

BAM Bundesanstalt
für Materialforschung
und -prüfung, Berlin

Forschungsbericht 171

**Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter
dynamischer Systeme am Beispiel
der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung**

von Dr.-Ing. Frank Buchhardt



Berlin 1990

Aufgaben der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)

Die Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung ist als Bundesoberbehörde im Geschäftsbereich des Bundesministers für Wirtschaft das technisch-wissenschaftliche Staatsinstitut der Bundesrepublik Deutschland für Werkstoffwissenschaften, Materialprüfung und Chemische Sicherheitstechnik. Dieser Komplex stellt in allen Industrieländern einen technologischen Schlüsselbereich dar, da Materialien als Konstruktions- und Funktionswerkstoffe die Grundlage der gesamten Technik bilden. Die Materialforschung, die zuverlässige, normgerechte und neutrale Prüfung sowie die sicherheitstechnische Beurteilung von Werkstoffen, Bauteilen und Konstruktionen sind wesentliche Voraussetzungen für eine leistungs- und wettbewerbsfähige Wirtschaft im Hinblick auf die Anforderungen an Qualität und Zuverlässigkeit technischer Produkte, Umweltschutzanforderungen und die Notwendigkeit der sparsamen Verwendung von Rohstoffen und Energie.

Die Ursprünge der BAM reichen bis in das Jahr 1870 zurück, in dem durch Erlass des damaligen Preußischen Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten die Gründung einer Mechanisch-Technischen Versuchsanstalt bei der Gewerbeakademie beschlossen wurde. 1895 erfolgte die Angliederung der im Jahre 1875 eingerichteten Prüfungsstation für Baumaterialien als neue Abteilung der Versuchsanstalt. Im Jahre 1904 kam es darüber hinaus zur Zusammenlegung mit der 1877 errichteten Chemisch-Technischen Versuchsanstalt zum Königlichen Materialprüfungsamt. Dessen erster Direktor, Adolf Martens (1850—1914), trat u. a. als Entdecker des nach ihm benannten Martensit-Gefüges von Stahl und als Mitbegründer sowie Vorsitzender (1896—1913) des „Deutschen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik“ hervor. Das Königliche Materialprüfungsamt, das im Jahre 1907 eine selbständige Behörde geworden war, wurde nach dem Ersten Weltkrieg dem Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung unterstellt. Es bestand als Staatliches Materialprüfungsamt (MPA) — bei ständiger Erweiterung seiner Aufgabenbereiche und Angliederung anderer Institutionen, wie z. B. der Reichs-Röntgenstelle — bis 1945.

Nach dem Zweiten Weltkrieg wurde dem MPA die im Jahre 1889 errichtete Chemisch-Technische Reichsanstalt (CTR) angeschlossen. Diese vereinigten Institutionen erhielten im Jahre 1954 den Status einer Bundesanstalt im Geschäftsbereich des Bundesministers für Wirtschaft, die seit 1956 den Namen „Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)“ trägt und ab 1. 1. 1987 „Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)“ heißt.

Die Aufgaben der BAM wurden durch einen Erlass des Bundesministers für Wirtschaft vom 1. September 1964 letztmalig festgelegt. Danach hat die Bundesanstalt die Aufgabe, Werkstoff- und Materialforschung entsprechend ihrer Zweckbestimmung zu betreiben und die Materialprüfung sowie die Chemische Sicherheitstechnik stetig weiter zu entwickeln. Die Ergebnisse ihrer und fremder wissenschaftlicher Arbeiten hat die Bundesanstalt zu sammeln, zu ordnen und der Allgemeinheit zugänglich und nutzbar zu machen. Für das Land Berlin hat die Bundesanstalt die Aufgaben eines staatlichen Materialprüfungsamtes. Auf Antrag steht die BAM Industriefirmen, Wirtschaftsverbänden, Verbrauchereinrichtungen sowie privaten Antragstellern zur Verfügung. Außerdem berät sie Bundesministerien und unterstützt Verwaltungsbehörden sowie Gerichte. Mit Institutionen ähnlicher Zielsetzung des In- und Auslandes, insbesondere den nationalen Schwesterinstituten, arbeitet die BAM eng zusammen. Daneben ist sie in die technische Zusammenarbeit mit verschiedenen Entwicklungsländern eingebunden. Die Mitarbeiter der Bundesanstalt wirken in zahlrei-

chen Fachgremien, gesetzgebenden Körperschaften und normensetzenden Institutionen an der Aufstellung von technischen Regeln und Sicherheitsbestimmungen mit und vertreten die Bundesrepublik Deutschland in internationalen und supranationalen Einrichtungen.

Aufgrund des Gesetzes über explosionsgefährliche Stoffe, des Gesetzes über die internationale Beförderung gefährlicher Güter auf der Straße, des Waffengesetzes sowie einer Reihe weiterer gesetzlicher Regelungen und Verordnungen hat die Bundesanstalt den Status einer Bundesoberbehörde. Damit erhalten die in diesem Zusammenhang erteilten Zulassungen, Richtlinien und Auflagen bundesweit gesetzlichen Charakter. Im Rahmen der genannten Gesetze obliegen der BAM u. a. die Prüfung von Stoffen und Konstruktionen für die Zulassung explosionsgefährlicher Stoffe und Sprengzubehör, die Zulassung der Bauart von Verpackungen und die Genehmigung der Beförderung von gefährlichen Gütern ohne Schutzbehälter. Ferner läßt die Bundesanstalt Raketenmunition und Geschosse mit pyrotechnischer Wirkung im zivilen Bereich zu und prüft die Vielzahl weiterer Produkte und Gegenstände im öffentlichen Interesse.

Mit nahezu 1.200 Mitarbeitern, darunter etwa 300 Wissenschaftlern unterschiedlicher naturwissenschaftlicher und technischer Fachrichtungen, befaßt sich die BAM in mehr als 100 Laboratorien damit, die chemischen, physikalischen und technologischen Eigenschaften von Werkstoffen zu bestimmen und Zusammenhänge zwischen Stoffkennwerten und Materialverhalten beim praktischen Einsatz aufzuklären. Dadurch werden Rohstoffe und Werte erhalten, Schäden vermindert und Unfälle verhütet. Das Arbeitsgebiet schließt alle technischen Materialien ein: Metalle, anorganische nichtmetallische Stoffe, insbesondere Baustoffe und keramische Werkstoffe, organische Stoffe wie Kautschuk, Kunststoffe, Textilien, Leder, Papier, Holz, aber auch Verbundwerkstoffe, technische Fluide und Gase sowie feste, flüssige und gasförmige explosionsfähige Stoffe. Für die Untersuchung von Materialien unter den verschiedensten Beanspruchungen, z. B. mechanischer, thermischer, tribologischer, chemischer, korrosiver oder biologischer Art, werden unterschiedlichste Meß-, Prüf- und Analysetechniken einschließlich zerstörungsfreier Prüfverfahren und Computertechniken eingesetzt. Durch Forschung und Entwicklung, Prüfung und Untersuchung sowie Beratung und Information dient die BAM dem Ziel, die Leistungsfähigkeit der Wirtschaft zu fördern, die technisch-wissenschaftlichen Erkenntnisse zu erweitern sowie die Lebensbedingungen zu sichern und zu verbessern.

Die Arbeitsergebnisse der BAM werden — soweit sie nicht vertraulicher Natur sind — in eigenen Publikationsreihen veröffentlicht:

- den „BAM - ZULASSUNGEN, die jährlich mit 4 Ausgaben erscheinen und in denen die amtlichen Zulassungen der BAM veröffentlicht werden;
- dem Jahresbericht, der die Arbeitsschwerpunkte und die wichtigsten Erträge des jeweils voraufgegangenen Jahres ausführlich dokumentiert;
- den Forschungsberichten, die in unregelmäßiger Folge die Resultate wichtiger BAM-Forschungsvorhaben präsentieren.

Für weitere Information steht gerne BAM — 7.1 „Information und Öffentlichkeitsarbeit“, Tel.: 030 / 8104 7100, zur Verfügung.

ISBN 3-88314-997-7

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Berlin

Forschungsbericht 171

**Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter
dynamischer Systeme am Beispiel
der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung**

von Dr.-Ing. Frank Buchhardt

Berlin 1990

116 Seiten, 47 Abbildungen, 41 Tabellen

Herausgegeben von der
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45
Telefon (030) 8104-1 Telex 183 261 bamb d
Telefax (030) 8 112029 Teletex 2 627-308 372=bamb

Copyright © 1990 by Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Verlag und Vertrieb:
Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH
Postfach 10 11 10, 2850 Bremerhaven 1
Telefon (0471) 46093-95

V o r w o r t

Die hier vorgestellte Problematik ist ebenso wie /15/ ein Teilaspekt eines komplexen Untersuchungsprogrammes, das sich mit dem Einfluß verschiedener Erdbebenkonzepte auf Rohrleitungssysteme in Kernkraftwerksbauten bei Vorgabe unterschiedlicher Dämpfungswerte befassen sollte, und hat sich besonders aus den zahlreichen Diskussionen mit den Mitarbeitern des Referats 2.01 'Konstruktionstechnische Reaktorsicherheit' ergeben.

Aufgrund interner Veränderungen im Hause konnte das Programm insgesamt bisher nicht realisiert werden; die Aktualität der Aufgabenstellung läßt sich jedoch auch aus den letzten Beschlüssen des Kerntechnischen Ausschusses zur KTA-Regel 2201 'Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen' entnehmen.

KURZFASSUNG

Bei der Anwendung üblicherweise zur Verfügung stehender Rechen-codes zeigt sich, daß zur komplexen Boden-Bauwerk-Beschreibung besondere - aufwendige - Zusatzmaßnahmen zu treffen sind. Zielsetzung dieser Untersuchung ist es daher, einen vom jeweiligen Programmcode möglichst unabhängigen Operator zu entwickeln, der die Koppelung verschiedener Programmcodes und/oder -teile gestattet und hierbei nur in ausgewiesenen Programmschnittstellen eingreifen muß.

In allgemeiner Betrachtungsweise wird gezeigt, wie das gesamte Boden-Bauwerk-Schwingungssystem an einer beliebigen Nahtstelle durch Einführen einer Zusatzfunktion entkoppelt werden kann. Diese Zusatzfunktion wird schrittweise aus der Forderung bestimmt, daß die Beschleunigung in der Nahtstelle für beide Systeme identisch ist, während Geschwindigkeit und Verschiebung durch numerische Integration ermittelt werden. In aufsteigender Reihenfolge werden mittels spezifischer Definitionen mögliche Vereinfachungen für den Lösungsalgorithmus angegeben. Anschließend wird die Gültigkeit der Beziehungen beispielhaft überprüft.

Die Verifikation zur Gültigkeit der Beziehungen geschieht zunächst mittels der 'exakten' analytischen Beziehungen am 2DOF- bzw. 1DOF-System; anschließend erfolgt die gleichartige numerische Verifikation, die zu prinzipiell gleichwertigen Lösungen führt. Darüber hinaus werden dieselben Beispiele am M DOF-System in geschlossener bzw. gekoppelter Weise berechnet und die Übereinstimmung der Lösungen demonstriert.

SUMMARY

When applying usually accessible programme codes experience shows that particular additional effort is faced when a complex soil-structure model shall be implemented. It is the scope of this study to develop an independent operator which enables a coupling of different programme codes or a coupling of specifically given programme intersections.

First it is demonstrated in a general way how to decouple the overall soil-structure system at an arbitrarily selected section by introduction of an additional load function which is step-wise determined by the demand of identic acceleration at the boundary

area of both the disconnected systems, while velocity as well as displacement are found through numerical integration. By specifying particular supplemental conditions it is shown how to step-wise simplify the solution algorithm.

The validity of the given relations is verified through different examples, first of all, by comparing the so-called 'exact' analytical solutions with the results of the decoupled 2DOF/1DOF-system; furthermore these examples are checked by numerical verification as well which demonstrate equivalent results with the known analytical solutions. In a final step the same examples are computed using an M DOF-system (overall as well as decoupled); again coincidental results are obtained for the decoupled system in comparison to the results of the overall system.

SCHLAGWORTE

Kernkraftwerksbauten

Boden-Bauwerk-Wechselwirkung

Methode der 'Finiten Elemente'

Inhalt	Seite
1. Einführung	9
2. Allgemeine Formulierung des Gesamtproblems	12
3. Analytische Verifikation am 2DOF-System	31
3.1 Allgemeine Lösungen	31
3.1.1 2DFO-System	31
3.1.2 1DFO-System	37
3.2 Beispiel 1	38
3.3 Beispiel 1 mit Koppelung	40
3.4 Beispiel 2	46
3.5 Beispiel 3	48
3.6 Beispiel 4	49
3.7 Beispiel 5	50
3.8 Beispiel 6	51
4. Numerische Verifikation am 2DOF-System	52
4.1 Newmark-Verfahren	52
4.2 Beispiel 1	55
4.3 Beispiel 1 mit Koppelung	55
4.4 Beispiel 2	61
4.5 Beispiel 2 mit Koppelung	62
4.6 Beispiel 3	64
4.7 Beispiel 3 mit Koppelung	65
4.8 Beispiel 4	66
4.9 Beispiel 4 mit Koppelung	68
4.10 Beispiel 5	70
4.11 Beispiel 5 mit Koppelung	71
4.12 Beispiel 6	72
4.13 Beispiel 6 mit Koppelung	73
5. Numerische Verifikation am M DOF-System – Beispiele 1 - 6 und Sonderbeispiel 7	74
6. Zusammenfassung und Abschlußbemerkungen	105
7. Dank	110
Literaturverzeichnis	111

1. Einführung

Im Referat 2.01 'Konstruktionstechnische Reaktorsicherheit' ist langjährig das strukturelle Potential von Kernkraftwerksbauten untersucht worden. Es sind hier vor allem aus der Reihe der EVA-Lastfälle die relativ seltenen wie hypothetischen Ereignisse 'Erdbeben' bzw. 'Flugzeugabsturz' prioritär zu nennen, die trotz ihrer sehr kleinen Auftretenswahrscheinlichkeit im Zusammenwirken mit dem dem System innewirkenden Gefährdungspotential von hohem sicherheitstechnischen Interesse sind. Hierbei hat sich gezeigt, daß die Lastfälle 'Erdbeben' und 'Flugzeugabsturz' in Teilbereichen zur Bemessungsdominanz führen, obwohl letzterer nach den Störfalleitlinien (im Sinne des §28 Abs. 3 StrlSchV) wegen seines geringen Risikos nicht (mehr) zu den Auslegungsstörfällen zu zählen ist. Die Erfahrung hinsichtlich der bemessungsvorgebenden Lastfälle führte auch dazu, mittels 'genauerer' Berechnungsannahmen bzw. -vorgaben eine realistischere Beurteilung des jeweiligen Lastfalls zu erreichen.

Hierbei handelt es sich in allgemeiner Form um partiell nicht-lineare dynamische Analysen, deren Lösungen generell nicht geschlossen zur Verfügung stehen, sondern auf numerischer Basis erreicht werden; dies ist u. a. ausführlich in /3/ dargestellt. Ein weites Gebiet zur Erfassung des generellen Deformationsverhaltens ist hierbei die Methode der 'Finiten Elemente', während die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen vorrangig durch numerische Integrationsverfahren erzielt wird.

Im Zuge dieser Lösungsstrategie ist eine Reihe von - teilweise sehr umfangreichen - Programmsystemen entwickelt worden; dem Referat 2.01 standen - neben zahlreichen Eigenentwicklungen für spezifische Sonderfälle - u. a. die Programmcodes ADINA /1/ bzw. ASHSD2 /2/ zur Verfügung.

Die Anwendung numerischer Verfahren könnte nun zur generellen Lösung führen, jedoch sind hierbei die Rahmenbedingungen durch die spezifischen Rechnerleistungen vorgegeben; d. h., es sind in jedem Fall besondere Einschränkungen vorzusehen und/oder problemorientierte bzw. -selektierte Modellannahmen anzusetzen. Dies gilt vorrangig, wenn noch die Aufgabe gestellt ist, die

Boden-Bauwerk-Wechselwirkung zusätzlich in die Untersuchung einzubeziehen. Eine umfassende Gesamtdarstellung der Betrachtung der 'Soil-Structure-Interaction' wird beispielsweise in /7/ und /8/ gegeben, und zwar sowohl im Frequenz- wie im Zeitbereich.

Bei der Analyse des dynamischen Verhaltens von Kernkraftwerksbauten, die über den Boden gekoppelt waren /11/, ergab sich auch die Diskussion des nichtlinearen Bodenmaterialverhaltens; dies führte zu der Entwicklung eines Lösungsoperators /6/, der später mit 'Hybrid Frequency-Time Domain Analysis' (s. z. B. /8/) bezeichnet wurde. Die Einbeziehung des Bodens bei dynamischen Strukturanalysen erfordert bereits im linearen Fall zusätzliche Überlegungen, da auch der 'elastische Halbraum' nicht durch beliebig viele finite Elemente zusätzlich abgebildet werden kann, was zu unrealistisch hohem Rechneraufwand führen würde. Eine wesentliche Vereinfachung bietet hier die rotationssymmetrische Bodenabbildung unter weiterer Anwendung von spezifischen Randelementen (s. z. B. /10/). In /9/ wird ein dreidimensionales Randelement unter Verwendung des Fourier-Ansatzes entwickelt, das mittels einer Transformationsmatrix mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen gekoppelt werden kann. Zur Reduktion des Rechenaufwandes erfolgt ebenso in /15/ die Entwicklung eines Makro-Elementes, dessen Eigenschaften mittels Kondensation denen eines lokal begrenzten Bodenausschnittes mit viskosen Randdämpfern angepaßt werden.

Bei der Durchführung umfangreicher dynamischer Analysen (s. z. B. /14/, /16/, /17/, /18/ und /19/) hat sich jeweils gezeigt, daß bei der Implementierung des Rechenmodells von vornherein eine selektive Auswahl zu treffen war, indem entweder der Schwerpunkt auf die Struktur oder auf die 'genaue' Erfassung des Bodens gelegt werden mußte. Hierbei erfolgte in den meisten Fällen die Boden-Koppelung mit der Struktur mittels Feder-Dämpfer-Modelle bzw. mittels einer spezifisch geeichten Bodenelementschicht, womit bereits die Grenzen des Rechners (bedingt durch den Rechen-code) erreicht waren (s. besonders /14/ und /18/). In einer aufwendigen Vergleichsstudie /13/ ist an unterschiedlichen Strukturmodellen mittels verschiedener (praxisüblicher) Bettungszifferansätze und besonders deren Verteilung die außerordentliche Sensibilität des Bauwerkresponses (s. besonders Tab. 19 in /13/) nachgewiesen worden; auch hieraus läßt sich der Schluß ziehen,

daß gerade beim Einsatz aufwendiger Rechenmodelle bei gleichzeitiger, nicht genügend realistischer Bodenanbindung die Ergebnisaussage gegebenenfalls nicht 'genauer' ist, so daß die Anwendung o. g. spezifischer Bodendarstellungen gefordert wird.

Es zeigt sich jedoch für den Anwender, daß in der überwiegenden Anzahl der zur Verfügung stehenden Rechencodes zur komplexen Boden-Bauwerk-Beschreibung besondere Zusatzmaßnahmen zu treffen sind; d. h., es muß spezifisch für jeden einzelnen Programmcode in die Generierung der Zustandsmatrizen (s. z. B. /9/ bzw. /15/) eingegriffen werden, was u. U. zu hohem Entwicklungsaufwand führen kann. Es ist daher Ziel dieser Untersuchung, einen vom jeweiligen Programmcode möglichst unabhängigen Operator zu entwickeln, der die Koppelung verschiedener Programmcodes oder -teile gestattet und hierbei nur in ausgewiesenen Programmschnittstellen eingreifen muß. Dies wird für den allgemeinen Fall entwickelt und die Gültigkeitsgrenzen an ausgewählten Beispielen nachgewiesen.

2. Allgemeine Formulierung des Gesamtproblems

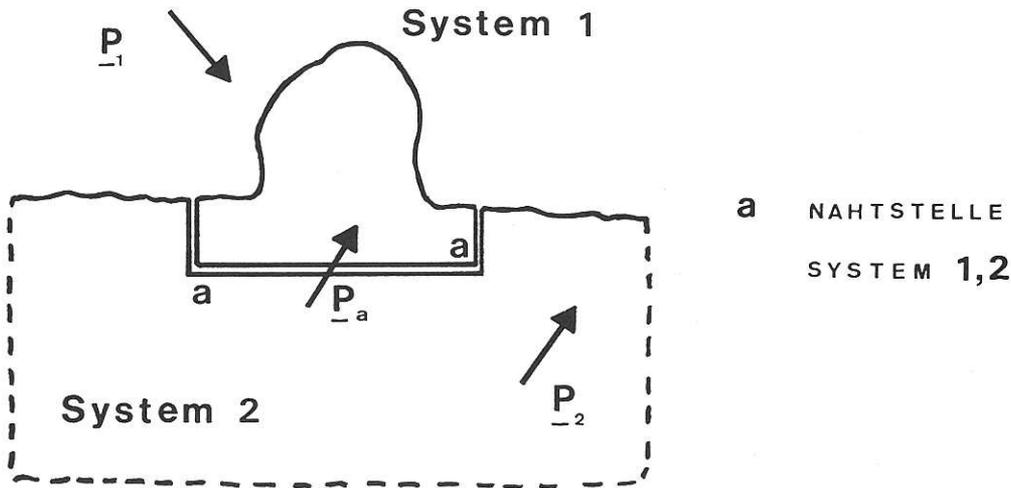


Bild 2.1
Gesamtproblem

Das Gesamtproblem ist durch die allgemeine Schwingungsgleichung

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{P} \quad (2.1)$$

definiert, in der \underline{M} die Massenverteilungs-, \underline{C} die Dämpfungs- und \underline{K} die Steifigkeitsmatrix darstellen. Mit \underline{P} als Lastvektor folgen dann die Verschiebungen \underline{x} bzw. deren Ableitungen. Entsprechend Bild 2.1 kann Gleichung (2.1) auch definiert werden zu

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{1a} \\ M_{a1} & M_{aa} & M_{a2} \\ & M_{2a} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{1a} \\ C_{a1} & C_{aa} & C_{a2} \\ & C_{2a} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_a \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{1a} \\ K_{a1} & K_{aa} & K_{a2} \\ & K_{2a} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_a \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_a \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (2.2),$$

indem eine Trennung in die Systemanteile und die Nahtstelle a vorgenommen wird.

Die Auflösung von Gleichung (2.2) ergibt die Einzelbeziehungen

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{x}_1 + M_{1a} \ddot{x}_a + C_{11} \dot{x}_1 + C_{1a} \dot{x}_a + K_{11} x_1 + K_{1a} x_a &= P_1 \\ M_{a1} \ddot{x}_1 + M_{aa} \ddot{x}_a + M_{a2} \ddot{x}_2 + C_{a1} \dot{x}_1 + C_{aa} \dot{x}_a + C_{a2} \dot{x}_2 + K_{a1} x_1 + K_{aa} x_a + K_{a2} x_2 &= P_a \\ M_{2a} \ddot{x}_a + M_{22} \ddot{x}_2 + C_{2a} \dot{x}_a + C_{22} \dot{x}_2 + K_{2a} x_a + K_{22} x_2 &= P_2 \end{aligned} \quad (2.3a, b, c)$$

In den Gleichungen (2.3a bzw. c) liegt für die jeweiligen Systeme keine direkte Koppelung mit dem anderen System vor; dies geschieht nur indirekt über die Anteile der Nahtstelle a. Führt man nun in Gleichung (2.3b) noch eine Unterteilung in die jeweiligen Systemanteile vor, so folgt die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} M_{a_1} \ddot{x}_1 + M_{a_a^1} \ddot{x}_a + C_{a_1} \dot{x}_1 + C_{a_a^1} \dot{x}_a + K_{a_1} x_1 + K_{a_a^1} x_a + \\ + M_{a_a^2} \ddot{x}_a + M_{a_2} \ddot{x}_2 + C_{a_a^2} \dot{x}_a + C_{a_2} \dot{x}_2 + K_{a_a^2} x_a + K_{a_2} x_2 \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} P_a^1 + \\ P_a^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$G^1(t) + G^2(t) = P_a^1(t) + P_a^2(t) \quad (2.4)$$

Es wird nun die Forderung aufgestellt, daß die gekoppelte Beziehung (2.4) durch Einführung einer Zusatzfunktion $X(t)$

$$G^1(t) + G^2(t) = P_a^1(t) + X^1(t) + P_a^2(t) - X^2(t)$$

entkoppelt werden kann, also

$$G^1(t) = P_a^1(t) + X^1(t) \quad \text{und} \quad (2.4a)$$

$$G^2(t) = P_a^2(t) - X^2(t)$$

Wird diese Entkoppelung als schrittweise möglich vorausgesetzt, kann nunmehr unter Einbeziehung der jeweiligen Nahtstelle a eine vollständige Trennung der Systeme 1 und 2 vollzogen werden.

Erfolgt die Betrachtung am Beispiel der Boden-Bauwerk-Interaktion, so resultiert aus Bild 2.2, daß für das System 2 die entsprechenden Beziehungen für die Schwingungsgleichung aufgestellt werden können. Wegen der vollständigen Trennung des Systems 1 ist dies nur dann möglich, wenn zusätzlich eine eindeutige Vorgabe der Randbedingungen getroffen wird.

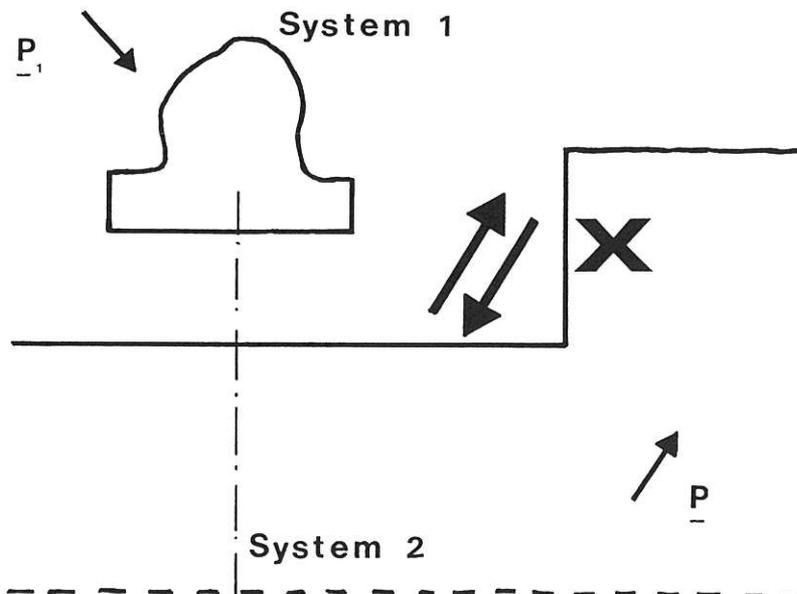


Bild 2.2

Fiktive Entkoppelung

Aus diesem Grunde werden lineare Zusatzfedern am System 1 an den entsprechenden Kontaktpunkten zum System 2 eingeführt, so daß nunmehr eine eindeutige Formulierung der Schwingungsgleichungen für das modifizierte System 1' bzw. 2 existiert (s. Bild 2.3), und zwar

$$\underline{M}_1 \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1 \dot{\underline{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{P}_1(t) + \underline{X}(t) \quad (2.5a)$$

$$\underline{M}_2 \ddot{\underline{x}}_2 + \underline{C}_2 \dot{\underline{x}}_2 + \underline{K}_2 \underline{x}_2 = \underline{P}_2(t) - \underline{X}(t) \quad (2.5b)$$

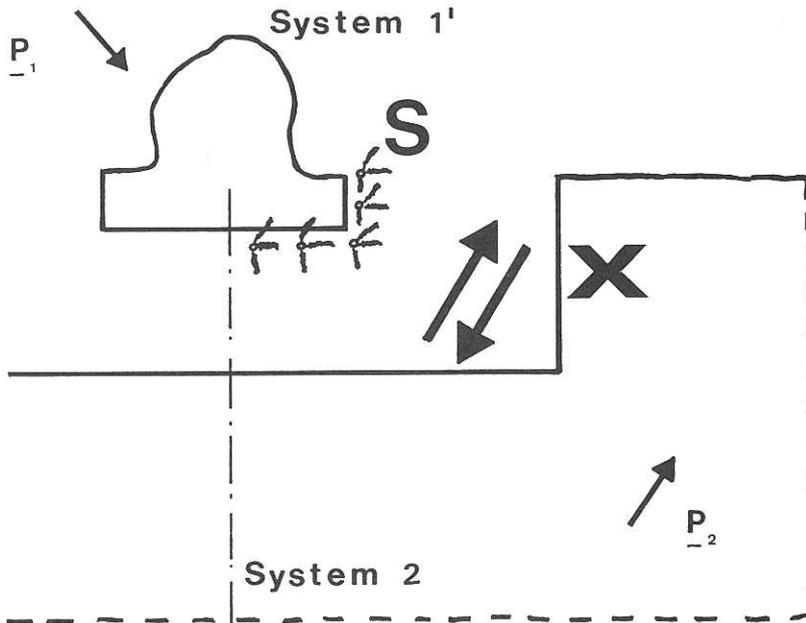


Bild 2.3
Reale Entkoppelung

Es gilt nun, die Lösungen der Gleichungen (2.5) genügend genau zu bestimmen, so daß sie die Beziehung (2.1) als Gesamtbestimmungsgleichung hinreichend approximieren. Hierbei kann davon ausgegangen werden, daß auch für (2.1) keine allgemeine analytische Lösung existiert, sondern diese durch numerische Zeitintegration gewonnen wird.

Dies wird am Beispiel der 'implicit time integration' erläutert, wie es bei /1/ angegeben ist.

System 1

$$\underline{M}_1^{t+\Delta t} \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1^{t+\Delta t} \dot{\underline{x}}_1' + {}^t \underline{K}_1^{t+\Delta t} \underline{x}_1' = {}^{t+\Delta t} \underline{R}_1$$

mit

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} \underline{R}_1 = {}^{t+\Delta t} \underline{P}_1 (0 \leq \tau \leq t+\Delta t) + {}^t \underline{X} (0 \leq \tau \leq t) & \text{bekannte Lasten} \\ {}^{t+\Delta t} \underline{R}_1 = & {}^{t+\Delta t} \underline{X} (\tau = t+\Delta t) \quad \text{neue Last} \end{cases}$$

System 2

$$\underline{M}_2^{t+\Delta t} \ddot{\underline{x}}_2 + \underline{C}_2^{t+\Delta t} \dot{\underline{x}}_2 + {}^t \underline{K}_2^{t+\Delta t} \underline{x}_2 = {}^{t+\Delta t} \underline{R}_2$$

mit

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} \underline{R}_2 = {}^{t+\Delta t} \underline{P}_2 (0 \leq \tau \leq t+\Delta t) + {}^t \underline{X} (0 \leq \tau \leq t) - & \text{bekannte Lasten} \\ & - {}^t \underline{S} (0 \leq \tau \leq t) \quad ** \quad " \quad " \\ {}^{t+\Delta t} \underline{R}_2 = & {}^{t+\Delta t} \underline{X} (\tau = t+\Delta t) \quad \text{neue Last} \end{cases}$$

** S sind hierbei die Lasten in den Hilfsfedern des Systems 1'

Ebenso erfolgt schrittweise je Zeitintervall Δt die Bestimmung der Zusatzfunktion $\underline{X}(t)$, die nach (2.4) eine Randlastkorrektur darstellt. Eine Identität beider Systeme im Randbereich wird dann vorliegen, wenn je zugeordnetem Knotenpunkt eine Übereinstimmung sowohl der Verformung, Geschwindigkeit als auch Beschleunigung erreicht wird. Dies führt zur Auswahl von drei Wegen zur Bestimmung der Zustandsgleichungen

$$\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{B} = 0 \quad (2.6),$$

wobei sich die Herstellung der Kompatibilität über den Beschleunigungsansatz empfiehlt.

\underline{A} ist dann die Randbeschleunigung beider Systeme, die durch die unbekannte Lastfunktion $\underline{X}(t)$ - gebildet aus Einheitsimpulsen - erzeugt werden. \underline{B} sind die Beschleunigungsanteile zum Zeitpunkt t , die aus allen aktuellen (im Zeitintervall Δt) sowie zurückliegenden Lasten ermittelt werden. Es gilt jeweils für beide Systeme

$$\underline{A} = \underline{A}^{(1)} + \underline{A}^{(2)} \quad \text{bzw.} \quad \underline{B} = \underline{B}^{(1)} + \underline{B}^{(2)} .$$

Mittels der Bestimmungsgleichung (2.6) ist die Beschleunigungsidentität für beide Systeme streng erfüllt; Geschwindigkeit bzw. Deformation können danach durch Integration hergeleitet werden, wobei besonderer Kredit von deren 'glättender' Funktion genommen wird, so daß von einer Entkoppelung der Lösungen für beide Teilsysteme ausgegangen werden kann.

Bisher erfolgte die Betrachtung an den Systemen 1' bzw. 2, d. h., die beim System 1' zusätzlich eingeführten Hilfsfedern müssen neutralisiert werden, indem deren Federkräfte nachträglich gelöscht werden. Somit wäre dann das System 1' in das Ausgangssystem 1 überführt, also $\underline{X}_1' \equiv \underline{X}_1$. Diese Korrektur ist nachträglich in jedem Zeitintervall Δt durchzuführen.

Zunächst erhält man aus (2.6) die Unbestimmten aus den äußeren Belastungen

$$\underline{X}^0 = - \underline{A}^{-1} \underline{B}$$

und ebenso die Kräfte \underline{S}^0 der eingeführten Hilfsfedern des Systems 1, die nun zyklisch innerhalb des Zeitintervalls Δt auf das System 2 übertragen werden. Für den k -ten Zyklus folgt somit die Beschleunigungsmatrix $\underline{C}^{k(2)}$ aus allen verbliebenen Lasten \underline{S}^{k-1} in den Hilfsfedern, so daß sich hieraus wieder

$$\underline{\mathbf{X}}^k = - \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{C}}^k (2)$$

ergibt, solange bis eine vorgegebene Fehlerschranke ε für $|\mathbf{S}^k|$ unterschritten wird. Damit wird die gesuchte Funktion $\underline{\mathbf{X}}(t)$ zu

$$\underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{X}}^0 + \sum_i^1 \underline{\mathbf{X}}^k \quad \text{mit den zugehörigen}$$

Kräften in den Hilfsfedern

$$\underline{\mathbf{S}}(t) = \underline{\mathbf{S}}^0 + \sum_i^1 \underline{\mathbf{S}}^k .$$

Damit ist in allgemeiner Darstellung gezeigt worden, wie das Gesamtproblem schrittweise entkoppelt und iterativ gelöst werden kann. Es sind bisher keinerlei Spezifizierungen hinsichtlich der Systembeschreibung und -lösung, z. B. in Form vorgegebener Implementierung, erfolgt.

Im folgenden wird mit Blick auf das Beispiel der Boden-Bauwerk-Interaktion die stufenweise Betrachtung einiger Sonderfälle vorgenommen, so daß die allgemeine Formulierung entsprechend modifiziert werden kann.

Fall I

System 1: nichtlinear / diskret

System 2: nichtlinear / rot.-symm.

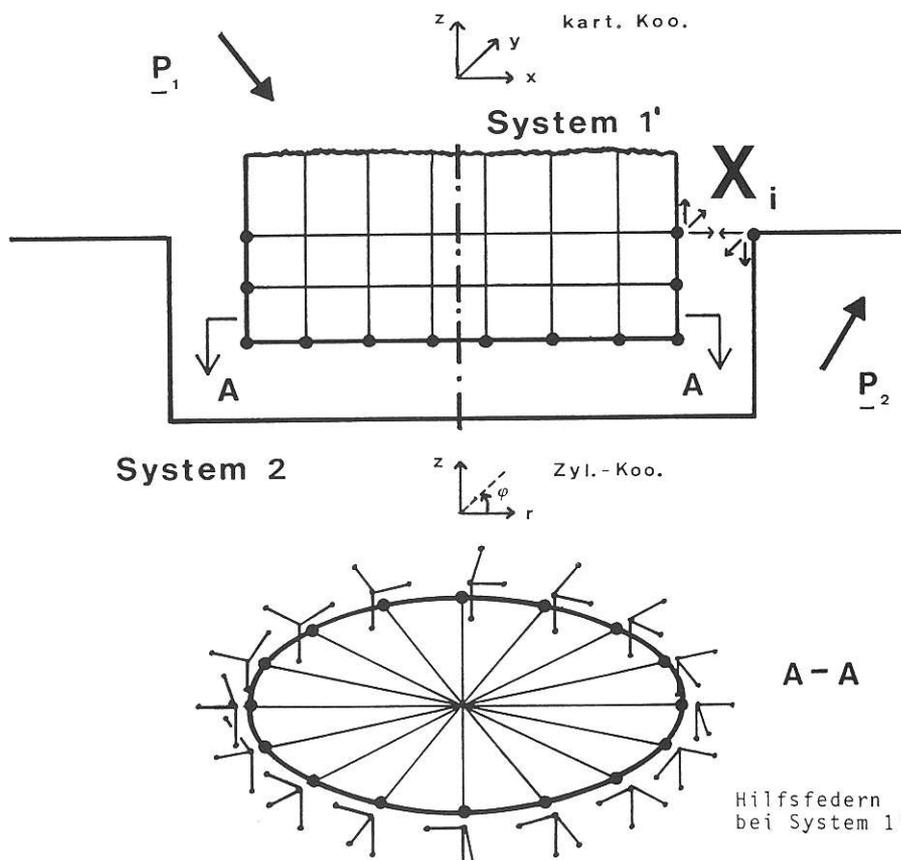


Bild 2.4
Boden-Bauwerk-
Darstellung

Hilfsfedern
bei System 1'

Geht man davon aus, daß ein beliebiges Gebäude im Zusammenwirken mit dem Untergrund zu untersuchen ist, so ist für die allgemeine Betrachtung zu konstatieren:

System 1 sei in diskreter, dreidimensionaler Weise dargestellt, z. B. mittels VOLUME Elementen, und ebenso sei bei beliebiger Belastung \underline{P}_1 nichtlineares Materialverhalten zugelassen. Der Boden selbst (als unendlicher Halbraum) wird dagegen vorteilhafterweise in rotationssymmetrischer Darstellung implementiert. Um zu konsistenter Schnittführung in der Nahtstelle a beider Systeme zu gelangen, wird daher das diskrete System 1 in diesem Bereich in eine ebenfalls rotationssymmetrische Elementierung überführt, so daß nunmehr die Geometrie beider Systeme in Koinzidenz gebracht ist. Hierbei gilt zu beachten, daß bei System 2 (s. Bild 2.4) infolge der rotationssymmetrischen Formulierung nur jeweils diskrete Punkte in der Schnittebene vorliegen, während die Beschreibung in Umfangsrichtung ϕ mittels Funktionsdarstellung in Abhängigkeit der Harmonischen n erfolgt.

Dem liegt z. B. für die Verschiebungen - die beim System 2 jetzt mit 'y' bezeichnet werden - der Ansatz zugrunde:

$$\begin{aligned} Y_r(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N Y_{r n}(r, z) \cos n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{Y}_{r n}(r, z) \sin n\phi \\ Y_z(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N Y_{z n}(r, z) \cos n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{Y}_{z n}(r, z) \sin n\phi \\ Y_\phi(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N Y_{\phi n}(r, z) \sin n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{Y}_{\phi n}(r, z) \cos n\phi . \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Geschwindigkeit \dot{y} bzw. Beschleunigung \ddot{y} .

Größen ohne '^' repräsentieren symmetrische, mit '^' antimetrische Anteile (s. z. B. /2/).

Zur Ermittlung der Korrekturlasten \underline{X} wird am System 2 nun in gleicher Weise je Knoten i angesetzt:

$$\begin{aligned} X_{i r}(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N X_{i r n}(r, z) \cos n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{X}_{i r n}(r, z) \sin n\phi \\ X_{i z}(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N X_{i z n}(r, z) \cos n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{X}_{i z n}(r, z) \sin n\phi \\ X_{i \phi}(r, z, \phi) &= \sum_{n=0}^N X_{i \phi n}(r, z) \sin n\phi + \sum_{n=0}^N \hat{X}_{i \phi n}(r, z) \cos n\phi . \end{aligned}$$

Nach dem Lösungsansatz ist für den Schnittbereich a die Beschleu-

nigungskompatibilität zu gewährleisten. Für das System 1 werden die gleichen Korrekturlasten \underline{X} als Funktion der n -ten Harmonischen als (diskrete) Randlasten angesetzt, so daß die Verformungen am System 1 – die jetzt nach Transformation in das zylindrische Koordinatensystem mit 'u' bezeichnet werden – jeweils an den diskreten Punkten ermittelt werden können.

