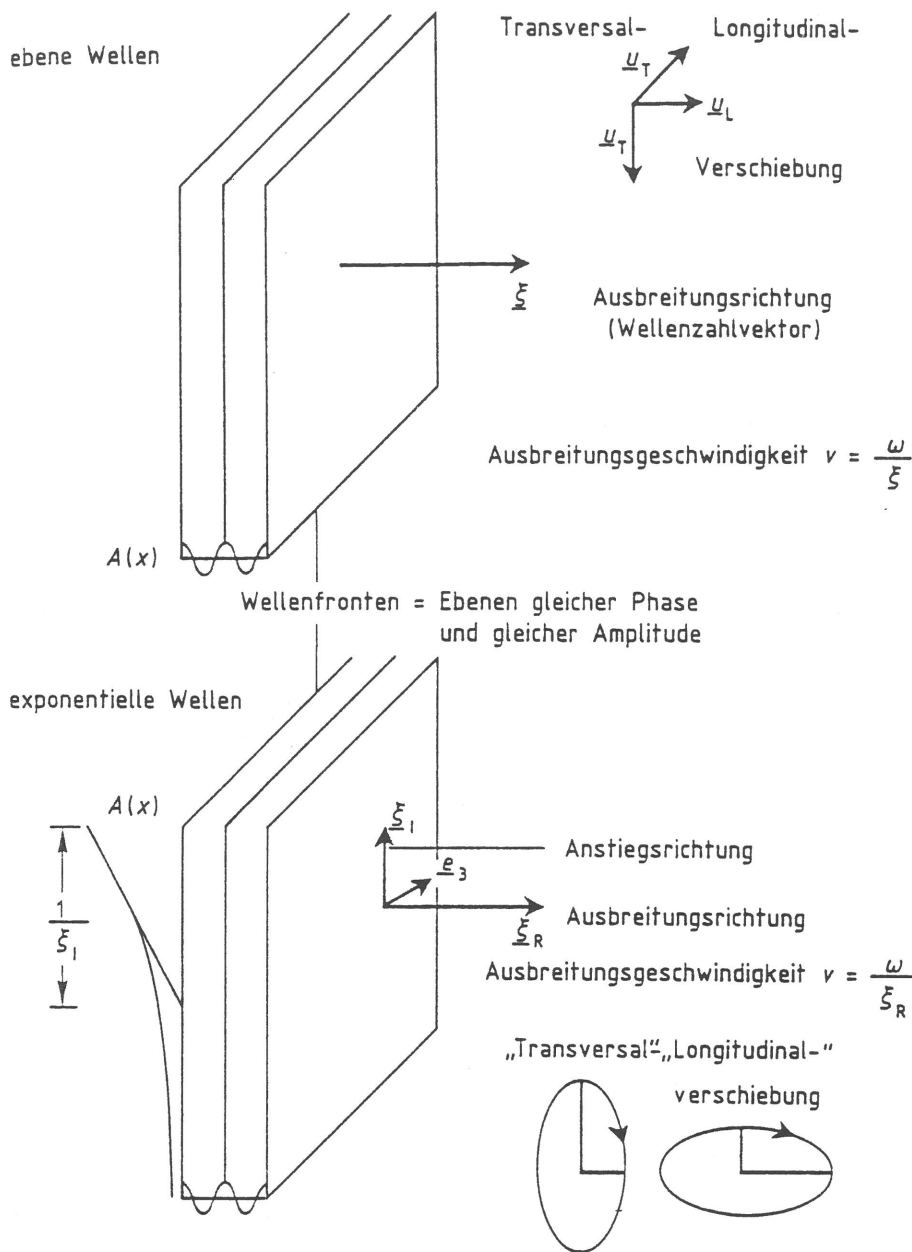


Bild 3.1 - Ebene und exponentielle harmonische Wellen

Man kann den Lösungsansatz (3.1) auf komplexe Wellenzahlvektoren $\underline{\xi} = \underline{\xi}_R + i\underline{\xi}_I$ erweitern

$$\underline{u} = \underline{A} e^{\underline{\xi}_I \cdot \underline{x}} e^{i(\omega t - \underline{\xi}_R \cdot \underline{x})} \quad (3.8)$$

Dies sind Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{\xi_R}$$

in Richtung $\underline{\xi}_R$ ausbreiten und deren Amplituden in Richtung $\underline{\xi}_I$ gemäß $e^{\underline{\xi}_I \cdot \underline{x}}$ zunehmen (Bild 3.1 unten). Aus den Bedingungen (3.4) bzw. (3.5) folgt dann mit

$$\xi^2 = \underline{\xi} \cdot \underline{\xi} = \xi_R^2 - \xi_I^2 - 2i \underline{\xi}_R \cdot \underline{\xi}_I$$

$$v = \frac{\omega}{\xi_R} = v_L \sqrt{1 - \frac{\xi_I^2}{\xi_R^2}} \quad \text{mit } \underline{A} = \alpha(\underline{\xi}_R + i\underline{\xi}_I) \quad (3.9)$$

bzw.

$$v = \frac{\omega}{\xi_R} = v_T \sqrt{1 - \frac{\xi_I^2}{\xi_R^2}} \quad \text{mit } \underline{A} = \alpha(\xi_I^2 \underline{\xi}_R + i\xi_R^2 \underline{\xi}_I) + \gamma \underline{\epsilon}_3 \quad (3.10)$$

und jeweils

$$\underline{\xi}_R \cdot \underline{\xi}_I = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Der mit Gleichung (3.8) eingeführte Wellentyp hat demnach folgende Eigenschaften:

- Ausbreitungsrichtung $\underline{\xi}_R$ und Anstiegsrichtung $\underline{\xi}_I$ stehen senkrecht zueinander (3.11).
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind langsamer als die Longitudinal- oder die Transversalwellengeschwindigkeit.
- Die Bewegung eines Punktes ist eine nach den Richtungen $\underline{\xi}_R$ und $\underline{\xi}_I$ orientierte Ellipse oder eine Transversalbewegung in der dritten Raumrichtung \underline{e}_3 .

Die exponentielle Zunahme bei diesem Wellentyp kann nur für ein in der Anstiegsrichtung $\underline{\xi}_I$ begrenztes Medium sinnvoll sein, zum Beispiel für den homogenen oder den geschichteten Boden. Beim homogenen Boden gibt es eine spezielle Kombination einer exponentiellen Longitudinal- und Transversalwelle, die nicht nur Lösung der Feldgleichung (2.7) ist, sondern gleichzeitig die Spannungsfreiheit auf der Bodenoberfläche erfüllt. Diese sogenannte Rayleighwelle hat eine feste nur vom Verhältnis v_T/v_L abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_R < v_T < v_L$, die kleiner als die beiden anderen Wellengeschwindigkeiten ist, und an der Bodenoberfläche ein charakteristisches (nur von $\beta = v_T/v_L$ abhängiges) Verhältnis u_H/u_V der Horizontal- und Vertikal-amplitude, wobei die Horizontalkomponente in Ausbreitungsrichtung der Vertikalkomponente (in Abnahmerichtung) um 90° nacheilt.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, daß der transversale Anteil $\gamma \underline{e}_3$ (s. 3.10) in der zur Abnahme- und zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Raumrichtung gemeinsam mit einem Anteil mit konjugiert komplexem Wellenzahlvektor $\underline{\xi}$ bei geschichteten Systemen als sogenannte Love-Welle eine der Rayleighwelle entsprechende Rolle spielt.

4. Lösungen für eine harmonische Punktlast

4.1 Der elastische Vollraum

Die im vorangehenden Abschnitt 3 dargestellten Wellen sind Lösungen der Feldgleichung (2.7), aus denen sich für eine spezielle Problemstellung bei vorgegebener Belastung und Randbedingung die Lösung aufbauen läßt.

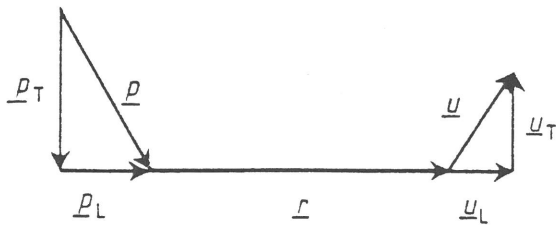


Bild 4.1 - Zerlegung der Kraft \underline{p} und der Verschiebung \underline{u} im Abstand \underline{r}

Es wird der homogene isotrop elastische Vollraum betrachtet, der an einem Punkt durch eine harmonische Kraft

$$\underline{p}(t) = \underline{p} e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

angeregt wird. Gesucht sind die Verschiebungen \underline{u} an einem beliebigen anderen Punkt des Vollraumes. Zur Darstellung dieser Verschiebungen legt man zweckmäßigerweise den Koordinatenursprung an den Angriffspunkt der Kraft und zerlegt sowohl die Kraft als auch die gesuchte Verschiebung in eine zur Ausbreitungsrichtung parallele und eine dazu senkrechte Komponente (Bild 4.1). Aus Symmetriegründen folgt dann, daß die Parallelkomponente \underline{p}_L nur eine parallele Verschiebungskomponente \underline{u}_L und die senkrechte Komponente \underline{p}_T nur eine senkrechte Verschiebungskomponente \underline{u}_T erzeugen kann. Schreibt man die Lösung als Funktion von dimensionslosen Größen (Dimensionsanalyse), so ergibt sich die Darstellung

$$\underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_T = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_1(\bar{r}, \beta) \underline{p}_L + f_2(\bar{r}, \beta) \underline{p}_T]. \quad (4.2)$$

Dabei ist

r der Abstand des betrachteten Punktes vom Angriffspunkt der Kraft,

$$\bar{r} = \omega r / v_T \text{ ein dimensionsloser Frequenz-Abstands-Parameter,} \quad (4.3)$$

$$\beta = v_T / v_L \text{ ein dimensionsloser Materialparameter,} \quad (4.4)$$

und f_1 und f_2 sind zwei skalarwertige Funktionen mit folgender physikalischer Bedeutung:

f_1 ist die normierte Longitudinalverschiebung infolge einer Kraft in Ausbreitungsrichtung \underline{r} ,

f_2 ist die normierte Transversalverschiebung infolge einer "transversalen" Kraft, wobei Kraft und Verschiebung parallel sind.

Der Faktor $1/4\pi$ ist im Hinblick auf spätere Vereinfachungen eingefügt worden.

Die Funktionen f_1 und f_2 bekommt man aus der von Cruse und Rizzo /7/ veröffentlichten Lösung dieses Problems:

$$f_1(\bar{r}, \beta) = 4\pi\mu r \frac{u_L}{\rho_L} = \left(\beta^2 - \frac{2}{\bar{r}^2} - i\frac{2\beta}{\bar{r}}\right) e^{-i\beta\bar{r}} + \left(\frac{2}{\bar{r}^2} + i\frac{2}{\bar{r}}\right) e^{-i\bar{r}}, \quad (4.5)$$

$$f_2(\bar{r}, \beta) = 4\pi\mu r \frac{u_T}{\rho_T} = \left(1 - \frac{1}{\bar{r}^2} - i\frac{1}{\bar{r}}\right) e^{-i\bar{r}} + \left(\frac{1}{\bar{r}^2} + i\frac{\beta}{\bar{r}}\right) e^{-i\beta\bar{r}}. \quad (4.6)$$

Beide Funktionen bestehen aus je zwei Wellentermen, wobei der Faktor

$$e^{-i\bar{r}} = e^{-i\omega r/v_T}$$

die Phasenfunktion einer Transversalwelle und der Faktor

$$e^{-i\beta\bar{r}} = e^{-i\omega r/v_L}$$

die Phasenfunktion einer Longitudinalwelle darstellt. Die Amplituden der beiden Wellenterme hängen jeweils noch von \bar{r} und β ab. Es lassen sich leicht die Grenzwerte dieser Funktionen für $\bar{r} \rightarrow \infty$ (Fernfeld) und $\bar{r} \rightarrow 0$ (Nahfeld) angeben.

Fernfeld:

Für $\bar{r} \rightarrow \infty$ verschwinden alle Summanden bis auf

$$f_1 = \beta^2 e^{-i\beta\bar{r}} \quad (4.7)$$

und

$$f_2 = e^{-i\bar{r}}, \quad (4.8)$$

das heißt im Fernfeld besteht $f_1=4\pi\mu r u_L/\rho_L$ (die Longitudinalverschiebung) aus einer reinen Longitudinalwelle und $f_2=4\pi\mu r u_T/\rho_T$ (die Transversalverschiebung) aus einer reinen Transversalwelle. Die absoluten Amplituden u_L und u_T nehmen mit $1/r$ mit der Entfernung ab.

Nahfeld:

Die Amplitudenfunktionen der beiden Wellenterme gehen für $r \rightarrow 0$ jeweils gegen unendlich. Für die Grenzwertbetrachtung werden deshalb die Exponentialfunktionen in ihre Taylorreihe entwickelt

$$e^{-i\bar{r}} \doteq 1 - \frac{\bar{r}^2}{2} - i\left(\bar{r} - \frac{\bar{r}^3}{6}\right)$$

und der gemeinsame Nenner \bar{r}^2 herausgezogen

$$f_1 \doteq \left[\left(\beta^2 \bar{r}^2 - 2 - i2\beta\bar{r}\right) \left(1 - \frac{\beta^2 \bar{r}^2}{2} - i\beta\bar{r} + i\frac{\beta^3 \bar{r}^3}{6}\right) + (2 + i2\bar{r}) \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{2} - i\bar{r} + i\frac{\bar{r}^3}{6}\right) \right] / \bar{r}^2,$$

$$f_2 \doteq \left[\left(\bar{r}^2 - 1 - i\bar{r}\right) \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{2} - i\bar{r} + i\frac{\bar{r}^3}{6}\right) + (1 + i\beta\bar{r}) \left(1 - \frac{\beta^2 \bar{r}^2}{2} - i\beta\bar{r} + i\frac{\beta^3 \bar{r}^3}{6}\right) \right] / \bar{r}^2.$$

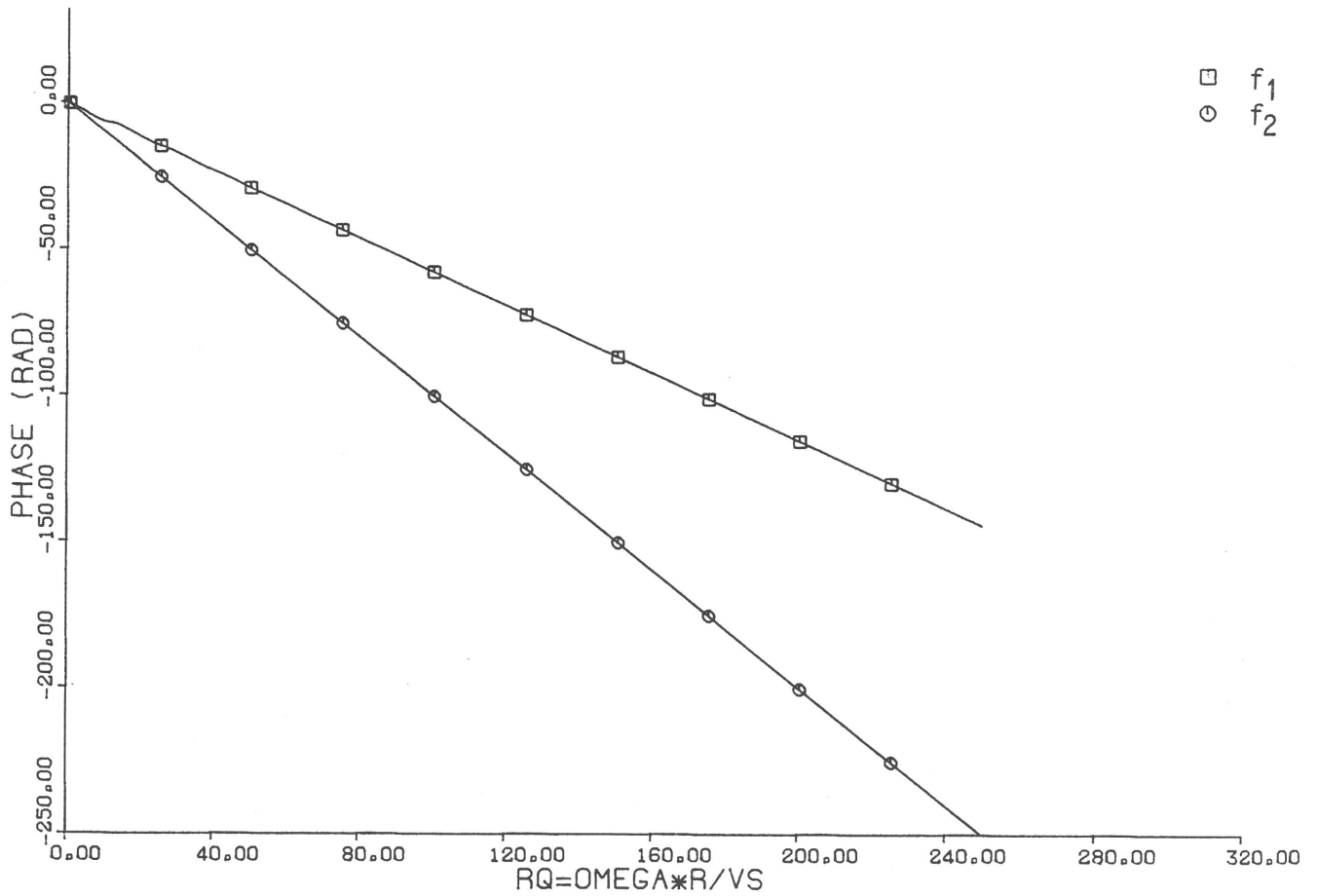
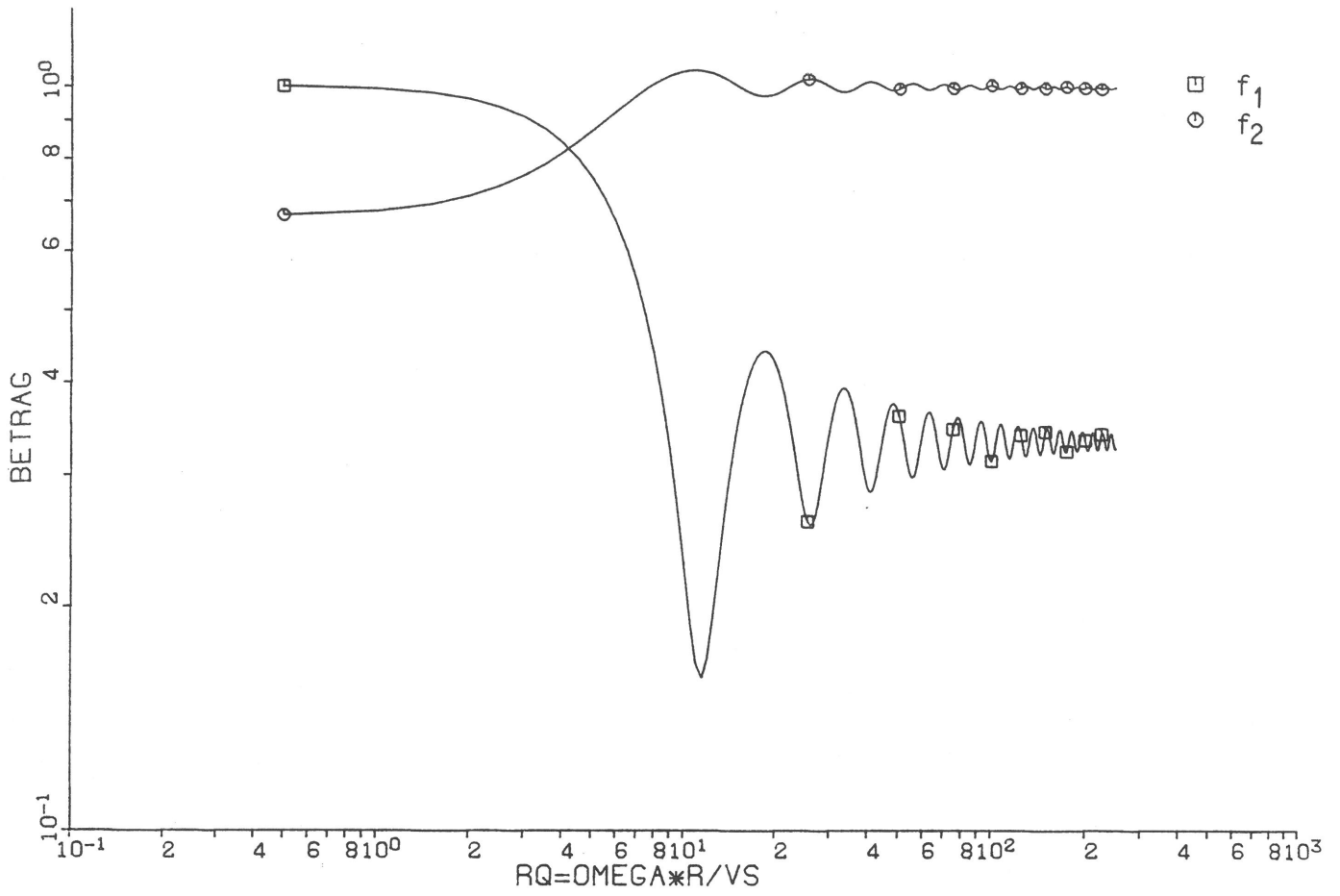


Bild 4.2 - Die Punktlastlösung des Vollraums: Betrag und Phase der Verschiebungsfunktionen f_1 und f_2 ($\beta^2=1/3$)

Beim Ausmultiplizieren heben sich zunächst alle Konstanten und in \bar{r} linearen Summanden auf, so daß die Existenz des Grenzwertes gesichert ist. Es verbleibt

$$f_1 \doteq 1 - i \frac{2+\beta^3}{3} \bar{r} \quad , \quad (4.9)$$

$$f_2 \doteq \frac{1+\beta^2}{2} - i \frac{2+\beta^3}{3} \bar{r} \quad . \quad (4.10)$$

Der Realteil ist jeweils die statische Lösung des Problems ($\bar{r} = \omega r / v_T = 0$)

$$\frac{u_L}{p_L} = \frac{1}{4\pi\mu r} \quad , \quad (4.11)$$

$$\frac{u_T}{p_T} = \frac{1}{4\pi\mu r} \frac{3-4\nu}{4-4\nu} \quad , \quad (4.12)$$

wobei der dynamische Materialparameter

$$\beta^2 = (v_T/v_L)^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \quad (4.13)$$

durch den "statischen" Materialparameter ν , die Querkontraktionszahl, ersetzt wurde. Der Imaginärteil der Näherungen (4.9) und (4.10) charakterisiert jeweils eine Ausbreitungsgeschwindigkeit v_i ($i = 1,2$) im Nahfeld

$$\frac{\text{Im}(f_i)}{\text{Re}(f_i)} = \tan \varphi \doteq \varphi = - \frac{r\omega}{v_i} \rightsquigarrow \begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2+\beta^3} v_T > v_T \\ v_2 &= \frac{3(1+\beta^2)}{2(2+\beta^3)} v_T < v_T. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die vollständige Lösung für $\beta^2 = 1/3$ bzw. $\nu = 1/4$ zeigt Bild 4.2.

4.2 Der elastische Halbraum

Es wird der homogene isotrop elastische Halbraum betrachtet, der an seiner Oberfläche durch eine harmonische Punktlast \underline{p} angeregt wird. Gesucht sind die Verschiebungen \underline{u} an einem beliebigen anderen Punkt der Halbraumoberfläche. Der Halbraum besitzt eine ausgezeichnete Richtung \underline{e}_z , die senkrecht auf der Oberfläche steht und ins Innere des Halbraums weist (Bild 4.3).

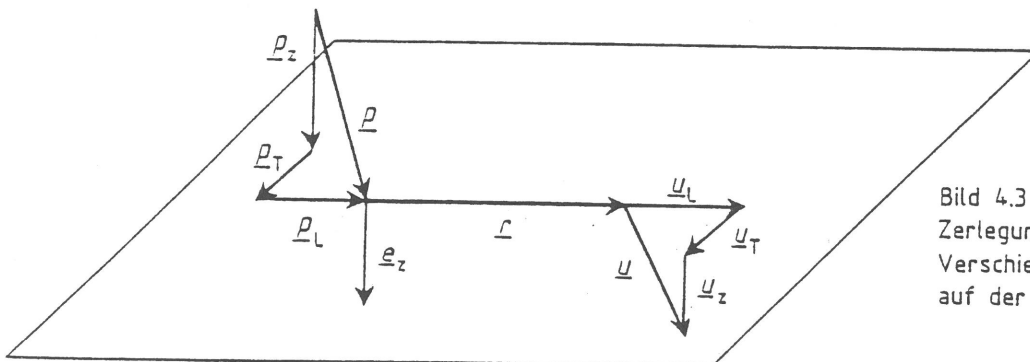


Bild 4.3 -
Zerlegung der Kraft \underline{p} und der
Verschiebung \underline{u} im Abstand \underline{r}
auf der Halbraumoberfläche

Zur Darstellung der Lösung zerlegt man zunächst Kraft und Verschiebung jeweils in einen vertikalen und einen horizontalen Anteil, und die horizontalen Anteile unterteilt man (analog zur Unterteilung im Vollraum) nochmal in eine zur Ausbreitungsrichtung \underline{r} parallele Longitudinalkomponente und eine dazu senkrechte Transversalkomponente (Bild 4.3). Aus Symmetriegründen folgt dann, daß die Transversalkomponente von den anderen Komponenten unabhängig ist:

$$\underline{u}_T = \frac{1}{2\pi\mu r} f_2(\bar{r}, \beta) \underline{p}_T \quad , \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\mu r} \begin{bmatrix} f_1 & f_{rz} \\ f_{zr} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_L \\ p_z \end{bmatrix} . \quad (4.16)$$

Diese Darstellung der Halbraumlösung entspricht der Darstellung (4.2) der Vollraumlösung. Im Vergleich zum Vollraum ist die Anzahl der Lösungsfunktionen $f(\bar{r}, \beta)$ des Halbraumes größer und der skalare Faktor $1/2\pi$ ist doppelt so groß gewählt worden. Die Bedeutung von f_1 und f_2 ist wie beim Vollraum die normierte Longitudinal- bzw. Transversalverschiebung infolge einer Longitudinal- bzw. Transversalkraft. f_{zz} ist die normierte vertikale (Transversal-) Verschiebung infolge einer vertikalen Kraft. Wegen der ausgezeichneten Richtung \underline{e}_z des Halbraums ist f_{zz} im allgemeinen ungleich f_2 .

Als gegenüber der Vollraumlösung neue Größen kommen beim Halbraum die beiden Koppelglieder f_{rz} und f_{zr} hinzu (Bild 4.4): Eine vertikale Last erzeugt auch radiale horizontale Verschiebungen \underline{u}_{rz} und eine radiale Last erzeugt auch eine vertikale Verschiebung \underline{u}_{zr} . Das Reziprozitätsgesetz auf die Situation in Bild 4.4 angewandt

$$p_z u_{zr}^* = - p_r^* u_{rz}$$

ergibt

$$\frac{u_{zr}^*}{p_r^*} = - \frac{u_{rz}}{p_z} \quad \text{bzw.} \quad f_{zr} = -f_{rz} .$$

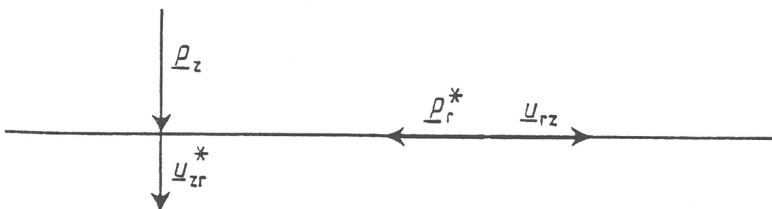


Bild 4.4 -
Anwendung des Reziprozitätsgesetzes
auf die Koppelverschiebungen u_{rz} und u_{zr}

Die Halbraumlösung besteht demnach aus den vier skalaren Funktionen f_1 , f_2 , f_{zz} und f_{rz} . Für diese Funktionen existieren keine vergleichbar einfachen expliziten Darstellungen wie für die Vollraumlösung (4.5 und 4.6). Rücker /29/ gibt eine Integraldarstellung und deren numerische Auswertung für

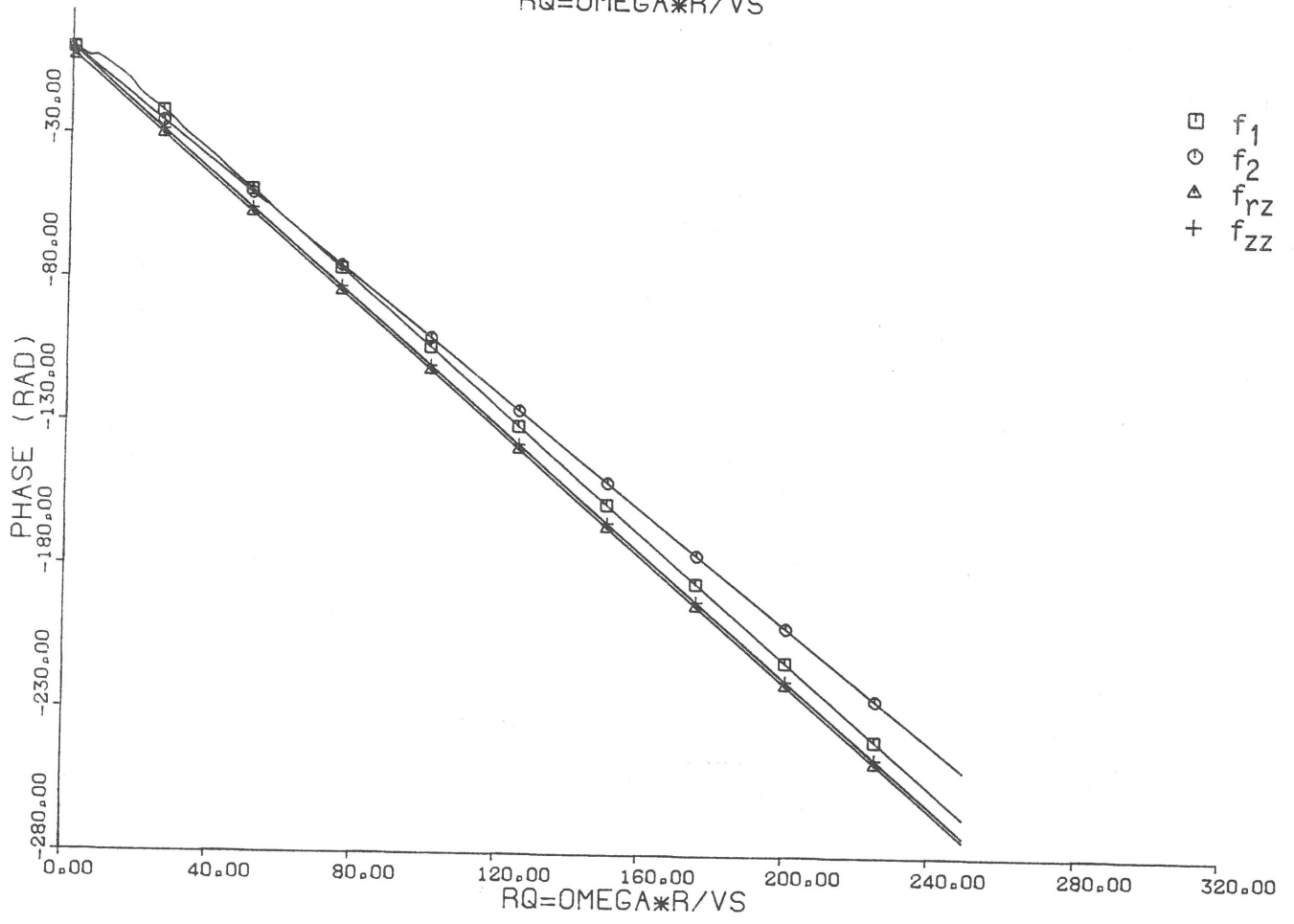
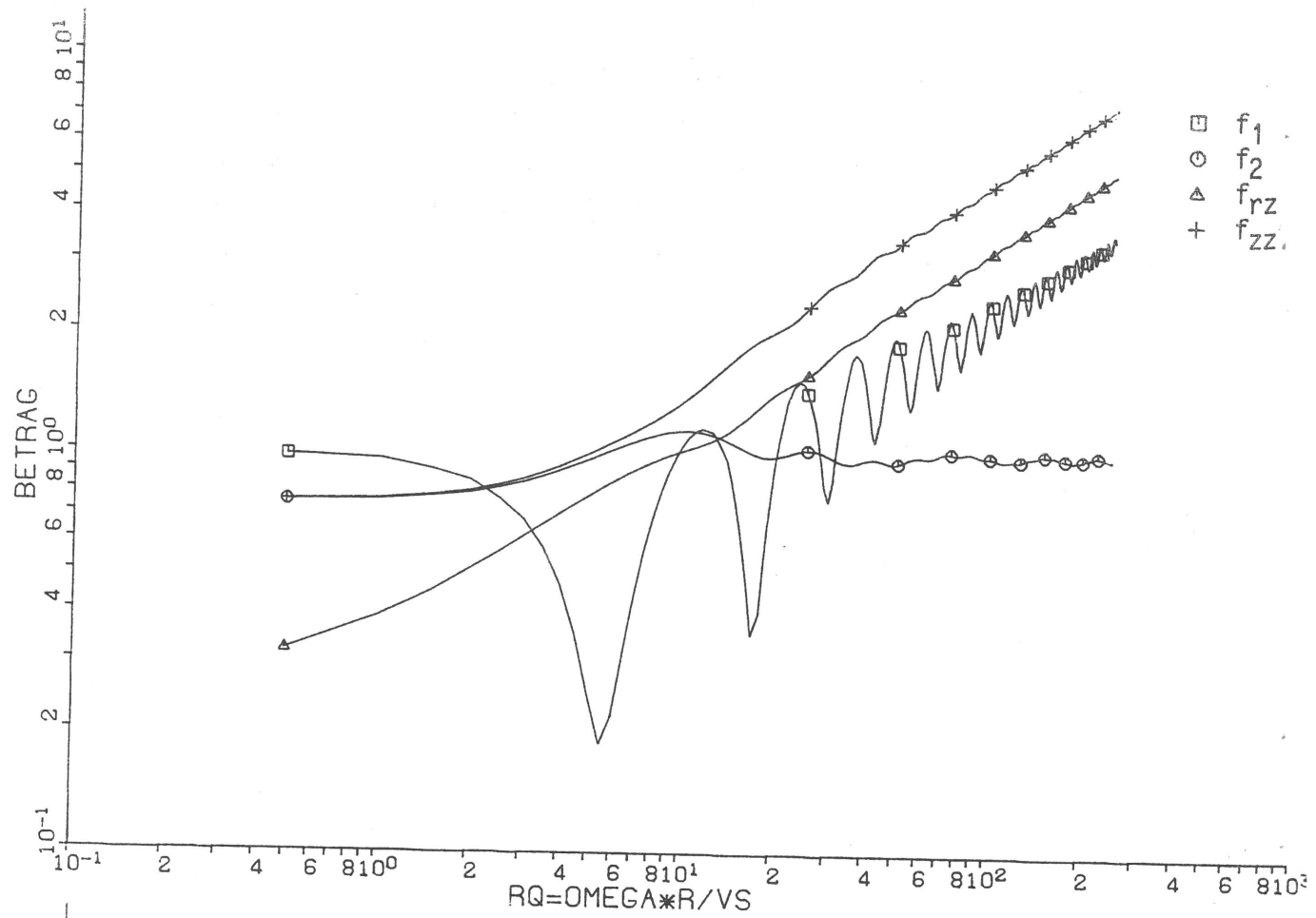


Bild 4.5 - Die Punktlastlösung des Halbraums: Betrag und Phase der Verschiebungsfunktionen ($\beta^2=1/3$)

$\beta^2 = 1/3$ (bzw. $\nu = 1/4$) an (Bild 4.5). Die Lösung für vertikale Punktlast f_{zz} und f_{rz} ist im Prinzip schon seit der Arbeit von Lamb /24/ bekannt und von verschiedenen Autoren numerisch ausgewertet worden (Elorduy, Nieto, Szekely /10/; Prange /27/; Holzlöhner /17/). Die Lösung für eine horizontale Punktlast beruht auf einer Arbeit von Chao /4/, der für $\nu = 1/4$ die Sprungantwort berechnet.

Die Punktlastlösungen besitzen folgende Eigenschaften (Bild 4.5):

1. Die Transversalverschiebung bei transversaler Last (f_2)

Der Betrag von f_2 ist annähernd für den gesamten Entfernungs- (Frequenz-) Bereich \bar{r} gleich. Nur im Nahfeld sind die Werte etwas kleiner. Die Phase ist

$$\varphi \approx - \frac{\omega r}{v_T} ,$$

das heißt, man hat fast durchgängig eine horizontale Transversalwelle, deren Amplitude mit $u \sim 1/r$ abnimmt.

2. Die Radialverschiebung bei vertikaler Last (f_{rz}) (bzw. die Vertikalverschiebung bei radialer Last ($f_{zr} = -f_{rz}$))

Der Betrag von f_{rz} steigt annähernd gleichmäßig im gesamten dargestellten \bar{r} -Bereich mit $\bar{r}^{1/2}$, das bedeutet für die absoluten Amplituden eine Abnahme $u \sim 1/\sqrt{r}$. Die Phase ist bis auf kleine Abweichungen im Nahfeld

$$\varphi - \varphi_0 \approx - \frac{\omega r}{v_R} .$$

Der Koppelterm f_{rz} ist demnach im wesentlichen ein Anteil der Rayleighwelle (vgl. Abschnitt 3), die als zylindrische Oberflächenwelle eine geringere Amplitudenabnahme als die kugelförmigen Raumwellen besitzt.

3. Die Vertikalverschiebung bei vertikaler Last (f_{zz})

Es ist deutlich ein Nah- und ein Fernfeld zu unterscheiden.

Im Nahfeld ist f_{zz} konstant ($u \sim 1/r$),
im Fernfeld steigt f_{zz} mit $\bar{r}^{1/2}$ ($u \sim 1/\sqrt{r}$).

Im Fernfeld ist außerdem

$$\varphi - \varphi_0 \approx - \frac{\omega r}{v_R} ,$$

so daß das Fernfeld eindeutig als Rayleighwelle identifiziert werden kann.

4. Die Radialverschiebung bei radialer Last (f_1)

Es gibt wie bei f_{zz}
eine konstante Nahfeldasymptote ($u \sim 1/r$) und
eine Fernfeldasymptote $f_2 \sim \bar{r}^{1/2}$ ($u \sim 1/\sqrt{r}$).

Diesen Asymptoten sind starke Schwankungen überlagert, die auf der Interferenz von Longitudinalwellen mit der Rayleighwelle beruhen. Den Amplitudenminima bei $\bar{r} = 5,5$ und 17 entsprechen Phasensprünge um π . Im Fernfeld wird wieder das Phasenfeld der Rayleighwelle erreicht.

Für die vier Lösungsfunktionen f_1, f_2, f_{zz}, f_{rz} lassen sich die Nah- und Fernfeldasymptoten explizit angeben. Für das Nahfeld ($\bar{r} \rightarrow 0$) hat man den statischen Wert ($\bar{r}=0$)

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1-\nu \\ f_{zz} &= 1-\nu \\ f_{zr} &= -f_{rz} = (1-2\nu)/2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

und jeweils eine Phase $\varphi = -\omega r/v$, die sich aus den Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Nahfeldes

$$\begin{aligned} v_1 &> v_T, \\ v_2 &\approx v_T, \\ v_{zz} &< v_R < v_T, \\ v_{rz} &\approx v_L \end{aligned} \quad (4.19)$$

berechnen lassen.

Die Fernfeldasymptoten sind /29/:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{x^2-1} K \sqrt{\bar{r}} e^{-i(x\bar{r}+\pi/4)}, \\ f_2 &= e^{-i\bar{r}}, \\ f_{zz} &= \sqrt{x^2-\beta^2} K \sqrt{\bar{r}} e^{-i(x\bar{r}+\pi/4)}, \\ f_{rz} &= \sqrt{(x^2-1)(x^2-\beta^2)} K \sqrt{\bar{r}} e^{-i(x\bar{r}+3\pi/4)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dabei ist

$$K = \frac{(2x^2-1)^2 \sqrt{2x\pi}}{8x(1-(6-4\beta^2)x^2+6(1-\beta^2)x^4)}$$

und für

$$\begin{aligned} x &= v_T/v_R \\ \beta &= v_T/v_L \quad (\text{s. 4.13}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

hat man folgende Werte

ν	β^2	$1/x = v_R/v_T$
0	1/2	0,874
1/4	1/3	0,919
1/3	1/4	0,933
2/5	1/6	0,943
1/2	0	0,955

Das Fernfeld ist in Bild 4.6 noch einmal anschaulich zusammengefaßt:
 Eine horizontale Last erzeugt in der zur Kraft senkrechten Raumrichtung eine Transversalwelle, die als Raumwelle mit $1/r$ abnimmt. In der zur horizontalen Last parallelen Raumrichtung entsteht ebenso wie bei der vertikalen Last eine Rayleighwelle, die als Oberflächenwelle mit $1/\sqrt{r}$ abnimmt. Die Eigenschaften der Rayleighwelle sind von der Art der Belastung unabhängig, denn sie ist eine Lösung für die spannungsfreie Oberfläche ("homogene Lösung"). Insbesondere ist das Verhältnis von Horizontal- zu Vertikalamplitude für beide Lastfälle gleich (s. auch /9/)

$$\frac{u_H}{u_V} = \frac{f_{rZ}}{f_{ZZ}} = \frac{f_1}{f_{zr}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \beta^2}} e^{-i\pi/2} \approx \frac{2}{3} e^{-i\pi/2} \quad (4.22)$$

Diese Tatsache wird bereits bei der Darstellung von f_{rZ} in (4.20) ausgenutzt

$$|f_{rZ}| = \sqrt{|f_1| |f_{ZZ}|} \quad .$$

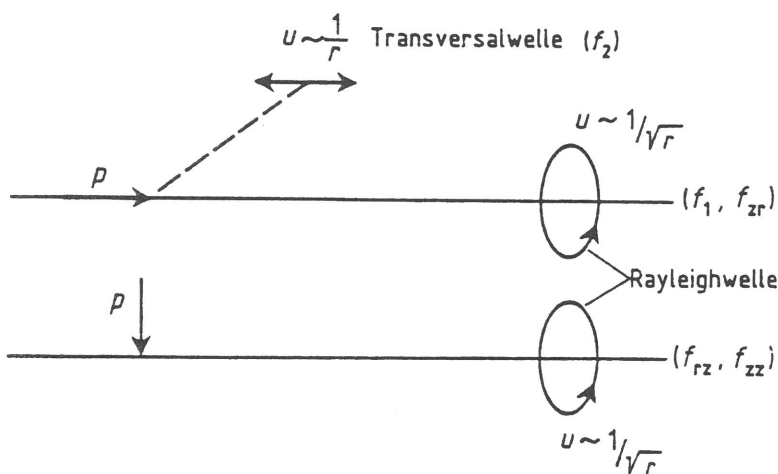


Bild 4.6 -
 Das Fernfeld infolge einer Punktlast auf der Halbraumoberfläche

4.3 Vergleich zwischen Halbraum und Vollraum

Die Lösungen für den Vollraum (Bild 4.2) und für den Halbraum (Bild 4.5) weisen gewisse Ähnlichkeiten auf, wobei zu beachten ist, daß aufgrund der gewählten Normierung (4.2) und (4.16) die Vollraumlösung mit der halbierten Halbraumlösung verglichen wird. Eine Übereinstimmung bedeutet demnach, daß die Verschiebungen des Halbraumes bei gleicher Belastung doppelt so groß wie im Vollraum sind.

Der Vergleich zeigt nun, daß das Nahfeld ($\bar{r} \rightarrow 0$) ziemlich gut übereinstimmt, während im Fernfeld deutliche Abweichungen auftreten. Die Unterschiede im Fernfeld sind durch die nur im Halbraum vorkommenden Rayleighwellen verursacht. Im einzelnen stellt man fest:

1. Die Funktionen f_1 (Radialverschiebung infolge radialer Last) stimmen in der statischen Lösung ($\bar{r}=0$) exakt überein. Das Nahfeld ist ähnlich mit ungefähr gleich großen Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Das Fernfeld enthält beim Halbraum die Rayleighwelle und weicht deshalb mit zunehmendem \bar{r} von dem nur Raumwellen enthaltenden Fernfeld des Vollraumes ab.
2. Die Funktionen f_2 (Transversalverschiebung infolge transversaler Last) stimmen im gesamten Entfernungsbereich gut überein. Dabei ist die Fernfeldasymptote $f_2 = e^{i\bar{r}}$ exakt gleich. Der statische Wert ($\bar{r}=0$) ist im Vollraum im allgemeinen etwas kleiner als im Halbraum:

	Halbraum	Vollraum
ν	$1-\nu$	$\frac{3-4\nu}{4-4\nu}$
0	1	3/4
1/4	3/4	2/3
1/3	2/3	5/8
2/5	3/5	7/12
1/2	1/2	1/2

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Nahfeld ist im Vollraum etwas größer.

3. Bei vertikaler Belastung des Halbraumes treten die größten Abweichungen auf. Es ist f_{zz} des Halbraumes mit f_2 des Vollraumes zu vergleichen: Der statische Wert weist die unter 2. beschriebene kleine Differenz aus, auch die Nahfeldausbreitungsgeschwindigkeit ist wie unter 2. im Vollraum größer. Das Fernfeld des Halbraumes weist wieder Rayleighwellen auf und ist damit von dem des Vollbraumes völlig verschieden.
4. Für die Halbraumlösung f_{rz} (zur Belastung senkrechte Verschiebungen) gibt es im Vollraum aus Symmetriegründen kein Äquivalent. Im Fernfeld ist diese Lösung ein Teil der Rayleighwelle und überwiegt bei horizontaler Last sogar die lastparallele Verschiebungskomponente. Im Nahfeld ist sie dagegen immer kleiner, für $\nu = 0,5$ verschwindet sogar $f_{rz}(\bar{r}=0) = (1-2\nu)/2$.

Der Unterschied zwischen Vollraum- und Halbraumlösung läßt sich mit Bild 4.7 anschaulich deuten: Zerlegt man den Vollraum in zwei Halbräume, wobei auch die Last halbiert wird, und betrachtet die Lösungen der beiden Halbräume, dann hätte man bei Übereinstimmung dieser Lösungen an den jeweiligen Oberflächen zugleich auch schon eine Lösung für den Vollraum. Die Oberflächenverschiebungen der beiden Halbräume stimmen aufgrund der vorliegenden Symmetrien aber nur in der jeweils lastparallelen Richtung überein, in der zur Last senkrechten Richtung (in Bild 4.7 die Horizontale) sind dagegen

die Verschiebungen der beiden Halbräume entgegengesetzt und man erhält beim Zusammenfügen der beiden Halbraumlösungen ein inkompatibles Verschiebungsfeld.

Tatsächlich treten im Vollraum zwischen den Halbräumen Spannungen auf, die diese Inkompatibilitäten beseitigen. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigt, sind diese Spannungen ebenso wie die Koppelverschiebungen des Halbraumes jeweils senkrecht zur anregenden Kraft.

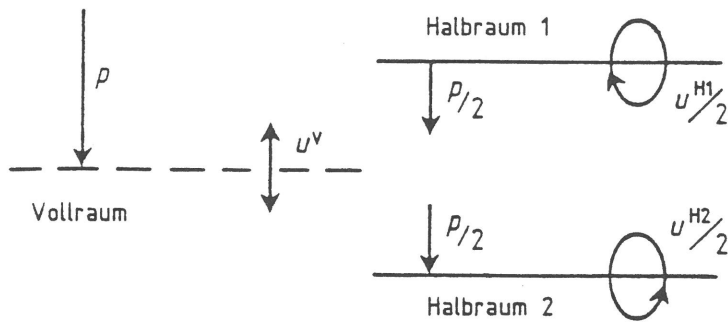


Bild 4.7 -
Zerlegung des Vollraumes in zwei Halbräume, Vergleich der Vollraumlösung u^V mit den beiden Halbraumlösungen u^{H1} und u^{H2}

4.4 Das Spannungsfeld des elastischen Vollraumes bei Punktlastanregung

Mit Hilfe der Spannungs-Verschiebungsrelation (2.6) kann man dem Verschiebungsfeld das zugehörige Spannungsfeld zuordnen. Zuvor soll hier die Gestalt des Spannungsfeldes aufgrund der vorliegenden Symmetrien beschrieben werden.

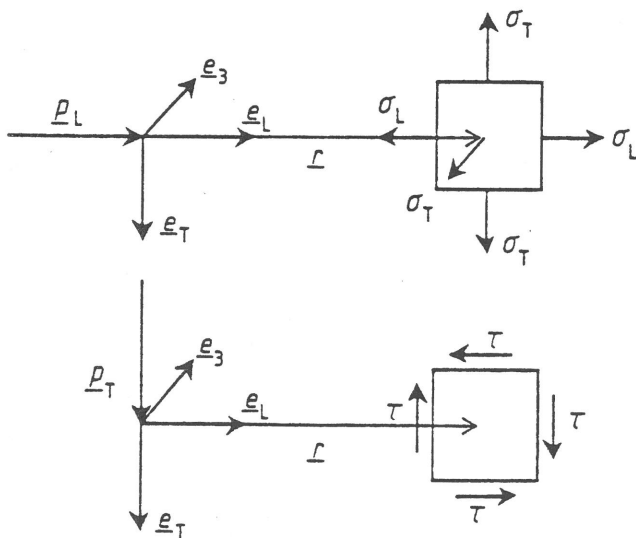


Bild 4.8 -
Der Spannungszustand des Vollraumes im Abstand r einer Longitudinalkraft p_L bzw. einer Transversalkraft p_T

Für einen Punkt im Abstand r der Anregung zerlegt man die Kraft in einen Transversal- und einen Longitudinalanteil (Bild 4.8) und betrachtet die Spannungen an einem nach den Richtungen e_L , e_T , e_3 orientierten Volumenelement. Wegen der Symmetrien erzeugt die Longitudinalkraft p_L einen reinen Normalspannungszustand

$$T(p_L) = \begin{bmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_T \end{bmatrix}$$

und die Transversalkraft p_T einen reinen Schubspannungszustand

$$T(p_T) = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_L = \frac{p_L}{4\pi r^2} g_1(\bar{r}, \beta) \quad ,$$

$$\sigma_T = \frac{p_L}{4\pi r^2} g_2(\bar{r}, \beta) \quad ,$$

$$\tau = \frac{p_T}{4\pi r^2} g_3(\bar{r}, \beta)$$

(4.23)

darstellen lassen.

Zur Herleitung der Spannungen an einem Punkt r gemäß Gleichung (2.6) benötigt man die Verschiebungsableitungen, wobei auf die Richtungen e_L , e_T , e_3 Bezug genommen wird (Bild 4.8). Die Ableitungen in Longitudinalrichtung e_L ergeben sich einfach aus der Differentiation der Funktionen (vgl. (4.2))

$$u_L(r) = \frac{p_L}{4\pi\mu r} f_1(\bar{r}) \quad ,$$

$$u_T(r) = \frac{p_T}{4\pi\mu r} f_2(\bar{r})$$

nach r :

$$u_{L,L} = \frac{p_L}{4\pi\mu r^2} \{ \bar{r} f_1'(\bar{r}) - f_1 \} \quad , \quad (4.24)$$

$$u_{T,L} = \frac{p_T}{4\pi\mu r^2} \{ \bar{r} f_2'(\bar{r}) - f_2 \} \quad . \quad (4.25)$$

f_i' bedeutet hier die Ableitung nach $\bar{r} = \omega r / v_T$.