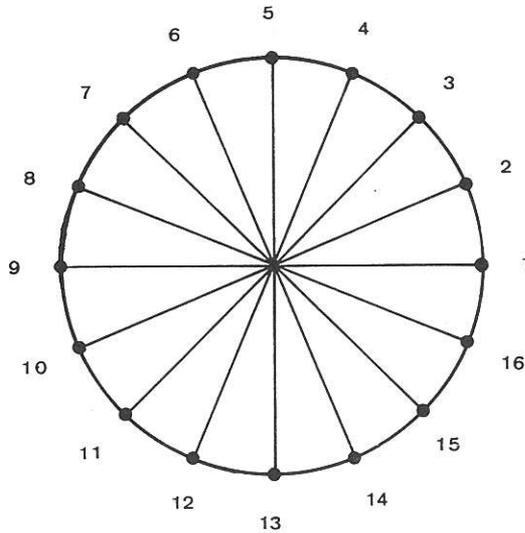
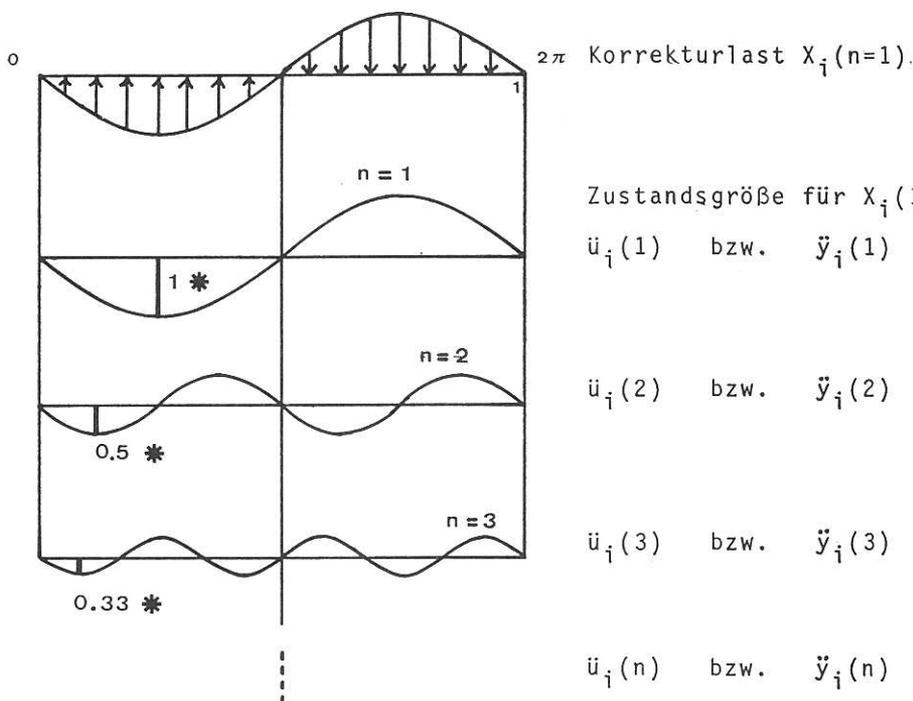


Bild 2.5
Beispiel der diskreten Unterteilung in Umfangsrichtung bei System 1

Mit den harmonischen Korrekturlasten $X_i(n)$ ist an der Nahtstelle die Beschleunigungskompatibilität zu etablieren; da für beide Systeme nichtlineares Verhalten zugelassen ist, wird sich keine Entkoppelung für das Beschleunigungsverhalten in Abhängigkeit von 'n' einstellen. Dies wird in Bild 2.6 erläutert. Hierbei werden die Anteile der identischen Harmonischen klar dominieren, während die übrigen Anteile – jeweils abklingend – Korrekturbeiträge leisten.



Zustandsgröße für $X_i(1)$
 $\ddot{u}_i(1)$ bzw. $\ddot{y}_i(1)$
 $\ddot{u}_i(2)$ bzw. $\ddot{y}_i(2)$
 $\ddot{u}_i(3)$ bzw. $\ddot{y}_i(3)$
 $\ddot{u}_i(n)$ bzw. $\ddot{y}_i(n) \approx 0$

Bild 2.6
Abhängigkeit der Beschleunigungen von 'n'

Somit kann nach Gleichung (2.6) die allgemeine Zustandsmatrix \underline{A} gebildet werden, die – für beide Systeme (1, 2) – wegen zugelassener Nichtlinearität im Prinzip vollständig besetzt ist, also in allgemeiner Schreibweise

$$\underline{A}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1,2)} & A_{12}^{(1,2)} & A_{13}^{(1,2)} & \dots & A_{1m}^{(1,2)} \\ A_{21}^{(1,2)} & A_{22}^{(1,2)} & A_{23}^{(1,2)} & \dots & A_{2m}^{(1,2)} \\ A_{31}^{(1,2)} & A_{32}^{(1,2)} & A_{33}^{(1,2)} & \dots & A_{3m}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}^{(1,2)} & A_{m2}^{(1,2)} & A_{m3}^{(1,2)} & \dots & A_{mm}^{(1,2)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Hierbei gilt jedoch mit ansteigender Differenz $n \neq m$, daß die Beiträge der Hauptdiagonalen die Nebendiagonalen immer stärker dominieren, bis schließlich

$$|A_{nn}^{(1,2)}| \gg \begin{cases} |A_{nm}^{(1,2)}| \\ |A_{mn}^{(1,2)}| \end{cases} \quad \text{mit } n \neq m$$

Die Superposition von $\underline{A}^{(1)}$ und $\underline{A}^{(2)}$ führt daher zu folgender symbolischen Besetzung der Gesamtmatrix \underline{A} :

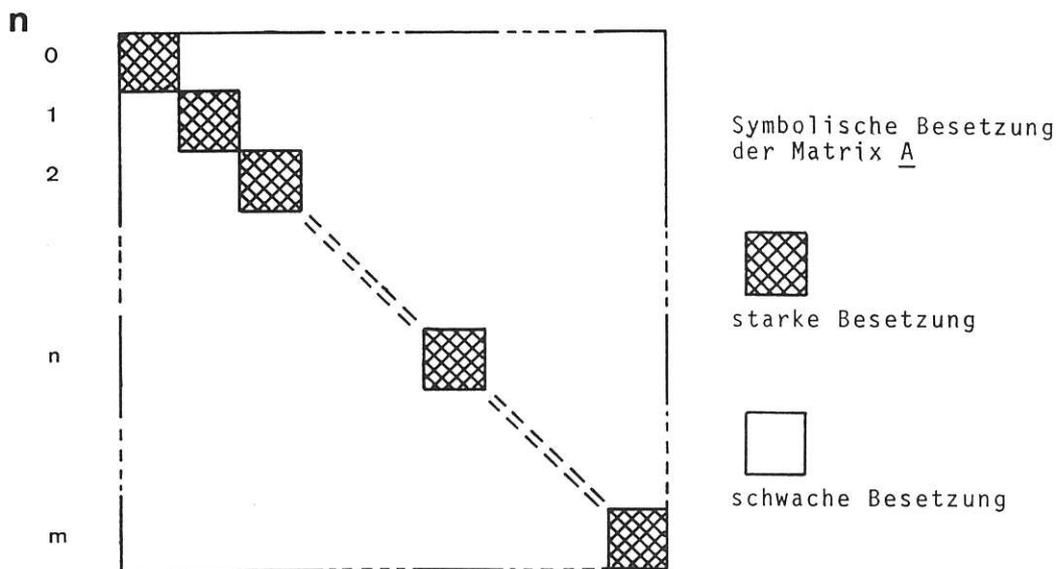


Bild 2.7
Symbolische Besetzung der Matrix \underline{A}

Dieses allgemeine Besetzungsschema erhält man sowohl für die symmetrischen als auch antimetrischen Anteile.

Vor der Betrachtung der weiteren Lösungsschritte soll eine kurze Abschätzung zur Zahl maximaler Anteile der Harmonischen 'n' vorgenommen werden.

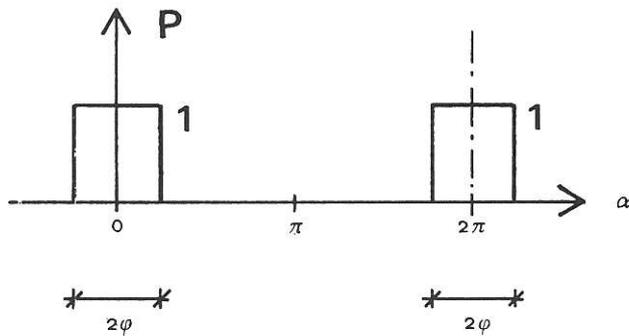


Bild 2.8
Fourier-Darstellung einer
symmetrischen Last

Die Fourier-Schreibweise einer über den Bereich 2ϕ verteilten Last ergibt (s. Bild 2.8)

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\phi}{2} + \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\phi \cos n\alpha \right]$$

und deren streifenförmige Verformungsauswertung der umlaufenden Funktion mit

$$\beta w^{IV}(\alpha) = -q$$

in Abhängigkeit von n

$$\beta w_n(\alpha) = \frac{1}{n^5} \sin n\phi \cos n\alpha$$

Bei einem angenommenen parabolischen Verformungsansatz innerhalb des Bereiches der diskreten Teilung (s. Bild 2.5) ergibt sich näherungsweise mit NTEIL als Zahl der gewählten Teilabschnitte (im System 1)

$$\phi \approx \frac{2\pi}{3 \cdot \text{NTEIL}}$$

Führt man ε als Grenzwert der anteiligen Verformung $w_n(\alpha)$ im Vergleich zur 1. Harmonischen ein, so ergibt die obere Abschätzung

$$\frac{1}{n^5} \leq \varepsilon \sin \left(\frac{2\pi}{3 \cdot \text{NTEIL}} \right)$$

Die identische Betrachtung für die Abschätzung der Beschleunigungskompatibilität ergibt mit $s = s(\alpha, t) = g(t) \cdot w(\alpha)$

$$\ddot{s}_n = \ddot{g} \cdot w_n(\alpha) \text{ ebenso näherungsweise}$$

$$\frac{1}{n^5} \leq \varepsilon \sin \left(\frac{2\pi}{3 \cdot \text{NTEIL}} \right)$$

Man erhält also für die Abschätzung der Verformungs- bzw. Beschleunigungsgrenzen

$$n_{\max} \geq \sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon \sin \phi}} \quad (2.8)$$

Wird beispielsweise $n_{max} \approx 3$ gefordert, führt dies zu einem oberen $\varepsilon \approx 3\%$; d. h. mit $m = 4$ (die nullte Harmonische einbezogen) können genügend genaue kompatible Zustände in der Randzone erzeugt werden.

Nachdem die Größenordnung der Zustandsmatrix \underline{A} abgeklärt ist, muß zur Lösung der Zustandsgleichung die Kehrmatrix \underline{A}^{-1} gebildet werden. Das kann einerseits direkt erfolgen; da es sich hier jedoch um eine gut konditionierte, diagonal-dominante Matrix handelt, die bei voller Bandbreite schwach besetzte Nebenglieder aufweist, empfiehlt sich der Lösungsweg in Bezug auf die Hauptdiagonale. In einem ersten Schritt erhält man getrennt für jede Harmonische n die näherungsweise, aber der Lösung sehr nahen Einheitslösungen $\underline{E}^{(n)}$, wenn $\underline{I}^{(n)}$ die Einheitsimpulse darstellen, also für $0 \leq n \leq m$

$$\underline{A}_{nn} \cdot \underline{E}^{(n)} = \underline{I}^{(n)} \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{E}^{(n)} = \underline{A}^{-1}_{nn} \quad .$$

Die endgültigen Einheitslösungen werden anschließend durch Nachiteration am Gesamtproblem erhalten, bis eine vorgegebene Genauigkeitsschranke erreicht ist; hierbei geht aus $\underline{E}^{(n)}$ die näherungsweise Ausgangsmatrix für \underline{A}^{-1} hervor mit

$$\underline{E} \approx \begin{bmatrix} A^{-1}_{11} & & & & \\ & A^{-1}_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & A^{-1}_{nn} & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & A^{-1}_{mm} \end{bmatrix} \approx \underline{A}^{-1} \quad (2.9)$$

Nachdem die Beschleunigungsmatrix \underline{B} aus den aktuellen und zurückliegenden Lastzuständen für beide Systeme bestimmt ist, erhält man die Lösung der unbestimmten Impulse $\underline{X}(t)$ im Schritt '0'

$$\underline{X}^0 = - \underline{E} \cdot \underline{B} \quad .$$

Es gilt nun, die Korrektur der eingeführten Hilfsfedern vorzunehmen; d. h., es ist die Zustandsmatrix $\underline{C}^{k(2)}$ am System 2 infolge der eingepprägten Federkräfte am System 1 aus allen aktuellen Lasten zu formulieren.

Die Gesamtkräfte in den Hilfsfedern sind dann allgemein

$$\underline{S}_{G_{e s}} = \underline{S}[P_1(t)] + \underline{S}[\Sigma X(t)]$$

bzw.

$$\underline{S}_{G_{e s}} = \underline{S}[P_1] + \underline{S}^E \cdot \underline{X}$$

.

Hierbei sind \underline{S}^E die Lösungen, die sich aus den Einheitsimpulsen in den Hilfsfedern ergeben. Sind $\underline{S}[P_1]$ bzw. \underline{S}^E nicht direkt erhältlich, sind sie ohne Zusatzaufwand unter Annahme gleicher Federkonstanten κ in den Hilfsfedern beispielsweise zu ermitteln aus

$$\underline{S}[P_1^*] = \kappa \cdot \underline{B}^{(1)*}$$

bzw.

$$\underline{S}^E = \kappa \cdot \underline{A}^{(1)*}$$

,

wobei die mit '*' gekennzeichnete Matrizen die Verformungszustände aus den genannten Lasten bedeuten.

Die Neutralisierung der Federkräfte erfolgt zyklisch; im ersten Iterationszyklus $k = 1$ setzt sich $\underline{S}_{G_{e s}}$ noch aus dem Anteil der äußeren Lasten zusammen, der bei den folgenden Schritten entfällt, also

Schritt

$$k = 1 \quad \underline{C}^{k(2)} = \underline{A}^{(2)} \cdot [\underline{S}[P_1] + \underline{S}^E \cdot \underline{X}^0]$$

mit

$$\underline{D} = -\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A}^{(2)}$$

$$\underline{X}^k = \underline{D} \cdot \underline{S}_{G_{e s}}^0$$

Schritt

$$k > 1 \quad \underline{C}^{k(2)} = \underline{A}^{(2)} \cdot \underline{S}^E \cdot \underline{X}^{k-1}$$

$$\underline{X}^k = \underline{D} \cdot \underline{S}^{k-1}$$

Nach Erreichen einer gesetzten Fehlerschranke kann dann gebildet werden

$$\underline{X}_{G_{e s}} = \underline{X}^0 + \Sigma \underline{X}^k$$

und

$$\underline{S}_{G_{e s}} = \underline{S}_{G_{e s}}^0 + \Sigma \underline{S}^k$$

Die Gesamtzustände - getrennt für die Systeme 1 und 2 - folgen nun für

$$\text{System 1} \quad \underline{u}_{G_{e s}} = \underline{u}[P_1] + \underline{u}^E \cdot \underline{X}_{G_{e s}}$$

$$\text{System 2} \quad \underline{y}_{G_{e s}} = \underline{y}[P_2] - \underline{y}^E \cdot (\underline{S}_{G_{e s}} - \underline{X}_{G_{e s}})$$

Hierbei sind in allgemeiner Form \underline{u}^E bzw. \underline{y}^E die Einheitsverfor-

mungszustände aus den Einheitsimpulsen \underline{I} zum jeweiligen Zeitintervall Δt . Die entsprechenden Ableitungen folgen aus dem gewählten Integrationsverfahren im Bereich der Nahtstelle.

Die Aufbereitung des Lösungswegs je Zeitschritt ist noch einmal in Tab. 2.1 zusammengefaßt.

Tab. 2.1 Allgemeiner Lösungsweg FALL I

System 2 Zahl der erforderlichen Harmonischen m
 System 1 Entwicklung X_i mit diskreter Lastaufteilung

Je Zeitschritt j
 =====

Lösung der Schwingungsgleichungen [P, alle $X_i = 1$]

System 1 $\underline{M}_1 \underline{\ddot{x}}_1' + \underline{C}_1 \underline{\dot{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{R}_1 // \underline{X}$

System 2 $\underline{M}_2 \underline{\ddot{x}}_2 + \underline{C}_2 \underline{\dot{x}}_2 + \underline{K}_2 \underline{x}_2 = \underline{R}_2 // \underline{X}$

Aufstellen $\underline{A}^{(1)}, \underline{A}^{(2)}$ bzw. $\underline{B}^{(1)}, \underline{B}^{(2)}$
 $\underline{A}^{(1)*}$ bzw. $\underline{B}^{(1)*}$

Bilden \underline{A}^{-1}
 $\underline{S}^E = \kappa \underline{A}^{(1)*}$ bzw. direkt \underline{S}
 $\underline{D} = -\underline{A}^{-1} \underline{A}^{(2)}$

Lösung \underline{X}^0 bzw. \underline{X}^k mit $\underline{X} = \underline{D} \cdot \underline{S}$
 mit $\underline{X}_{Ges} = \underline{X}^0 + \sum_k \underline{X}^k$ und $\underline{S}_{Ges} = \underline{S}^0 + \sum_k \underline{S}^k$
 $\underline{u}^E(j)$ bzw. $\underline{y}^E(j)$ mit Transformation

Gesamtlösung

System 1 $\underline{u}_{Ges} = \underline{u}[R_1] + \underline{u}^E \cdot \underline{X}_{Ges}$ für Vektor \underline{P}_1
 System 2 $\underline{y}_{Ges} = \underline{y}[R_2] - \underline{y}^E \cdot [\underline{S}_{Ges} - \underline{X}_{Ges}]$ für Vektor \underline{P}_2

$\underline{\dot{u}}_{Ges}, \underline{\ddot{u}}_{Ges}$ bzw. $\underline{\dot{y}}_{Ges}, \underline{\ddot{y}}_{Ges}$ nach Integrationsverfahren.

Tab. 2.2 Allgemeiner Lösungsweg FALL II

System 2 Zahl der erforderlichen Harmonischen m
 System 1 Entwicklung X_i mit diskreter Lastaufteilung

N U R System 2

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_2 \ddot{\underline{x}}_2 + \underline{C}_2 \dot{\underline{x}}_2 + \underline{K}_2 \underline{x}_2 = \underline{R}_2 // \underline{X}$

Aufstellen und Bilden $\underline{B}^{(2)}(j); \underline{Y}^E(j); \dot{\underline{Y}}^E(j), \ddot{\underline{Y}}^E(j)$
 $\underline{A}^{(2)}$ nur j=1
 (entkoppelt)

N U R System 1

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_1 \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1 \dot{\underline{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{R}_1 // \underline{X}$
 Aufstellen $\underline{A}^{(1)}$ bzw. $\underline{B}^{(1)}$ $\underline{A}^{(1)*}$ bzw. $\underline{B}^{(1)*}$
 Bilden \underline{A}^{-1}
 $\underline{S}^E = \kappa \underline{A}^{(1)*}$ bzw. direkt \underline{S}
 $\underline{D} = -\underline{A}^{-1} \underline{A}^{(2)}$

Lösung \underline{X}^0 bzw. \underline{X}^k mit $\underline{X} = \underline{D} \cdot \underline{S}$
 mit $\underline{X}_{Ges} = \underline{X}^0 + \sum_k \underline{X}^k$ und $\underline{S}_{Ges} = \underline{S}^0 + \sum_k \underline{S}^k$
 $\underline{u}^E(j)$ und $\underline{y}^E = \sum_j \underline{y}^E(j)$ mit Transformation

Gesamtlösung

System 1 $\underline{u}_{Ges} = \underline{u}[R_1] + \underline{u}^E \cdot \underline{X}_{Ges}$ für Vektor \underline{P}_1
 System 2 $\underline{y}_{Ges} = \underline{y}[R_2](j) - \sum \underline{y}^E(j) \cdot [\underline{S}_{Ges}(j) - \underline{X}_{Ges}(j)]$
 für Vektor \underline{P}_2 rekursiv
 $\dot{\underline{u}}_{Ges}, \ddot{\underline{u}}_{Ges}$ nach Integrationsverfahren
 $\dot{\underline{y}}_{Ges}, \ddot{\underline{y}}_{Ges}$ nach Integrationsverfahren rekursiv

Fall III

System 1: nichtlinear / diskret / optimiert

System 2: linear / rot.-symm.

Wird die Elementierung des Systems 1 an der Nahtstelle a zum System 2 derart optimiert, daß

- realistisches rotationssymmetrisches Deformationsverhalten
- nichtlineares Verhalten außerhalb des Einflußbereiches der Unbestimmten

gewährleistet ist, so gilt auch näherungsweise

$$\underline{\mathbf{A}}^{(1)} \approx \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & & & \approx 0 \\ & A_{22}^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ \approx 0 & & & A_{nn}^{(1)} \\ & & & & A_{mm}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.10a)$$

d. h., die Nebenglieder $\underline{\mathbf{A}}_{in}^{(1)}$ sind hinreichend klein. Somit folgt auch für die Gesamtmatrix $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^{(1)} + \underline{\mathbf{A}}^{(2)}$ mit Gleichung (2.9), daß eine Entkoppelung für die einzelnen Harmonischen n vorliegt; der Vorteil bei der Bildung von $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ ist evident.

Aus der weiteren Voraussetzung linearen Verhaltens für den Einflußbereich der Unbestimmten $\underline{\mathbf{x}}$ resultiert zusätzlich, daß gilt:

$$\underline{\mathbf{A}}(1) \approx \underline{\mathbf{A}}(2) \approx \dots \approx \underline{\mathbf{A}}(j-1) \approx \underline{\mathbf{A}}(j) \quad (2.11)$$

Somit ist die Zustandsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ auch nur einmal für den Zeitschritt $j = 1$ zu erstellen.

Der Lösungsweg ist in Tab. 2.3 dargestellt.

Tab. 2.3 Allgemeiner Lösungsweg FALL III

System 2 Zahl der erforderlichen Harmonischen m
 System 1 Entwicklung X_1 mit diskreter Lastaufteilung

N U R System 2

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_2 \ddot{\underline{x}}_2 + \underline{C}_2 \dot{\underline{x}}_2 + \underline{K}_2 \underline{x}_2 = \underline{R}_2 // \underline{X}$

Aufstellen $\underline{B}^{(2)}(j); \underline{y}^E(j); \underline{\dot{y}}^E(j); \underline{\ddot{y}}^E(j)$

Aufstellen und Bilden $\underline{A}^{(2)} \quad \underline{\text{nur } j=1}$
 (= entkoppelt)

N U R System 1

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_1 \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1 \dot{\underline{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{R}_1 // \underline{X}$

Aufstellen und Bilden $\underline{A}^{(1)}; \underline{A}^{-1}; \underline{A}^{(1)*}; \underline{B}^{(1)*} \quad \underline{\text{nur}}$
 (= entkoppelt)

$\underline{S}^E \approx \kappa \underline{A}^{(1)*}$ bzw. direkt $\underline{S} \quad \underline{j=1}$

$\underline{D} = -\underline{A}^{-1} \underline{A}^{(2)}$

Bilden $\underline{B}^{(1)}(j)$

Lösung \underline{X}^0 bzw. \underline{X}^k mit $\underline{X} = \underline{D} \cdot \underline{S}$

mit $\underline{X}_{Ges} = \underline{X}^0 + \sum_k \underline{X}^k$ und $\underline{S}_{Ges} = \underline{S}^0 + \sum_k \underline{S}^k$

$\underline{u}^E(j)$ und $\underline{y}^E = \sum_j \underline{y}^E(j)$ mit Transformation

Gesamtlösung

System 1 $\underline{u}_{Ges} = \underline{u}[R_1] + \underline{u}^E \cdot \underline{X}_{Ges}$ für Vektor \underline{P}_1

System 2 $\underline{y}_{Ges} = \underline{y}[R_2](j) - \sum \underline{y}^E(j) \cdot [\underline{S}_{Ges}(j) - \underline{X}_{Ges}(j)]$
 für Vektor \underline{P}_2 rekursiv

$\underline{\dot{u}}_{Ges}, \underline{\ddot{u}}_{Ges}$ nach Integrationsverfahren

$\underline{\dot{y}}_{Ges}, \underline{\ddot{y}}_{Ges}$ nach Integrationsverfahren rekursiv

Fall IV

System 1: nichtlinear / diskret / optimiert /
Zahl der Ausgabepunkte $< X_i$
System 2: linear / rot.-symm. / Lasten symm.

Mit der - prinzipiell erreichbaren - Einschränkung von definierten Lasten, symmetrisch zum System 2, kann generell der Gesamtaufwand um den Faktor 2 - durch Verzicht der Entwicklung antimetrischer Funktionen - gesenkt werden.

Handelt es sich bei System 1 um ein komplexes System, so kann noch eine Differenzierung derart vorgenommen werden, daß die vorgegebene Zahl der Ausgabepunkte die der Unbestimmten unterschreiten wird. In diesem Fall kann unter Ausnutzung des Satzes von Maxwell-Betti, der auch im dynamischen Fall seine Gültigkeit beibehält, mit

$$u_k [P_I=1] = u_I [X_k=1]$$

die notwendige Verformung \underline{u}^E aufgebaut werden, während die Zustandsgleichung für die Unbestimmten X_i nur im ersten Schritt komplett gelöst wird.

Diese Modifikation ist in Tab. 2.4 eingetragen.

Tab. 2.4 Allgemeiner Lösungsweg Fall IV

System 2 Zahl der erforderlichen Harmonischen m
 System 1 Entwicklung X_1 mit diskreter Lastaufteilung

N U R System 2

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_2 \ddot{\underline{x}}_2 + \underline{C}_2 \dot{\underline{x}}_2 + \underline{K}_2 \underline{x}_2 = \underline{R}_2 // \underline{X}$
 Aufstellen $\underline{B}^{(2)}(j); \underline{Y}^E(j); \dot{\underline{Y}}^E(j); \ddot{\underline{Y}}^E(j)$
 Aufstellen und Bilden $\underline{A}^{(2)}$ nur $j=1$
 (entkoppelt)

N U R System 1

nur Zeitschritt j = 1

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_1 \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1 \dot{\underline{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{R}_1 // \underline{X}$
 Aufstellen und Bilden $\underline{A}^{(1)}; \underline{A}^{-1}; \underline{A}^{(1)*}; \underline{B}^{(1)*}$
 (= entkoppelt)
 $\underline{S}^E = \kappa \underline{A}^{(1)*}$ bzw. direkt \underline{S}
 $\underline{D} = -\underline{A}^{-1} \underline{A}^{(2)}$

Zeitschritt j

Lösung der Schwingungsgleichung $\underline{M}_1 \ddot{\underline{x}}_1' + \underline{C}_1 \dot{\underline{x}}_1' + \underline{K}_1 \underline{x}_1' = \underline{R}_1 // \underline{R}_1$
 Bilden $\underline{B}^{(1)}(j); [\underline{A}^{(1)}(j)]$
 Lösung \underline{X}^0 bzw. \underline{X}^k mit $\underline{X} = \underline{D} \cdot \underline{S}$
 mit $\underline{X}_{Gees} = \underline{X}^0 + \sum_k \underline{X}^k$
 und $\underline{S}_{Gees} = \underline{S}^0 + \sum_k \underline{S}^k$
 \underline{u}^E und $\underline{y}^E = \sum_j \underline{Y}^E(j)$ mit Transformation

Gesamtlösung

System 1 $\underline{u}_{Gees} = \underline{u}[R_{1,r}] + \underline{u}^E \cdot \underline{X}_{Gees}$ für Vektor \underline{P}_1
 System 2 $\underline{y}_{Gees} = \underline{y}[R_2](j) - \sum \underline{Y}^E(j) \cdot [\underline{S}_{Gees}(j) - \underline{X}_{Gees}(j)]$
 für Vektor \underline{P}_2 rekursiv

$\dot{\underline{u}}_{Gees}, \ddot{\underline{u}}_{Gees}$ nach Integrationsverfahren

$\dot{\underline{y}}_{Gees}, \ddot{\underline{y}}_{Gees}$ nach Integrationsverfahren rekursiv

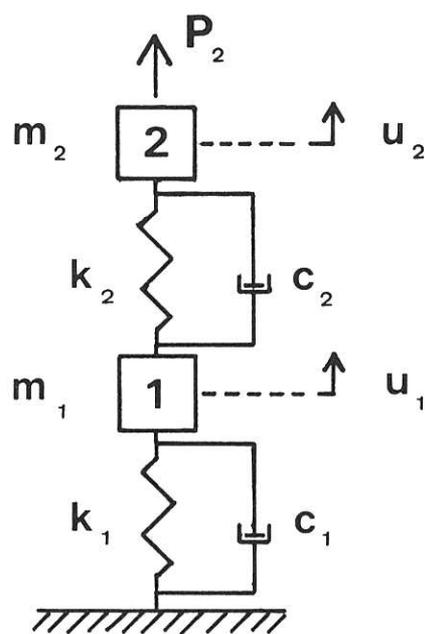
Mittels spezifischer Definitionen sind aufsteigend (Fall I-IV) mögliche Vereinfachungen aufgezeigt worden. Generell ist hierbei zu konstatieren, daß die Bedingung der Nichtlinearität (bei System 1 z. B.) eine kontinuierliche bzw. bedingte Reformation der effektiven Steifigkeitsmatrix und davon abhängig der Verformungsbeziehungen \underline{u}^E erfordert; d. h., der Lösungsalgorithmus bedingt (wenn auch nur) lastseitig einen Eingriff in den vorhandenen Programmablauf. M. a. W., der Operator zur nachträglichen Koppelung der vormals entkoppelten Systeme ist lastseitig beispielsweise nach Lösung jedes Zeitschrittes j zur weiteren Korrektur als begleitender Prozessor zu implementieren. Nur bei echt linearem Verhalten beider Systeme könnte - aufgrund der uneingeschränkten Gültigkeit des Superpositionsprinzips - eine vom Programmcode unabhängige Gesamtlösung erreicht werden.

3. Analytische Verifikation am 2DOF-System

Die Gültigkeit der Beziehungen in Punkt 2. soll im Vergleich zur 'genauen' analytischen Lösung gezeigt werden, und zwar für das 2DOF/1DOF-System. Hierzu werden zunächst die allgemeinen Lösungen angegeben.

3.1 Allgemeine Lösungen

3.1.1 2DOF-System



Die allgemeine Schwingungsgleichung

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{u} = \underline{\mathbf{P}} \quad (3.1)$$

wird (s. z. B. /4/) mittels des Ansatzes $\underline{\Phi}$ für die Eigenformen mit

$$\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{Y}(t) \quad (3.2)$$

umgeschrieben zu :

Bild 3.1
2DOF-System

$$\underline{\Phi}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\Phi} \ddot{\underline{Y}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\Phi} \dot{\underline{Y}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\Phi} \underline{Y}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{\mathbf{P}}(t) \quad \text{oder}$$

$$\underline{\mathbf{M}}^* \ddot{\underline{Y}}(t) + \underline{\mathbf{C}}^* \dot{\underline{Y}}(t) + \underline{\mathbf{K}}^* \underline{Y}(t) = \underline{\mathbf{P}}^*(t)$$

Für das 2DOF-System gilt

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{und für die}$$

Dämpfung $\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$ mit der Rayleigh Beziehung

$$\underline{\mathbf{C}} = s_1 \underline{\mathbf{M}} + s_2 \underline{\mathbf{K}}$$

$$= s_1 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 m_1 + s_2 (k_1+k_2) & -s_2 k_2 \\ -s_2 k_2 & s_1 m_2 + s_2 k_2 \end{bmatrix}$$

Mit der Voraussetzung kleiner Dämpfungswerte erfolgt die Bestimmung der Eigenwerte ohne die Dämpfungsanteile; also

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Für $u_i = a_i \sin \omega (t+\alpha)$ und $\ddot{u}_i = -a_i \omega^2 \sin \omega (t+\alpha)$ werden die Eigenwerte ω aus dem Determinantenwert

$$\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ermittelt zu}$$

$$\omega^4 - \frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{m_1 m_2} \omega^2 + \frac{(k_1 + k_2) k_2 - k_2^2}{m_1 m_2} = 0.$$

Nach Einführung der Abkürzungen

$$2A = \frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{m_1 m_2}, \quad B = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad \text{und} \quad \lambda = \omega^2$$

folgen aus $\lambda^2 - 2A + B = 0$

$$\lambda_{1,2} = A \pm C \quad \text{und} \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

die Eigenwerte $\omega_1^2 = A + C$ und

$$\omega_2^2 = A - C.$$

Die Eigenformen erhält man durch Einführen der Verformungsbeziehungen

$$\begin{cases} \{-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)\} a_1 - k_2 a_2 = 0 \\ -k_2 a_1 + \{-m_2 \omega^2 + k_2\} a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{zu}$$

$$a_1 = \alpha_i a_2.$$

Mit $\alpha_i = \frac{m_2 \omega_i^2}{-m_1 \omega_i^2 + k_1}$ ergibt sich die

zugehörige Eigenform $\psi_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ 1 \end{bmatrix}$ und damit die

Modalmatrizen:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\Phi}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nach Einführung der Modalausdrücke in die Schwingungsgleichung und unter Beachtung der orthogonalen Beziehungen

$$\Phi_i^T \Bigg\}_M^K \cdot \Phi_j \Bigg\}_M^K = 0 \quad \text{für } i \neq j, \text{ die zum identischen}$$

Verschwinden der Nebenglieder führen, folgen (s. z. B. /4/) die sog. generalisierten Beziehungen:

$$\underline{P}^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 P_1 + P_2 \\ \alpha_2 P_2 + P_2 \end{bmatrix} \quad \text{generalisierte Last} \quad (3.3)$$

$$\underline{M}^* = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 m_1 + m_2 & \\ & \alpha_2^2 m_1 + m_2 \end{bmatrix} \quad \text{generalisierte Masse} \quad (3.4)$$

$$\underline{K}^* = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 (k_1 + k_2) - & \\ -2\alpha_1 k_2 + k_2 & \\ & \alpha_2^2 (k_1 + k_2) - \\ & & -2\alpha_2 k_2 + k_2 \end{bmatrix} \quad \text{general. Steifigkeit} \quad (3.5)$$

Mit

$C_i^* = 2M_i^* \omega_i D_i \equiv 0$ sind die entkoppelten Lösungen dann

$$Y_i = \frac{1}{M_i^* \omega_i} \int_0^t P_i^*(\tau) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau$$

und mit (3.2) erhält man die allgemeine ungedämpfte Lösung für das 2DOF-System:

$$u_1(t) = \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1} \int_0^t P_1^*(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2} \int_0^t P_2^*(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau \quad (3.6)$$

bzw.

$$u_2(t) = \frac{1}{M_1^* \omega_1} \int_0^t P_1^*(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau + \frac{1}{M_2^* \omega_2} \int_0^t P_2^*(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Mit $C_i^* \neq 0$ folgt nach /4/

$$Y_i(t) = \frac{1}{M_i^* \omega_{di}} \int_0^t P_i^*(\tau) e^{-D_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau ,$$

woraus dann $u_i(t)$ unter Beachtung von $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1-D_i}$ resultiert.

Ist zusätzlich noch ein Anfangszustand für Verschiebung und Geschwindigkeit zu berücksichtigen, so modifiziert sich die allgemeine Lösung zu

$$Y_i = Y_{o,i}^* \cos \omega_i (t-t_1) + \dot{Y}_{o,i}^* \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i (t-t_1) + \frac{1}{M_i^* \omega_i} \int_{t_1}^t P_i(\tau) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Dies gilt vor allem, wenn die Lastfunktion $P_i^*(\tau)$ nur bereichsweise definiert ist (s. z. B. /5/) mit $i = 1, 2$.

Tab. 3.1 Parameter des ungedämpften 2DOF-Systems

$$A = \frac{1}{2} \frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{m_1 m_2}$$

$$B = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}$$

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

$$\omega_1^2 = A - C$$

$$\omega_2^2 = A + C$$

$$\alpha_1 = \frac{m_2 \omega_1^2}{-m_1 \omega_1^2 + k_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{m_2 \omega_2^2}{-m_1 \omega_2^2 + k_1}$$

$$M_1^* = \alpha_1^2 m_1 + m_2$$

$$M_2^* = \alpha_2^2 m_1 + m_2$$

$$K_1^* = \alpha_1^2 (k_1 + k_2) - 2\alpha_1 k_2 + k_2$$

$$K_2^* = \alpha_2^2 (k_1 + k_2) - 2\alpha_2 k_2 + k_2$$

$$P_1^* = \alpha_1 P_1 + P_2$$

$$P_2^* = \alpha_2 P_1 + P_2$$

Aus den allgemeinen Lösungen (3.8) werden folgende Sonderfälle hergeleitet:

Konstante Einzellast

1) Einzellast bei Punkt 1 $P_1 = \text{konst.}$ $(P_2 \equiv 0)$

$$u_1(t)_{P_1} = P_1 \left\{ \frac{\alpha_1^2}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2^2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] \right\} \quad (3.9)$$

$$u_2(t)_{P_1} = P_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] \right\} \quad (3.10)$$

2) Einzellast bei Punkt 2 $P_2 = \text{konst.}$ $(P_1 \equiv 0)$

$$u_1(t)_{P_2} = P_2 \left\{ \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] \right\} \quad (3.11)$$

$$u_2(t)_{P_2} = P_2 \left\{ \frac{1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{1}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] \right\} \quad (3.12)$$

Mit $P_1 = 1$ und $P_2 = 1$ erhält man sofort die Bestätigung der Maxwell-Betti-Beziehung, nämlich $u_2(t)_{P_1=1} \equiv u_1(t)_{P_2=1}$.

Rechteckimpuls über Δt

Mit den Anfangsbedingungen Y_{0i}^* bzw. \dot{Y}_{0i}^* , die aus der Integration für $t = \Delta t$ resultieren, erhält man die allgemeinen Lösungen für den Rechteckimpuls.

3) Impuls bei Punkt 1

$$I_1 = 1$$

$$u_1(t)_{I_1=1} \begin{cases} \frac{\alpha_1^2}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2^2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{\alpha_1^2}{M_1^* \omega_1^2} [\cos \omega_1 (t - \Delta t) - \cos \omega_1 t] + \\ \quad + \frac{\alpha_2^2}{M_2^* \omega_2^2} [\cos \omega_2 (t - \Delta t) - \cos \omega_2 t] & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.13)$$

$$u_2(t)_{I_1=1} \begin{cases} \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [\cos \omega_1 (t - \Delta t) - \cos \omega_1 t] + \\ \quad + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [\cos \omega_2 (t - \Delta t) - \cos \omega_2 t] & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.14)$$

4. Impuls bei Punkt 2

$$I_2 = 1$$

$$u_1(t)_{I_2=1} \begin{cases} \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1^2} [\cos \omega_1 (t - \Delta t) - \cos \omega_1 t] + \\ \quad + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2^2} [\cos \omega_2 (t - \Delta t) - \cos \omega_2 t] & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.15)$$

$$u_2(t)_{I_2=1} \begin{cases} \frac{1}{M_1^* \omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] + \frac{1}{M_2^* \omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{1}{M_1^* \omega_1^2} [\cos \omega_1 (t - \Delta t) - \cos \omega_1 t] + \\ \quad + \frac{1}{M_2^* \omega_2^2} [\cos \omega_2 (t - \Delta t) - \cos \omega_2 t] & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.16)$$

Dreieckimpuls über $2\Delta t$

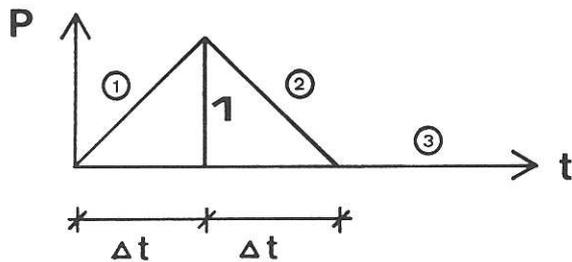


Bild 3.2
Dreieckimpuls

Entsprechend (3.8) ist die Integration in den Teilbereichen (s. Bild 3.2) durchzuführen, so daß man für die Zeitintervalle erhält

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq \Delta t \quad S_i^1 &= \frac{1}{\omega_i} \left[\frac{t}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \right] \\
 \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \quad S_i^2 &= \frac{1}{\omega_i} \left[2 - \frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega_i} (2\sin \omega_i (t-\Delta t) - \sin \omega_i t) \right] \\
 2\Delta t \leq t \quad S_i^3 &= \frac{1}{\omega_i} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega_i} \left[2\sin \omega_i (t-\Delta t) - \sin \omega_i t - \sin \omega_i (t-2\Delta t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.17 a-c}$$

Hierbei gilt zu bemerken, daß es wegen der gewählten Lastfunktion zu keinen Diskontinuitäten kommt, also

$$\begin{aligned}
 S_i^1(\Delta t) &= S_i^2(\Delta t) = \frac{1}{\omega_i} \left[1 - \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i \Delta t \right] \quad \text{bzw.} \\
 S_i^2(2\Delta t) &= S_i^3(2\Delta t) = \frac{1}{\omega_i} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega_i} [2\sin \omega_i \Delta t - \sin \omega_i 2\Delta t] \quad .
 \end{aligned}$$

5) Impuls bei Punkt 1 $D_1 = 1$

$$u_1(t)_{D_1} = \frac{\alpha_1^2}{M_1^* \omega_1} S_1^k + \frac{\alpha_2^2}{M_2^* \omega_2} S_2^k \tag{3.18}$$

$$u_2(t)_{D_1} = \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1} S_1^k + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2} S_2^k \tag{3.19}$$

mit $k = 1, 2, 3$

6) Impuls bei Punkt 2 $D_2 = 1$

$$u_1(t)_{D_2} = \frac{\alpha_1}{M_1^* \omega_1} S_1^k + \frac{\alpha_2}{M_2^* \omega_2} S_2^k \tag{3.20}$$

$$u_2(t)_{D_2} = \frac{1}{M_1^* \omega_1} S_1^k + \frac{1}{M_2^* \omega_2} S_2^k \tag{3.21}$$

mit $k = 1, 2, 3$

Die erforderlichen Ableitungen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können dann vollzogen werden.

3.1.2 1DOF-System

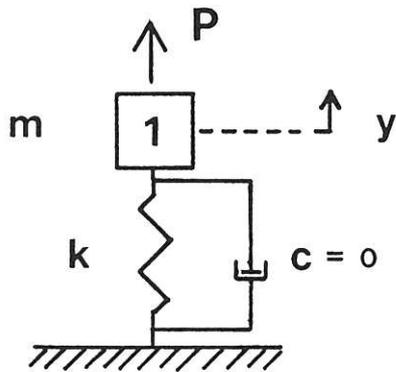


Bild 3.3
1DOF-System

Mit $c = 0$ folgt aus der Schwingungs-
gleichung

$$m \ddot{y} + k y = P \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

die Lösung nach (3.8) zu

$$y(t) = Y_0 \cos \omega(t-t_1) + \dot{y}_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_1) + \frac{1}{m\omega} \int_{t_1}^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau .$$

Es werden dieselben Sonderlastfälle wie unter Punkt 3.1.1 behan-
delt:

1) Einzellast P = konst.

$$y(t)_P = P \frac{1}{m\omega^2} [1 - \cos \omega t] \quad (3.22)$$

2) Rechteckimpuls über Δt I = 1

$$y(t)_{I=1} = \begin{cases} \frac{1}{m\omega^2} [1 - \cos \omega t] & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{1}{m\omega^2} [\cos \omega(t-\Delta t) - \cos \omega t] & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.23)$$

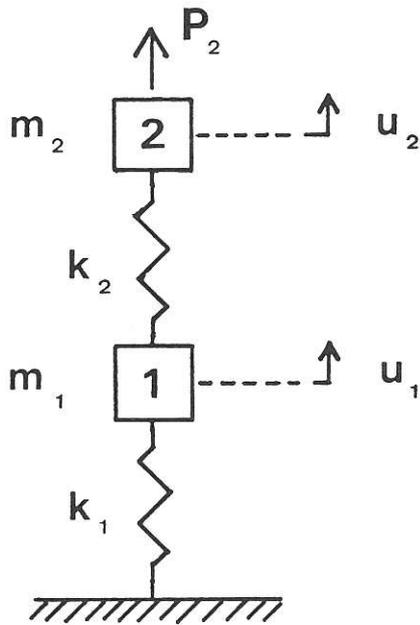
3) Dreieckimpuls über $2 \Delta t$ D = 1

Mit $i = 1$ in (3.17 a-c) folgt

$$y(t)_{D=1} = \frac{1}{m\omega^2} \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ 2 - \frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega} [2 \sin \omega(t-\Delta t) - \sin \omega t] \\ \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\omega} [2 \sin \omega(t-\Delta t) - \sin \omega t - \sin \omega(t-2\Delta t)] \end{cases} \quad (3.24)$$

Die erforderlichen Ableitungen für die Geschwindigkeit bzw. Be-
schleunigung können dann vollzogen werden.

3.2 Beispiel 1



Die Verifikation wird am konkreten Beispiel vorgenommen.

$$m_1 = 2 \text{ MNs}^2/\text{m}$$

$$m_2 = 1 \text{ MNs}^2/\text{m}$$

$$k_1 = 4000 \text{ MN/m}$$

$$k_2 = 2000 \text{ MN/m}$$

$$P_1 = 0 \text{ MN}$$

$$P_2 = 200 \text{ MN}$$

Bild 3.4
2DOF-System

Entsprechend Tab. 3.1 erhält man dann die konstanten Werte zu:

$$A = 2500$$

$$B = 4 \cdot 10^6$$

$$C = 1500$$

$$\omega_1^2 = 1000$$

$$\omega_2^2 = 4000$$

$$\alpha_1 = 0.5$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$M_1^* = 1.5$$

$$M_2^* = 3$$

$$K_1^* = 1500$$

$$K_2^* = 12000$$

$$P_1^* = 200$$

$$P_2^* = 200$$

Damit resultieren die Gleichungen (3.11 bzw. 3.12) zu

$$u_1(t) = 0.06666\bar{6} [1 - \cos \sqrt{1000} t] - 0.016666\bar{6} [1 - \cos \sqrt{4000} t] \quad (3.11a)$$

$$u_2(t) = 0.13333\bar{3} [1 - \cos \sqrt{1000} t] + 0.016666\bar{6} [1 - \cos \sqrt{4000} t] \quad (3.12a)$$

Die exakten Lösungen für $u_1(t)$ und $u_2(t)$ bzw. $\ddot{u}_1(t)$ und $\ddot{u}_2(t)$ sind über eine Schwingungsperiode in Tab. 3.2 a und b angegeben.

t	$u_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.
0.01	0.0000819	0.9589124 + 1
2	0.0012470	0.3369606 + 2
3	0.0058031	0.6023667 + 2
4	0.0162802	0.7465132 + 2
5	0.0340263	0.6596291 + 2
6	0.0581501	0.3155885 + 2
7	0.0852733	- 0.2120585 + 2
8	0.1102474	- 0.7726337 + 2
9	0.1276152	- 0.1191328 + 3
0.10	0.1333048	- 0.1332620 + 3
11	0.1259426	- 0.1150146 + 3
12	0.1073026	- 0.7037471 + 2
13	0.0817264	- 0.1374174 + 2
14	0.0547285	0.3735567 + 2
15	0.0312972	0.6860651 + 2
16	0.0145060	0.7391234 + 2
17	0.0049186	0.5715240 + 2
18	0.0009595	0.3009464 + 2
19	0.0000469	0.7319375 + 1
0.20	0.0000000244	0.1710257

Tab. 3.2a

Exakte Lösung
des 2DOF-Systems
(Punkt 1)

t	$u_2(t)$	$\ddot{u}_2(t)$
0.	0.	0.
0.01	0.0098349	0.1804939 + 3
2	0.0374372	0.1276196 + 3
3	0.0776461	0.5631405 + 2
4	0.1234922	- 0.1442383 + 2
5	0.1680420	- 0.6803138 + 2
6	0.2060091	- 0.9571814 + 2
7	0.2346141	- 0.9868162 + 2
8	0.2534790	- 0.8646311 + 2
9	0.2637136	- 0.7219680 + 2
0.10	0.2666524	- 0.6669518 + 2
11	0.2628132	- 0.7374127 + 2
12	0.2515332	- 0.8846114 + 2
13	0.2314376	- 0.9942235 + 2
14	0.2015413	- 0.9362560 + 2
15	0.1624982	- 0.6240200 + 2
16	0.1174303	- 0.5848709 + 1
17	0.0719083	0.6602053 + 2
18	0.0329732	0.1359726 + 3
19	0.0074602	0.1851733 + 3
0.20	0.0001710	0.1996578 + 3

Tab. 3.2b

Exakte Lösung
des 2DOF-Systems
(Punkt 2)

3.3 Beispiel 1 mit Koppelung

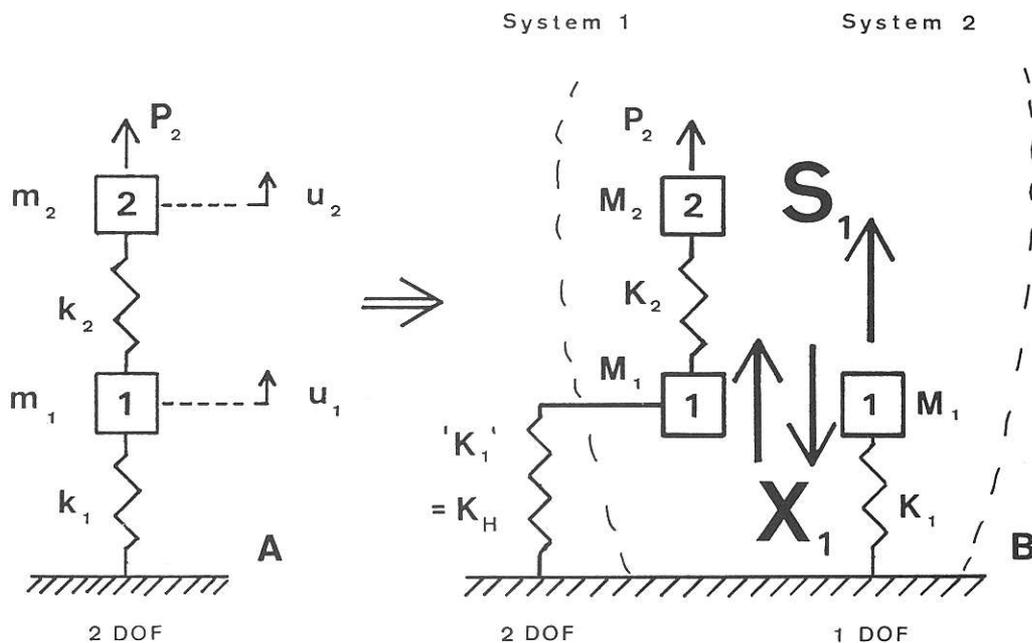


Bild 3.5
Überführung ins Gesamtsystem

Es wird dasselbe Beispiel wie in Punkt 3.2 zugrunde gelegt.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2 \text{ MNs}^2/\text{m} \\
 m_2 &= 1 \text{ MNs}^2/\text{m} \\
 k_1 &= 4000 \text{ MN/m} \\
 k_2 &= 2000 \text{ MN/m} \\
 P_1 &= 0 \text{ MN} \\
 P_2 &= 200 \text{ MN}
 \end{aligned}$$

Entsprechend Bild 3.5 wird das Gesamtsystem (Teil A) aus den Teilsystemen (Teil B) gebildet.

Die Abbildung im Teil B ist hierbei identisch mit System 1 (2DOF) und System 2 (1DOF), sofern die Massenverteilung mit

$$m_1 = M_1 [2\text{DOF}] + M_1 [1\text{DOF}]$$

gewählt wird. Für die Spezifizierung der Hilfsfedern $k_H [2\text{DOF}]$ liegt ansatzweise keine Vorgabe vor.

Nach Wahl der einzelnen Systemparameter kann das weitere Prozedere nach Tab. 2.1 (Fall I) prinzipiell ausgeführt werden.

Die Lösungen der Schwingungsgleichungen für die Systeme 1 bzw. 2 sind bekannt; die jeweilige Koppelung ist im Systempunkt 1 durchzuführen. Im Falle des gewählten Beispiels erhält man die allgemeine Zustandsgleichung für die konstante Last bei Punkt 2 nach Ableitung der Gleichung (3.11) und für die Unbestimmte $X_1(t)$ bzw.

die Restkraft $S_1(t)$ in der Hilfsfeder nach Gleichung (3.18) bzw. (3.24).

Führt man für den j -ten Zeitschritt $t_j = j \cdot \Delta t$ ein, so modifiziert sich die allgemeine Zustandsgleichung $\underline{A} \cdot \underline{X}^0 + \underline{B} = 0$ zu

$$\ddot{u}_1(j)_P + \sum_i^{j-1} X_1(i) \left\{ \ddot{u}_1(i)_D + \ddot{y}_1(i)_D \right\} - \sum_i^{j-1} S_1(i) \ddot{y}_1(i)_D + X_1^0(j) \left\{ \ddot{u}_1(j)_D + \ddot{y}_1(j)_D \right\} = 0 \quad ,$$

also

$$X_1^0(j) = - \frac{\ddot{u}_1(j)_P + \sum_i^{j-1} X_1(i) \left\{ \ddot{u}_1(i)_D + \ddot{y}_1(i)_D \right\} - \sum_i^{j-1} S_1(i) \ddot{y}_1(i)_D}{\ddot{u}_1(j)_D + \ddot{y}_1(j)_D} \quad , \quad (3.25)$$

wobei entsprechend den vorliegenden Lösungen die bereits bekannten Σ -Anteile rekursiv ermittelt werden können. Nach Kenntnis der Unbestimmten $X_1(j)$ wird zyklisch innerhalb jedes Zeitintervalls j die in der Hilfsfeder verbliebene Restkraft $S_1(j)$ ermittelt, die dann dem Nachbarsystem 2 solange übertragen wird, bis eine definierte Schranke für die Restkraft erreicht wird.

Bei Iterationsbeginn erhält man

$$S_1^0(j) = k_H \left\{ u_1(j)_P + \sum_i^{j-1} X_1(i) u_1(i)_D + X_1^0(j) u_1(j)_D \right\} \quad , \quad (3.26a)$$

während für einen beliebigen Iterationsschritt $k > 1$ folgt

$$S_1^{k-1}(j) = k_H \cdot X_1^{k-1}(j) u_1(j)_D \quad , \quad (3.26b)$$

so daß sich

$$X_1^k(j) = - \frac{S_1^{k-1}(j) \ddot{y}_1(j)_D}{\ddot{u}_1(j)_D + \ddot{y}_1(j)_D} \quad (3.27)$$

ergibt. Für das Zeitintervall j erhält man dann die Unbestimmte $X_1(j)$ bzw. die Restkraft $S_1(j)$ aus der Superposition der Einzelanteile zu

$$X_1(j) = X_1^0(j) + \sum^{(k)} X_1^k(j) \quad \text{bzw.}$$

$$S_1(j) = S_1^0(j) + \sum^{(k)} S_1^k(j) \quad .$$

Somit ist die (kompatible) Beschleunigung für jeden Zeitschritt sowohl am System 1 als auch am System 2 bekannt und nach Integration ebenso deren entsprechende Geschwindigkeit bzw. Verformung (s. z. B. Tab. 2.1).

Im folgenden wird eine parametrische Abschätzung zur Güte der Lösungsapproximation in Abhängigkeit des Ansatzes der Hilfsfedersteifigkeit $k_H = k_1$ (2DOF), der Massenaufteilung im Koppelbereich sowie des Zeitschritts vorgenommen.

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4	4	4	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.001	0.0001	Exakte
	AMIN	0.0005	0.0005	0.0005	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000237	0.000081	0.000081	0.0000819
2	0.001070	0.001246	0.001247	0.0012470
3	0.005497	0.005802	0.005803	0.0058031
4	0.015781	0.016278	0.016280	0.0162802
5	0.033235	0.034022	0.034026	0.0340263
6	0.056938	0.058142	0.058150	0.0581501
7	0.083493	0.085260	0.085273	0.0852733
8	0.107753	0.110228	0.110247	0.1102474
9	0.124287	0.127588	0.127614	0.1276152
0.10	0.129074	0.133270	0.133304	0.1333048
11	0.120817	0.125899	0.125942	0.1259426
12	0.101384	0.107252	0.107302	0.1073026
13	0.075214	0.081671	0.081725	0.0817264
14	0.047916	0.054670	0.054727	0.0547285
15	0.024549	0.031240	0.031296	0.0312972
16	0.008226	0.014454	0.014505	0.0145060
17	-0.000494	0.004875	0.004918	0.0049186
18	-0.003240	0.000928	0.000959	0.0009595
19	-0.002689	0.000031	0.000046	0.0000469
0.20	-0.001159	0.000000	0.000000	0.0000000244

Tab. 3.3
Kleine Hilfsfedersteifigkeit
mit variierter Schrittweite

Da die Zustandsgleichungen über die Beschleunigungskompatibilität hergestellt werden, muß die - im Vergleich zur exakten Lösung - resultierende Verformung zeigen, daß eine genügend genaue Approximation und damit Koppelung der beiden Systeme erreicht wird.

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4000	4000	4000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.0005	0.0001	0.00002	Exakte
	AMIN	0.0005	0.0005	0.0005	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000081	0.000081	0.000081	0.0000819
2	0.001247	0.001247	0.001247	0.0012470
3	0.005803	0.005803	0.005803	0.0058031
4	0.016280	0.016280	0.016280	0.0162802
5	0.034026	0.034026	0.034026	0.0340263
6	0.058149	0.058150	0.058150	0.0581501
7	0.085272	0.085273	0.085273	0.0852733
8	0.110244	0.110247	0.110247	0.1102474
9	0.127610	0.127615	0.127615	0.1276152
0.10	0.133297	0.133304	0.133304	0.1333048
11	0.125934	0.125942	0.125942	0.1259426
12	0.107293	0.107302	0.107302	0.1073026
13	0.081717	0.081726	0.081726	0.0817264
14	0.054721	0.054728	0.054728	0.0547285
15	0.031292	0.031297	0.031297	0.0312972
16	0.014504	0.014505	0.014506	0.0145060
17	0.004919	0.004918	0.004918	0.0049186
18	0.000960	0.000959	0.000959	0.0009595
19	0.000047	0.000047	0.000046	0.0000469
0.20	-0.000000	0.000000	0.000000	0.0000000244

Tab. 3.4
Große Hilfsfedersteifigkeit
mit variierter Schrittweite

2DOF	M1	1	0.1	0.01	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4000	4000	4000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1.9	1.99	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.01	0.01	Exakte
	AMIN	0.01	0.01	0.01	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000248	0.000488	0.000052	0.0000819
2	0.001108	0.002123	0.000239	0.0012470
3	0.005588	0.010075	0.001264	0.0058031
4	0.015945	0.026391	0.003866	0.0162802
5	0.033486	0.049674	0.008895	0.0340263
6	0.057256	0.074525	0.017052	0.0581501
7	0.083815	0.094272	0.028698	0.0852733
8	0.107990	0.104651	0.043698	0.1102474
9	0.124381	0.105856	0.061348	0.1276152
0.10	0.129061	0.101595	0.080386	0.1333048
11	0.120867	0.095908	0.099105	0.1259426
12	0.101778	0.090114	0.115543	0.1073026
13	0.076258	0.082117	0.127733	0.0817264
14	0.049800	0.068550	0.133974	0.0547285
15	0.027209	0.048133	0.133084	0.0312972
16	0.011272	0.023716	0.124593	0.0145060
17	0.002263	0.001403	0.108854	0.0049186
18	-0.001572	-0.012725	0.087042	0.0009595
19	-0.002808	-0.016023	0.061043	0.0000469
0.20	-0.003417	-0.010450	0.033249	0.0000000244

Tab. 3.5
Variierte Massenaufteilung

Aus den Tab. 3.3 und 3.4 ist zu entnehmen, daß mit zunehmender Güte des Zeitintervalls ($\Delta t \Rightarrow 0$) entsprechend der analytischen Gesamtlösung auch die Güte der Koppelungslösung steigt. Der Parameter 'Hilfsfedersteifigkeit' - gesondert betrachtet - liefert offenbar keinen nennenswerten Beitrag zur Modifikation der Koppelungslösung (s. Tab. 3.6). Tab. 3.5 ist zu entnehmen, daß das System (der analytischen Superposition) offenbar sensibel reagiert, wenn eine unrealistische Massenaufteilung im Koppelungsbereich gewählt wird.

2DOF					
M1	1	1	1	1	2
M2	1	1	1	1	1
K1	4000	400	40	4	4000
K2	2000	2000	2000	2000	2000
P1	0	0	0	0	0
P2	200	200	200	200	200
1DOF					
M1	1	1	1	1	-
K1	4000	4000	4000	4000	-
Δt	0.01	0.01	0.01	0.01	Exakte
AMIN	0.001	0.001	0.001	0.001	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000248	0.000238	0.000237	0.000237	0.0000819
2	0.001108	0.001074	0.001070	0.001070	0.0012470
3	0.005588	0.005507	0.005498	0.005497	0.0058031
4	0.015945	0.015800	0.015783	0.015781	0.0162802
5	0.033486	0.033269	0.033238	0.033235	0.0340263
6	0.057257	0.056993	0.056943	0.056938	0.0581501
7	0.083816	0.083572	0.083501	0.083493	0.0852733
8	0.107992	0.107859	0.107764	0.107753	0.1102474
9	0.124383	0.124422	0.124300	0.124287	0.1276152
0.10	0.129065	0.129245	0.129091	0.129074	0.1333048
11	0.120872	0.121034	0.120839	0.120817	0.1259426
12	0.101783	0.101658	0.101411	0.101384	0.1073026
13	0.076264	0.075556	0.075247	0.075214	0.0817264
14	0.049805	0.048321	0.047955	0.047916	0.0547285
15	0.027213	0.024994	0.024591	0.024549	0.0312972
16	0.011276	0.008662	0.008267	0.008226	0.0145060
17	0.002266	-0.000133	-0.000461	-0.000494	0.0049186
18	-0.001571	-0.003027	-0.003220	-0.003240	0.0009595
19	-0.002807	-0.002685	-0.002689	-0.002689	0.0000469
0.20	-0.003418	-0.001394	-0.001181	-0.001159	0.0000000244

Tab. 3.6
Variierte Hilfsfedersteifigkeit

Bei genügend kleiner Vorgabe des dominanten Parameters des Zeitintervalls einschließlich der Restkraftschränke kann jedoch die Lösung beliebig genau approximiert werden (s. Tab. 3.3 und 3.4).

Es sollte hier noch einmal erwähnt werden, daß nach Vergleich der Verformungen – durch Integration der kompatiblen Beschleunigungszustände am gekoppelten System – der Nachweis gleichwertiger Lösungen (zum Gesamtsystem) erbracht ist.

3.4 Beispiel 2

Vorgegeben sei eine beliebige sin-Schwingung am Punkt 2 mit

$$P_2(\tau) = P \sin A\tau \quad ,$$

so daß die allgemeine Lösung (3.6 bzw. 3.7) für die Verschiebung in

$$u_i(t) = AA_i \cdot I_1 + BB_i \cdot I_2$$

überführt werden kann. Die Lösungen für die Integrale I_1 bzw. I_2 folgen aus

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \sin A\tau \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2/A^2} \left\{ \frac{1}{A} \sin \omega t - \frac{\omega}{A^2} \sin At \right\} \quad , \end{aligned}$$

so daß sich für die Verschiebungen ergibt:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= AA_2 \cdot I_1 + BB_2 \cdot I_2 \\ u_1(t) &= AA_1 \cdot I_1 + BB_1 \cdot I_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\text{mit } AA_2 = 1/(M_1^* \cdot \omega_1)$$

$$BB_2 = 1/(M_2^* \cdot \omega_2)$$

$$AA_1 = AA_2 \cdot \alpha_1$$

$$AA_1 = BB_2 \cdot \alpha_2$$

und

$$I_1 = \frac{1}{1 - \omega_1^2/A^2} \left\{ \frac{1}{A} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_1}{A^2} \sin At \right\} \cdot P \quad (3.29)$$

$$I_2 = \frac{1}{1 - \omega_2^2/A^2} \left\{ \frac{1}{A} \sin \omega_2 t - \frac{\omega_2}{A^2} \sin At \right\} \cdot P$$

Im Vergleich zu Beispiel 1 wird zunächst eine sin-Schwingung ($n = 1$) mit gleichartiger Amplitude betrachtet, so daß ist

$$P_2(\tau) = 200 \sin \frac{\pi}{0.2} \tau \quad . \quad (3.30)$$

t	Analytische Lösung nach numerischer Integration			Exakte
	$\Delta t = 0.01$	0.001	0.0001	2DOF-Lösung
	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000000	0.000002	0.000002	0.000002
2	0.000050	0.000079	0.000079	0.000079
3	0.000477	0.000567	0.000568	0.000568
4	0.002010	0.002190	0.002192	0.002192
5	0.005692	0.005667	0.005970	0.005970
6	0.012565	0.012908	0.012911	0.012911
7	0.023254	0.023605	0.023609	0.023609
8	0.037593	0.037879	0.037882	0.037882
9	0.054451	0.054606	0.054608	0.054608
0.10	0.071848	0.071833	0.071833	0.071833
11	0.087339	0.087158	0.087156	0.087156
12	0.098560	0.098256	0.098253	0.098253
13	0.103759	0.103400	0.103396	0.103396
14	<u>0.102145</u>	<u>0.101804</u>	<u>0.101800</u>	<u>0.101800</u>
15	0.093960	0.093692	0.093690	0.093690
16	0.080268	0.080097	0.080096	0.080096
17	0.062554	0.062472	0.062471	0.062471
18	0.042301	0.042276	0.042276	0.042276
19	0.020695	0.020693	0.020693	0.020693
0.20	-0.001453	-0.001453	-0.001453	-0.001453

2DOF M1 | 2
M2 | 1
K1 | 4000
K2 | 2000
P1 | 0
P2 | 200

n = 1

Tab. 3.7 Analytische Lösungen
für die
1-sin-Schwingung

3.5 Beispiel 3

Es wird die numerisch ungünstigere Erregung der 10-sin-Schwingung gewählt, aus der nach (3.30) für eine Halbschwingung

$$\tau_{\min} = \frac{0.2}{n}$$

also $\tau_{\min} = 0.02$ s errechnet wird.

Die 'exakten' analytischen Beziehungen sind dann in Tab. 3.8 zusammengestellt.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000024	0.011852	0.450449 + 1
2	0.000631	0.140060	0.222799 + 2
3	0.003373	0.420268	0.290578 + 2
4	0.008739	0.612054	0.505993 + 1
5	0.014561	0.501845	- 0.247325 + 2
6	0.018115	0.196185	- 0.327163 + 2
7	0.018473	- 0.122644	- 0.318553 + 2
8	0.015564	- 0.470307	- 0.381571 + 2
9	0.008945	- 0.843752	- 0.320090 + 2
0.10	- 0.000620	- 0.101253 + 1	0.161427 + 1
11	- 0.010030	- 0.813294	0.343963 + 2
12	- 0.016230	- 0.419537	0.394217 + 2
13	- 0.018597	- 0.068090	0.313424 + 2
14	- 0.017747	0.237697	0.307230 + 2
15	- 0.013893	0.519276	0.220772 + 2
16	- 0.008027	0.603924	- 0.735005 + 1
17	- 0.002839	0.394709	- 0.301502 + 2
18	- 0.000383	0.111171	- 0.218518 + 2
19	- 0.000020	- 0.006166	- 0.285776 + 1
0.20	- 0.000083	0.001354	0.206908 + 1

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

$$n = 10$$

Tab. 3.8 Analytische Lösungen für die 10-sin-Schwingung

3.6 Beispiel 4

Für die 20-sin-Schwingung ergibt sich τ_{\min} zu 0.01 s. Die 'exakten' analytischen Beziehungen sind in Tab. 3.9 zusammengestellt.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000041	0.018566	0.616047 + 1
2	0.000672	0.113102	0.933132 + 1
3	0.002196	0.189089	0.773959 + 1
4	0.004456	0.252406	0.156901 + 1
5	0.006851	0.212114	- 0.706821 + 1
6	0.008546	0.113668	- 0.149213 + 2
7	0.008782	- 0.073072	- 0.188493 + 2
8	0.007181	- 0.243947	- 0.170465 + 2
9	0.003923	- 0.395521	- 0.976953 + 1
0.10	- 0.000284	- 0.428522	0.718736
11	- 0.004423	- 0.381949	0.109693 + 2
12	- 0.007495	- 0.221287	0.176212 + 2
13	- 0.008852	- 0.048537	0.186415 + 2
14	- 0.008393	0.132632	0.140585 + 2
15	- 0.006559	0.220604	0.590852 + 1
16	- 0.004136	0.249688	- 0.257788 + 1
17	- 0.001947	0.178632	- 0.823323 + 1
18	- 0.000541	0.100993	- 0.916714 + 1
19	- 0.000012	0.010954	- 0.546801 + 1
0.20	- 0.000008	0.000573	0.875667

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

n = 20

Tab. 3.9 Analytische Lösungen für die 20-sin-Schwingung

3.7 Beispiel 5

Es wird die wesentlich ungünstigere 40-sin-Schwingung mit $\tau_{\min} = 0.005$ s gewählt, für die die 'exakten' analytischen Lösungen in Tab. 3.10 angegeben sind.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000044	0.015458	0.296131 + 1
2	0.000372	0.054335	0.447613 + 1
3	0.001128	0.097191	0.368736 + 1
4	0.002234	0.120598	0.685787
5	0.003398	0.106883	- 0.350384 + 1
6	0.004215	0.051820	- 0.730566 + 1
7	0.004318	- 0.032789	- 0.919786 + 1
8	0.003525	- 0.122742	- 0.830649 + 1
9	0.001924	- 0.189947	- 0.475756 + 1
0.10	- 0.000139	- 0.212631	0.349952
11	- 0.002169	- 0.183338	0.543210 + 1
12	- 0.003679	- 0.111686	0.858759 + 1
13	- 0.004354	- 0.020815	0.909906 + 1
14	- 0.004143	0.061108	0.688851 + 1
15	- 0.003257	0.111100	0.294176 + 1
16	- 0.002078	0.119378	- 0.117577 + 1
17	- 0.001005	0.092205	- 0.392855 + 1
18	- 0.000306	0.048525	- 0.439921 + 1
19	- 0.000027	0.011799	- 0.262882 + 1
0.20	0.000000	0.000275	0.421152

2 DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

$$n = 40$$

Tab. 3.10 Analytische Lösungen für die 40-sin-Schwingung

3.8 Beispiel 6

Zum weiteren Studium der numerischen Sensibilität wird die 100-sin-Schwingung mit $\tau_{\min} = 0.002$ s analysiert, wie in Tab. 3.11 angegeben.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000020	0.006013	0.117175 + 1
2	0.000152	0.021496	0.177010 + 1
3	0.000454	0.038328	0.145538 + 1
4	0.000894	0.047637	0.263770
5	0.001356	0.042010	- 0.139819 + 1
6	0.001680	0.020191	- 0.299550 + 1
7	0.001719	- 0.013542	- 0.365476 + 1
8	0.001403	- 0.049173	- 0.329921 + 1
9	0.000765	- 0.075967	- 0.188931 + 1
0.10	- 0.000055	- 0.084871	0.138966
11	- 0.000863	- 0.073342	0.212147 + 1
12	- 0.001464	- 0.044781	0.341098 + 1
13	- 0.001734	- 0.008784	0.361570 + 1
14	- 0.001651	0.023886	0.274017 + 1
15	- 0.001300	0.043693	0.117528 + 1
16	- 0.000832	0.047164	- 0.458205
17	- 0.000405	0.036359	- 0.155124 + 1
18	- 0.000126	0.019198	- 0.173989 + 1
19	- 0.000013	0.004565	- 0.104023 + 1
0.20	- 0.000000	0.000109	0.166669

2 DOF	M1		2
	M2		1
	K1		4000
	K2		2000
	P1		0

n = 100

Tab. 3.11 Analytische Lösungen für die 100-sin-Schwingung

4. Numerische Verifikation am 2DOF-System

In Punkt 3. ist auf analytischem Wege gezeigt worden, daß eine beliebig genaue Approximation an die 'exakte' analytische Lösung erzielt werden kann. Hierbei ist Voraussetzung, daß es sich um lineare Systeme (1 und 2) handelt, damit die Schwingungsgleichung exakt gelöst werden kann, und somit die Zustandsgleichungen für die Ermittlung der Unbestimmten definiert werden kann. Ist jedoch nichtlineares Verhalten zugelassen, muß die Integration der Bewegungsgleichung auf numerische Weise vollzogen werden.

4.1 Newmark-Verfahren

In /3/ wird ausführlich die Anwendung der numerischen Integrationsverfahren diskutiert; es soll hier am Beispiel das direkte Integrationsverfahren nach Newmark zur Lösung der allgemeinen Schwingungsgleichung angewendet werden.

Mit den Parametern $\delta \geq 0.50$ und $\alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2$ folgen die Integrationskonstanten

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & ; & \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & \quad ; & \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 & ; & \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 & \quad ; & \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) & ; \\ a_6 &= \Delta t(1-\delta) & ; & \quad a_7 = \delta \Delta t \end{aligned} \right\} (4.1)$$

$$\text{Aus} \quad \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{u} = \underline{\mathbf{P}} \quad (4.2)$$

wird die effektive Steifigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{K}}^* = \underline{\mathbf{K}} + a_0 \underline{\mathbf{M}} + a_1 \underline{\mathbf{C}} \quad \text{gebildet.}$$

Für jeden beliebigen Zeitschritt $t+\Delta t$ berechnet sich der effektive Kraftvektor aus

$$\underline{\mathbf{P}}^*_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{P}}_{t+\Delta t} + \underline{\mathbf{M}}(a_0 \underline{u}_t + a_2 \underline{\dot{u}}_t + a_3 \underline{\ddot{u}}_t) + \underline{\mathbf{C}}(a_1 \underline{u}_t + a_4 \underline{\dot{u}}_t + a_5 \underline{\ddot{u}}_t) \quad ,$$

so daß sich Gleichung (4.2) auf die Lösung des Verschiebungssystems reduziert:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{K}}^* \cdot \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{P}}^*_{t+\Delta t} \quad (4.3)$$

Für das 2DOF-System erhält man die Verschiebungen mit

$$\begin{aligned}
 \text{Det} &= \begin{vmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{vmatrix} && \text{zu} \\
 u_{1 \ t+\Delta t} &= \frac{\begin{vmatrix} P_1^* & K_{12}^* \\ P_2^* & K_{22}^* \end{vmatrix}}{\text{Det}} && \text{bzw.} \\
 u_{2 \ t+\Delta t} &= \frac{\begin{vmatrix} K_{11}^* & P_1^* \\ K_{21}^* & P_2^* \end{vmatrix}}{\text{Det}} && \left. \vphantom{\begin{vmatrix} P_1^* & K_{12}^* \\ P_2^* & K_{22}^* \end{vmatrix}} \right\} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektoren im Zeitschritt $t+\Delta t$ folgen:

$$\ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = a_0 (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t) - a_2 \dot{\underline{u}}_t - a_3 \ddot{\underline{u}}_t \quad (4.5)$$

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + a_6 \ddot{\underline{u}}_t + a_7 \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} \quad (4.6)$$

4.2 Beispiel 1

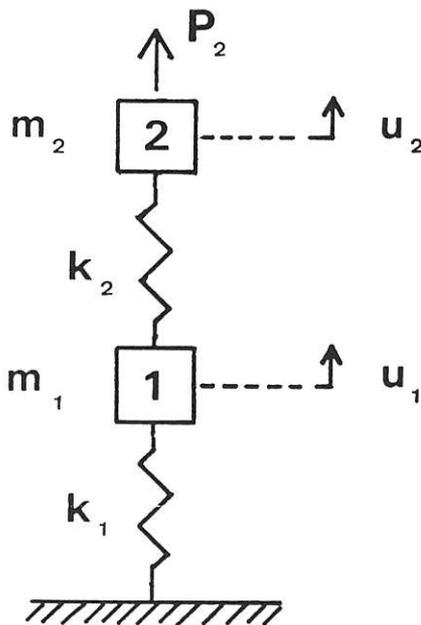


Bild 4.1
2DOF-System

Entsprechend Punkt 3.2 erfolgt die Verifikation am gleichen Beispiel:

$$m_1 = 2 \text{ MNs}^2/\text{m}$$

$$m_2 = 1 \text{ MNs}^2/\text{m}$$

$$k_1 = 4000 \text{ MN/m}$$

$$k_2 = 2000 \text{ MN/m}$$

$$P_1 = 0 \text{ MN}$$

$$P_2 = 200 \text{ MN}$$

Mit der Wahl des Integrationsparameters $\delta = 0.5$ erhält man $\alpha = 0.25$.

In Tab. 4.1 wird Beispiel 1 in Abhängigkeit des Zeitintervalls Δt mit der 'exakten' analytischen Lösung verglichen. Hierbei zeigt sich, daß für den Lastfall $P_2 = \text{konst.}$ eine genügend genaue Lösung mit $\Delta t = 0.001$ erzielt wird.

Δt	0.01	0.001	0.0001	Exakte 2DOF Lösung $u_1(t)$
t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000110	0.000069	0.000080	0.0000819
2	0.000946	0.001139	0.001234	0.0012470
3	0.004002	0.005466	0.005766	0.0058031
4	0.011379	0.015598	0.016205	0.0162802
5	0.024817	0.032970	0.033901	0.0340263
6	0.044630	0.056819	0.057963	0.0581501
7	0.069086	0.083890	0.085031	0.0852733
8	0.094503	0.109102	0.109976	0.1102474
9	0.116076	0.126977	0.127322	0.1276152
0.10	0.129197	0.133337	0.132986	0.1333048
11	0.130810	0.126648	0.125460	0.1259426
12	0.120357	0.108517	0.106675	0.1073026
13	0.099979	0.083177	0.081013	0.0817264
14	0.073897	0.056115	0.054029	0.0547285
15	0.047190	0.032386	0.030714	0.0312972
16	0.024379	0.015191	0.014088	0.0145060
17	0.008284	0.005232	0.004661	0.0049186
18	-0.000458	0.001032	0.000829	0.0009595
19	-0.003127	0.000032	-0.000000	0.0000469
0.20	-0.002009	-0.000003	0.000003	0.0000000244

Tab. 4.1

Numerische Lösung Beispiel 1

4.3 Beispiel 1 mit Koppelung

Im Gegensatz zu Punkt 3.3 erfolgt der Koppelungsprozeß aus der Kenntnis der genauen Teillösungen nicht nachträglich, sondern Schrittweise je Zeitintervall entsprechend der Integrationsprozedur.

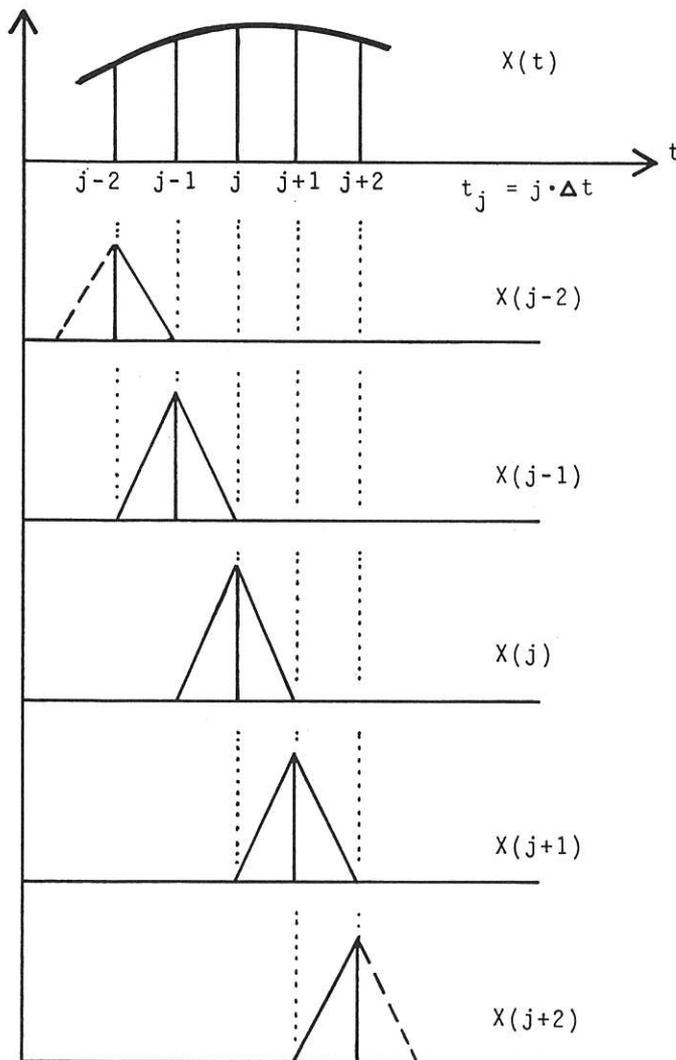


Bild 4.2
Lastkorrektur durch
Dreieckimpulse

Hierbei wird die zeitabhängige Gesamtlast der begleitenden Unbestimmten $X(t)$ sukzessiv durch Ermittlung der Teillasten, deren Einflußbereich sich über $2\Delta t$ erstreckt, gebildet. Dies ist in Bild 4.2 dargestellt.