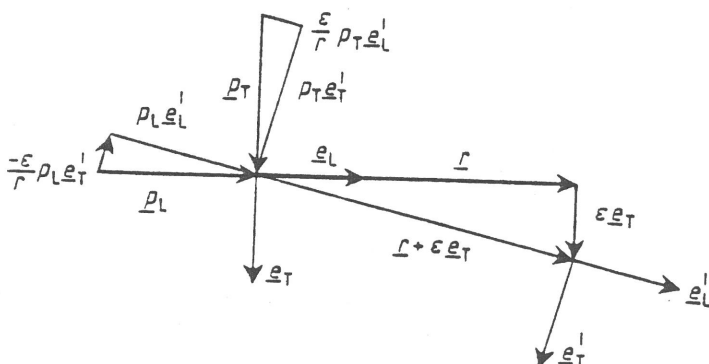


Bild 4.9 -
Herleitung der Verschiebung $u(L + \epsilon e_T)$

Für die Ableitungen in Transversalrichtung \underline{e}_T ist die Verschiebung an einem Punkt $\underline{r} + \epsilon \underline{e}_T$ zu betrachten (Bild 4.9)

$$\underline{u}(\underline{r} + \epsilon \underline{e}_T) \doteq \frac{p_L}{4\pi\mu r} \{f_1(\bar{r}) \underline{e}_L' - \frac{\epsilon}{r} f_2(\bar{r}) \underline{e}_T'\} \\ + \frac{p_T}{4\pi\mu r} \{f_2(\bar{r}) \underline{e}_T' + \frac{\epsilon}{r} f_1(\bar{r}) \underline{e}_L'\}$$

und deren Ableitung nach ϵ für $\epsilon=0$ zu bilden

$$u_{i,T} = \frac{d}{d\epsilon} u_i(\underline{r} + \epsilon \underline{e}_T) \Big|_{\epsilon=0} .$$

Es ist

$$\underline{e}_L' \doteq \underline{e}_L + \frac{\epsilon}{r} \underline{e}_T , \\ \underline{e}_T' \doteq \underline{e}_T - \frac{\epsilon}{r} \underline{e}_L ,$$

und es werden jeweils nur lineare Glieder in ϵ berücksichtigt. Auf diese Weise kommt man zu kleinen Koppelverschiebungen

$$u_T(p_L) \doteq \frac{p_L}{4\pi\mu r} \frac{\epsilon}{r} \{f_1(\bar{r}) - f_2(\bar{r})\} ,$$

$$u_L(p_T) \doteq \frac{p_T}{4\pi\mu r} \frac{\epsilon}{r} \{f_1(\bar{r}) - f_2(\bar{r})\} .$$

Die Ableitungen nach ϵ führen auf

$$u_{T,T} = \frac{p_L}{4\pi\mu r^2} [f_1(\bar{r}) - f_2(\bar{r})] , \quad (4.26)$$

$$u_{L,T} = \frac{p_T}{4\pi\mu r^2} [f_1(\bar{r}) - f_2(\bar{r})] . \quad (4.27)$$

Mit den Verschiebungsableitungen (4.24) bis (4.27) erhält man die Spannungen

$$\sigma_L = T_{LL} = (2\mu + \lambda) u_{L,L} + 2\lambda u_{T,T} ,$$

$$\sigma_T = T_{TT} = (2\mu + 2\lambda) u_{T,T} + \lambda u_{L,L} ,$$

$$\tau = T_{LT} = \mu(u_{T,L} + u_{L,T}) ,$$

beziehungsweise

$$\sigma_L = \frac{p_L}{4\pi r^2} \left(\frac{2\mu + \lambda}{\mu} \bar{r} f_1' - \frac{2\mu - \lambda}{\mu} f_1 - \frac{2\lambda}{\mu} f_2 \right) ,$$

$$\sigma_T = \frac{p_L}{4\pi r^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \bar{r} f_1' + \frac{2\mu + \lambda}{\mu} f_1 - \frac{2\mu + 2\lambda}{\mu} f_2 \right) , \quad (4.28)$$

$$\tau = \frac{p_T}{4\pi r^2} (\bar{r} f_2' + f_1 - 2f_2) .$$

Die normierten Spannungsfunktionen $g_i(\bar{r}, \beta)$ (s. 4.23) ergeben sich in der Form

$$g_i(\bar{r}, \beta) = (a_1 \bar{r} + b_1 + \frac{c_1}{\bar{r}} + \frac{d_1}{\bar{r}^2}) e^{-i\bar{r}} + (a_2 \bar{r} + b_2 + \frac{c_2}{\bar{r}} + \frac{d_2}{\bar{r}^2}) e^{-i\beta \bar{r}} \quad (4.29)$$

mit noch von β abhängigen Koeffizienten $a_j \dots d_j$ (siehe Anhang B). Sie sind für $\beta^2=1/3$ $\nu=1/4$ in Bild 4.10 dargestellt.

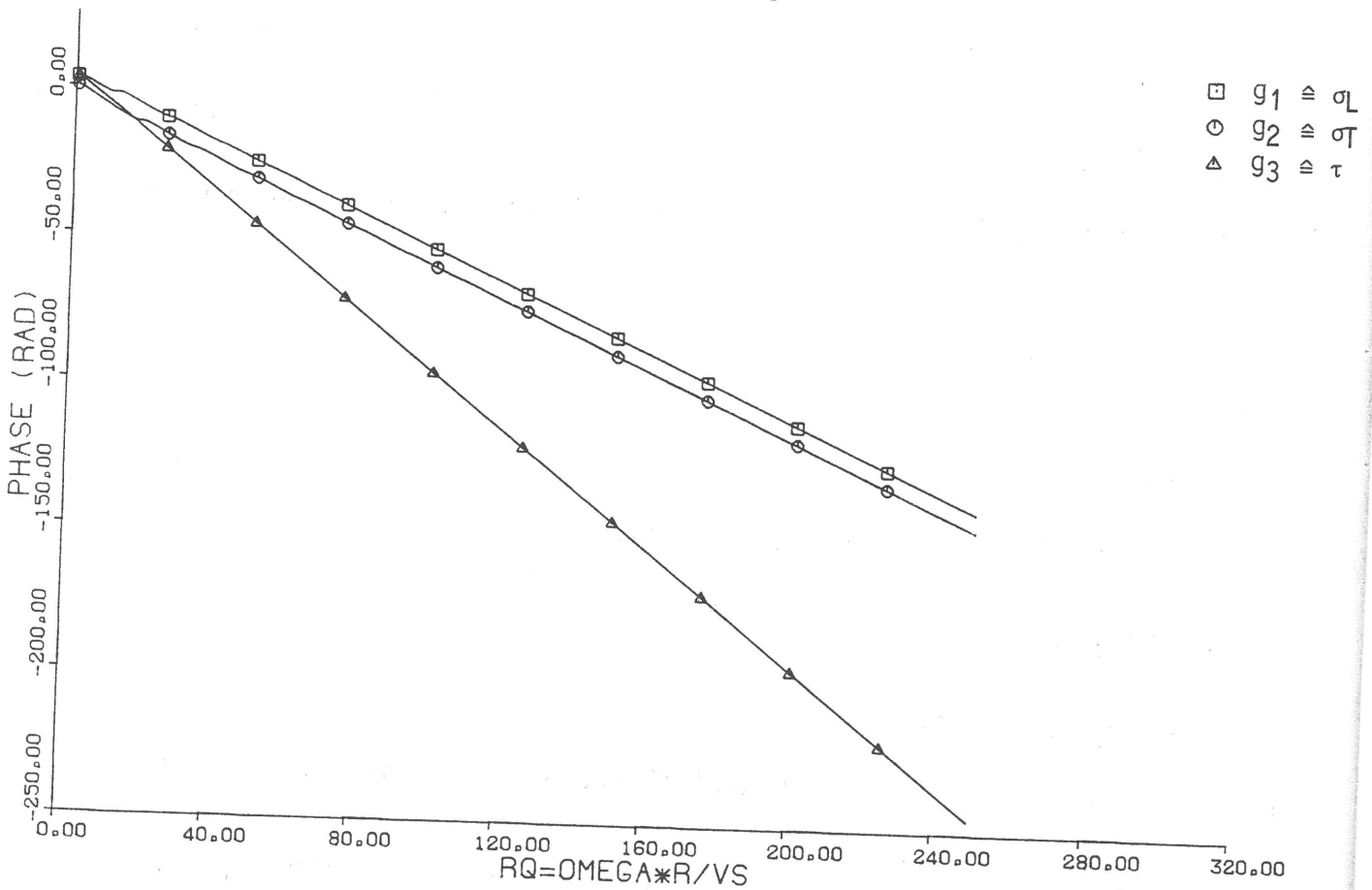
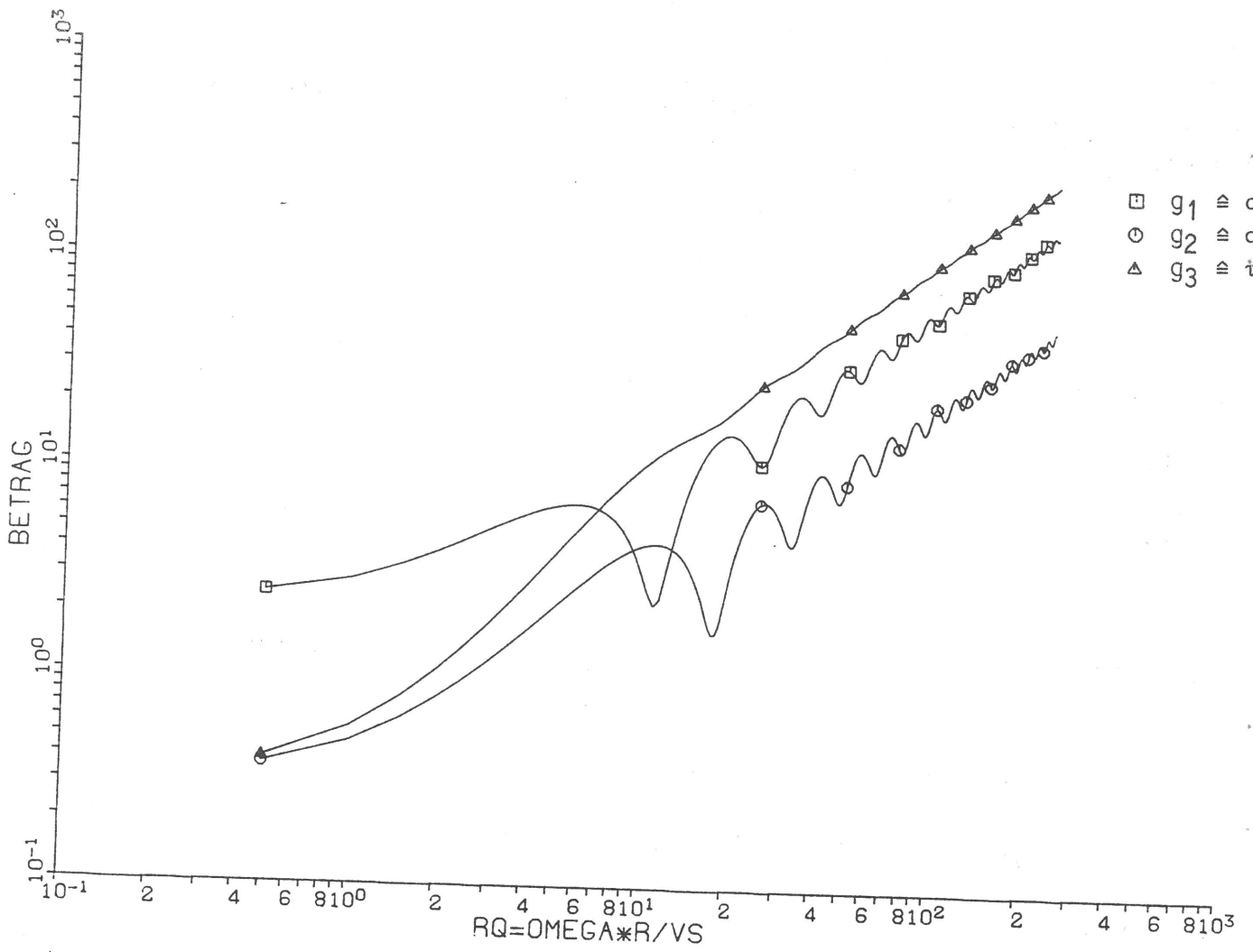


Bild 4.10 - Die Spannungen im Vollraum ($\beta^2 = 1/3$)

Teil II Rechenverfahren

5. Grundlagen der Schwingungsberechnung von Strukturen in und auf dem Boden

5.1 Problemstellungen

Mit den in den Abschnitten 2 bis 4 dargestellten kontinuumsmechanischen Grundlagen wird ein Rechenverfahren für folgende Problemstellungen (Bild 5.1) entwickelt:

- 1) Eine Struktur auf dem Boden wird durch dynamische Kräfte p angeregt,
- 2) eine Struktur auf dem Boden wird durch Freifeldschwingungen u_0 des Bodens angeregt,
- 3) eine Struktur wird durch eine auf den Boden wirkende Kraft mittelbar angeregt,
- 4) zwei nur über den Boden miteinander gekoppelte Strukturen werden durch Kräfte (oder Freifeldschwingungen des Bodens) angeregt.

Die Strukturen werden in der Regel Fundamente oder Bauwerke sein, es könnte sich aber auch z.B. um ein Eisenbahngleis handeln. Die Struktur ist direkt oder über starre Fundamente mit dem Boden verbunden, sie kann (beim allgemeinen Randelementverfahren) ganz oder teilweise im Boden eingebettet sein (5. in Bild 5.1). Der Verbund Bauwerk-Boden ist vollständig, das heißt, es sind in keiner Richtung Relativverschiebungen zwischen Fundament und Baugrund möglich.

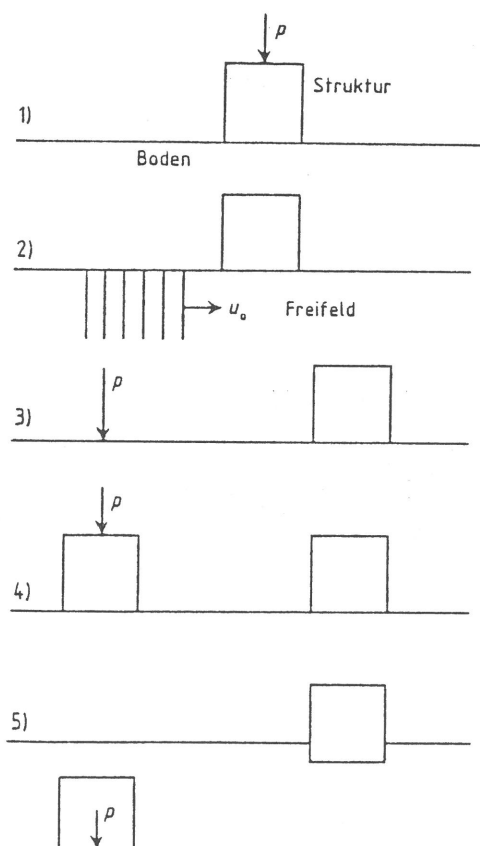


Bild 5.1 -
Problemstellungen der
Bauwerk-Boden-Wechselwirkung

5.2 Diskrete Rechenverfahren

Das Rechenverfahren für die oben genannten Problemstellungen beruht auf der Verknüpfung der Finite-Element-Methode mit dem Randelementverfahren. Es wird in ein vorhandenes Finite-Element-Programm ein weiterer Elementtyp zur Berechnung des Bodens eingefügt, wobei dieses sogenannte Bodenelement mit der Randelementmethode berechnet wird. Bevor in den nächsten beiden Abschnitten Einzelheiten der Rechenverfahren beschrieben werden, sollen hier die gemeinsamen Grundzüge dargelegt werden.

Das zu berechnende System wird durch eine Anzahl von Punkten \underline{x}_1 bis \underline{x}_n beschrieben. Während bei der Finite-Element-Methode das gesamte Bauwerk diskretisiert werden muß, genügt bei der Randelementmethode die Diskretisierung des Systemrands, d.h. der Bodenoberfläche. Alle interessierenden Größen - Verschiebungen, Spannungen, Kräfte - werden nur an diesen diskreten Punkten betrachtet und zu Vektoren $u = (u(\underline{x}_1), \dots, u(\underline{x}_n))$ bzw. $p = (p(\underline{x}_1), \dots, p(\underline{x}_n))$ zusammengefaßt. Da hier nur harmonische Vorgänge behandelt werden, enthalten die Kraft- und Verschiebungsvektoren komplexe Amplituden. Mit Hilfe der Finite-Element- bzw. der Randelementmethode werden dann dynamische (frequenzabhängige) Steifigkeitsmatrizen berechnet, die die Verschiebungen u mit den Kräften p verknüpfen

$$p_S = K_S(\omega) u_S \quad (\text{Struktur}) \quad , \quad (5.1)$$

$$p_B = K_B(\omega) u_B \quad (\text{Boden}) \quad . \quad (5.2)$$

Faßt man die Verschiebungen und Kräfte in diesen Gleichungen als Vektoren des Gesamtsystems Bauwerk-Boden auf, so bekommt man aus (5.1) und (5.2) die Bestimmungsgleichung für das Gesamtsystem, indem man die Kräfte infolge Struktur- und Bodensteifigkeit zur Gesamtlast p zusammenfügt

$$p = p_S + p_B \quad (\text{mit } u_S = u_B = : u) \quad (5.3)$$
$$(K_S + K_B) u = p \quad .$$

Die Lösung des Problems liegt in der Auflösung dieses linearen Gleichungssystems für eine vorgegebene Belastung p . Soll eine Anregung durch Freifeldverschiebungen u_0 des Bodens untersucht werden, dann kann man zunächst mit Hilfe von (5.2)

$$K_B(\omega) u_0 = p_0 \quad (5.4)$$

eine äquivalente äußere Last p_0 berechnen, die ebenfalls diese Freifeldverschiebungen erzeugen würde. Diese äußere Last ist dann auf das Gesamtsystem (5.3) einzuprägen

$$[K_S(\omega) + K_B(\omega)] u = K_B(\omega) u_0 \quad (5.5)$$

und das Gleichungssystem zu lösen.

6. Die Randelementmethode zur Berechnung des Bodens

6.1 Eine einfache Formulierung der Randelementmethode

Die Randelementmethode benutzt die Punktlastlösungen, um die Steifigkeitsbeziehung

$$K u = p \quad (6.1)$$

zwischen den diskreten Verschiebungen u und Kräften p an der Oberfläche eines homogenen elastischen Körpers zu ermitteln. In dieser Arbeit wird eine spezielle, sehr einfache Formulierung der Randelementmethode gewählt. Der Zusammenhang zu einer allgemeineren und häufiger verwendeten Formulierung /3/, /26/ wird im Anhang C aufgezeigt.

Der zu berechnende Körper wird durch eine Anzahl von Oberflächenpunkten mit den Koordinaten \underline{x}_α definiert. Jedem Punkt wird ein Anteil F_α der Oberfläche und eine Flächennormale \underline{n}_α zugeordnet. Jeder Punkt besitzt drei Verschiebungsfreiheitsgrade, so daß man insgesamt bei m Punkten $n=3m$ Freiheitsgrade des diskretisierten Körpers hat. Die Idee des Verfahrens ist es, mit Hilfe der allgemeinen Punktlastlösungen für jeden Freiheitsgrad i des Systems eine spezielle diskrete Lösung p_i, u_i , das heißt ein diskretes Verschiebungsfeld u_i und die dazugehörigen Oberflächenkräfte p_i zu berechnen. Die Gesamtheit dieser Lösungen bestimmt dann schon vollständig die gesuchte diskrete Steifigkeitsmatrix K

$$K u_i = p_i \quad i=1, n \quad . \quad (6.2)$$

Faßt man die Lösungen zu einer Verschiebungs- und einer Kraftmatrix zusammen

$$U = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \quad (6.3)$$

$$P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \quad ,$$

dann ergeben die Gleichungen (6.2) eine Matrixgleichung

$$K U = P \quad , \quad (6.4)$$

die man nach der Steifigkeitsmatrix

$$K = P U^{-1} \quad (6.5)$$

oder nach ihrer Inversen, der Nachgiebigkeitsmatrix

$$N = U P^{-1} \quad (6.6)$$

auflösen kann.

6.2 Verwendung der Punktlastlösung des Vollraumes

Mit Hilfe der Punktlastlösung (4.2), (4.5), (4.6) läßt sich die Verschiebung eines Punktes im Abstand \underline{r} einer beliebigen Punktlast \underline{p} berechnen

$$\underline{u}^*(\underline{r}, \underline{p}) = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_2 \underline{p} + (f_1 - f_2) \underline{p} \cdot \underline{e}_r \underline{e}_r] \quad (6.7)$$

Mit der Punktlastlösung für die Spannungen (4.23), (4.28) läßt sich der Spannungsvektor \underline{t} an einem Punkt im Abstand \underline{r} einer beliebigen Punktlast \underline{p} für eine Oberfläche mit der Normalen \underline{n} folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned} \underline{t}^*(\underline{r}, \underline{p}, \underline{n}) = & \frac{1}{4\pi r^2} \{ [(g_1 - g_2 - 2g_3) \underline{p} \cdot \underline{e}_r \underline{n} \cdot \underline{e}_r + g_3 \underline{p} \cdot \underline{n}] \underline{e}_r \\ & + g_2 \underline{p} \cdot \underline{e}_r \underline{n} + g_3 \underline{n} \cdot \underline{e}_r \underline{p} \} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dabei ist vereinfachend der Einheitsvektor $\underline{e}_r = \underline{r}/r$ in \underline{r} -Richtung eingeführt und sind die Argumente \bar{r} und β der Funktionen f_i und g_i weggelassen worden.

Die speziellen diskreten Lösungen u_i , p_i werden nun folgendermaßen bestimmt: Für jeden Freiheitsgrad i des Systems ($i=1, n$), das heißt für jede Raumrichtung \underline{e}_k ($k=1, 3$) jedes Punktes \underline{x}_α ($\alpha=1, m$) setzt man eine Einheitspunktlast \underline{e}_k an diesem Punkt \underline{x}_α an. Man berechnet einerseits die Verschiebungen des Vollraums, die sich bei dieser Belastung ergeben,

$$\underline{u}_{\beta i} = \underline{u}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) \quad \beta \neq \alpha \quad (6.9)$$

und andererseits die Kräfte, die an der Oberfläche des Systems auftreten müssen, um diese Vollraumverschiebungen zu erhalten,

$$\underline{p}_{\beta i} = F_\beta \underline{t}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\beta) \quad \beta \neq \alpha \quad (6.10)$$

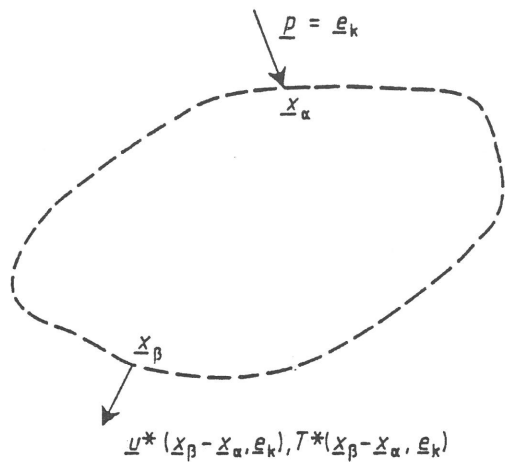
mit der zu \underline{x}_β gehörenden Fläche F_β und Flächennormalen \underline{n}_β . Anschaulich bedeutet dieses Vorgehen, daß man zunächst den Vollraum mit einer Einheitskraft belastet (Bild 6.1). Es ergibt sich dabei ein bestimmtes Verschiebungsfeld $\underline{u}^*(\underline{x})$ und ein Spannungsfeld $\underline{T}^*(\underline{x})$. Aus dem Vollraum wird dann der zu berechnende Körper herausgeschnitten, wobei die Wirkung des abgetrennten Restes des Vollraums durch die Spannungen an der Oberfläche ersetzt werden muß. Diese Spannungen werden schließlich als eine Belastung des Körpers betrachtet, die das Verschiebungsfeld $\underline{u}^*(\underline{x})$ hervorruft.

Für den Lastangriffspunkt \underline{x}_α selbst kann man die Formeln (6.7) und (6.8) nicht auswerten. Diese Schwierigkeit wird durch eine jeweilige Mittelung über die zugehörige Fläche F_α behoben

$$\underline{u}_{\alpha i} = \frac{1}{F_\alpha} \int_{F_\alpha} \underline{u}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) \, d\underline{x} \quad , \quad (6.11)$$

$$\underline{p}_{\alpha i} = \int_{F_\alpha} \underline{t}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\alpha) \, d\underline{x} \quad . \quad (6.12)$$

1. Vollraum unter Punktlast \underline{e}_k mit Verschiebungsfeld \underline{u}^* und Spannungsfeld T^*



2. Aus dem Vollraum herausgeschnittener Körper unter der Oberflächenlast \underline{f}^* mit Verschiebungsfeld \underline{u}^*

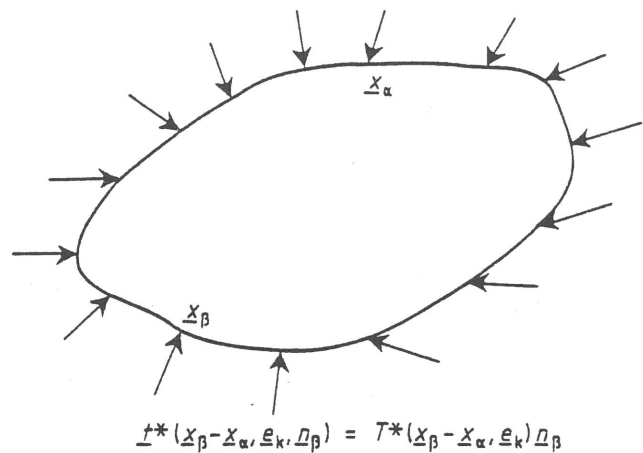


Bild 6.1 - Die Idee der Randelementmethode

Diese Integrale vereinfachen sich, wenn man von einer ebenen Kreisfläche ausgeht und die Eigenschaften der Punktlastlösung beachtet. Wegen der Symmetrie sind die aus den Spannungen resultierenden Kräfte Null bis auf die anregende Kraft selbst. Von dieser den Vollraum anregenden Einheitskraft verbleibt beim Freischneiden der ebenen Oberfläche F_α die Hälfte

$$\underline{p}_{\alpha i} = \frac{1}{2} \underline{e}_k \quad (6.13)$$

Das Integral der Verschiebungen (6.11) läßt sich auf Mittelwerte

$$\bar{f}_j = \frac{1}{\bar{r}_\alpha} \int_0^{\bar{r}_\alpha} f_j(\bar{r}) \, d\bar{r} \quad j=1,2 \quad (6.14)$$

der Lösungsfunktionen f_1 und f_2 gemäß

$$\underline{u}_{\alpha i} = \frac{1}{2\pi\mu r_\alpha} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \underline{p} + \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{2} \underline{p} \cdot \underline{n}_\alpha \underline{n}_\alpha \right) \quad (6.15)$$

zurückführen, wobei r_α der Radius der Fläche F_α ist. Das Integral (6.11) läßt sich im übrigen auch als Verschiebung des Punktes \underline{x}_α bei einer konstanten Spannungsverteilung auf der Fläche F_α deuten.

Die mit (6.9) bis (6.12) berechneten Verschiebungen und Kräfte bilden die speziellen Lösungsvektoren

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1i} \\ \vdots \\ \underline{u}_{\beta i} \\ \vdots \\ \underline{u}_{mi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{p}_i = \begin{bmatrix} \underline{p}_{1i} \\ \vdots \\ \underline{p}_{\beta i} \\ \vdots \\ \underline{p}_{mi} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Die Vektoren p_i und u_i aller Freiheitsgrade ergeben dann, wie in 6.1 beschrieben, die Matrizen

$$P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \quad ,$$

$$U = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \quad ,$$

aus denen die Steifigkeitsmatrix $K = PU^{-1}$ folgt.

6.3 Verwendung der Punktlastlösung des Halbraumes

Beschränkt man sich bei der Problemstellung auf Fundamentflächen auf der Halbraumoberfläche, so kann man auch die Punktlastlösung des Halbraums statt der des Vollraums verwenden. Die Verschiebungen eines Punktes an der Oberfläche im Abstand \underline{r} einer Punktlast \underline{p} ergibt sich aus

$$\underline{u}^*(\underline{r}, \underline{p}) = \frac{1}{2\pi\mu r} \begin{cases} (f_{zz} \underline{e}_z + f_{rz} \underline{e}_r) \underline{p} \cdot \underline{e}_z & \text{für } \underline{p} \parallel \underline{e}_z \\ f_2 \underline{p} + (f_1 - f_2) \underline{p} \cdot \underline{e}_r \underline{e}_r - f_{rz} \underline{p} \cdot \underline{e}_r \underline{e}_z & \text{für } \underline{p} \perp \underline{e}_z \end{cases} \quad (6.17)$$

wobei zwischen vertikaler und horizontaler Last unterschieden wird. Die Spannungen an der Halbraumoberfläche sind außer am Lastangriffspunkt Null

$$\underline{t}^*(\underline{r}, \underline{p}, \underline{n} = -\underline{e}_z) = \underline{0} \quad \text{für } \underline{r} \neq \underline{0} \quad . \quad (6.18)$$

Mit diesen Lösungen ergibt sich ein einfacher Spezialfall des im vorangehenden Abschnitt 6.2 beschriebenen Randelementverfahrens. Da neben

$$\underline{p}_{\alpha i} = \underline{e}_k$$

keine weiteren Kräfte

$$\underline{p}_{\beta i} = \underline{0}$$

auftreten, ist die Kraftmatrix

$$P = I \quad (6.19)$$

die Einheitsmatrix. Für die Berechnung benötigt man daher nur die Verschiebungsmatrix U . Sie wird analog zu Abschnitt 6.2 aus den Verschiebungen

$$\underline{u}_{\beta i} = \underline{u}^*(\underline{x}_{\beta} - \underline{x}_{\alpha}, \underline{e}_k) \quad (6.9)$$

und

$$\underline{u}_{\alpha i} = \frac{1}{F_{\alpha}} \int_{F_{\alpha}} \underline{u}^*(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha}, \underline{e}_k) \underline{dx} \quad (6.11)$$

gebildet, wobei bei der Halbraumlösung

$$\underline{u}_{\alpha i} = \frac{1}{\pi\mu r_{\alpha}} \begin{cases} \bar{f}_{zz} \underline{p} & \text{für } \underline{p} \parallel \underline{e}_z \\ \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \underline{p} & \text{für } \underline{p} \perp \underline{e}_z \end{cases} \quad (6.20)$$

analog zu (6.14), (6.15) gilt.

Die Verschiebungsmatrix U ist bei diesem Halbraumverfahren unmittelbar die diskrete Nachgiebigkeitsmatrix

$$N = U \quad (6.21)$$

und ihre Invertierung liefert die Steifigkeitsmatrix

$$K = U^{-1} \quad (6.22)$$

6.4 Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Bodens

Bei der Anwendung der Randelementmethode auf Probleme der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung ergeben sich einige Besonderheiten.

Kondensation auf die Fundamentfreiheitsgrade

Bei der Berechnung des Bodens mit der Randelementmethode muß die Bodenoberfläche möglichst vollständig diskretisiert werden. Für die Kopplung des Bodens mit dem Bauwerk interessiert jedoch meistens nur die Steifigkeitsmatrix für die Fundamentpunkte. Geht man von einer Unterteilung in innere (Fundament-) und äußere Freiheitsgrade aus und bildet die Nachgiebigkeitsmatrix $N=UP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ii} & N_{ia} \\ N_{ai} & N_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_a \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

so ergibt sich aus der Bedingung, daß die Kräfte außerhalb des Fundaments Null sind

$$p_a = 0$$

der Zusammenhang

$$u_i = N_{ii} p_i$$

beziehungsweise

$$p_i = N_{ii}^{-1} u_i = K u_i \quad (6.24)$$

Um die auf die Fundamentfreiheitsgrade kondensierte Steifigkeitsmatrix K zu bekommen, muß man demnach den inneren Teil N_{ii} der Nachgiebigkeitsmatrix invertieren.

Bei der Halbraummethode ist $N=U$ (6.21), so daß zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix K nur die Diskretisierung der Fundamentflächen notwendig ist.

Bei der Vollraummethode muß man hingegen im allgemeinen auch den Außenbereich diskretisieren, da der innere Teil der Nachgiebigkeitsmatrix gemäß $N=UP^{-1}$ auch vom Außenbereich abhängt.

Transformation auf Starrkörperfreiheitsgrade

Zur Berechnung starrer Fundamente müssen die Freiheitsgrade der Fundamentpunkte durch die Starrkörperfreiheitsgrade ersetzt werden. Die Verschiebungen u lassen sich dann durch die n' neuen Freiheitsgrade u'_j mit den zugehörigen Verschiebungen b_j gemäß

$$u = \sum_{j=1}^{n'} u'_j b_j = B u' \quad (6.25)$$

darstellen, wobei $B=(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$ eine $(n \times n')$ -Transformationsmatrix ist, die im Anhang D für ein starres Fundament beschrieben ist. Auf der anderen Seite werden auch die Kräfte durch die jeweils resultierenden Kräfte und Momente

$$p_j' = b_j^T p \quad \text{bzw.} \quad p' = B^T p \quad (6.26)$$

ersetzt. Das gleiche gilt im übrigen auch für die äquivalente Last $p_0 = K u_0$ bei Freifeldanregung u_0 (5.4)

$$p_0' = B^T p_0 = B^T K u_0 \quad (6.27)$$

(6.25) und (6.26) ergeben zusammen die Steifigkeitsbeziehung

$$p' = B^T p = B^T K u = B^T K B u' =: K' u' \quad (6.28)$$

mit der reduzierten Steifigkeitsmatrix

$$K' = B^T K B \quad (6.29)$$

7. Die Finite-Element-Methode zur Berechnung des Bauwerks

Die Berechnung eines Bauwerks mit der Finiten-Element-Methode geschieht folgendermaßen:

Das Bauwerk wird durch eine Anzahl von Punkten (Knoten) beschrieben. Mit diesen Punkten als End-, Eck- oder Randpunkten werden Teilstrukturen (Elemente) definiert. Für jedes Element werden aus den zugehörigen Knotenpunktskoordinaten und den Materialeigenschaften Elementsteifigkeiten berechnet, die die Verschiebungen der Knotenpunkte mit Kräften an den Knotenpunkten verknüpfen. Bei dem hier verwendeten Finite-Element-Programm /2/ stehen folgende Elementtypen zur Verfügung:

- Stabelemente, 2 Knoten mit je 1 Freiheitsgrad,
- Balkenelemente, 2 Knoten mit je 6 Freiheitsgraden,
- Plattenelemente, 4 Knoten mit je 5 Freiheitsgraden.

Weiterhin wird eine Elementmassenmatrix berechnet, indem die Masse des Elements auf die beteiligten Knoten verteilt wird. Hinsichtlich der verschiedenen Möglichkeiten, Elementsteifigkeits- und -massenmatrizen aufzustellen, sei auf die Literatur /40/ verwiesen.

Die jeweiligen Elementmatrizen werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix K und zur Gesamtmassenmatrix M zusammengefügt. Man erhält so die Systemgleichung

$$M \ddot{u} + K u = p \quad (7.1)$$

beziehungsweise bei der Berechnung im Frequenzraum

$$(-\omega^2 M + K) u = p \quad (7.2)$$

Für jede zu berechnende Frequenz wird aus den vorab berechneten Matrizen M und K die dynamische Steifigkeitsmatrix der Struktur

$$K_S(\omega) = -\omega^2 M + K$$

gebildet, die dynamische Steifigkeitsmatrix $K_B(\omega)$ des Bodens hinzugefügt und die entstehende Gleichung

$$(K_S(\omega) + K_B(\omega)) u = p$$

für eine vorgegebene Belastung p nach dem Vektor der Verschiebungsamplituden u aufgelöst.

Teil III Starre Fundamente und Fundamentgruppen

8. Die dynamische Steifigkeit eines starren Fundaments auf dem Halbraum

8.1 Problemstellung

Das vorgestellte Rechenverfahren soll zunächst an einem schon gelösten Problem getestet werden: Ein starres, masseloses Fundament liegt auf dem homogenen elastischen Halbraum und wird durch harmonische Kräfte oder Momente angeregt. Gesucht ist die Nachgiebigkeit N bzw. Steifigkeit K , die gemäß

$$\begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{m} \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

mit $N = K^{-1}$

die Kräfte \underline{p} und Momente \underline{m} mit den Verschiebungen \underline{u} und Verdrehungen $\underline{\varphi}$ verknüpft. Die Größen \underline{u} und \underline{m} und damit auch die Steifigkeit K hängen noch von der Wahl des Bezugspunktes ab.

Im allgemeinen sind N und K vollbesetzte (6×6) -Matrizen entsprechend den 6 Starrkörperfreiheitsgraden:

Freiheitsgrad	1	2	3	4	5	6	
Komponente	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z	(8.2)

Die Anzahl der von null verschiedenen Elemente reduziert sich, wenn man als Bezugspunkt den Flächenschwerpunkt wählt und wenn, wie im weiteren Verlauf der Betrachtungen stets vorausgesetzt, die Fundamentform doppelt symmetrisch (bezüglich \underline{e}_x und \underline{e}_y) ist. Es verbleiben dann lediglich die sechs Diagonalglieder K_{ii} und zwei mal zwei Koppelglieder

$$\begin{aligned} K_{15} &= p_x / \varphi_y = m_y / u_x = K_{51} \quad , \\ K_{24} &= p_y / \varphi_x = m_x / u_y = K_{42} \quad . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Die Steifigkeiten bzw. Nachgiebigkeiten sind abhängig von der Frequenz bzw. von einem dimensionslosen Frequenzparameter $a_0 = a\omega/v_T$, der mit Hilfe einer Abmessung a des Fundaments und der Transversalwellengeschwindigkeit des Bodens gebildet wird, so daß die Lösung des Problems durch Angabe der acht Funktionen K_{ii} , K_{15} und $K_{24}(a_0)$ vollständig beschrieben wird. Stimmen jeweils die horizontalen Komponenten überein, wie etwa bei einem quadratischen Fundament, so verbleiben nur noch fünf Funktionen K_{11} (Horizontal), K_{33} (Vertikal), K_{44} (Kippen), K_{66} (Gieren oder Torsion) und $K_{24} = -K_{15}$ (Kopplung Horizontal/ Kippen).

8.2 Verschiedene Lösungsmöglichkeiten und Verfahrensvarianten

Bei Fundamenten auf dem Halbraum werden oft entkoppelte Berechnungen durchgeführt, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Im folgenden soll erklärt werden, was "Entkopplung" für die Halbraum- und die Vollraummethode bedeutet. Dabei wird an die Darstellungsweise in Abschnitt 6.4 angeknüpft.

8.2.1 Halbraummethode entkoppelt

Bei der entkoppelten Berechnung unterscheidet man zwischen den horizontalen und vertikalen Verschiebungen und Kräften

$$u = \begin{bmatrix} u_H \\ u_V \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_H \\ p_V \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Die Starrkörperfreiheitsgrade lassen sich ebenfalls in horizontale (u_x, u_y, φ_z) und vertikale ($\varphi_x, \varphi_y, u_z$) Komponenten aufteilen

$$u' = \begin{bmatrix} u_H' \\ u_V' \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} p_H' \\ p_V' \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

wobei die zugehörigen Verschiebungen b_j der Fundamentfläche jeweils nur horizontal oder nur vertikal sind. Letzteres bedeutet, daß die Transformationsmatrix B

$$\begin{bmatrix} u_H \\ u_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_H' \\ u_V' \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

entkoppelt ist.

Bei der Halbraummethode hat die Verschiebungs- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix $U=N$ folgende Struktur

$$\begin{bmatrix} u_H \\ u_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_H \\ p_V \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

wobei

N_{11} die horizontalen Lösungen f_1 und f_2 ,
 N_{22} die vertikale Lösung f_{zz} und
 $N_{12}=N_{21}^T$ die Koppelfunktion f_{rz} enthält.

Bei der entkoppelten Lösung werden nun die Koppelmatrizen N_{12} und N_{21} vernachlässigt. Der weitere Rechengang mit der entkoppelten Nachgiebigkeitsmatrix führt über

$$K = \begin{bmatrix} N_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

auf die entkoppelte Fundamentsteifigkeit

$$K' = B^T K B = \begin{bmatrix} B_1^T N_{11}^{-1} B_1 & 0 \\ 0 & B_2^T N_{22}^{-1} B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1' & 0 \\ 0 & K_2' \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Man kann diese Näherung auch physikalisch deuten. Die entkoppelten horizontalen und vertikalen Lösungen sind Lösungen eines modifizierten Randwertproblems: Statt der Randbedingungen für einen vollständigen Verbund zwischen Fundament und Boden

z.B. vertikal

$$\begin{array}{llll} u_x = 0 & u_y = 0 & u_z = 1 & \text{innerhalb des Fundaments} \\ p_x = 0 & p_y = 0 & p_z = 0 & \text{außerhalb des Fundaments} \end{array} \quad (8.9)$$

benutzt man die Randbedingungen für einen unvollständigen Verbund

$$\begin{array}{llll} p_x = 0 & p_y = 0 & u_z = 1 & \text{innerhalb des Fundaments} \\ & & p_z = 0 & \text{außerhalb des Fundaments.} \end{array} \quad (8.10)$$

Der unvollständige Verbund ist in diesem Fall (Vertikalverschiebung) durch das Fehlen von Schubspannungen (Horizontalkräften) gekennzeichnet, was als reibungsfreier Kontakt gedeutet werden kann.

Setzt man die Randbedingung des unvollständigen Verbunds (8.10) in (8.7) ein, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} u_H \\ u_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_V \end{bmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$u_V = N_{22} p_V$$

und man kommt zu der vertikalen entkoppelten Lösung (8.8)

$$K_2' = B_2^T N_{22}^{-1} B_2 \quad .$$

8.2.2 Vollraummethode entkoppelt

Die mit der Vollraumlösung berechneten Matrizen P und U haben bei Halbraumproblemen, bei denen alle Punkte in einer Ebene liegen, eine spezielle Struktur. Einerseits gibt es keine Vertikalverschiebungen infolge einer horizontalen Last und umgekehrt keine Horizontalverschiebung infolge vertikaler Last, so daß die Verschiebungsmatrix U gemäß

$$\begin{bmatrix} u_H \\ u_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_H \\ p_V \end{bmatrix} \quad (\text{Vollraum}) \quad (8.11)$$

entkoppelt ist. Andererseits erzeugt eine Horizontalkraft nur Normalspan-

nungen (Vertikalkräfte) an der Bodenoberfläche und eine Vertikalkraft nur Schubspannungen (Horizontalkräfte). Die Matrix P besteht demnach nur aus dem Anregungsanteil $1/2 I$ und dem Koppelanteil \hat{P}

$$P = \frac{1}{2} I + \hat{P} \quad , \quad (8.12)$$

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{bmatrix} .$$

Bei der entkoppelten Lösung werden diese Koppelkräfte P_{12} und P_{21} vernachlässigt, so daß

$$P = \frac{1}{2} I$$

und sich die Nachgiebigkeitsmatrix

$$N = K^{-1} = U P^{-1} = 2 U \quad (8.13)$$

unmittelbar aus der Verschiebungsmatrix U ergibt. Dies hat zunächst eine entscheidende Konsequenz: Da für die Fundamentsteifigkeit nur der innere Teil der Nachgiebigkeitsmatrix benötigt wird (Gleichung 6.24), ist die Diskretisierung äußerer Punkte bei der entkoppelten Rechnung unnötig. Man diskretisiert nur die Fundamentfläche, berechnet die Verschiebungsmatrix U , erhält die Steifigkeitsmatrix $K = 1/2 U^{-1}$, die schließlich auf die Fundamentsteifigkeit

$$K' = \frac{1}{2} B^T U^{-1} B \quad (8.14)$$

reduziert wird. Wegen der entkoppelten Struktur von U ist auch

$$K' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_1^T U_{11}^{-1} B_1 & 0 \\ 0 & B_2^T U_{22}^{-1} B_2 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

entkoppelt.

Die entkoppelte Näherung kann man ebenso wie bei der Halbraummethode physikalisch deuten: Die entkoppelten horizontalen und vertikalen Lösungen sind wiederum jeweils Lösungen eines modifizierten Randwertproblems. Statt der Randbedingungen (8.9)

$$\begin{array}{llll} u_x = 0 & u_y = 0 & u_z = 1 & \text{innerhalb des Fundaments} \\ p_x = 0 & p_y = 0 & p_z = 0 & \text{außerhalb des Fundaments} \end{array}$$

werden die Randbedingungen

$$\begin{array}{llll} u_x = 0 & u_y = 0 & u_z = 1 & \text{innerhalb des Fundaments} \\ & & p_z = 0 & \text{außerhalb des Fundaments} \end{array} \quad (8.16)$$

benutzt, die hier am Beispiel der Vertikalverschiebung erläutert werden. Sie besagen, daß die gesamte Bodenoberfläche in der jeweiligen Koppelrich-

tung (in diesem Fall in der horizontalen Richtung) vollständig fixiert ist. Innerhalb des Fundaments ist diese Bedingung physikalisch im Sinne des vollständigen Verbunds richtig, außerhalb für die freie Bodenoberfläche ist diese Randbedingung physikalisch nicht zu deuten. Man sollte die entkoppelte Rechnung dann sinnvollerweise als Berechnung eines starren Fundaments im Vollraum anschaulich deuten, wobei die sich ergebenden Steifigkeiten zu Näherungen für das zugeordnete Halbraumproblem halbiert werden. Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Randbedingungen (8.16) der entkoppelten Vollraummethode nicht mit den Randbedingungen (8.10) der entkoppelten Halbraummethode übereinstimmen.

Die Konsequenzen der modifizierten Randbedingungen (8.16) erkennt man, indem man zunächst die Strukturen von U und P (8.11) und (8.12) auf die Steifigkeitsmatrix $K = PU^{-1}$ überträgt

$$\begin{aligned}
 K &= \left(\frac{1}{2} I + \hat{P}\right) U^{-1} = \frac{1}{2} U^{-1} + \hat{P}U^{-1} = \frac{1}{2} U^{-1} + \hat{K} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & P_{12}U_{22}^{-1} \\ P_{21}U_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix} .
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

Da $u_H = 0$ ist, folgt

$$p_V = \frac{1}{2} U_{22}^{-1} u_V \quad \text{bzw.} \quad u_V = 2 U_{22} p_V .
 \tag{8.18}$$

Da außerhalb des Fundaments $p_V = 0$ ist, verbleibt von Gleichung (8.18) nur der innere Anteil

$$\begin{aligned}
 u_{Vi} &= 2 U_{22ii} p_{Vi} \quad \text{bzw.} \\
 p_{Vi} &= \frac{1}{2} U_{22ii}^{-1} u_{Vi} .
 \end{aligned}
 \tag{8.19}$$

Die Transformation auf die Starrkörperkomponenten ergibt schließlich in Übereinstimmung mit (8.15) die Fundamentsteifigkeit

$$K_2' = \frac{1}{2} B_2^T U_{22ii}^{-1} B_2 .
 \tag{8.20}$$

8.2.3 Direkte Lösung für verschiebungsproportionalen Spannungsansatz

Eine weitere Lösungsmöglichkeit, die die Invertierung großer Matrizen umgeht, beruht darauf, für die einzelnen Starrkörperfreiheitsgrade unmittelbar einen verschiebungsproportionalen Spannungsansatz zu machen

$$p_i = b_i \quad i=1,6
 \tag{8.21}$$

und das resultierende Verschiebungsfeld

$$u_i = N b_i
 \tag{8.22}$$

durch eine Starrkörperverschiebung u_i' zu approximieren. Die Approximation beruht auf der Lösung des überbestimmten Gleichungssystems

$$B u_i' = u_i \quad , \quad (8.23)$$

dessen beste Approximation (in quadratischem Mittel) sich aus

$$B^T B u_i' = B^T u_i$$

zu

$$u_i' = (B^T B)^{-1} B^T u_i \quad (8.24)$$

ergibt. Zusammen mit (8.22) hat man die Starrkörperverschiebung

$$u_i' = (B^T B)^{-1} B^T N b_i \quad (8.25)$$

und andererseits die resultierende Belastung (8.21)

$$p_i' = B^T p_i = B^T b_i \quad . \quad (8.26)$$

Die Steifigkeitsmatrix K' des starren Fundaments wird durch die Gleichungen

$$p_i' = K' u_i' \quad i=1,6$$

bzw. durch die Matrixgleichung

$$B^T B = K' (B^T B)^{-1} B^T N B \quad (8.27)$$

bestimmt und ergibt sich zu

$$K' = (B^T B) (B^T N B)^{-1} (B^T B) \quad (8.28)$$

Zur Berechnung der Näherungslösung (8.28) muß die $(n \times n)$ -Nachgiebigkeitsmatrix N und die Transformationsmatrix B aufgestellt werden. Die in (8.28) eingeklammert angegebenen Matrizenprodukte sind nur noch (6×6) -Matrizen, so daß die Lösung K' nur die Invertierung einer (6×6) -Matrix erfordert und somit entscheidend weniger Rechenzeit benötigt als die anderen Verfahren.

8.2.4 Sonstige Methoden

Konstante Teilflächenstressungen

Der Ansatz konstanter Teilflächenstressungen ist die häufigste Vorgehensweise bei der Halbraummethode. Die Fundamentfläche wird in rechteckige Teilflächen zerlegt und die Verschiebungsmatrix für konstante Teilflächenstressungen berechnet. Dazu werden entweder vorhandene Lösungen für eine Rechtecklast (z.B. Holzlhner /16/, Thomson und Kobori /33/) ausgewertet (Savidis /31/, Wong und Luco /39/) oder als Fourierintegral berechnet (Gaul /11/, Wolf /38/). Rucker /29/ berechnet zunächst die Punktlastlösungen und integriert diese über die Teilfläche.

Näherung mit Hilfe der Punktlastasymptoten

Die Berechnung der Punktlastlösung oder der Rechtecklösung ist sehr rechenzeitintensiv. Andererseits wurde in Abschnitt 4.2 gezeigt, daß die Punktlastlösungen sich schon vollständig durch die Nah- und Fernfeldasymptoten beschreiben lassen. Die Abweichungen von der exakten Lösung sind dabei jeweils nicht sehr gravierend. Zur schnelleren Berechnung wird deshalb in dieser Arbeit in der Regel die Punktlastlösung durch die Asymptoten ersetzt. Kitamura und Sakurai /23/ verwenden für die vertikale Komponente f_{zz} nur die Nahfeldasymptote und zeigen für verschiedene ν eine ausreichende Übereinstimmung mit der exakten Lösung.

Ansatz für die Fundamentspannungen

Die Spannungsverteilung unter dem Fundament wird meistens durch lokale Ansatzfunktionen (Teilflächenspannungen oder Punktlasten) aufgebaut. Stattdessen kann man auch globale Ansatzfunktionen für das gesamte Fundament heranziehen und mit ihnen eine beste Approximation an die vorgegebene Starrkörperverschiebung berechnen. Triantafyllidis /34/ verwendet dazu modifizierte Tschebyscheffpolynome, die von vornherein singuläre Spannungen am Fundamentrand enthalten.

8.3 Ergebnisse für ein quadratisches Fundament

Es wird eine quadratische Fundamentfläche der Abmessung $2a \times 2a$ in 64 Punkte (bzw. Teilflächen) diskretisiert und die Starrkörpersteifigkeitsmatrix mit verschiedenen Methoden berechnet. Entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 8.1 erhält man 5 verschiedene Steifigkeiten, die sich folgendermaßen darstellen lassen

$$K_{ii} = K_0 [k(a_0, \nu) + i a_0 c(a_0, \nu)] \quad . \quad (8.29)$$

Dabei ist a_0 ein dem \bar{r} der Punktlastlösungen verwandter dimensionsloser Frequenzparameter

$$a_0 = \frac{\omega r_{\max}}{v_T} = \frac{\omega \sqrt{2} a}{v_T} \quad , \quad (8.30)$$

in den der maximale Fundamentradius eingeht, und K_0 ein Normierungsfaktor

$$\begin{aligned} K_0 &= \mu r_0 && \text{Translation,} \\ K_0 &= \mu r_0^3 && \text{Rotation,} \\ K_0 &= \mu r_0^2 && \text{Kopplung,} \end{aligned} \quad (8.31)$$

bei dem äquivalente Kreisradien r_0 nach einer Empfehlung von Richart, Hall und Woods /28/ so berechnet werden, daß entweder die Fläche F oder das zugehörige Flächenmoment J gleich ist

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} a && \text{Translation,} \\
 r_0 &= 4\sqrt{\frac{4J}{3\pi}} = \frac{2}{4\sqrt{3\pi}} a && \text{Rotation und Kopplung.}
 \end{aligned}
 \tag{8.32}$$

Auf den folgenden Bildern (8.1 bis 8.3) sind die Funktionen k (Federsteifigkeit) und c (Dämpferimpedanz) für $\nu = 1/4$ als Funktion von $a_0 = 0 \dots 5$ dargestellt. Man stellt folgende Eigenschaften fest:

Die Federsteifigkeiten k sind annähernd im gesamten a_0 -Bereich konstant. Sie stimmen gut mit den statischen Steifigkeiten eines Kreisfundaments

$$\begin{aligned}
 \text{horizontal } k &= \frac{4}{1-\nu/2} \text{ bzw. } k = \frac{4(1-\nu)}{1-8\nu/7} && (\text{Bycroft 1956}) \\
 \text{vertikal } k &= \frac{4}{1-\nu} && (\text{Timoshenko, Goodier 1951}) \\
 \text{Kippen } k &= \frac{8}{3(1-\nu)} && (\text{Borowicka 1943}) \\
 \text{Gieren (Torsion) } k &= \frac{16}{3} && (\text{Reissner, Sagoci 1944})
 \end{aligned}
 \tag{8.33}$$

(zitiert nach Richart, Hall, Woods /28/) überein, für große a_0 -Werte werden die Rotationssteifigkeiten etwas kleiner.

Bei den Dämpferimpedanzen c stellt man einen markanten Unterschied zwischen Translations- und Rotationsbewegungen fest. Bei den Translationen ist c konstant, das heißt man hat praktisch einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer. Bei den Rotationen ist die Dämpferimpedanz zunächst für kleine a_0 -Werte null und wächst mit größer werdendem a_0 an. Hall /13/ schlägt als Approximation dieses Sachverhalts implizit eine Funktion der Form

$$c(a_0) \sim \frac{a_0^2}{a_0^2 + \alpha}
 \tag{8.34}$$

vor.

Die Koppelsteifigkeit zwischen Horizontal- und Kippfreiheitsgrad ist im wesentlichen reell. Man hat bei einer Verschiebung in x -Richtung ein positives Moment um die y -Achse (Bild 8.4). Normiert man die Steifigkeitsmatrix, so daß die Diagonale zu 1 wird, dann ist die Größe des Koppelgliedes von 0,15 zugleich ein Maß für den Grad der Kopplung.