Aufgrund der schrittweisen numerischen Prozedur vereinfachen sich die in Punkt 3.3 gegebenen Beziehungen, und zwar Gleichung (3.25) für die aktuelle Unbestimmte $X_1^0(j)$ zu

$$X_1^0(j) = - \frac{\ddot{u}_1(j) \left[P + \sum_i^{j-1} X_1(i) \right] + \ddot{Y}_1(j) \left[\sum_i^{j-1} X_1(i) - \sum_i^{j-1} S_1(i) \right]}{\ddot{u}_1(j)_D + \ddot{Y}_1(j)_D} \quad (4.7)$$

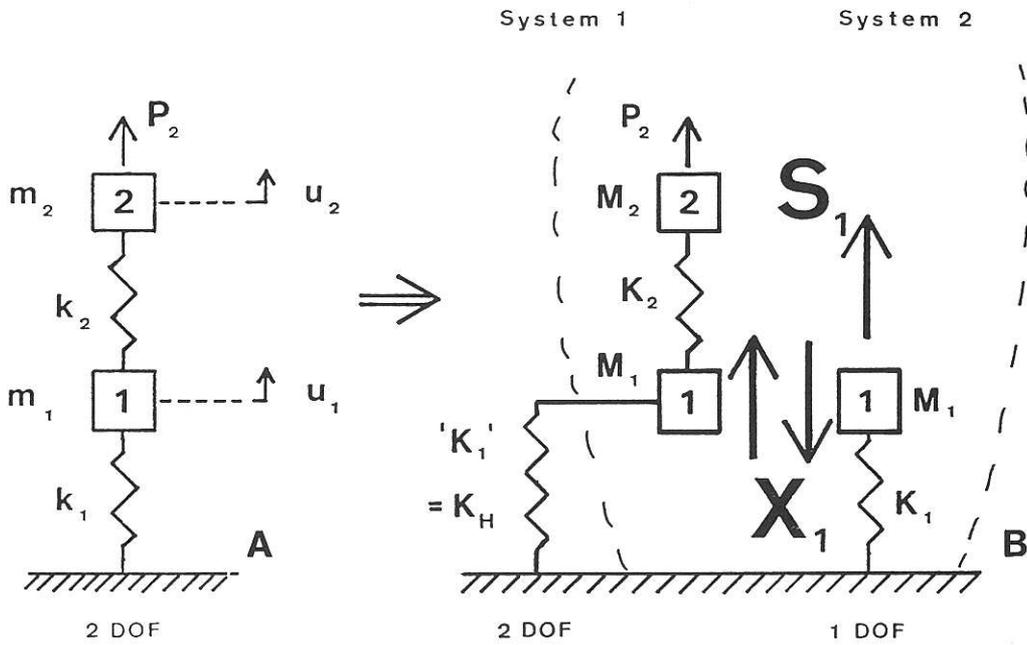


Bild 4.3
Überführung ins Gesamtsystem

und ebenso Gleichung (3.26a) für die Restkraft $S_1^0(j)$ bei Iteration

$$S_1^0(j) = k_H \left\{ u_1(j) \left[P + \sum_i^{j-1} X_1(i) \right] + X_1^0(j) u_1(j) \right\} \quad (4.8),$$

während die Beziehungen (3.26b) und (3.27) für die weiteren Iterationsschritte die volle Gültigkeit behalten. Es wird die gleiche parametrische Abschätzung wie in Punkt 3.3 durchgeführt.

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4	4	4	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.001	0.0001	Exakte
	AMIN	0.0005	0.0005	0.0005	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000110	0.000069	0.000080	0.0000819
2	0.000946	0.001139	0.001234	0.0012470
3	0.004002	0.005466	0.005765	0.0058031
4	0.011379	0.015598	0.016198	0.0162802
5	0.024817	0.032970	0.033881	0.0340263
6	0.044630	0.056818	0.057930	0.0581501
7	0.069086	0.083889	0.084971	0.0852733
8	0.094502	0.109100	0.109858	0.1102474
9	0.116076	0.126973	0.127130	0.1276152
0.10	0.129197	0.133331	0.132679	0.1333048
11	0.130810	0.126639	0.125139	0.1259426
12	0.120357	0.108507	0.106278	0.1073026
13	0.099979	0.083164	0.080515	0.0817264
14	0.073897	0.056101	0.053370	0.0547285
15	0.047190	0.032373	0.029882	0.0312972
16	0.024378	0.015180	0.013155	0.0145060
17	0.008284	0.005226	0.003767	0.0049186
18	-0.000458	0.001032	0.000136	0.0009595
19	-0.003127	0.000038	-0.000356	0.0000469
0.20	-0.002009	0.000007	0.000055	0.0000000244

Tab. 4.2

Kleine Hilfsfedersteifigkeit
mit variierter Schrittweite

Die Ergebnisse der Tabellen 4.4 bzw. 4.5, die eine Variation der Massenaufteilung wie der Hilfsfedersteifigkeit vornehmen, zeigen die große Stabilität der numerischen Koppelung insgesamt, da alle beteiligten Variationen zum gleichen Resultat führen. [Dies ist z. B. beim identischen Vergleich mit der Koppelung der analytischen Lösung unterschiedlich (s. Punkt 3.4).]

Der große Einfluß der gewählten Schrittweite kommt besonders in Tab. 4.2 und 4.3 zum Ausdruck. Hier liegen die Ergebnisse bei

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4000	4000	4000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.0005	0.0001	0.00002	Exakte
	AMIN	0.0005	0.0005	0.0005	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000074	0.000080	0.000081	0.0000819
2	0.001190	0.001235	0.001253	0.0012470
3	0.005629	0.005766	0.005878	0.0058031
4	0.015934	0.016204	0.016604	0.0162802
5	0.033498	0.033901	0.035039	0.0340263
6	0.057493	0.057969	0.061015	0.0581501
7	0.084600	0.085039	0.092300	0.0852733
8	0.109702	0.109982	0.125145	0.1102474
9	0.127328	0.127357	0.155906	0.1276152
0.10	0.133350	0.133021	0.179134	0.1333048
11	0.126314	0.125589	0.192545	0.1259426
12	0.107914	0.106869	0.193372	0.1073026
13	0.082443	0.081265	0.181415	0.0817264
14	0.055406	0.054273	0.160009	0.0547285
15	0.031828	0.030861	0.131879	0.0312972
16	0.014845	0.014125	0.101529	0.0145060
17	0.005084	0.004640	0.073260	0.0049186
18	0.001014	0.000822	0.048880	0.0009595
19	0.000059	0.000072	0.030267	0.0000469
0.20	0.000009	0.000184	0.017621	0.0000000244

Tab. 4.3

Große Hilfsfedersteifigkeit
mit variierter Schrittweite

gleicher Schrittweite mit denen der Tab. 4.1 sehr eng bzw. identisch beieinander.

Wird das Zeitintervall zu klein gewählt (s. bes. Tab. 4.3), so ist offenbar die numerische Darstellung der Unbestimmten $X(j)$ nicht mehr realistisch genug, da nach Unterschreiten einer Zeitschranke für Δt die Resultate wieder stärker vom exakten Ergebnis abweichen.

2DOF	M1	1	0.1	0.01	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4000	4000	4000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1.9	1.99	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.01	0.01	Exakte
	AMIN	0.01	0.01	0.01	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000110	0.000110	0.000110	0.0000819
2	0.000946	0.000946	0.000946	0.0012470
3	0.004002	0.004002	0.004002	0.0058031
4	0.011379	0.011379	0.011379	0.0162802
5	0.024816	0.024816	0.024816	0.0340263
6	0.044629	0.044629	0.044629	0.0581501
7	0.069084	0.069084	0.069084	0.0852733
8	0.094499	0.094499	0.094499	0.1102474
9	0.116070	0.116070	0.116070	0.1276152
0.10	0.129189	0.129189	0.129189	0.1333048
11	0.130799	0.130799	0.130799	<u>0.1259426</u>
12	0.120344	0.120344	0.120344	0.1073026
13	0.099964	0.099964	0.099965	0.0817264
14	0.073883	0.073882	0.073883	0.0547285
15	0.047177	0.047177	0.047177	0.0312972
16	0.024367	0.024367	0.024367	0.0145060
17	0.008276	0.008276	0.008276	0.0049186
18	-0.000463	-0.000463	-0.000463	0.0009595
19	-0.003129	-0.003129	-0.003129	0.0000469
0.20	-0.002009	-0.002009	-0.002009	0.0000000244

Tab. 4.4
Variierte Massenaufteilung

2DOF					
M1	1	1	1	1	2
M2	1	1	1	1	1
K1	4000	400	40	4	4000
K2	2000	2000	2000	2000	2000
P1	0	0	0	0	0
P2	200	200	200	200	200
1DOF					
M1	1	1	1	1	-
K1	4000	4000	4000	4000	-
Δt	0.01	0.01	0.01	0.01	Exakte
AMIN	0.001	0.001	0.001	0.001	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000110	0.000110	0.000110	0.000110	0.0000819
2	0.000946	0.000946	0.000946	0.000946	0.0012470
3	0.004002	0.004002	0.004002	0.004002	0.0058031
4	0.011379	0.011379	0.011379	0.011379	0.0162802
5	0.024817	0.024817	0.024817	0.024817	0.0340263
6	0.044630	0.044630	0.044630	0.044630	0.0581501
7	0.069086	0.069086	0.069086	0.069086	0.0852733
8	0.094502	0.094502	0.094503	0.094502	0.1102474
9	0.116076	0.116076	0.116076	0.116076	0.1276152
0.10	0.129197	0.129197	0.129197	0.129197	0.1333048
11	0.130809	0.130810	0.130810	0.130810	0.1259426
12	0.120357	0.120357	0.120358	0.120357	0.1073026
13	0.099978	0.099979	0.099979	0.099979	0.0817264
14	0.073897	0.073897	0.073897	0.073897	0.0547285
15	0.047190	0.047191	0.047191	0.047190	0.0312972
16	0.024378	0.024379	0.024379	0.024378	0.0145060
17	0.008284	0.008284	0.008285	0.008284	0.0049186
18	-0.000458	-0.000458	-0.000458	-0.000458	0.0009595
19	-0.003127	-0.003127	-0.003126	-0.003127	0.0000469
0.20	-0.002009	-0.002009	-0.002009	-0.002009	0.000000244

Tab. 4.5
Variierte Hilfsfedersteifigkeit

4.4 Beispiel 2

Die in Punkt 3.4 entwickelte analytische Lösung für die 1-sin-Schwingung wird mit dem numerischen Ansatz verglichen.

t	Numerische Lösung			Exakte
	$\Delta t = 0.01$	0.001	0.0001	2DOF-Lösung
	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000017	0.000002	0.000002	0.000002
2	0.000165	0.000080	0.000079	0.000079
3	0.000786	0.000570	0.000568	0.000568
4	0.002542	0.002196	0.002191	0.002192
5	0.006338	0.005974	0.005967	0.005970
6	0.013078	0.012913	0.012904	0.012911
7	0.023320	0.023607	0.023591	0.023609
8	0.036965	0.037875	0.037834	0.037882
9	0.053074	0.054595	0.054518	0.054608
0.10	0.069929	0.071820	0.071721	0.071833
11	0.085315	0.087148	0.087021	0.087156
12	0.096964	0.098254	0.098089	0.098253
13	0.103039	0.103410	0.103203	0.103396
14	0.102496	0.101828	0.101557	0.101800
15	0.095250	0.093728	0.093379	0.093690
16	0.082092	0.080138	0.079718	0.080096
17	0.064394	0.062511	0.062044	0.062471
18	0.043743	0.042309	0.041806	0.042276
19	0.021597	0.020718	0.020190	0.020693
0.20	-0.000905	-0.001437	-0.001971	-0.001453

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

$$n = 1$$

Tab. 4.6 Numerische Lösungen für die 1-sin-Schwingung

4.5 Beispiel 2 mit Koppelung

In gleicher Weise wie vorher wird die gekoppelte Lösung für die 1-sin-Schwingung ermittelt und verglichen.

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	4000	4000	4000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.001	0.0001	Exakte
	AMIN	0.001	0.001	0.001	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0.	0.	0.	0.
0.01	0.000017	0.000002	0.000002	0.000002
2	0.000165	0.000080	0.000079	0.000079
3	0.000786	0.000570	0.000568	0.000568
4	0.002542	0.002196	0.002192	0.002192
5	0.006338	0.005974	0.005968	0.005970
6	0.013077	0.012913	0.012905	0.012911
7	0.023320	0.023607	0.023593	0.023609
8	0.036965	0.037875	0.037843	0.037882
9	0.053074	0.054595	0.054542	0.054608
0.10	0.069929	0.071820	0.071750	0.071833
11	0.085314	0.087146	0.087028	0.087156
12	0.096964	0.098250	0.098131	0.098253
13	0.103038	0.103406	0.103343	0.103396
14	0.102495	0.101824	0.101872	0.101800
15	0.095250	0.093724	0.093890	0.093690
16	0.082091	0.080135	0.080398	0.080096
17	0.064393	0.062509	0.062746	0.062471
18	0.043742	0.042309	0.042399	0.042276
19	0.021597	0.020719	0.020596	0.020693
0.20	-0.000905	-0.001433	-0.001757	-0.001453

Tab. 4.7

Numerische Lösung mit variierter Schrittweite

2DOF	M1	1	1	1	2
	M2	1	1	1	1
	K1	40000	400000	4000000	4000
	K2	2000	2000	2000	2000
	P1	0	0	0	0
	P2	200	200	200	200
1DOF	M1	1	1	1	-
	K1	4000	4000	4000	-
	Δt	0.01	0.01	0.01	Exakte
	AMIN	0.0001	0.00001	0.000001	2DOF-Lösung

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$u_1(t)$
0.	0	0	0	0
0.01	0.000017	0.000017	0.000017	0.000002
2	0.000165	0.000165	0.000165	0.000079
3	0.000786	0.000786	0.000786	0.000568
4	0.002542	0.002542	0.002542	0.002192
5	0.006338	0.006338	0.006338	0.005970
6	0.013077	0.013077	0.013077	0.012911
7	0.023320	0.023320	0.023318	0.023609
8	0.036964	0.036964	0.036961	0.037882
9	0.053073	0.053072	0.053069	0.054608
0.10	0.069927	0.069925	0.069925	0.071833
11	0.085311	0.085309	0.085316	0.087156
12	0.096959	0.096957	0.096973	0.098253
13	0.103031	0.103030	0.103055	0.103396
14	0.102487	0.102487	0.102515	0.101800
15	0.095240	0.095243	0.095267	0.093690
16	0.082081	0.082087	0.082096	0.080096
17	0.064383	0.064393	0.064374	0.062471
18	0.043733	0.043746	0.043687	0.042276
19	0.021588	0.021605	0.021497	0.020693
0.20	-0.000911	-0.000892	-0.001054	-0.001453

Tab. 4.8

Variierte (sehr große) Hilfsfedersteifigkeit

Der Vergleich zwischen Tab. 4.6 und 4.7 zeigt, daß die geschlossene wie die gekoppelte numerische Lösung für den gewählten Zeitschritt jeweils von gleicher Güte ist. In Tab. 4.8 ist eine Variation unrealistisch großer Hilfsfedersteifigkeiten vorgenommen worden; hier zeigt sich die große numerische Stabilität, die zu nahezu identischen Resultaten führt.

4.6 Beispiel 3

Entsprechend Punkt 3.5 wird die 10-sin-Schwingung numerisch insgesamt gelöst. Wegen $\tau_{\min} = 0.02 \text{ s}$ erfolgt die Rechnung für das Zeitintervall $\Delta t = 0.001 \text{ s}$.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000025	0.012019	0.450632 + 1
2	0.000635	0.139967	0.222080 + 2
3	0.003370	0.418965	0.289540 + 2
4	0.008716	0.609937	0.506201 + 1
5	0.014518	0.500532	- 0.246121 + 2
6	0.018066	0.196338	- 0.325989 + 2
7	0.018430	- 0.121586	- 0.317748 + 2
8	0.015535	- 0.468501	- 0.380768 + 2
9	0.008940	- 0.840967	- 0.319564 + 2
0.10	- 0.000593	- 0.100968 + 1	0.153139 + 1
11	- 0.009979	- 0.812073	0.345048 + 2
12	- 0.016177	- 0.420305	0.392808 + 2
13	- 0.018558	- 0.069687	0.313126 + 2
14	- 0.017724	0.236047	0.307189 + 2
15	- 0.013887	0.517552	0.221017 + 2
16	- 0.008039	0.602817	- 0.723008 + 1
17	- 0.002857	0.395298	- 0.299983 + 2
18	- 0.000386	0.113010	- 0.218213 + 2
19	- 0.000005	- 0.004867	- 0.297099 + 1
0.20	- 0.000061	0.001207	0.193571 + 1

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

n = 10
 $\Delta t = 0.001$

Tab. 4.9 Numerische Lösungen für die 10-sin-Schwingung

4.7 Beispiel 3 mit Koppelung

In gleicher Weise wie vorher wird die gekoppelte Lösung für die 10-sin-Schwingung ermittelt und verglichen.

2DOF	M1	1
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200
1DOF	M1	1
	K1	4000
	Δt	0.001
	AMIN	0.0001
	N	10

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000025	0.012019	0.450631 + 1
2	0.000635	0.139967	0.222079 + 2
3	0.003370	0.418960	0.289531 + 2
4	0.008716	0.609931	0.505987 + 1
5	0.014518	0.500503	- 0.246091 + 2
6	0.018065	0.196299	- 0.326015 + 2
7	0.018429	- 0.121604	- 0.317827 + 2
8	0.015534	- 0.468530	- 0.380790 + 2
9	0.008938	- 0.840390	- 0.319551 + 2
0.10	- 0.000595	- 0.100968 + 1	0.153334 + 1
11	- 0.009980	- 0.812063	0.345111 + 2
12	- 0.016179	- 0.420254	0.392835 + 2
13	- 0.018559	- 0.069606	0.313070 + 2
14	- 0.017724	0.236106	0.307194 + 2
15	- 0.013887	0.517607	0.221063 + 2
16	- 0.008038	0.602853	- 0.723027 + 1
17	- 0.002855	0.395315	- 0.300003 + 2
18	- 0.000385	0.113003	- 0.218234 + 2
19	- 0.000004	- 0.004890	- 0.297217 + 1
0.20	- 0.000060	0.001176	0.193543 + 1

Tab. 4.10
Numerische Lösungen für die
10-sin-Schwingung mit Koppelung

4.8 Beispiel 4

Entsprechend Punkt 3.6 erhält man für die 20-sin-Schwingung $\tau_{\min} = 0.01$ s. Die numerische Rechnung wird mit dem Zeitintervall $\Delta t = 0.001$ s durchgeführt.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000042	0.018592	0.610222 + 1
2	0.000668	0.111991	0.929468 + 1
3	0.002179	0.187466	0.767217 + 1
4	0.004417	0.250010	0.156243 + 1
5	0.006790	0.210394	- 0.699561 + 1
6	0.008470	0.112752	- 0.147750 + 2
7	0.008707	- 0.071991	- 0.186803 + 2
8	0.007124	- 0.241589	- 0.169052 + 2
9	0.003898	- 0.391731	- 0.970872 + 1
0.10	- 0.000271	- 0.424958	0.678492
11	- 0.004375	- 0.378916	0.108423 + 2
12	- 0.007425	- 0.220153	0.174534 + 2
13	- 0.008778	- 0.048753	0.184898 + 2
14	- 0.008330	0.130824	0.139729 + 2
15	- 0.006516	0.218663	0.590461 + 1
16	- 0.004114	0.247737	- 0.251354 + 1
17	- 0.001939	0.177981	- 0.814287 + 1
18	- 0.000538	0.100768	- 0.910027 + 1
19	- 0.000007	0.011488	- 0.546236 + 1
0.20	0.000000	0.000479	0.813175

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

Tab. 4.11a Numerische Lösungen für die 20-sin-Schwingung bei $\Delta t = 0.001$ s

n = 20
 $\Delta t = 0.001$

Im Vergleich zu Punkt 3.6 erfolgt eine Wiederholung mit dem genaueren Zeitintervall $\Delta t = 0.0005$ s.

Die Ergebnisse der Tab. 4.11b zeigen eine verbesserte Übereinstimmung mit Tab. 3.9 nach Punkt 3.6.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000041	0.018573	0.614581 + 1
2	0.000671	0.112823	0.930891 + 1
3	0.002192	0.188674	0.771376 + 1
4	0.004446	0.251788	0.156557 + 1
5	0.006835	0.211631	- 0.705150 + 1
6	0.008526	0.113409	- 0.148710 + 2
7	0.008762	- 0.072800	- 0.187960 + 2
8	0.007166	- 0.243333	- 0.170032 + 2
9	0.003916	- 0.394542	- 0.975161 + 1
0.10	- 0.000281	- 0.427614	0.706884
11	- 0.004411	- 0.381179	0.109410 + 2
12	- 0.007477	- 0.220997	0.175868 + 2
13	- 0.008833	- 0.048694	0.186072 + 2
14	- 0.008377	0.132220	0.140327 + 2
15	- 0.006547	0.220180	0.590696 + 1
16	- 0.004128	0.249286	- 0.255605 + 1
17	- 0.001942	0.178518	- 0.821377 + 1
18	- 0.000537	0.100971	- 0.915359 + 1
19	- 0.000008	0.011070	- 0.547212 + 1
0.20	- 0.000003	0.000478	0.855080

2DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

Tab. 4.11b Numerische Lösungen für die 20-sin-Schwingung bei $\Delta t = 0.0005$ s

n = 20
 $\Delta t = 0.0005$

4.9 Beispiel 4 mit Koppelung

In gleicher Weise wie vorher wird die gekoppelte Lösung für die 20-sin-Schwingung ermittelt und verglichen.

2DOF	M1	1
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200
1DOF	M1	1
	K1	4000
	Δt	0.001
	AMIN	0.0001
	N	20

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000042	0.018592	0.610220 + 1
1	0.000668	0.111991	0.924476 + 1
3	0.002179	0.187464	0.767053 + 1
4	0.004417	0.250002	0.156098 + 1
5	0.006790	0.210381	- 0.699153 + 1
6	0.008470	0.112735	- 0.147771 + 1
7	0.008706	- 0.072009	- 0.186768 + 2
8	0.007123	- 0.241603	- 0.169080 + 2
9	0.003897	- 0.391724	- 0.970768 + 1
0.10	- 0.000272	- 0.424941	0.679431
11	- 0.004375	- 0.378892	0.108429 + 2
12	- 0.007425	- 0.220120	0.174530 + 2
13	- 0.008778	- 0.048726	0.184908 + 2
14	- 0.008330	0.130823	0.139682 + 2
15	- 0.006515	0.218649	0.590438 + 1
16	- 0.004114	0.247726	- 0.251233 + 1
17	- 0.001939	0.177871	- 0.814102 + 1
18	- 0.000538	0.100768	- 0.909922 + 1
19	- 0.000007	0.011501	- 0.546114 + 1
0.20	0.000000	0.000502	0.813918

Tab. 4.12a

Numerische Lösungen für die 20-sin-Schwingung bei $\Delta t = 0.001$ s mit Koppelung

Die Ergebnisse der Tab. 4.12b zeigen, daß mit $\Delta t = 0.005$ s für die Beschleunigungen noch eine Genauigkeitsverbesserung erreicht werden kann.

2DOF	M1	1
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200
1DOF	M1	1
	K1	4000
	Δt	0.0005
	AMIN	0.0001
	N	20

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000041	0.018573	0.614592 + 1
2	0.000671	0.112825	0.931042 + 1
3	0.002192	0.188686	0.772524 + 1
4	0.004446	0.251823	0.157323 + 1
5	0.006836	0.211724	- 0.705122 + 1
6	0.008527	0.113484	- 0.148812 + 2
7	0.008764	- 0.072762	- 0.188177 + 2
8	0.007169	- 0.243330	- 0.170099 + 2
9	0.003919	- 0.394552	- 0.975741 + 1
0.10	- 0.000279	- 0.427651	0.704676
11	- 0.004409	- 0.381254	0.109376 + 2
12	- 0.007476	- 0.221096	0.175743 + 2
13	- 0.008834	- 0.048724	0.186023 + 2
14	- 0.008379	0.132053	0.140335 + 2
15	- 0.006551	0.220027	0.591700 + 1
16	- 0.004134	0.249157	- 0.254986 + 1
17	- 0.001948	0.178459	- 0.820604 + 1
18	- 0.000543	0.100994	- 0.914678 + 1
19	- 0.000013	0.011165	- 0.546581 + 1
0.20	0.000008	0.000624	0.858887

Tab. 4.12b
Numerische Lösungen für die 20-sin-Schwingung bei $\Delta t = 0.0005$ s mit Koppelung

4.10 Beispiel 5

Es wird die wesentlich ungünstigere 40-sin-Schwingung mit $\tau_{\min} = 0.005$ s gewählt und mit Tab. 3.10 verglichen.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000044	0.015324	0.293594 + 1
2	0.000639	0.053866	0.443763 + 1
3	0.001119	0.096352	0.365556 + 1
4	0.002215	0.119563	0.676678
5	0.003369	0.105954	- 0.347780 + 1
6	0.004180	0.051374	- 0.724257 + 1
7	0.004282	- 0.032532	- 0.911725 + 1
8	0.003495	- 0.121723	- 0.823392 + 1
9	0.001907	- 0.188353	- 0.471866 + 1
0.10	- 0.000138	- 0.210856	0.345304
11	- 0.002151	- 0.181825	0.529867 + 1
12	- 0.003649	- 0.110785	0.851584 + 1
13	- 0.004318	- 0.020695	0.902240 + 1
14	- 0.004109	0.060562	0.682528 + 1
15	- 0.003230	0.110170	0.292251 + 1
16	- 0.002061	0.118424	- 0.116288 + 1
17	- 0.000996	0.091511	- 0.389457 + 1
18	- 0.000302	0.048201	- 0.436408 + 1
19	- 0.000025	0.011750	- 0.261183 + 1
0.20	0.000001	0.000625	0.411123

2 DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200

Tab. 4.13 Numerische Lösungen für die 40-sin-Schwingung

$$n = 40$$

$$\Delta t = 0.0005$$

4.11 Beispiel 5 mit Koppelung

In gleicher Weise wie vorher wird die gekoppelte Lösung für die 40-sin-Schwingung ermittelt und verglichen.

2DOF	M1	1
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0
	P2	200
1DOF	M1	1
	K1	4000
	Δt	0.0005
	AMIN	0.00001
	N	40

t	$u_1(t)$	$u_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000044	0.015324	0.293605 + 1
2	0.000369	0.053866	0.443813 + 1
3	0.001119	0.096355	0.365653 + 1
4	0.002215	0.119565	0.680433
5	0.003370	0.105975	- 0.347384 + 1
6	0.004180	0.051402	- 0.724493 + 1
7	0.004282	- 0.032486	- 0.912122 + 1
8	0.003496	- 0.121685	- 0.824064 + 1
9	0.001909	- 0.188341	- 0.472017 + 1
0.10	- 0.000137	- 0.210865	0.343237
11	- 0.002150	- 0.181861	0.529153 + 1
12	- 0.003648	- 0.110848	0.851568 + 1
13	- 0.004318	- 0.020748	0.902195 + 1
14	- 0.004109	0.060499	0.683408 + 1
15	- 0.003231	0.110122	0.292289 + 1
16	- 0.002062	0.118394	- 0.115729 + 1
17	- 0.000998	0.091495	- 0.389300 + 1
18	- 0.000304	0.048192	- 0.436402 + 1
19	- 0.000027	0.011745	- 0.261163 + 1
20	- 0.000000	0.000261	0.411315

Tab. 4.14
Numerische Lösungen für die 40-sin-Schwingung
mit Koppelung

4.12 Beispiel 6

Zum weiteren Studium der numerischen Sensibilität wird die 100-sin-Schwingung mit $\tau_{\min} = 0.002$ s analysiert und mit Punkt 3.8 verglichen.

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000019	0.005708	0.111057 + 1
2	0.000144	0.020371	0.167754 + 1
3	0.000430	0.036333	0.137964 + 1
4	0.000847	0.045146	0.249329
5	0.001285	0.039825	- 0.132324 + 1
6	0.001592	0.019134	- 0.275459 + 1
7	0.001630	- 0.012830	- 0.346512 + 1
8	0.001329	- 0.046611	- 0.312791 + 1
9	0.000725	- 0.072002	- 0.179036 + 1
0.10	- 0.000052	- 0.080456	0.130908
11	- 0.000818	- 0.069525	0.201091 + 1
12	- 0.001388	- 0.042472	0.323308 + 1
13	- 0.001644	- 0.008336	0.342878 + 1
14	- 0.001565	0.022633	0.259986 + 1
15	- 0.001232	0.041435	0.111812 + 1
16	- 0.000789	0.044726	- 0.421966
17	- 0.000384	0.034504	- 0.146995 + 1
18	- 0.000119	0.018228	- 0.164993 + 1
19	- 0.000011	0.004357	- 0.987623
0.20	0.000000	0.000104	0.155899

2 DOF	M1	2
	M2	1
	K1	4000
	K2	2000
	P1	0

Tab. 4.15 Numerische Lösungen für die 100-sin-Schwingung

$$n = 100$$

$$\Delta t = 0.0005$$

4.13 Beispiel 6 mit Koppelung

In gleicher Weise wie vorher wird die gekoppelte Lösung für die 100-sin-Schwingung ermittelt und verglichen.

2DOF M1	1
M2	1
K1	4000
K2	2000
P1	0
P2	200
1DOF M1	1
K1	4000
Δt	0.0005
AMIN	0.00001
N	100

t	$u_1(t)$	$\dot{u}_1(t)$	$\ddot{u}_1(t)$
0.	0.	0.	0.
0.01	0.000019	0.005708	0.111054 + 1
2	0.000144	0.020372	0.167775 + 1
3	0.000430	0.036334	0.138012 + 1
4	0.000847	0.045148	0.250939
5	0.001285	0.039827	- 0.132285 + 1
6	0.001592	0.019144	- 0.275342 + 1
7	0.001630	- 0.012815	- 0.346257 + 1
8	0.001330	- 0.046598	- 0.313010 + 1
9	0.000726	- 0.071997	- 0.179233 + 1
0.10	- 0.000052	- 0.080462	0.130111
11	- 0.000817	- 0.069540	0.200912 + 1
12	- 0.001388	- 0.042488	0.323397 + 1
13	- 0.001644	- 0.008353	0.342808 + 1
14	- 0.001565	0.022615	0.260031 + 1
15	- 0.001233	0.041423	0.111668 + 1
16	- 0.000789	0.044721	- 0.432963
17	- 0.000384	0.034501	- 0.147031 + 1
18	- 0.000119	0.018224	- 0.165021 + 1
19	- 0.000012	0.004348	- 0.988124
0.20	0.000000	0.000091	0.155547

Tab. 4.16
Numerische Lösungen für die 100-sin-Schwingung
mit Koppelung

5. Numerische Verifikation am M DOF-System

Die prinzipielle Verifikation des Koppelungsprinzips für die Systeme 1 und 2 ist in den Punkten 3. und 4. am 2DOF-System vorgenommen worden. Es gilt nun, die allgemeine Gültigkeit am M DOF-System zu zeigen.

Entsprechend Bild 5.1 wird ein 20 DOF-System gewählt, das in einem weiteren Schritt nach Bild 5.2 aus den dynamischen Teilsystemen 1 und 2 gebildet wird. Wie in den Punkten 3. und 4. werden die identischen Beispiele mit und ohne Koppelung berechnet und miteinander verglichen. In Tab. 5.1 sind die Einzelparameter zu den Beispielen zusammengestellt, wobei für Beispiel 1 - 6 der jeweilige Lastangriff bei Knoten 20 (Bild 5.1) bzw. bei Knoten 11 des Systems 1 (Bild 5.2) erfolgt. In Beispiel 1 ist noch einmal zwischen der Laufzeit unterschieden, während Beispiel 7 einen Sonderfall mit der Erregungsvorgabe des TAFT-Erdbebens am Knoten 1 (Bild 5.1) bzw. am Knoten 1 des Systems 2 (Bild 5.2) darstellt.

Es bedeuten in Tab. 5.1 'Zusammenstellung der Beispiele am 20 DOF-System'

die Einzelparameter:

Δt	=	Zeitschritt
TMAX	=	Gesamtzeit
KMAX	=	Zahl der Zeitschritte
AMIN	=	zugel. Restkraft in der Hilfsfeder [%]
KDRU	=	Ausgabe der KDRU. ten Zeitschrittes
M	=	Zahl der Restiterationen

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt in übersichtlicher Weise in den Bildern 5.3 - 5.29; für jedes Beispiel werden gesondert für die Außen- und Innenknoten sowie den Koppel-Knoten sowohl die Beschleunigung als auch die Verformung geplottet, und zwar jeweils für das vollständige bzw. gekoppelte System. Zusätzlich wird die prozentuale Abweichung gegenüber der 'vollständigen' Lösung dargestellt, wobei auch noch eine Gewichtung in Bezug auf den absoluten Maximalwert der Zustandslinie vorgenommen wird. Alle Auswertungen sind über der Zeitachse auf den jeweiligen Maximalwert normiert, so daß besonders die qualitative Funktion der gewichteten Abweichung in Relation zum ausgewiesenen Maximalwert zu beurteilen ist. Hierbei bedeutet jeweils 'Ymax' den realen Ordinatenwert, dessen Position mit 'Xmax' auf der Zeitachse angegeben ist.

Über den eingeführten Parameter 'KDRU' wird die Ausgabe zusätzlich minimiert, d. h. (nicht ausgegebene) Zwischenpunkte werden in den Zeichnungen geradlinig verbunden.

Beispiel	Bild-Nr.	Δt [s]	TMAX [s]	KMAX	AMIN [%]	KDRU	M
1	5. 3 4 5	0.0005	0.6	1200	0.00001	20	2
1	5. 6 7 8	0.0005	5.0	10000	0.00001	20	2
1	5. 9 10 11	0.0005	50.0	100000	0.00001	1000	2
2	5.12 13 14	0.001	0.4	400	0.00001	10	2
3	5.15 16 17	0.001	0.4	400	0.00001	10	2
4	5.18 19 20	0.0005	0.4	800	0.00001	20	2
5	5.21 22 23	0.0005	0.4	800	0.00001	20	2
6	5.24 25 26	0.0005	0.4	800	0.00001	20	2
7	5.27 28 29	0.01	18.0	1800	0.00001	10	2

Tab. 5.1
Zusammenstellung der Beispiele am 20 DOF-System

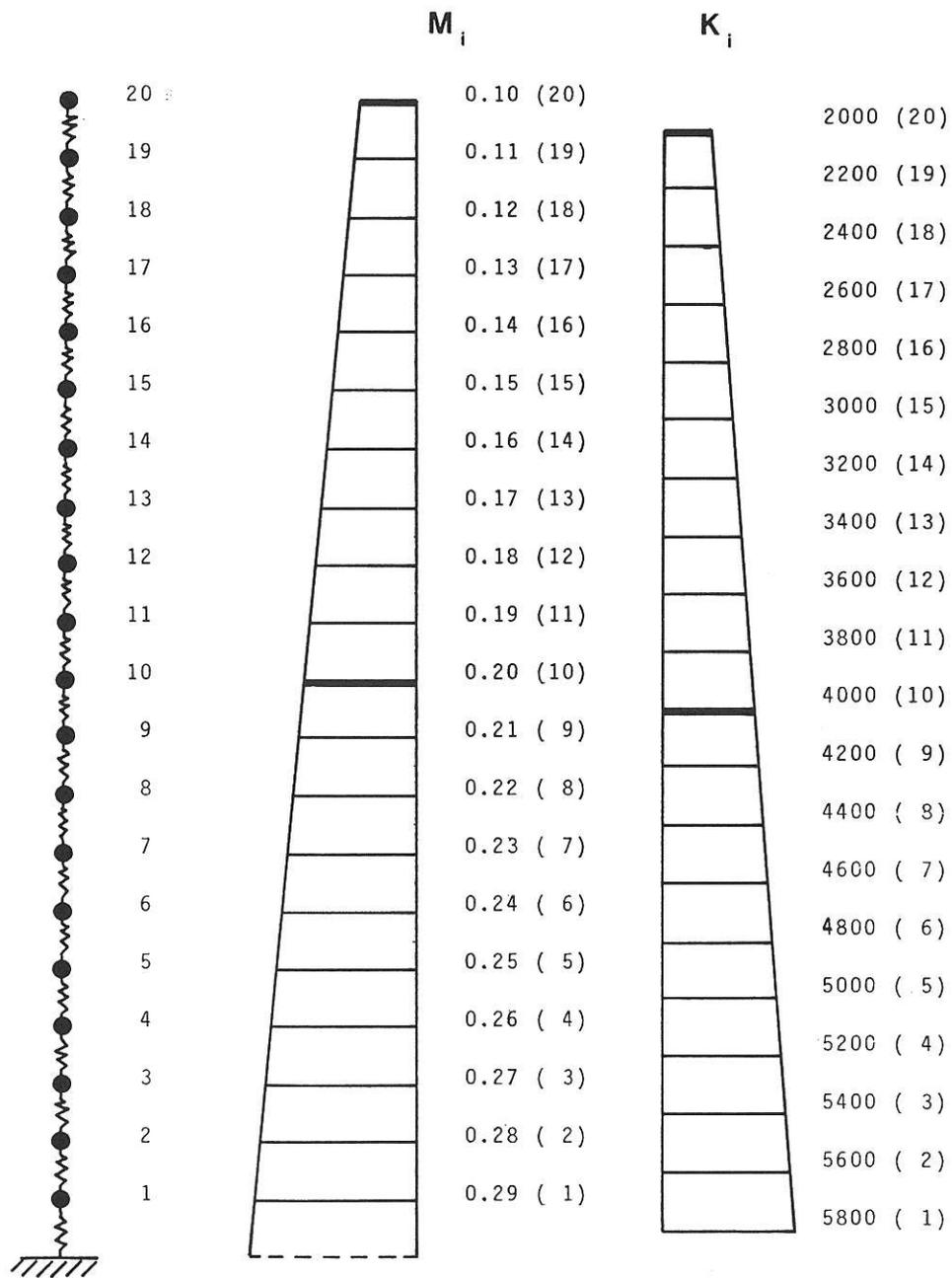


Bild 5.1
20 DOF-System

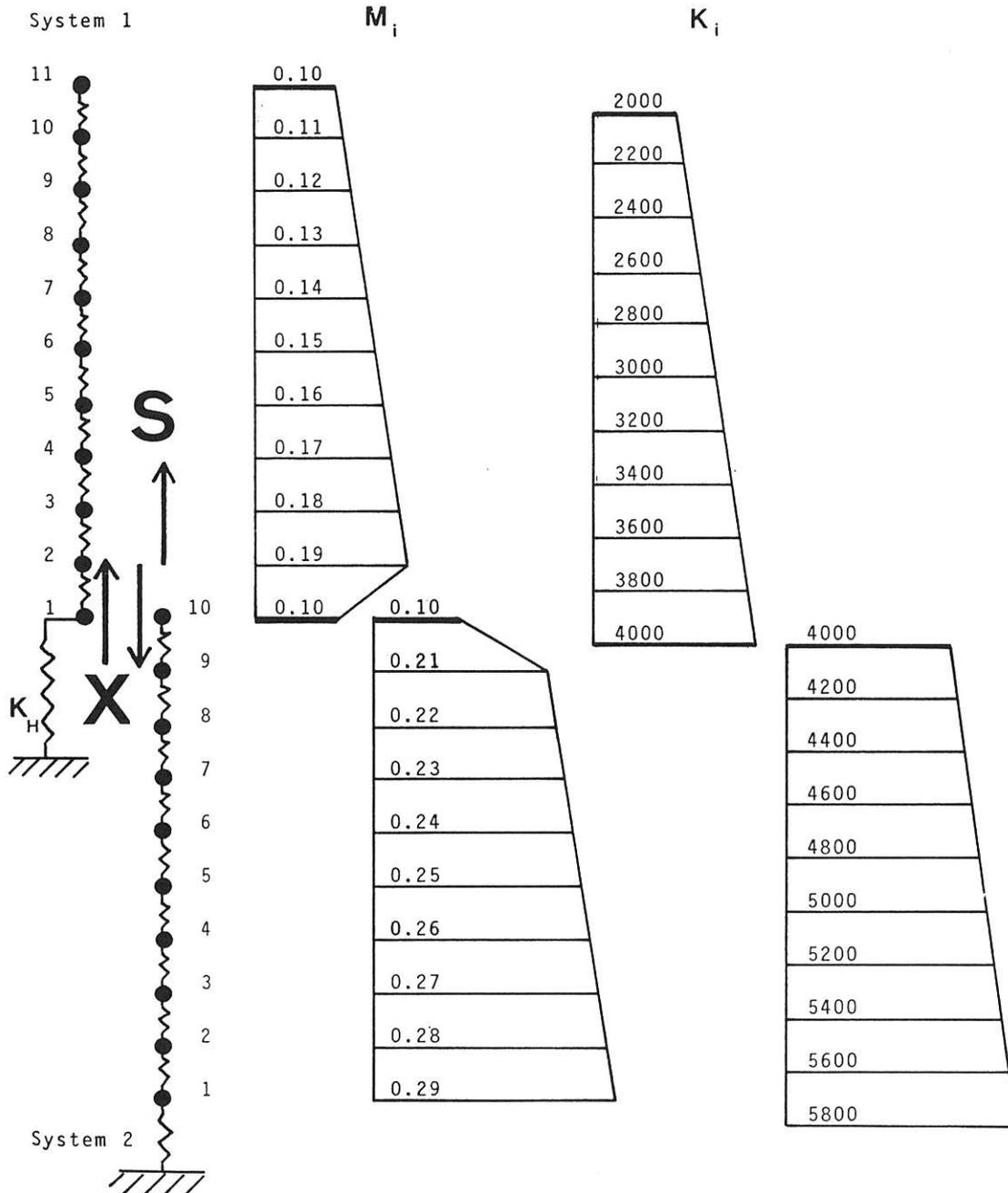


Bild 5.2
20 DOF-System mit Koppelung

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

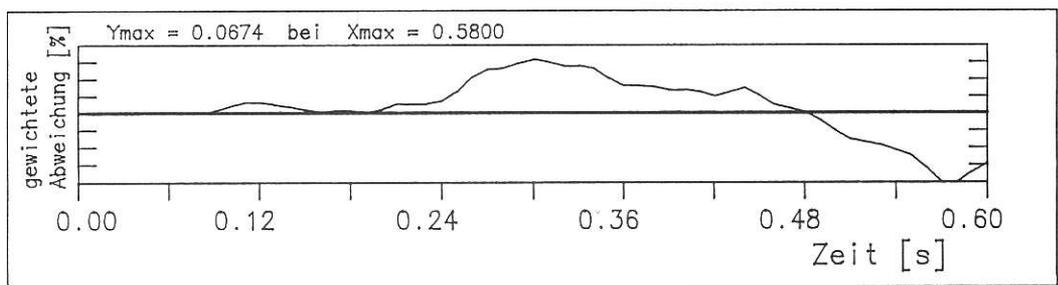
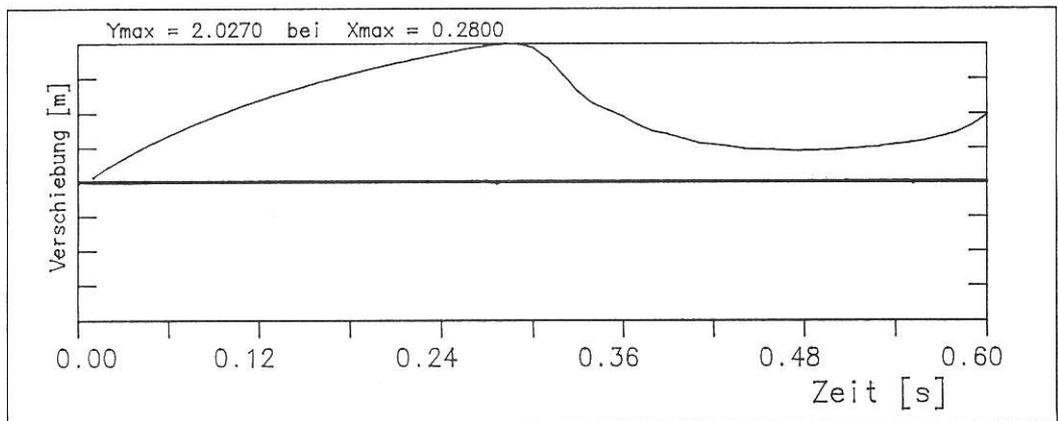
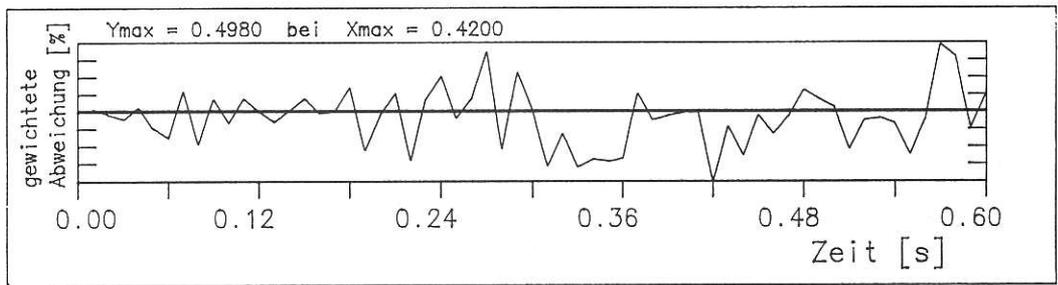
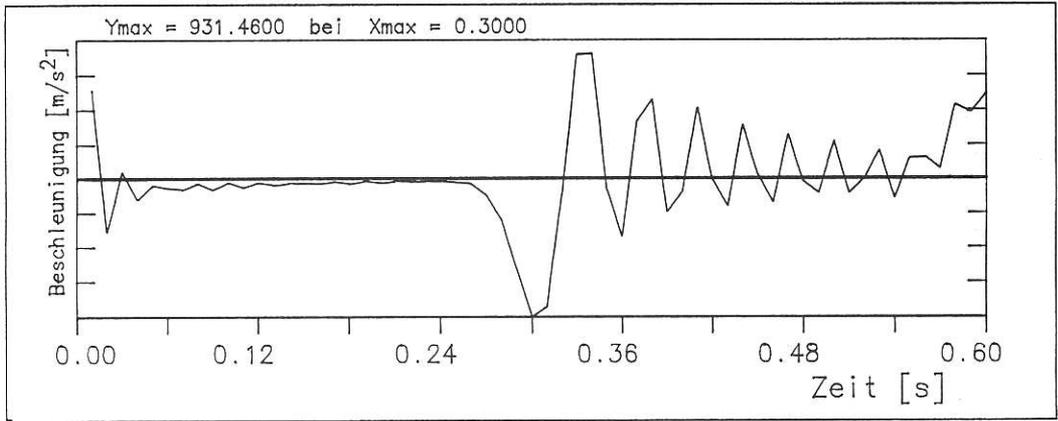


BILD 5.3 Auswertung Knoten 20 fuer P=konst.
(max t = 0.6 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

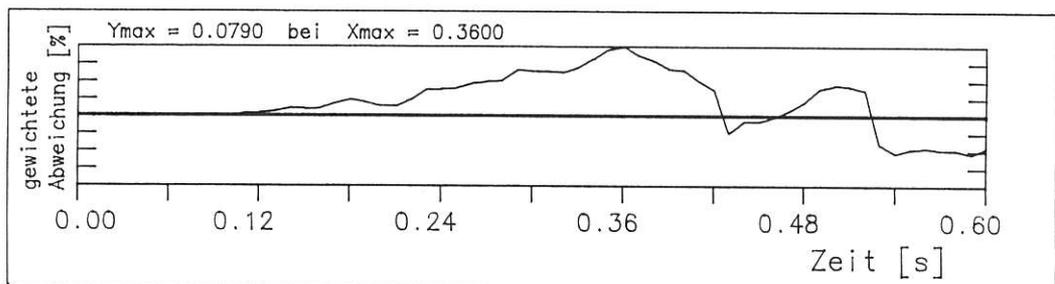
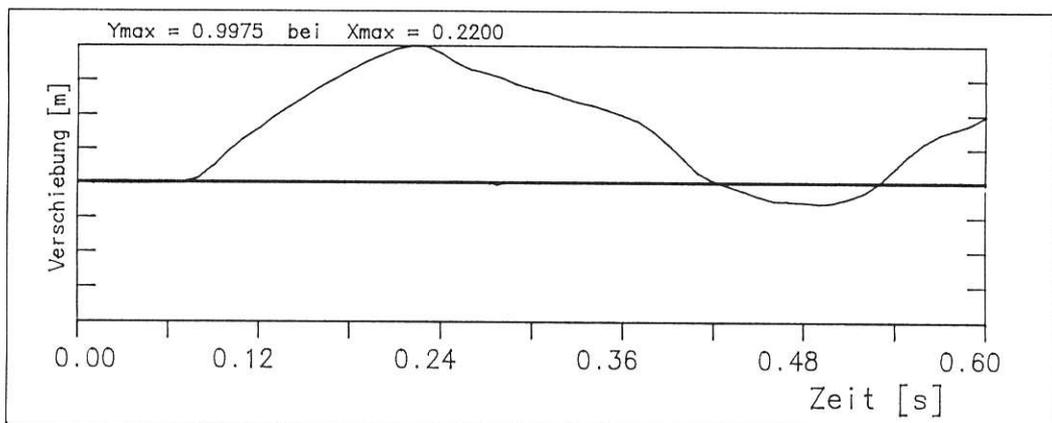
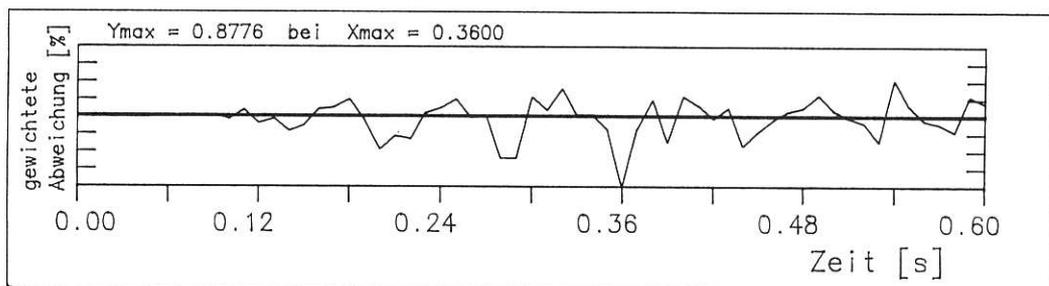
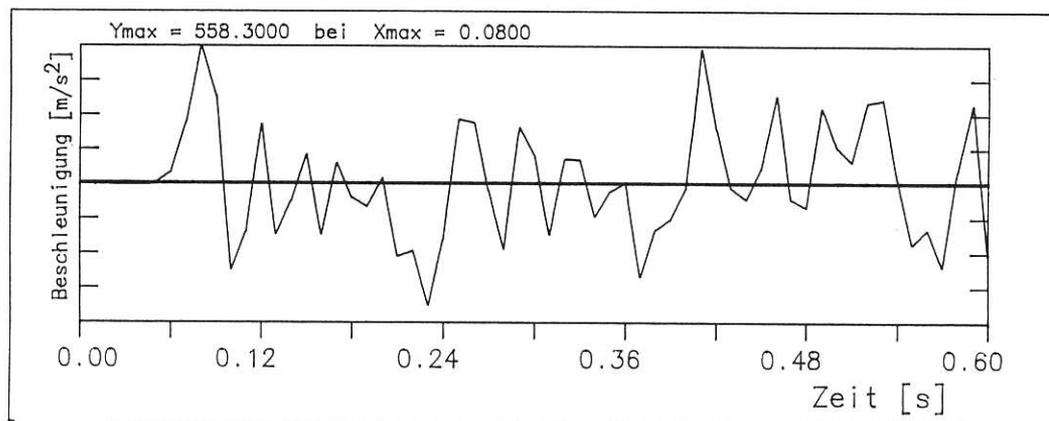


BILD 5.4 Auswertung Knoten 10 fuer P=konst.
(max t = 0.6 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

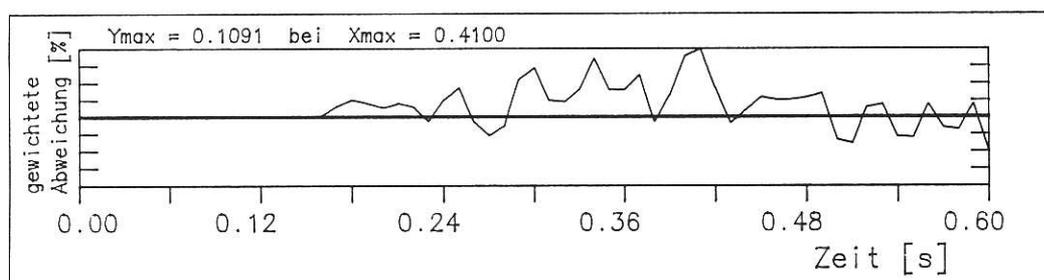
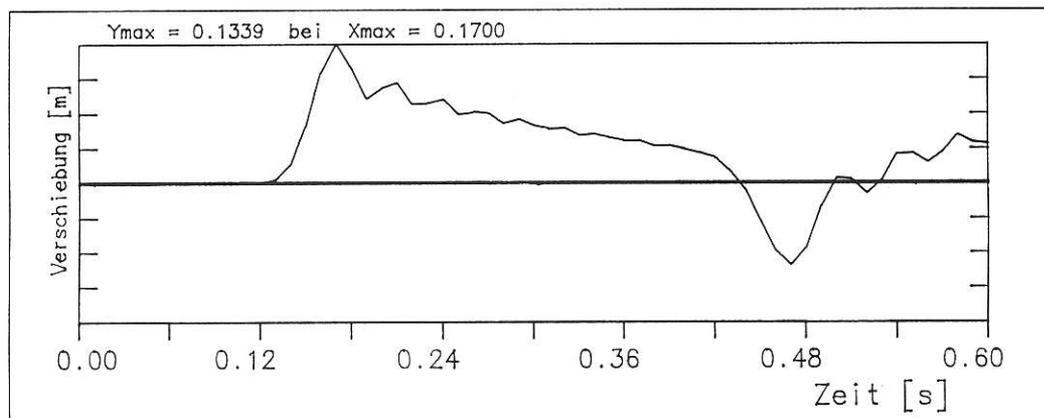
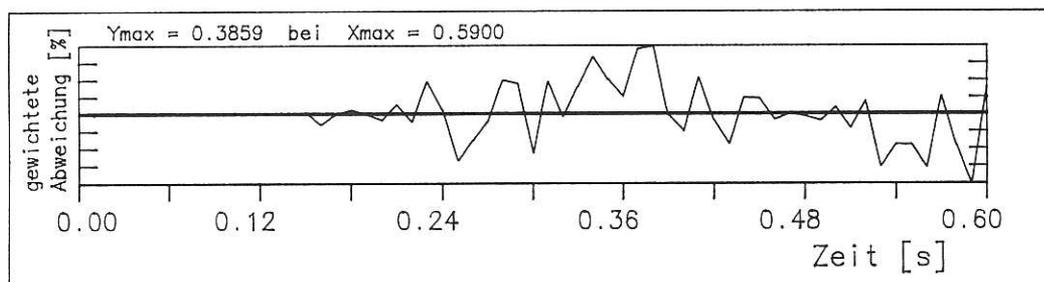
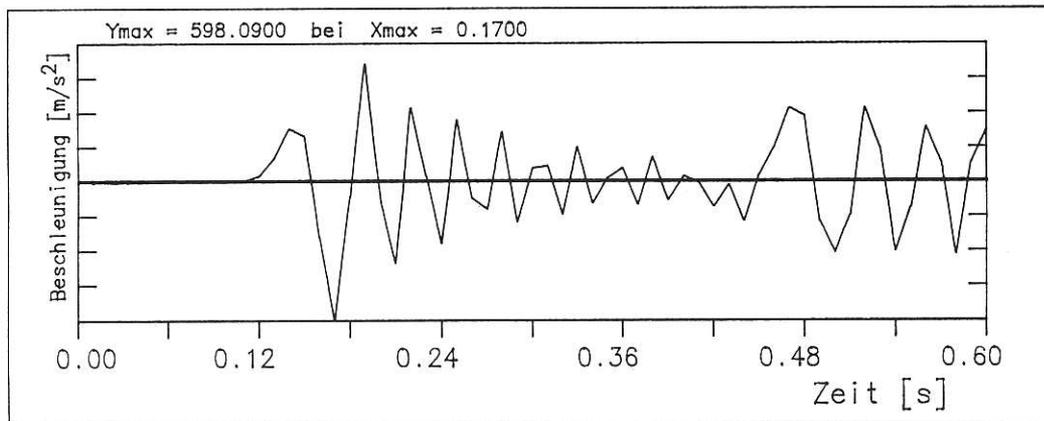


BILD 5.5 Auswertung Knoten 1 fuer P=konst.
(max t = 0.6 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

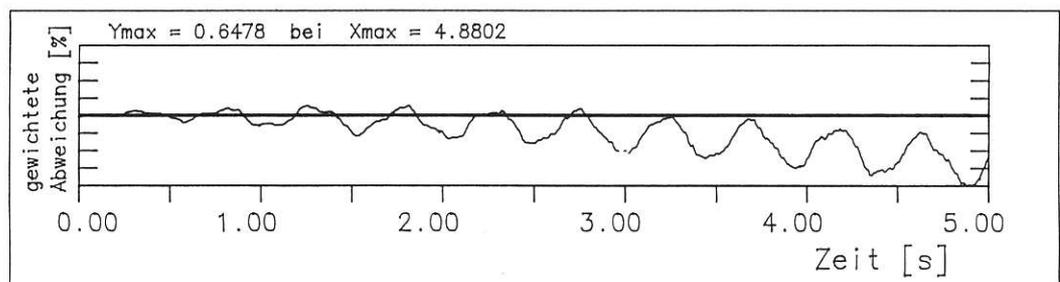
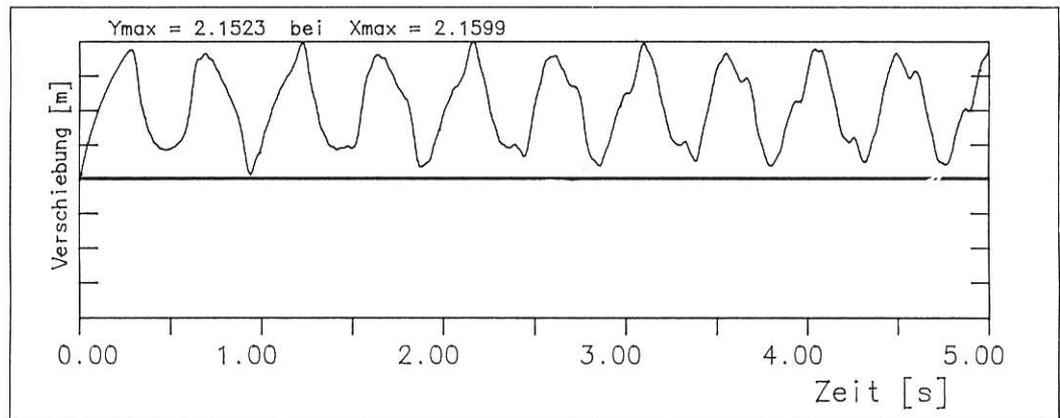
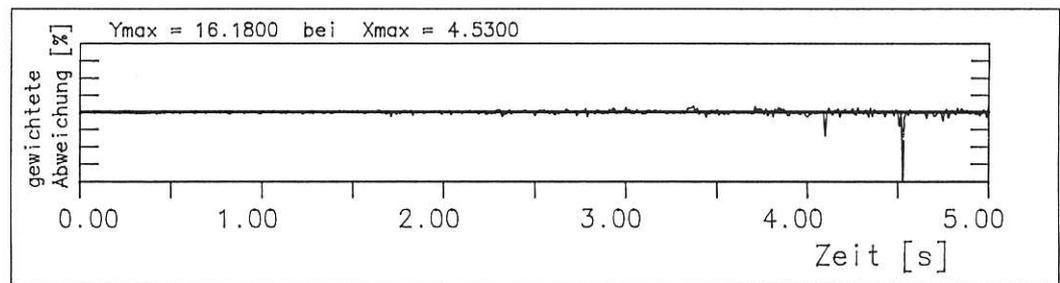
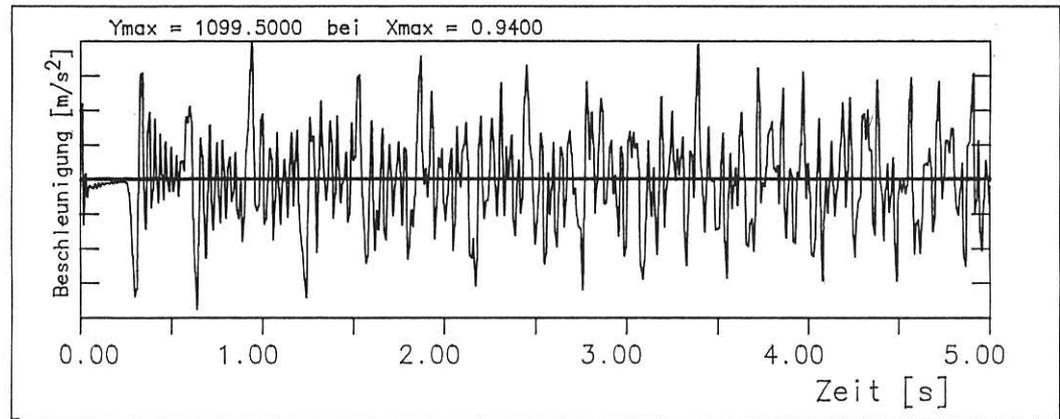


BILD 5.6 Auswertung Knoten 20 fuer P=konst.
(max t = 5.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

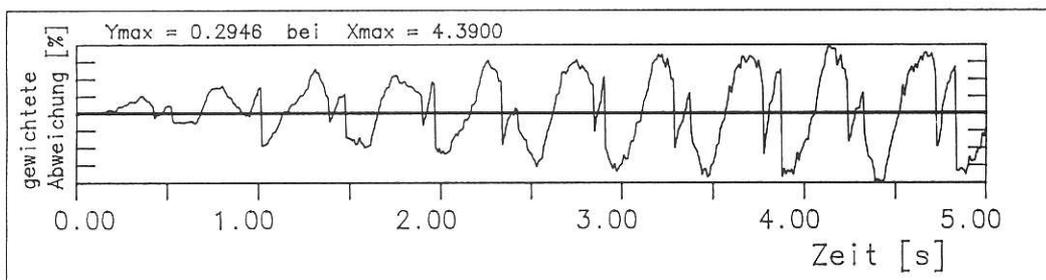
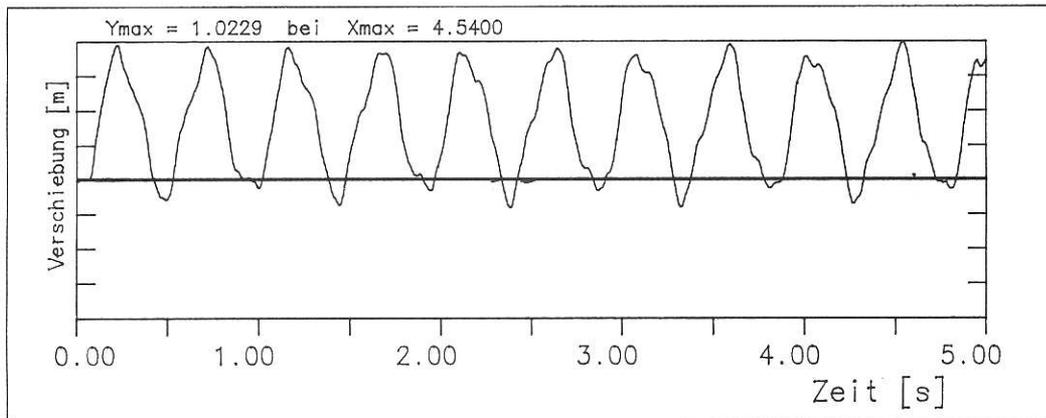
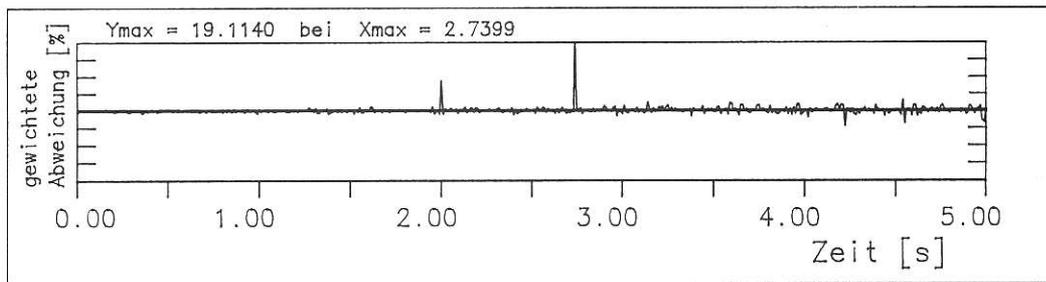
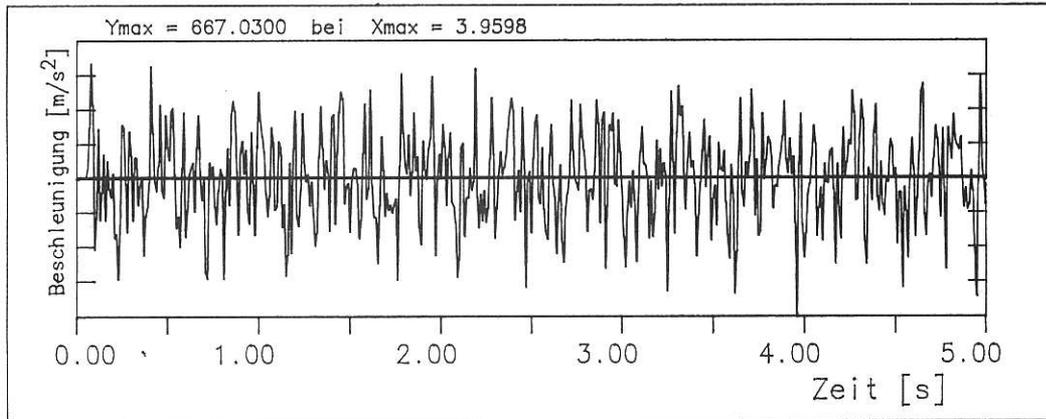


BILD 5.7 Auswertung Knoten 10 fuer P=konst.
(max t = 5.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

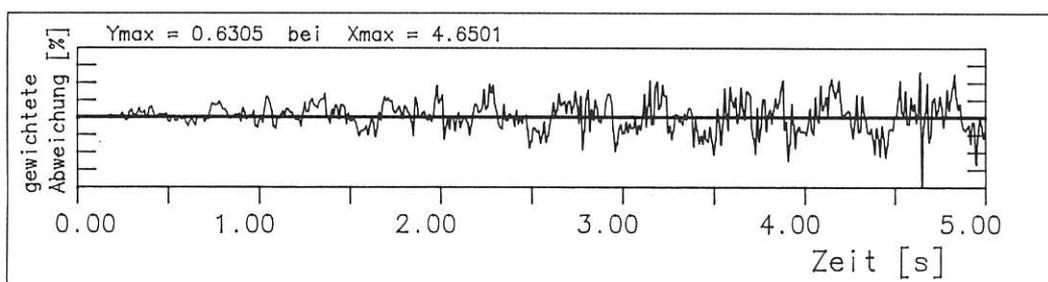
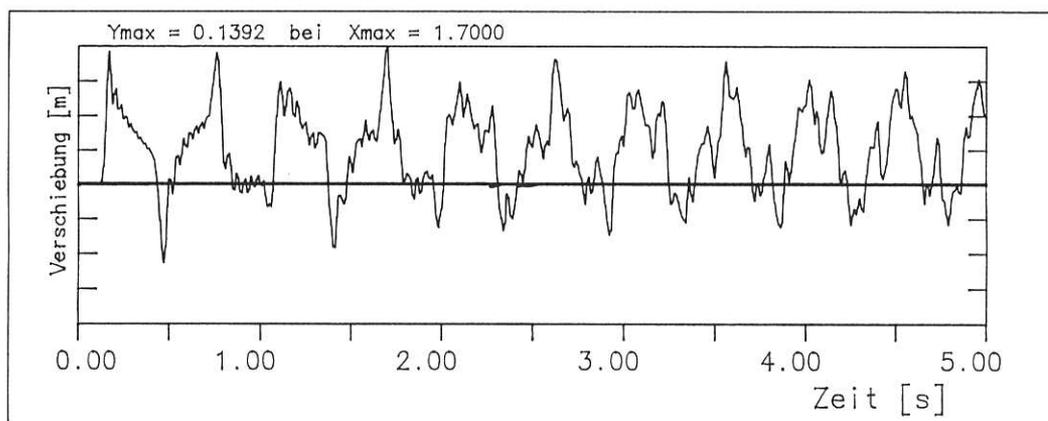
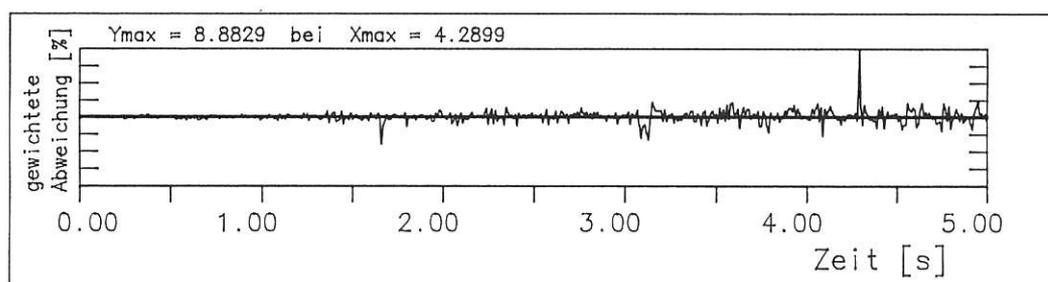
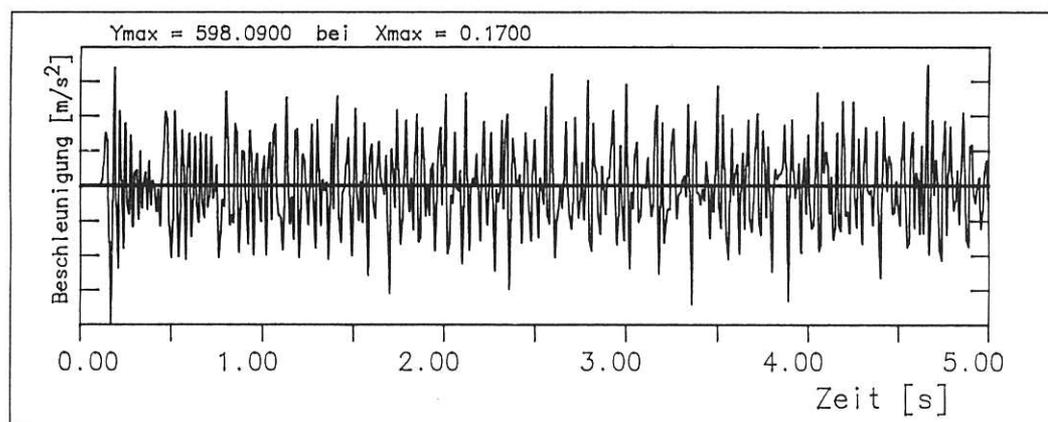


BILD 5.8 Auswertung Knoten 1 fuer P=konst.
(max t = 5.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

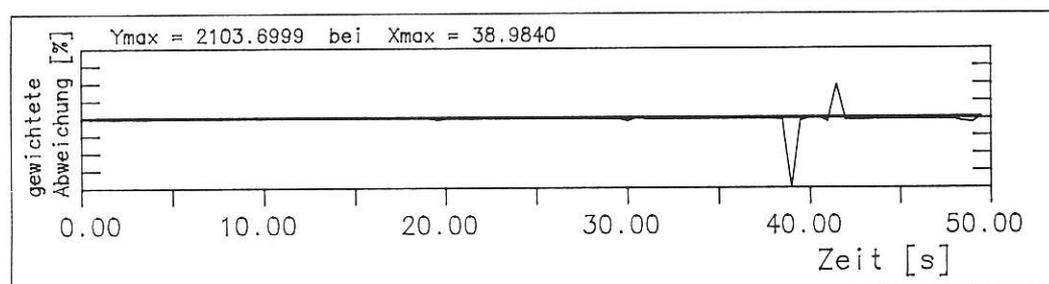
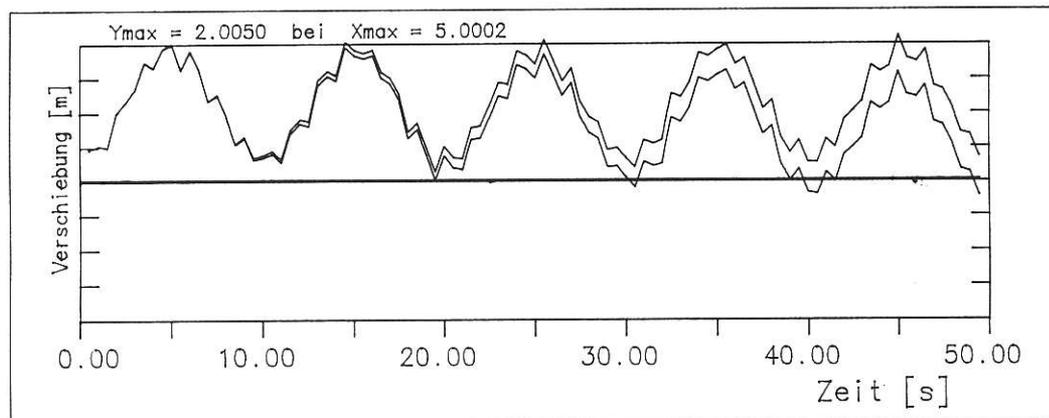
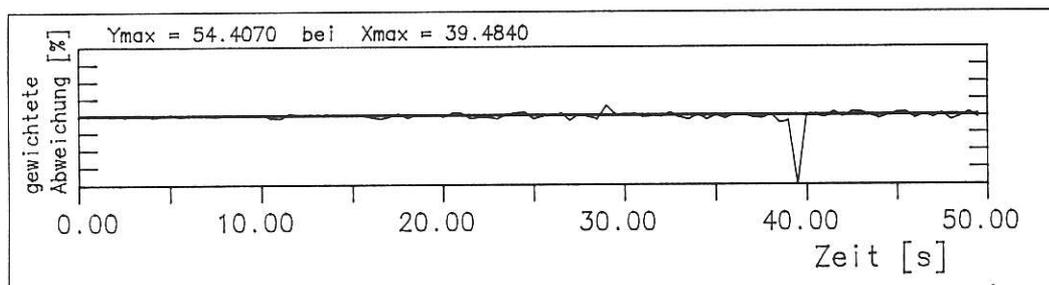
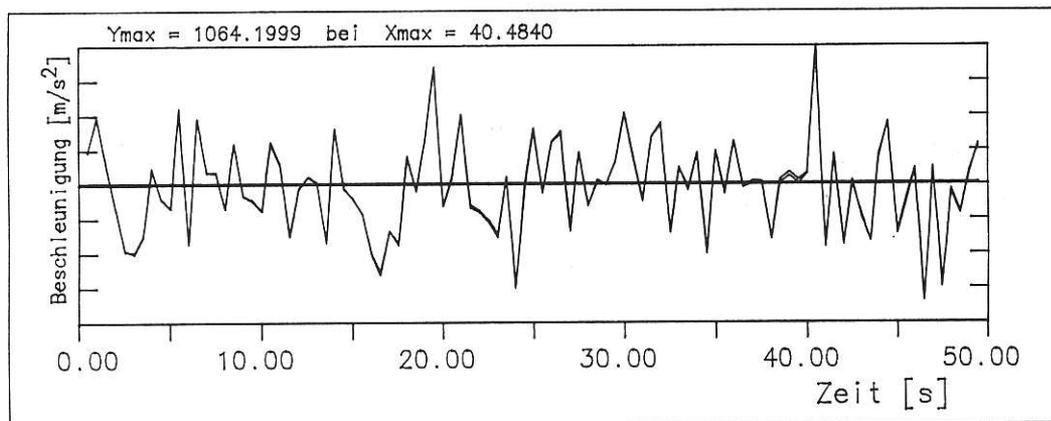


BILD 5.9 Auswertung Knoten 20 fuer P=konst.
(max t = 50.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

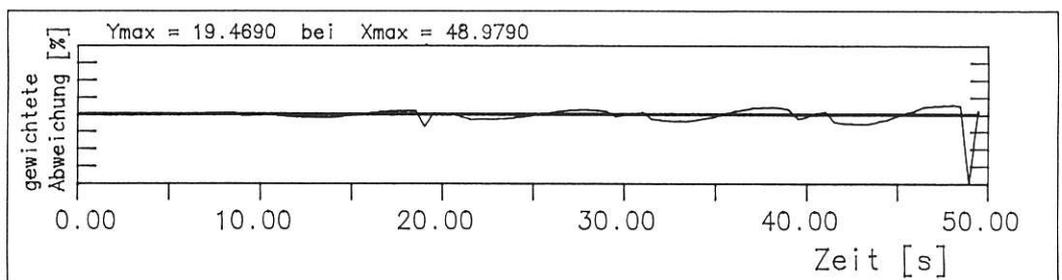
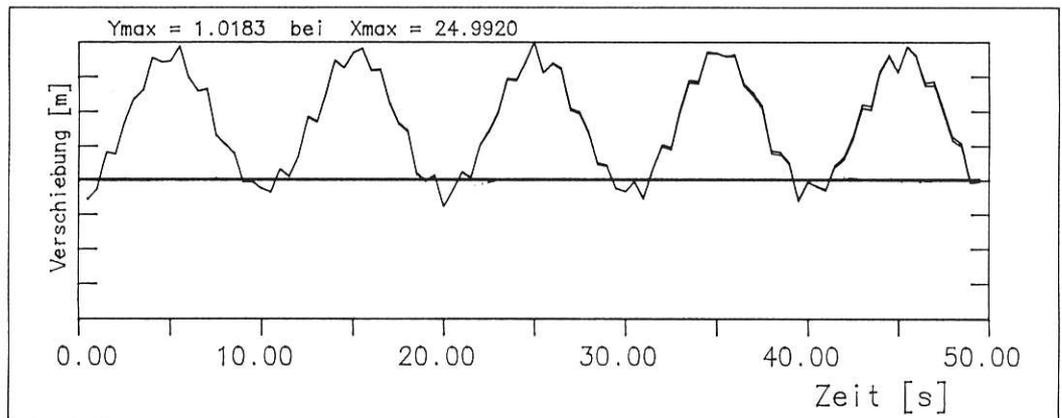
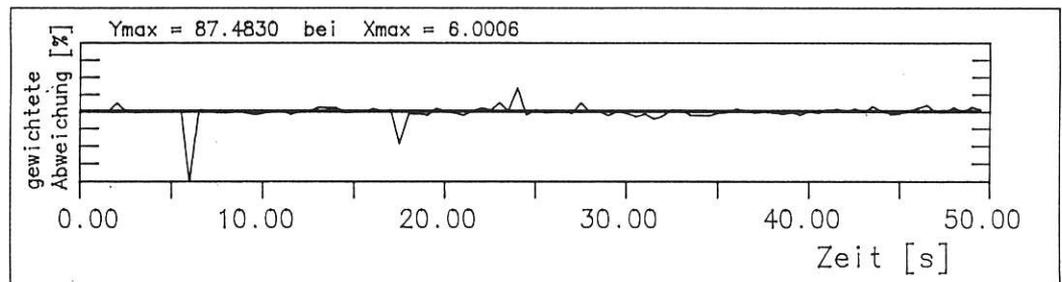
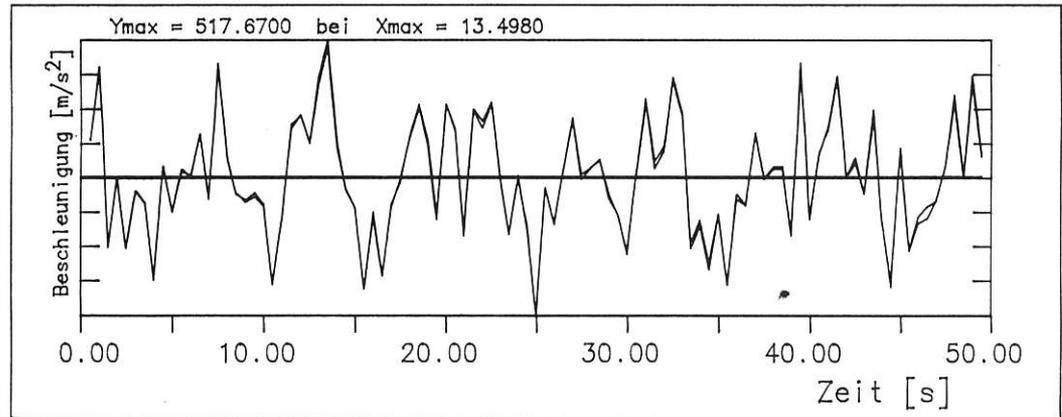


BILD 5.10 Auswertung Knoten 10 fuer P=konst.
(max t = 50.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