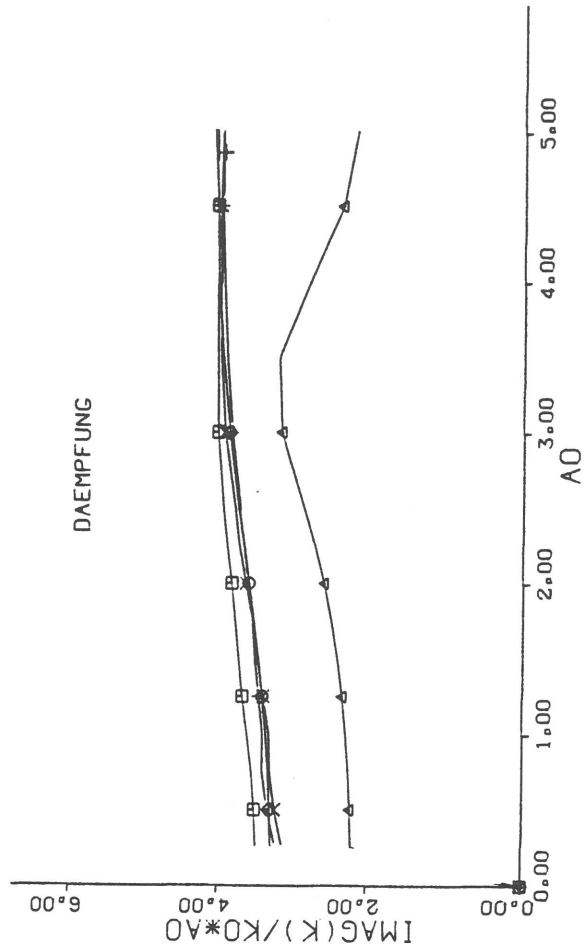
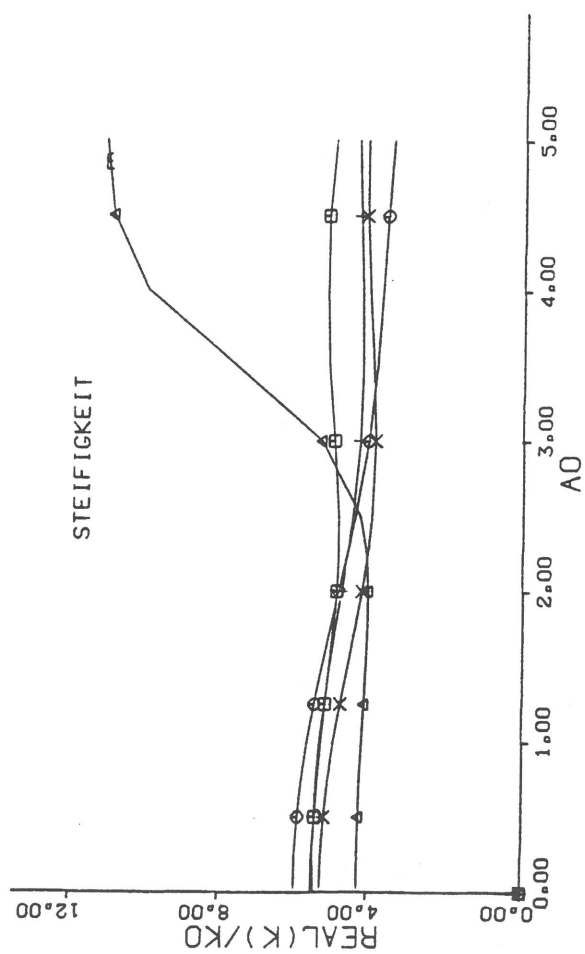
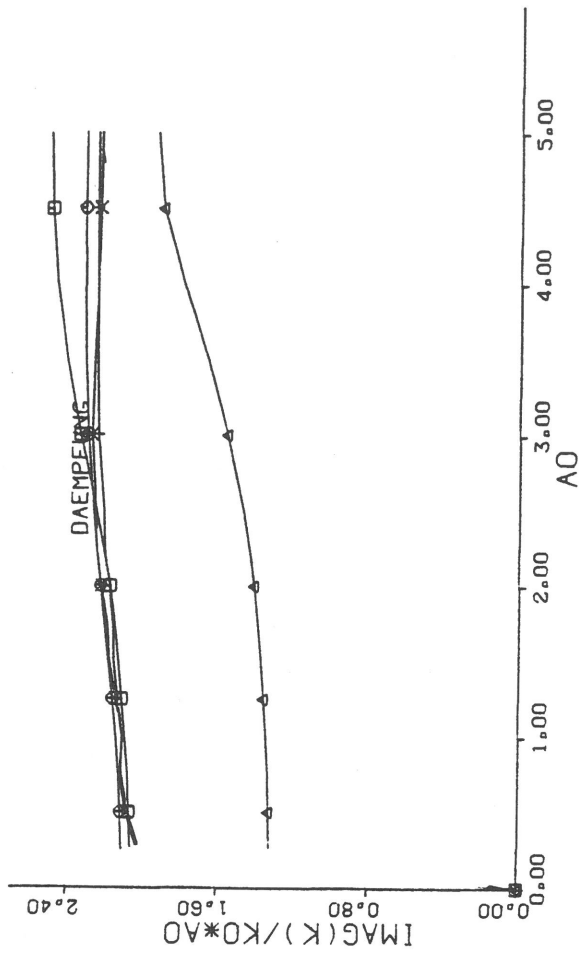
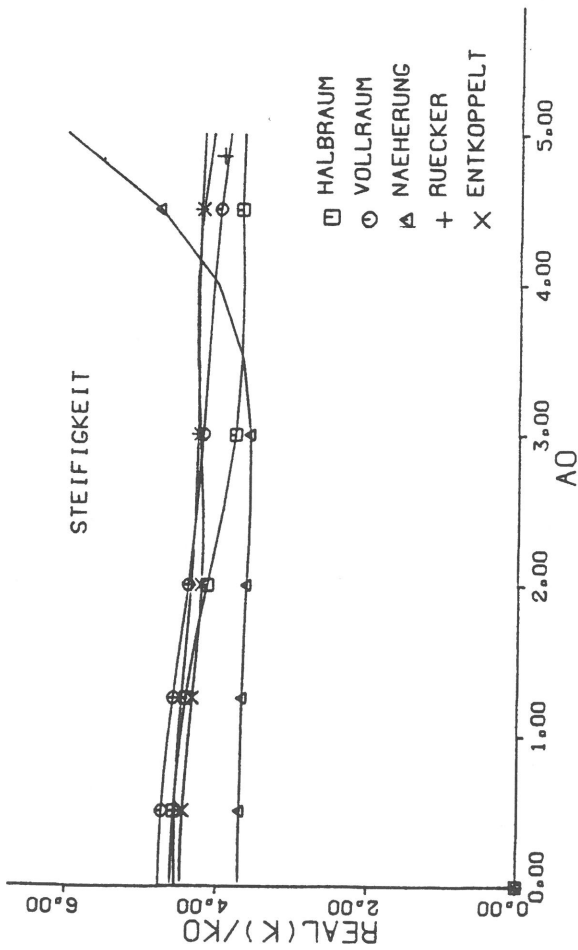


Bild 8.1 - Translationssteifigkeit eines Quadratfundaments, horizontal (oben) und vertikal (unten)

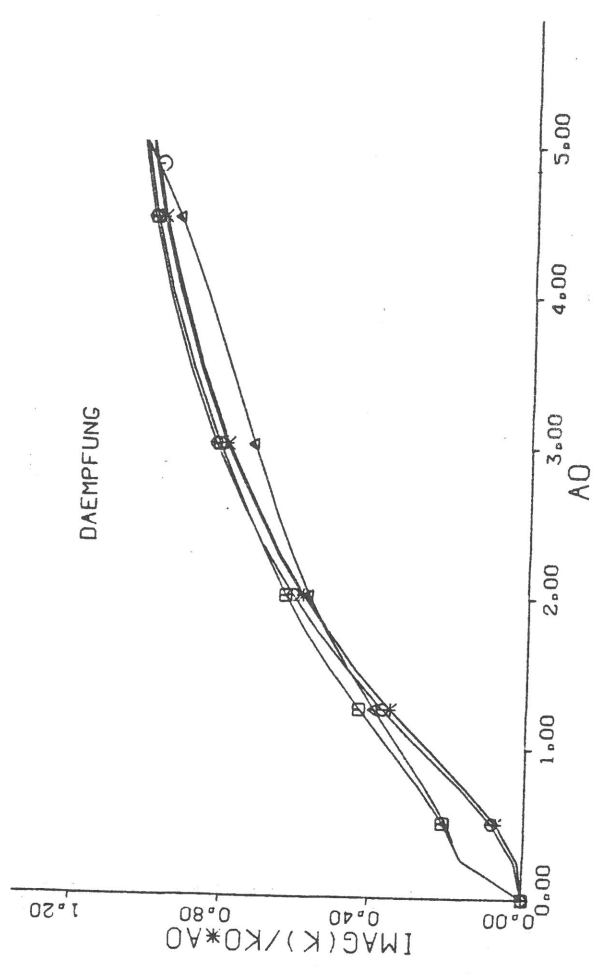
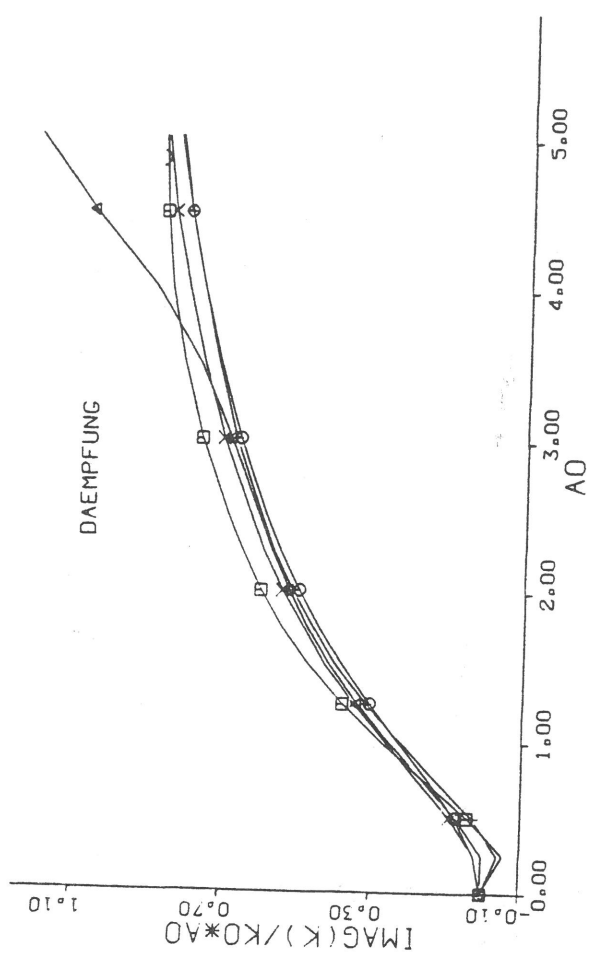
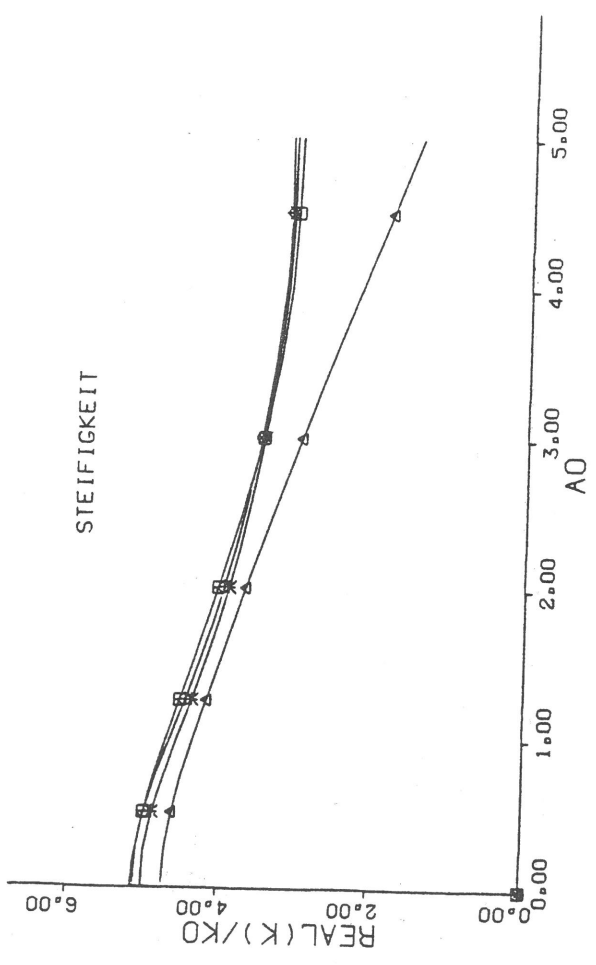
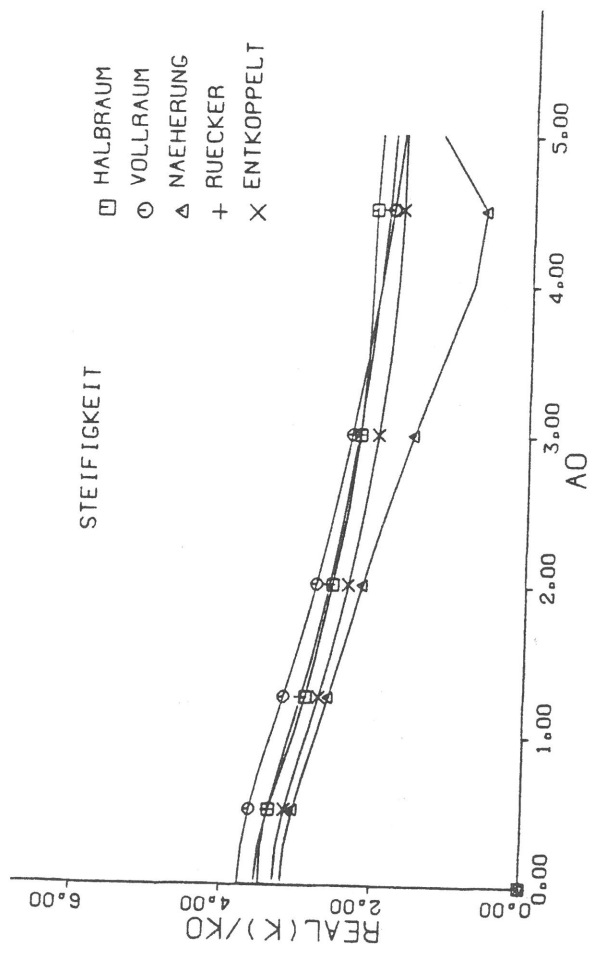


Bild 8.2 - Rotationssteifigkeit eines Quadratfundaments, Kippen (oben) und Gieren (unten)

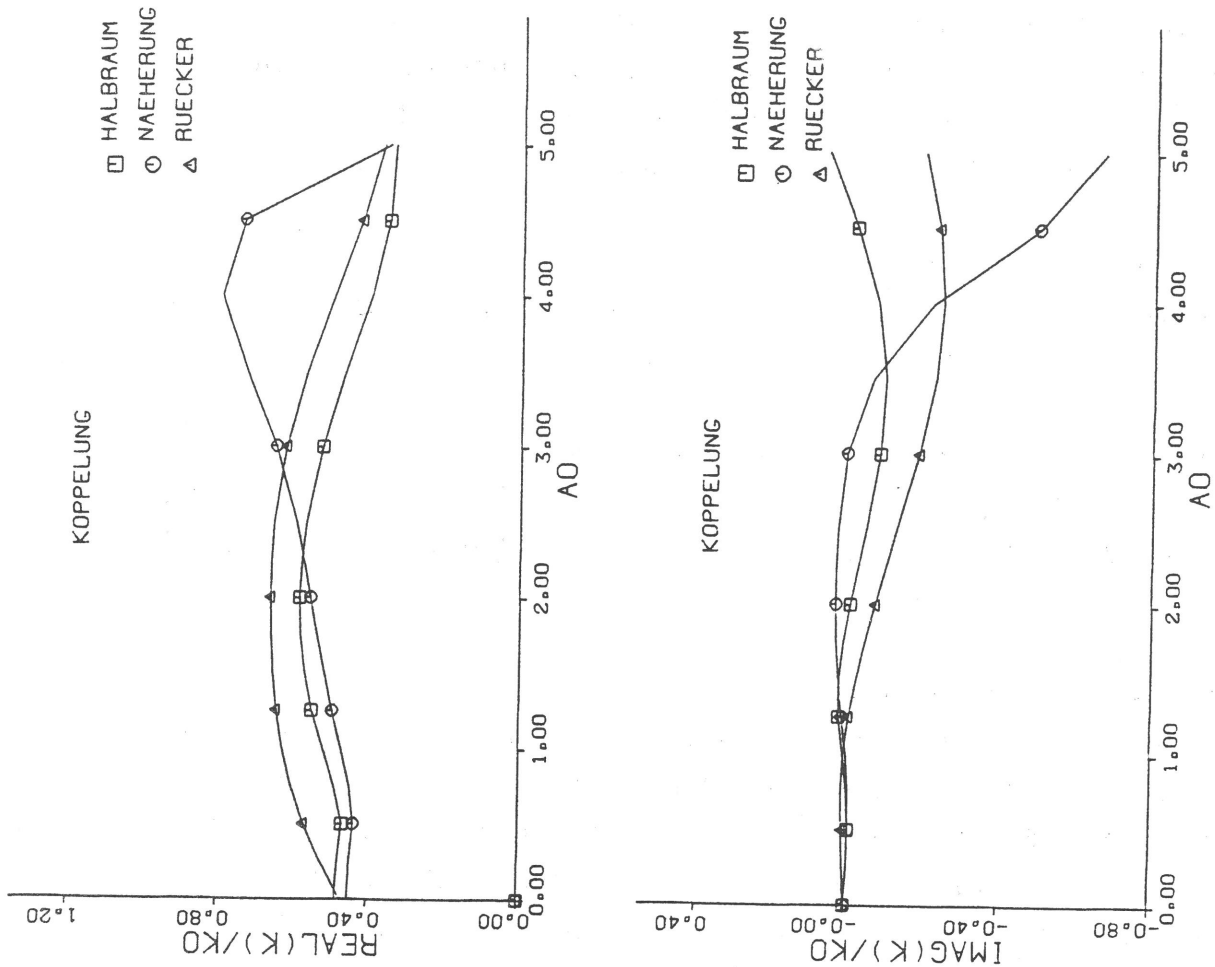


Bild 8.3 - Koppelsteifigkeit eines Quadratfundaments

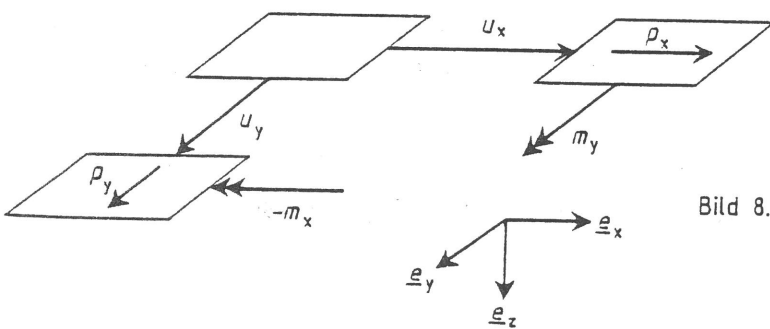


Bild 8.4 - Die Koppelsteifigkeiten $m_y/u_x = -m_x/u_y$

8.4 Vergleich der Verfahrensvarianten

Die in den Bildern 8.1 bis 8.3 dargestellten Ergebnisse für die verschiedenen Verfahrensvarianten weisen alle eine nur geringe Bandbreite auf. Die relativen auf den jeweiligen Betrag der Steifigkeit bezogenen Fehler liegen in der Größenordnung von 10 % (Gieren/Torsion < 3 %, Horizontalbewegung < 12 %, Kippen < 16 %, Vertikalbewegung < 20 %), so daß der Unterschied der verwendeten Verfahrensvarianten hier als gering anzusehen ist:

- Konstante Teilflächenspannungen - Punktlasten
Zur Berechnung der Verschiebungen benachbarter Punkte kann auf die Integration über die konstante Spannungsverteilung verzichtet werden und stattdessen unmittelbar die Punktlastlösung verwendet werden.
- Exakte Punktlast - Näherung
Die Annäherung der Punktlastlösung durch jeweils zwei Asymptoten liefert befriedigende Ergebnisse.
- Halbraum gekoppelt - Halbraum entkoppelt
Der Einfluß der Kopplung auf die Diagonalglieder ist sehr gering (Abweichungen $< 5\%$). Die entkoppelte Rechnung liefert allerdings keine Koppelglieder.
- Halbraum - Vollraum (entkoppelt)
Die Ergebnisse der Vollraummethode stimmen sehr gut mit denen der gekoppelten Halbraummethode überein. Das liegt einerseits an der großen Ähnlichkeit der Punktlastlösungen im Nahbereich (in die Fundamentberechnung gehen nur Lösungen bis $\bar{r} = 2a_0 = 10$ ein), andererseits an der Übereinstimmung der Randbedingungen (8.16) innerhalb der Fundamentfläche. Man kann das Ergebnis auch als physikalische Aussage festhalten:
Ein starres Fundament im Vollraum hat ziemlich genau die doppelte dynamische Steifigkeit wie dasselbe Fundament auf dem Halbraum.
- Inversion der Nachgiebigkeit - direkte Lösung mit verschiebungsproportionalem Spannungsansatz
Auch das weitaus schnellere Näherungsverfahren (8.2.3) mit verschiebungsproportionalem Spannungsansatz liefert noch akzeptable Ergebnisse.

9. Zur Wechselwirkung über den Boden

In diesem Abschnitt werden zunächst einige Fundamentbeispiele berechnet, deren Steifigkeiten noch nicht bekannt sind, die aber für die Behandlung von Gebäudegründungen mit Stützen- oder Streifenfundamenten von Interesse sind. Aus den Ergebnissen werden allgemeinere Aussagen zur Wechselwirkung benachbarter Fundamente abgeleitet.

9.1 Erstes Beispiel: Gruppenwirkung starr gekoppelter Fundamente

Es werden folgende Systeme betrachtet (Bild 9.1):

3 mal 3 Fundamentflächen von einem Quadratmeter sind in einem regelmäßigen Raster angeordnet, wobei der Abstand d zwischen den Fundamenten zwischen 0 m (ein quadratisches Fundament) und 15 m variiert wird. Die Fundamente sind starr miteinander verbunden und es wird die dynamische Steifigkeit der Fundamentgruppe für 0 bis 30 Hz berechnet. Die Scherwellengeschwindigkeit des Bodens ist 200 m/s, die Querkontraktionszahl ist $\nu = 0,33$.

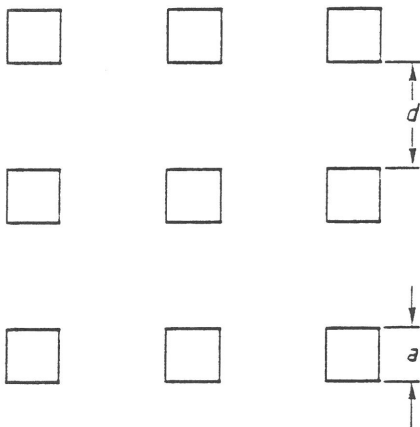


Bild 9.1 - Starr gekoppelte Fundamentgruppe

Bild 9.2 zeigt die Ergebnisse für die vertikale Komponente K_{33} . Bei der Darstellung (8.29)

$$K_{33} = K_0 [k(a_0) + i a_0 c(a_0)]$$

wird von den Größen eines Fundaments ausgegangen, das heißt

$$r_0 = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \sqrt{\frac{1\text{m}^2}{\pi}},$$

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{v_T},$$

und für K_0 wird der n -fache statische Wert eines Kreisfundaments

$$K_0 = n \frac{4\mu r_0}{1-\nu} \quad (n=9)$$

mit der Anzahl n der Fundamente benutzt.

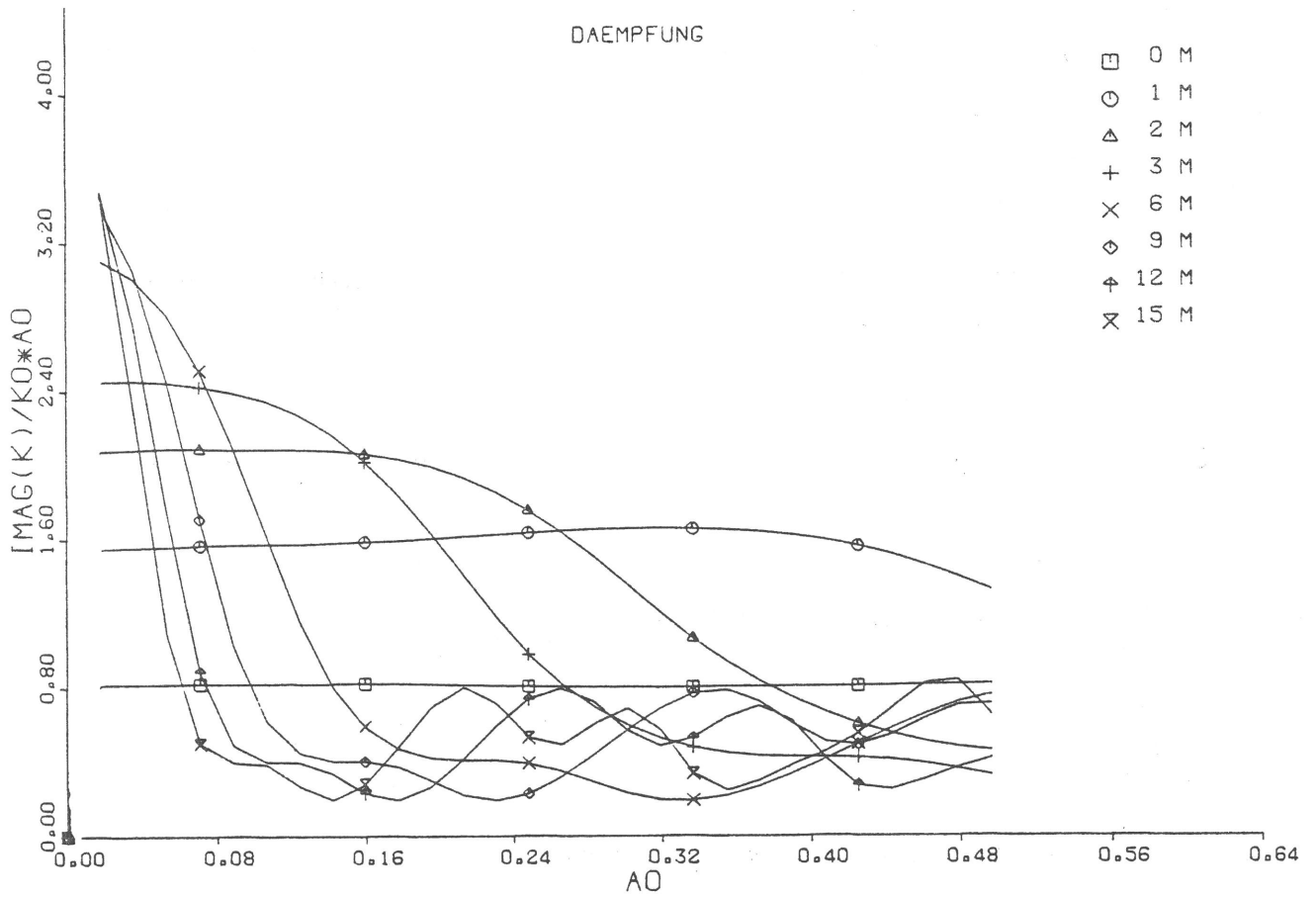
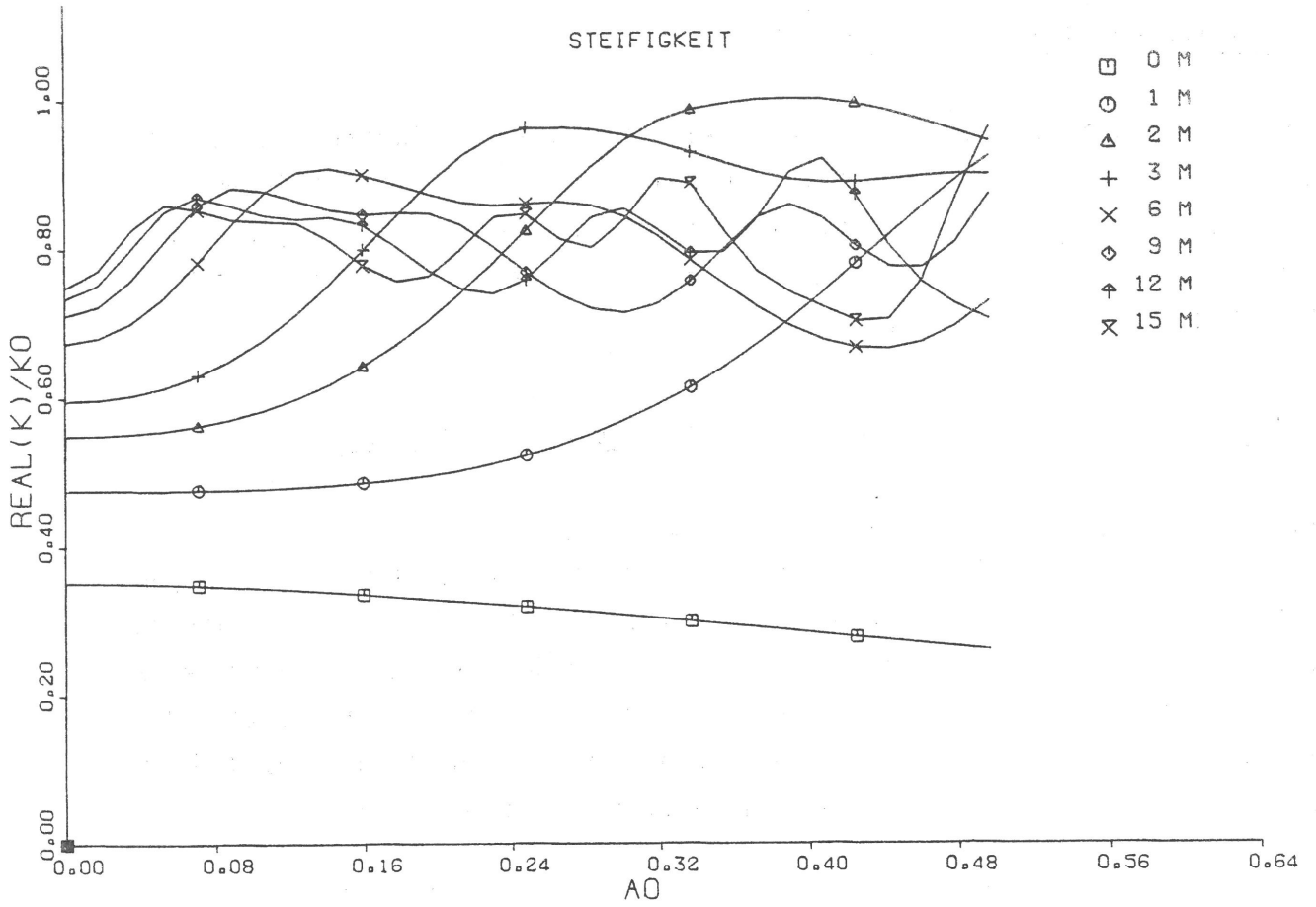


Bild 9.2 - Die Vertikalsteifigkeit einer Fundamentgruppe,
Parameter: Abstand der Fundamente

Man stellt folgende Merkmale der Gruppensteifigkeit und -dämpfung fest:

- Die Feder- und Dämpferwerte schwanken mit der Frequenz jeweils um einen Mittelwert, der der Summe der Einzelwerte entspricht.
- Für tiefe Frequenzen, wenn die Scherwellenlänge größer als der Durchmesser der Fundamentgruppe ist, ist die Steifigkeit kleiner als der Mittelwert. Je enger die Fundamente, desto deutlicher ist dieser Wechselwirkungseffekt.
- Für tiefe Frequenzen, ebenfalls wenn die Scherwellenlänge größer als der Durchmesser der Fundamentgruppe ist, ist die Dämpfung größer als der Mittelwert. Je weiter die Fundamente entfernt sind, desto größer wird die tieffrequente Dämpfung, desto kleiner ist aber auch der betroffene tieffrequente Bereich.
- Die Unterschiede im tieffrequenten Bereich sind bei der Dämpfung stärker als bei der Steifigkeit - während sich der Federwert bei dieser Parametervariation nur verdoppelt, vervierfacht sich die Dämpfung. Auch der betroffene tieffrequente Bereich ist bei der Dämpfung fast doppelt so groß wie bei der Steifigkeit.

Zusammenfassend kann man festhalten:

Die Wechselwirkung benachbarter Fundamente beschränkt sich im wesentlichen auf einen tiefen Frequenzbereich und berührt hauptsächlich die Dämpfung. Für höhere Frequenzen hat man zumindest im Frequenzmittel die Summe der Einzelfundamentsteifigkeiten bzw. -dämpfungen.

9.2 Zweites Beispiel: Starre Streifenfundamente

Als zweites Beispiel werden Streifenfundamente verschiedener Länge betrachtet. Die Fundamentbreite beträgt dabei jeweils 1 m, die Bodenkennwerte ($v_T = 200 \text{ m/s}$, $\nu = 0,33$) und der Frequenzbereich (0 bis 30 Hz) stimmen mit dem vorangehenden Abschnitt überein. Als Ergebnis wird die vertikale Steifigkeitskomponente

$$K_{33} = K_0 [k(a_0) + i a_0 c(a_0)]$$

dargestellt, wobei

$$K_0 = \frac{\mu}{1-\nu} b$$

mit der Fundamentlänge b und

$$a_0 = \frac{\omega a}{v_T}$$

mit der Fundamentbreite a ist.

Die Streifenfundamentsteifigkeiten und -dämpfungen haben folgende Eigenschaften:

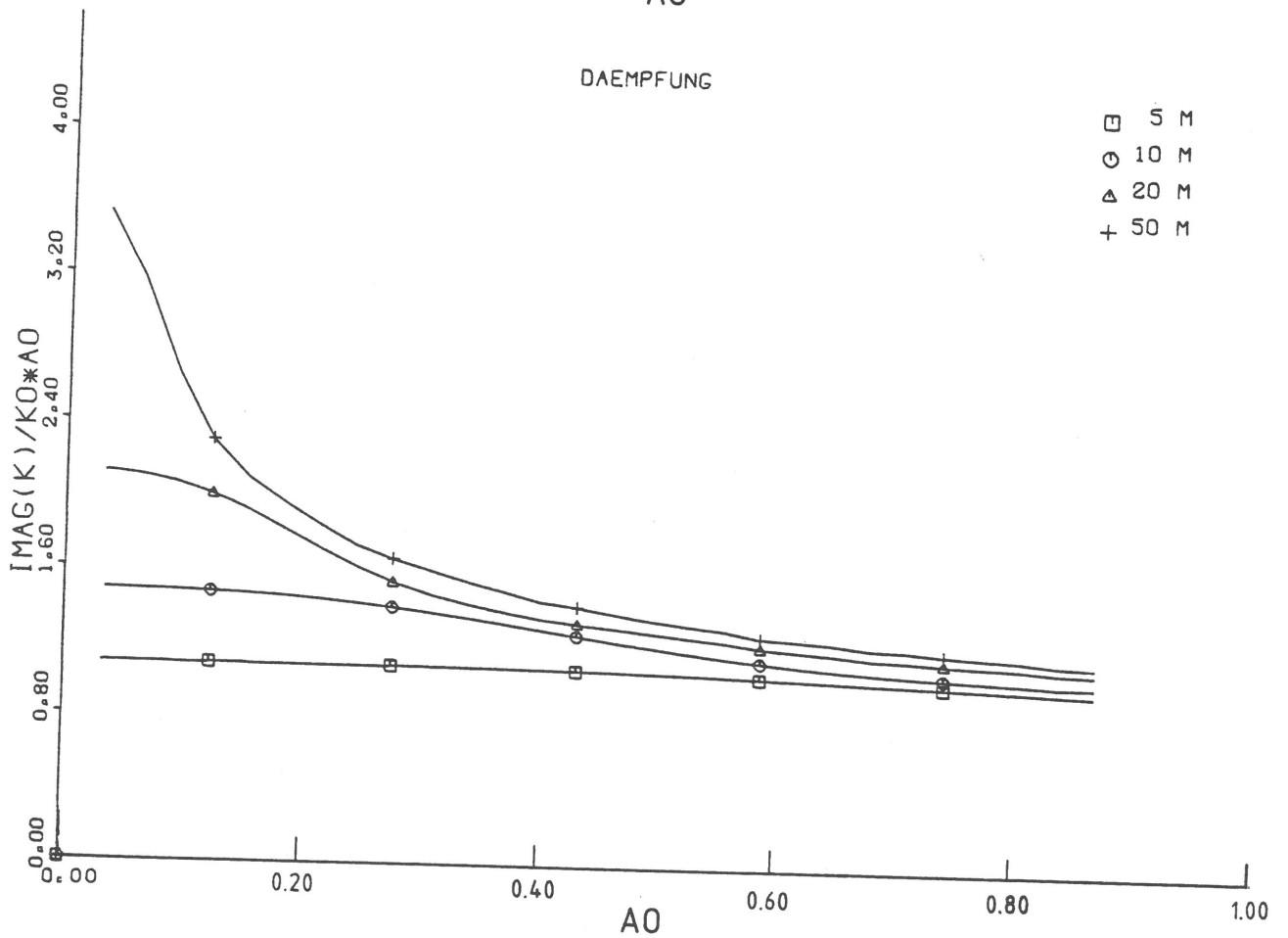
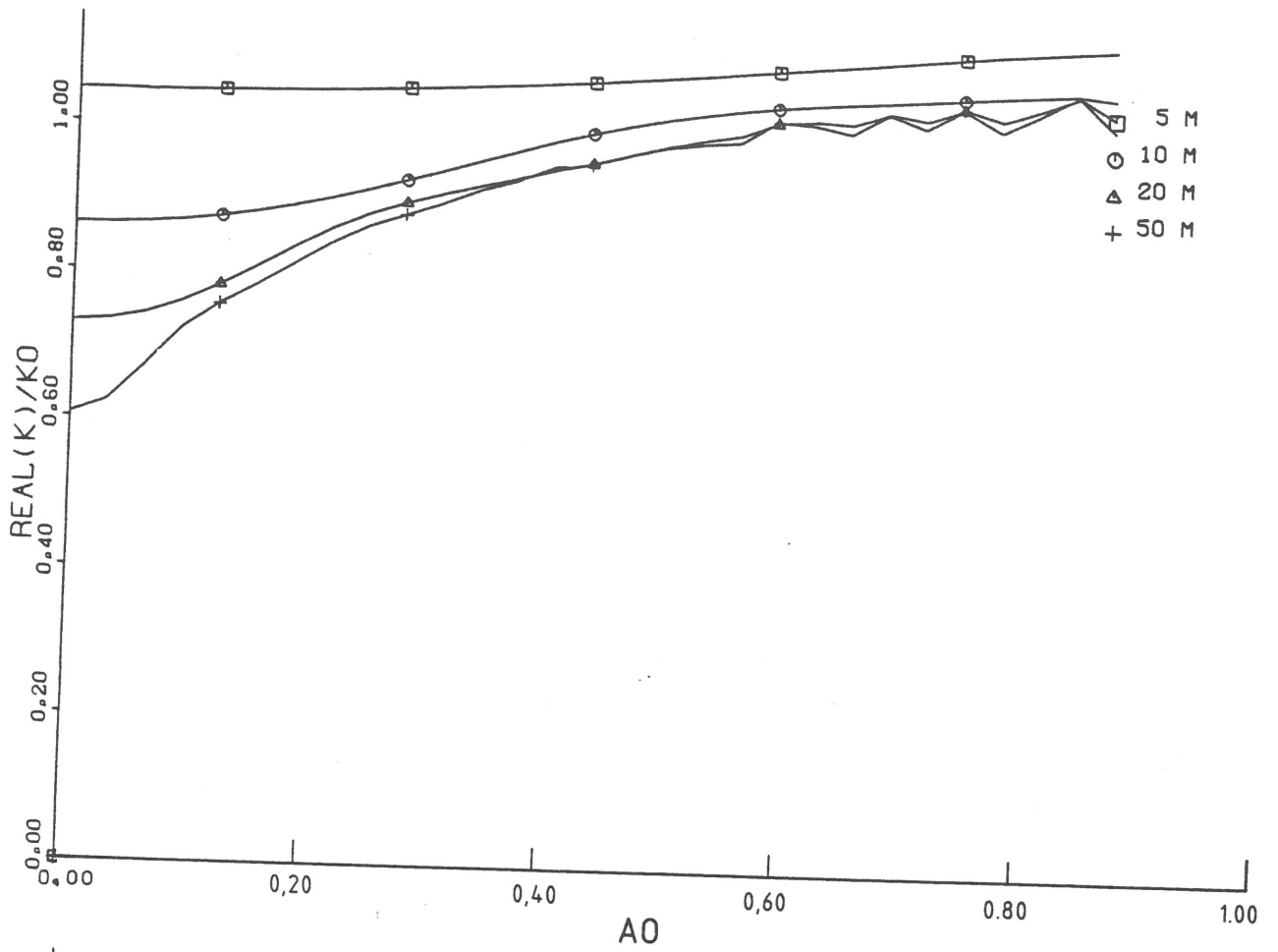


Bild 9.3 - Die Vertikalsteifigkeit eines Streifenfundaments,
Parameter: Länge des Fundaments

- Für hohe Frequenzen wird ein Grenzwert erreicht, der jeweils bei ungefähr 1 liegt, unabhängig von der Fundamentlänge.
- Für tiefe Frequenzen wird der Federwert k kleiner, der Dämpferwert c größer. Je länger das Fundament, desto kleiner wird k und desto größer wird c .
- Für das Seitenverhältnis $b/a=5$ sind statischer und hochfrequenter Wert gleich, das heißt der Feder- und Dämpferwert sind wie beim Kreisfundament über die Frequenz konstant.

Man kann die Streifenfundamente auch jeweils als Gruppe von Teilfundamenten mit dem Seitenverhältnis 5:1 betrachten. Dann ergeben sich die gleichen Schlußfolgerungen wie im vorangehenden Abschnitt: Für genügend hohe Frequenzen kann man die Wechselwirkung zwischen den Teilflächen vernachlässigen und die Teilflächensteifigkeiten einfach addieren. Die Wechselwirkung zwischen den Teilfundamenten macht sich nur bei tiefen Frequenzen bemerkbar. Die tieffrequenten Effekte sind umso stärker, je mehr Teilflächen in Wechselwirkung stehen, das heißt je länger das Streifenfundament ist.

9.3 Einfluß der Wechselwirkung auf Steifigkeit und Dämpfung starrer Fundamente

Die Beispiele 9.1 und 9.2 legen es nahe, zunächst der Wechselwirkung bei tiefen Frequenzen beziehungsweise großen Wellenlängen nachzugehen. Der nachfolgend abgeleitete Satz 1 zeigt, daß es einen prinzipiellen Zusammenhang zwischen tieffrequenter Steifigkeit und Dämpfung gibt. Ein zweiter Satz beschäftigt sich mit dem Einfluß der Fundamentgeometrie auf die tieffrequente/statische Steifigkeit.

Mit den Punktlastlösungen des Halbraumes hat man die Darstellung der Verschiebungen

$$u(\underline{x}_\beta) = \int_F \frac{1}{2\pi\mu |\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|} f(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha) \sigma(\underline{x}_\alpha) d\underline{x}_\alpha, \quad (9.1)$$

bei der zunächst allgemein f als eine Matrix und σ und u als Vektoren aufgefaßt werden, die sich aber für die vertikale Bewegung und für entkoppelte Betrachtung vereinfachen zu

$$u_z(\underline{x}_\beta) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_F \frac{1}{|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|} f_{zz}(|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|) \sigma_z(\underline{x}_\alpha) d\underline{x}_\alpha \quad (9.2)$$

Der Index z wird im folgenden stets weggelassen. Ist die Spannungsverteilung $\sigma(\underline{x})$ bekannt, so hat man mit (9.2) unmittelbar eine Darstellung der Nachgiebigkeit

$$\frac{u}{p} = N = \text{Re}(N) + i\text{Im}(N) = R + iI, \quad (9.3)$$

und mit dem Kehrwert die Steifigkeit

$$\frac{p}{u} = K = \frac{R - iI}{R^2 + I^2} = S + i\omega D \quad (9.4)$$

Für tiefe Frequenzen ist nun einerseits wegen $\text{Im}(N) \approx 0$

$$K = \frac{1}{R} - i \frac{I}{R^2} = S - iIS^2 \quad (9.5)$$

und andererseits vereinfacht sich die Punktlastlösung (z.B. vertikal) zu

$$f(\bar{r}) = (1-\nu) e^{-i1,2\bar{r}} \doteq (1-\nu)(1-i1,2\bar{r}) \quad (9.6)$$

Für den Imaginärteil der Verschiebung folgt dann

$$\text{Im}(u) = - \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \int_F \frac{1}{|x_\beta - x_\alpha|} \frac{1,2\omega |x_\beta - x_\alpha|}{v_T} \sigma(x_\alpha) dx_\alpha = - \frac{1,2(1-\nu)\omega}{2\pi\mu v_T} p \quad (9.7)$$

beziehungsweise für den Imaginärteil der Nachgiebigkeit

$$I = \frac{\text{Im}(u)}{p} = - \frac{1,2(1-\nu)}{2\pi\mu v_T} \omega \quad (9.8)$$

Der Dämpferwert ergibt sich dann mit (9.5)

$$D = - \frac{IS^2}{\omega} = \frac{1,2(1-\nu)}{2\pi\mu v_T} S^2 \quad (9.9)$$

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in dem

Satz 1 (tieffrequente Dämpfung)

Für die Verschiebungen der Halbraumoberfläche unter einer Spannungsverteilung gilt bei genügend kleinen Frequenzen ($a_0 \rightarrow 0$):

- Der Imaginärteil der Verschiebungen ist für alle Punkte der Oberfläche gleich, er hängt nur von der resultierenden Kraft, nicht aber von der jeweiligen Lastverteilung und somit auch nicht von der Fundamentform ab (Gleichung 9.7).
- Der Imaginärteil einer Fundamentnachgiebigkeit ist von der Form des Fundaments bzw. der Fundamentgruppe unabhängig (Gleichung 9.8).
- Bei der Fundamentsteifigkeit ist der Dämpferwert D dem Quadrat des Federwerts S proportional (Gleichung 9.9)

$$D \sim S^2$$

Folgerungen:

1. Gleichung (9.7) kann auch auf andere Lastfälle übertragen werden. Insbesondere gilt für eine Momentenbelastung (Rotation) eines starren Fundaments wegen $p = 0$

$$\text{Im}(u) = 0$$

mit der Konsequenz, daß die Dämpfung für tiefe Frequenzen verschwindet (vergleiche Abschnitt 8.3).

2. Für den Fall, daß die statische Lösung, das heißt der Federwert S bekannt ist, kann man unmittelbar mit Gleichung (9.9) auf die tieffrequente Dämpfung schließen. Für das starre Kreisfundament erhält man auf diese Weise aus (8.38)

$$S = \frac{4\mu r_0}{1-\nu}$$

$$D = \frac{3,1\sqrt{\mu\rho} r_0^2}{1-\nu} \approx \frac{\sqrt{\mu\rho} F}{1-\nu} \quad (9.12)$$

Für den tieffrequenten Federwert S ist eine ähnlich allgemeine Aussage wie in Satz 1 für die Dämpfung nicht möglich. Der Realteil der Verschiebung ist mit (9.6)

$$\text{Re}(u) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \int_F \frac{\sigma(\underline{x}_\alpha)}{|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|} d\underline{x}_\alpha \quad (9.13)$$

und somit von der Spannungsverteilung $\sigma(\underline{x}_\alpha)$ und vom Ort \underline{x}_β abhängig. Zu einer brauchbaren Näherung für die Starrkörperverschiebung kommt man (analog zu Abschnitt 8.2.3), indem man konstante Spannungen annimmt und das entstehende Verschiebungsfeld mittelt

$$\text{Re}(u) \approx \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \frac{1}{F^2} \iint_F \frac{1}{|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|} d\underline{x}_\alpha d\underline{x}_\beta \quad p \quad (9.14)$$

Für die statische Federsteifigkeit S , die sich prinzipiell als

$$S = S_0 f \text{ (Fundamentform)} \quad (9.15)$$

mit der Steifigkeit S_0 des flächengleichen Kreisfundaments darstellen läßt, hat man somit folgenden

Satz 2 (Abschätzung der tieffrequenten Federsteifigkeit):

Für tiefe Frequenzen ($a_0 \rightarrow 0$) läßt sich der Einfluß der Fundamentform auf die Federsteifigkeit mit der dimensionslosen Geometriefunktion

$$\frac{S}{S_0} = \frac{(\pi r_0)^3}{2 \iint_{FF} 1/|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha| d\underline{x}_\alpha d\underline{x}_\beta} \quad (9.16)$$

abschätzen.

Interpretation:

Die Stärke der statischen Wechselwirkung zwischen zwei Punkten \underline{x}_α und \underline{x}_β ist durch den Kehrwert des Abstandes $1/|\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha|$ gekennzeichnet. Diese Wechselwirkung hat einen Einfluß auf die statische Nachgiebigkeit beziehungsweise Steifigkeit. Gleichung (9.14) besagt nun, daß die Nachgiebigkeit eines starren Fundaments einem normierten Mittelwert über alle innerhalb der Fundamentfläche möglichen "Wechselwirkungsmaße" $1/(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha)$ entspricht.

Im einzelnen bedeutet das:

3. Je gedrungener die Fundamentfläche, desto kleiner ist die Steifigkeit. Für das Kreisfundament hat man den kleinsten Wert, das heißt es ist immer $S/S_0 \geq 1$.

4. Je langgestreckter die Fundamentfläche, desto größer wird die Steifigkeit. Für ein Rechteckfundament mit einem Seitenverhältnis b/a kleiner als 5 sind die Unterschiede zum flächengleichen Kreisfundament nicht sehr gravierend. Für b/a größer als 5 entnimmt man den Ergebnissen aus Abschnitt 9.2

b/a	5	10	20	50
S/S ₀	1	1,2	1,4	1,9

5. Bei aufgelösten Fundamentformen (Fundamentgruppen siehe Abschnitt 9.1) nimmt die Steifigkeit mit dem Abstand d der Teilfundamente zu, wobei die obere Grenze

$$S(d \rightarrow \infty) = \sum S_i = n S_1$$

die Summe der Teilflächensteifigkeiten S_i ist. Die untere Grenze für den Abstand $d=0$

$$S(d=0) \approx S_0 = \sqrt{n} S_1$$

ist die Steifigkeit S_0 des flächengleichen Kreisfundaments, so daß die gesamte Breite der möglichen Steifigkeiten bei n gleichen Teilfundamenten

$$\frac{S(d \rightarrow \infty)}{S(d=0)} = \sqrt{n}$$

ist.

Die bisherigen Ausführungen beschränkten sich auf einen tieffrequenten Bereich. Wendet man sich nun den höheren Frequenzen zu, so legen die Ergebnisse zu den Fundamentbeispielen es nahe, daß die Wechselwirkung zwischen benachbarten Fundamentflächen mit zunehmender Frequenz beziehungsweise mit kürzer werdender Wellenlänge abnimmt. Man kann die Ergebnisse dahingehend interpretieren, daß sich jeweils immer nur Teilflächen beeinflussen, die maximal eine halbe Scherwellenlänge voneinander entfernt sind. Liegen die Teilflächen weiter entfernt, so ergibt sich die Gesamtsteifigkeit der Fundamentgruppe annähernd aus der Summe von Teilflächenfedern und -dämpfern.

Die Summe der Teilflächendämpfer D_Σ stimmt mit der Dämpfung D_0 eines flächengleichen Kreisfundaments überein, während bei der Steifigkeit die entsprechenden Summen- (S_Σ) und Kreisfundamentwerte (S_0) gerade die Extremwerte darstellen. Insgesamt hat man folgende Situation

$$S_{dyn} \approx S_\Sigma > S_{stat} > S_0 \quad ,$$

$$D_{dyn} \approx D_\Sigma = D_0 < D_{stat} \quad ,$$

wobei sich das Verhältnis

$$\frac{D_{\text{stat}}}{D_{\text{dyn}}} = \frac{D_{\text{stat}}}{D_0} = \frac{S_{\text{stat}}}{S_0}^2 = f^2(\text{Fundamentform})$$

gerade aus dem Quadrat der im Zusammenhang mit dem Satz 2 diskutierten Geometriefunktion f ergibt.

Die Verhältnisse ändern sich noch einmal, wenn eine Wellenlänge auch kleiner als die kleinste Fundamentabmessung ist: Der Federwert schwankt dann stark mit der Frequenz. Dies ist für die gesamte Fundamentsteifigkeit jedoch nicht mehr wesentlich, da für diese Frequenzen die Dämpfung deutlich überwiegt.

9.4 Vereinfachte Betrachtungsweisen starrer Fundamente

Konstante Feder- und Dämpferwerte

Für Fundamente, deren Form nicht zu stark von einer Kreisfläche abweicht (zum Beispiel Quadrat oder Rechtecke bis zum Seitenverhältnis 1:5), kann man näherungsweise konstante Feder- und Dämpferwerte zur Charakterisierung der dynamischen Steifigkeit benutzen. Bei den Translationsfreiheitsgraden sind das die statischen Werte eines Kreisfundaments gleicher Fläche, bei den Rotationsfreiheitsgraden verwendet man die statische Steifigkeit eines Kreisfundaments mit jeweils gleichem Flächenträgheitsmoment. Die Dämpfung der Rotationsfreiheitsgrade ist in dieser ersten Näherung Null.

Entkoppelte Teilflächen (vernachlässigte Wechselwirkung)

Bei einer ausgedehnten Fundamentfläche (Streifenfundament, Gruppe von Einzelfundamenten) kann man die Wechselwirkung über den Boden zwischen einzelnen Teilflächen des Fundaments vernachlässigen. Die Gesamtsteifigkeit des Fundaments ergibt sich dann aus der Summe der einzelnen Teilflächenfeder- und -dämpferwerte.

Die Einteilung in Teilflächen ist bei einer Fundamentgruppe klar: Es sind die einzelnen Fundamente. Bei einem Streifenfundament unterteilt man in Abschnitte mit dem Seitenverhältnis 1:5. Letzteres gilt auch für eine Gruppe von Streifenfundamenten, wie sie typischerweise bei einer Gebäudegründung vorliegen kann. Die Berechnungen in Abschnitt 9.1 und 9.2 zeigen, daß diese entkoppelte Betrachtungsweise, das heißt die Vernachlässigung der Wechselwirkung über den Boden erst ab einer bestimmten Frequenz sinnvoll ist, die sich aus dem Verhältnis des Teilflächenabstandes zur Wellenlänge bestimmt.

Viskose Bettung

Analog zur bekannteren elastischen Bettung kann man auch die Bettung einer Struktur auf einer Vielzahl voneinander unabhängiger viskoser Dämpfer betrachten. Dabei hängt die Spannung σ an einem Fundamentpunkt nur von der Schwinggeschwindigkeit \dot{u} dieses Punktes ab. Das Verhältnis σ/\dot{u} (der viskose Bettungsmodul D') ließe sich anhand der Dämpfung eines Kreisfundaments bestimmen (z.B. vertikal)

$$D' = D/F = \sqrt{\mu\rho} / (1-\nu) \quad .$$

Diese Betrachtungsweise ist insbesondere für hohe Frequenzen, wenn einerseits die Federsteifigkeit gegenüber der Dämpfung vernachlässigbar und andererseits die Wellenlänge gegenüber den Fundamentabmessungen klein ist, gültig und im Körperschallbereich durchaus gebräuchlich. Sie kann aber auch in tieferen Frequenzen brauchbare Werte für die Dämpfung ergeben, da sie mit den beiden vorangehenden Betrachtungsweisen verträglich ist. In allen Fällen ist die Dämpfung als Integral über die Fläche darstellbar.

Teil IV Wellenfeldanregung starrer und flexibler Strukturen

10. Die Problemstellung der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung

Der Begriff der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung wird im folgenden für Probleme verwendet, bei denen eine Struktur allein durch Schwingungen des Bodens angeregt wird. Die Bodenschwingungen werden dabei durch die Freifeldverschiebungen u_0 an der Bodenoberfläche, das sind die Verschiebungen, die ohne Gebäude auftreten würden, beschrieben (s. Bild 10.1). Auf diese Weise lassen sich die meisten Anregungen, wie Verkehrs-, Industrie- und Bauer-schütterungen, sowie Erdbeben erfassen. Speziell bei Erdbeben sind jedoch auch noch zwei weitere Beschreibungsarten der Anregung gebräuchlich: Die Vorgabe der Verschiebungen u_G des als starr angenommenen Grundgebirges und die Betrachtung einer einlaufenden Welle mit den Verschiebungen u_+ , die für einen Boden ohne Oberfläche (den Vollraum) gelten würden. Beide Problemstellungen können - neben direkten Lösungsmöglichkeiten - in einem ersten Rechenschritt auf die hier betrachtete Freifeldanregung zurückgeführt werden, was im ersten Fall die Berechnung der sogenannten Bodenverstärkung (soil-amplification), im zweiten Fall die Berechnung der Reflektion an der freien Oberfläche beinhalten würde.

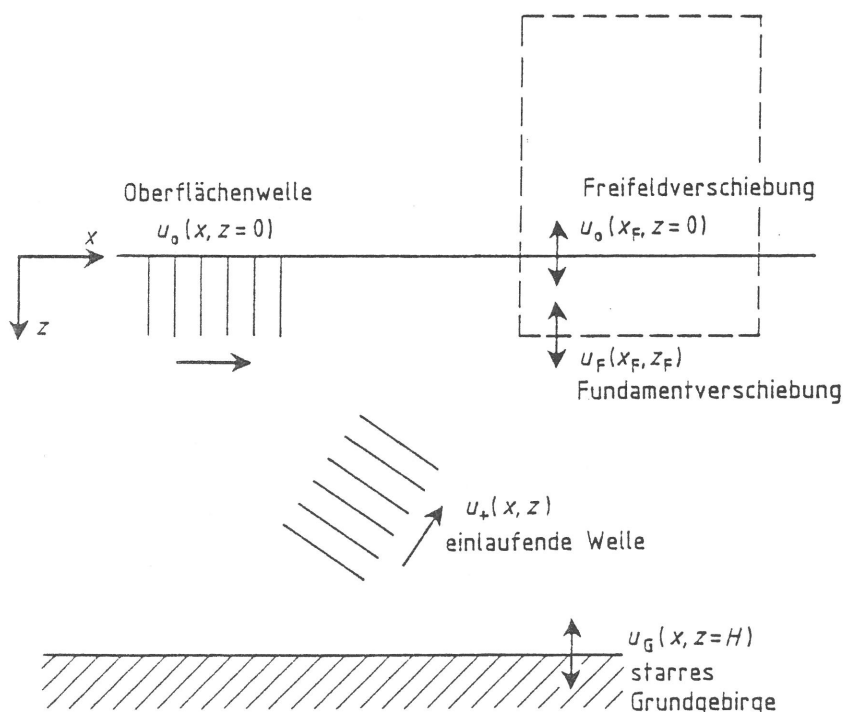


Bild 10.1 -
Boden-Bauwerk-Wechselwirkung
Anregung durch ein Wellenfeld

In den folgenden Abschnitten werden Strukturen auf dem Boden bei Anregung durch Rayleighwellen behandelt. Dabei ist das Verschiebungsfeld der Rayleighwelle an der Bodenoberfläche unmittelbar die Freifeldanregung, im

Gegensatz zu eingebetteten Strukturen, bei denen eine weitere Differenzierung verschiedener "Freifeldverschiebungen" (an der Oberfläche - im Innern, Boden mit und ohne Ausschachtung; s. Wolf /38/) notwendig ist. Das Rayleighwellenfeld an der Bodenoberfläche wird durch die Gleichung

$$\underline{u}_0 = \underline{A} e^{i(\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x})} = (u_H \underline{e} + u_V \underline{e}_z) e^{i\omega(t - \underline{e} \cdot \underline{x} / v_R)} \quad (10.1)$$

mit der Ausbreitungsrichtung \underline{e} , der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_R (Gl.4.21) und den Horizontal- und Vertikalamplituden mit dem charakteristischen Verhältnis $u_H/u_V \approx 2/3 e^{-i\pi/2}$ (Gl. 4.22) bestimmt.

Die Ausbreitung der Welle in horizontaler Richtung bewirkt an den einzelnen Fundamentpunkten verschiedenphasige Anregungen. Diese Unterschiede, die bei Erdbeben mit tiefen Frequenzen bzw. großen Wellenlängen und nahezu vertikalem Einfall der Wellen in der Regel gering sind, werden hier im Hinblick auf die höherfrequente Erschütterungsproblematik, bei der oft mehrere Wellenlängen in der Gebäudegrundfläche enthalten sind, näher betrachtet. Es wird in den folgenden Abschnitten untersucht, inwieweit Gebäude die Wellenbewegung des Bodens mitmachen oder unterdrücken.

Es werden eine Reihe von einfachen Strukturen unter Wellenanregung berechnet, wobei wesentliche Bauwerksmerkmale wie

- masselos - leicht - schwer,
- flach - niedrig - hoch,
- starr - steif - weich

variiert werden (Bild 10.2). Die Anordnung der Strukturbeispiele geschieht von einfachen zu immer komplexeren Modellen, so daß nacheinander die verschiedenen Wechselwirkungseffekte diskutiert werden können. Dazu werden einerseits Schwingungsformen in einzelnen Frequenzen und andererseits die frequenzabhängigen Übertragungsverhältnisse von Freifeld zum Bauwerk betrachtet.

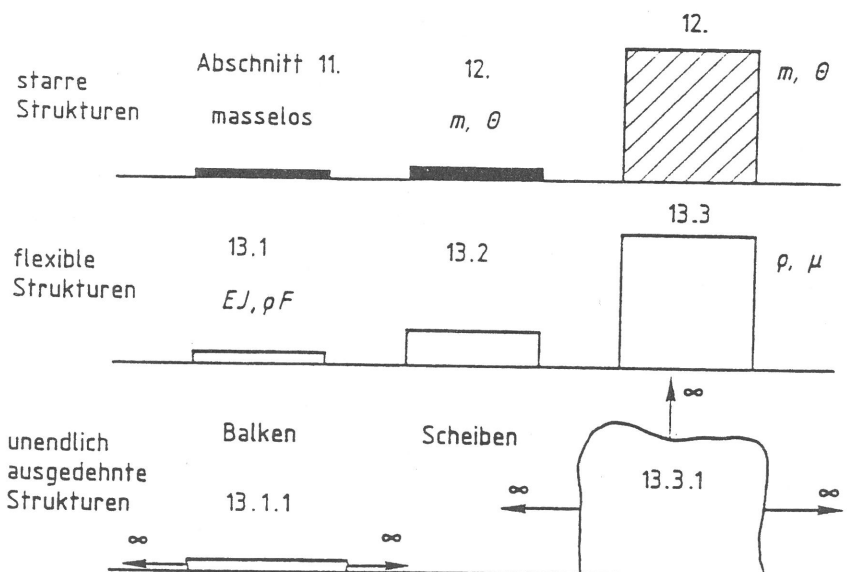


Bild 10.2 -
Berechnete Strukturen unter
Wellenfeldanregung

11. Die Anregung starrer masseloser Fundamente durch harmonische Wellen (kinematische Wechselwirkung)

11.1 Fundamentbeispiel, vollständige und näherungsweise Berechnung der kinematischen Wechselwirkung

Als Fundamentbeispiel wird ein schlankes Rechteckfundament (Streifenfundament) mit den Seitenlängen 20 m x 0,2 m gewählt, das auf einem Boden mit $v_T = 200$ m/s und $\nu = 1/3$ liegt. Als Anregung wirkt ein harmonisches Freifeldwellenfeld $u_0(x)$, also zum Beispiel eine ebene Rayleighwelle (10.1). Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist parallel zur langen Fundamentseite, das heißt die Welle läuft das Fundament entlang.

Zur Berechnung der Fundamentantwort mit der Halbraummethode wird die Fundamentfläche durch eine Anzahl von Punkten mit zugehörigem Teilflächeninhalt diskretisiert. Man berechnet zunächst die Freifeldverschiebungen u_0 an diesen diskreten Punkten. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, ersetzt man diese Freifeldverschiebungen mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix K_B des Bodens durch die äquivalente Last $p_0 = K_B u_0$, der Index B wird im folgenden fortgelassen. In die Systemgleichung für das starre Fundament (vgl. Abschnitt 6.4)

$$K' u' = p' \quad (11.1)$$

geht von dieser Last p_0 nur die Resultierende

$$p_0' = B^T p_0 = B^T K u_0 \quad (11.2)$$

ein und Gleichung (11.1) wird zu

$$K' u' = B^T K u_0 \quad (11.3)$$

Auf der Auflösung dieser Gleichung nach u'

$$u' = K'^{-1} B^T K u_0 \quad (11.4)$$

beruht die vollständige Berechnungsweise der kinematischen Wechselwirkung.

Bei der näherungsweise Berechnung sucht man unmittelbar eine Starrkörper-

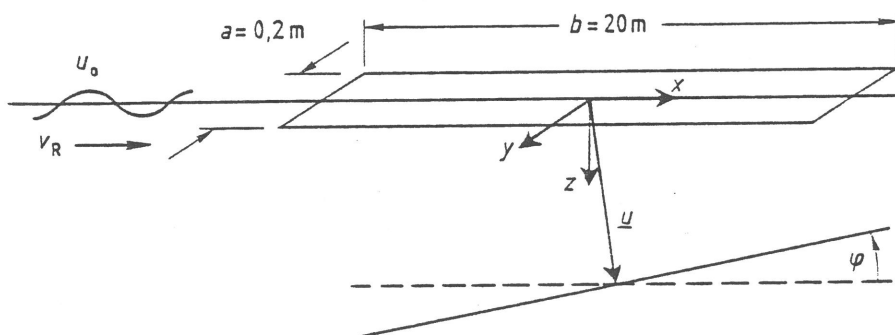


Bild 11.1 -
Ein starres masseloses
Fundament bei Anregung
durch ein Wellenfeld

verschiebung u' , die die Freifeldverschiebungen am besten approximiert, das heißt, man hat die überbestimmte Gleichung

$$(u =) B u' = u_0 \quad . \quad (11.5)$$

Die beste Approximation u' zu (11.5) bekommt man aus der Lösung von

$$B^T B u' = B^T u_0 \quad , \quad (11.6)$$

das ist

$$u' = (B^T B)^{-1} B^T u_0 \quad . \quad (11.7)$$

Vergleicht man die Bestimmungsgleichungen (11.3) und (11.6) der vollständigen und der näherungsweise Berechnung, wobei in (11.3) die Fundamentsteifigkeit $K' = B^T K B$ (6.29) eingesetzt wird,

$$\begin{array}{ll} B^T K B u' = B^T K u_0 & \text{vollständig} \\ B^T B u' = B^T u_0 & \text{näherungsweise} \end{array}$$

so erkennt man, daß beide Verfahren als eine Approximation der überbestimmten Gleichung

$$B u' = u_0$$

jeweils mit verschiedenen Normen aufgefaßt werden können. Als wesentlichen Unterschied sieht man, daß die Bodensteifigkeit K nur in die vollständige Berechnungsweise eingeht. Die Näherungsmethode beruht dagegen nur auf der kinematischen Beziehung $u = B u'$ (11.5), so daß hier der Begriff kinematische Wechselwirkung einen doppelten Sinn erhält. Ursprünglich bezieht er sich nur darauf, daß von der Bauwerksseite keine Steifigkeiten und Trägheiten in die Berechnung eingehen.

11.2 Ergebnisse für ein Streifenfundament (schlankes Rechteck)

Die Rayleighwelle, die das Streifenfundament (Bild 11.1) entlangläuft, erzeugt Horizontalverschiebungen in x -Richtung (Ausbreitungsrichtung), Vertikalverschiebungen und Drehungen um die y -Achse (Kippen). Diese Fundamentantworten sind in Bild 11.2 jeweils auf die Anregungsamplitude bezogen über die Frequenz aufgetragen.

Für die beiden Translationsbewegungen ergeben sich fast identische Bilder: Jeweils bei knapp 10, 20 und 30 Hz werden die Fundamentantworten nahezu null. Bei diesen Frequenzen stimmt gerade die Wellenlänge oder ein Vielfaches von ihr mit der Länge des Fundaments überein und die verschiedenphasigen Anregungen der einzelnen Fundamentpunkte löschen sich gegenseitig aus. Zwischen diesen Nullstellen ergeben sich relative Amplitudenmaxima, die mit größer werdender Frequenz kleiner werden. Die größte Antwort ist bei 0 Hz gerade so groß wie die Anregung.

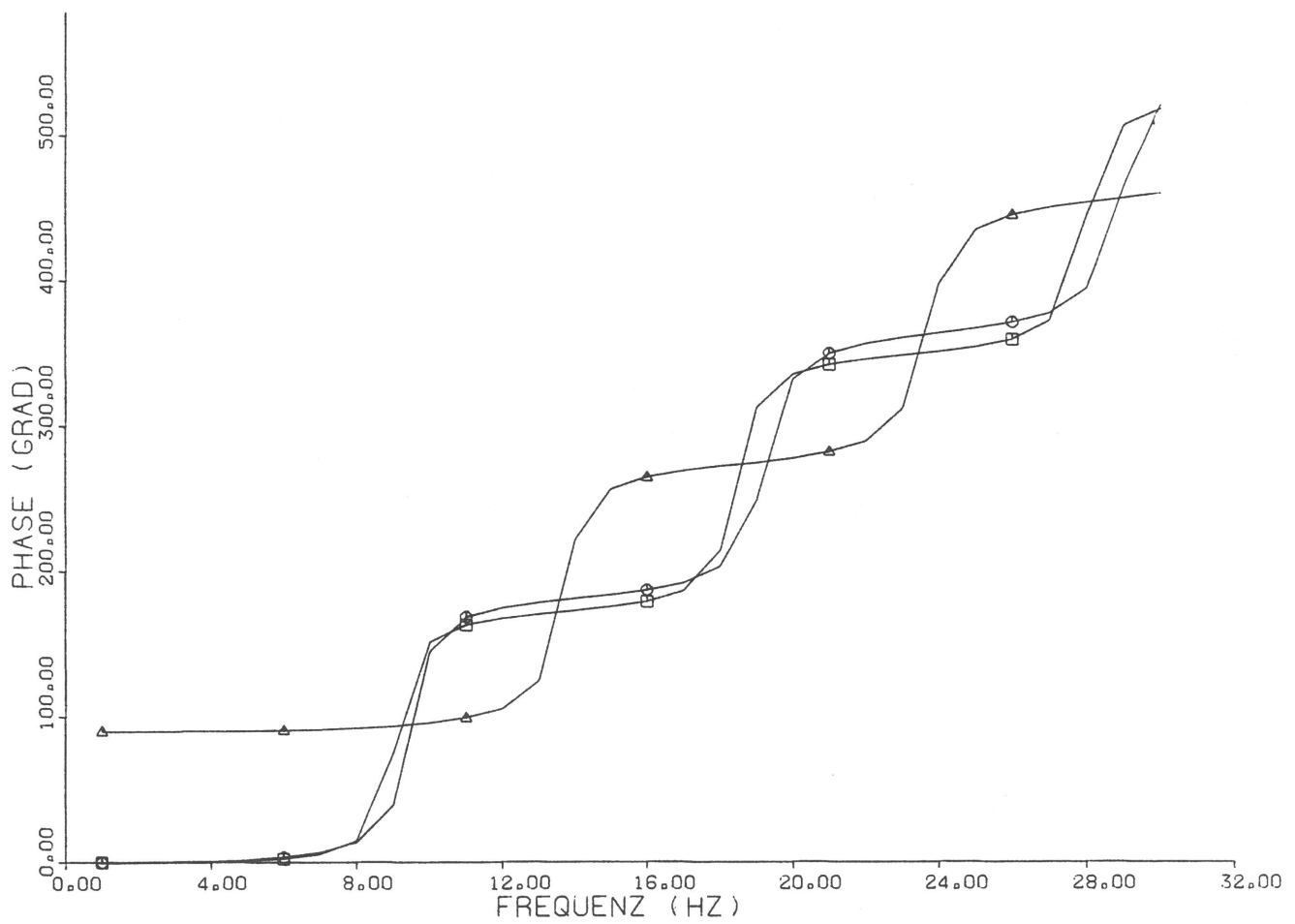
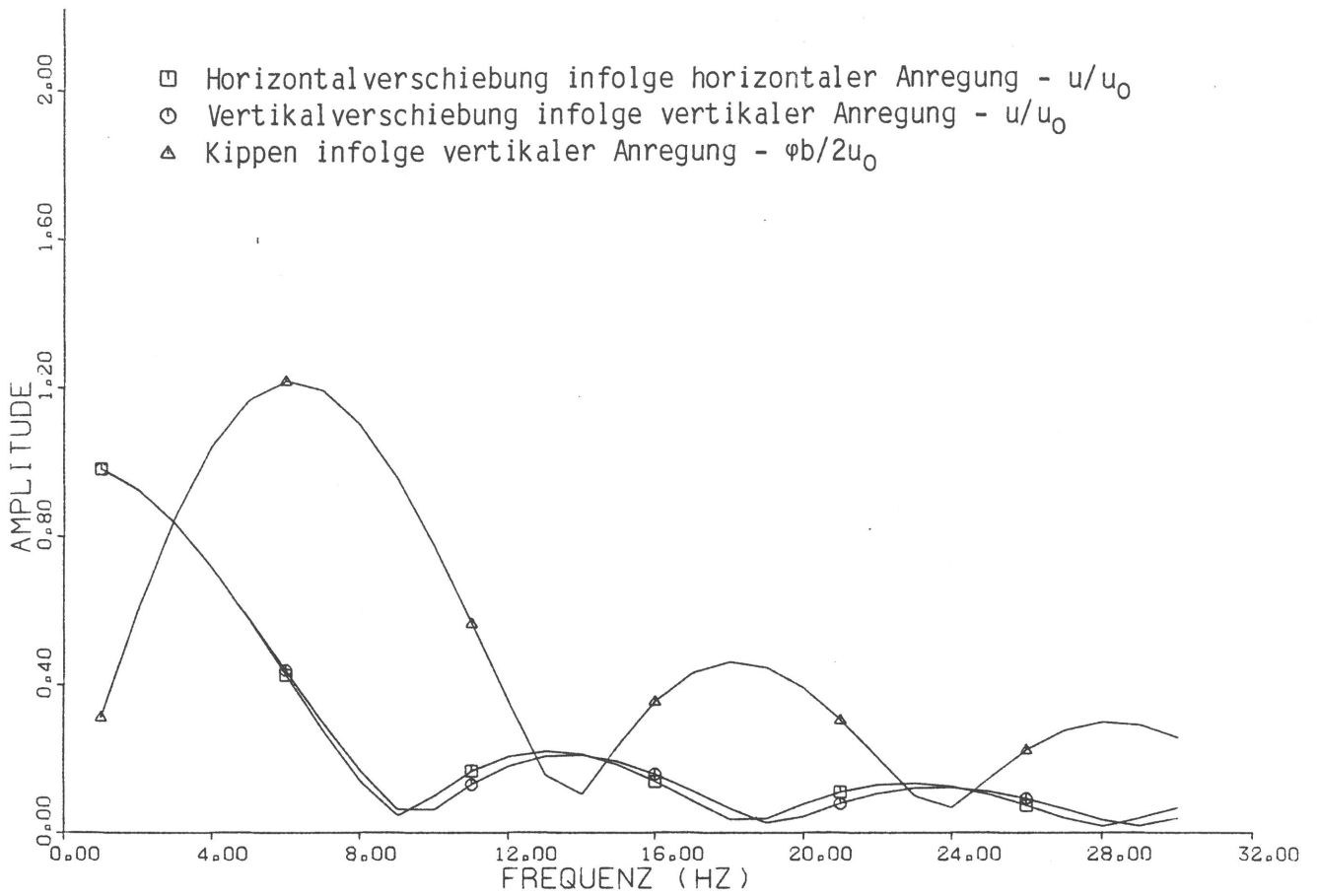


Bild 11.2 - Verschiebungs- und Kippantwort eines starren Fundaments auf eine Wellenfeldanregung

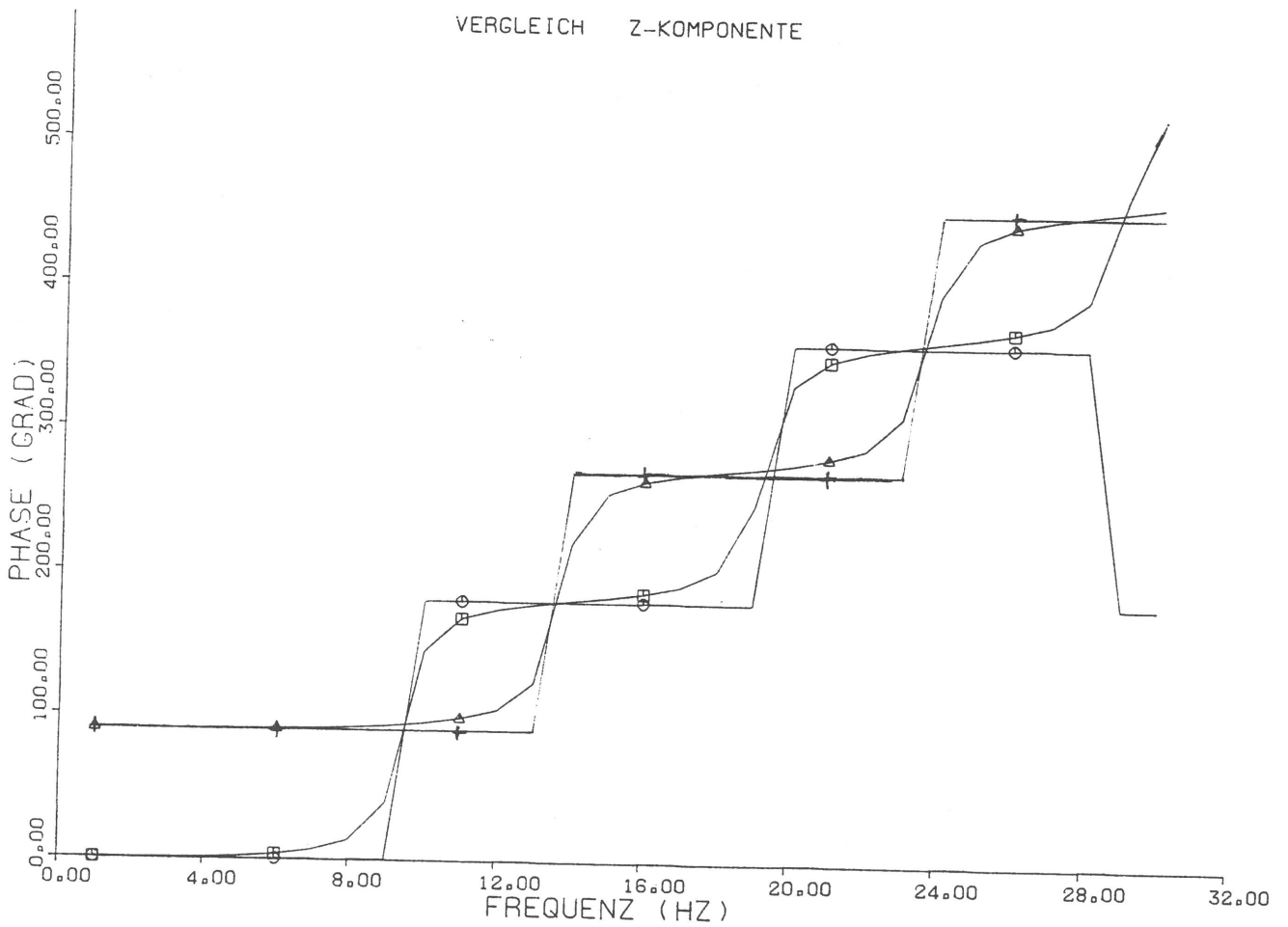
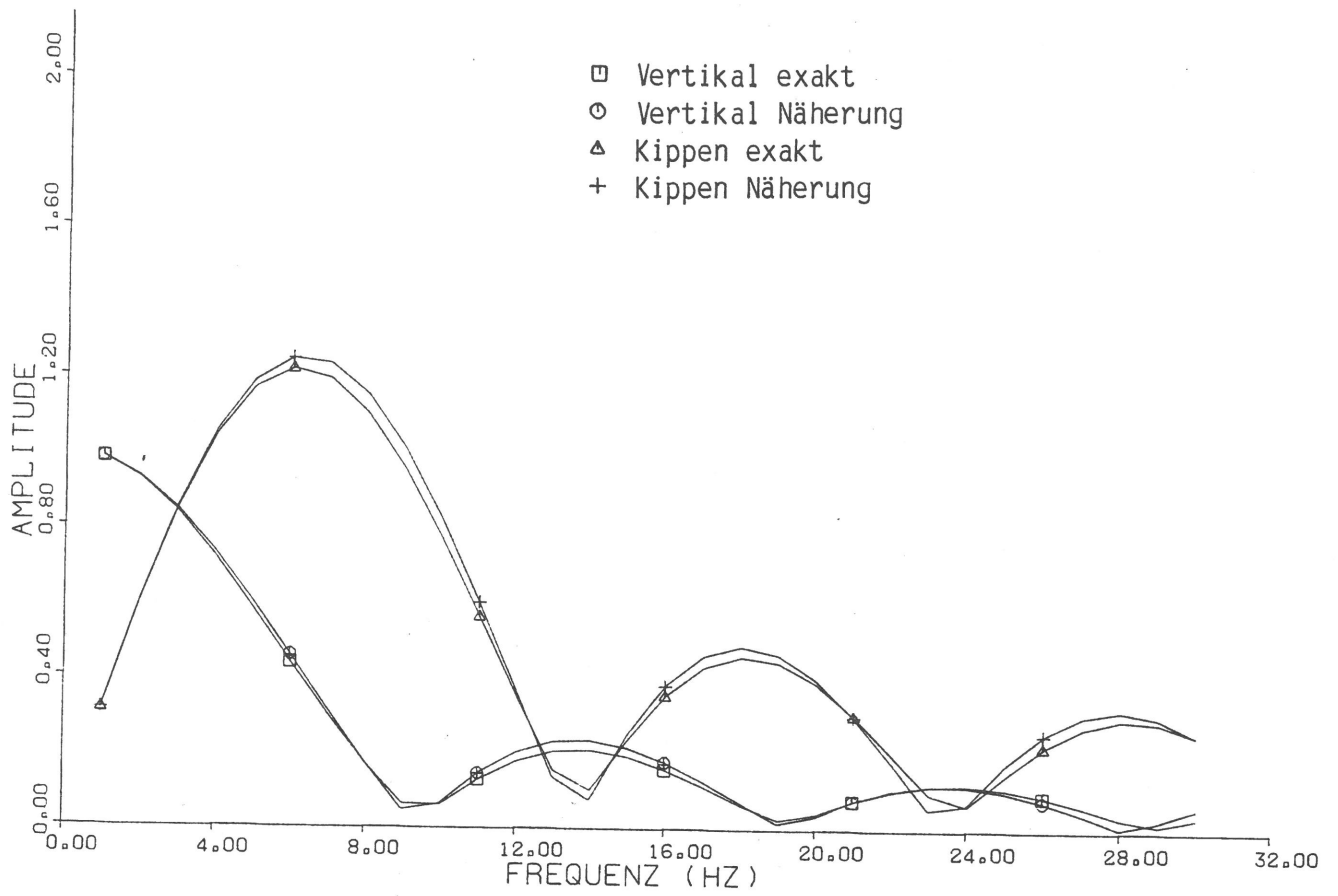


Bild 11.3 - Vergleich der exakten und näherungsweise Berechnung

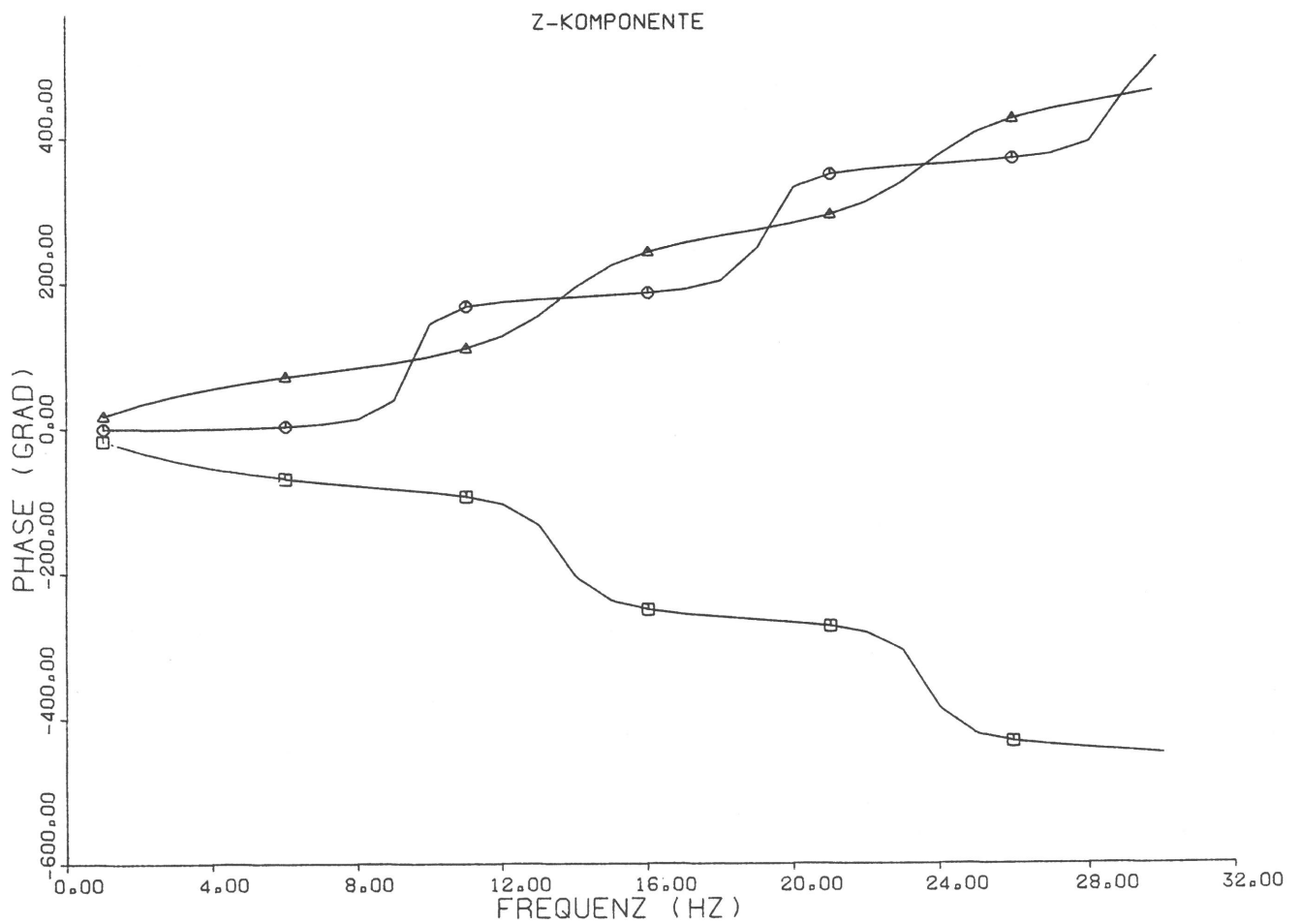
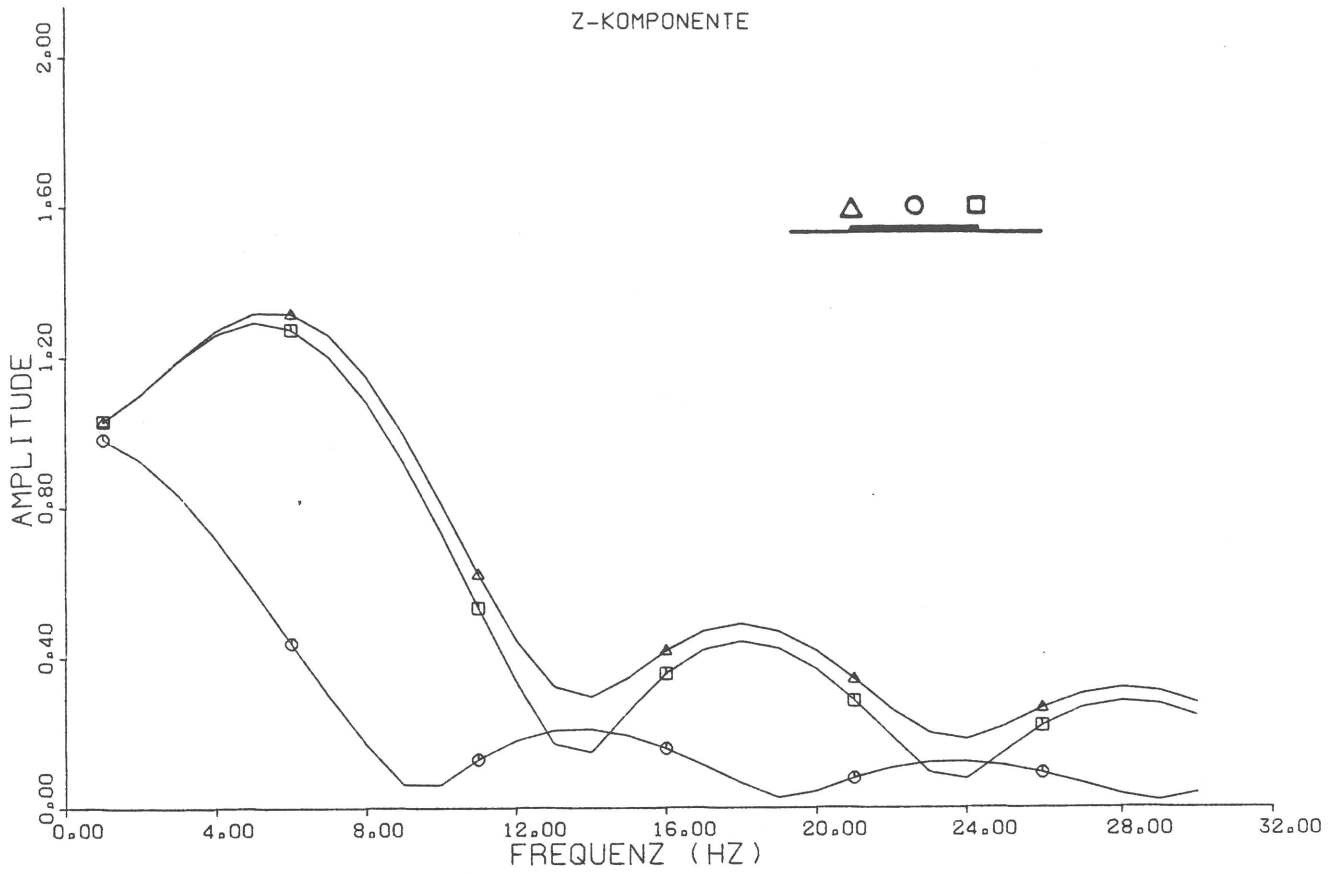


Bild 11.4 - Übertragungsfunktionen einiger Punkte eines starren Fundaments

Während die Horizontalkomponente der Rayleighwelle nur eine Horizontalverschiebung des Fundaments bewirkt, erzeugt die Vertikalkomponente neben der Vertikalverschiebung außerdem eine Drehung. Diese Drehung ist zunächst bei $f = 0$ Hz, das bedeutet zugleich phasengleiche Anregung aller Fundamentpunkte, noch nicht vorhanden. Sie erreicht ein Maximum bei etwa 7 Hz, wenn das Fundament von etwa zwei Drittel einer Wellenlänge angeregt wird ($b \approx 2/3\lambda$). Für höhere Frequenzen folgen Nullstellen und relative Maxima im Wechsel, wobei die Maxima mit der Frequenz kleiner werden und in etwa bei den Nullstellen der Translationsantwort auftreten.

Bild 11.3 zeigt zum Vergleich die Ergebnisse der näherungsweisen Berechnung. Die Unterschiede zur vollständigen Berechnung sind sehr gering. Bei der Näherungsrechnung treten die Phasenbeziehungen noch deutlicher hervor. Es treten bei jedem Freiheitsgrad nur Phasensprünge von 180° , also Vorzeichenwechsel auf und zwischen Vertikalbewegung und Kippen besteht immer eine Phasendifferenz von 90° .

Bild 11.4 zeigt die Vertikalverschiebungen am Fundamentanfangs-, -mittel- und -endpunkt, die sich aus der Überlagerung der Translation und des Kippens ergeben. Diese Überlagerung ist aufgrund der Phasendifferenz von 90° immer verstärkend. Das Kippen des Fundaments beinhaltet nach außen hin zunehmende Vertikalverschiebungen mit dem Maximalwert $u(x=b/2) = \varphi b/2$, der Wert, der auch in Bild 11.2 aufgetragen ist. Insgesamt ergeben sich also an den Fundamentenden die größten, in der Fundamentmitte, die vom Kippen unbeeinflusst ist, die kleinsten Amplituden. Für den Mittelwert der Verschiebungen aller Fundamentpunkte kompensieren sich die Nullstellen und Maxima von Kippen und Translation jeweils wechselseitig, so daß eine mittlere Übertragungsfunktion Fundament-Freifeld eher gleichmäßig, mit der Frequenz abnehmend verlaufen würde.

Bei der vollständigen Berechnung weist der hintere Fundamentrand etwas kleinere Amplituden als der vordere auf. Dies kann als eine Auswirkung der Sekundärwellen, die von den Fundamentkräften im Boden erzeugt werden und die nur bei der vollständigen Berechnung berücksichtigt sind, interpretiert werden.

11.3 Diskussion der Einflußgrößen

Die Ergebnisse für das Streifenfundament lassen sich in mehrfacher Hinsicht verallgemeinern. Im letzten Abschnitt zeigte es sich, daß das Näherungsverfahren ausreichend zur Bestimmung der kinematischen Wechselwirkung ist. Da

in das Näherungsverfahren nur die Geometrie des Fundaments einget, fallen eine Reihe von Parametern als unwesentlich weg: die Bodenparameter μ , ρ , ν und die Verschiebungsrichtung der Anregung. Weiterhin hängt die Näherungslösung nicht von der Fundamentbreite ab.

Man kann die Näherungslösung explizit angeben: Der diskreten Gleichung

$$u' = (B^T B)^{-1} B^T u_0$$

entspricht die kontinuierliche Beschreibung

$$u = \int_{-b/2}^{+b/2} u_0(x) dx / b$$

$$\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} x u_0(x) dx / \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx \quad . \quad (11.8)$$

Mit der Wellenanregung

$$u_0(x) = u_0 e^{-i\omega x/v}$$

ergeben sich dazu die Lösungen

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\sin \bar{b}}{\bar{b}}$$

$$\frac{\varphi}{u_0} = \frac{3i}{\bar{b}} \left(\cos \bar{b} - \frac{\sin \bar{b}}{\bar{b}} \right) \quad \text{mit } \bar{b} = \frac{b\omega}{2v} \quad (11.9)$$

die bereits in Bild 11.3 dargestellt sind. Ersetzt man dort die Frequenz durch das Verhältnis der Fundamentlänge zur Wellenlänge der Anregung, so sind die Ergebnisse auf andere Fundamente und andere Wellenanregungen übertragbar. In dieser Form ist das Ergebnis auch für beliebig breite Rechteckfundamente gültig.

Die Näherungslösung (11.9) gilt auch für eine Horizontalanregung in y-Richtung (quer zur Ausbreitung) etwa durch Transversalwellen. Dabei wird ebenfalls eine Rotation, die Rotation um die z-Achse angeregt.

12. Die Wechselwirkung starrer Strukturen mit dem Boden

12.1 Systemgleichung, Eigenfrequenzen und Eigenformen

In Erweiterung der Problemstellung der kinematischen Wechselwirkung werden nun auch die Trägheitseigenschaften einer starren Struktur auf dem Boden (Bild 12.1) mitberücksichtigt. Zur Steifigkeitsbeziehung des Bodens, das heißt der starren Fundamentfläche

$$K' u' = p' \quad \text{bzw.} \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}_B \\ \underline{m}_B \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

(vergleiche Abschnitt 8.1) ist die "Steifigkeitsbeziehung" der starren Struktur hinzuzufügen. Benutzt man dabei die Fundamentverschiebung \underline{u} und die Drehung $\underline{\varphi}$, so ergibt einerseits der Impulssatz

$$m(\ddot{\underline{u}} + \ddot{\underline{\varphi}} \times \underline{x}_S) = \underline{p}_S \quad (12.2)$$

und andererseits der Drallsatz bezüglich des bewegten Fundamentpunktes

$$\theta_F \ddot{\underline{\varphi}} + \underline{x}_S \times m \ddot{\underline{u}} = \underline{m}_S \quad (12.3)$$

wobei m die Masse und θ_F der Trägheitstensor ist. Für harmonische Schwingungen und mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} M_{11} &= m I \\ M_{22} &= \theta_F \\ M_{12} &= -m I \times \underline{x}_S \\ M_{21} &= m I \times \underline{x}_S \end{aligned} \quad (12.4)$$

schreibt sich Gleichung (12.2) und (12.3)

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}_S \\ \underline{m}_S \end{bmatrix}, \quad (12.5)$$

und die Addition der Gleichungen (12.1) und (12.2) ergibt die Systemgleichung

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{m} \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Als Anregung können auch die resultierenden Ersatzkräfte einer Freifeldanregung gemäß (6.27) bzw. (11.2)

$$p_0' = B^T K u_0$$

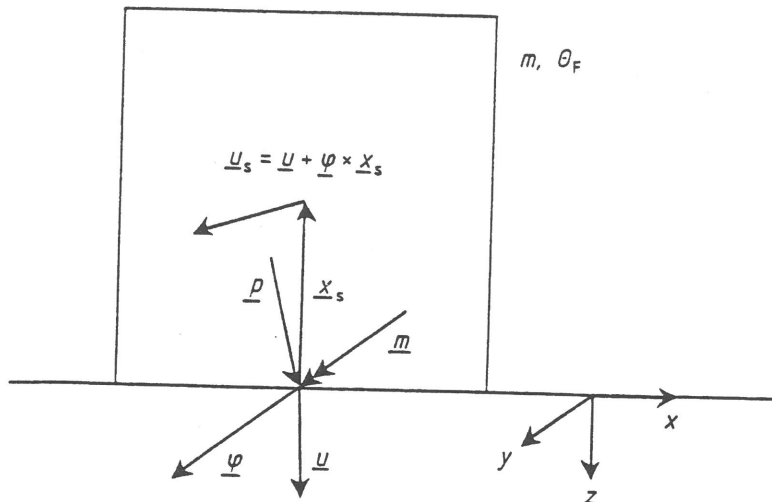


Bild 12.1 -
Starre Struktur auf dem Boden

1. Eigenform

2. Eigenform

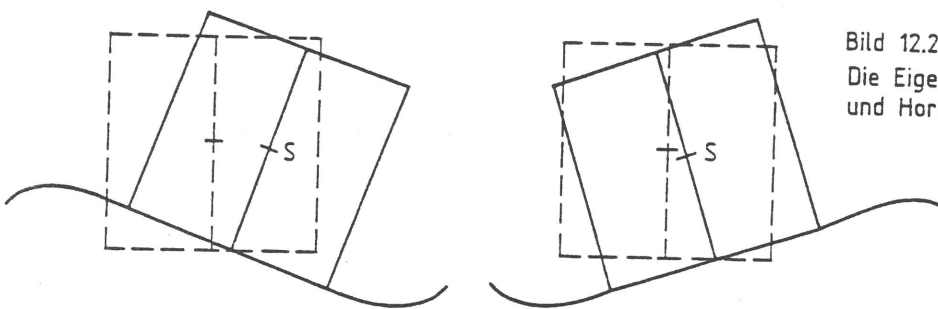


Bild 12.2 -
Die Eigenformen der gekoppelten Kipp-
und Horizontalbewegung

wirken. Mit der Lösung u_0' der kinematischen Wechselwirkung

$$K' u_0' = p_0'$$

läßt sich Gleichung (12.6) auch in der Form

$$(-\omega^2 M + K') u' = K' u_0' \quad (12.7)$$

schreiben.

In dieser allgemeinen Formulierung können verschiedenste Kopplungen zwischen den einzelnen Freiheitsgraden auftreten. Beschränkt man sich jedoch auf den hier hauptsächlich interessierenden Fall, daß die Koordinatenrichtungen nach den Symmetrieachsen des Bauwerks und des Fundaments orientiert sind, so sind die Massen- und die Steifigkeitsmatrizen fast von Diagonalgestalt. Sowohl die Fundamentsteifigkeit (vergleiche Abschnitt 8.1) als auch die Bauwerksträgheit - wegen der Hauptachsenform von θ_F und wegen $\underline{x}_S = -h_S \underline{e}_z$ - enthalten nur die Kopplungen zwischen Horizontal- und Kippbewegung. Man hat entkoppelte Schwingungen für die vertikale Translation und Rotation, und die gekoppelten Gleichungen für die Horizontal- und Kippbewegung lauten zum Beispiel für u_x und φ_y

$$(-\omega^2 \begin{bmatrix} m & -mh_S \\ -mh_S & \theta_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{UU} & k_{U\varphi} \\ k_{\varphi U} & k_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} u_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ m_y \end{bmatrix}, \quad (12.8)$$

Die Kopplung durch die Bauwerksträgheit nimmt mit der Höhenlage h_S des Schwerpunkts zu. Für einen quadratischen Bauwerksquerschnitt (wie in Bild 12.1 dargestellt) mit homogener Massebelegung ist zum Beispiel das Verhältnis der Koppelglieder gegenüber den Diagonalelementen der Massenmatrix etwa 80 %, womit eine starke Kopplung vorliegt.

Über die sechs Eigenfrequenzen einer starren Struktur auf dem Boden läßt sich grob folgendes sagen:

- Für eine flache Struktur, zum Beispiel ein massebehaftetes Fundament, sind alle - in diesem Fall entkoppelten - Eigenfrequenzen ungefähr gleich groß.
- Für ein Bauwerk mit $h_S \neq 0$ sind einerseits die "entkoppelten" Kippeigenfrequenzen $\omega_\varphi = \sqrt{k_{\varphi\varphi} / \theta_F}$ kleiner als die übrigen Eigenfrequenzen, andererseits schiebt die Kopplung noch zusätzlich die "Kipp"- und die "Horizontal"-eigenfrequenzen auseinander. Die zugehörigen Eigenformen enthalten jeweils sowohl einen Kipp- als auch einen Horizontalanteil, wobei sich diese Anteile in der tieferen Eigenfrequenz verstärken, in der höheren abmindern. In Bild 12.2 sind diese Eigenformen als Prinzipskizze dargestellt und man könnte von einer durch die Horizontalbewegung verstärkten Kippschwingung bei der niedrigen Eigenfrequenz und von einer durch das Kippen abgeschwächten Horizontalschwingung bei der höheren Eigenfrequenz sprechen.

12.2 Starre Strukturen unter Wellenfeldanregung

Es wird eine Wand, die auf dem in Abschnitt 11.2 behandelten Streifenfundament mit den Abmessungen 20 m x 0,2 m steht, bei Anregung durch eine Rayleighwelle betrachtet. Die Bodenparameter

$$\mu = 8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33$$

stimmen ebenfalls mit dem Beispiel 11.2 überein. Die Masse und die Massenverteilung der Struktur wird variiert.