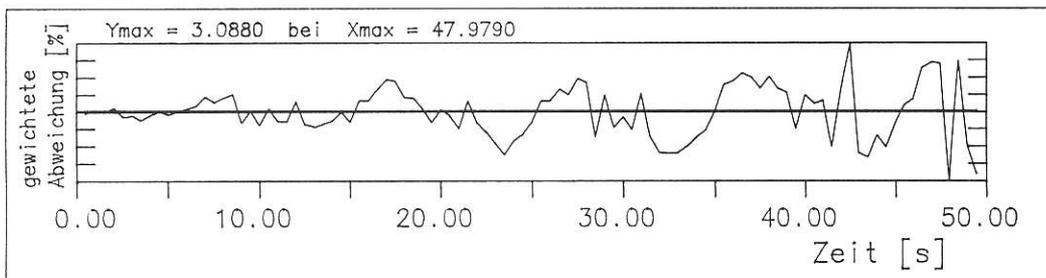
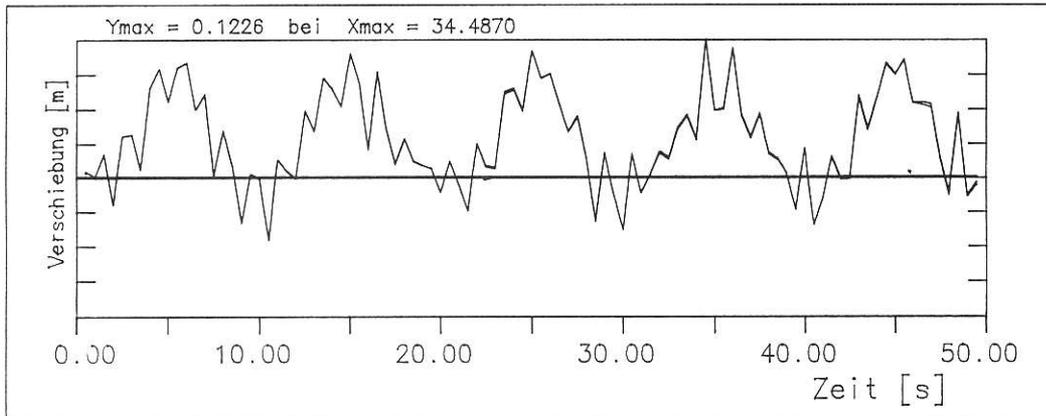
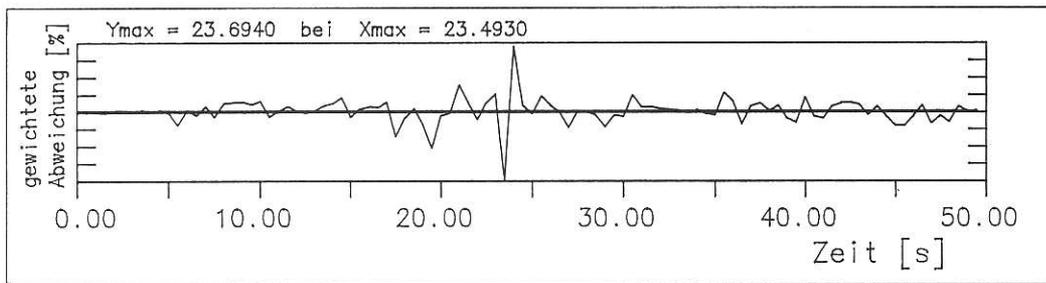
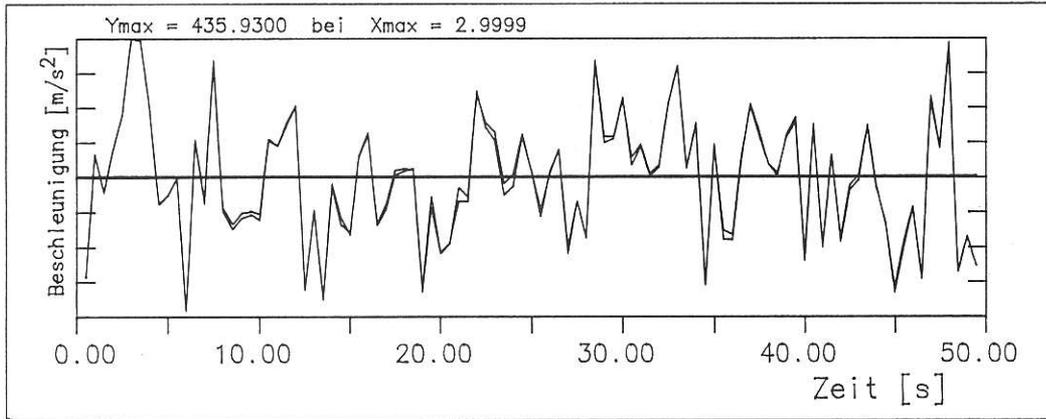


BILD 5.11 Auswertung Knoten 1 fuer P=konst.
(max t = 50.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

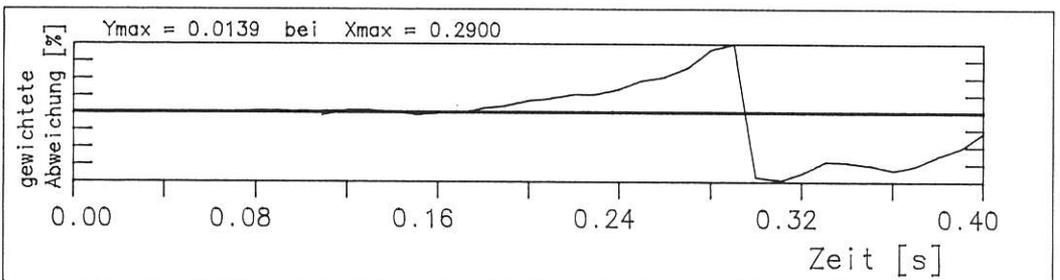
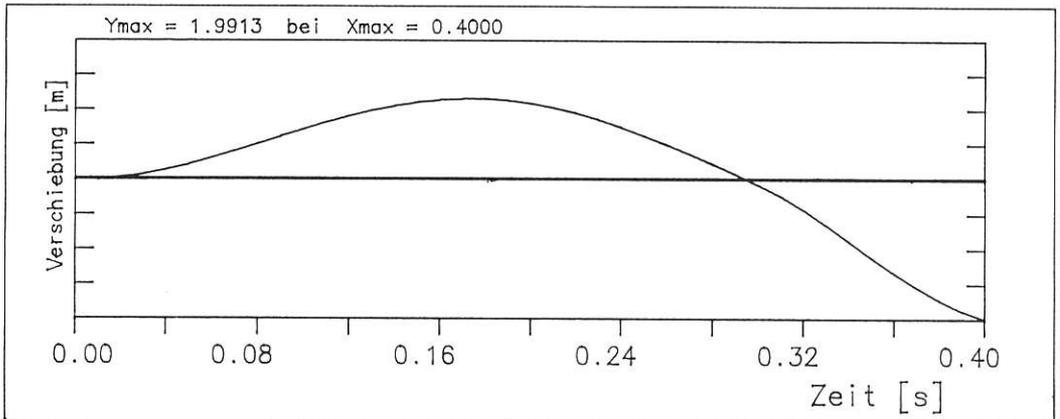
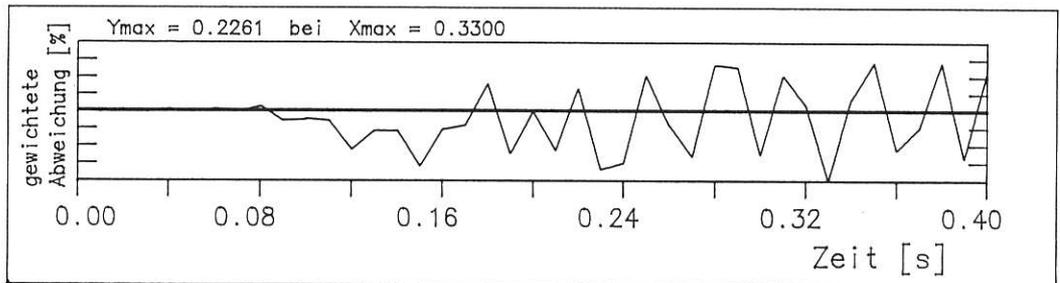
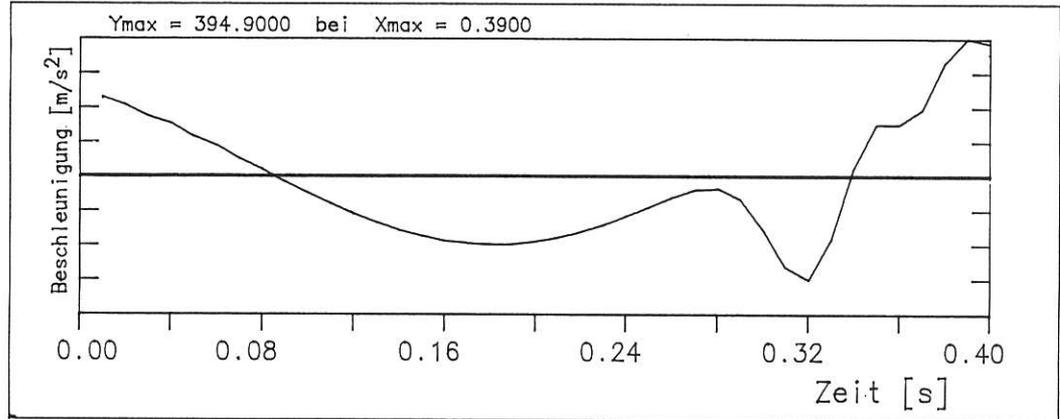


BILD 5.12 Auswertung Knoten 20 bei 1 SIN-Schwingung (max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

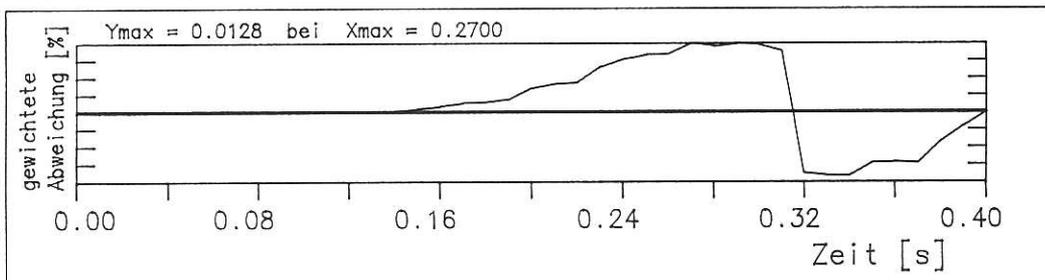
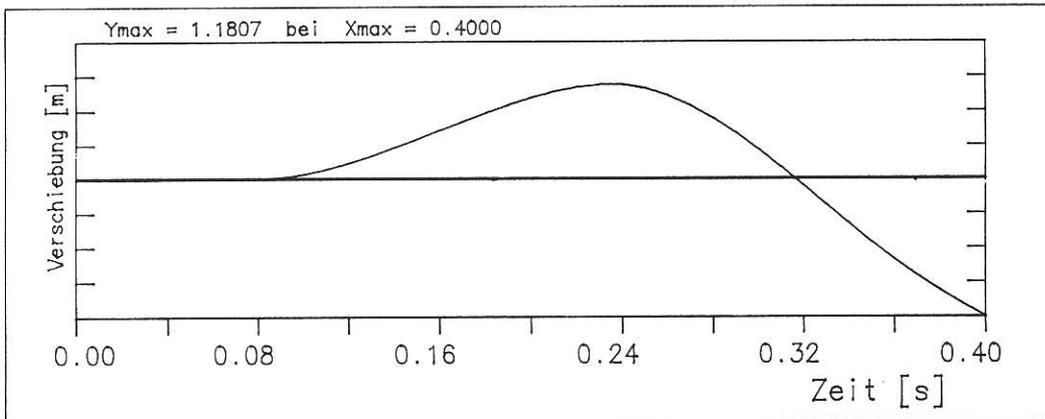
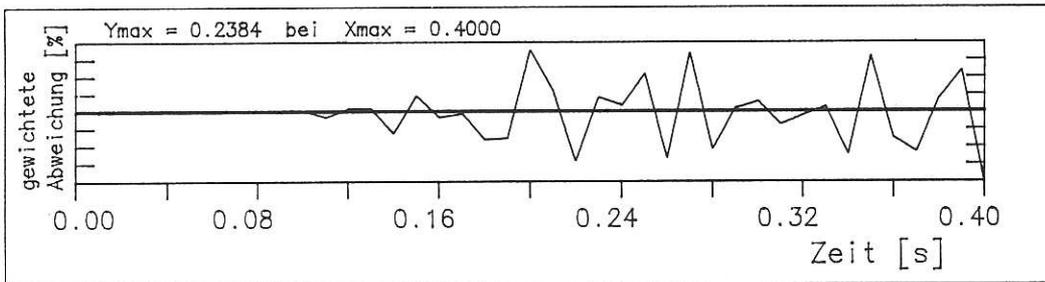
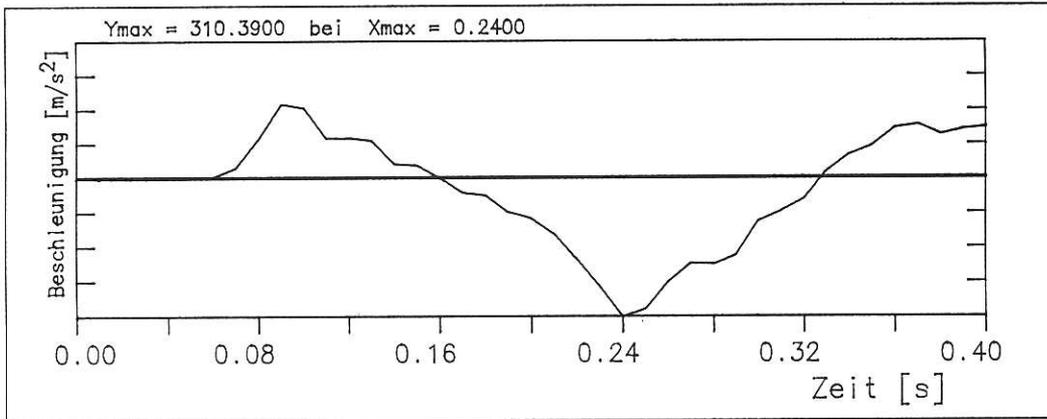


BILD 5.13 Auswertung Knoten 10 bei 1 SIN-Schwingung
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

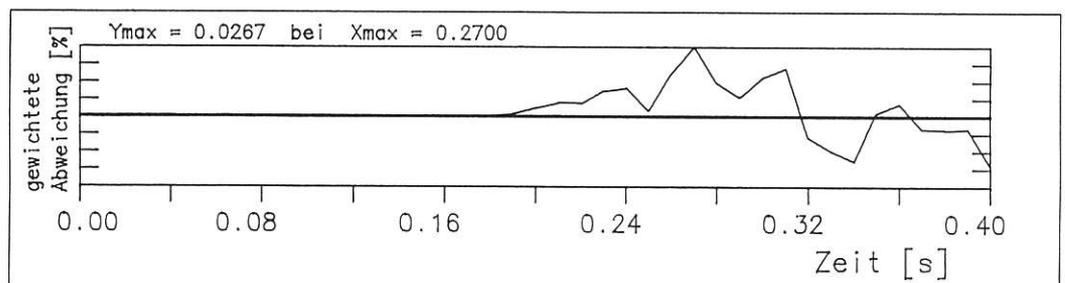
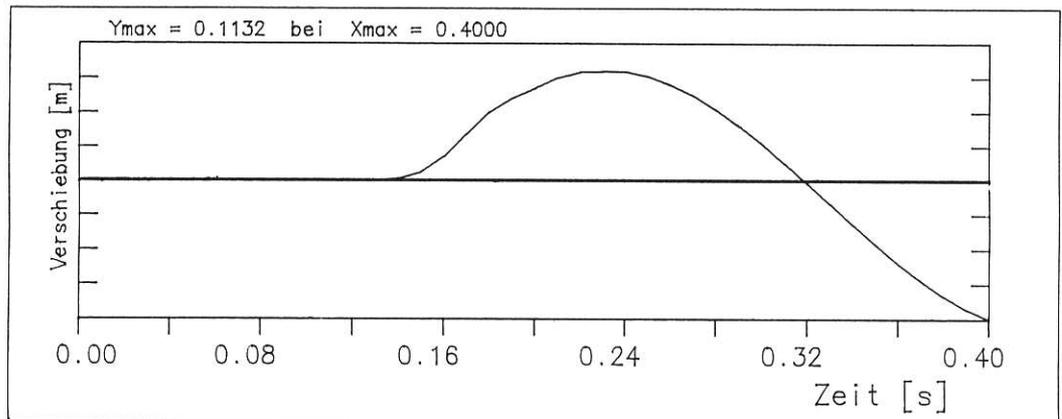
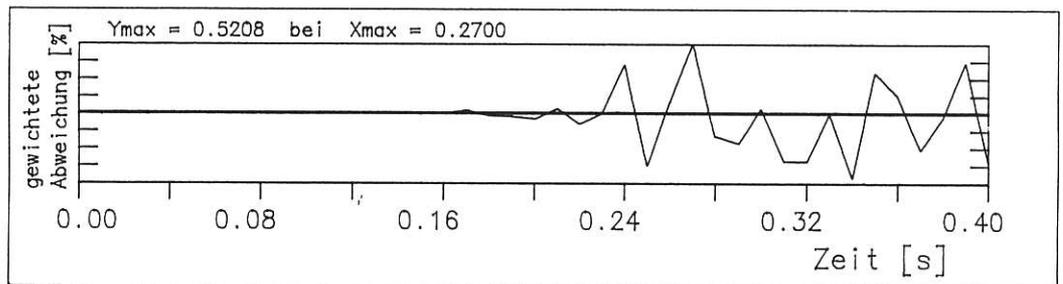
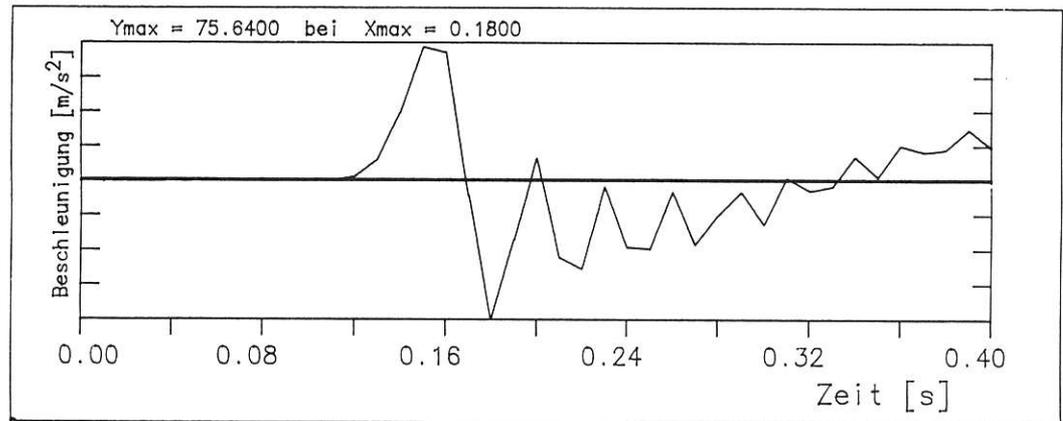


BILD 5.14 Auswertung Knoten 1 bei 1 SIN-Schwingung
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

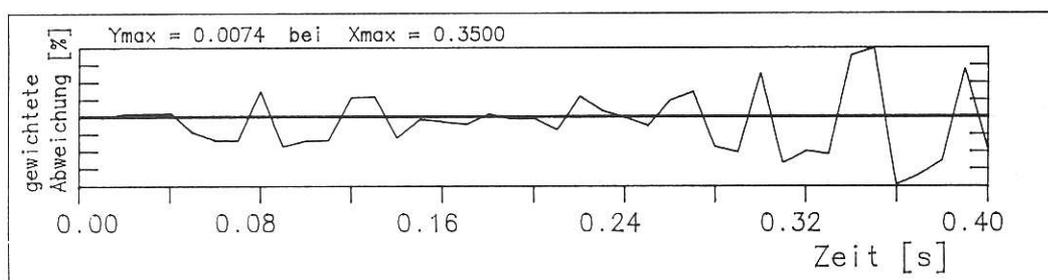
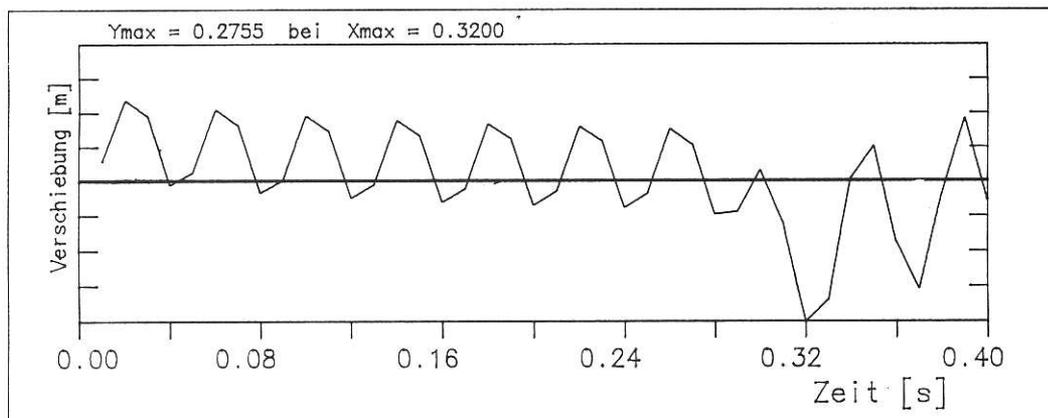
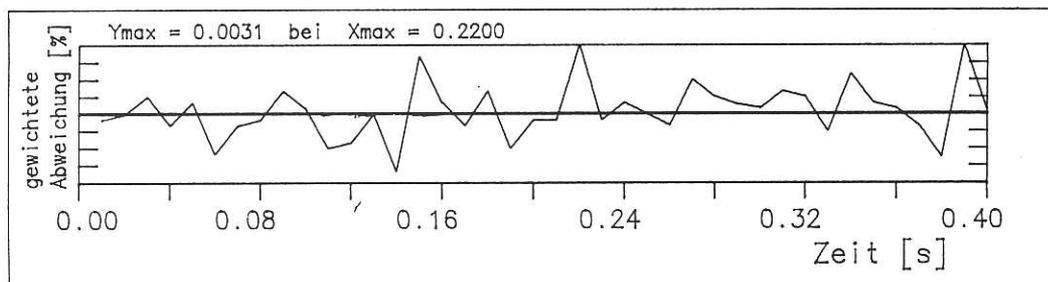
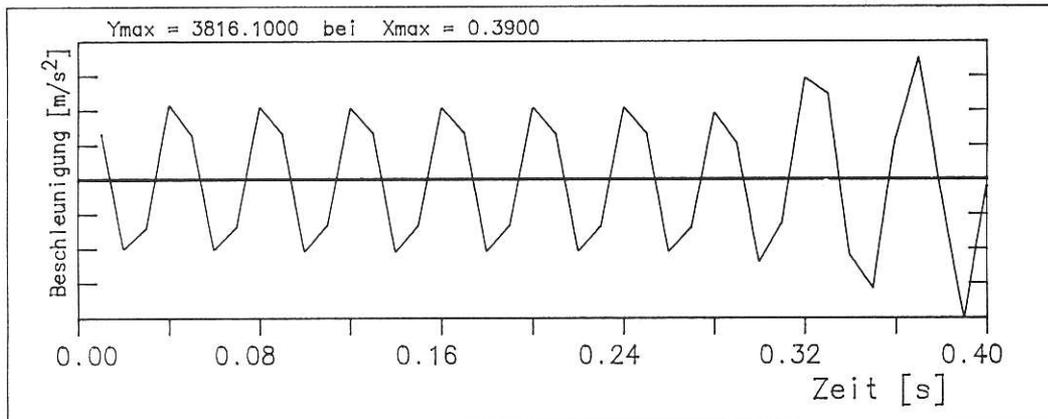


BILD 5.15 Auswertung Knoten 20 bei 10 SIN-Schwingungen
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

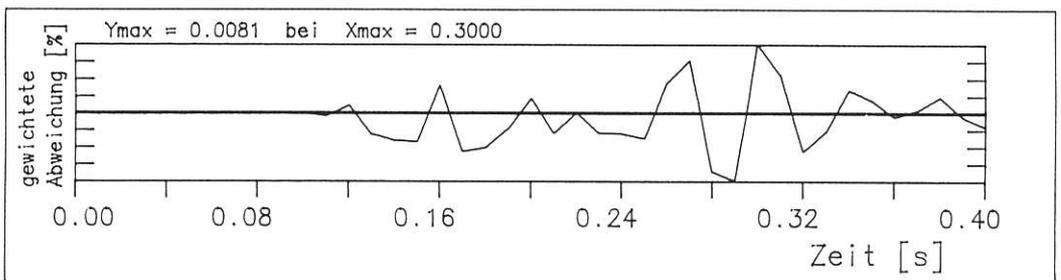
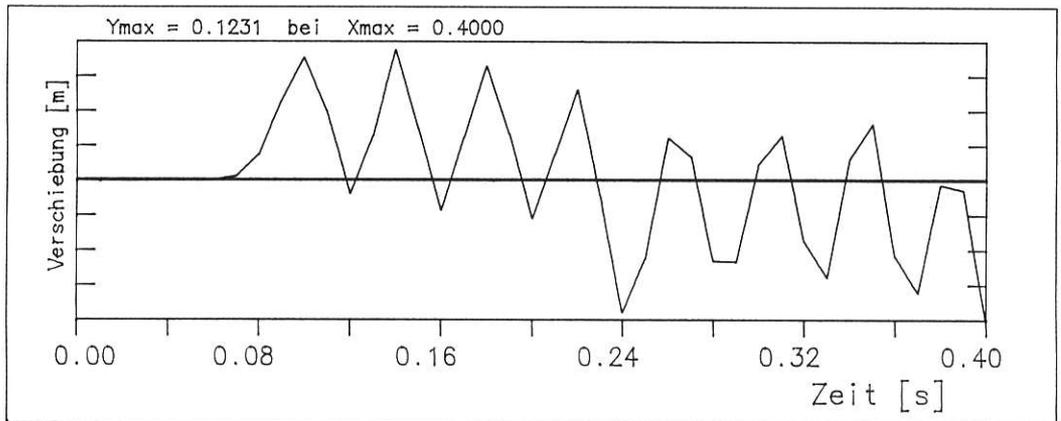
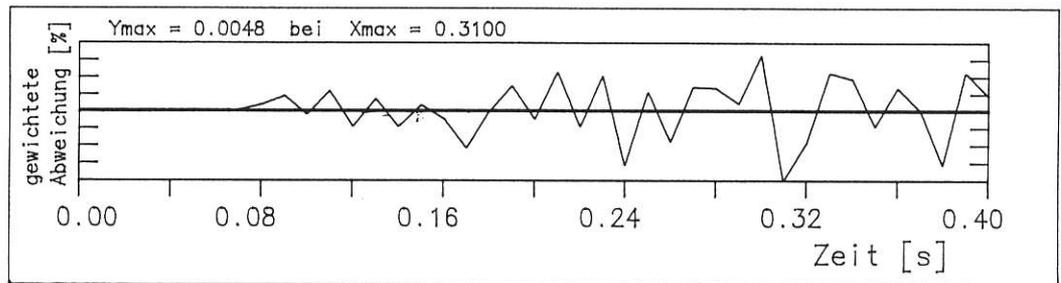
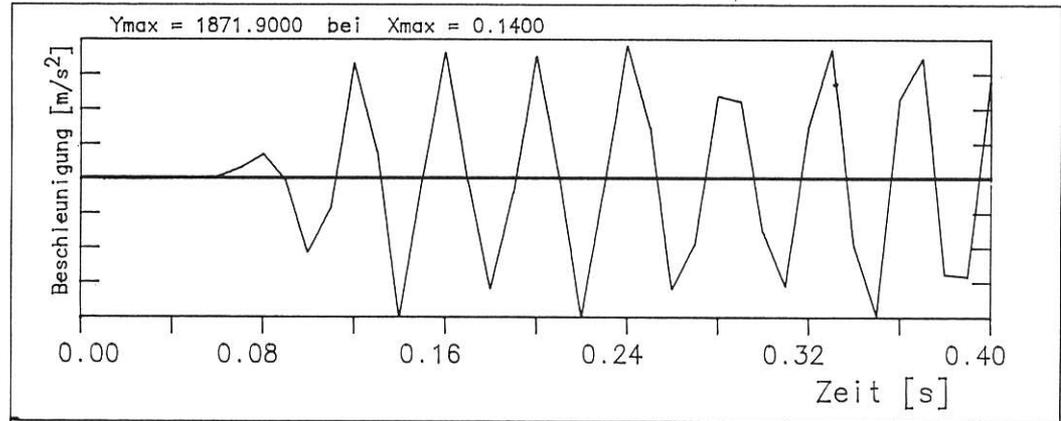


BILD 5.16 Auswertung Knoten 10 bei 10 SIN-Schwingungen (max $t = 0.4$ s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

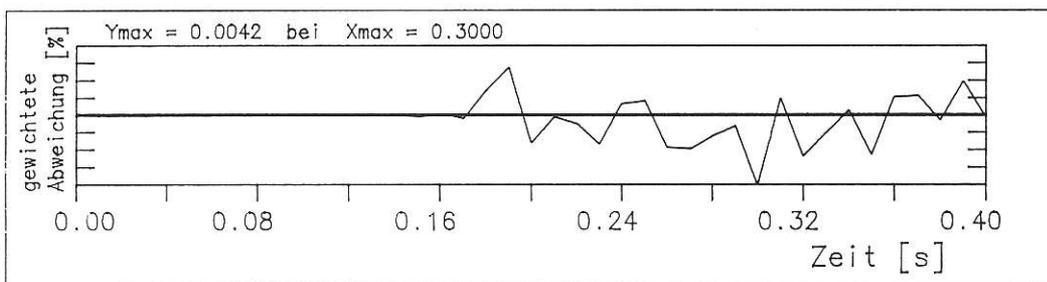
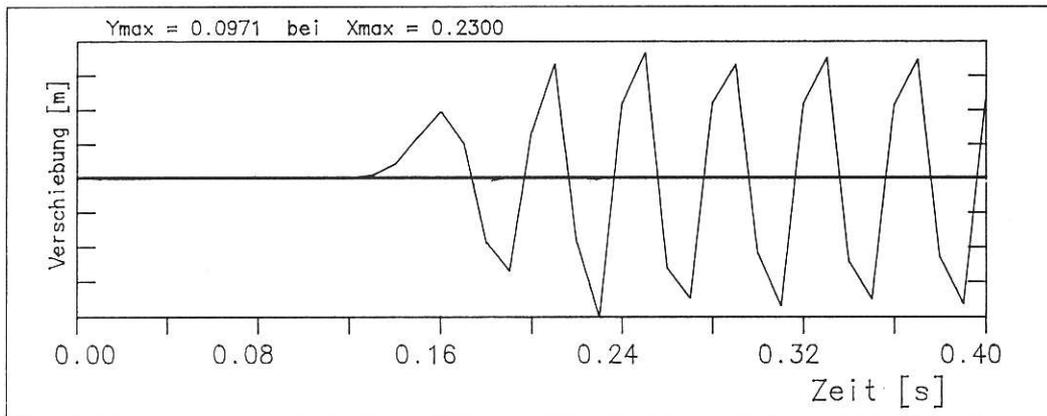
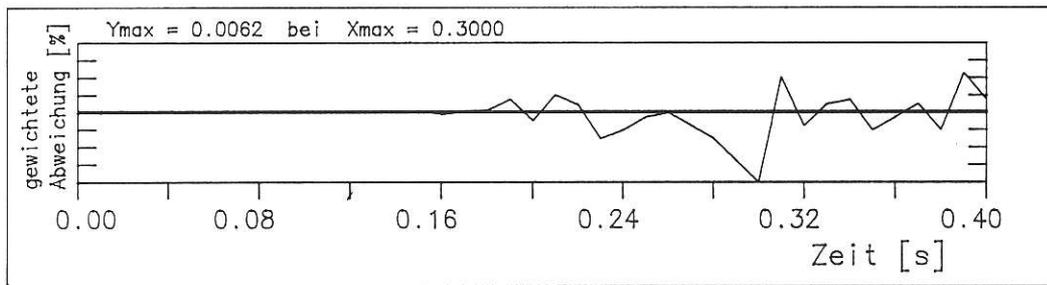
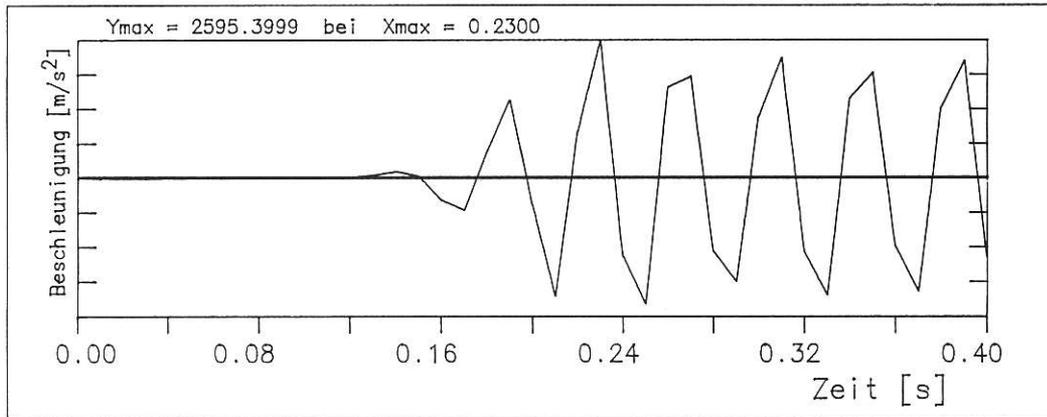


BILD 5.17 Auswertung Knoten 1 bei 10 SIN-Schwingungen (max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

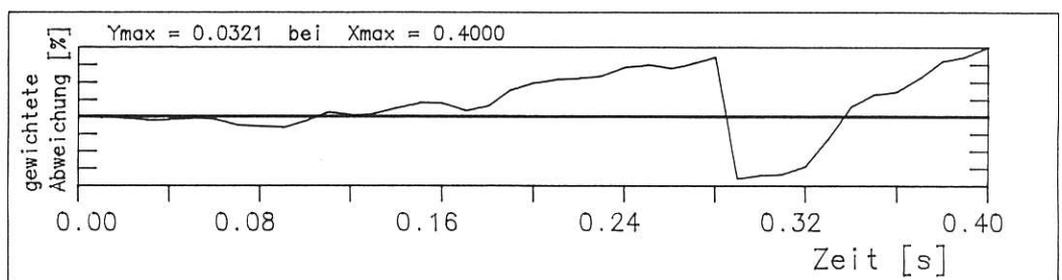
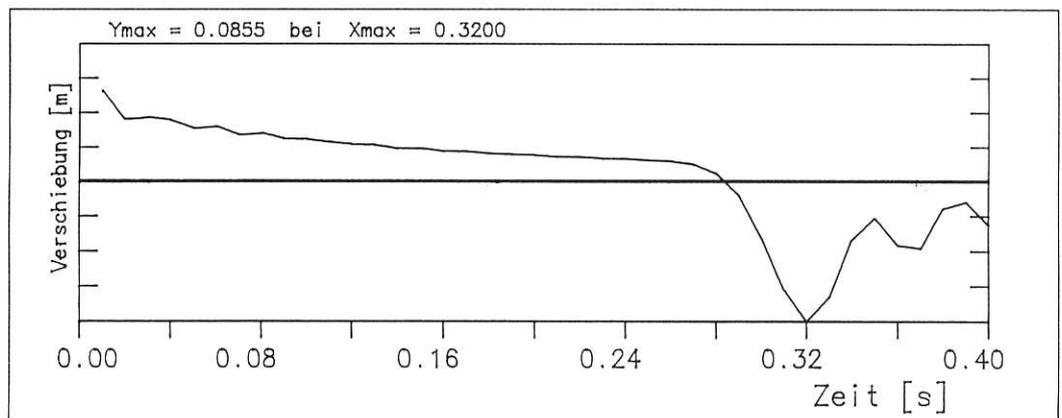
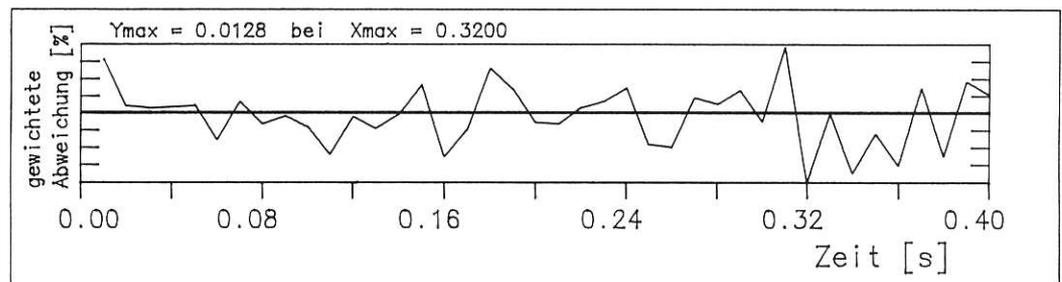
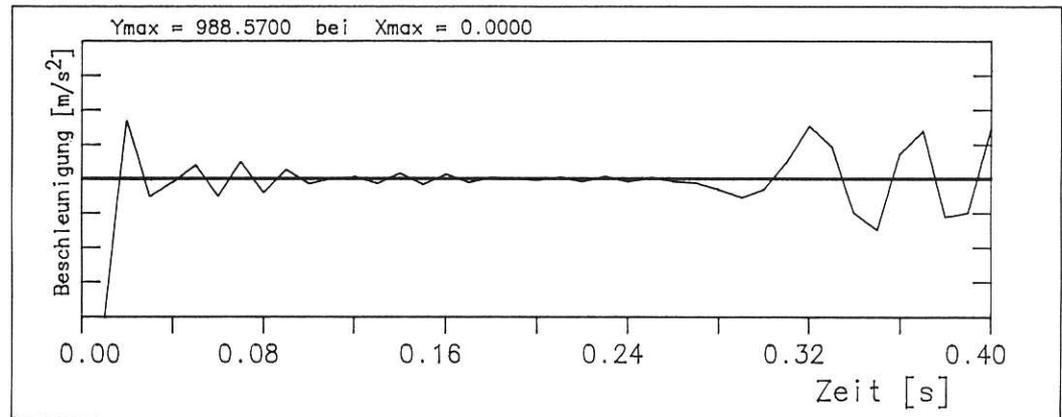


BILD 5.18 Auswertung Knoten 20 bei 20 SIN-Schwingungen
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