Zunächst wird, um die entkoppelten Eigenfrequenzen zu erkennen, die Masse (50 t, 200 t, 600 t) in der Fundamentebene $z=0$ konzentriert. Bild 12.3 zeigt die Ergebnisse, für jeden der drei Fälle jeweils die Horizontal- und Vertikalamplitude normiert auf die anregende Freifeldamplitude. Das Kippen wird durch die Vertikalamplituden der Fundamentendpunkte erfaßt. Wegen der Entkopplung der Freiheitsgrade sind die Ergebnisse für jeden Freiheitsgrad einfach als Produkt der (als Ergebnis der kinematischen Wechselwirkung vor-

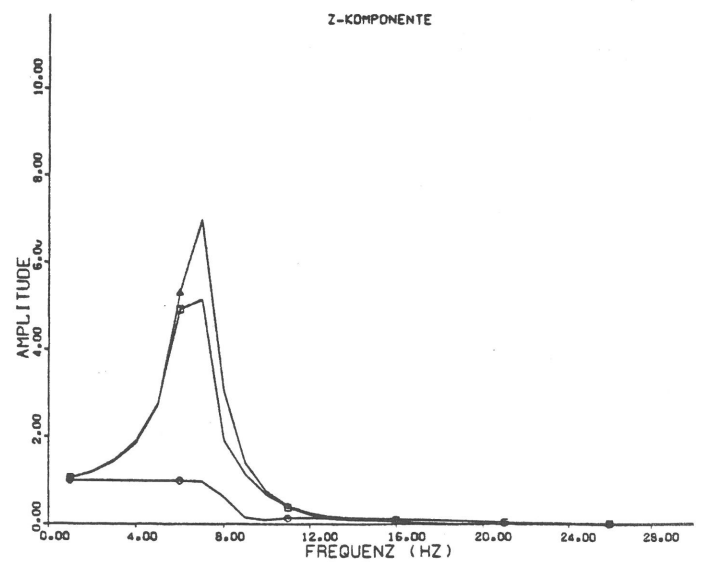
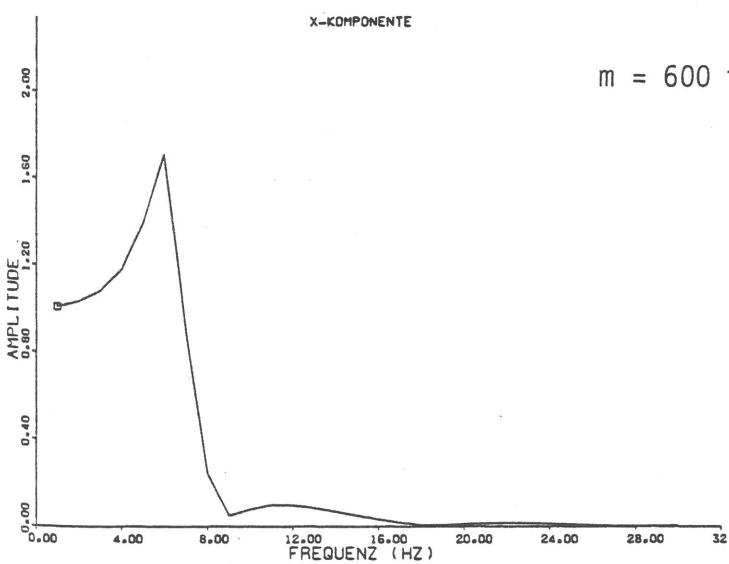
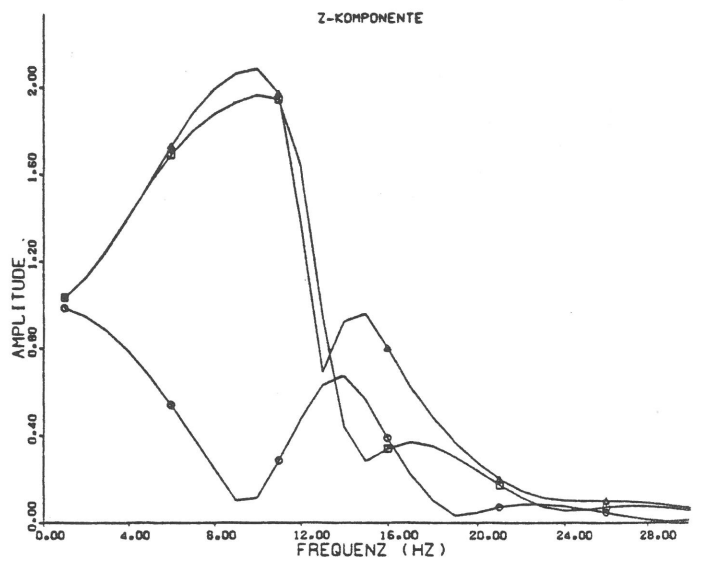
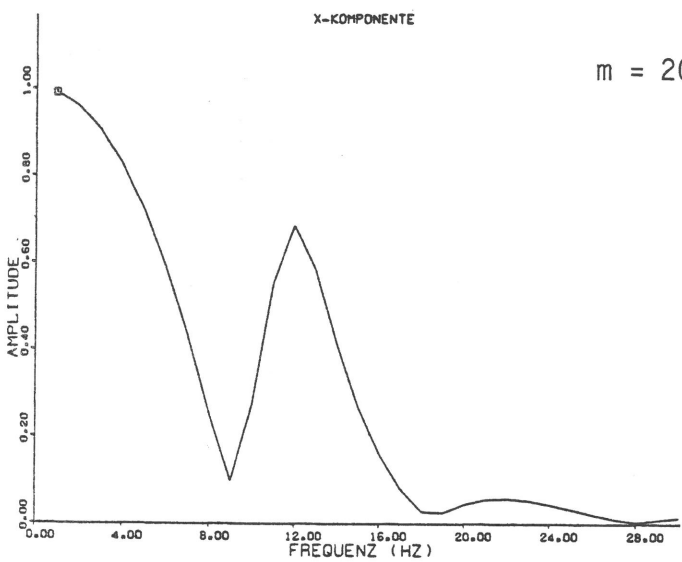
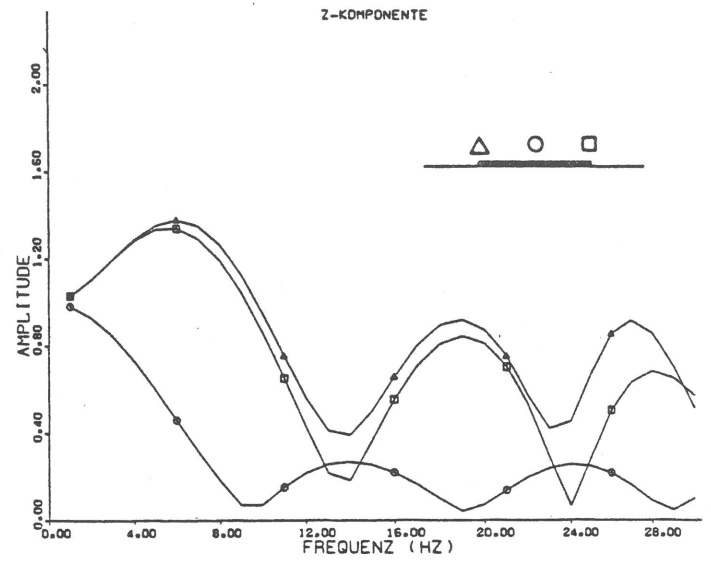
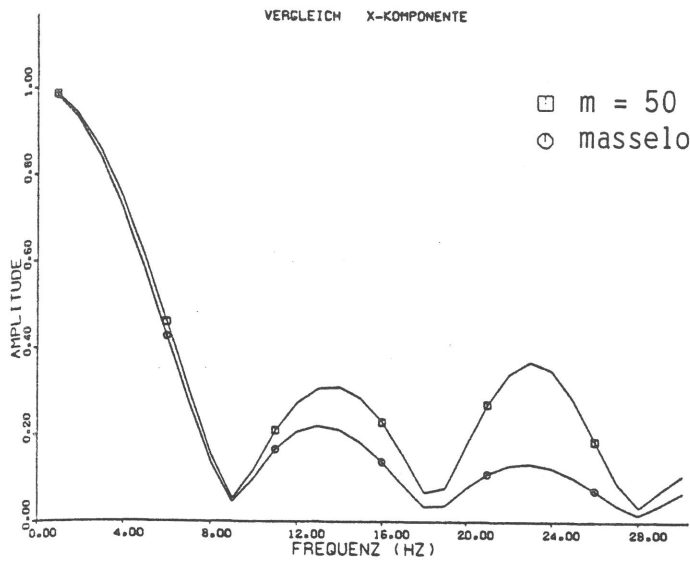


Bild 12.3 - Übertragungsfunktionen starrer Strukturen (entkoppelt) bei horizontaler (links) und vertikaler (rechts) Wellenfeldanregung, Variation der Masse

liegenden) resultierenden Starrkörperanregung u_0' und der Übertragungsfunktion eines Ein-Massen-Schwingers unter Fußpunktanregung

$$\frac{u}{u_0} = \frac{k(\omega)}{k(\omega) - m\omega^2} \frac{u_0'}{u_0} = V(\omega) \frac{u_0'}{u_0}$$

darstellbar. Dies kann am Ergebnis für $m = 50 \text{ t}$ und horizontale Anregung (Bild 12.3 oben links) verfolgt werden, da dort auch die resultierende Anregung dargestellt ist. Bei der kleinen Masse von 50 t erkennt man deutlich die charakteristische Verteilung von Minima und Maxima wieder, wie sie bereits beim masselosen starren Fundament (Bild 11.4) beobachtet wurde. Die Amplituden des massebehafteten Fundaments sind allerdings etwas (maximal um das Dreifache) größer als beim masselosen Fundament. Dies liegt daran, daß im betrachteten Frequenzbereich zwischen 25 und 30 Hz die Starrkörpereigenfrequenzen der Struktur liegen. Bei der leichten Struktur sind die relativ hohen Eigenfrequenzen durch die Abstrahlung in den Boden stark gedämpft, so daß die Resonanzanregung zusammen mit der Wellenfeldausmittelung durch das starre Fundament insgesamt keine Amplitudenüberhöhung gegenüber der Freifeldanregung ergibt.

Für die größeren Massen reduzieren sich die Eigenfrequenzen auf etwa 13 Hz ($m = 200 \text{ t}$) und 8 Hz ($m = 600 \text{ t}$). Dabei nimmt der Dämpfungsgrad der Resonanzen ab, am stärksten beim Kippfreiheitsgrad. Da auch die Starrkörperanregung bei den tieferen Frequenzen größer ist, treten die Resonanzen insgesamt im Verhältnis Bauwerk-Freifeld deutlicher hervor als bei der leichten Struktur. Dies gilt insbesondere für die Kippresonanz, die bei der größten Masse (600 t) mit $f = 7 \text{ Hz}$ gerade auf einen Bereich großer Anregung fällt und die gegenüber dem Freifeld um bis zu siebenfach erhöhte Vertikal-amplituden erzeugt.

Betrachtet man nun die quadratische Wand mit homogener Massenbelegung, so sind Vertikal- und Horizontalbewegung gekoppelt. Sowohl eine vertikale wie eine horizontale Wellenanregung führt zu Kippbewegungen, bei der vertikalen Anregung aufgrund der Kinematik des Wellendurchlaufs, bei der horizontalen Anregung wegen der Trägheitskopplung. Mit der Kippbewegung ergeben sich in der Struktur Vertikal- und Horizontalamplituden, die sich den Fundamentmittelpunktsverschiebungen überlagern. Die Bilder 12.4 und 12.5 zeigen diese Amplituden für die Wandmassen $m = 200 \text{ t}$ und $m = 600 \text{ t}$. Bei der Horizontal Komponente infolge vertikaler Anregung (Bild 12.4 oben rechts) erkennt man bei $f = 5 \text{ Hz}$ und $f \approx 19 \text{ Hz}$ die beiden Eigenformen der gekoppelten Horizontal- und Kippfreiheitsgrade. Die entsprechenden Frequenzen liegen für $m = 600 \text{ t}$ bei $f = 3 \text{ Hz}$ und $f \approx 10 \text{ Hz}$. Bei der ersten dieser beiden Eigenfrequenzen tritt jeweils die größte Amplitudenüberhöhung gegenüber dem

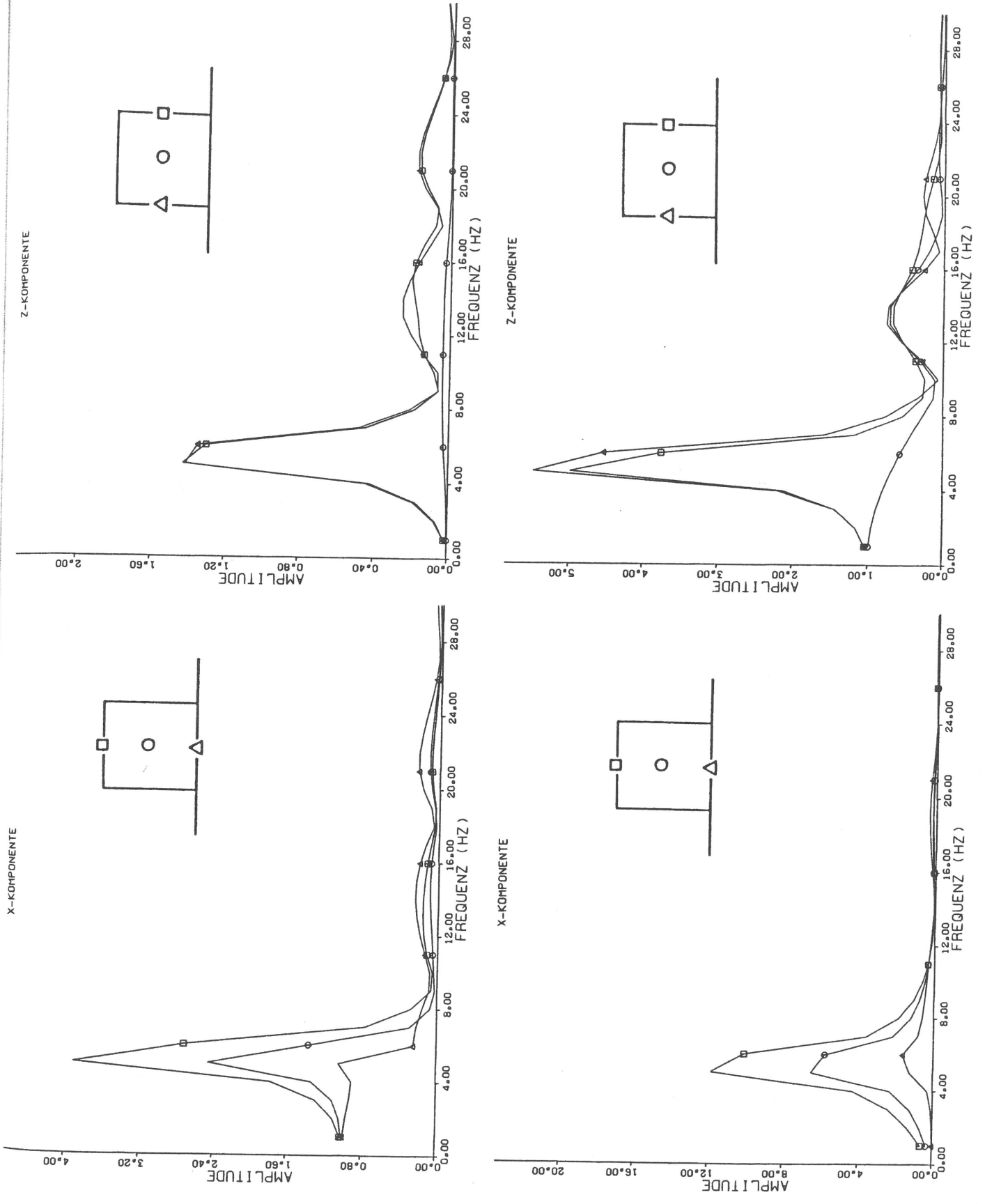


Bild 12.4 - Übertragungsfunktionen einer starren Wand ($m=200t$) bei horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Wellenfeldanregung

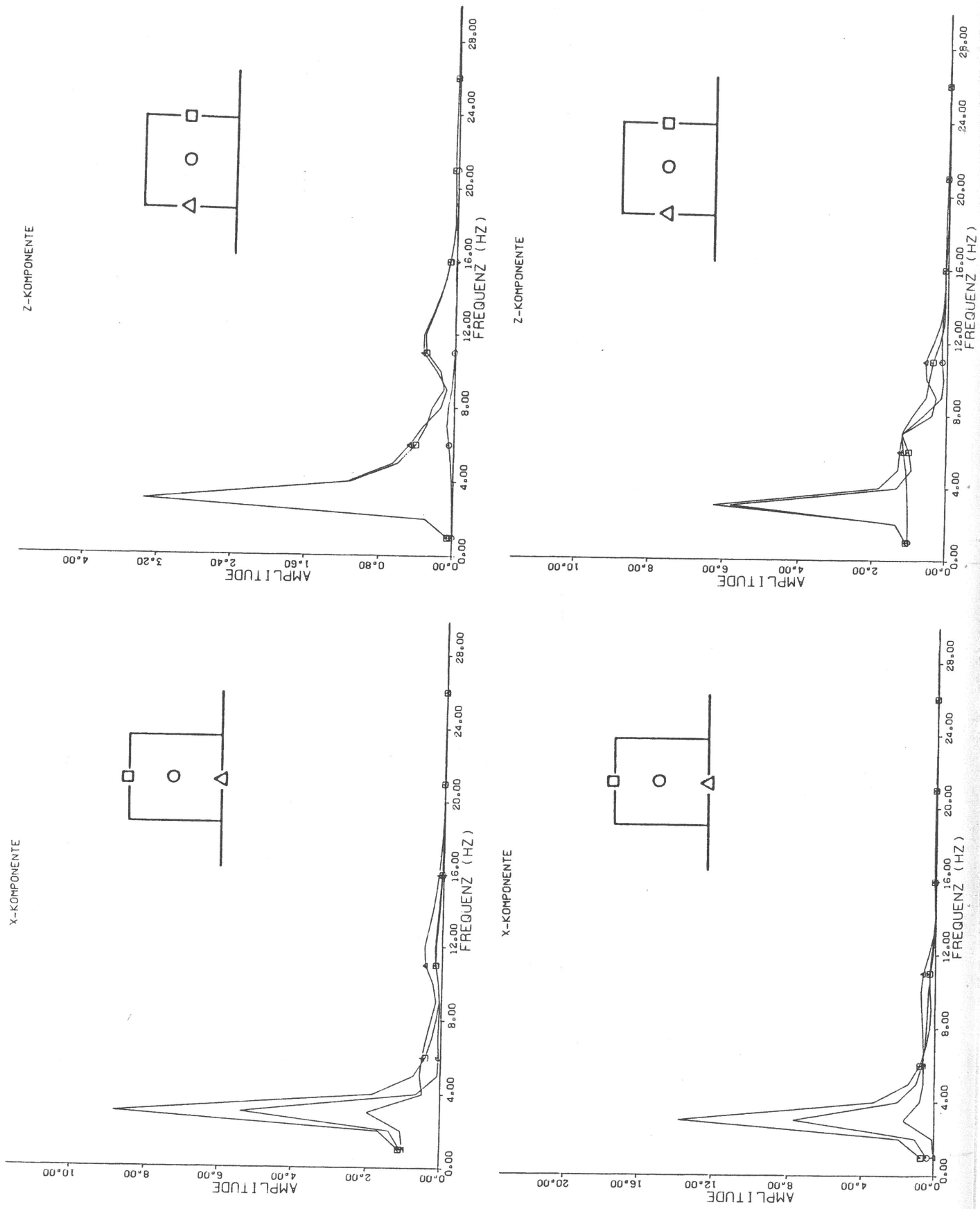


Bild 12.5 - Übertragungsfunktionen einer starren Wand ($m=600t$) bei horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Wellenfeldanregung

Freifeld auf. Da die Bauwerksbewegung in dieser Frequenz überwiegend aus einer Drehung um in etwa den Fundamentmittelpunkt besteht, tritt das Maximum in der Horizontalkomponente am höchsten Punkt $z = -h$ auf, während die Vertikalamplituden bei $x = \pm b/2 (= \pm h/2)$ nur ungefähr halb so groß sind. Die Verstärkungen sind bei vertikaler Wellenanregung stärker als bei horizontaler Wellenanregung und bei der großen Masse stärker als bei der kleineren Masse.

Die Amplituden sind für Frequenzen oberhalb der drei Starrkörpereigenfrequenzen wegen der Trägheit der starren Massen sowohl gegenüber dem Freifeld als auch gegenüber der kleineren resultierenden Anregung u_0' stark abgemindert. Oberhalb von 20 Hz sind die Amplituden in der Regel kleiner als ein Zehntel der Freifeldanregung.

Als Fazit zur Wellenanregung starrer Strukturen (Abschnitt 11 und 12) läßt sich festhalten:

- Es gibt eine Abminderung der Freifeldamplituden durch die starre Fundamentfläche.
- Es gibt eine Verstärkung der Amplituden im Bereich der Bauwerk-Boden-Eigenfrequenzen. Insbesondere die Kippresonanz bei hohen Bauwerken tritt deutlich hervor.
- Für höhere Frequenzen bewirkt die Bauwerksträgheit eine zusätzliche Abminderung gegenüber der Freifeldanregung des Bodens.

13. Die Wechselwirkung flexibler Strukturen mit dem Boden

Den Ergebnissen für starre Strukturen werden im folgenden Berechnungen flexibler Strukturen gegenübergestellt. Dabei interessiert insbesondere die Verformbarkeit innerhalb der Fundamentebene. Die bisher getroffene Annahme einer starren Fundamentfläche schränkt die Wellenbewegung des Bodens sehr stark ein. Eine reale Struktur setzt den verschiedenen Anregungen der Fundamentpunkte jedoch nur eine endliche Steifigkeit entgegen. Um den Einfluß der Flexibilität zu untersuchen, werden elastische Strukturen unter Wellenfeldanregung berechnet, die jeweils mit bestimmten starren Strukturen korrespondieren (siehe auch Bild 10.2).

Die Wechselwirkung der Steifigkeit des Bauwerks mit der Wellenanregung des Bodens läßt sich besonders deutlich an vereinfachten Modellen, an unendlich ausgedehnten gebetteten Strukturen, die sich noch analytisch erfassen lassen, beobachten. Die Diskussion dieser Modelle ist deshalb jeweils den vollständig durchgerechneten Strukturbeispielen vorangestellt.

13.1 Flache Strukturen (Fundamente)

13.1.1 Der unendlich lange gebettete Balken

Es wird ein vereinfachtes Modell für einen auf dem Boden aufliegenden unendlich langen Balken betrachtet. Der Widerstand des Bodens gegenüber Verschiebungen und Verformungen des Balkens wird durch eine Bettungszahl k gemäß

$$p' = k u \quad (13.1)$$

beschrieben, p' ist dabei die Kraft pro Länge. Diese Beschreibung gibt die Auflagerung des unendlich langen Balkens auf dem Halbraum korrekt wieder, wenn man sich auf harmonische Zustände

$$u = A e^{i(\omega t \pm \xi x)} \quad (13.2)$$

beschränkt und die Bettungszahl k als komplexe Funktion der Frequenz ω und der Wellenzahl ξ auffaßt. Für die vereinfachte Diskussion werden hier jedoch nur die Fälle

$$\begin{aligned} k &= \text{konst} && \text{elastische Bettung und} \\ k &= i \omega \text{ konst} && \text{viskose Bettung} \end{aligned} \quad (13.3)$$

betrachtet.

Die Differentialgleichung für den gebetteten Balken lautet

$$\rho F \ddot{u} + E J u'''' + k u = k u_0 \quad , \quad (13.4)$$

wobei als äußere Belastung die Erregung durch eine Freifeldverschiebung u_0 des Bodens eingesetzt ist.

Einen ersten Einblick in das Verhalten des gebetteten Balkens geben die homogenen Lösungen der Form

$$u = A e^{i(\omega t \pm \xi x)} \quad (13.5)$$

Für die Wellenzahl ξ ergibt sich aus der homogenen Differentialgleichung (13.4) die Bedingung

$$-\rho F \omega^2 + EJ \xi^4 + k = 0 \quad (13.6)$$

beziehungsweise

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{\rho F \omega^2 - k}{EJ}} \quad (13.7)$$

Für niedrige Frequenzen hat man vier komplexe Wellenzahlen

$$\xi = (\pm 1 \pm i) \xi_0 / \sqrt{2}$$

und für große Frequenzen zwei reelle und zwei rein imaginäre

$$\xi_{1,2} = \pm \xi_0 \quad \xi_{3,4} = \pm i \xi_0 \quad .$$

Sie nähern sich für ω gegen unendlich

$$\xi_0 \approx \sqrt[4]{\frac{\rho F \omega^2}{EJ}} = \sqrt[4]{\frac{\rho F}{EJ \omega^2}} \omega = \frac{\omega}{v_B} \quad (13.8)$$

den Wellenzahlen des freien Balkens mit der frequenzabhängigen Biegeschwindigkeit v_B an. Es ergeben sich demnach folgende homogene Lösungen: Bei hohen Frequenzen hat man die vom freien Balken bekannten Wellen und die exponentiellen "Nahfelder". Die Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho F}} \quad , \quad (13.9)$$

das ist die Eigenfrequenz des unverformten Balkens auf der elastischen Bettung, stellt eine Grenze dar. Für ω gegen ω_0 gehen die Wellenzahlen gegen Null beziehungsweise die Wellenlängen gegen unendlich. Unterhalb dieser Grenze sind die homogenen Lösungen abklingende Wellen, das bedeutet, daß die elastische Bettung die unbeschränkte Weiterleitung von Störungen verhindert. Je tiefer die Frequenz, desto kürzer ist die Reichweite. Für den statischen Fall hat man eine wellige, exponentiell abnehmende Verformungsfigur.

Betrachtet man nun als Freifeldanregung eine harmonische Welle

$$u_0 = A_0 e^{i(\omega t - \xi x)}$$

so lautet die inhomogene Lösung der Differentialgleichung (13.4)

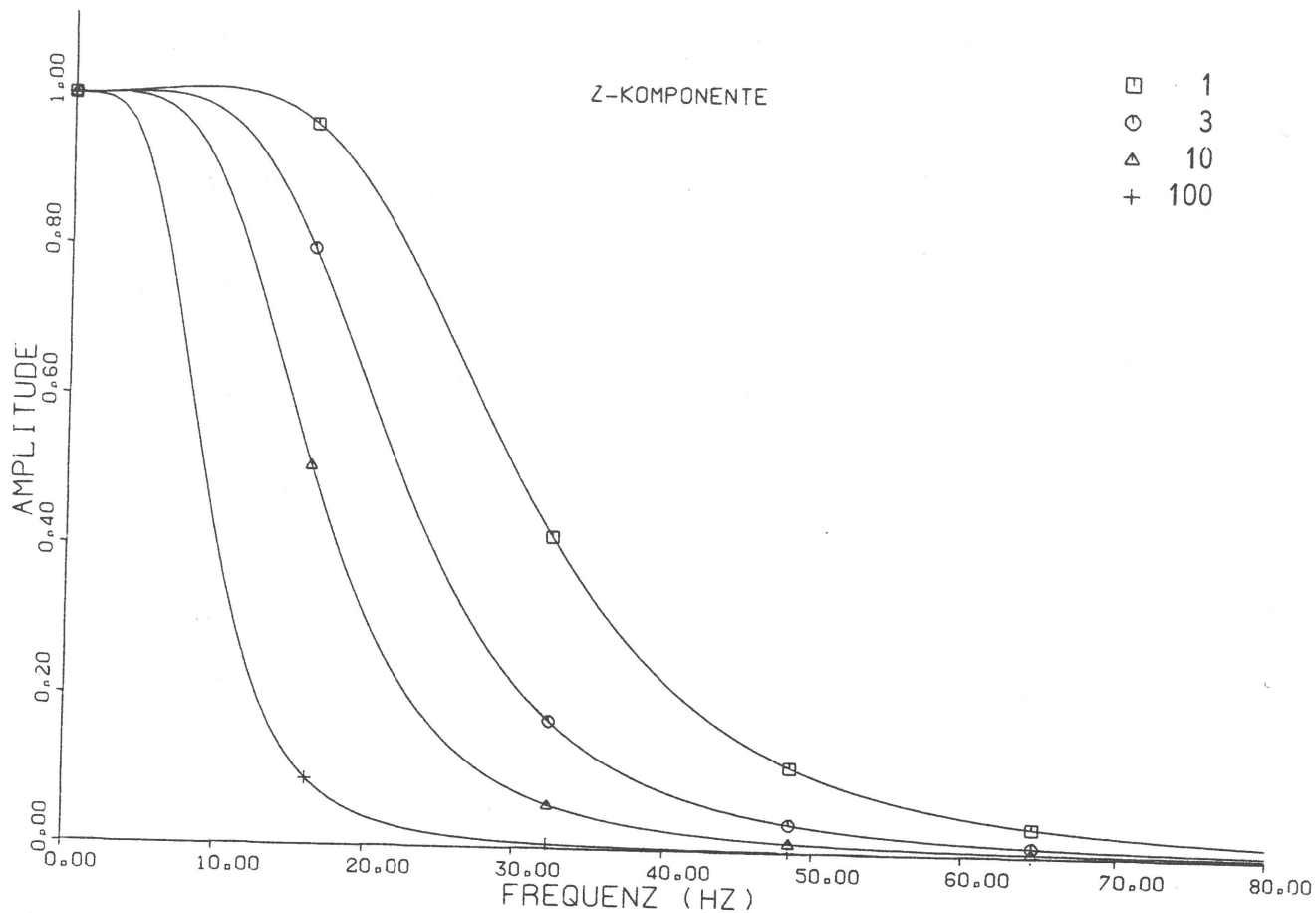


Bild 13.1 - Übertragungsfunktionen unendlicher gebetteter Balken,
 Parameter: Biegesteifigkeit EJ/E_0J_0

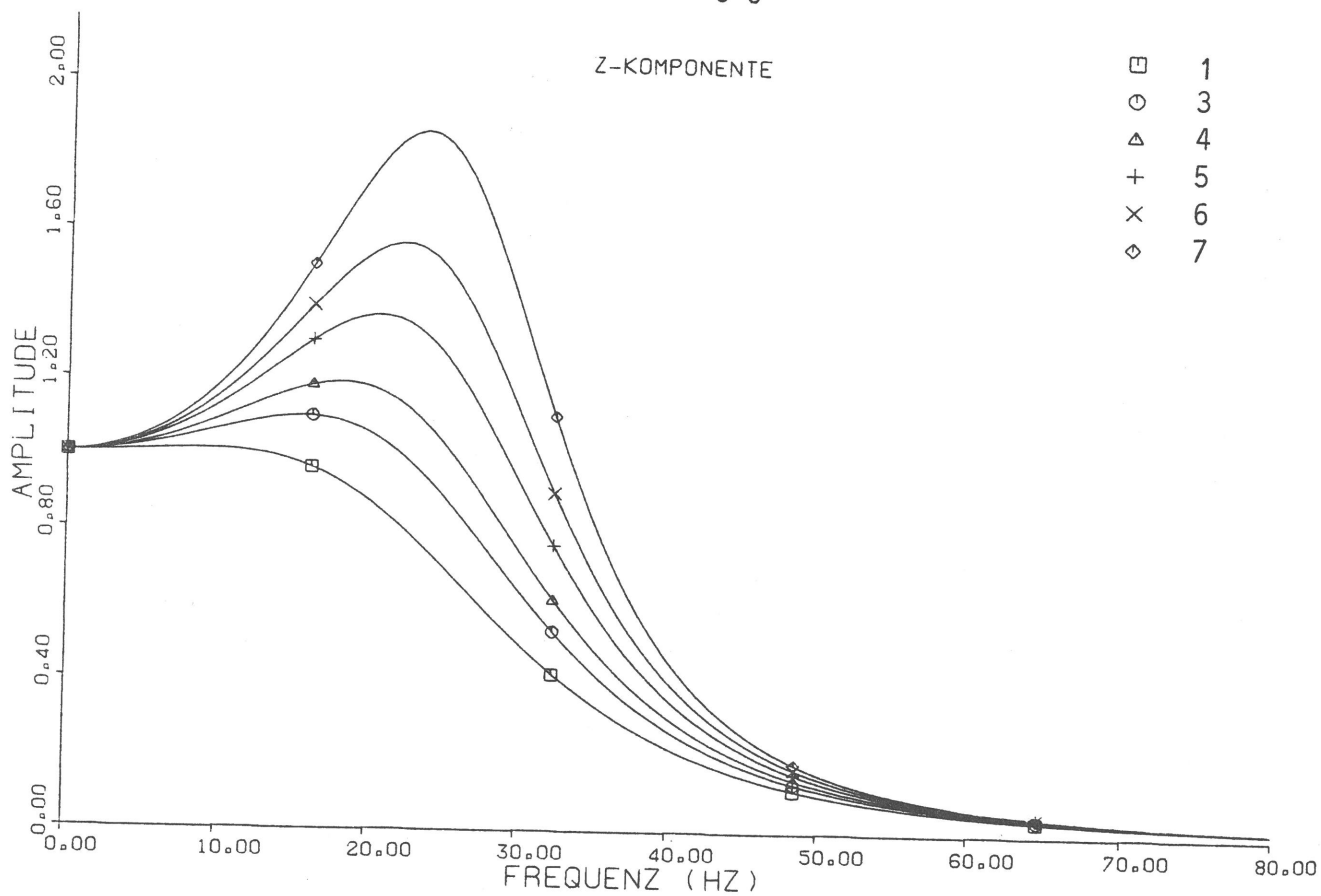


Bild 13.2 - Übertragungsfunktionen unendlicher gebetteter Balken,
 Parameter: Massenbelegung $\rho F/\rho_0 F_0$

$$u = A_0 \frac{k}{k + EJ\xi^4 - \rho F\omega^2} e^{i(\omega t - \xi x)} \quad (13.10)$$

und für das Amplitudenverhältnis gilt

$$\frac{u}{u_0} = \frac{k}{k + EJ\xi^4 - \rho F\omega^2} \quad (13.11)$$

Setzt man $\xi = \omega/v$ mit der Geschwindigkeit v der anregenden Welle ein, erhält man die frequenzabhängige Übertragungsfunktion, die in den Bildern 13.1 bis 13.3 für einige Parameterkonstellationen ausgewertet ist. Ausgangspunkt ist dabei ein Balken mit quadratischem Querschnitt auf einem Lockerboden:

$$\begin{aligned} \text{Balken: } a_0 &= 0,5 \text{ m (Breite),} \\ h_0 &= 0,5 \text{ m (Höhe),} \\ E_0 &= 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ \rho_0 &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \text{Boden: } v_0 &= 200 \text{ m/s,} \\ k_0 &= 10^8 \text{ N/m}^2. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Man erkennt, daß die Steifigkeit des Balkens (der Term $EJ\xi^4$ in Gleichung (13.11)) mit zunehmender Frequenz eine Reduzierung der Amplituden bewirkt (Bild 13.1). Die Trägheit (der Term $\rho F\omega^2$) bewirkt eine Verstärkung der Amplituden (Bild 13.2). Es gibt eine Frequenz ω_1 , bei der sich Steifigkeit und Trägheit genau kompensieren

$$\begin{aligned} EJ \frac{\omega^4}{v^4} &= \rho F \omega^2 \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}} v^2 \end{aligned} \quad (13.13)$$

Bei dieser Frequenz stimmen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Bodens und des freien Balkens überein ("Koinzidenz")

$$v_B^2(\omega_1) = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \omega_1 \stackrel{(13.13)}{=} v^2$$

Das Amplitudenverhältnis ist bei dieser Frequenz gleich eins

$$\frac{u}{u_0}(\omega_1) = \frac{k}{k} = 1$$

Bei der gleichzeitigen Variation von Steifigkeit und Trägheit (breitere Balken, Bild 13.3) ist dies als Fixpunkt gut zu erkennen. Bei größeren Frequenzen dominiert die Steifigkeit ($EJ\xi^4$)

$$\frac{u}{u_0}(\omega > \omega_1) < 1$$

bei kleineren Frequenzen dagegen die Trägheit ($\rho F\omega^2$)

$$\frac{u}{u_0} (\omega < \omega_1) > 1 \quad .$$

Das Maximum der Übertragungsfunktion liegt bei

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EJ}{2\rho F}} v^2 = \omega_1 / \sqrt{2} \quad (13.14)$$

und beträgt

$$\frac{u}{u_0} (\omega_2) = \frac{k}{k - \rho F \omega_2^2 / 2} = \frac{k}{k - \rho F \omega_1^2 / 4} \quad (13.15)$$

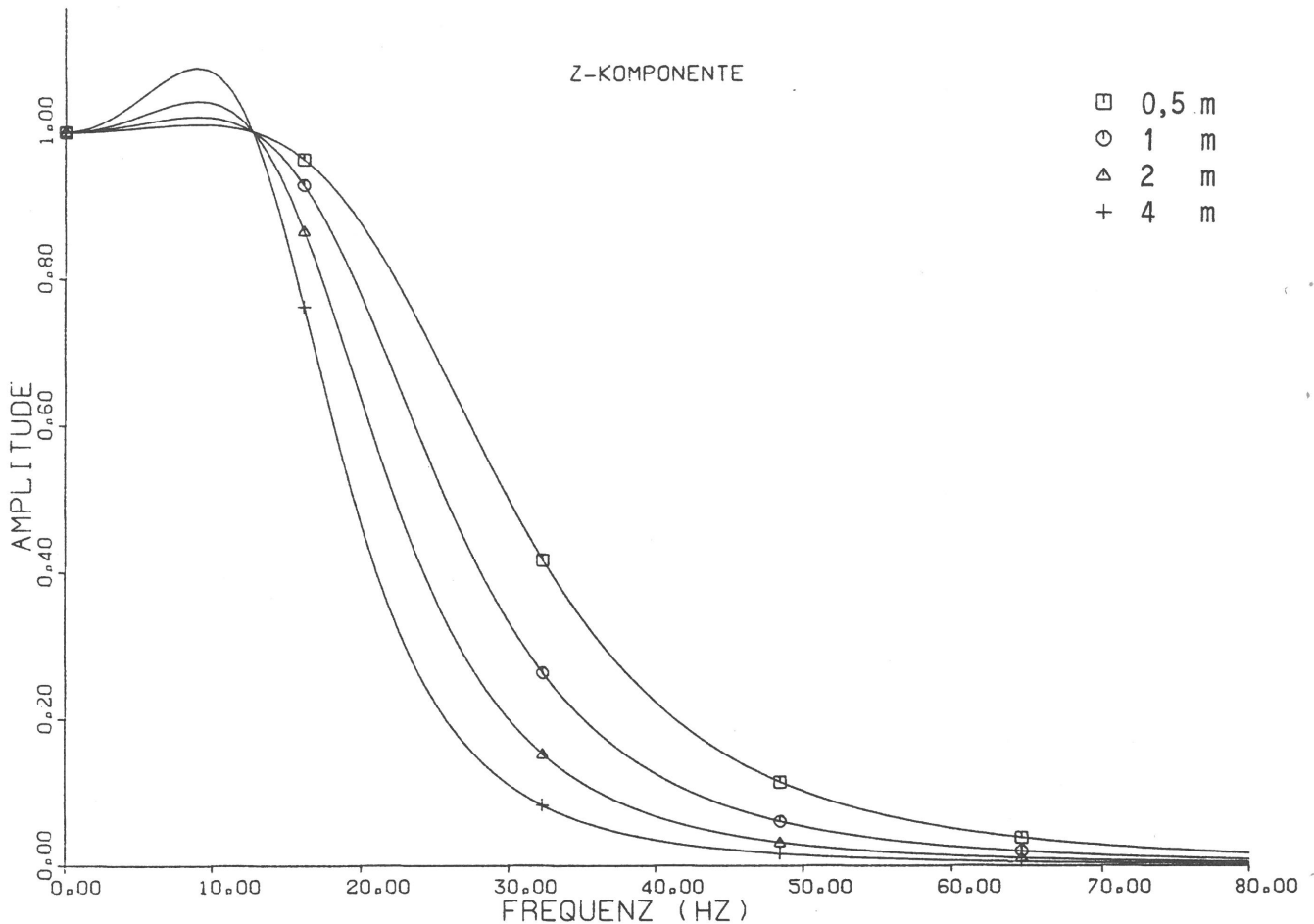


Bild 13.3 - Übertragungsfunktionen unendlicher gebetteter Balken,
Parameter: Balkenbreite a (entspricht gleichzeitiger
Variation von EJ und ρF)

Diese Ergebnisse gelten für einen unendlich langen Balken. Für einen endlich langen Balken überlagern sich dieser partikulären Lösung noch homogene Lösungen (Gleichung 13.5 f), die die Erfüllung der Randbedingungen, der Kräfte- und Momentenfreiheit an den Balkenenden gewährleisten. Diese "Randterme" haben im allgemeinen exponentiell zur Balkenmitte hin abnehmende Amplituden, so daß für einen mittleren Balkenbereich die partikuläre Lösung (13.10) unter Umständen allein maßgeblich ist.

13.1.2 Der endlich lange Balken auf dem Halbraum

Es wird ein 20 Meter langer Betonbalken auf Lockerboden bei Anregung durch eine Rayleighwelle berechnet (Daten siehe Gleichungen (13.12)). Die Lagerung auf dem Halbraum wird vollständig erfaßt.

Als Ergebnis sind zunächst die Amplitudenverteilungen (Bild 13.4) und die Schwingungsformen (Bild 13.5) für die Frequenzen 10, 20, ... 80 Hz dargestellt. Man bemerkt zunächst bei den Amplituden (Bild 13.4) die Überlagerung der exponentiell zur Balkenmitte hin abnehmenden Randterme und der gleichmäßigen partikulären Wellenlösung in Balkenmitte. Den Wellencharakter der partikulären Lösung erkennt man an den Schwingungsformen (Bild 13.5): Die Balkenverformungen enthalten wie die Anregung bei den Frequenzen 10, 20, ... 80 Hz jeweils 1, 2, ... 8 Wellenzüge.

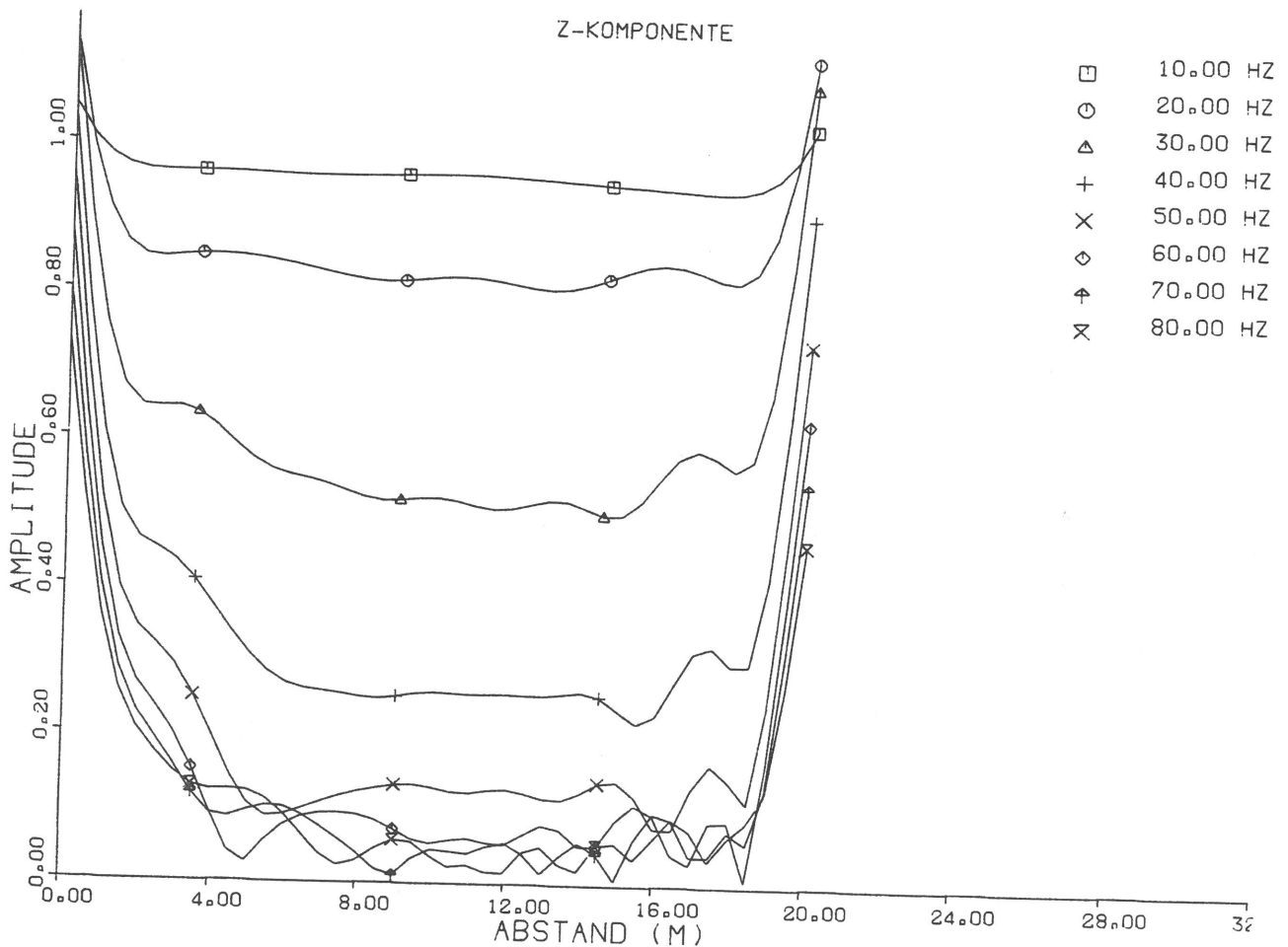


Bild 13.4 - Endlicher Balken unter Wellenfeldanregung:
Amplitudenverteilung über die Balkenlänge

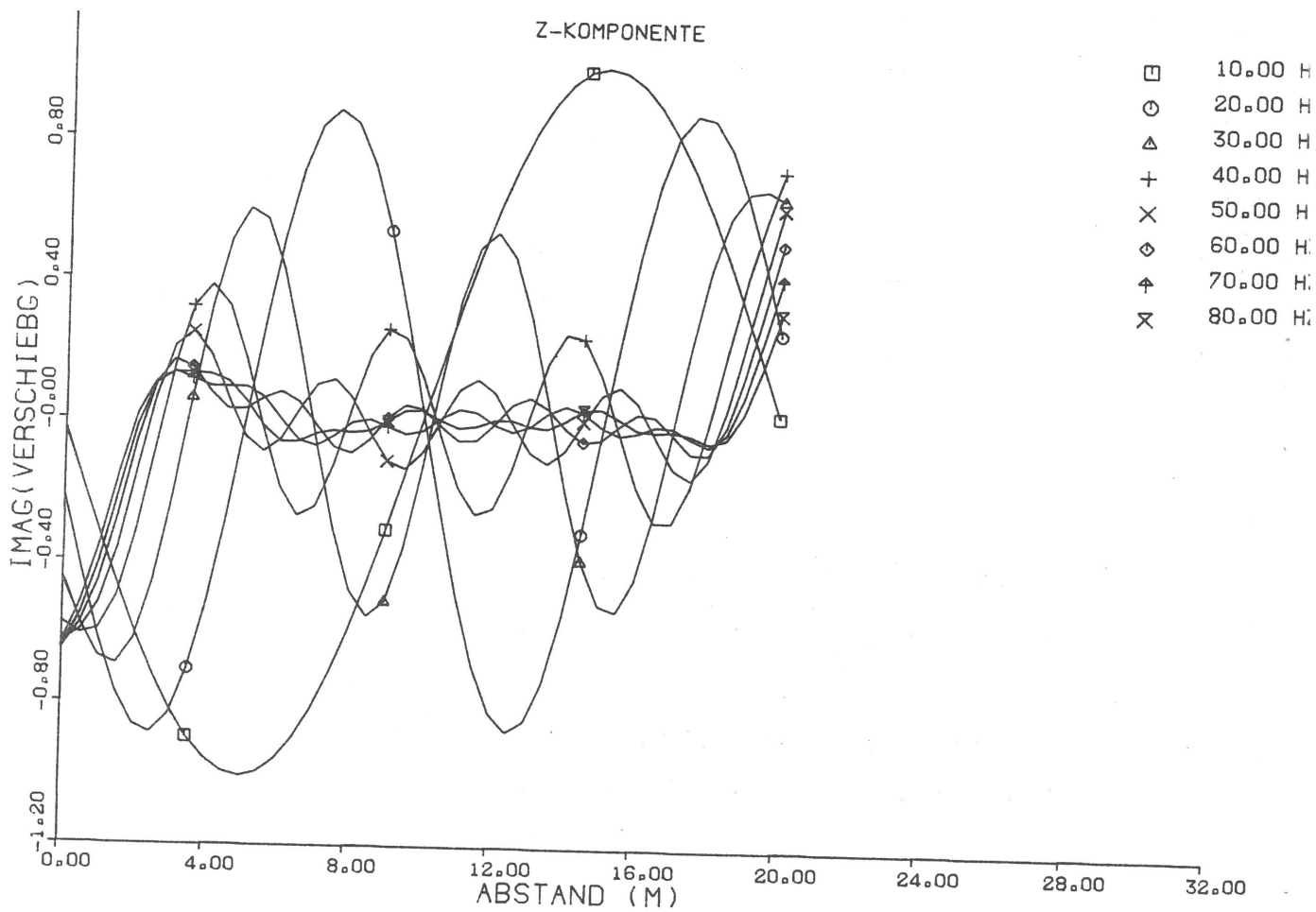
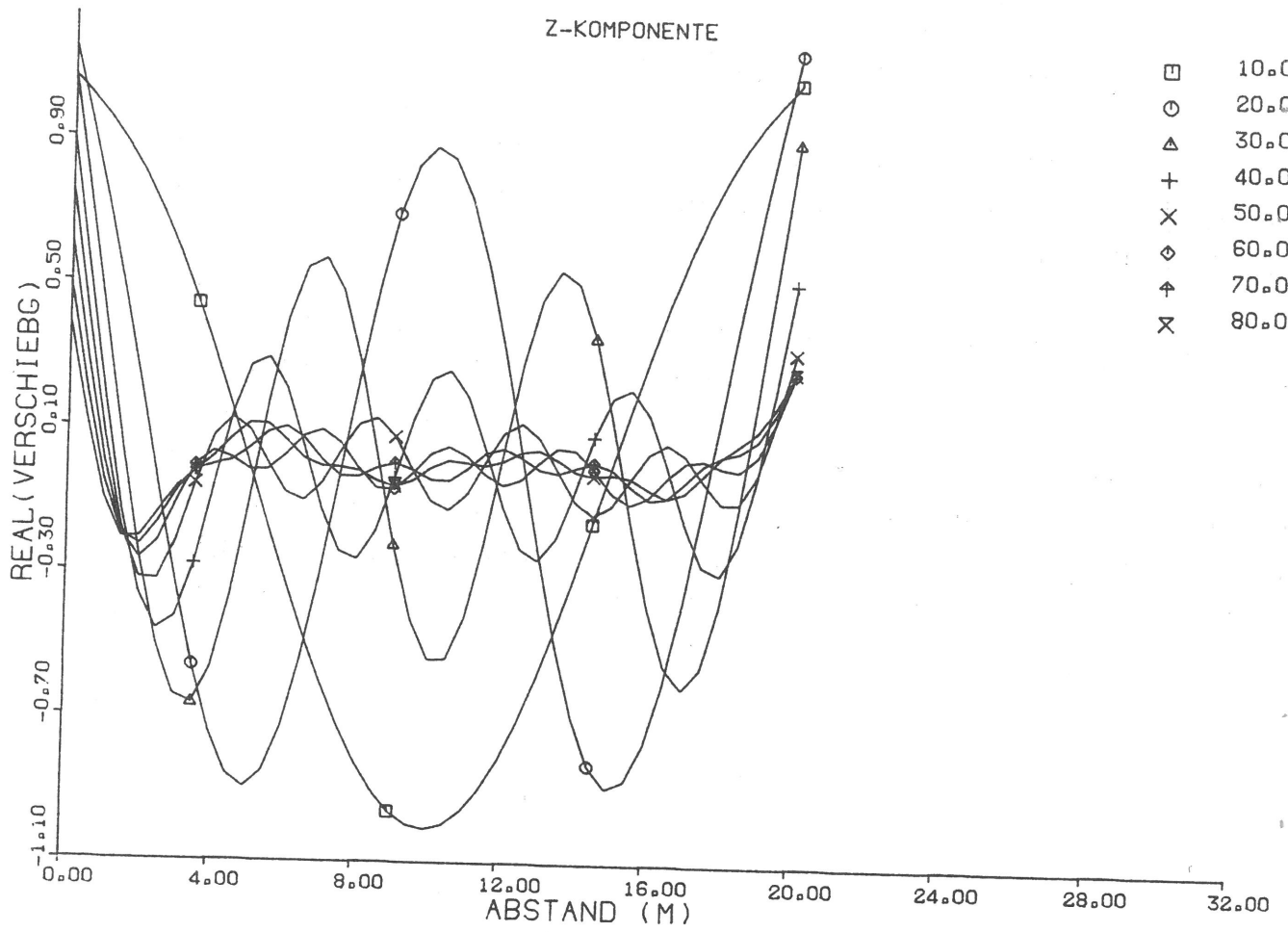


Bild 13.5 - Schwingungsformen eines Balkens unter Wellenfeldanregung

Zum Vergleich mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts 13.1.1 betrachtet man die charakteristischen Frequenzen

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\rho F}} \approx 70 \text{ Hz} \quad (\text{Eigenfrequenz des "starken" Balkens}),$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}} v^2 = 13 \text{ Hz} \quad (\text{"Koinzidenz"}),$$

$$f_2 = f_1 / \sqrt{2} = 9 \text{ Hz} \quad (\text{Maximum}).$$

(Das Maximum ist allerdings nur $u/u_0 = 1,01$.)

Die Eigenfrequenz f_0 spiegelt sich in den numerischen Ergebnissen für den endlichen Balken im durchgehend welligen Amplitudenverlauf wider. Die Reichweite der Randterme ist in dieser Frequenz sehr groß, so daß diese die partikuläre Wellenlösung auch in Balkenmitte überdecken. Eine Resonanz tritt allerdings nicht auf, da bei $f_0 = 70 \text{ Hz}$ die Dämpfung durch den Boden bereits sehr groß ist, Bodensteifigkeit und -dämpfung sind etwa gleich groß.

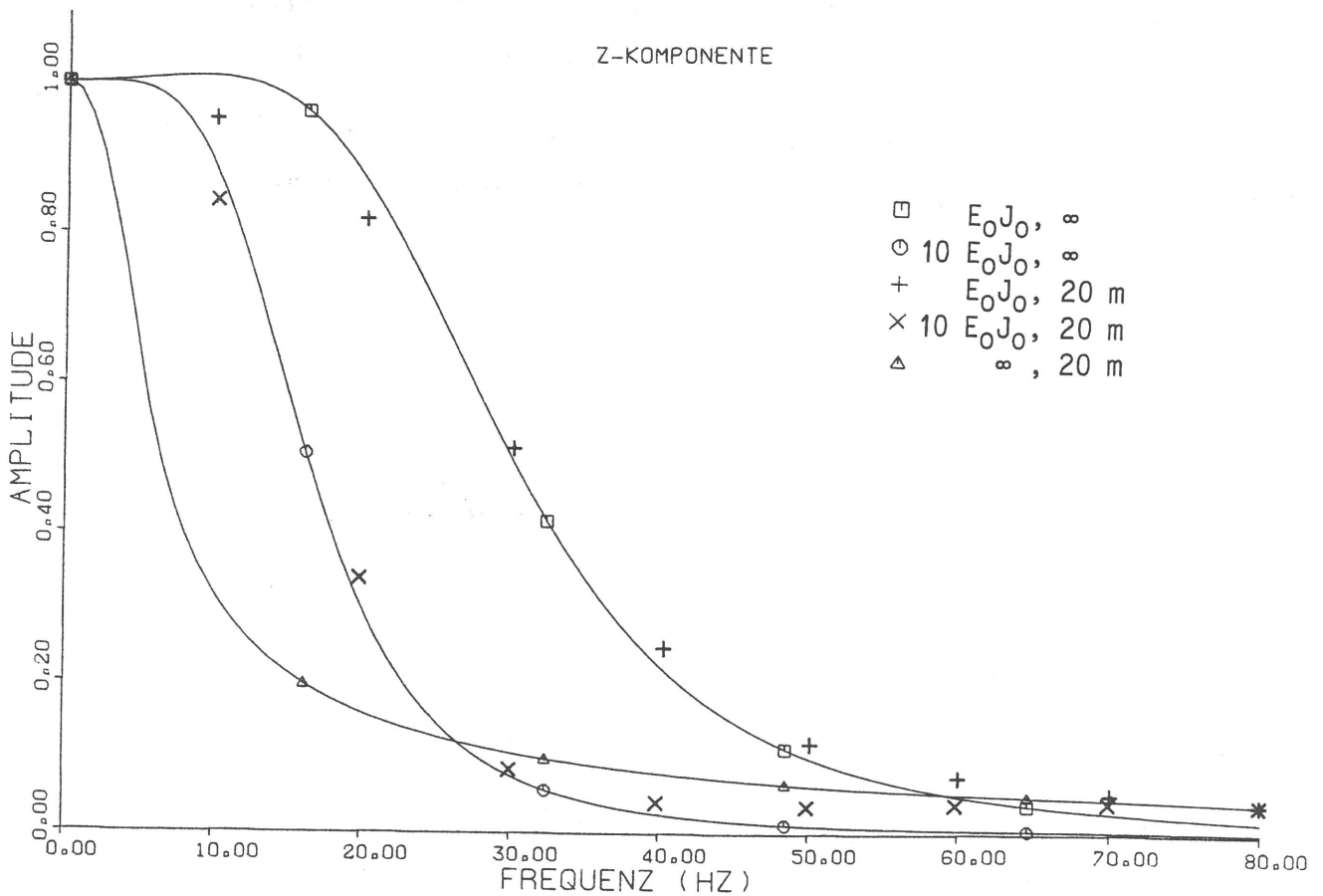


Bild 13.6 - Übertragungsfunktionen flacher Strukturen: endlich und unendlich lange Balken verschiedener Steifigkeit und starres Fundament (Einhüllende), Parameter: Biegesteifigkeit, Länge

Bild 13.6 zeigt die Amplituden in Balkenmitte für die Grundstruktur und für einen steiferen Balken mit $EJ = 10 E_0 J_0$. Zum Vergleich sind die Ergebnisse für den unendlich langen Balken und für ein starres Fundament der Länge

$b = 20$ m eingezeichnet. Die Abminderung der Amplituden ist beim starren Fundament bei tiefen Frequenzen zunächst stärker als bei den flexiblen. Die Amplituden des endlich langen Balkens folgen in diesem tiefen Frequenzbereich denen des unendlich langen Balkens. Für höhere Frequenzen sind die Amplituden von dem flexiblen und dem starren Balken etwa gleich groß, während der unendlich lange Balken die Amplituden noch stärker reduziert.

13.2 Niedrige Strukturen (Wandscheiben)

Es wird eine niedrige Wand aus Beton mit den Abmessungen

$h = 5$ m (Höhe),

$b = 20$ m (Länge),

$a = 0,2$ m (Dicke),

$m = 50$ t (Masse)

unter Rayleighwellenanregung untersucht. Bild 13.7 zeigt als Ergebnis die Vertikalamplituden am vorderen, mittleren und hinteren Fundamentpunkt.

Man erkennt einerseits eine ähnlich Charakteristik wie in Bild 12.3 für eine der Wand entsprechende starre Masse, die als Überlagerung einer Trans-

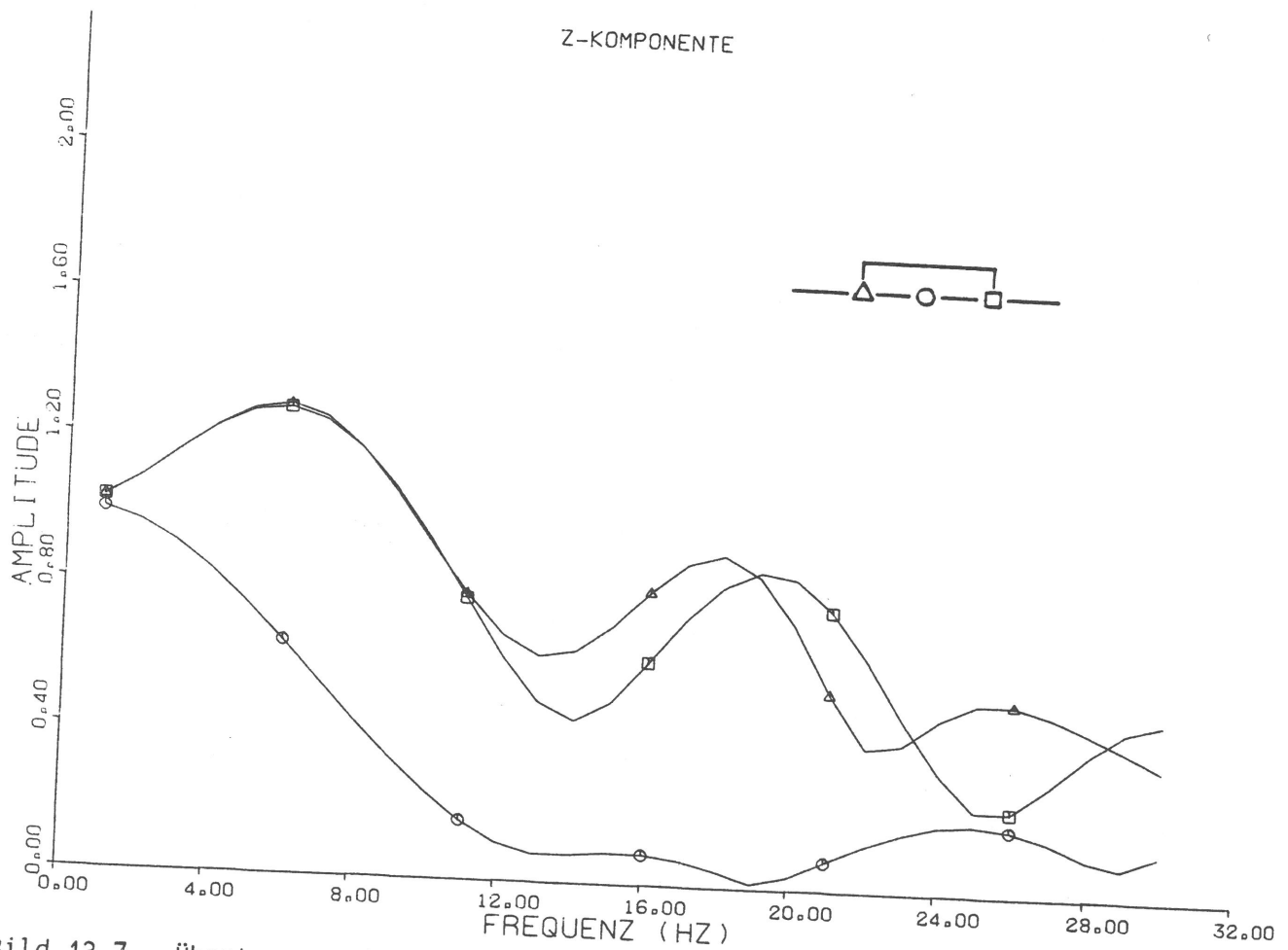


Bild 13.7 - Übertragungsfunktionen einiger Punkte einer niedrigen Wand

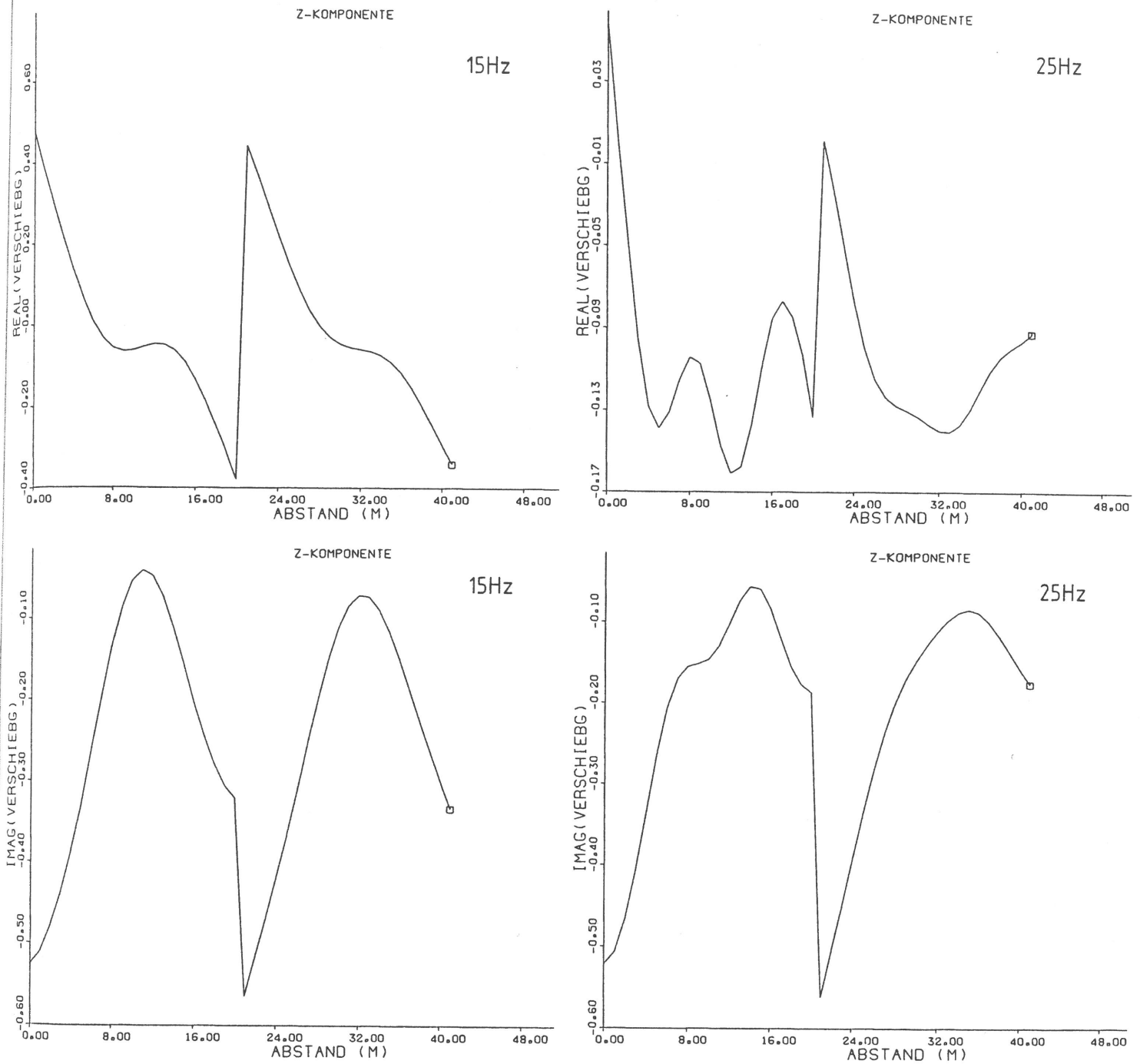


Bild 13.8 - Schwingungsformen einer niedrigen Wand,
 Fundamentebene: 0-20 m, linke Kurve,
 oberer Rand: 21-41 m, rechte Kurve

lations- und einer Kippbewegung zu deuten ist. Andererseits folgen die Amplituden des Mittelpunktes für Frequenzen unter 15 Hz den Werten für einen entsprechend steifen Balken. Die niedrige Wand weist also sowohl Starrkörper- als auch elastische Charakteristiken auf. Die elastische Verformbarkeit glättet dabei den stark schwankenden Kurvenverlauf der Übertragungsfunktion einer starren Masse.

Weiteren Aufschluß über die starren und elastischen Anteile der Schwingant-

wort geben die Schwingungsformen. Während bei den Schwingungsformen bei 5, 10 und 20 Hz die starren Anteile dominieren, erkennt man bei 15 Hz (Bild 13.8 links) deutlich eine elastische Schwingungsform, bei der die Wandmitte im wesentlichen unbewegt bleibt und die Wandenden nacheinander (um eine Viertelperiode phasenversetzt) durchschwingen.

In der Schwingungsform für 25 Hz (Bild 13.8 rechts) findet man die Wellenform der Freifeldanregung (2 1/2 Wellenzüge) wieder. Sie bleibt auf den unteren Teil der Wand beschränkt, die Verformungsfigur des oberen Wandrandes ist dagegen glatt. Dieses Phänomen wird bei den hohen Wandscheiben im nächsten Abschnitt eingehender untersucht.

13.3 Hohe Strukturen (quadratische Wandscheiben)

13.3.1 Die halbunendliche gebettete Wandscheibe

Als ein vereinfachtes Modell für eine auf dem Boden aufliegende hohe Wand wird eine elastisch und viskos gebettete Wand betrachtet, die unendlich lang und unendlich hoch ist. Im Vergleich zur endlichen Wand sind in diesem Modell die Reflektionen an den freien Wandrändern ausgeschlossen. Das Modell kann aber Auskunft über die Schwingungsübertragung am gemeinsamen Rand von Wand und Boden geben.

Die Differentialgleichung für eine Wandscheibe

$$\mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \underline{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (13.16)$$

stimmt mit Gleichung (2.7) für das dreidimensionale elastische Kontinuum überein. Der einzige Unterschied liegt in der Materialkonstante

$$\lambda_{3D} > \lambda_{\text{Scheibe}} \quad , \quad (13.17)$$

beziehungsweise entsprechend in der Longitudinalwellengeschwindigkeit

$$v_{L,3D} > v_{L,\text{Scheibe}} \quad .$$

Dies ergibt sich aus der fehlenden Querkontraktionsbehinderung. Man kann die Gleichung (4.13) für das Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} \beta^2 &= (v_T/v_L)^2 &= \frac{1-n\nu}{2-2(n-1)\nu} & , & & (13.18) \\ \text{Kontinuum } n=2 & \beta^2 &= \frac{1-2\nu}{2-2\nu} & , & & \\ \text{Scheibe } n=1 & \beta^2 &= \frac{1-\nu}{2} & , & & \\ \text{Stab } n=0 & \beta^2 &= \frac{1}{2+2\nu} & , & & \end{aligned}$$

wobei n die Anzahl der behinderten Querkontraktionen ist.

Das Verschiebungsfeld der Wandscheibe bei Anregung über den Rand setzt sich aus Lösungen der homogenen Differentialgleichung (13.16) bzw. (2.7) zusammen, das sind die in Abschnitt 3 beschriebenen Wellenarten, die an die Randbedingungen am unteren Rand angepaßt sein müssen. Für die hier interessierende Freifeldwellenanregung

$$\underline{u}_0 = \underline{A} e^{i(\omega t - \epsilon x)} \quad (13.19)$$

bestimmt man zunächst die dynamische Steifigkeitsmatrix K_S der Scheibe, die die Kraftwellenamplitude \underline{p}'_S (Kraft pro Länge bzw. Spannung mal Wandstärke) mit der Verschiebungswellenamplitude \underline{u} am unteren Scheibenrand verknüpft

$$\underline{p}'_S = K_S \underline{u} \quad (13.20)$$

Die Berechnung von K_S ist im Anhang E beschrieben. Für den Boden ergibt sich eine entsprechende Beziehung

$$\underline{p}'_B = K_B \underline{u}$$

mit der diagonalen Steifigkeitsmatrix K_B

$$K_{Bxx} = \frac{\mu}{1-\nu/2} + i\omega \frac{\sqrt{\mu\rho} a}{1-\nu/2} \quad (\text{horizontal}) \quad (13.21)$$

$$K_{Bzz} = \frac{\mu}{1-\nu} + i\omega \frac{\sqrt{\mu\rho} a}{1-\nu} \quad (\text{vertikal})$$

(elastische und viskose Bettung).

Für die Anregung \underline{u}_0 erhält man (analog der Argumentation in Abschnitt 5.2)

$$(K_S + K_B) \underline{u} = K_B \underline{u}_0 \quad (13.22)$$

beziehungsweise aufgelöst

$$\underline{u} = (K_S + K_B)^{-1} K_B \underline{u}_0 \quad (13.23)$$

die Verschiebung \underline{u} am unteren Scheibenrand.

Zunächst wird die Steifigkeitsmatrix K_S der Wandscheibe in Bild 13.9 dargestellt. Man hat gemäß

$$K_S = \epsilon\mu a k_S(v/v_T, \nu) \quad (13.24)$$

einen dimensionsbehafteten Faktor $\epsilon\mu a$ und eine dimensionslose Matrix k_S , die vom Verhältnis der anregenden Wellengeschwindigkeit v zur Transversalwellengeschwindigkeit v_T der Scheibe und von ν abhängt. Man erkennt in Bild 13.9, daß die Steifigkeiten im Bereich $0,8 < v/v_T < 2,0$ klein werden, das heißt wenn die anregende Wellengeschwindigkeit v in der Nähe der Wellengeschwindigkeiten v_L , v_T , v_R der Wandscheibe liegt. Einzelne Komponenten weisen Nullstellen auf, so die Vertikalkomponente K_{zz} bei $v = v_T$ (reine Transversalwellenanregung).

Für größere Spurwellengeschwindigkeiten $v > v_L$, die durch schräg ins Scheibeninnere abstrahlende Raumwellen realisiert werden, nehmen die Diagonal-

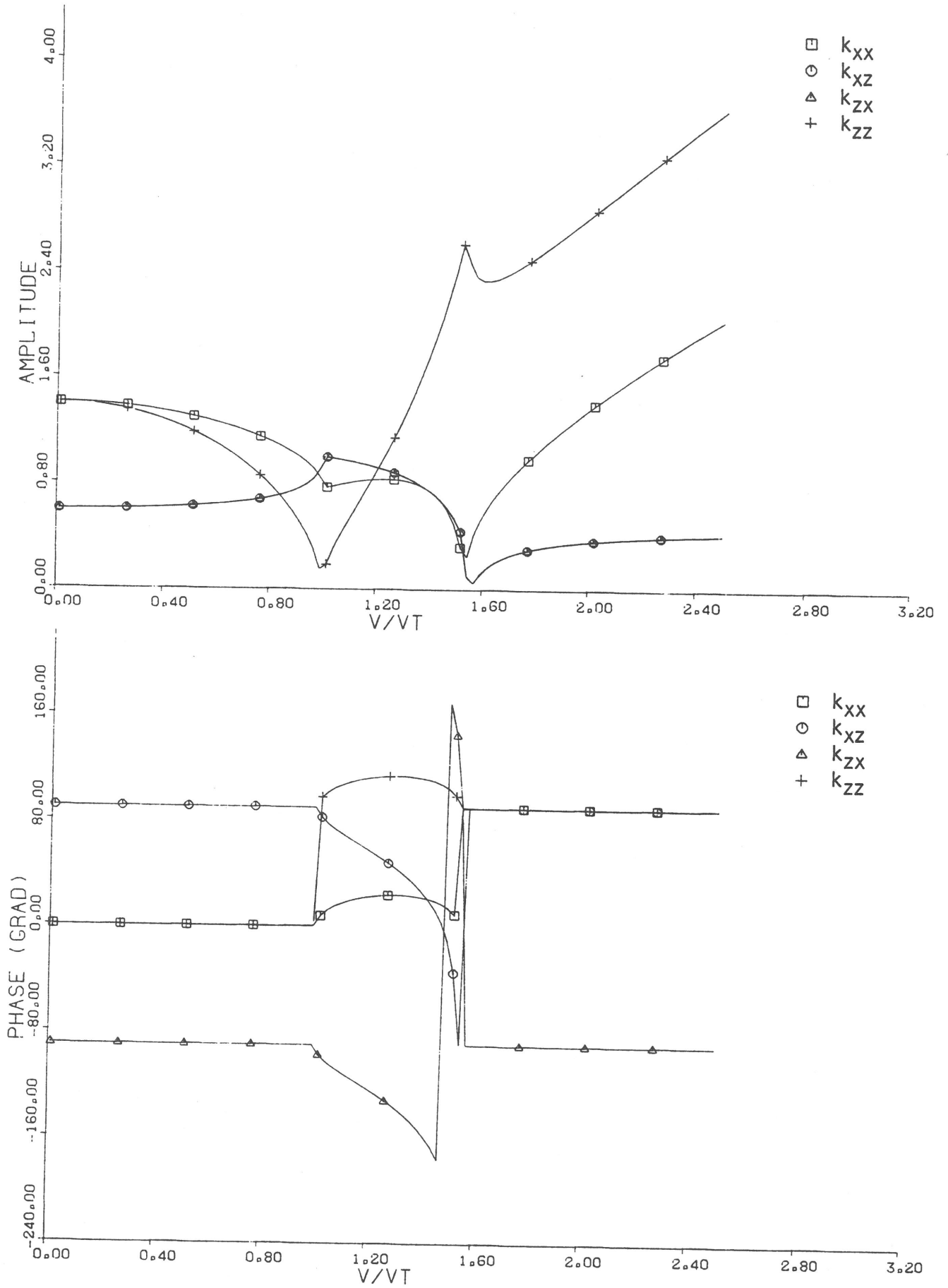


Bild 13.9 - Steifigkeit $k = \sigma / u \xi \mu$ einer halbinendlichen Wandscheibe ($\nu = 0,15$) gegenüber einer Verschiebungswelle der Geschwindigkeit v und Wellenzahl ξ

elemente K_{xx} und K_{zz} linear mit v/v_T zu, während die Koppellemente konstant bleiben. Das bedeutet, daß die Steifigkeit mit wachsendem v/v_T zunehmend entkoppelt ist und wegen

$$K_{zz} = \xi \mu a \alpha_z i \frac{v}{v_T} = \alpha_z i \omega \sqrt{\mu \rho} a \quad (\text{für } v \gg v_L) \quad (13.25)$$

$$K_{xx} = \xi \mu a \alpha_x i \frac{v}{v_T} = \alpha_x i \omega \sqrt{\mu \rho} a$$

einer viskosen Dämpfung proportional zum Wellenwiderstand $\sqrt{\mu \rho}$ entspricht.

Bei kleineren Spurwellengeschwindigkeiten $v < v_T$ besteht das Wellenfeld der Scheibe aus exponentiell ins Scheibeninnere abnehmenden parallel zum Rand laufenden Wellen ("Oberflächenwellen"). Für $v/v_T \rightarrow 0$ nehmen die Trägheitsinflüsse der Wandscheibe rasch ab und man hat die quasistatische Steifigkeit

$$K = \xi \mu a A \quad (\text{für } v \ll v_T) \quad (13.26)$$

mit einer Konstantenmatrix A.

Bei der Anregung einer Wandscheibe durch eine Rayleighwelle des Bodens liegt gerade der letztgenannte Fall $v < v_T$ vor, da das Wandmaterial steifer als der Boden ist. Die gemäß Gleichung (13.23) berechneten Ergebnisse für diese Anregung sind in Bild 13.10 für eine $a = 0,2$ m dicke Betonwand auf Lockerboden ($v = 200$ m/s) dargestellt. Bild 13.10 enthält außerdem die

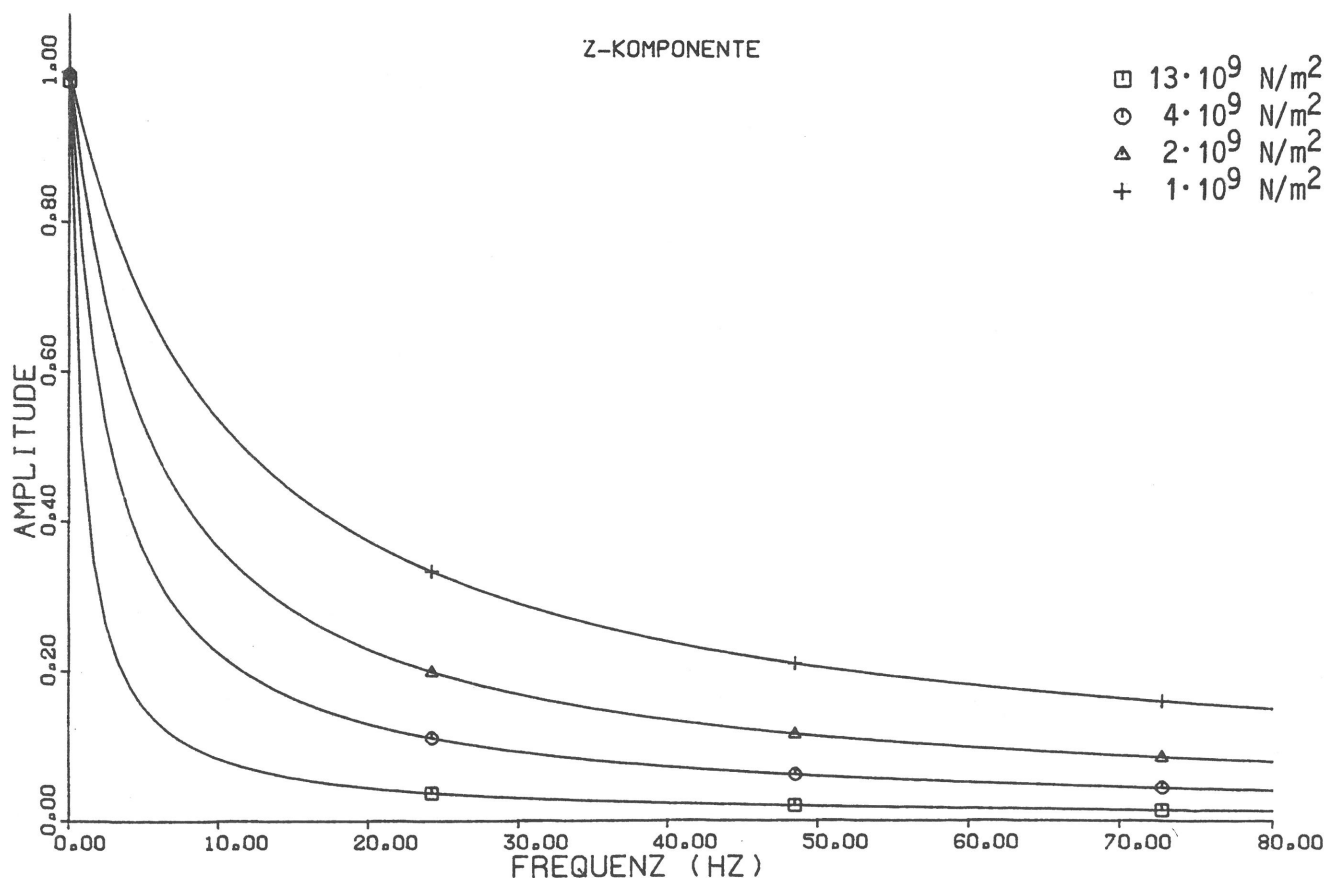


Bild 13.10 - Übertragungsfunktionen halbinendlicher gebetteter Wandscheiben unter Freifeldwellenanregung, Parameter: Schubmodul μ

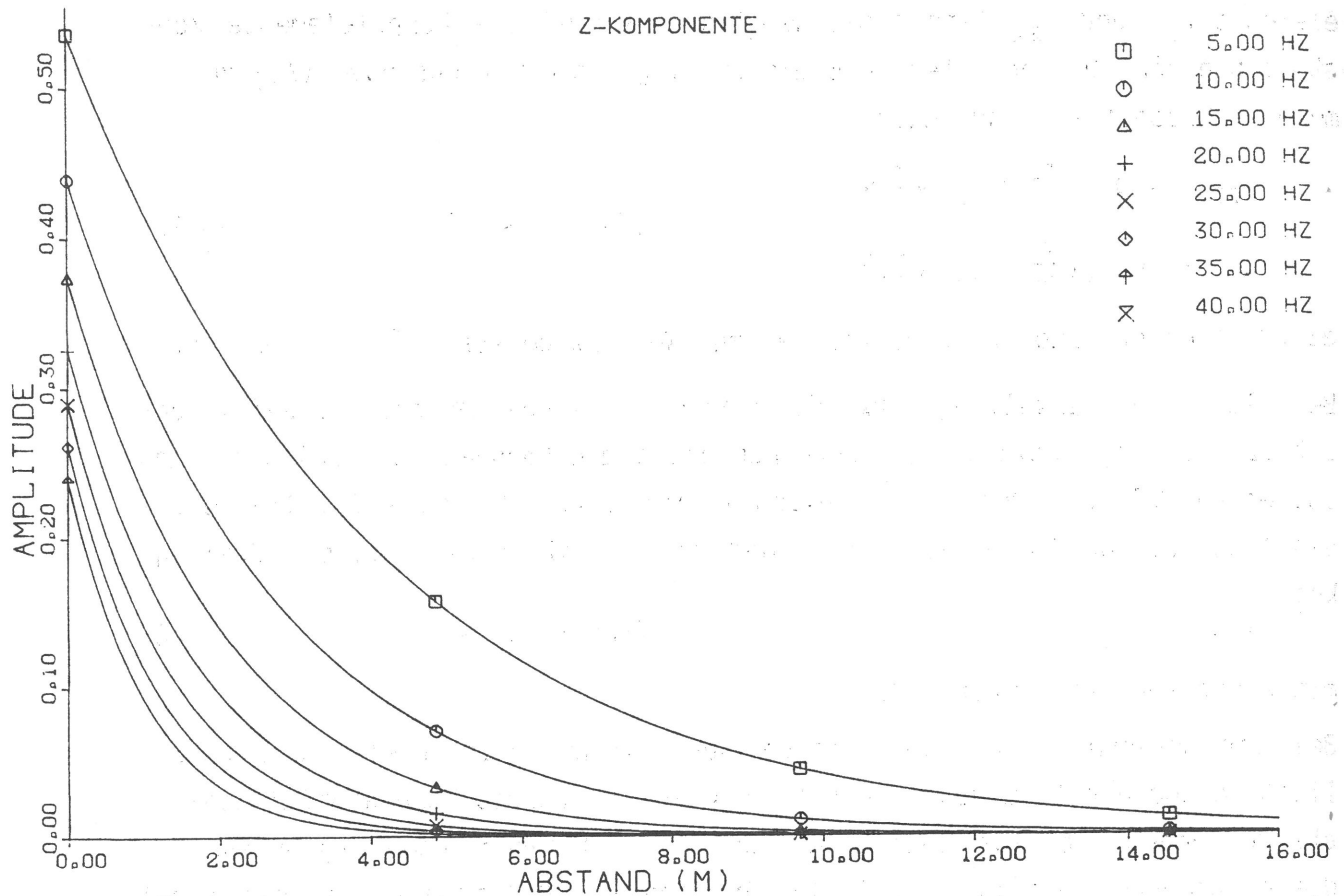


Bild 13.11 - Amplitudenverteilung über die Höhe einer halbumendlichen Wand ($\mu=10^9 \text{ N/m}^2$)

Ergebnisse für drei entsprechende Systeme mit weicherem Wandmaterial. Die Schwingantworten der Wand am Fundament ($z=0$) nehmen rasch mit der Frequenz ab und streben einem festen Grenzwert für hohe Frequenzen zu. Je weicher das Wandmaterial ist, desto größer sind die Wandantworten. Wie aus den in Bild 13.11 dargestellten Amplitudenverteilungen über die Höhe hervorgeht, bleiben die Wandantworten auf einen fundamnentnahen Bereich beschränkt. Die Reichweite der Wandschwingungen entspricht etwa einer Wellenlänge der anregenden Rayleighwelle und nimmt dementsprechend mit wachsender Frequenz ab.

13.3.2 Quadratische Wandscheiben auf dem Halbraum

Es wird eine 20 m lange und 20 m hohe Wand mit der Dicke $a = 0,2 \text{ m}$ bei Anregung durch eine Rayleighwelle berechnet. Die Auflagerung auf dem Halbraum mit den Parametern

$$\begin{aligned} \mu &= 8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2, \\ \rho &= 2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \nu &= 0,33 \end{aligned}$$

wird vollständig erfaßt. Es wird ein steifes Wandmaterial ($\mu = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, Beton) und ein deutlich weiches Wandmaterial ($\mu = 1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) betrachtet.

Die Ergebnisse für die Wand aus Beton (Bild 13.12) unterscheiden sich nicht wesentlich von denen der starren Wand (Bild 12.4). Den Starrkörperbewegungen überlagern sich kleinere elastische Verformungen, zum Beispiel die im vorigen Abschnitt berechneten auf die Fundamentnähe beschränkten Oberflächenwellen der Wandscheibe.

Die Ergebnisse für die weichere Wand sollen hier etwas ausführlicher diskutiert werden. Bei den Übertragungsfunktionen (Bild 13.13) fällt zunächst wieder die starke Resonanz bei der ersten Eigenfrequenz der Struktur von 4 Hz auf. Die größere Verformbarkeit der Struktur führt zu einer etwas kleineren Eigenfrequenz als bei der steifen oder starren Wand und gleichzeitig auch zu einer größeren Resonanzüberhöhung. In der (Eigen-)Schwingsform dominiert allerdings auch hier die Kippbewegung um in etwa den Fundamentmittelpunkt.

Neben dieser Kippresonanz treten noch zwei kleinere Resonanzstellen bei 12 und bei 22 Hz auf, die sich auf Längseigenschwingungen zurückführen lassen. Es gilt

$$\lambda_L (12 \text{ Hz}) = 80 \text{ m} = 4 \cdot \text{Wandlänge},$$

$$\lambda_L (22 \text{ Hz}) = 44 \text{ m} \approx 2 \cdot \text{Wandlänge},$$

und man kann die erste Schwingungsform als vertikale Eigenschwingung einer einseitig fixierten, einseitig freien Scheibe und die zweite Schwingungsform als Eigenschwingung einer zweiseitig freien Scheibe (vertikal und horizontal) beschreiben.

Die Bilder 13.14 und 13.15 sollen einen Einblick in das komplexe Schwingungsverhalten der Wand geben. Bild 13.14 zeigt zunächst die vertikalen Schwingungsformen der Fundamentebene für einzelne Frequenzen zwischen 10 und 40 Hz. Man erkennt ähnlich wie beim Balken in Abschnitt 13.1 deutlich die anregenden Wellen wieder. Verfolgt man weiterhin die Amplituden über die Höhe (Bild 13.15), so erkennt man einerseits die exponentiell abnehmenden, vom Fundament her eingprägten Oberflächenwellen der Wandscheibe, andererseits aber auch kleinere über die gesamte Höhe verfolgbare modale Anteile.

Bild 13.16 zeigt zum Vergleich die vertikalen Amplituden des Fundamentmittelpunktes für vier verschiedene Wandstrukturen: die steife und die weiche quadratische Wand und jeweils eine unendlich ausgedehnte Wand gleicher Steifigkeit. Während sich bei dem weichen Wandmaterial die Übertragungsfunktionen des endlichen und des unendlichen Systems grob ähneln, hat man bei dem steifen Material grundsätzliche Unterschiede, da die endliche Wand deutlich Starrkörpercharakteristiken (Nullstellen und Maxima) aufweist.

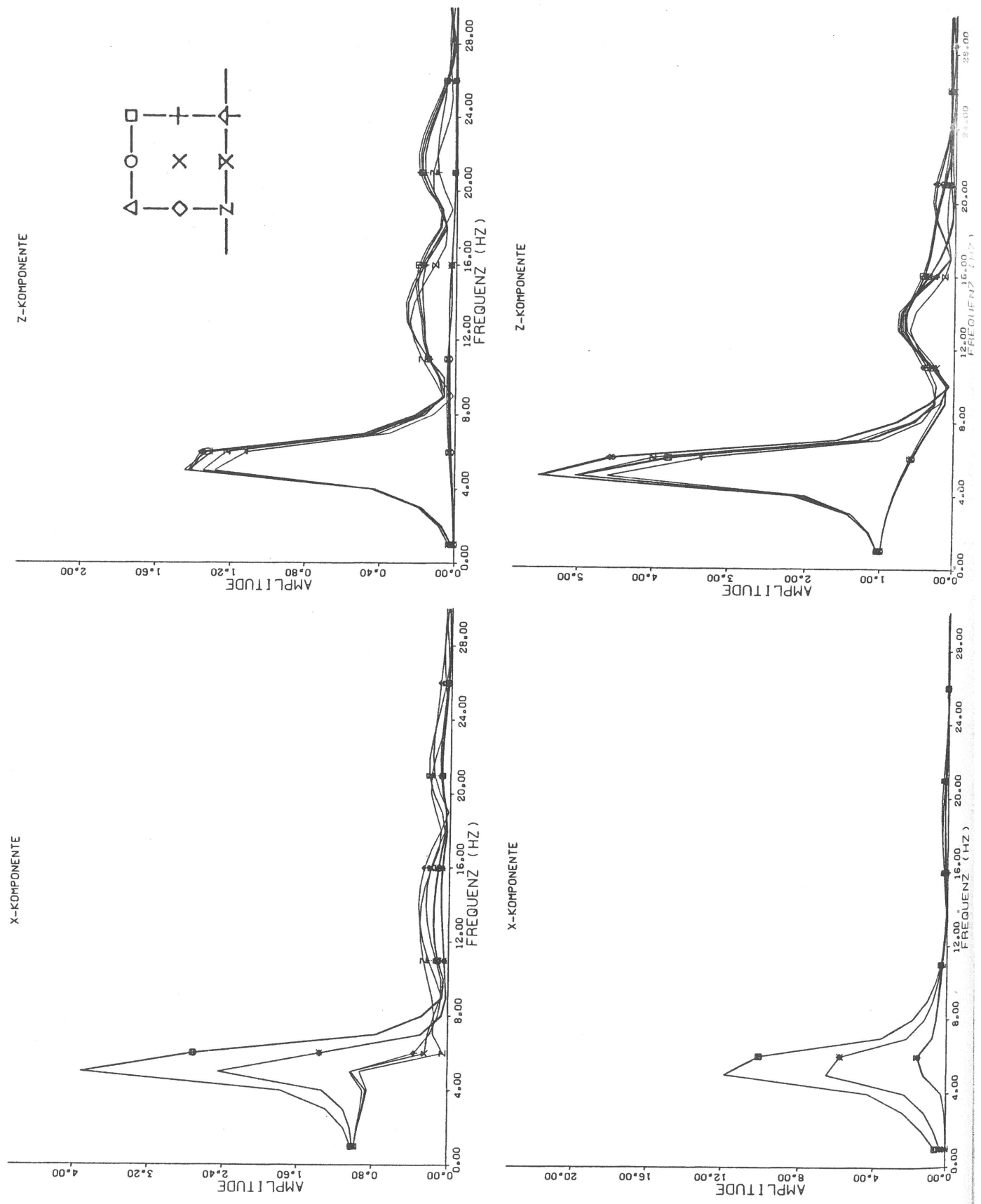


Bild 13.12 - Übertragungsfunktionen einer quadratischen Wand ($\mu=1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$) bei horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Wellenfeldanregung

0.00 4.00 8.00 12.00 16.00 20.00 24.00 28.00

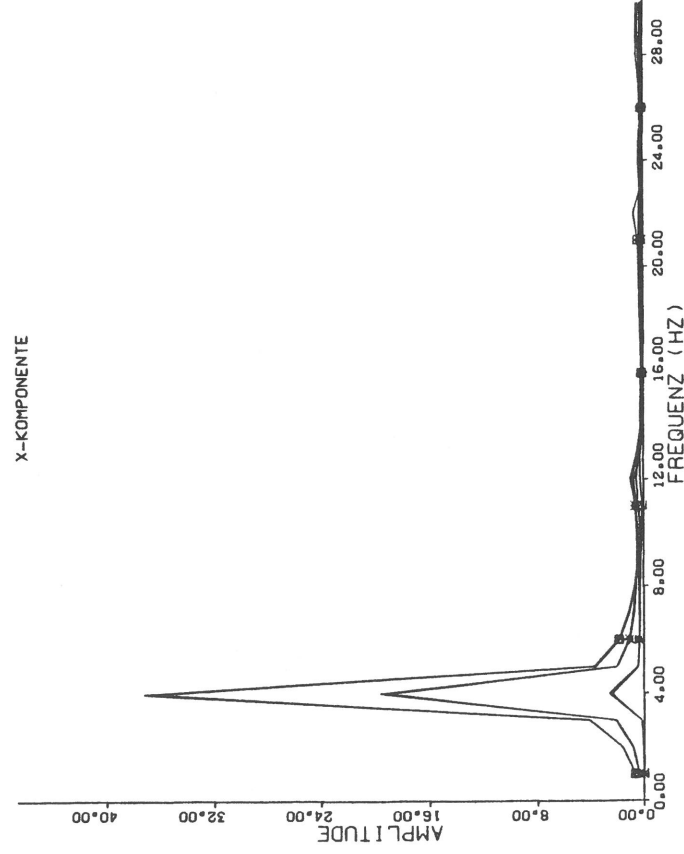
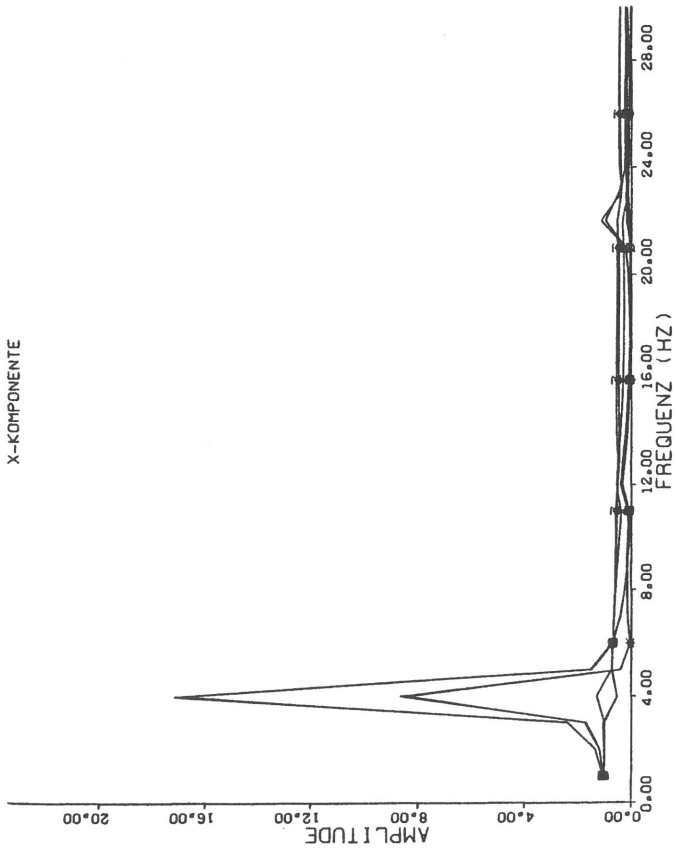
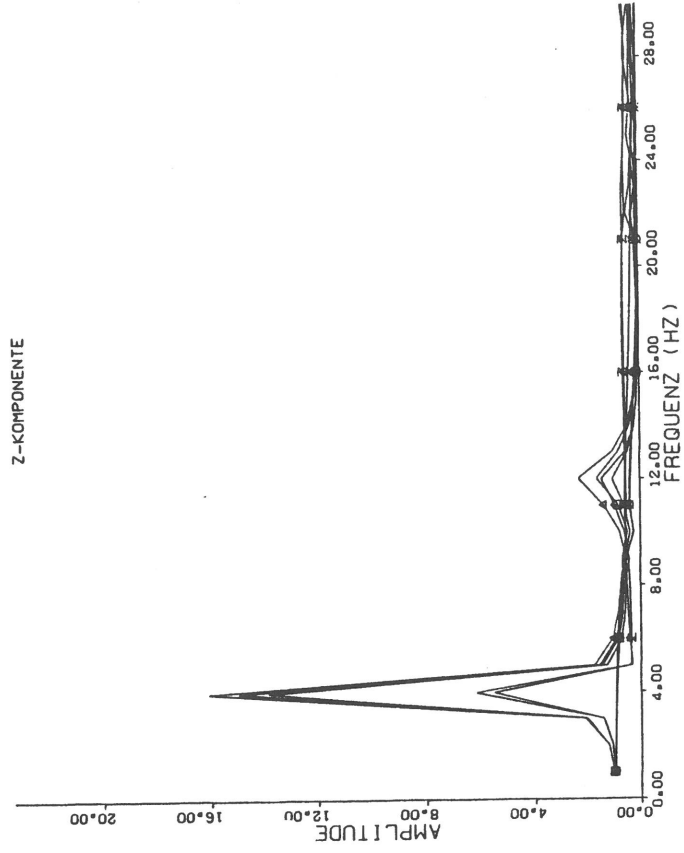
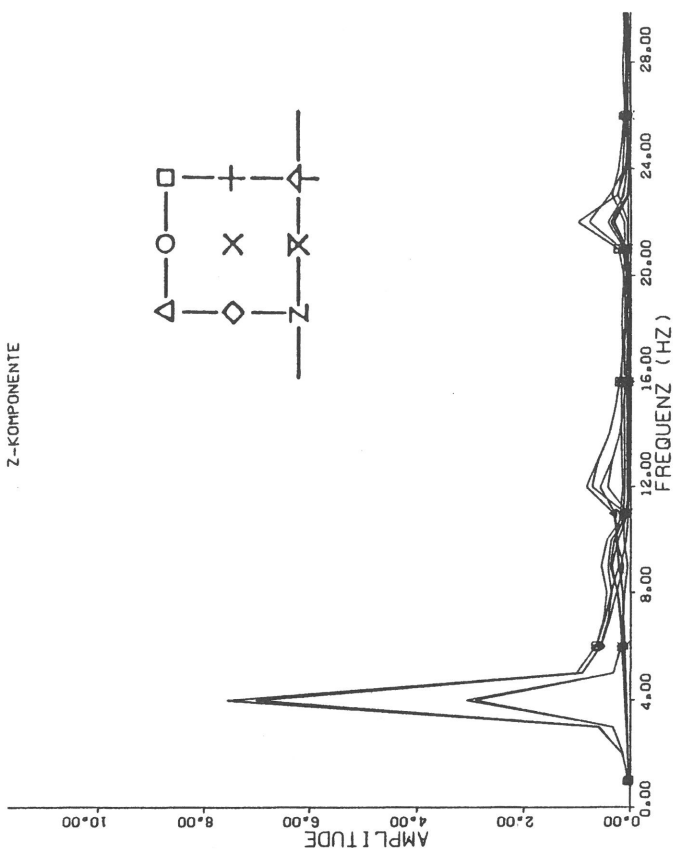


Bild 13.13 - Übertragungsfunktionen einer quadratischen Wand ($\mu=1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) bei horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Wellenfeldanregung

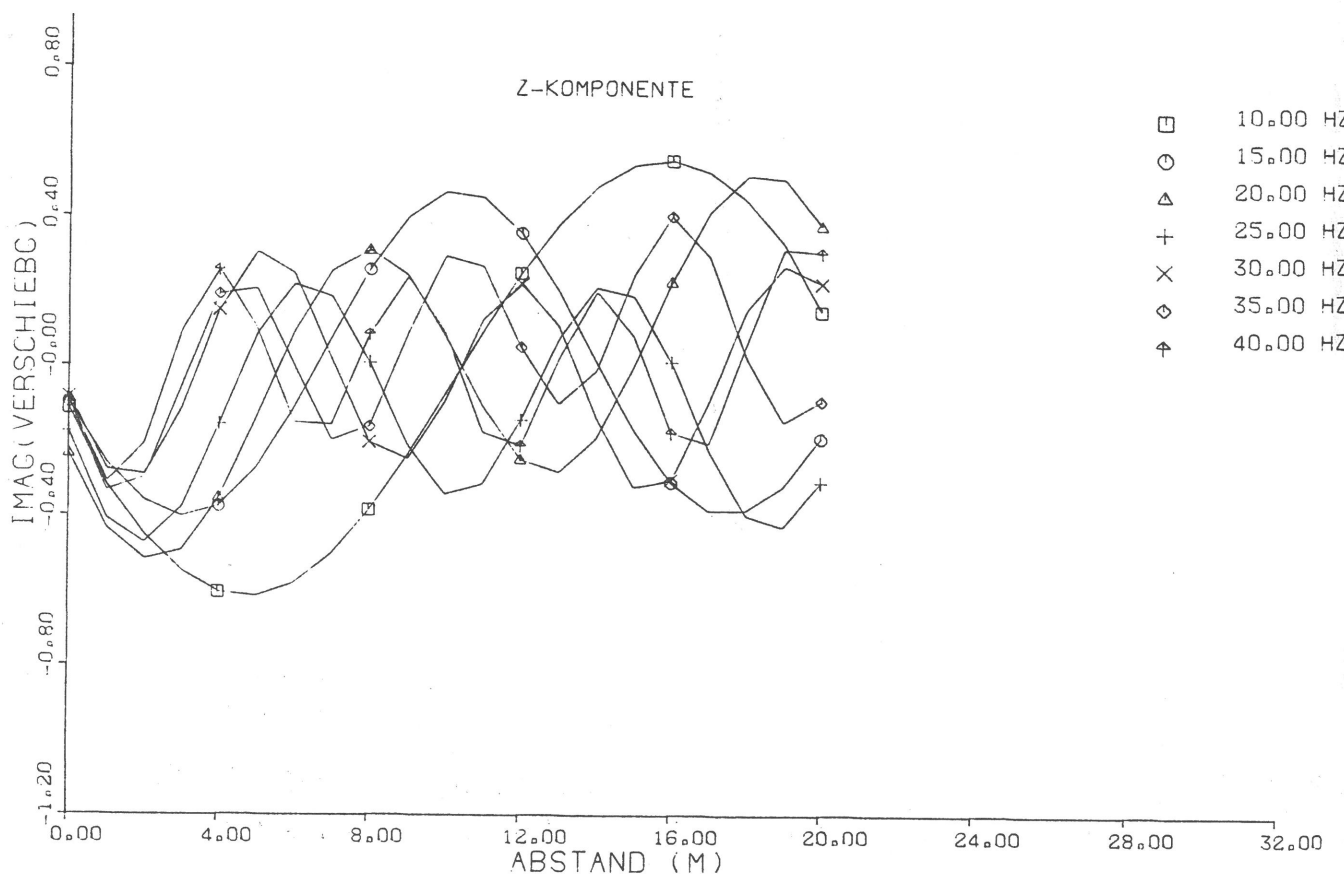
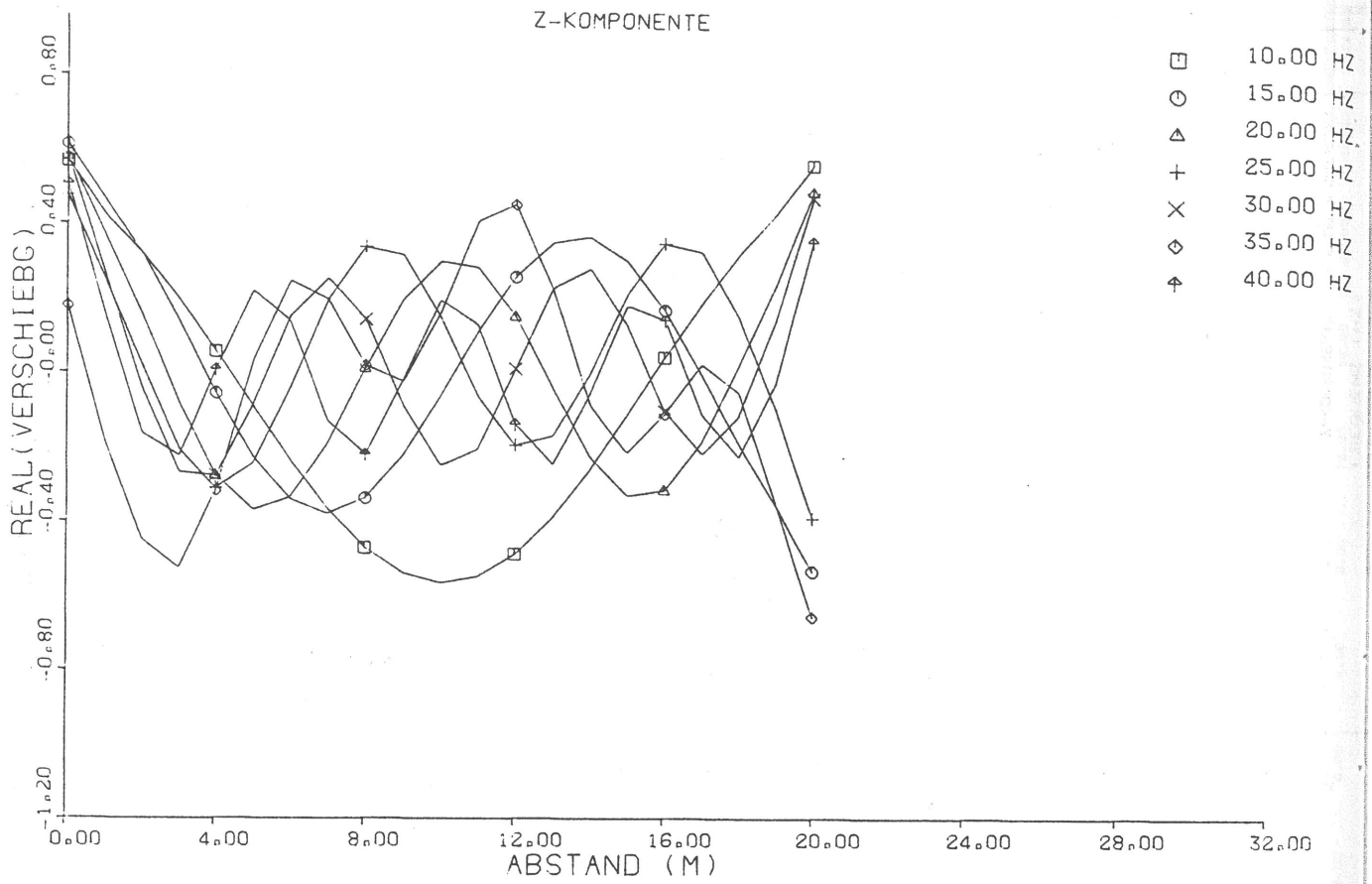


Bild 13.14 - Schwingungsformen einer quadratischen Wand unter Wellenfeldanregung: Verschiebungen des Fundaments