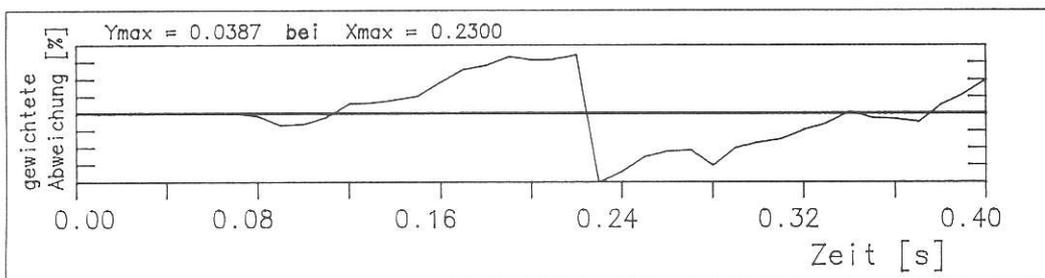
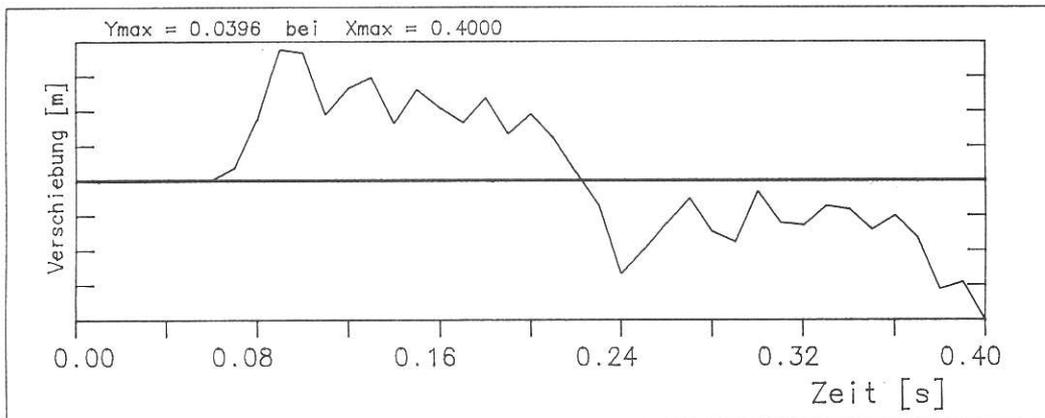
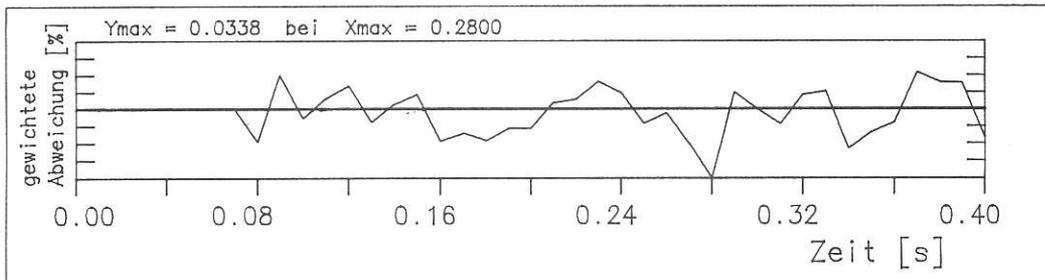
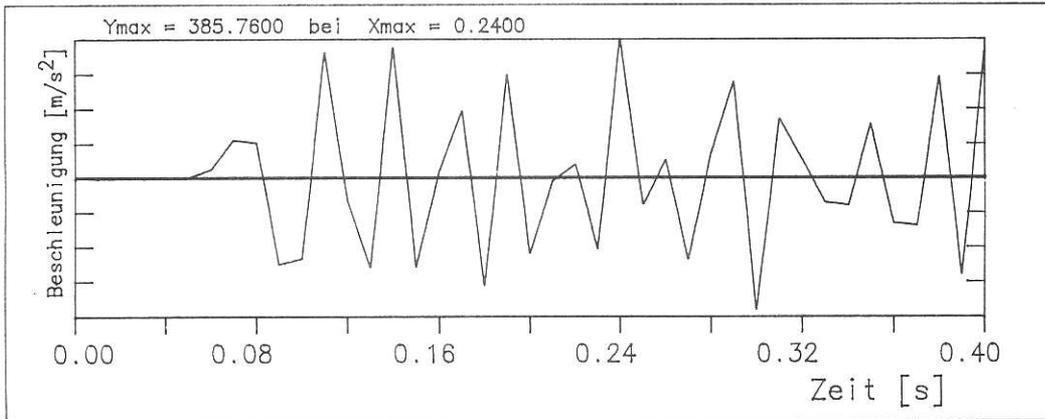


BILD 5.19 Auswertung Knoten 10 bei 20 SIN-Schwingungen
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

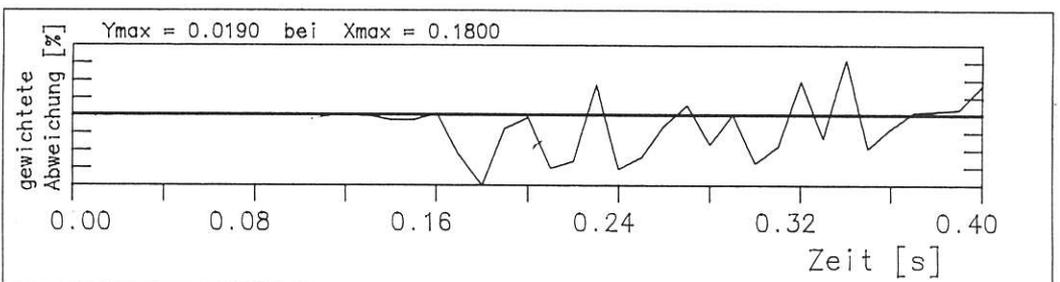
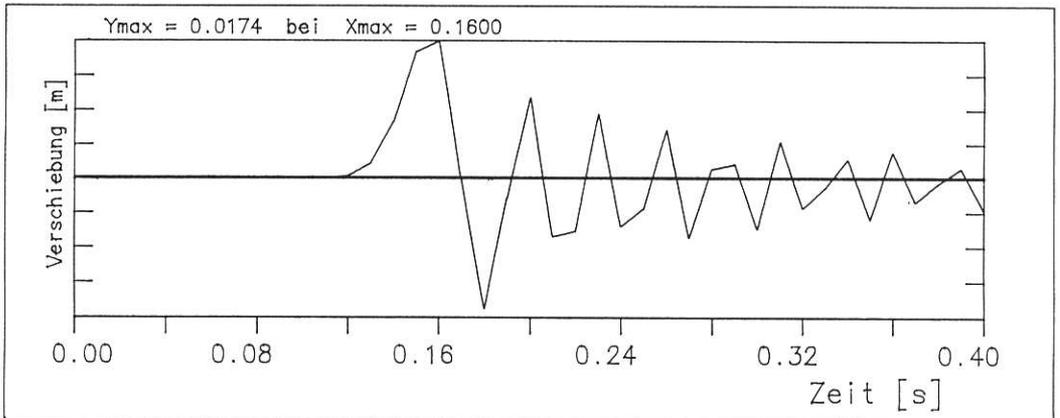
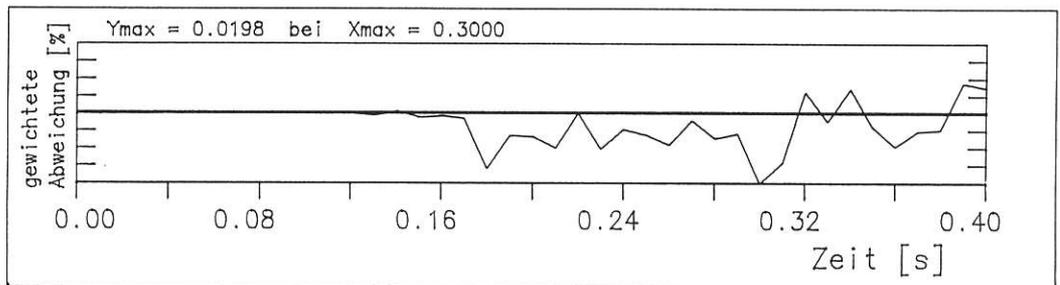
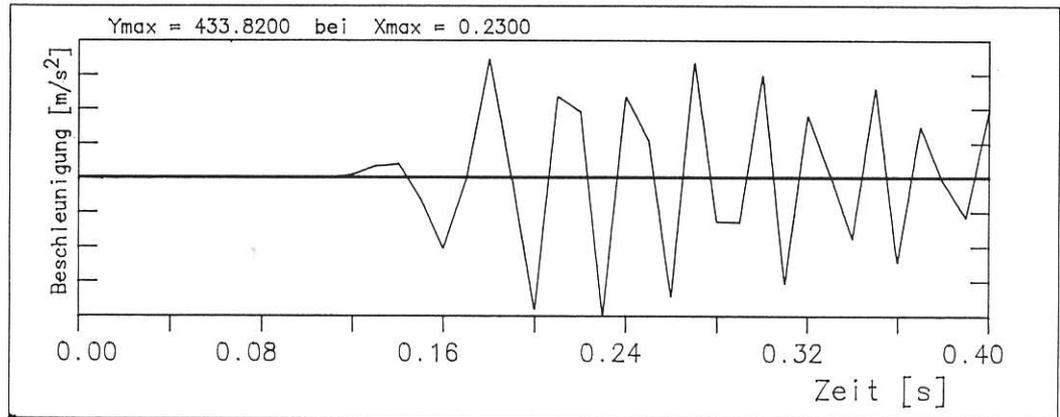


BILD 5.20 Auswertung Knoten 1 bei 20 SIN-Schwingungen (max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

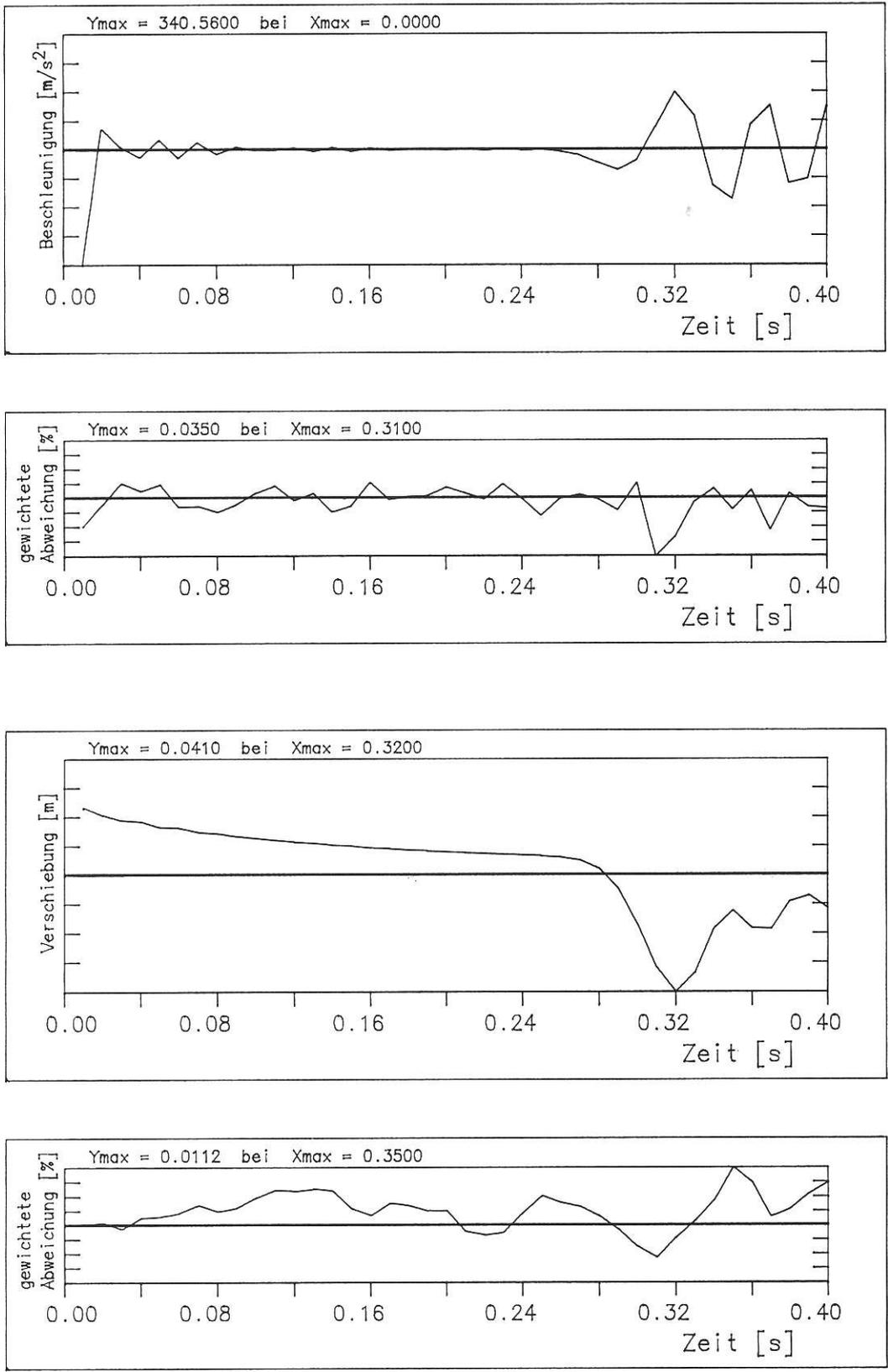


BILD 5.21 Auswertung Knoten 20 bei 40 SIN-Schwingungen (max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

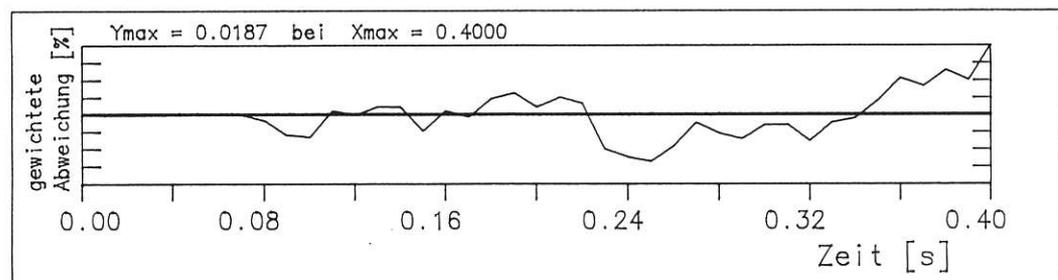
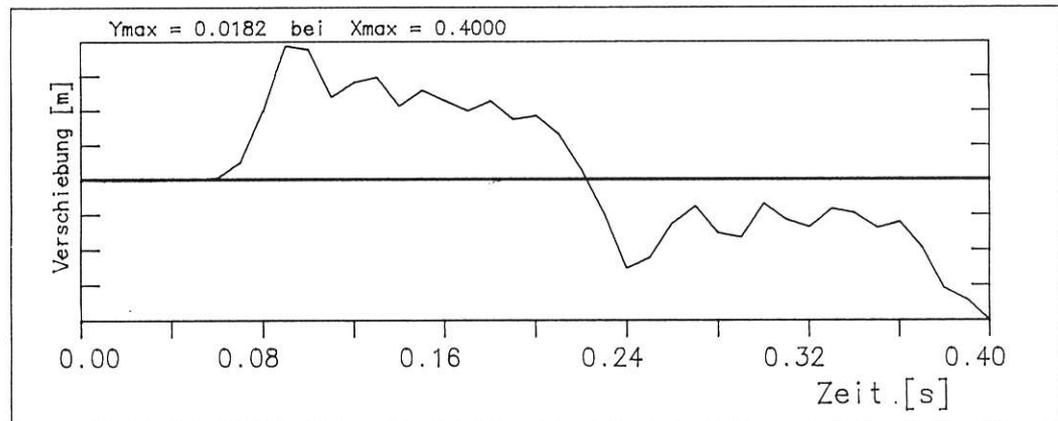
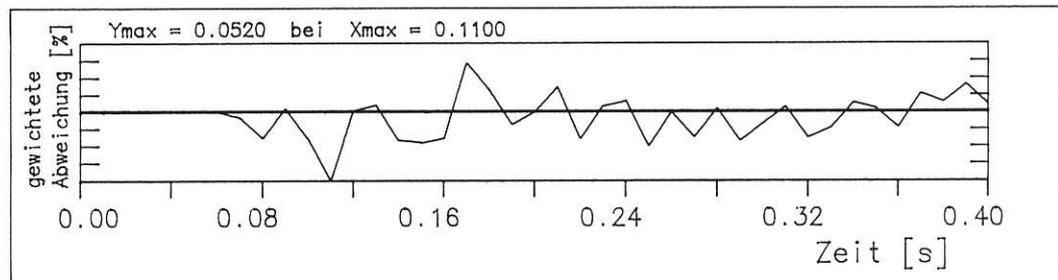
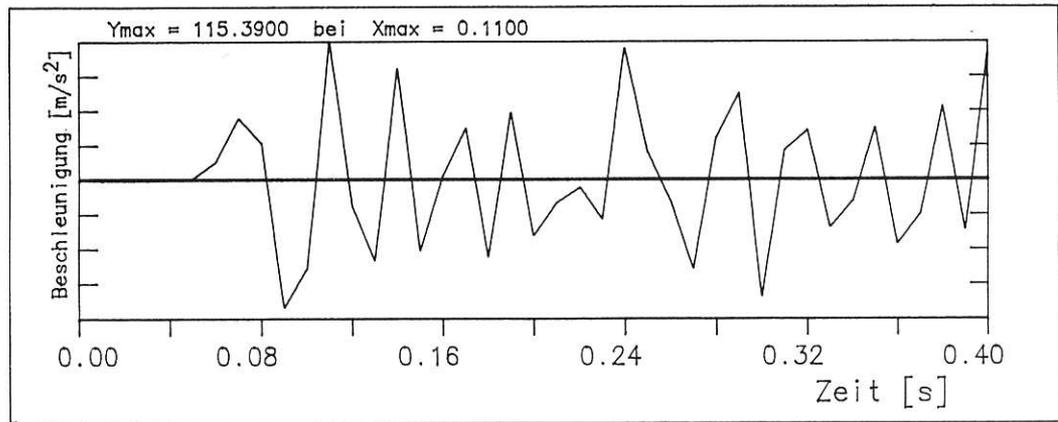


BILD 5.22 Auswertung Knoten 10 bei 40 SIN-Schwingungen (max $t = 0.4$ s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

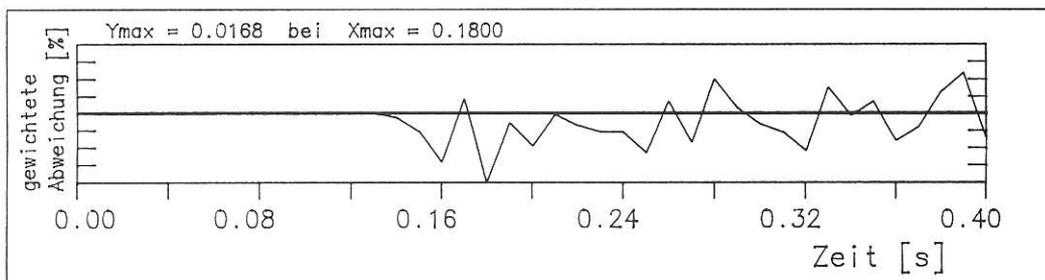
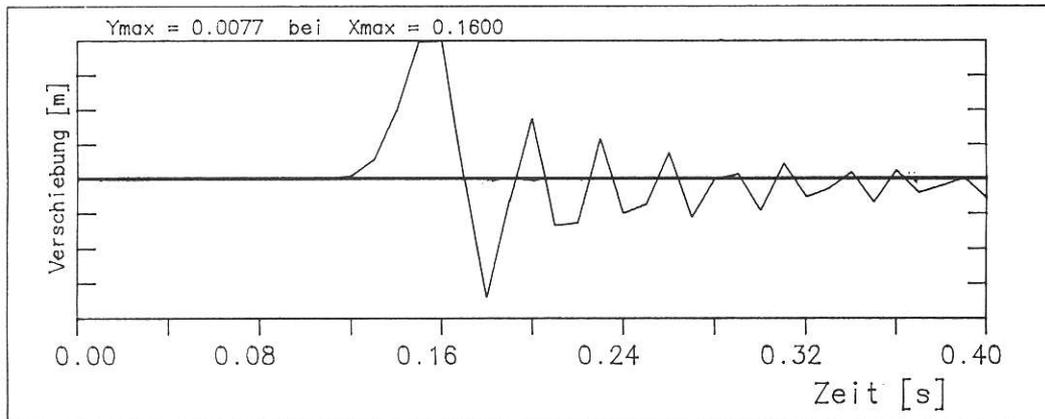
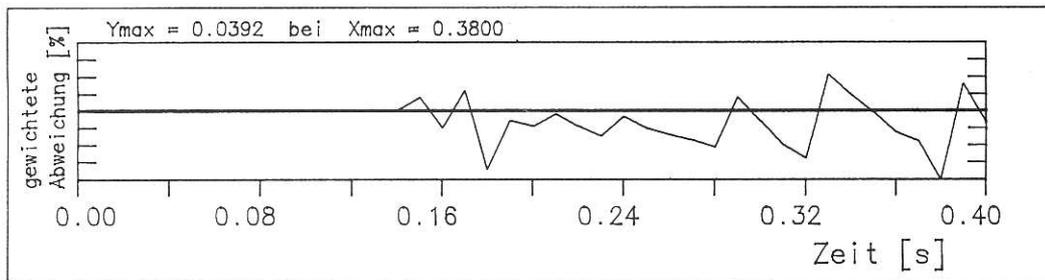
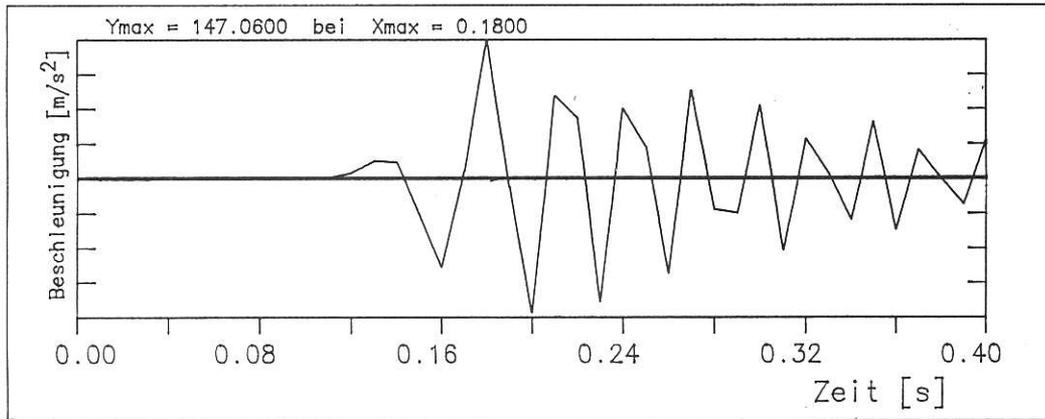


BILD 5.23 Auswertung Knoten 1 bei 40 SIN-Schwingungen
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

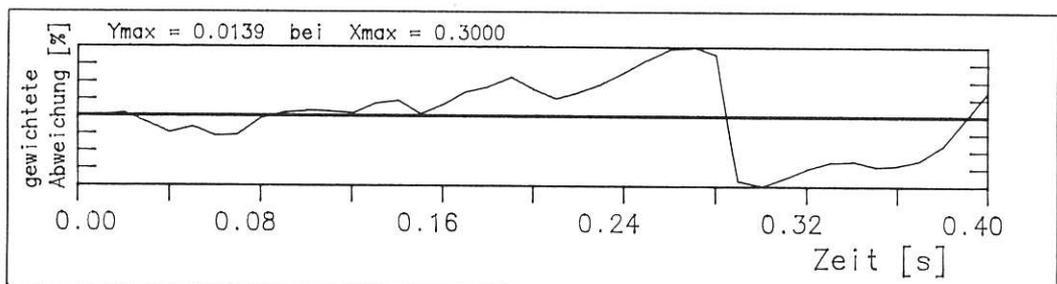
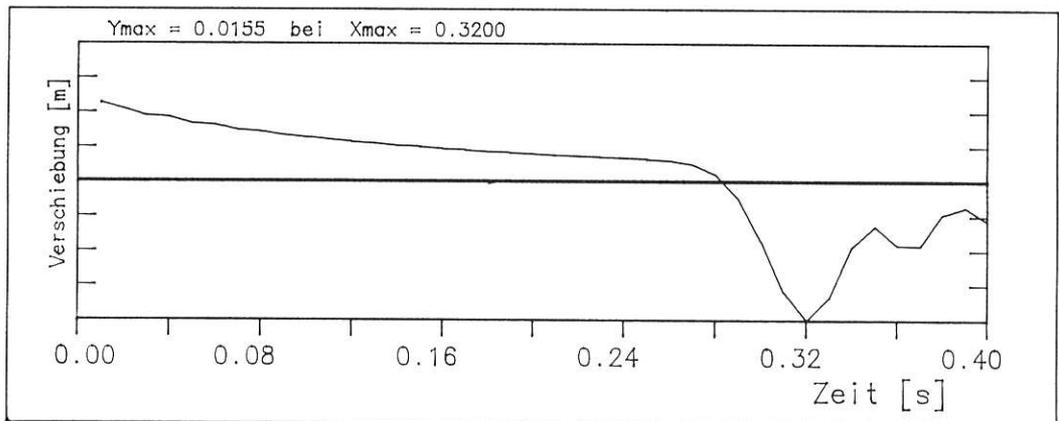
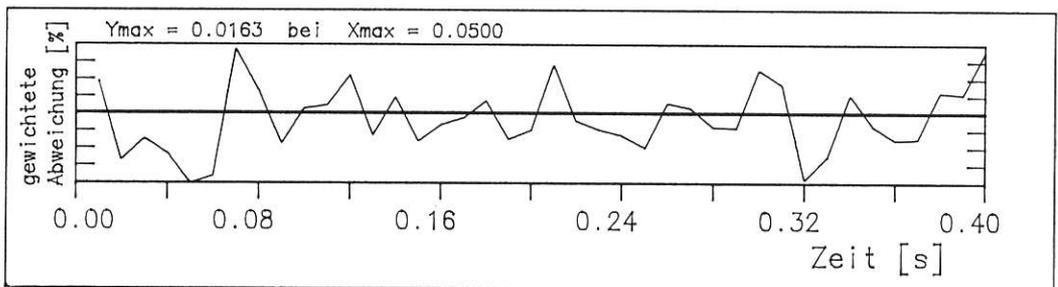
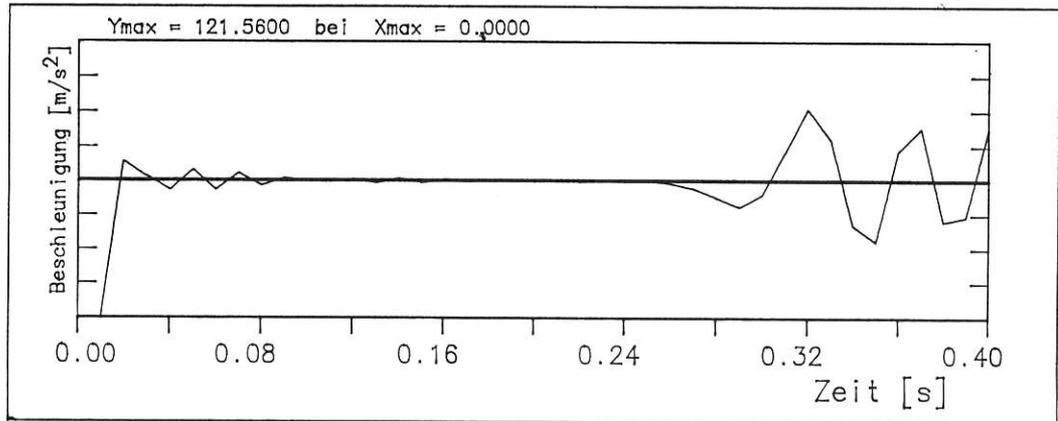


BILD 5.24 Auswertung Knoten 20 bei 100 SIN-Schwingungen (max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

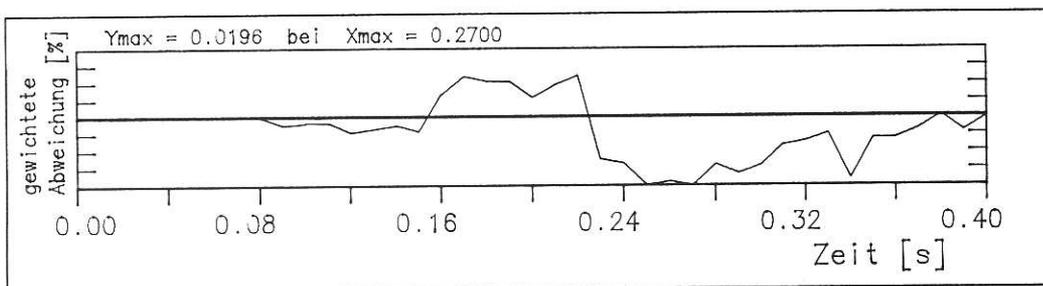
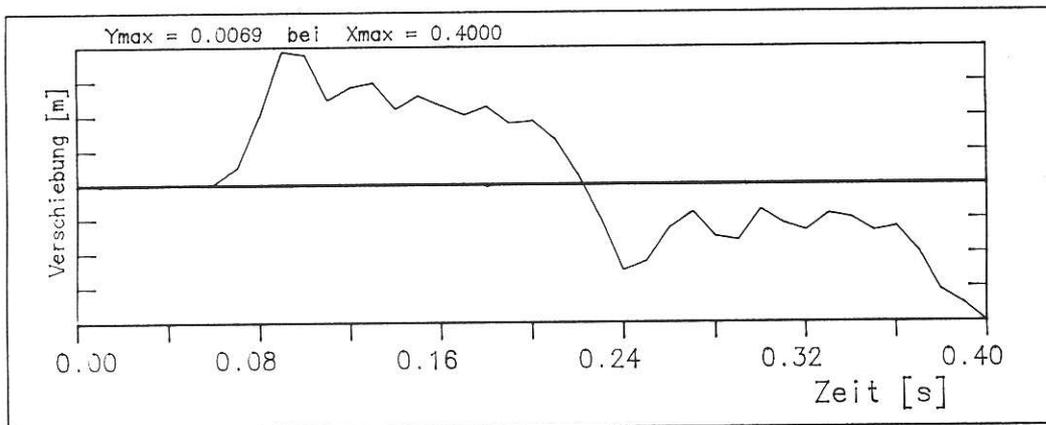
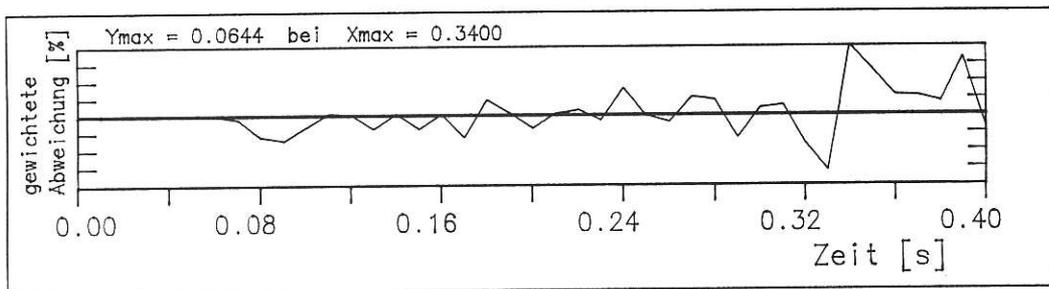
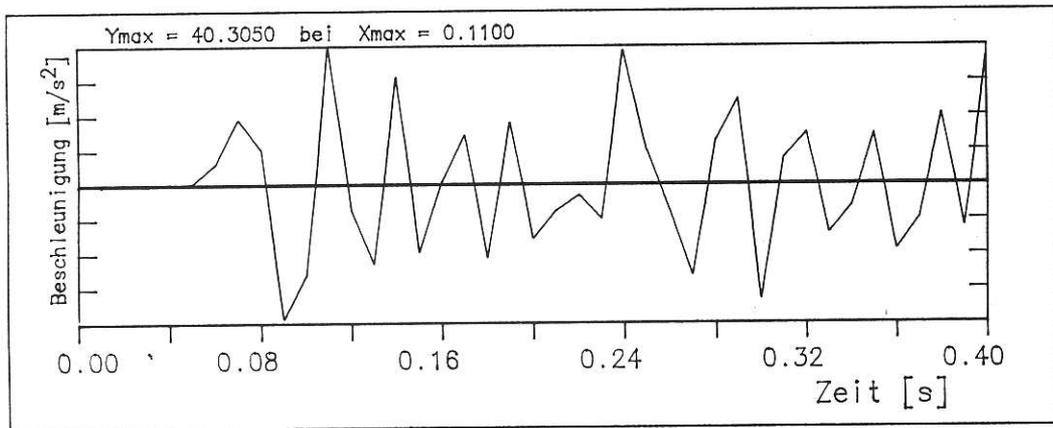


BILD 5.25 Auswertung Knoten 10 bei 100 SIN-Schwingungen
(max t = 0.4 s)

20 DOF SYSTEM MIT LASTANGRIFF BEI KNOTEN 20

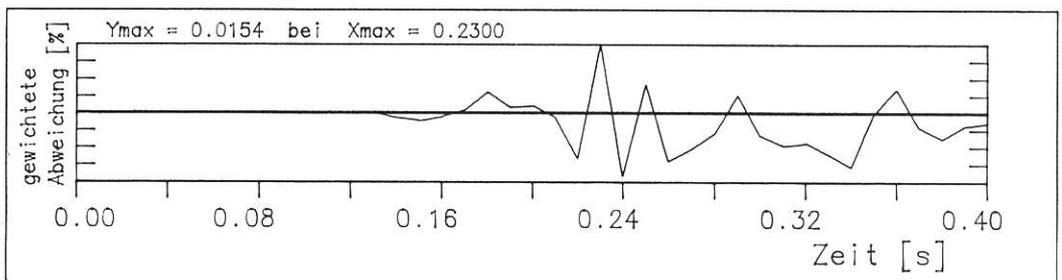
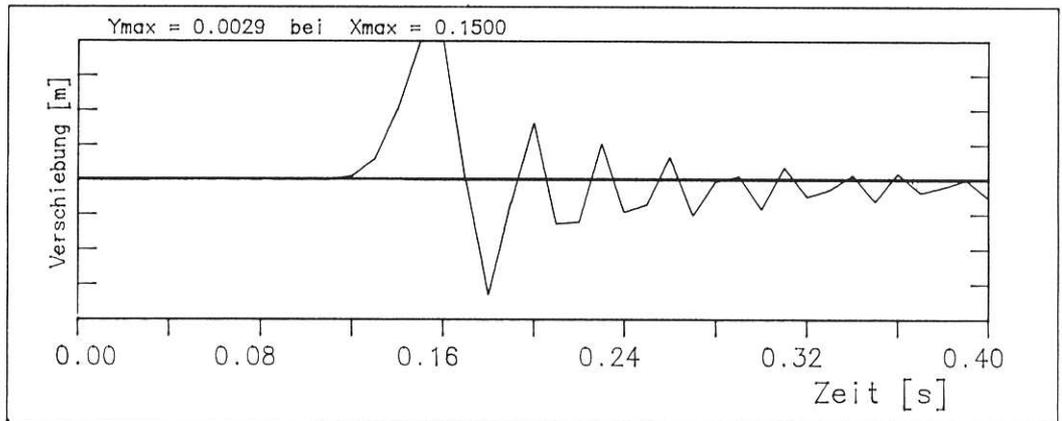
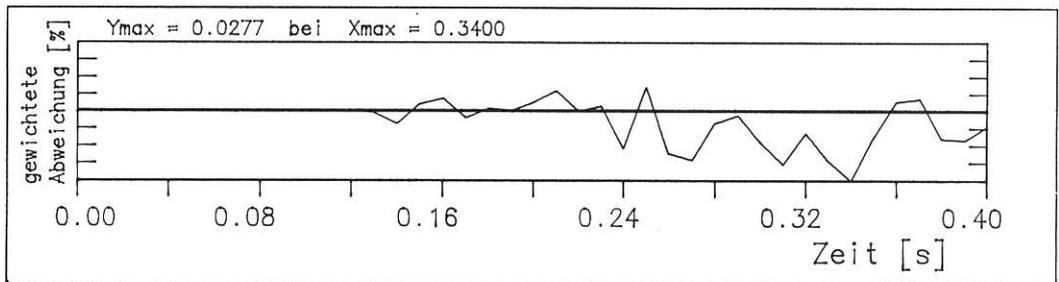
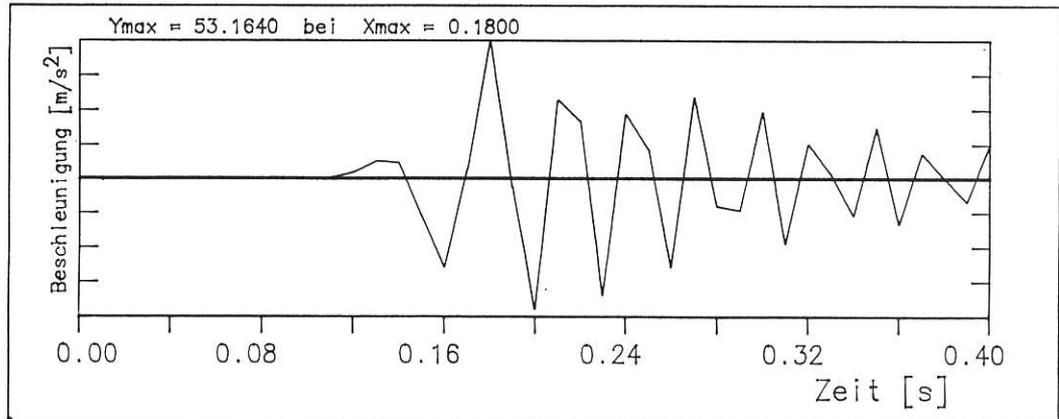


BILD 5.26 Auswertung Knoten 1 bei 100 SIN-Schwingungen (max $t = 0.4$ s)

20 DOF SYSTEM MIT TAFT-ERDBEBEN BEI KNOTEN 1

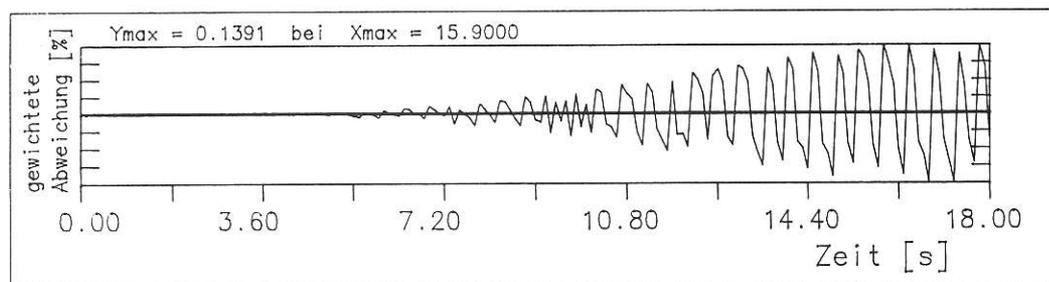
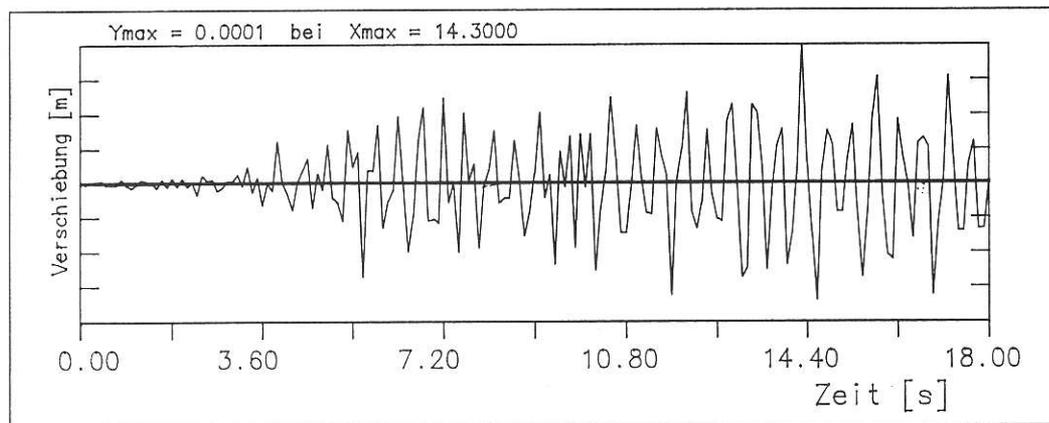
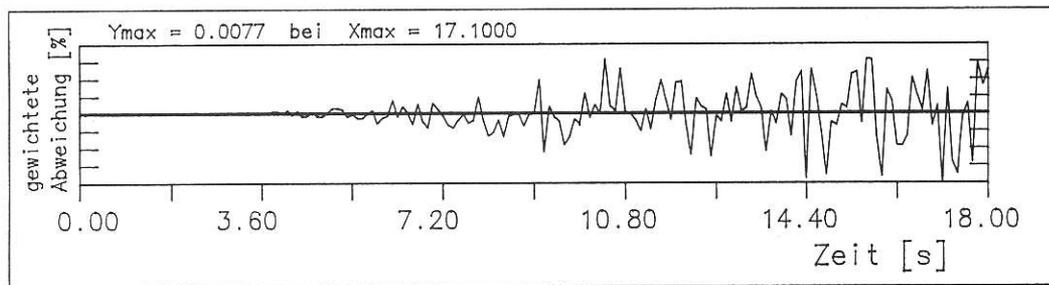
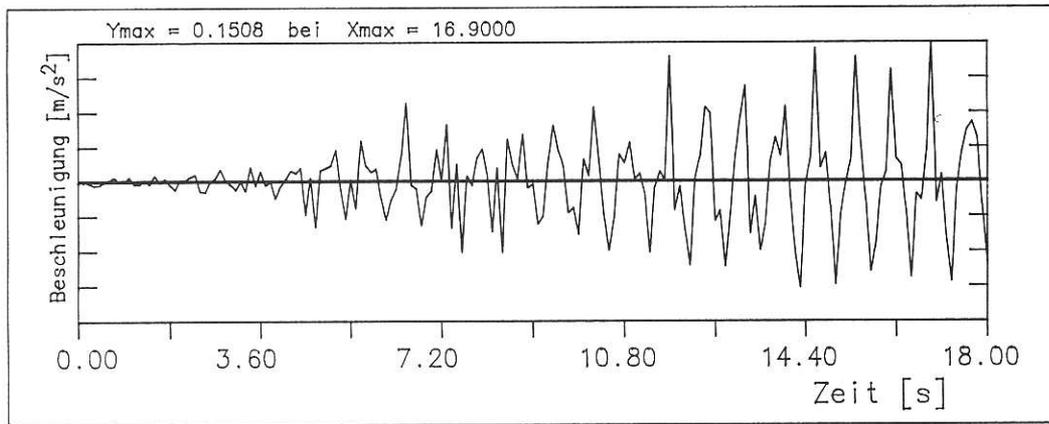