Z
Z
Z
Z
Z
Z
Z

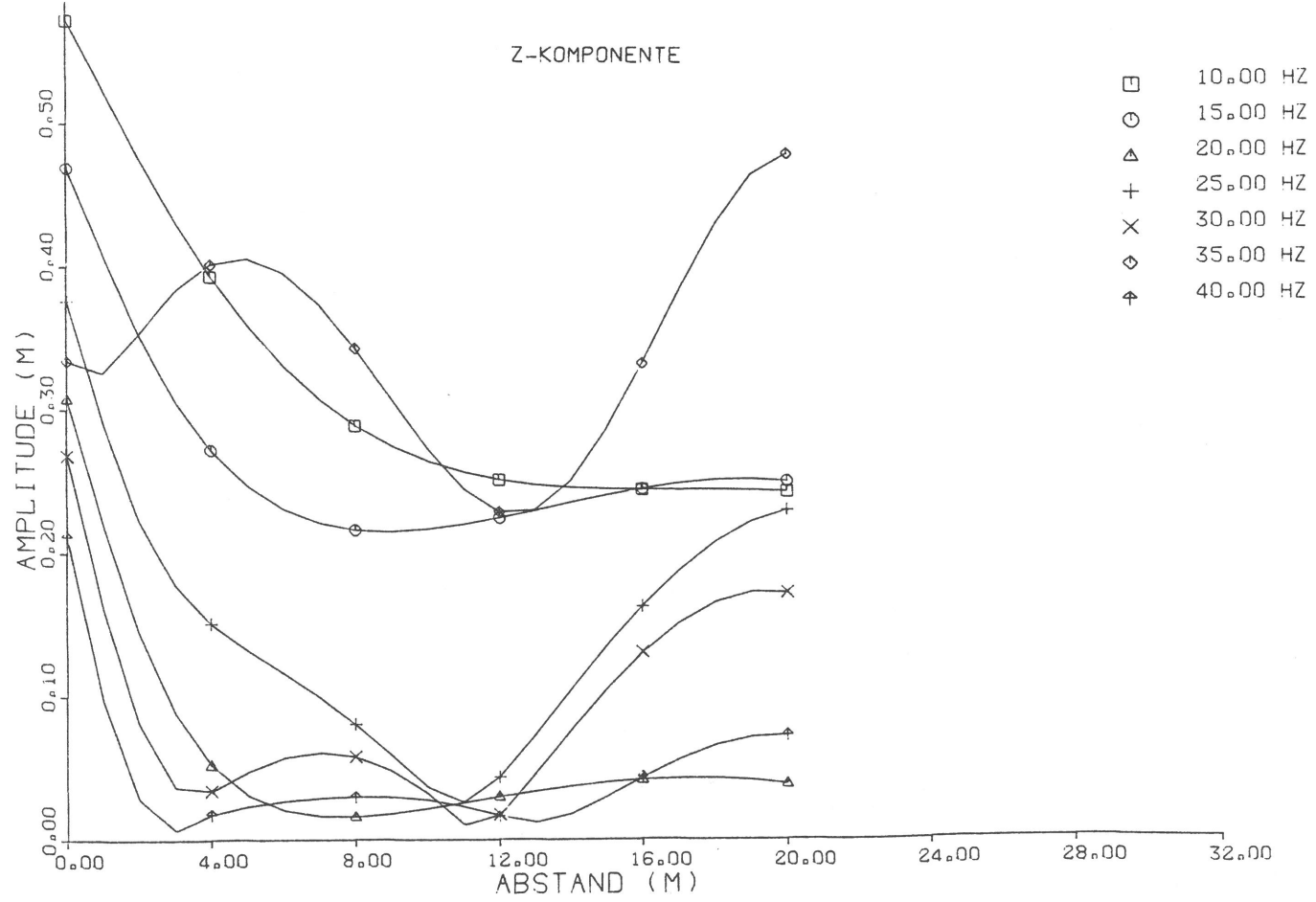
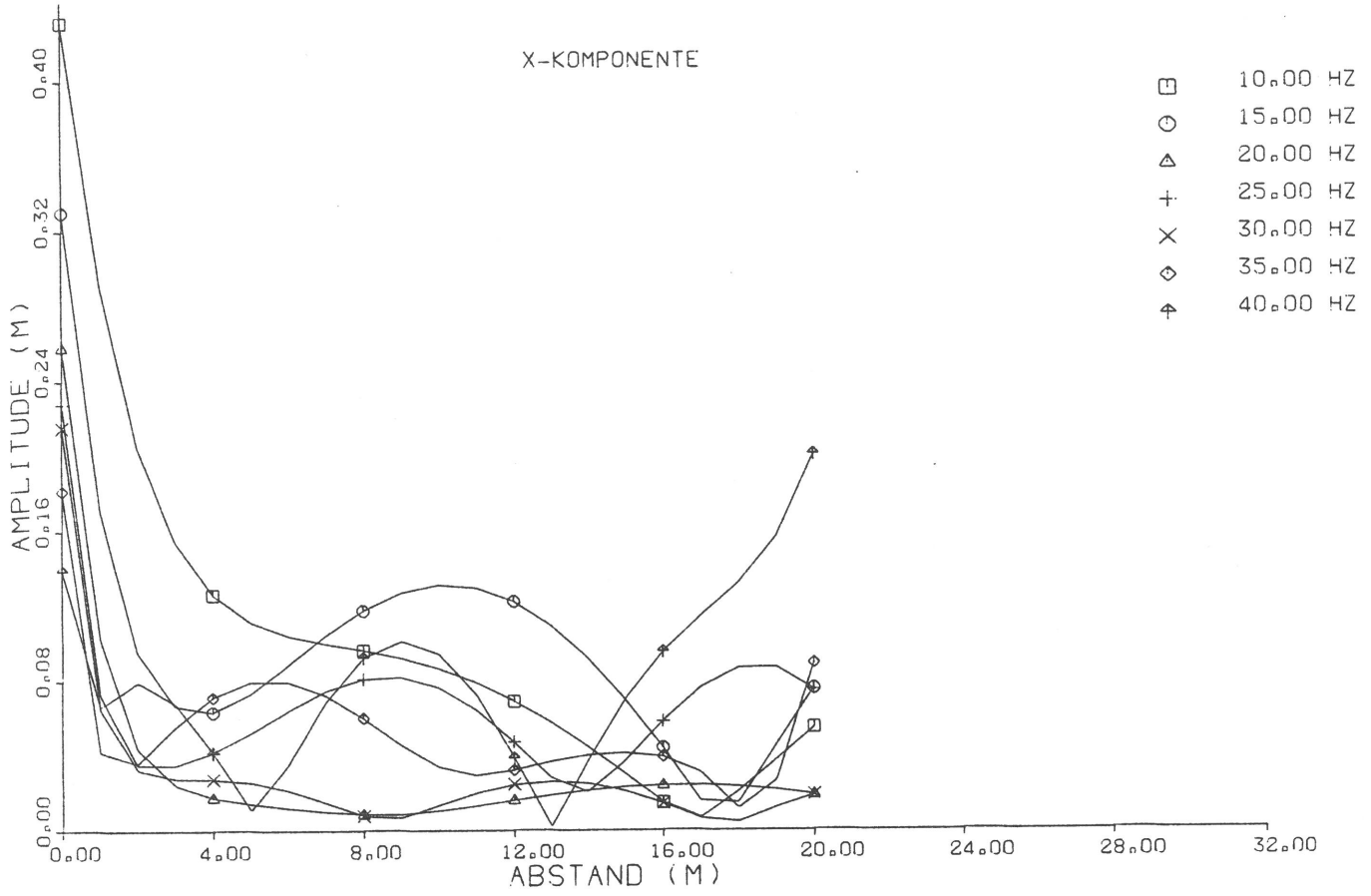


Bild 13.15 - Amplitudenverteilung über die Höhe einer quadratischen Wand

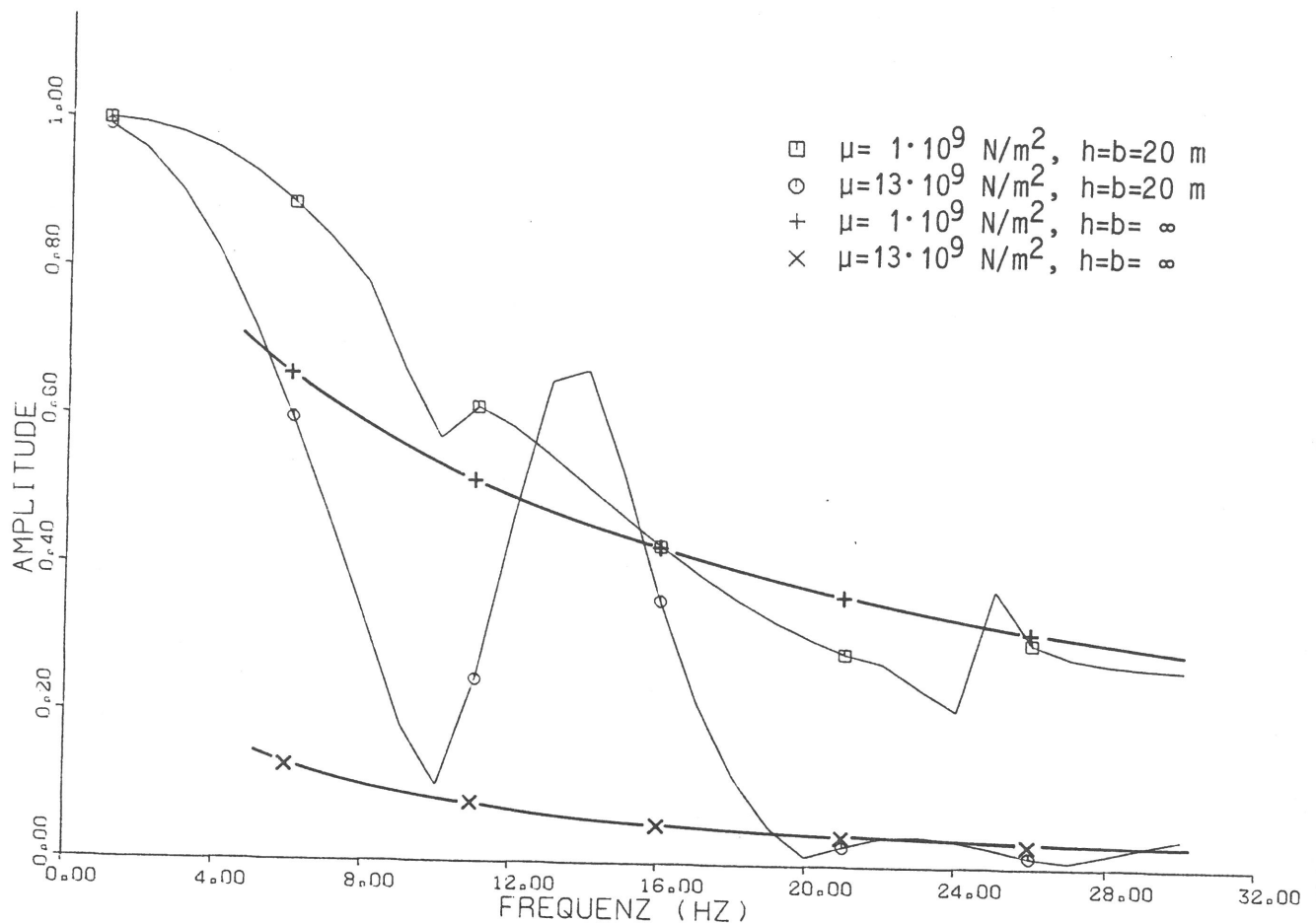


Bild 13.16 - Übertragungsfunktionen verschiedener Wandscheiben,
Parameter: Schubmodul, Wandhöhe und -länge

13.4 Überblick über die Ergebnisse für starre und flexible Strukturen

Es wurden verschiedene flexible Strukturen bei Anregung durch eine horizontal unter der Struktur durchlaufende Freifeldwelle des Bodens untersucht. Zum Vergleich stehen außerdem die Ergebnisse für starre Strukturen aus den Abschnitten 11 und 12 zur Verfügung. Es zeigt sich, daß je nach Größe, Gestalt und Steifigkeit der Struktur sich sehr unterschiedliche Schwingungsbilder ergeben können.

Allen betrachteten Systemen gemeinsam ist die Tatsache, daß die Schwingantworten mit zunehmender Frequenz kleiner werden. Es liegen jedoch jeweils sehr unterschiedliche Gründe für diese Tendenz vor. Bei starren Strukturen reduziert sich einerseits die resultierende Anregung aus kinematischen Gründen (Abschnitt 11), andererseits wirkt sich oberhalb der Starrkörpereigenfrequenzen die Bauwerksträgheit amplitudenmindernd aus (Abschnitt 12). Bei flachen und damit relativ leichten Strukturen bewirkt die höhere Steifigkeit gegenüber kurzweiligerer Anregung die mit steigender Frequenz abnehmende Tendenz der Amplituden (Abschnitt 13.1). Hohe Strukturen reagieren

oberhalb der Grundfrequenzen vornehmlich mit fundamentnahen "Oberflächenwellen", die wiederum mit größerer Steifigkeit beziehungsweise treffender mit größerer Impedanz abnehmen (Abschnitt 13.3).

Neben dieser generell abnehmenden Tendenz für hohe Frequenzen gibt es auch vereinzelt Verstärkungen gegenüber der Freifeldanregung. Diese Verstärkungen sind insbesondere mit der Kippbewegung der Struktur verbunden. Schon beim masselosen Fundament entsteht durch die phasenverschiedene Vertikal-anregung eine Drehung, die an den Fundamentenden gegenüber dem Freifeld etwas erhöhte Vertikalamplituden bewirkt (Abschnitt 11). Bei hohen starren oder flexiblen Strukturen ergibt die Kippeigenbewegung die alles überragende Resonanz. Bei flexiblen Strukturen enthält diese erste Eigenform auch elastische Anteile. Höhere Eigenfrequenzen einer elastischen Struktur sind mitunter in den Übertragungsfunktionen zu erkennen. Sie sind jedoch in der Regel durch den Boden gut gedämpft. Außerdem ist die resultierende Anregung der höheren Eigenformen analog zur resultierenden Anregung der starren Struktur schon deutlich gegenüber dem Freifeld reduziert, so daß insgesamt bei diesen Eigenfrequenzen keine oder nur eine geringe Überhöhung gegenüber der Freifeldanregung auftritt.

Teil V Anwendungsbeispiel und Vergleich mit Messungen

14. Ein Anwendungsbeispiel: Ein hohlquaderförmiges Modellbauwerk

Es wird ein Bauwerksbeispiel, das auch bei Schwingungsanregung über den Boden gemessen wurde (s. Abschnitt 15) vollständig dreidimensional berechnet. Es handelt sich um ein einräumiges, eingeschossiges, an der Bodenoberfläche gegründetes Stahlbetonbauwerk, das in seiner Finite-Element-Idealisierung in Bild 14.1 dargestellt ist. Die im Bild angegebenen Abmessungen gelten für die Knotenpunktskoordinaten, für die Außenabmessungen sind noch die Elementdicken zu berücksichtigen

Länge (außen) 5,825 m ,
 Breite (außen) 5,125 m ,
 Höhe (einschließlich Fundament) 2,425 m .

Nicht dargestellt sind die Fundamentbalken unter den Außenwänden, die als zusätzliche Masse (gemäß der Querschnittsfläche $0,096\text{m}^2$) und zusätzliche Steifigkeit (gemäß den Flächenträgheitsmomenten vertikal $J_z = 0,0021\text{m}^4$ und horizontal $J_{x,y} = 0,0004\text{m}^4$) in das Rechenmodell eingehen. Bei der Kopplung mit dem Boden wurde eine Fundamentbreite von 0,5 m bzw. eine Fläche von $0,6\text{m}^2$ je Bodenknoten berücksichtigt. Die Bodeneigenschaften $\mu = 10^8\text{N/m}^2$, $\rho = 1,7 \cdot 10^3\text{kg/m}^3$ ($v_T = 250\text{m/s}$), $\nu = 0,45$ entsprechen den gemessenen Werten (Abschnitt 15.2). Das Bauwerk wird durch eine vertikale harmonische Einheitskraft, die in einer Entfernung von 15 m auf die Bodenoberfläche wirkt, angeregt. Neben der Gebäudeantwort wird auch die Freifeldbodenschwingung in 15 m Entfernung der Quelle berechnet, so daß das Übertragungsverhältnis Bauwerk zu Boden gebildet werden kann.

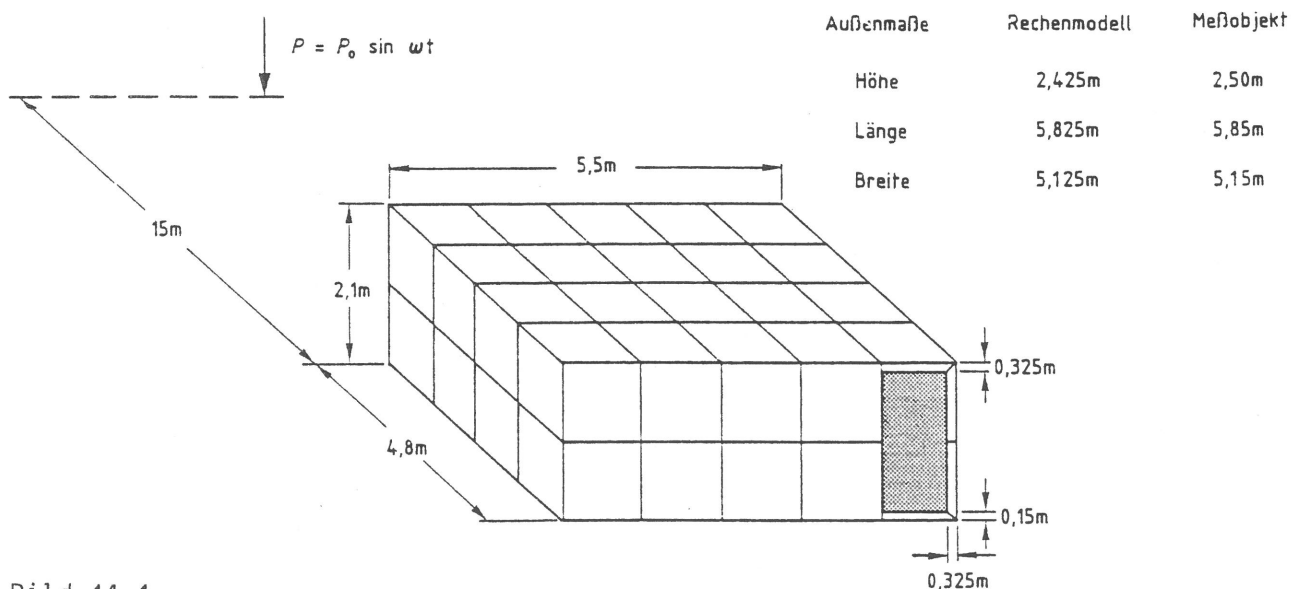


Bild 14.1 -

Das berechnete Bauwerksbeispiel: Maße und Elementierung

14.1 Schwingungsformen ausgewählter Frequenzen

Um einen Einblick in die Schwingungsform des Bauwerks zu bekommen, sind die Amplituden der Fundamentpunkte ausgewertet worden. Bild 14.2 zeigt dazu Betrag und Phase für drei charakteristische Frequenzen, aufgetragen über den Gebäudeumfang, das heißt bei $x = 0$ ist die von der Quelle aus gesehen rechte vordere Ecke, bei $x = 4,8$ m die rechte hintere Ecke, bei $x = 10,3$ m die linke hintere Ecke mit dem Eingang, und bei $x = 15,1$ m die linke vordere Ecke. Diese Punkte sind zur besseren Übersichtlichkeit auch markiert.

Schwingungsform bei 10 Hz:

Die Amplituden der einzelnen Fundamentpunkte differieren nur um $\pm 10\%$. Die kleinsten Werte gelten für die Seitenmitten, die Amplituden hinten sind etwas kleiner als vorne. Die maximale Phasendifferenz vorne zu hinten beträgt rund 70° . Das Bauwerk schwingt als starrer Körper hauptsächlich in einer vertikalen Schwingungsform. Der vertikalen Schwingung ist ein kleiner Kippanteil überlagert.

Schwingungsform bei 20 Hz:

Die Seitenmitten schwingen deutlich weniger als die Wände vorne und hinten ($1/3$ der Amplituden). Die Phasendifferenz vorne zu hinten beträgt 140° , das heißt, es liegt annähernd Gegenphasigkeit vor. In dieser Frequenz dominiert demnach die Kippschwingung. Der gekrümmte Verlauf der Phasen deutet auf eine leichte Verformung der Wände hin.

Schwingungsform bei 50 Hz:

Die Phase ist annähernd konstant ($\pm 20^\circ$). Lediglich an der hinteren Wand im Bereich des Eingangs treten große Abweichungen auf, allerdings bei nahezu verschwindenden Amplituden. Daher kann man den Verlauf des Betrages unmittelbar als Verformungsbild betrachten. Man erkennt sehr große Wandverformungen an den Seiten und an der hinteren Wand (insbesondere beim Eingang). Die Unregelmäßigkeiten infolge des Eingangs führen hier schon zu einem deutlich unsymmetrischen Schwingungsverhalten: Die von der Quelle aus gesehen rechte Wand weist größere Amplituden auf als die linke Wand. Im Gegensatz zum Kippschwingverhalten haben hier die Seitenmitten die größten und die Wände vorn und hinten die kleinsten Amplituden. Bei 50 Hz ist die Wellenlänge der anregenden Rayleighwelle gerade gleich der Bauwerksbreite, so daß die resultierende vertikale Anregung gerade verschwindet. Die Schwingantwort des Bauwerkes ist deshalb hier im wesentlichen nur durch Verformungen möglich.

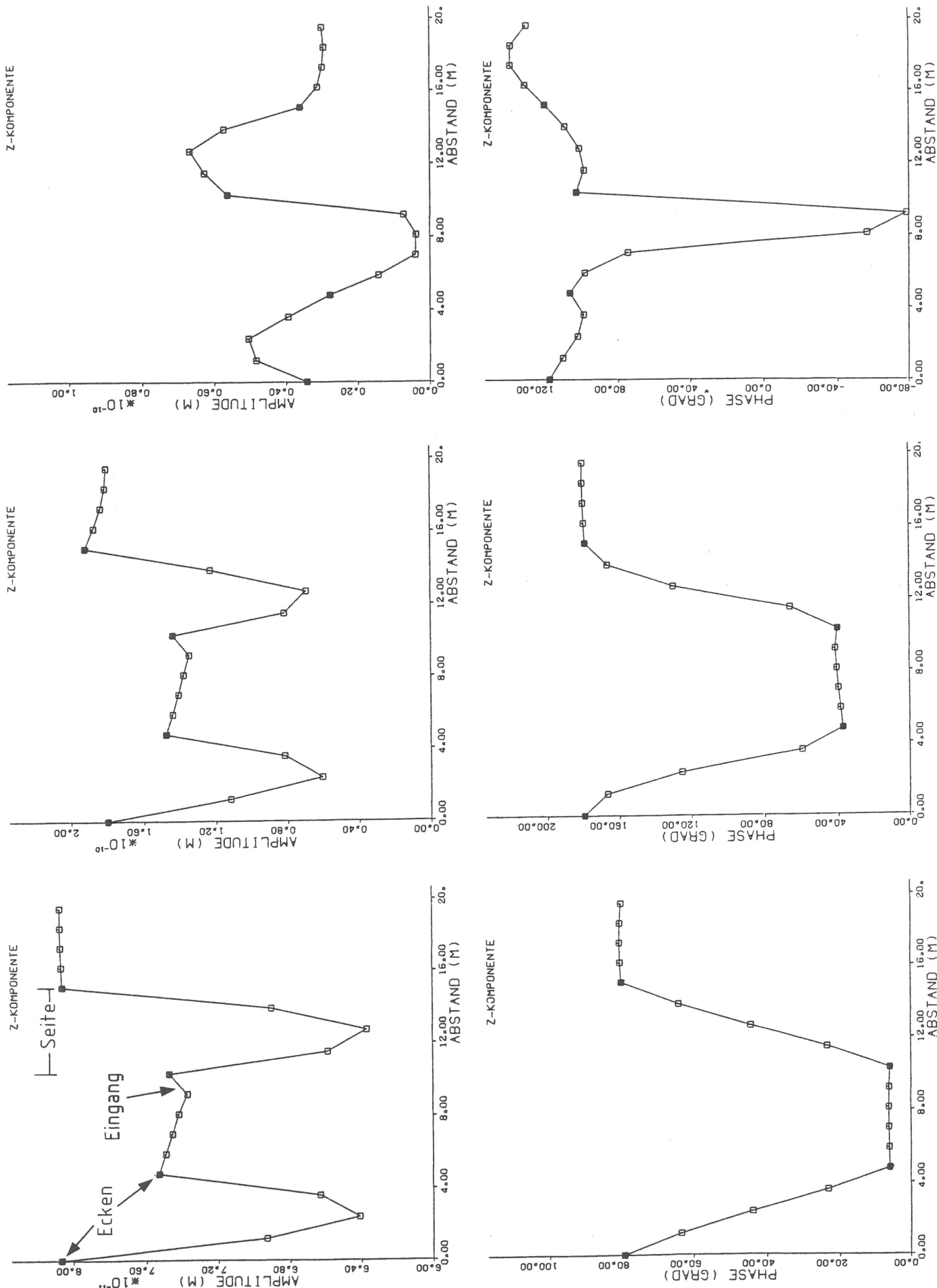


Bild 14.2 - Schwingungsformen des Bauwerks bei 10, 20 und 50 Hz: Betrag und Phase der Fundamentamplituden, aufgetragen über den Gebäudeumfang

Schwingungsformen bei höheren Frequenzen (ohne Bild):

Alle Schwingungsformen weisen große Verformungsanteile auf. Die Asymmetrie infolge des Eingangs nimmt mit wachsender Frequenz noch zu. Der Ort maximaler Amplitude wechselt.

Einen Überblick über die Schwingungsformen gibt nachfolgende Tabelle

Frequenz	Wellenlänge	Phasendifferenz	Schwingungsform
10 Hz	23,5 m	70°	vertikal starr
20 Hz	11,8 m	140°	Kippen starr
30 Hz	7,8 m	210°	Kippen starr
40 Hz	5,9 m	0°	Kippen um hinteres Fundament
50 Hz	4,7 m	40°	Wandverformungen, insbesondere Seiten
60 Hz	3,9 m	80°	Verformungen, asymmetrisch

14.2 Das Übertragungsverhältnis Freifeld - Bauwerk

Für einige ausgewählte Punkte (den Meßpunkten, s. Abschnitt 15) wurden die Amplituden auf die Freifeldamplituden in 15 m Entfernung der Quelle bezogen

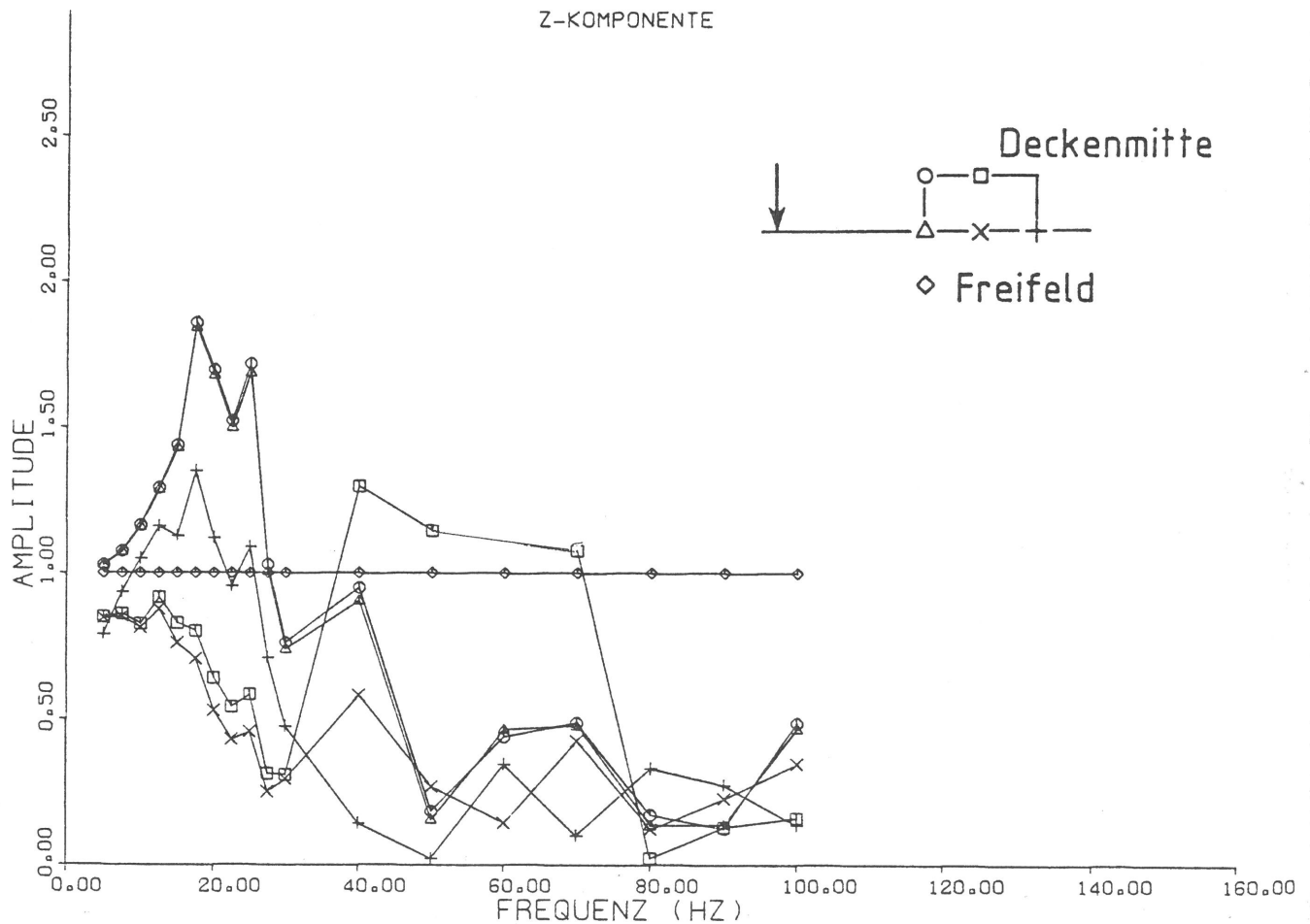


Bild 14.3 - Modellbauwerk unter Wellenfeldanregung:
Übertragungsfunktionen einiger Bauwerkspunkte

und über die Frequenz aufgetragen (Bild 14.3). Diese Ergebnisse werden in Abschnitt 15 zum Vergleich Theorie - Messung herangezogen.

Es zeigt sich folgendes Übertragungsverhalten:

Für tiefe Frequenzen (etwa bis 10 Hz) werden die Bodenschwingungen direkt im Verhältnis 1:1 übertragen. Zwischen 10 und 25 Hz werden die Bodenschwingungen im Bauwerk verstärkt. Es gibt zwei Resonanzspitzen bei 17,5 und 22,5 Hz mit einer leichten Überhöhung von maximal 1,9 an der vorderen Wand. Die erste Resonanz ist dabei die Kippresonanz des starren Bauwerks, die zweite die Vertikalresonanz. Ab 30 Hz nimmt das Übertragungsverhältnis ab, bei 50 Hz ist ein Minimum von 0,2 erreicht. Für höhere Frequenzen bis 100 Hz bleibt das Übertragungsverhältnis bei etwa 0,3. Die Schwingungsform bei 50 Hz war im vorangegangenen Abschnitt durch überwiegende Wandverformungen gekennzeichnet worden, Wellenlänge und Bauwerksbreite stimmen gerade überein.

Die Schwingungsformen spiegeln sich auch in den Übertragungsverhältnissen der Meßpunkte (Bild 14.3) wider:

Frequenz	Schwingungsform	Übertragungsverhältnis
10 Hz	vertikal	gleichmäßig $V = 1$
20 Hz	Kippen	Resonanz, Bauwerksmitte kleinste Amplituden
30 Hz	Kippen	Bauwerksmitte kleinste Amplitude
40 Hz	Kippen um hinteres Fundament	hinten kleinste Amplitude
50 Hz	Wandverformungen	V minimal, Seitenmitte größte Amplitude

Zwischen 40 und 70 Hz dominieren die Deckenamplituden, da in diesem Bereich die Deckeneigenfrequenz liegt.

15. Vergleich Theorie/Rechnung - Messung

15.1 Das Versuchsprogramm

Das in Abschnitt 14 behandelte Bauwerksbeispiel (Bild 14.1) wurde meßtechnisch auf einem Versuchsgelände in Meppen/Emsland untersucht. Den Versuchsaufbau zeigt Bild 15.1: Ein elektrodynamischer Schwinger (maximale Kraftamplitude 1,5 kN) steht in 15 m Entfernung des zu untersuchenden Modellschutzbaus auf der Bodenoberfläche und wird nacheinander mit Frequenzen zwischen 5 und 100 Hz betrieben. Die vertikalen Schwinggeschwindigkeiten des Bauwerks werden an 5 Punkten gemessen. Gleichzeitig werden die Schwinggeschwindigkeiten des Bodens an 7 Meßpunkten in etwa der gleichen Entfernung vom Schwinger, jedoch auf der gegenüberliegenden Seite gemessen.

Mit dieser Versuchsanordnung können folgende Dinge untersucht werden:

- Aus den Phasendifferenzen der Bodenmeßpunkte läßt sich die Wellengeschwindigkeit des Bodens bestimmen.
- Die Amplituden der Bauwerksmeßpunkte geben einen gewissen Einblick in die Schwingungsformen des Bauwerks.
- Aus dem Verhältnis der Bauwerksamplituden zu den Bodenamplituden läßt sich das Übertragungsverhältnis Freifeld-Bauwerk berechnen. Die Lage der Bodenmeßpunkte garantiert, daß man tatsächlich ein vom Bauwerk ungestörtes Freifeld mißt.

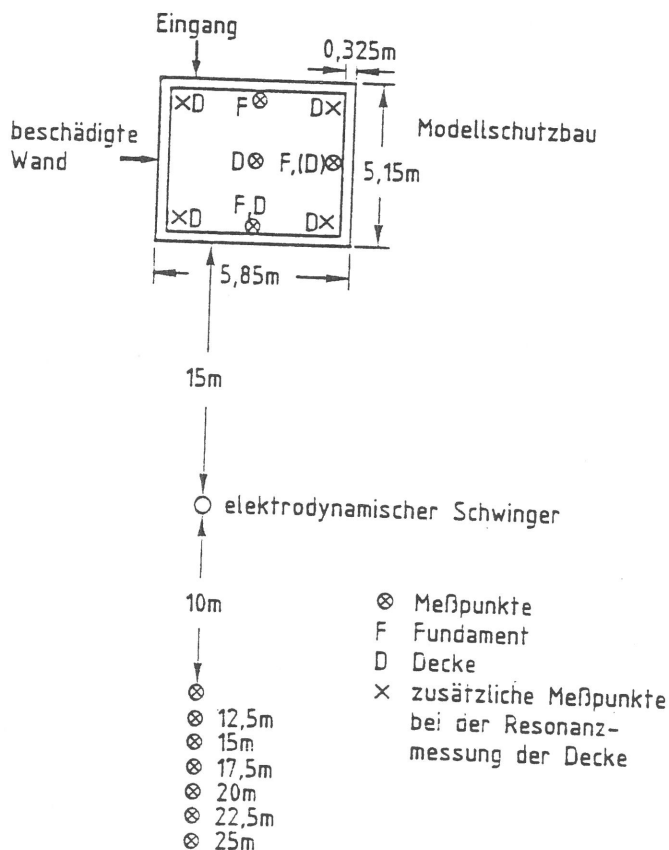
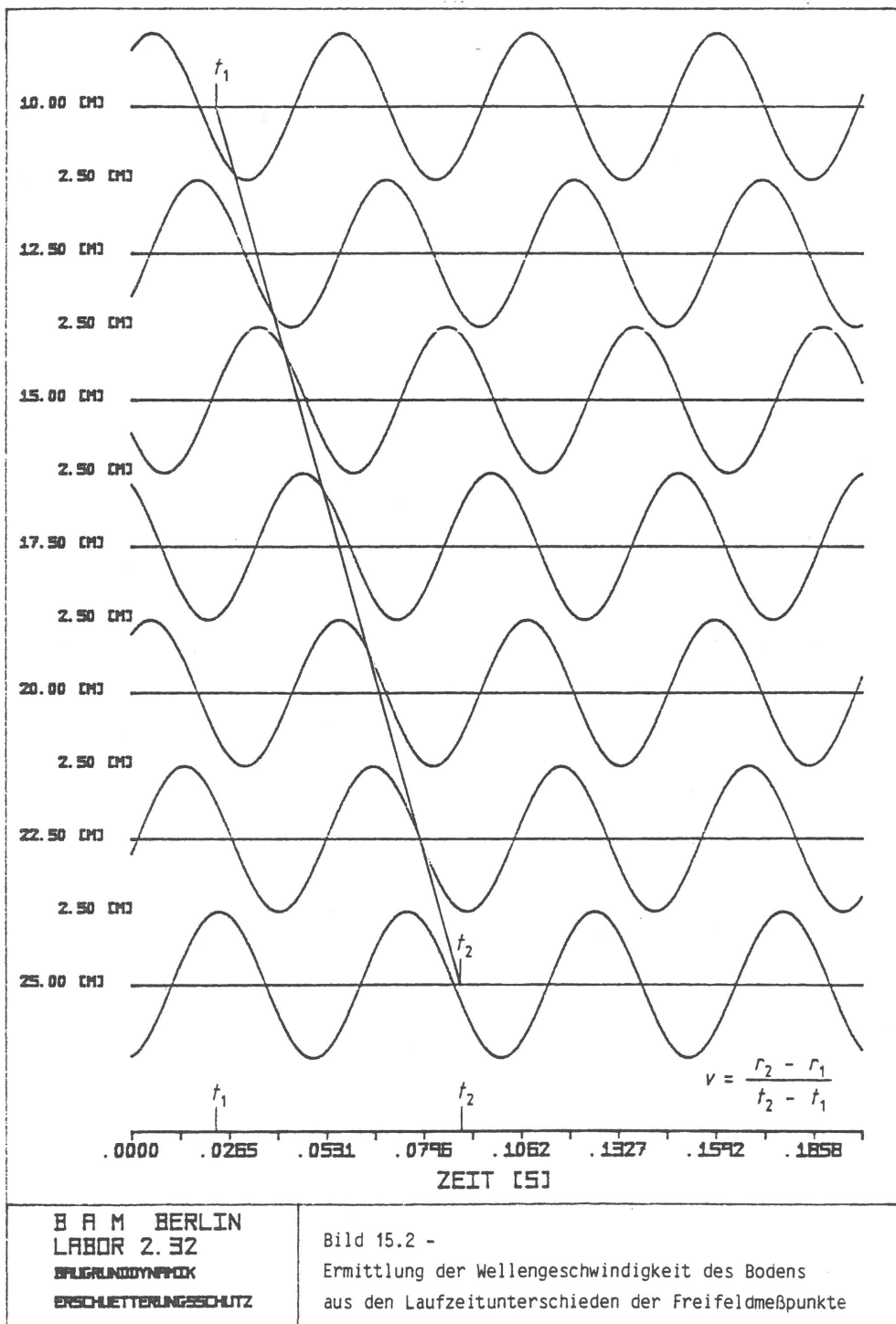


Bild 15.1 -
Modellbauwerk unter
Wellenfeldanregung:
Versuchsaufbau und Lage
der Meßpunkte

In einer zweiten Meßserie wurde das Ausbreitungsgesetz der Bodenschwingungen näher untersucht. Der elektrodynamische Schwinger wurde dazu auf einer Kraftmeßplatte aufgelagert, so daß die auf den Boden wirkende Kraft unmittelbar mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen gemessen werden konnte. Die vertikalen Schwinggeschwindigkeiten der Bodenoberfläche wurden in einer Meßachse in Abständen von 1 m bis 90 m an 12 Punkten gemessen.

15.2 Bestimmung der Materialkennwerte des Bodens

Bei dem Boden des Versuchsgeländes handelt es sich um einen gleichförmigen Fein- bis Mittelsand. Aus Laborversuchen wurde die Dichte zu



$$\rho = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (15.1)$$

bestimmt.

Bild 15.2 zeigt die Ermittlung der Wellengeschwindigkeit des Bodens. Aus den gefilterten Schwinggeschwindigkeitsverläufen der einzelnen Meßpunkte lassen sich die Laufzeitunterschiede ablesen und zusammen mit dem Meßpunkt-
abstand in Wellengeschwindigkeiten umrechnen. Für die Frequenzen 7, 10, 15, 20, 30 und 40 Hz ergeben sich auf diese Weise Werte zwischen 200 und 260 m/s, im Mittel von

$$v_R = 235 \text{ m/s} \quad (15.2)$$

Dieser Rayleighwellengeschwindigkeit kann eine Transversalwellengeschwindigkeit von etwa

$$v_T = 250 \text{ m/s} \quad (15.3)$$

zugeordnet werden. Zusammen mit der Dichte (15.1) ergibt sich daraus die Schubsteifigkeit des Bodens

$$\mu = \rho v_T^2 = 10^8 \text{ N/m}^2 \quad (15.4)$$

15.3 Das Ausbreitungsgesetz im Vergleich zur Punktlastlösung des Halbraumes

Die gemessene Ausbreitungsgesetzmäßigkeit ist in Bild 15.3 dargestellt. Im Bild oben sind die absoluten Schwinggeschwindigkeitsamplituden über die Entfernung für die Frequenzen 10, 20, 30, 50 und 70 Hz aufgetragen. Die Amplituden insbesondere des Nahbereichs nehmen mit der Frequenz bei annähernd konstant gehaltener Kraftamplitude zu, so wie das von der Theorie her für die Schwinggeschwindigkeiten zu erwarten ist. Da die höheren Frequenzen stärker mit der Entfernung abnehmen, sind diese Amplitudenunterschiede in 50 m Abstand praktisch kompensiert.

In einem zweiten Schritt werden dieselben Amplituden so normiert, daß sie bestmöglich in ein Amplituden-Abstands-Gesetz der Form

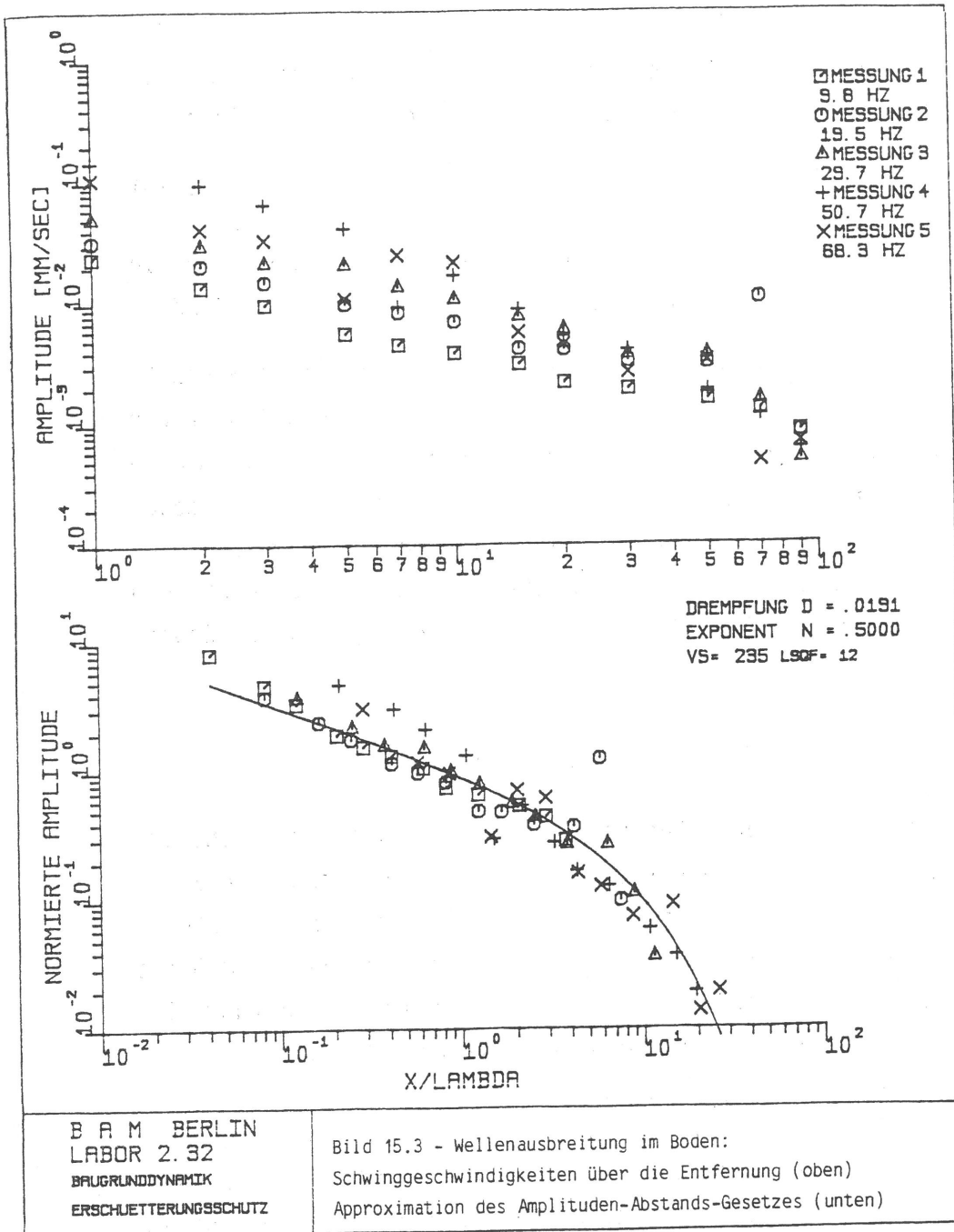
$$A = R^{-0,5} e^{-2\pi DR} \quad (15.5)$$

mit der auf die Wellenlänge bezogenen Entfernung

$$R = r/\lambda \quad , \quad \lambda = v_R/f \quad , \quad (15.6)$$

passen. Die Form dieses Gesetzes leitet sich aus der Fernfeldasymptote der Punktlastlösung eines hysteretisch gedämpften Halbraumes her. Die Dämpfungskonstante D wird hier ebenfalls durch eine Ausgleichsrechnung an die Meßwerte angepaßt.

Das Ergebnis der Ausgleichsrechnung (Bild 15.3 unten) zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen den Messungen und dem theoretischen Kurvenverlauf. Insbesondere die Meßwerte der tiefen Frequenzen folgen mit nur geringer Streuung und Abweichung dem vorgegebenen Kurvenverlauf. Für die Entfernun-



gen $r/\lambda < 0,3$ ist das Amplituden-Abstands-Gesetz der Meßwerte etwas steiler, etwa gemäß

$$A \sim r^{-1} \quad (15.7)$$

was genau der Nahfeldasymptote der Punktlastlösung entspricht. Die Meßwerte der hohen Frequenzen streuen etwas stärker, es erscheint auch eine Anpassung mit höherer Dämpfungskonstante möglich.

In einem dritten Schritt wird die auf den Boden wirkende Kraftamplitude näher betrachtet. Folgende Kräfte wurden bei den Versuchen gemessen:

Frequenz	10	20	30	50	70	Hz	(15.8)
Kraft	1,0	1,1	1,2	1,3	0,8	kN	.

In diesen Kraftamplituden lassen sich mit Hilfe der Punktlastlösung des Halbraumes theoretische Schwinggeschwindigkeiten

$$v = \frac{\omega p}{2\pi\mu r} f_{ZZ}(\bar{r}, v) \quad (15.9)$$

berechnen. Vergleicht man diese theoretischen Schwinggeschwindigkeiten v_T mit den gemessenen Amplituden v_M , so ergeben sich folgende Verhältnisse:

Frequenz	10	20	30	50	70	Hz	
v_T/v_M	1,4	1,9	2,3	2,5	2,7	.	(15.10)

Dieser Vergleich zeigt, daß die gemessenen Amplituden insbesondere für die hohen Frequenzen kleiner als die theoretisch errechneten Amplituden sind.

Zusammengefaßt kann man sagen, daß die Punktlastlösung durch diese Versuche bestätigt wird. Die Größenordnung und die zunehmende Tendenz der Amplituden für höhere Frequenzen finden sich in den Meßergebnissen wieder. Das Amplituden-Abstands-Gesetz stimmt gut mit der Punktlastlösung überein. Die absoluten Amplituden sind allerdings bei den Messungen etwas kleiner als nach der Theorie, insbesondere bei den hohen Frequenzen. Für hohe Frequenzen und große Entfernungen ist die Berücksichtigung der Materialdämpfung des Bodens wesentlich.

15.4 Das Bauwerksverhalten unter Wellenfeldanregung

Die Meßergebnisse zum Bauwerksverhalten werden in einer mit den Rechenergebnissen vergleichbaren Form dargestellt. Dazu werden zunächst die Freifeldamplituden zwischen $r = 12,5$ m und $r = 25$ m gemittelt. Die Amplituden der Bauwerksmeßpunkte werden dann auf diesen Mittelwert bezogen, so daß als Ergebnis das Übertragungsverhältnis Bauwerk zu Freifeld dargestellt ist (Bild 15.4) Zum Vergleich sind die Rechenergebnisse aus Abschnitt 14 noch einmal unter den Meßergebnissen abgebildet.

Die Ergebnisse stimmen in allen wesentlichen Merkmalen überein, die genauen Werte und die einzelnen Frequenzen weichen allerdings etwas voneinander ab.

Gleiche Merkmale sind bei den Messungen etwas zu tieferen Frequenzen verschoben. Zunächst der Vergleich der groben Tendenzen:

Bei 5 Hz beginnen jeweils alle Kurven bei ungefähr 1. Es folgt ein Bauwerk-Boden-Resonanz bei 13 Hz (Messung) bzw. 17 Hz (Rechnung). Die Resonanzstärke ist bei der Messung deutlich größer. Oberhalb der Resonanz fallen die Amplituden schnell ab. Es folgt ein zweites relatives Maximum bei 20 bzw. 22 Hz. Im Bereich zwischen 30 und 40 Hz (bzw. 25 bis 40 Hz bei der Messung) liegen die Amplituden der einzelnen Meßpunkte in einem breiten Band zwischen den Werten 0,2 und knapp 1. Ab 50 Hz (45 Hz) sind die Amplituden deutlich kleiner und einheitlicher. Bei 80 Hz wird ein Minimum erreicht, danach steigen die Amplituden wieder leicht an. In diesem Bereich sind die gemessenen Amplituden etwas kleiner.

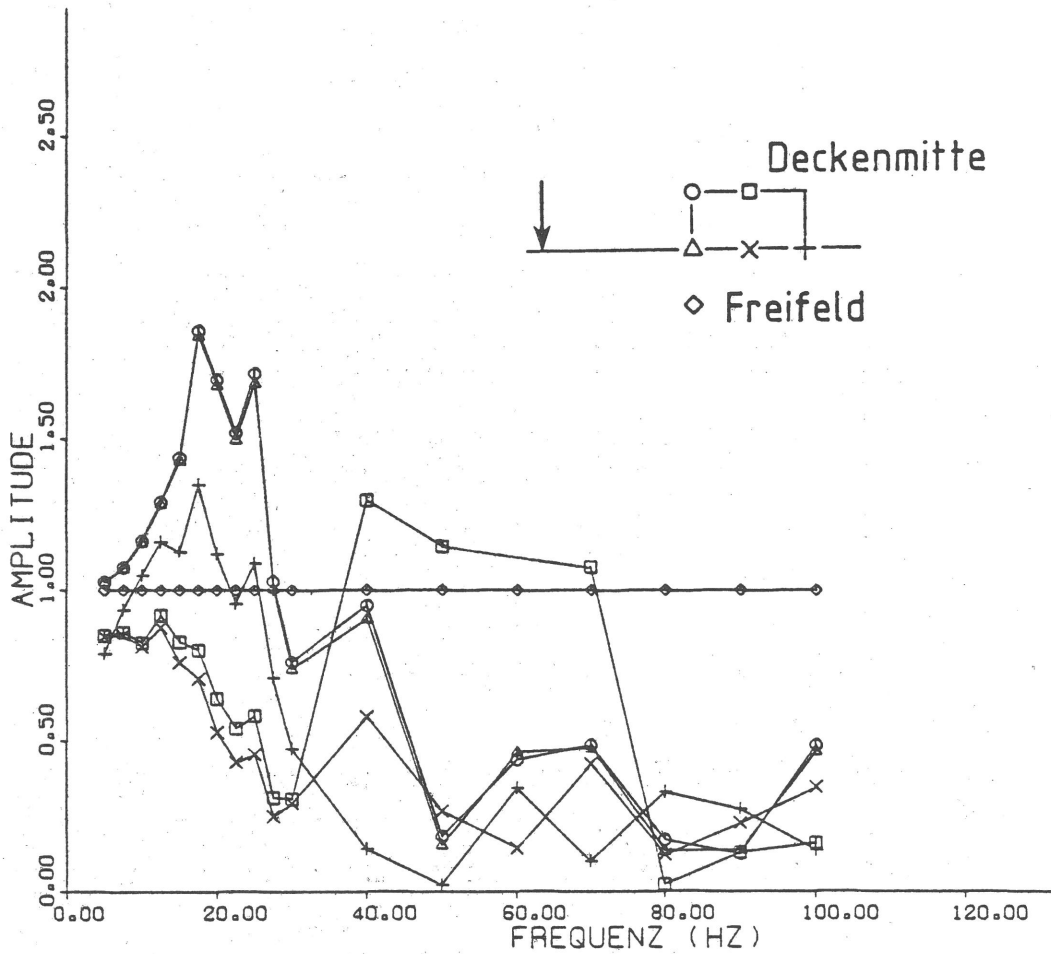
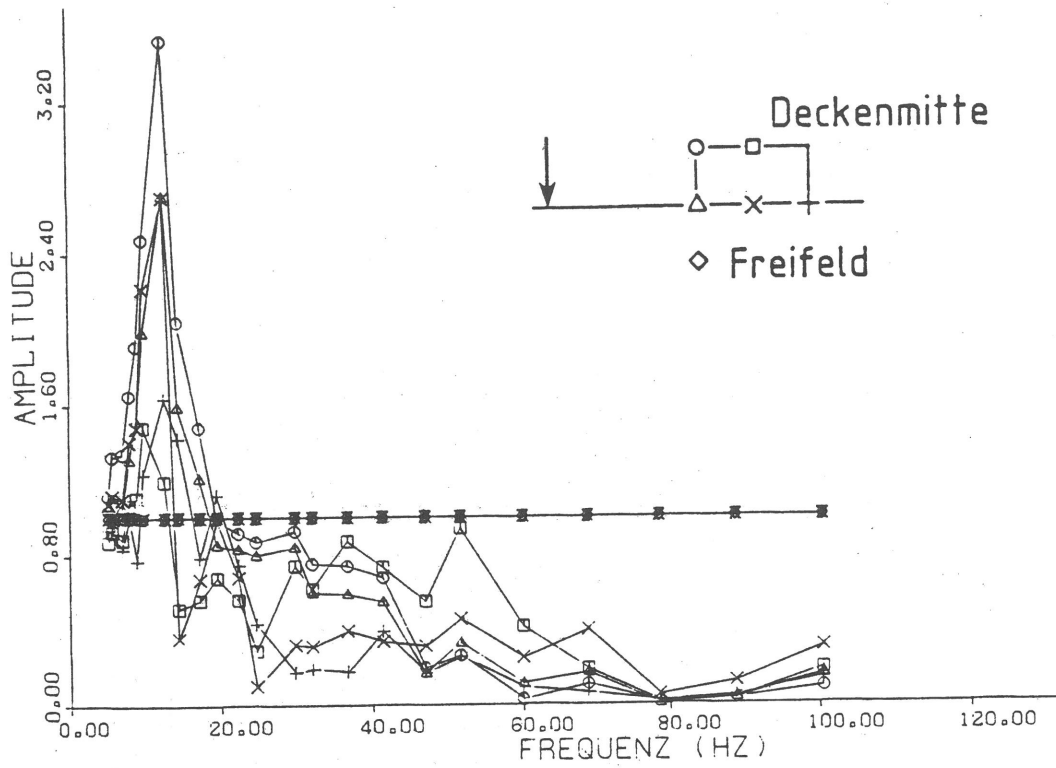


Bild 15.4 - Modellbauwerk unter Wellenfeldanregung: Übertragungsfunktionen einiger Bauwerkspunkte aus Messung (oben) und Rechnung (unten)

Auch im Verhältnis der Amplituden der einzelnen Meßpunkte untereinander werden eine Reihe von Übereinstimmungen sichtbar:

Zunächst bei tiefen Frequenzen sind die Amplituden in Bauwerksmitte am kleinsten. Dieser Effekt ist am deutlichsten bei 20 Hz (15-25 Hz) und ist auf den großen Kippschwinganteil an der Bauwerksbewegung zurückzuführen. Bei 40 Hz (30-40 Hz) sind die Amplituden hinten deutlich am kleinsten, die Amplituden vorne am größten (Kippen um das hintere Fundament). Bei 50 Hz (45 Hz) fallen die Amplituden vorn sehr schnell ab, die Amplituden in Bauwerksmitte sind relativ am größten. In dieser Frequenz stimmen die Wellenlänge im Boden und die Bauwerkslänge überein, so daß sich die verschiedenenphasigen Anregungsanteile einer Welle gerade auslöschen und die verbleibenden Amplituden im wesentlichen durch Wandverformungen zustandekommen. Der Frequenzbereich, in dem die Deckenamplituden größer als alle übrigen Amplituden sind, liegt übereinstimmend zwischen 40 und 70 Hz.

Die Deckeneigenfrequenz wurde im Versuch durch Impulsanregung der Decke zu $f_0 = 60$ Hz ermittelt. Die genauere Abtastung der Schwingungsform bei harmonischer Schwingeranregung über den Boden ergab ein stark unsymmetrisches Verhalten, das einerseits die entsprechenden unsymmetrischen Rechenergebnisse für hohe Frequenzen bestätigt, andererseits auch die nur schwache Resonanzanregung der symmetrischen Eigenform erklärt.

Den beiden Bauwerk-Boden-Eigenfrequenzen lassen sich insbesondere aus den Rechnungen bestimmte Eigenformen zuordnen:

Das bei 13 Hz gemessene bzw. bei 17 Hz berechnete Maximum entspricht der Kippeigenform, das leichte Maximum bei 20 bzw. 22 Hz dürfte die Vertikaleigenfrequenz markieren. Die bestehenden Unterschiede zwischen Messung und Rechnung in diesem Bauwerk-Boden-Resonanzbereich lassen sich alle auf die deutlich tiefer gemessene Kippeigenfrequenz zurückführen. Da die Dämpfung des Kippfreiheitsgrades erheblich mit kleiner werdender Frequenz abnimmt, ist die Resonanzüberhöhung bei der tieferen gemessenen Eigenfrequenz höher. Eine weitere Folge der bei den Messungen tieferliegenden Kippeigenfrequenz ist, daß bei der folgenden Vertikaleigenfrequenz die Amplituden schon stärker reduziert sind als bei der Rechnung, so daß im Gegensatz zur Rechnung kaum noch eine absolute Resonanzüberhöhung gegenüber dem Freifeld auftritt.

Insgesamt kann man beim gemessenen Bauwerksverhalten wie bei den Messungen zur Ausbreitung im Boden von einer guten Übereinstimmung mit der Theorie bzw. den Berechnungen sprechen. Viele Details und Tendenzen stimmen in Messung und Rechnung überein. Die Lage von charakteristischen Frequenzen weicht allerdings ein wenig ab, insbesondere die Kippeigenfrequenz des Bauwerks auf dem Boden liegt in den Meßergebnissen niedriger, als von der Berechnung her erwartet.

16. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit umfaßt drei Beiträge zur dynamischen Bauwerk-Boden-Wechselwirkung.

Zur Methode der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung wurden zwei bekannte Rechenverfahren, die Randelementmethode und die Halbraummethode, vereinfacht und einheitlich dargestellt. Dabei zeigte sich, daß die physikalischen Grundlagen der beiden Methoden, die Punktlastlösungen des Vollraums und des Halbraums, zu einem wesentlichen Teil sehr ähnlich sind. Die Berechnung eines Fundamentbeispiels mit verschiedenen Verfahren bestätigte, daß die vorgenommenen Vereinfachungen die Ergebnisse kaum beeinflussen. Das Rechenverfahren für den Boden wurde mit der Finite-Element-Methode für das Bauwerk verknüpft, so daß eine Vielzahl von verschiedenen Strukturen auf dem Boden bei Anregung durch dynamische Kräfte oder durch Schwingungen des Bodens berechnet werden können.

Zum Grundproblem der Bauwerk-Boden-Wechselwirkung, der dynamischen Steifigkeit starrer Fundamente, wurden einige neue Ergebnisse für Streifenfundamente und Fundamentgruppen dargestellt, die auch allgemeinere Rückschlüsse auf die Wechselwirkung benachbarter Fundamentflächen zulassen.

Zur Frage der Schwingungsübertragung vom Boden in Bauwerke wurde versucht, einen möglichst umfassenden Überblick über die auftretenden Phänomene zu geben. Dazu wurden eine Reihe sehr verschiedener Strukturen bei Wellenfeldanregung untersucht. Es ergeben sich in der Regel Abminderungen der Bauwerksamplituden gegenüber dem Boden, die je nach Struktur verschiedenen Ursachen wie Kinematik, Bauwerksträgheit und Bauwerkssteifigkeit zugeordnet werden können. Überhöhungen der Bauwerksamplituden gegenüber dem Boden treten vor allem in der Kippeigenfrequenz der Struktur auf.

Die Messungen an einem Bauwerksbeispiel und der Vergleich mit der Berechnung bestätigen die Anwendbarkeit der theoretischen Methoden auf praktische Problemstellungen.

Bezeichnungen

a	Fundamentbreite
a_0	normierter Frequenzparameter
A	Konstante, Amplitude
b	Fundamentlänge
b_j	Starrkörperverschiebung
\underline{b}	Basisvektor
B	(Starrkörper-) Transformationsmatrix
c	normierte Fundamentdämpfung
D	Verzerrungstensor (Abschnitt 2)
D, D_0	(Kreis-) Fundamentdämpfung (Abschnitt 9)
D	Dämpfungskonstante des Bodens (Abschnitt 15)
\underline{e}	Einheitsvektor
E	Elastizitätsmodul
f	Frequenz
\underline{f}	Volumenkraftdichte (Abschnitt 2)
F	Fläche
h	Höhe der Struktur
h_S	Höhe des Schwerpunkts
i	imaginäre Einheit
I	Imaginärteil der Fundamentnachgiebigkeit (Abschnitt 9)
I	Einheitsmatrix
J	Flächenträgheitsmoment
k	normierte Fundamentsteifigkeit
k	Bettungsmodul (Abschnitt 13)
K	Steifigkeitsmatrix
K_B, K_S	Boden- und Struktursteifigkeit
K'	auf die Starrkörperfreiheitsgrade reduzierte Steifigkeitsmatrix
K_0	Normierungsfaktor der Fundamentsteifigkeit
m	Anzahl der diskreten Punkte
m	Masse der Struktur
\underline{m}	Moment
M	Massenmatrix

n	Anzahl der Freiheitsgrade
\underline{n}	äußere Flächennormale
N	Nachgiebigkeitsmatrix
p	Knotenpunktskräfte (Spaltenvektor)
p_0	Freifeldersatzlast
p'	resultierende Kraftgrößen bei starren Fundamenten
p'	Kraft/Länge (Abschnitt 13)
\underline{p}	Kraftvektor
P	Kraftmatrix
r, \underline{r}	Radius, Abstand (-vektor)
\bar{r}	normierter Frequenz-Abstands-Parameter
r_0	Fundamentradius
R	Realteil der Fundamentnachgiebigkeit (Abschnitt 9)
S, S_0	(Kreis-) Fundamentsteifigkeit
t	Zeit
\underline{t}	Spannungsvektor
T	Spannungsmatrix
u	Knotenpunktverschiebungen (Spaltenvektor)
u_0	Freifeldverschiebungen
u'	Starrkörperverschiebungen
u_H, u_V	Horizontal- und Vertikalverschiebung
u_L, u_T	Longitudinal- und Transversalverschiebung
\underline{u}	Verschiebungsvektor
U	Verschiebungsmatrix
v	Wellengeschwindigkeit
v_L, v_T	Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit
v_R	Rayleighwellengeschwindigkeit
V	Übertragungsverhältnis (u/u_0)
x	Koordinate, horizontal (in Ausbreitungsrichtung)
\underline{x}	Ortsvektor
y	Koordinate, horizontal
z	Koordinate, vertikal (nach unten)

α, γ	Faktoren, Konstanten
β	Materialparameter ($= v_T/v_L$)
θ	Massenträgheitsmoment (-entensor)
κ	Wellengeschwindigkeitsverhältnis ($=v_T/v_R$)
λ	Wellenlänge
λ	Lamésche Konstante
μ	Lamésche Konstante (Schubmodul)
ν	Querkontraktionszahl
ξ	Betrag des Wellenzahlvektors (Abschnitt 3)
ξ	x-Komponente des Wellenzahlvektors (Abschnitt 13)
$\underline{\xi}$	Wellenzahlvektor
$\underline{\xi}_R, \underline{\xi}_I$	Realteil und Imaginärteil der Wellenzahl
ρ	Massendichte
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Phasenwinkel (Abschnitt 4)
φ	Drehwinkel (Abschnitt 8f)
$\underline{\varphi}$	Drehwinkel
ω	Kreisfrequenz

Literaturverzeichnis

- /1/ L. Auersch: Erschütterungen infolge Schienennahverkehr: Theoretische und meßtechnische Untersuchungen zur Emission, zur Ausbreitung durch den Boden und zur Übertragung in Gebäude.
Bericht zum BMFT-Forschungsvorhaben TV 8329, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1986
- /2/ K.J. Bathe, E. Wilson, F.E. Peterson: SAP IV-Beschreibung und Benutzerhandbuch.
Report Nr. 73-3 des Inst. f. Konstr. Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1973
- /3/ C.A. Brebbia: The Boundary Element Method for Engineers.
Pentech Press, London, 1978
- /4/ C. Chao: Dynamical Response of an Elastic Half-Space to Tangential Surface Loadings.
J. Appl. Mech., S. 559-567, 1960
- /5/ R.W. Clough, J. Penzien: Dynamics of Structures.
Mc Graw-Hill, New York, 1975
- /6/ L. Cremer, M. Heckl: Körperschall.
Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967
- /7/ T.A. Cruse, F.J. Rizzo: A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I.
J. Math. Anal. Appl., 11, S.244-259, 1968
- /8/ DIN 4150: Erschütterungen im Bauwesen.
1986
- /9/ H.J. Dolling: Abschirmung von Erschütterungen durch Bodenschlitze.
Die Bautechnik, 47 S.151-158 und 193-204, 1970
- /10/ J. Elorduy, J.A. Nieto, E.M. Szekely: Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading.
Proc. Int. Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Univ. New Mexico, Albuquerque, S.105-121, 1967
- /11/ L. Gaul: Dynamic Interaction of a Foundation with Viscoelastic Halfspace.
Proc. Dyn. Meth. Soil Rock Mech., Karlsruhe, S.167-176, 1977
- /12/ G. Gazetas: Static and Dynamic Displacements of Foundations on heterogeneous multilayered soils.
Geotechnique, 30, No.2, S.159-177, 1980

- /13/ J.R. Hall: Coupled Rocking and Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings.
Proc. Int. Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Univ. New Mexico, Albuquerque, 1967
- /14/ H.G. Hartmann: Pfahlgruppen in geschichtetem Boden unter horizontaler dynamischer Belastung.
Dissertation, TH Darmstadt, 1986
- /15/ M. Heckl: Körperschallübertragung bei homogenen Platten beliebiger Dicke.
Acustica, 49, S.183-191, 1981
- /16/ U. Holzlöhner: Schwingungen des elastischen Halbraums bei Erregung auf einer Rechteckfläche.
Ing.-Arch., 38, S.370-379, 1969
- /17/ U. Holzlöhner: Vibrations of the Elastic Half-Space due to Vertical Surface Loads.
Earthq. Eng. Struct. Dyn., 8, S.405-414, 1980
- /18/ M. Hoshiya, K. Ishii: Evaluation of Kinematic Interaction of Soil Foundation Systems by a Stochastic Model.
Proc. Conf. on Soil Dyn. Earthq. Eng., Southampton, S.951-964, 1982
- /19/ E. Kausel: Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media.
Dissertation, Massachusetts, Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1974
- /20/ E. Kausel, R.V. Whitman, F. Elsabee, J.P. Morray: Dynamic Analysis of Embedded Structures.
Trans. 4th Conf. Struct. Mech. Reactor Techn., San Francisco, K2/6, 1977
- /21/ E. Kausel: An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic Loads in Layered Media.
Department of Civil Eng., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1981
- /22/ Kelvin: Displacements due to a Point Load in an Indefinitely Extended Solid.
zitiert nach /21/, 1848
- /23/ J. Kitamura, S. Sakurai: Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-Infinite Elastic Medium.
Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 3, S.159-171, 1979.

- /24/ H. Lamb: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid.
Phil. Trans. Royal Soc., London, A203, S.1-42, 1904
- /25/ M. Ottenstreuer: Ein Beitrag zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Baugrund unter der Verwendung des Verfahrens der Randelemente.
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1981
- /26/ M. Ottenstreuer, G. Schmid: Boundary Elements Applied to Soil-Foundation Interaction.
Boundary Element Method (Ed.: C.A. Brebbia), Springer, Berlin, 1981
- /27/ B. Prange: Primary and Secondary Interferences in Wavefields.
Proc. Dyn. Meth. Soil Rock Mech., Karlsruhe, S.281-308, 1977
- /28/ F.E. Richart, J.R. Hall, R.D. Woods: Vibrations of Soils and Foundations.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970
- /29/ W. Rücker: Dynamical Behaviour of Rigid Foundations of Arbitrary Shape on a Halfspace.
Earthq. Eng. Struct. Dyn., 10, S. 675-690, 1982
- /30/ W. Sarfeld, C. Fröhlich: Berechnungsverfahren elastischer Strukturen auf dem elastisch, isotropen Halbraum.
Diplomarbeit, TU Berlin, 1978
- /31/ S. Savidis, T. Richter: Dynamic Interaction of Rigid Foundations.
Proc. 9th Int. Conf. on Soil Dyn. and Found. Eng., Tokyo, 2, S.369-374, 1977
- /32/ S. Savidis, W. Sarfeld: Verfahren und Anwendung der dreidimensionalen Wechselwirkung.
Vorträge der Baugrundtagung, Mainz, S.47-78, 1980
- /33/ W.T. Thomson, T. Kobori: Dynamical Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Halfspace.
J. Appl. Mech. ASME, 30, S.579-584, 1963
- /34/ T. Triantafyllidis: Analytische Lösung des Problems der dynamischen Untergrundkopplung starrer Fundamente.
Dissertation, Universität Karlsruhe, 1984
- /35/ G. Waas: Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamic Problems in Semi-Infinite Media.
Dissertation, University of California, Berkeley, 1972

- /36/ H. Wada: Transient Flexural Vibrations of an Elastic Column Supported by an Elastic Half-Space.
Earthq. Eng. Struct. Dyn., 11, S.21-31, 1983
- /37/ J.P. Wolf, P. Obernhuber: Travelling Wave Effects in Soil-Structure Interaction.
Trans. 5th Conf. Struct. Mech. Reactor Tech., Berlin, K5/1, 1979
- /38/ J.P. Wolf: Dynamic Soil-Structure Interaction.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985
- /39/ H.L. Wong, J.E. Luco: Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape.
Earthq. Eng. Struct. Dyn., 4, S.579-587, 1976
- /40/ O.C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science.
Mc Graw-Hill, London, 1971

Anhang A

Zur Kennzeichnung von Vektoren, Tensoren, Matrizen und Elementen

Vektoren im dreidimensionalen Raum werden klein geschrieben und unterstrichen, z.B. Ortsvektor \underline{x} , Verschiebungsvektor \underline{u} . Tensoren im dreidimensionalen Raum werden groß geschrieben, z.B. Spannungstensor T , Verzerrungstensor D . Einzeilige oder -spaltige Matrizen werden klein geschrieben, z.B. Matrizen der Verschiebungen u und der Kräfte p . In Matrizenprodukten werden Zeilenmatrizen außerdem durch das Transpositionszeichen gekennzeichnet, z.B. $b^T K b$. Sonstige Matrizen werden groß geschrieben, z.B. Steifigkeitsmatrix K , Nachgiebigkeitsmatrix N . Elemente von Tensoren und Matrizen sind doppelt indizierte Großbuchstaben. Elemente von Vektoren und einzeiligen Matrizen sind einfach indizierte kleine Buchstaben. In Abschnitt zwei bedeuten gleiche Indizes Summation über die drei Raumrichtungen entsprechend der Summenkonvention. Die Indizierung erfolgt in der Regel in lateinischen Buchstaben. In Abschnitt 6 werden zur Unterscheidung griechische Indizes für die diskreten Raumpunkte und lateinische Indizes für die Freiheitsgrade des Systems verwendet. So besteht z.B. die Verschiebungsmatrix U aus den zu den Freiheitsgraden gehörigen Spaltenmatrizen u_i , wobei diese sich wiederum aus den Verschiebungsvektoren $\underline{u}_{\beta i}$ der einzelnen Raumpunkte \underline{x}_{β} zusammensetzen.

Die Systemmatrizen (Massenmatrix M , Steifigkeitsmatrix K , Matrizen der Verschiebungen u und der Kräfte p) bei der Beschreibung der Rechenverfahren in Abschnitt 5 und 7 sind immer globale Matrizen, das heißt sie beziehen sich auf alle vorkommenden Freiheitsgrade (Struktur, Fundament und Boden). Das gilt insbesondere auch für die Freifeldverschiebung u_0 und die Steifigkeit K_B des Bodens, die für die reinen Strukturfreiheitsgrade aus Nullen bestehen. Um Verwechslungen mit verbreiteten Methoden der Bauwerksdynamik /5/ vorzubeugen, sei noch einmal betont, daß es sich hier nicht um eine Formulierung in Relativverschiebungen des Bauwerks handelt.

Anhang B

Die Spannungsfunktionen der Vollraumlösung

Die normierten Spannungsfunktionen $g_i(\bar{r}, \beta)$, die in Gleichung (4.23) definiert sind, lauten

$$g_i(\bar{r}, \beta) = \left(a_1 \bar{r} + b_1 + \frac{c_1}{\bar{r}} + \frac{d_1}{\bar{r}^2} \right) e^{-i\bar{r}} + \left(a_2 \bar{r} + b_2 + \frac{c_2}{\bar{r}} + \frac{d_2}{\bar{r}^2} \right) e^{-i\beta \bar{r}}$$

mit den folgenden Koeffizienten

Funktion	j	a_j	b_j	c_j	d_j
$g_1(\cong \sigma_L)$	1	0	4	-i12	-12
	2	-i β	-4 $\beta^2 - 1$	i12 β	12
$g_2(\cong \sigma_T)$	1	0	-2	i6	6
	2	i(2 $\beta^3 - \beta$)	4 $\beta^2 - 1$	-i6 β	-6
$g_3(\cong \tau)$	1	-i	-3	i6	6
	2	0	2 β^2	-i6 β	-6

Anhang C

Alternative Ableitung der Randelementmethode

In /25/, /26/ wird die Randelementmethode aus dem Reziprozitätsgesetz abgeleitet, das mit zwei Lösungen \underline{u} , \underline{t} und \underline{u}^* , \underline{t}^* für einen elastischen Körper mit der Oberfläche F

$$\int_F \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{t}^*(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_F \underline{t}(\underline{x}) \cdot \underline{u}^*(\underline{x}) \, d\underline{x} \quad (C1)$$

lautet. Man kommt zu diskreten Gleichungen, indem man die Verschiebungs- und Spannungsfelder $\underline{u}(\underline{x})$ und $\underline{t}(\underline{x})$ der gesuchten Lösung durch lokale Ansatzfunktionen $f_\beta(\underline{x})$ und $g_\beta(\underline{x})$ und die Werte \underline{u}_β , \underline{t}_β an den diskreten Punkten \underline{x}_β beschreibt

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}) &= \sum_{\beta=1}^m f_\beta(\underline{x}) \underline{u}_\beta, \\ \underline{t}(\underline{x}) &= \sum_{\beta=1}^m g_\beta(\underline{x}) \underline{t}_\beta. \end{aligned} \quad (C2)$$

Für \underline{t}^* und \underline{u}^* nimmt man die Punktlastlösungen des Vollraumes, wobei man die Kraft nacheinander an jedem Punkt \underline{x}_α und in jede Richtung \underline{e}_k ansetzt. Man erhält so die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^m \underline{u}_\beta \cdot \int_{F_\beta} f_\beta(\underline{x}) \underline{t}^*(\underline{x}-\underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\beta) \, d\underline{x} \\ = \sum_{\beta=1}^m \underline{t}_\beta \int_{F_\beta} g_\beta(\underline{x}) \underline{u}^*(\underline{x}-\underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) \, d\underline{x} \quad \alpha=1, \dots, m; k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (C3)$$

Die Verschiebungen \underline{u}_β und Spannungen \underline{t}_β faßt man gemäß

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_\beta \\ \vdots \\ \underline{u}_m \end{bmatrix} \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} F_1 \underline{t}_1 \\ \vdots \\ F_\beta \underline{t}_\beta \\ \vdots \\ F_m \underline{t}_m \end{bmatrix} \quad (C4)$$

zusammen, ebenso die Integrale

$$\underline{p}_{\beta i} = \int_{F_\beta} f_\beta(\underline{x}) \underline{t}^*(\underline{x}-\underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\beta) \, d\underline{x} \quad (C5)$$

und

$$\underline{u}_{\beta i} = \frac{1}{F_\beta} \int_{F_\beta} g_\beta(\underline{x}) \underline{u}^*(\underline{x}-\underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) \, d\underline{x} \quad (C6)$$

zu

$$\underline{p}_i = \begin{bmatrix} \underline{p}_{1i} \\ \vdots \\ \underline{p}_{\beta i} \\ \vdots \\ \underline{p}_{mi} \end{bmatrix} \quad \underline{u}_i = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1i} \\ \vdots \\ \underline{u}_{\beta i} \\ \vdots \\ \underline{u}_{mi} \end{bmatrix}, \quad (C7)$$

wobei i den durch \underline{e}_k und \underline{x}_α definierten Freiheitsgrad bezeichnet. Die Gleichungen (C3) schreiben sich dann

$$p_i^T u = u_i^T p \quad i=1, \dots, n \quad (C8)$$

beziehungsweise

$$P^T u = U^T p \quad , \quad (C9)$$

wenn man die Verschiebungsmatrix U und die Kraftmatrix P gemäß

$$U = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \quad P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$$

aufbaut. Löst man Gleichung (C9) nach p auf

$$p = U^{-1} P^T u \quad (C10)$$

so stellt sich die Steifigkeitsmatrix als

$$K = U^{-1} P^T = (P U^{-1})^T \quad (C11)$$

dar.

Den Zusammenhang zu dem in Abschnitt 6 beschriebenen Verfahren bekommt man, indem man die Ansatzfunktionen in (C2) spezifiziert und eine spezielle Integrationsweise in (C5) und (C6) festlegt. Man nimmt konstante Ansatzfunktionen

$$f_\beta(\underline{x}) = g_\beta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} \text{ in } F_\beta \\ 0 & \underline{x} \text{ außerhalb von } F_\beta \end{cases} \quad (C12)$$

und wählt die "Einpunktintegration"

$$\underline{p}_{\beta i} = \int_{F_\beta} \underline{t}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\beta) d\underline{x} = F_\beta \underline{t}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, \underline{n}_\beta) \quad (C13)$$

$$\underline{u}_{\beta i} = \frac{1}{F_\beta} \int_{F_\beta} \underline{u}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) d\underline{x} = \underline{u}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) \quad (C14)$$

für alle Punkte $\underline{x}_\beta \neq \underline{x}_\alpha$. Für $\underline{x}_\beta = \underline{x}_\alpha$ bleibt es bei der allgemeinen Darstellung

$$\underline{p}_{\alpha i} = \int_{F_\alpha} \underline{t}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k, \underline{n}_\beta) d\underline{x} \quad , \quad (C15)$$

$$\underline{u}_{\alpha i} = \frac{1}{F_\alpha} \int_{F_\alpha} \underline{u}^*(\underline{x} - \underline{x}_\alpha, \underline{e}_k) d\underline{x} \quad . \quad (C16)$$

Die Gleichungen (C13) bis (C16) stimmen dann mit den entsprechenden Gleichungen (6.9) bis (6.12) überein, dementsprechend auch die Matrizen P und U . Das im 6. Abschnitt beschriebene Verfahren stellt demnach einen Spezialfall der Randelementmethode dar. Allerdings wird hier gemäß (C11)

$$K = (P U^{-1})^T$$

die gegenüber (6.5)

$$K = P U^{-1}$$

transponierte Steifigkeitsmatrix berechnet.

Anhang D

Die Transformationsmatrix für ein starres Fundament

Für ein starres Fundament mit den Starrkörperfreiheitsgraden

$$u' = \begin{bmatrix} |u \\ \varphi \end{bmatrix}$$

ergeben sich die Knotenpunktverschiebungen

$$u = \begin{bmatrix} |u_1 \\ \vdots \\ |u_\alpha \\ \vdots \\ |u_m \end{bmatrix}$$

aus

$$u = B u'$$

mit der Transformationsmatrix

$$B = \begin{bmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z & \underline{e}_x x(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) & \underline{e}_y x(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) & \underline{e}_z x(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z & \underline{e}_x x(\underline{x}_\alpha - \underline{x}_0) & \underline{e}_y x(\underline{x}_\alpha - \underline{x}_0) & \underline{e}_z x(\underline{x}_\alpha - \underline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z & \underline{e}_x x(\underline{x}_m - \underline{x}_0) & \underline{e}_y x(\underline{x}_m - \underline{x}_0) & \underline{e}_z x(\underline{x}_m - \underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

Dabei ist \underline{x}_0 der Bezugspunkt, auf den sich der Drehwinkel φ und die Momente \underline{m} beziehen.

Anhang E

Die dynamische Steifigkeitsmatrix für die freie Oberfläche einer halbunendlichen Struktur (Wandscheibe oder Kontinuum)

Bei der Berechnung einer gebetteten halbunendlichen Wandscheibe unter Wellenfeldanregung in Abschnitt 13.3.1 wird die (2x2)-Steifigkeitsmatrix benötigt, die die Spannungswellenamplituden mit den Verschiebungsamplituden jeweils an der freien Oberfläche der Scheibe miteinander verknüpft.

Für eine ebene oder exponentielle harmonische Welle

$$\underline{u} = \underline{A} e^{i(\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x})} \quad (E1)$$

erhält man die Spannungen an der Oberfläche mit der Normalen \underline{n} aus Gleichung (2.6) zu

$$\underline{t} = -i(\mu \underline{\xi} \cdot \underline{n} \underline{A} + \mu \underline{A} \cdot \underline{n} \underline{\xi} + \lambda \underline{A} \cdot \underline{\xi} \underline{n}) e^{i(\omega t - \underline{\xi} \cdot \underline{x})} \quad (E2)$$

Dies gilt jeweils für den Longitudinal- und den Transversalwellenanteil, wobei

$$\underline{\xi}_L = \xi(\underline{e}_x \pm \sqrt{\frac{v}{v_L}^2 - 1} \underline{e}_z) \quad , \quad (E3)$$

$$\underline{\xi}_T = \xi(\underline{e}_x \pm \sqrt{\frac{v}{v_T}^2 - 1} \underline{e}_z)$$

$$\underline{A}_L = \alpha_L \underline{\xi}_L =: \alpha_L \underline{b}_L \quad (E4)$$

$$\underline{A}_T = \alpha_T \underline{e}_y \times \underline{\xi}_T =: \alpha_T \underline{b}_T$$

ist (siehe Abschnitt 3). Man hat also für ein Verschiebungsfeld an der Oberfläche ($z=0$)

$$\underline{u} = (\alpha_L \underline{b}_L + \alpha_T \underline{b}_T) e^{i(\omega t - \xi x)} \quad (E5)$$

beziehungsweise unter Weglassung des Wellenfaktors $e^{i(\omega t - \xi x)}$

$$\underline{u} = (\underline{b}_L, \underline{b}_T) \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{pmatrix} =: B \underline{\alpha} \quad (E6)$$

die Spannungen ($\underline{n} = \underline{e}_z$)

$$\begin{aligned} \underline{t} &= -i[\alpha_L(2\mu \underline{\xi}_L \cdot \underline{e}_z \underline{\xi}_L + \lambda \underline{\xi}_L^2 \underline{e}_z) \\ &\quad + \alpha_T(\mu \underline{\xi}_T \cdot \underline{e}_z \underline{b}_T + \mu \underline{b}_T \cdot \underline{e}_z \underline{\xi}_T)] \\ &= (K \underline{b}_L, K \underline{b}_T) \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{pmatrix} =: K^* \underline{\alpha} \quad (E7) \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix K der Oberfläche ergibt sich schließlich aus (E6) und (E7)

$$\underline{t} = K^* \underline{\alpha} = K^* B^{-1} \underline{u} = K \underline{u}$$

zu

$$K = K^* B^{-1} \quad (E8)$$

Anhang F

Überblick über die Rechenbeispiele

Abschnitt	Diskretisierung	Methode	Frequenzbereich	Ergebnisdarstellung	Bild
<u>Quadratfundament</u>					
8.3	$n_B = 64$ $n_S = 1$ $2a = 2m$ $dx = 0,25m$	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Halbraum</u> (Asymptoten) * • <u>Vollraum</u> entkoppelt • Halbraum (Asymptoten) <u>Näherung</u> (s. 8.2.3) • Halbraum (vollständige Punktlastlösung, Teilflächenintegration, <u>Rücker</u> /29/) • Halbraum <u>entkoppelt</u> (Rücker /29/) 	$f = 0-5$ Hz $df = 0,25/0,5$ Hz ($a_0 = 0-5$)	normierte Steifigkeit + Dämpfung (s. 8.29 und 8.31)	8.1-8.3
<u>Fundamentgruppe</u>					
9.1	$n_B = 9$ $n_S = 1$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz ($a_0 = 0-0,5$)	normierte Steifigkeit + Dämpfung (s. Text)	9.2
<u>Streifenfundament</u>					
9.2	$n_B = 5-50$ $n_S = 1$ $b = 5-50m$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz ($a_0 = 0-0,9$)	normierte Steifigkeit + Dämpfung (s. Text)	9.3
<u>Starres masseloses Fundament</u>					
11.2	$n_B = 21$ $n_S = 1$ $b = 20m$ $dx = 1m$	<ul style="list-style-type: none"> • Halbraum • <u>Näherung</u> 	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz	$\frac{u_{1H}}{u_{0H}}, \frac{u_{1V}}{u_{0H}}, \frac{\varphi}{u_{0V}}$ $\frac{u_{iV}}{u_{0V}}$	11.2 11.3 11.4

n_B Anzahl der Bodenpunkte

n_S Anzahl der Strukturpunkte

dx Abstand benachbarter Punkte

df Frequenzabstand

* Die unterstrichenen Worte sind die Kurzbezeichnungen im weiteren Teil der Tabelle und in Bild 8.1 - 8.3

Abschnitt	Diskretisierung	Methode	Frequenzbereich	Ergebnisdarstellung	Bild
<u>Starre massebehaftete Strukturen</u>					
12.2	$n_B = 21$ $n_S = 1$ $b = 20m$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz	$\frac{u_{iH}}{u_{0H}}, \frac{u_{iV}}{u_{0V}}$	12.3
12.2	$n_B = 21$ $n_S = 1$ $b = 20m$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz	$\frac{u_{iH}}{u_{0H}}, \frac{u_{iV}}{u_{0H}}$ $\frac{u_{iH}}{u_{0V}}, \frac{u_{iV}}{u_{0V}}$	12.4, 12.5
<u>Elastischer Balken</u>					
13.1.2	$n_B = n_S = 21$ $b = 20m$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 10-80$ Hz $df = 10$ Hz	$\frac{u_{iV}}{u_{0V}}$ $\frac{u_{1V}}{u_{0V}}$	13.4, 13.5 13.6
<u>Elastische Wandscheiben</u>					
13.2	$n_B = 21$ $n_S = 6 \times 21$ $h \times b = 5m \times 20m$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz $df = 1$ Hz	$\frac{u_{iV}}{u_{0V}}$	13.7, 13.8
13.3.2	$n_B = 21$ $n_S = 21 \times 21$ $h \times b = 20m \times 20m$	Halbraum	$f = 1-30$ Hz	$\frac{u_{iH}}{u_{0H}}, \frac{u_{iV}}{u_{0V}}$ $\frac{u_{iH}}{u_{0V}}, \frac{u_{iV}}{u_{0H}}$	13.12 - 13.16 13.12, 13.13
<u>Modellbauwerk</u>					
14.	$n_B = 22$ $n_S = 78$ $dx = 1m$	Halbraum	$f = 5-100$ Hz $df = 2,5/5$ Hz	$\frac{u_{iV}}{u_{0V}}$ (bei Kraft in 15m Entfernung)	14.3, 15.4

u_{0H}, u_{0V} Horizontal- und Vertikalamplitude des Bodens (der Freifeldwellenanregung)

u_{1H}, u_{1V} Horizontal- und Vertikalamplitude des Fundamentmittelpunktes

u_{iH}, u_{iV} Horizontal- und Vertikalamplitude verschiedener Strukturpunkte

Wegen der geringen Horizontal-Vertikal-Kopplung bei den niedrigen Strukturen und der getrennt berechneten Horizontal- und Vertikalanregung bei den stark gekoppelten hohen Strukturen (Abschnitt 12.2 und 13.3) stellen die berechneten Amplitudenverhältnisse zugleich auch die Übertragungsfunktionen der jeweiligen Strukturpunkte bei Wellenfeldanregung mit $v = v_R$, d. h. Rayleighwellengeschwindigkeit, dar.

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/September 1968

Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/Juli 1970 (vergriffen)

Zum Problem des Feuchtigkeitschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebnern
von Dr.-Ing. Götz Andreae

Nr. 3/September 1970 (vergriffen)

Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile
von Dr.-Ing. Josef Ziebs

Nr. 4/Dezember 1970 (vergriffen)

Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren
von Dr. rer. nat. Arno Burmester

Nr. 5/März 1971

Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
von Dr. rer. nat. Norbert Steiner

Nr. 6/April 1971

Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
von Prof. Dr.-Ing. Paul Schneider

Nr. 7/Juli 1971

Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Petrowitz

Nr. 8/November 1971

Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Helmut Veith

Nr. 9/November 1971

Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Möller

Nr. 10/Januar 1972

Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
von Dr.-Ing. Dietmar Aurich und Prof. Dr. phil. Erich Martin

Nr. 11/Februar 1972

Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden
von Dr.-Ing. Hans-Joachim Krause

Nr. 12/Mai 1972

Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
von Dir. u. Prof. Dr. rer. nat. Hubert Feuerberg

Nr. 13/Juni 1972

Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig (Berichter), Prof. Dr.-Ing. Kurt Kirschke, Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig und Dipl.-Phys. Harald Tischer

Nr. 14/Juli 1972

Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
von Eberhard Fischer

Nr. 15/August 1972

Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Heinz Pohl

Nr. 16/August 1972

Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
von Dr.-Ing. Erwin Knublauch

Nr. 17/August 1972

Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
von Dr.-Ing. Peter Reimers

Nr. 18/Januar 1973

Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 19/Januar 1973

Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. K. Kaffanke und Dr.-Ing. H. Czichos

Nr. 20/April 1973

Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 21/Juli 1973

Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
Literaturrecherche von Dipl.-Phys. D. Klaffke und Dr.-Ing. W. Maennig

Nr. 22/Juli 1973

Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
von Dipl.-Ing. R. Rudolphi und Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 23/November 1973

Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin — Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen
von Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Ruske

Nr. 24/November 1973

Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung
von Dipl.-Ing. J. Stanke, Ing. grad. E. Klement und Dipl.-Ing. R. Rudolphi

Nr. 25/Dezember 1973

Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
von Dr.-Ing. E. Knublauch

Nr. 26/August 1974

Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen —
von Dipl.-Ing. P. Jost, Dr.-Ing. P. Reimers und Dr.-Ing. P. Weise

Nr. 27/August 1974

Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Hermann Wüstenberg

Nr. 28/August 1974

Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern
von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Heinrich

Nr. 29/August 1974

Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem ideallsotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall
von Prof. Dr.-Ing. P. Schneider

Nr. 30/September 1974 (vergriffen)

The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology
von Dr. Horst Czichos und Dr. Geert Salomon

Nr. 31/August 1975

Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung
von Dr.-Ing. Gerhard Fuhrmann

Nr. 32/September 1975

Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen
von Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Bernhard Böttcher

Nr. 33/November 1975

Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens
von Dipl.-Ing. Armin Wagner, Dipl.-Phys. Gerhard Kieper und Dipl.-Ing. Reinald Rudolphi

Nr. 34/Januar 1976 (vergriffen)

Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoffen
von Dipl.-Forsting. Dr. rer. sylv. Hans-Joachim Deppe

Nr. 35/Januar 1976

Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dipl.-Ing. Ernst Limberger

Nr. 36/Januar 1976 (vergriffen)

Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles
von Dipl.-Ing. Jürgen Hundt

Nr. 37/Februar 1976

Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren —
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 38/Juni 1976

Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionisiertem Stahl 42 CrMo 4
von Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig

Nr. 39/Juni 1976

Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newtonschem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung
von Prof. Dr.-Ing. K. Kirschke und Dipl.-Phys. G. Kempf

Nr. 40/Juni 1976

Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren
von Dr. rer. nat. H. Hantsche

Nr. 41/Oktober 1976

Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten
von Dr. rer. nat. Bernhard Böttcher

Nr. 42/Oktober 1976

Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft
von Dr.-Ing. Siegmund Dietlen

Nr. 43/Oktober 1976

Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
von Dr.-Ing. Werner Struck

Nr. 44/November 1976

Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“
von Dipl.-Ing. W. Matthes

Nr. 45/Dezember 1976

Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten
von Dr.-Ing. W. Paatsch

Nr. 46/Mai 1977 (vergriffen)

Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung
Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses
von Dipl.-Ing. Gerald Schickert und Dipl.-Ing. Helmut Winkler

Nr. 47/Juni 1977

Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
von Dr.-Ing. Arno Plank

Nr. 48/Oktober 1977

Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
von Dr.-Ing. U. Holzjöhner

Nr. 49/Dezember 1977

Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
von Dr.-Ing. Günther Wittig

Nr. 50/Juni 1978 (vergriffen)

Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
von Prof. Dipl.-Phys. Norbert Czaika, Dipl.-Phys. Norbert Mayer, Dipl.-Ing. Claus Amberg, Dipl.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Götz Andreae und Dipl.-Ing. Winfried Markowski

Nr. 51/Juni 1978

Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
von Dr. rer. nat. J. Sickfeld

Nr. 52/August 1978

Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
von Dr.-Ing. Aleksandar Tomov

Nr. 53/Oktober 1978

Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
von Rolf Günter Rohrmann und Reinald Rudolphi

- Nr. 54/Okttober 1978
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Harro Sander
- Nr. 55/November 1978
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke
- Nr. 56/Januar 1979
Stabilität von Sandwichbauteilen
von Dipl.-Ing. W. Brünner und Prof. Dr.-Ing. C. Langlie
- Nr. 57/März 1979
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung
Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing
von Dipl.-Ing. Meinhard Stadthaus
- Nr. 58/März 1979
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 59/Juli 1979
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
von Dr.-Ing. Günther Plauk
- Nr. 60/August 1979
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
von Dr.-Ing. H. Spreckelmeyer, Dr.-Ing. R. Helms und Dr.-Ing. J. Ziebs
- Nr. 61/Dezember 1979
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmatrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
von Dr. Klaus Richter
- Nr. 62/Dezember 1979
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
von Dir. u. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Gerisch und Prof. Dr. habil. Dr. h. c. Günther Becker
- Nr. 63/Dezember 1979
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
von Dipl.-Ing. E. Behrend und Dipl.-Ing. J. Ludwig
- Nr. 64/Februar 1980
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
von Dr.-Ing. Werner Rücker
- Nr. 65/Februar 1980
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
von Dr.-Ing. Peter Schmidt, Dr.-Ing. Dietmar Aurich, Dr.-Ing. Rolf Helms, Dr.-Ing. Helmut Veith und Dr.-Ing. Josef Ziebs
- Nr. 66/Mai 1980
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
von Dr. rer. nat. Martin Hattwig
- Nr. 67/Mai 1980
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees
- Nr. 68/Mai 1980
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik.
Entwicklung eines vollzentrischen Präzisions-Goniometers
von Dr. rer. nat. Dieter Petersohn
- Nr. 69/Juni 1980
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitschillen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt und Dipl.-Ing. Peter Brandl
- Nr. 70/August 1980 (vergriffen)
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
von Dr.-Ing. Gerald Schickert
- Nr. 71/August 1980
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
von Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und Dipl.-Ing. Götz Magiera
- Nr. 72/September 1980
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi
- Nr. 73/November 1980
Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
von Dipl.-Ing. Peter Wegener
- Nr. 74/November 1980
ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
von Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dipl.-Inform. Renate Müller
- Nr. 75/November 1980
Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
von Dir. u. Prof. Dr. Hans-Jürgen Heinrich
- Nr. 76/November 1980
Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
von Dr.-Ing. Dieter Klaffke und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang-Werner Maennig
- Nr. 77/April 1981
Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
von Dipl.-Ing. Michael Gierloff und Dr.-Ing. Matthias Maultzsch
- Nr. 78/September 1981
Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Swellensystems mit dem Untergrund
von Dr.-Ing. Werner Rücker
- Nr. 79/Dezember 1981
Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflussten Kaltrübnung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
von Dr.-Ing. Volker Neumann
- Nr. 80/Dezember 1981
Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
von Dr.-Ing. Arno Plank, Dr.-Ing. Werner Struck und Dr.-Ing. Manfred Tzschätzsch
- Nr. 81/Dezember 1981
Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
von Dipl.-Ing. Jürgen Schmidt
- Nr. 82/April 1982
Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches
Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test
von Rolf Helms, Hans-Joachim Kühn und Siegmard Ledworski
- Nr. 83/Juli 1982
Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen
— Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen —
von Prof. Dr.-Ing. Horst Czichos und Dr.-Ing. Paul Feinle
- Nr. 84/Juli 1982
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
von Dipl.-Inform. Renate Müller und Dr.-Ing. Reinald Rudolphi
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/Okttober 1982
Technische Materialforschung und -prüfung
— Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm „Basic Technological Research“ —
Materials Research and Testing
— Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme „Basic Technological Research“ —
von Prof. Dr. Horst Czichos
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/November 1982
Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
von Dr.-Ing. Konrad Niesel und Dr. rer. nat. Peter Schimmelwitz
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/Dezember 1982
Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
von Dr.-Ing. Bernd Isecke und Dr.-Ing. Wolfgang Stichel
- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/Februar 1983
Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
von Dr.-Ing. Anton Erhard
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/April 1983
Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
von Dr. rer. nat. Dietrich Conrad und Dr.-Ing. Siegmund Dietlen
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/April 1983
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
von Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/April 1983
Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
von Dr.-Ing. Michael Weber
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/August 1983
Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden
von Dipl.-Ing. Lutz Auersch
- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/August 1983
Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen
von Dr. rer. nat. Peter Studt
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/August 1983
Untersuchungen der Störschwingungen beim Kerbschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen
von Dr.-Ing. Xian-Quan Dong
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/August 1983
Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatten
von Dr.-Ing. Manfred Römer
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/Okttober 1983
Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem Betonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken
von Dr.-Ing. Heinz Eifler
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/November 1983
Typische Bruchflächenausbildung thermoplastischer Kunststoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung
von Dipl.-Ing. Gerhard Fuhrmann und Prof. Dr. rer. nat. Wolfram Schwarz
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/Dezember 1983
Bestimmung des elastischen Verhaltens von Maschinenwaren
— Stretch- und Erholungsvermögen —
von Dr. rer. nat. Edmund Schnabel
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/Dezember 1983
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
von Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/Januar 1984
Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Frostwiderstand
von Günter Klamrowski und Paul Neustupny
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/Februar 1984
Röntgen- und Gammastrahlen Computer-Tomographie
von Dr.-Ing. Peter Reimers, Dr. rer. nat. Jürgen Goebbels, Dr.-Ing. Heinrich Heidt, Dr.-Ing. Hans-Peter Weise und Dipl.-Phys. Kay Wilding
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/März 1984
Weiterentwicklung des hydraulischen Kompensationsverfahrens zur Druckspannungsmessung in Beton
von Dr.-Ing. Götz Magiera
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/März 1984
Radlographie mit Elektronen aus Metallverstärkerfolien
von Dr.-Ing. Dierk Schnitger
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/April 1984
Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen
von Dr.-Ing. Michael Gierloff
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/Juni 1984
Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen
von Dr.-Ing. Bernd Schulz-Forberg
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/Okttober 1984
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last
von Dr.-Ing. Jan Lehnert

- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/Oktober 1984
Korrosion von Stahlradiatoren
von Dr.-Ing. Wolfgang Stichel und Jörg Ehreke
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/Oktober 1984
Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen — Ergebnisse von Modellrechnungen
von Dipl.-Ing. Lutz Auersch
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/Februar 1985
Zur Wirkung der Schruppbehinderung auf den Schweißspannungszustand und das Sprödbruchverhalten von unterpulvergeschweißten Blechen aus St E 460 N
von Dr.-Ing. Mohamed Omar
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/Februar 1985
Wasserstoff als Energieträger
von Dr. Hermann Walde (Mitglied des Kuratoriums der BAM i. R.) und Dr. Bernhard Kropp
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/Februar 1985
Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Umsetzung von Andex-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte
von Dr.-Ing. Kurt Ziegler
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/Juli 1985
Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen
von Dr.-Ing. Wolfgang Lützw
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/Juli 1985
Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf die Schwingungskorrosion von Offshore-Konstruktionen
von Rolf Helms, Horst Henke, Gerhard Oelrich (BAM, Berlin) und Tetsuya Saito (NRIM, Japan)
- Nr. 114/ISBN 3-88314-419-3/Juli 1985
Neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen
von Dipl.-Ing. Peter Rose, Dipl.-Ing. Peter Raabe, Dipl.-Ing. Werner Daum und Andreas Szameit
- Nr. 115/ISBN 3-88314-420-7/Juli 1985
Farbempfindungsmerkmal Elementaruntton und Buntheitsabstände als Funktion von Farbart und Leuchtdichte von In- und Umfeld
von Privatdozent Dr. Klaus Richter
- Nr. 116/ISBN 3-88314-460-6/Oktober 1985
Theoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik
von Dr. rer. nat. Franz-Josef Kasper, Dipl.-Inform. Renate Müller, Dr.-Ing. Reinald Rudolphi und Dr.-Ing. Armin Wagner
- Nr. 117/ISBN 3-88314-468-1/Oktober 1985
Materials Technologies and Techno-Economic Development
A study for the German Foundation for International Development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)
by Prof. Dr. H. Czichos in cooperation with Dr. G. Sievers, Bundesministerium für Forschung und Technologie (BMFT), Bonn
- Nr. 118/ISBN 3-88314-469-X/Oktober 1985
Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung
Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen
von Dr. rer. nat. Hartwig Treumann, Dipl.-Ing. Hilmar Andre, Dr. rer. nat. Eduard Blossfeld, Dr. rer. nat. Norbert Pfeil und Ing. grad. Matthias-Michael Zindler
- Nr. 119/ISBN 3-88314-472-X/November 1985
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil I
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part I
von Dipl.-Ing. Jürgen Herter, Dr.-Ing. Klaus Brandes und Dipl.-Ing. Ernst Limberger
- Nr. 120/ISBN 3-88314-514-9/April 1986
Zerstörungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückstreuung
von Dr.-Ing. Andreas Hecht
- Nr. 121/ISBN 3-88 314-530-0/Juni 1986
Versagenskriterien von Stahlgleitpaarungen unter Mischreibungsbedingungen: Einflüsse von Stahlzusammensetzung und Wärmebehandlung
von Dr.-Ing. Paul Feinle und Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig
- Nr. 122/ISBN 3-88 314-521-1/Juli 1986
Entsorgung kerntechnischer Anlagen
von J. Mischke
Sonderkolloquium der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) am 10. 12. 1985 mit Beiträgen von B. Schulz-Forberg, K. E. Wieser und B. Droste
- Nr. 123/ISBN 3-88 314-531-9/Juli 1986
Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organisch-chemischer Baustoffe entstehenden Brandgase
von Dr. rer. nat. Detlef Rennoch
- Nr. 124/ISBN 3-88 314-538-6/Juli 1986
Zur Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung
von Dr.-Ing. Hans-Martin Thomas
- Nr. 125/ISBN 3-88 314-540-8/Juli 1986 (vergriffen)
Untersuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzisolierung von Flüssiggas-Lagertanks
von Dr.-Ing. Bernhard Droste und Dipl.-Ing. Ulrich Probst
- Nr. 126/ISBN 3-88 314-547-5/August 1986
Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmbädern
von Dr.-Ing. Wolfgang Stichel
- Nr. 127/ISBN 3-88 314-564-5/November 1986 (vergriffen)
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil I
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part I
von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 128/ISBN 3-88 314-568-8/November 1986 (vergriffen)
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil II
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part II
von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 129/ISBN 3-88 314-569-6/November 1986 (vergriffen)
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load
Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit
Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates
von / by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dipl.-Ing. Jürgen Herter und Dipl.-Ing. Klaus Berner
- Nr. 130/ISBN 3-88 314-570-X/November 1986
Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material bei Belastung durch eine Einzelkraft
von Dr.-Ing. Werner Struck
- Nr. 131/ISBN 3-88 314-585-8/November 1986
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil II
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part II
von / by Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dr.-Ing. Klaus Brandes und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 132/ISBN 3-88 314-595-5/Januar 1987
Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen
von Dipl.-Ing. Christian Herold und Dipl.-Ing. Frank-Ulrich Vogdt
- Nr. 133/ISBN 3-88 314-609-9/Januar 1987 (vergriffen)
Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe
von Dipl.-Ing. Mathias Woydt und Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Habig
- Nr. 134/ISBN 3-88 314-615-3/Februar 1987
Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen
von Dr. Götz Andreae und Gottfried Niessen
- Nr. 135/ISBN 3-88 314-618-8/Februar 1987
Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen
von Dipl.-Ing. Jörg Ludwig, Dipl.-Ing. Wolf-Dietrich Mischke und Dipl.-Ing. Armin Ulrich
- Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/April 1987
Untersuchung zur Beurteilung von Brettschichtverleimungen für den Holzbau
von Prof. Dr. rer. silv. Hans-Joachim Deppe und Klaus Schmidt
- Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/Mai 1987
Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiet der Komponentensicherheit
Projektleiter: Dr. Dietmar Aurich
- Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/Mai 1987
Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben.
von Dipl.-Geol. Michael Dogunke und Dr.-Ing. Frank Buchhardt
- Nr. 139/ISBN 3-88314-658-7/Juni 1987
Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle.
von Dipl.-Ing. Jürgen Olschewski und Sven-Peter Scholz
- Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/Juni 1987
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
von / by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger und Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/Oktober 1987
Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt, Dr.-Ing. Wolfgang Mathees, Dr.-Ing. Götz Magiera und Dr.-Ing. Friedrich Mathiak
- Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/Oktober 1987
Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefährzahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen
von Dr. rer. nat. Hartwig Treumann, Ing. Günter Krüger, Dr. rer. nat. Norbert Pfeil und Dr. rer. nat. Sigrid von Zahn-Ullmann
- Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/November 1987
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung
Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load
von/by Dr.-Ing. Klaus Brandes, Dipl.-Ing. Ernst Limberger, Dipl.-Ing. Jürgen Herter
- Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/November 1987
Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktorgebäudes
von Dr.-Ing. Frank Buchhardt, Dr.-Ing. Götz Magiera, Dr.-Ing. Wolfgang Mathees, Dr.-Ing. Michael Weber, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
Dr.-Ing. Jürgen Altes, Kernforschungsanlage Jülich GmbH (KFA)
- Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/November 1987
Untersuchung selbstähnlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden
von Dr.-Ing. Ulrich Holzlöhner
- Nr. 146/ISBN 3-88314-714-1/November 1987
Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks
von Dipl.-Ing. Wolfgang Schön und Dipl.-Ing. Michael Mallon
- Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/Dezember 1987
Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen
von Dipl.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt
- Nr. 148/ISBN 3-88314-774-5/Mai 1988
Theoretische Untersuchung von Variationsprinzipien für elastoplastisches Materialverhalten sowie Entwicklung und numerische Erprobung von Finite-Element-Verfahren für den ebenen Spannungszustand
von Dipl.-Ing. Wilfried Müller
- Nr. 149/ISBN 3-88314-775-3/Mai 1988
Bestimmung baugruddynamischer Kenngrößen aus der Untersuchung von Bodenproben
von Dr.-Ing. Ulrich Holzlöhner

Nr. 150/ISBN 3-88314-776-1/Mai 1988
**VG3D Zeichenprogramm für die Vektorgraphische
Darstellung dreidimensionaler Strukturen**
von Dr.-Ing. Michael Weber

Nr. 151/ISBN 3-88314-785-0/Juni 1988
**Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit
dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch
Bodenerschütterungen**
von Dipl.-Ing. Lutz Auersch-Saworski