BILD 5.27 Auswertung Knoten 20
(max t = 18.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT TAFT-ERDBEBEN BEI KNOTEN 1

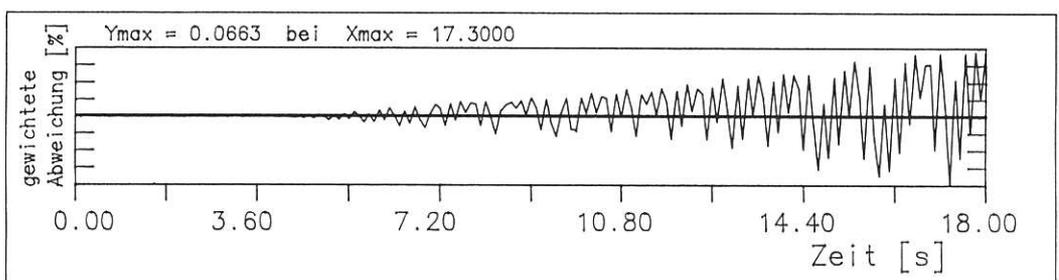
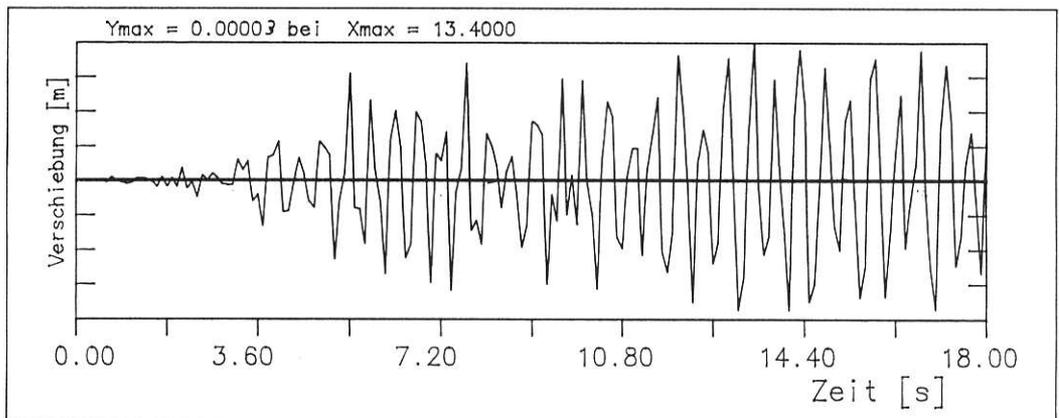
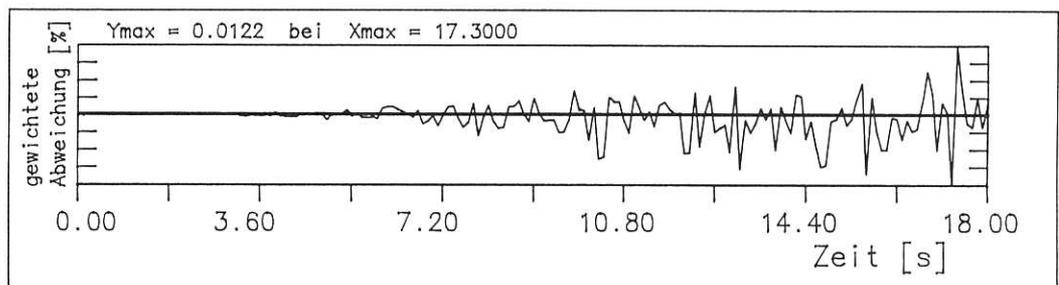
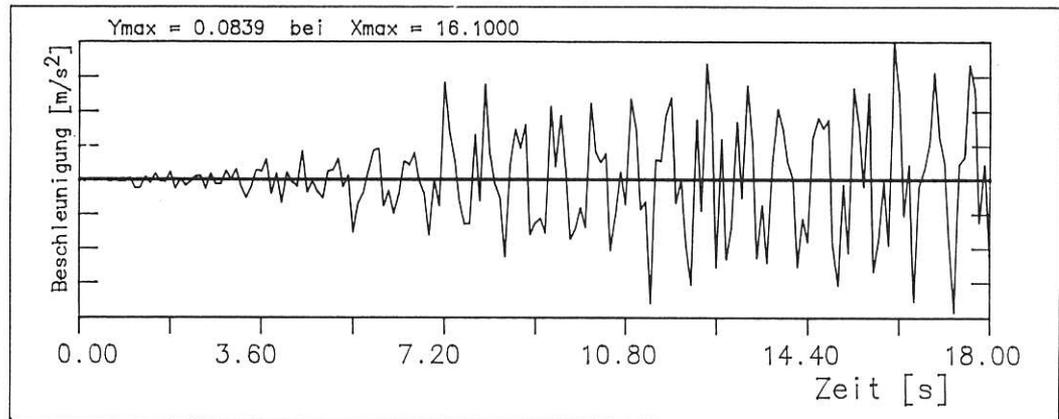


BILD 5.28 Auswertung Knoten 10
(max t = 18.0 s)

20 DOF SYSTEM MIT TAFT-ERDBEBEN BEI KNOTEN 1

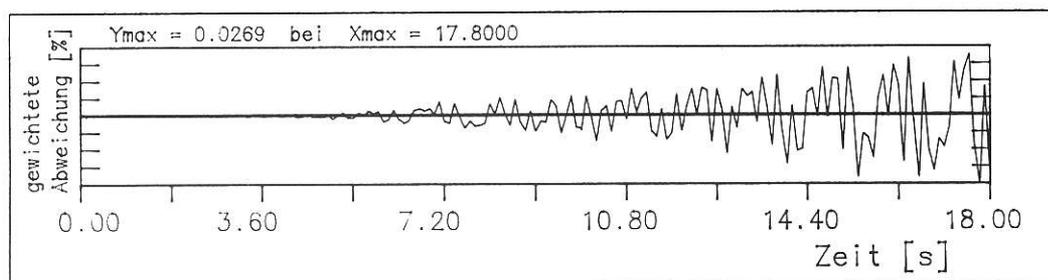
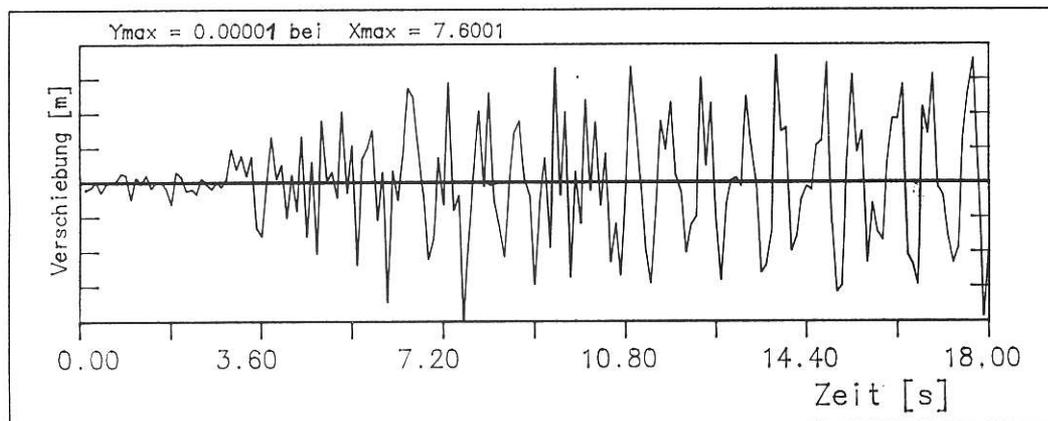
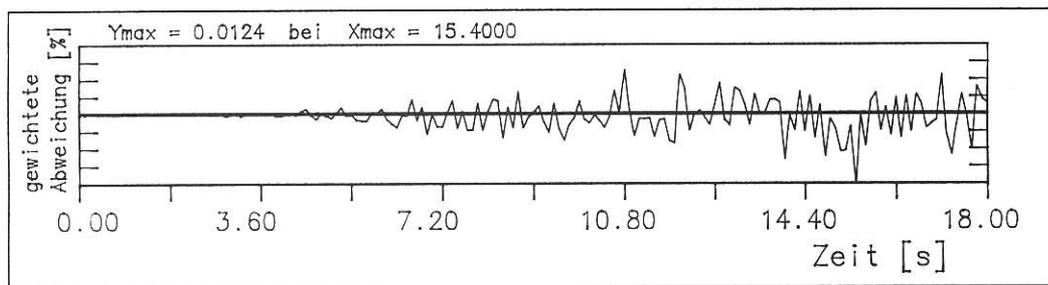
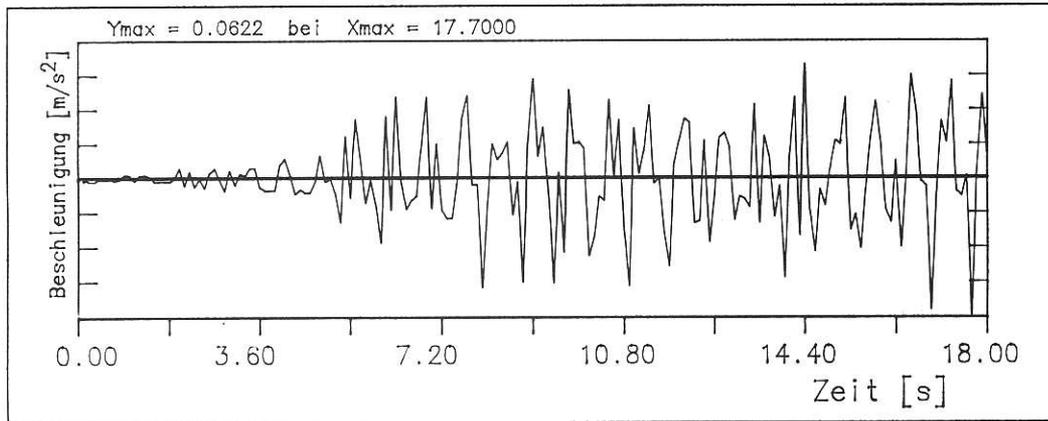


BILD 5.29 Auswertung Knoten 1
(max t = 18.0 s)

6. Zusammenfassung und Abschlußbemerkungen

Bei der Durchführung umfangreicher dynamischer Analysen im Referat 2.01 'Konstruktionstechnische Reaktorsicherheit' (s. z. B. /14/, /16/, /17/, /18/ und /19/) hat die Erfahrung gezeigt, daß bei der Implementierung des Rechenmodells von vornherein eine Vorentscheidung zu treffen war, indem aus Kapazitätsgründen entweder der Schwerpunkt auf die genaue Erfassung der Struktur oder auf den Boden zu legen war. In /13/ ist an aufwendigen Bauwerksmodellen der signifikante Einfluß der Bodenanbindung auf den strukturellen Response gezeigt worden.

Bei der Anwendung üblicherweise zur Verfügung stehender Rechen-codes (z. B. /1/ bzw. /2/) zeigt sich, daß zur komplexen Boden-Bauwerk-Beschreibung besondere - aufwendige - Zusatzmaßnahmen zu treffen sind. Zielsetzung dieser Untersuchung ist es daher, einen vom jeweiligen Programmcode möglichst unabhängigen Operator zu entwickeln, der die Koppelung verschiedener Programmcodes und/oder -teile gestattet und hierbei nur in ausgewiesenen Programmschnittstellen eingreifen muß.

In allgemeiner Betrachtungsweise wird gezeigt, wie das gesamte Boden-Bauwerk-Schwingungssystem an einer beliebigen Nahtstelle durch Einführen einer Zusatzfunktion $\underline{X}(t)$ entkoppelt werden kann. Diese Zusatzfunktion wird schrittweise aus der Forderung bestimmt, daß die Beschleunigung in der Nahtstelle für beide Systeme identisch ist, während Geschwindigkeit und Verschiebung durch numerische Integration ermittelt werden. In aufsteigender Reihenfolge werden mittels spezifischer Definitionen mögliche Vereinfachungen für den Lösungsalgorithmus angegeben. Anschließend wird die Gültigkeit der Beziehungen beispielhaft überprüft.

Dies geschieht in einem ersten Schritt für das (ungedämpfte) 2DOF-System bzw. 1DOF-System, für die zunächst die allgemeinen analytischen Beziehungen für die Lastfälle

- konstante Einzellast
- Rechteckimpuls
- Dreieckimpuls
- beliebige sin-Erregung

sowie die notwendigen Koppelungsbeziehungen angegeben werden. Für den Lastfall 'konstante Einzellast' erfolgt die Gegenüberstellung

der analytischen Gesamtlösung mit der (analytischen) Koppelung. Für die weitere Betrachtung wird die analytische Gesamtlösung unterschiedlicher sin-Erregungen bereitgestellt.

Des Weiteren wird die numerische Verifikation unter Anwendung des Newmark-Verfahrens für alle analytisch aufbereiteten Beispiele vollzogen. Hierbei werden Lösungen gleicher Güte (wie beim analy-

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.1</u>	---	<u>0.1333048</u>	---
Koppelung mit anal. Lösungen	0.1	0.01	0.129074	- 3.2277
	0.1	0.001	0.133270	- 0.0261
	0.1	0.0001	0.133304	- 0.0006
Numerisch	0.11*	0.01	0.130810	
	0.1	0.001	0.133337	0.0241
	0.1	0.0001	0.132986	- 0.2397
Koppelung mit numer. Lösungen	0.11*	0.01	0.130810	
	0.1	0.001	0.133331	0.0196
	0.1	0.0001	0.132679	- 0.4716

Tab. 6. 1
Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 1.
(P=konst. bei Punkt 2)

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.13</u>	---	<u>0.103396</u>	---
Analytisch mit numer. Integration	0.13	0.01	0.103759	0.3510
	0.13	0.001	0.103400	0.0038
	0.13	0.0001	0.103396	0.
Numerisch	0.13	0.01	0.103039	- 0.3464
	0.13	0.001	0.103410	0.0135
	0.13	0.0001	0.103203	0.1870
Koppelung mit numer. Lösungen	0.13	0.01	0.103038	- 0.3474
	0.13	0.001	0.103406	0.0096
	0.13	0.0001	0.103343	- 0.0512

Tab. 6.2
Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 2
(1-sin-Erregung bei Punkt 2)

tischen Verfahren) erzielt. Eine übersichtliche Zusammenstellung für die einzelnen Beispiele wird in den Tab. 6.1 - 6.6 vorgenommen. Hierbei erfolgt die Berechnung der Abweichungen für den Maximalausschlag jeweils in Bezug auf den 'exakten' analytischen Wert. Bei einem Vergleich der reinen numerischen Lösungen (gesamt bzw. gekoppelt) zeigt sich, daß auf numerischem Wege prinzipiell gleichwertige Lösungen erhalten werden.

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.07</u>	---	<u>0.018473</u>	---
	<u>0.13</u>	---	- <u>0.018597</u>	---
Numerisch	0.07	0.001	0.018430	- 0.2333
	0.13	0.001	- 0.018558	- 0.2101
Koppelung mit numer. Lösungen	0.07	0.001	0.018429	- 0.2387
	0.13	0.001	0.018559	- 0.2047

Tab. 6.3

Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 3
(10-sin-Erregung bei Punkt 2)

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.07</u>	---	<u>0.008782</u>	---
	<u>0.13</u>	---	- <u>0.008852</u>	---
Numerisch	0.07	0.001	0.008707	- 0.8613
	0.07	0.0005	0.008762	- 0.2282
	0.13	0.001	- 0.008778	- 0.8430
	0.13	0.0005	- 0.008833	- 0.2151
Koppelung mit numer. Lösungen	0.07	0.001	0.008706	- 0.8729
	0.07	0.0005	0.008764	- 0.2053
	0.13	0.001	- 0.008778	- 0.8430
	0.13	0.0005	- 0.008834	- 0.2037

Tab. 6.4

Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 4
(20-sin-Erregung bei Punkt 2)

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.07</u>	---	<u>0.004318</u>	---
	<u>0.13</u>	---	- <u>0.004354</u>	---
Numerisch	0.07	0.0005	0.004282	- 0.8407
	0.13	0.0005	- 0.004318	- 0.8337
Koppelung mit numer. Lösungen	0.07	0.0005	0.004282	- 0.8407
	0.13	0.0005	- 0.004318	- 0.8337

Tab. 6.5

Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 5
(40-sin-Erregung bei Punkt 2)

Lösung	t [s]	Δt [s]	u_1 (max)	Abweichung [%]
<u>Exakt</u>	<u>0.07</u>	---	<u>0.001719</u>	---
	<u>0.13</u>	---	- <u>0.001734</u>	---
Numerisch	0.07	0.0005	0.001630	- 5.4601
	0.13	0.0005	- 0.001644	- 5.4744
Koppelung mit numer. Lösungen	0.07	0.0005	0.001630	- 5.4601
	0.13	0.0005	- 0.001644	- 5.4744

Tab. 6.6

Zusammenstellung der Ergebnisse für Beispiel 6
(100-sin-Erregung bei Punkt 2)

Darüber hinaus wird die Verifikation des Koppelungsprinzips numerisch am 20 DOF-System realisiert, und zwar für die gleichartigen o. g. Beispiele sowie für die TAFT-Erdbebenerregung als Sonderbeispiel. Hierbei erfolgt der Vergleich zwischen der (numerisch) geschlossenen bzw. gekoppelten Lösung aus den geplotteten Funktionen für Beschleunigung und Verschiebung sowie durch Ausgabe der gewichteten prozentualen Abweichungen in Bezug auf die Gesamtlösung. Es zeigt sich für alle Beispiele (bei Lastschritten < 10000) prinzipiell identisches Schwingungsverhalten; erst bei wesentlicher Erhöhung der Zahl der Lastschritte scheint sich in Teilbereichen eine numerische Dämpfung für die durch die Integration erhaltenen Verschiebungen (s. z. B. Bilder 5.9 - 5.11) einzustellen.

Es ist beabsichtigt, diesen Operator für weitere Untersuchungen z. B. in /1/ zu implementieren und hierbei im Hinblick auf die genannte numerische Dämpfung zusätzliche Optimierungen mittels gewichteten Energievergleichs bei der Herstellung kompatibler Zustände für die Bestimmung der Zusatzfunktion vorzunehmen.

7. Dank

Dieser Bericht ist mit dem Textverarbeitungssystem 'WPS-PLUS' geschrieben worden, das jetzt im BAM-Rechenzentrum für das VAX-Cluster - bestehend aus den 3 Anlagen VAX 11/750, VAX 86/8600 und VAX 6300 - verfügbar implementiert wurde. An dieser Stelle sei Herrn K. Grunert für die exzellente Einführung einschließlich aller stets geduldigen Zusatzhinweise gedankt. Last not least gilt der Dank auch Frau I. Rybczynski, die den Gesamtbericht - mit häufig komplizierten Formelpassagen - vorzüglich lesbar umgesetzt hat.

Literaturverzeichnis

- / 1/ ADINA - A finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis
Report 82448-1, MIT, 1976
Report AE 81-1, 1981
Report AE 83-4, 1983
Report AE 83-5, 1983
Report AE 84-1, 1984
- / 2/ ASHSD2 - Dynamic stress analysis of axisymmetric structures under arbitrary loading
Report 69-10, University of California, 1975 (rev.)
- / 3/ K. J. Bathe and E. L. Wilson
Numerical Methods in Finite Element Analysis
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976
- / 4/ F. P. Müller, E. Keintzel
Erdbebensicherung von Hochbauten
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1978
- / 5/ J. M. Biggs
Introduction to Structural Dynamics
McGraw-Hill Book Company, 1964
- / 6/ W. Matthees
Zur Lösung bodendynamischer Probleme bei nichtlinearem Werkstoffverhalten durch Transformation
Amts- und Mitteilungsblatt BAM 11, 1981
- / 7/ J. P. Wolf
Dynamic Soil-Structure Interaction
Prentice-Hall, Inc., 1985
- / 8/ J. P. Wolf
Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain
Prentice-Hall, Inc., 1988
- / 9/ H. Werkle
Ein Randelement zur dynamischen Finite-Element-Berechnung dreidimensionaler Baugrundmodelle
TH Karlsruhe, Dissertation, 1981
- /10/ C. A. Brebbia
The Boundary Element Method for Engineers
Pentech Press, 1978
- /11/ W. Matthees, G. Magiera
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
BAM-Forschungsbericht 71, 1980
- /12/ M. Dogunke, F. Buchhardt
Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben
BAM-Forschungsbericht 138, 1987

- /13/ F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera, F. Mathiak
Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdbebens auf
die Bemessung von Kernkraftwerken
BAM-Forschungsbericht 141, 1987
- /14/ F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber,
J. Altes
Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrations-
verhalten des AVR-Reaktorgebäudes
BAM-Forschungsbericht 144, 1987
- /15/ W. Matthees
Entwicklung eines Makroelementes durch Kondensation am
Beispiel der Lastfälle Flugzeugabsturz und Erdbeben bei
Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit biegeweichen Fundamen-
ten
BAM-Forschungsbericht 160, 1989
- /16/ F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber
Sensitivity of Nuclear Power Plant Structural Response
to Aircraft Impact
Proc. of the Conference on Structural Analysis and
Design of Nuclear Power Plants, Porto Alegre, 1984
- /17/ F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber
Untersuchungen zum Tragverhalten eines Kernkraftwerkes
für den Lastfall Flugzeugabsturz
Amts- und Mitteilungsblatt BAM 14, 1984
- /18/ F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber
Interaction between Material Nonlinearity and Damping
for Aircraft Impact Analysis
SMiRT-8, Brüssel, 1985
- /19/ W. Matthees, F. Buchhardt, G. Magiera
A Three-Dimensional Soil-Structure Lumped Parameter
Analysis for Earthquake Events
SMiRT-8, Brüssel,
1985

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

- Nr. 1/1968
Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft
- Nr. 2/1970 (vergriffen)
G. Andreae
Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebern
- Nr. 3/1970
J. Ziebs
Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile
- Nr. 4/1970 (vergriffen)
A. Burmester
Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit – Grundlagen und Vergütungsverfahren
- Nr. 5/1971
N. Steiner
Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken
- Nr. 6/1971
P. Schneider
Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen
- Nr. 7/1971
H.-J. Petrowitz
Chromatographie und chemische Konstitution – Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie
- Nr. 8/1971
H. Veith
Zum Spannungs-Drehungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung
- Nr. 9/1971
K.-H. Möller
Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen
- Nr. 10/1972
D. Aurich, E. Martin
Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode
- Nr. 11/1972
H.-J. Krause
Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden
- Nr. 12/1972
H. Feuerberg
Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren
- Nr. 13/1972
K.-H. Habig, K. Kirschke, W.-W. Maennig, H. Tischer
Festkörperlagerung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr
- Nr. 14/1972
E. Fischer
Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
- Nr. 15/1972
H. Pohl
Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse
- Nr. 16/1972
E. Knublauch
Über Ausführung und Assagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
- Nr. 17/1972
P. Reimers
Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen
- Nr. 18/1973
W. Struck
Das Spröbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
- Nr. 19/1973
K. Kaffanke, H. Czichos
- Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen**
- Nr. 20/1973
R. Rudolphi
Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden
- Nr. 21/1973
D. Klaffke, W. Maennig
Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung
- Nr. 22/1973
R. Rudolphi, E. Knublauch
Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
- Nr. 23/1973
W. Ruske
Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen
- Nr. 24/1973
J. Stanke, E. Klement, R. Rudolphi
Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung
- Nr. 25/1973
E. Knublauch
Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
- Nr. 26/1974
P. Jost, P. Reimers, P. Weise
Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM – Eigenschaften und erste Anwendungen
- Nr. 27/1974
H. Wüstenberg
Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall
- Nr. 28/1974
H. Heinrich
Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern
- Nr. 29/1974
P. Schneider
Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem idealisotropen porösen Material mit starrem Skelet für senkrechten, schrägen und allseitigen Schallfall
- Nr. 30/1974 (vergriffen)
H. Czichos, G. Salomon
The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology
- Nr. 31/1975
G. Fuhrmann
Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung
- Nr. 32/1975
R. Rudolphi, B. Böttcher
Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen
- Nr. 33/1975
A. Wagner, G. Kieper, R. Rudolphi
Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens
- Nr. 34/1976 (vergriffen)
H.-J. Deppe
Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoff Nr. 35/1976
- E. Limberger
Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper – Vorschlag für ein Prüfverfahren –
- Nr. 36/1976 (vergriffen)
J. Hundt
Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles
- Nr. 37/1976
W. Struck
Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen – Vorschlag für ein Prüfverfahren –
- Nr. 38/1976
K.-H. Habig
Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionisiertem Stahl 42 CrMo 4
- Nr. 39/1976
K. Kirschke, G. Kempf
Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit nicht-Newton'schem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Scherbeanspruchung
- Nr. 40/1976
H. Hantsche
Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren
- Nr. 41/1976
B. Böttcher
Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten
- Nr. 42/1976
S. Dieltlen
Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft
- Nr. 43/1976
W. Struck
Das Spröbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches
- Nr. 44/1976
W. Matthees
Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms „Stab-Werk“
- Nr. 45/1976
W. Paatsch
Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten
- Nr. 46/1977 (vergriffen)
G. Schickert, H. Winkler
Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung
Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses
- Nr. 47/1977
A. Plank
Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
- Nr. 48/1977
U. Holzlhöner
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
- Nr. 49/1977
G. Wittig
Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
- Nr. 50/1978 (vergriffen)
N. Czaika, N. Mayer, C. Amberg, G. Magiera, G. Andreae, W. Markowski
Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und -überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
- Nr. 51/1978
J. Sickfeld
Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
- Nr. 52/1978
A. Tomov
Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
- Nr. 53/1978
R.-G. Rohrman, R. Rudolphi
Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
- Nr. 54/1978
H. Sander
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
- Nr. 55/1978
D. Klaffke
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
- Nr. 56/1979
W. Brünner, C. Langlie
Stabilität von Sandwichbauteilenn
- Nr. 57/1979
M. Stadthaus
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpul-

- verprüfung**
Investigations on Inspection-Media for Magnetic-Particle-Testing
 Nr. 58/1979
 W. Struck
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
- Nr. 59/1979
 G. Plauk
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
- Nr. 60/1979
 H. Spreckelmeyer, R. Helms, J. Ziebs
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
- Nr. 61/1979
 K. Richter
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmetrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
- Nr. 62/1979
 W. Gerisch, G. Becker
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
- Nr. 63/1979
 E. Behrend, J. Ludwig
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
- Nr. 64/1980
 W. Rücker
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
- Nr. 65/1980
 P. Schmidt, D. Aurich, R. Helms, H. Veith, J. Ziebs
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
- Nr. 66/1980
 M. Hattwig
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
- Nr. 67/1980
 W. Matthees
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
- Nr. 68/1980
 D. Petersohn
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik. Entwicklung eines volleuzentrischen Präzisions-Goniometers
- Nr. 69/1980
 F. Buchhardt, P. Brandl
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitschillen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
- Nr. 70/1980 (vergriffen)
 G. Schickert
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
- Nr. 71/1980
 W. Matthees, G. Magiera
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
- Nr. 72/1980
 R. Rudolphi
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
- Nr. 73/1980
 P. Wegener
Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
- Nr. 74/1980
 R. Rudolphi, R. Müller
ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
- Nr. 75/1980
 H.-J. Heinrich
Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
- Nr. 76/1980
 D. Klaffke, W.-W. Maennig
Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
- Nr. 77/1981
 M. Gierloff, M. Maulzsch
Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
- Nr. 78/1981
 W. Rücker
Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwelensystems mit dem Untergrund
- Nr. 79/1981
 V. Neumann
Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflußten Kaltrißneigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
- Nr. 80/1981
 A. Plank, W. Struck, M. Tzschätzsch
Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
- Nr. 81/1981
 J. Schmidt
Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
- Nr. 82/1982
 R. Helms, H.-J. Kühn, S. Ledworuski
Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches
Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test
- Nr. 83/1982
 H. Czichos, P. Feinle
Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen
- Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen -
- Nr. 84/1982
 R. Müller, R. Rudolphi
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/1982
 H. Czichos
Technische Materialforschung und -prüfung
- Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm „Basic Technological Research“ - Materials Research and Testing
- Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme “Basic Technological Research” -
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/1982
 K. Niesel, P. Schimmelwitz
Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/1982
 B. Isecke, W. Stichel
Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/1983
 A. Erhard
Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/1983
 D. Conrad, S. Dietlen
Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/1983
 K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/1983
 M. Weber
Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/1983
 L. Auersch
Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden
- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/1983
 P. Studt
Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/1983
 Xian-Quan Dong
Untersuchungen der Störschwingungen beim Kerbschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/1983
 M. Römer
Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatten
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/1983
 H. Eifler
Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem Betonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/1983
 G. Fuhrmann, W. Schwarz
Typische Bruchflächenausbildung thermoplastischer Kunststoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/1983
 E. Schnabel
Bestimmung des elastischen Verhaltens von Maschinenwaren
- Stretch- und Erholungsvermögen -
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/1983
 K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von Stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/1984
 G. Klamrowski, P. Neustupny
Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Frostwiderstand
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/1984
 P. Reimers, J. Goebels, H. Heidt, P. Weise, K. Wilding
Röntgen- und Gammastrahlen Computer-Tomographie
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/1984
 G. Magiera
Weiterentwicklung des hydraulischen Kompensationsverfahrens zur Druckspannungsmessung in Beton
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/1984
 D. Schnitger
Radiographie mit Elektronen aus Metallverstärkerfolien
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/1984
 M. Gierloff
Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/1984
 B. Schulz-Forberg
Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/1984
 J. Lehnert
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last
- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/1984
 W. Stichel, J. Ehreke
Korrosion von Stahlradiatoren
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/1984
 L. Auersch
Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen - Ergebnisse von Modellrechnungen
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/1985
 M. Omar
Zur Wirkung der Schrumpfbinderung auf den Schweißspannungszustand und das Sprödbruchverhalten von unterpulvergeschweißten Blechen aus St E 460 N
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/1985
 H. Walde, B. Kropp
Wasserstoff als Energieträger
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/1985
 K. Ziegler
Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Umsetzung von Anfox-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/1985
 W. Lützwow
Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/1985
 R. Helms, H. Henke, G. Oelrich, T. Saito
Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf die Schwingungskorrosion von Offshore-Konstruktionen
- Nr. 114/ISBN 3-88314-419-3/1985
 P. Rose, P. Raabe, W. Daum, A. Szameit

Neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen

Nr. 115/ISBN 3-88314-420-7/1985

K. Richter

Farbempfindungsmerkmal Elementaruntunnt und Buntheitsabstände als Funktion von Farbart und Leuchtdichte von In- und Umfeld

Nr. 116/ISBN 3-88314-460-6/1985

F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi, A. Wagner

Theoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik

Nr. 117/ISBN 3-88314-468-1/1985

H. Czichos, G. Sievers

Materials Technologies and Techno-Economic Development

A Study for the German Foundation for International Development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)

Nr. 118/ISBN 3-88314-469-X/1985

H. Treumann, H. Andre, E. Blossfeld, N. Pfeil, M.-M. Zindler

Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung. Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen

Nr. 119/ISBN 3-88314-472-X/1985

J. Herter, K. Brandes, E. Limberger

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Versuche an Stahlbetonplatten, Teil I

Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members

Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part I

Nr. 120/ISBN 3-88314-514-9/1986

A. Hecht

Zerstörungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückstreuung

Nr. 121/ISBN 3-88314-530-0/1986

P. Feinle, K.-H. Habig

Versagenskriterien von Stahlgleitpaarungen unter Mischreibungsbedingungen: Einflüsse von Stahlsammensetzung und Wärmebehandlung

Nr. 122/ISBN 3-88314-521-1/1986

J. Mischke

Entsorgung kerntechnischer Anlagen

Sonderkolloquium der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) am 10. 12. 1985 mit Beiträgen von B. Schulz-Forberg, K.E. Wieser und B. Droste

Nr. 123/ISBN 3-88314-531-9/1986

D. Rennoch

Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organisch-chemischer Baustoffe entstehenden Brandgase

Nr. 124/ISBN 3-88314-538-6/1986

H.-M. Thomas

Zur Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung

Nr. 125/ISBN 3-88314-540-8/1986 (vergriffen)

B. Droste, U. Probst

Untersuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzisolierung von Flüssiggas-Lagertanks

Nr. 126/ISBN 3-88314-547-5/1986

W. Stichel

Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmhallen

Nr. 127/ISBN 3-88314-564-5/1986 (vergriffen)

E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members

Versuche an Stahlbetonbalken, Teil I

Tests on Reinforced Concrete Beams, Part I

Nr. 128/ISBN 3-88314-568-8/1986 (vergriffen)

E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members

Versuche an Stahlbetonbalken, Teil II

Tests on Reinforced Concrete Beams, Part II

Nr. 129/ISBN 3-88314-569-6/1980 (vergriffen)

K. Brandes, E. Limberger, J. Herter, K. Berner

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load

Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehnungsgeschwindigkeit

Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates

Nr. 130/ISBN 3-88314-570-X/1986

W. Struck

Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material bei Belastung durch eine Einzelkraft

Nr. 131/ISBN 3-88314-585-8/1986

E. Limberger, K. Brandes, J. Herter

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load

Versuche an Stahlbetonplatten, Teil II

Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part II

Nr. 132/ISBN 3-88314-595-5/1987

Chr. Herold, F.-U. Vogdt

Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen

Nr. 133/ISBN 3-88314-609-9/1987 (vergriffen)

M. Woydt, K.-H. Habig

Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe

Nr. 134/ISBN 3-88314-615-3/1987

G. Andreae, G. Niessen

Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen

Nr. 135/ISBN 3-88314-618-8/1987

J. Ludwig, W.-D. Mischke, A. Ulrich

Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen

Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/1987

H.-J. Deppe, K. Schmidt

Untersuchung zur Beurteilung von Brettschichtverleimungen für den Holzbau

Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/1987

D. Aurich

Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiete der Komponentensicherheit

Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/1987

M. Dogunke, F. Buchhardt

Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben.

Nr. 139/ISBN 3-88314-658-7/1987

J. Olschewski, S.-P. Scholz

Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle

Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/1987

K. Brandes, E. Limberger, J. Herter

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members

Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/1987

F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera, F. Mathiak

Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdbebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken

Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/1987

H. Treumann, G. Krüger, N. Pfeil, S. von Zahn-Ullmann
Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefahrezahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen

Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/1987

K. Brandes, E. Limberger, J. Herter

Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen

Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members

Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung

Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load

Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/1987

F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber, J. Altes

Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktorgebäudes

Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/1987

U. Holzlhöner

Untersuchung selbstähnlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden

Nr. 146/ISBN 3-88314-714-1/1987

W. Schön, M. Mallon

Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks

Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/1987

H.-D. Kleinschrodt

Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen

Nr. 148/ISBN 3-88314-774-5/1988

W. Müller

Theoretische Untersuchung von Variationsprinzipien für elastoplastisches Materialverhalten sowie Entwicklung und numerische Erprobung von Finite-Element-Verfahren für den ebenen Spannungszustand

Nr. 149/ISBN 3-88314-775-3/1988

U. Holzlhöner

Bestimmung baugruddynamischer Kenngrößen aus der Untersuchung von Bodenproben

Nr. 150/ISBN 3-88314-776-1/1988

M. Weber

VG3D Zeichenprogramm für Vektorgraphische Darstellung dreidimensionaler Strukturen

Nr. 151/ISBN 3-88314-785-0/1988

L. Auersch-Saworski

Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch Bodenerschütterungen

Nr. 152/ISBN 3-88314-796-6/1988

G. Plauk, G. Kretschmann, R.-G. Rohrmann

Untersuchung des baulichen Zustandes und der Tragfähigkeit vorgespannter Riegel von Verkehrszeichenbrücken der Berliner Stadtautobahn

Nr. 153/ISBN 3-88314-797-4/1988

H. Sander, W.-W. Maennig

Magnetisches Verhalten von Eisenproben bei mechanischer Wechselbeanspruchung

Nr. 154/ISBN 3-88314-822-9/1988

K. Breikreutz, R. Utteck, K. Haedecke

Druckgesinterte Stähle als zertifiziertes Referenzmaterial für die Spektrometrie

Nr. 155/ISBN 3-88314-825-3/1988

L. Auersch

Zur Entstehung und Ausbreitung von Schienenverkehrerschütterungen: Theoretische Untersuchungen und Messung am Hochgeschwindigkeitszug Intercity Experimental

Nr. 156/ISBN 3-88314-887-3/1989

G. Klamrowski, P. Neustupny, H.-J. Deppe, K. Schmidt, J. Hundt

Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von Faserzementen

Nr. 157/ISBN 3-88314-888-1/1989

E. Limberger, K. Brandes

Versuche zum Verhalten von Stahlbetonbalken mit Übergreifungsstößen der Zugbewehrung unter stoßartiger Belastung

Nr. 158/ISBN 3-88314-889-X/1989

R. Wäsche, K.-H. Habig

Physikalisch-chemische Grundlagen der Feststoffschmierung - Literaturübersicht -

Nr. 159/ISBN 3-88314-890-3/1989

R. Müller, R. Rudolphi

Berechnung des Wärmedurchlaßwiderstandes und der Temperaturverteilung im Querschnitt von Hausschornsteinen nach DIN 18160 Teil 6

Nr. 160/ISBN 3-88314-917-9/1989

W. Matthees

Entwicklung eines Makroelementes durch Kondensation am Beispiel der Lastfälle Flugzeugabsturz und Erdbeben bei Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit biegeweichen Fundamenten

Nr. 161/ISBN 3-88314-920-9/1989

G. Mellmann, M. Maultzsch

Untersuchung zur Ermittlung der Biegefestigkeit von Flachglas für bauliche Anlagen

Nr. 162/ISBN 3-88314-921-7/1989

W. Brünner

Untersuchungen zur Tragfähigkeit großer Glasscheiben

Nr. 163/ISBN 3-88314-922-5/1989

W. Brünner, G. Mellmann, W. Struck

Biegefestigkeit und Tragfähigkeit von Scheiben aus Flachglas für bauliche Anlagen

Nr. 164/ISBN 3-88314-934-9/1989

R. Helms, B. Jaenicke, H. Wolter, C.-P. Bork

Zur Schwingfestigkeit großer geschweißter Stahlträger

Nr. 165/ISBN 3-88314-935-7/1989

P. Göbel, L. Meckel, W. Schiller

**Untersuchung zur Erarbeitung von Kennwerten bei
Einrichtungsmaterialien (Holzwerkstoffen, Möbeln
und Textilien) hinsichtlich der Formaldehyd-
Emission.**

Teil B: Textilien

Nr. 166/ISBN 3-88314-936-5/1989

K. Breitzkreutz

Modelle für Stereologische Analysen

Nr. 167/ISBN 3-88314-937-3/1989

A. Mitakidis, W. Rücker

**Erschütterungsausbreitung im elastischen Halbraum
bei transienten Belastungsvorgängen**

Nr. 168/ISBN 3-88314-958-6/1990

F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi

**Numerische Untersuchung geometriebedingter Wär-
mebrücken (Winkel und Ecken) unter Einsatz hochau-
flösender Farbgraphik bei Berücksichtigung der Tau-
wasserproblematik und des Mindestluftwechsels**

Nr. 169/ISBN 3-88314-959-4/1990

Chr. Kohl, W. Rücker

**Integration der Untergrunddynamik in das Programm-
system MEDYNA, dargestellt am Beispiel des Intercity
Experimental (ICE)**

Nr. 170/ISBN 3-88314-960-8/1990

P. Studt, W. Kerner, Tin Win

**Untersuchung der mikrobiologischen Schädigung
wassergemischter Kühlschmierstoffe mit dem Ziel
der Verbesserung der Arbeitshygiene, der Minderung
der Geruchsbelastung und der Menge zu entsorgen-
der Emulsionen**

Nr. 171/ISBN 3-88314-997-7/1990

F. Buchhardt

**Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter dy-
namischer Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-
Wechselwirkung**

Nr. 172/ISBN 3-88314-998-5/1990

J. Vielhaber, G. Plauk

Grenztragfähigkeit großer Verbundprofilstützen

Nr. 173/ISBN 3-88314-999-3

B. Droste, J. Ludwig, B. Schulz-Forberg

**Höherwertige Transporttechnik und ihre Konsequen-
zen für die Beförderung gefährlicher Güter**

**Bundesanstalt
für Materialforschung
und -prüfung (BAM)**

**Federal Institute
for Materials
Research and Testing**

**Institut Fédéral pour la
Recherche et l'Essai des
Materiaux**

Unter den Eichen 87
D-1000 Berlin 45

Telefon (030) 8104-1
Telex 183 261 bamb d
Telegramme BAM BERLIN

Telefax (030) 8 112 029
Teletex 2627-308 372=bamb

- **Berichte**
- **Gutachten**
- **Zulassungen**
- **Zertifikate**
- **Tagungspapiere**
- **Prüfungszeugnisse**
- **Prüfstellenanerkennungen**

