

ISSN 0938-5553  
ISBN 3-89429-163-x

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Berlin

# **Forschungsbericht 183**

**Zur Dekonvolution im Zeitbereich**

von Dr.-Ing. Frank Buchhardt

Berlin 1992

156 Seiten, 84 Abbildungen, 5 Tabellen

Herausgegeben von der  
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)  
Unter den Eichen 87, 1000 Berlin 45  
Telefon (030) 8104-1 Telex 183 261 bamb d  
Telefax (030) 811 20 29

Copyright © 1992 by Wirtschaftsverlag NW  
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Verlag und Vertrieb:  
Wirtschaftsverlag NW  
Verlag für neue Wissenschaft GmbH  
Postfach 101110, 2850 Bremerhaven 1  
Telefon (0471) 46093-95

## Zusammenfassung

In seismisch ausgewiesenen Gebieten hat der entwerfende Ingenieur Vorsorge gegen den Lastfall 'Erdbeben' zu treffen. In Verbindung mit sicherheitstechnisch relevanten Konstruktionen wie z. B. Kernkraftwerken kann es sich als notwendig erweisen, zusammen mit der Baukonstruktion auch den Bodenbereich genügend genau abzubilden; zur weiteren Berechnung sind - entsprechend dem seismologischen Ablauf - die Erdbebenerregungen an der Basis des Rechenmodells anzusetzen. Während jedoch die Freifeldbeschleunigungen seismographisch aufgezeichnet werden, sind die Basiserregungen i. a. nicht bekannt, so daß vom Freifeld eine Rückrechnung zur identischen Basisschwingung zu erfolgen hat. Diese Prozedur, die eine Umkehrung der dynamischen Berechnung darstellt, wird Dekonvolution genannt.

Es ist Ziel dieses Berichtes, Lösungsprozeduren für die Dekonvolution im Zeitbereich anzugeben und deren Vor- und Nachteile in der Anwendung aufzuzeigen. Die angegebene Methodik basiert auf der grundsätzlichen Annahme linearen Material- bzw. Strukturverhaltens, das die volle Gültigkeit des Superpositionsgesetzes impliziert. Zur Lösungsvorbereitung werden - zunächst in Umkehrung des Problems - die allgemeinen Lösungen der Freifeldschwingung aus einer beliebigen Basiserregung angegeben, und zwar werden unter Annahme der Kenntnis der Systemeigenwerte zunächst analytisch die geschlossenen Lösungen für das MDOF-System sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich in Kapitel 2.2 bereitgestellt. Hierauf aufbauend werden dann im folgenden Kapitel 2.3 Lösungsalternativen für den Zeitbereich entwickelt. Es wird unterschieden zwischen der entkoppelten Partikulärlösung und der Gesamtlösung mittels Fourier'scher und Gauß'scher Ansätze.

Für hochgradig unbestimmte Systeme werden i. a. Finite-Element-Programmcodes eingesetzt. Die Bewegungsgleichungen werden hier auf numerischem Wege integriert, d. h. die Dekonvolution ist daher auch ohne Berücksichtigung bzw. Kenntnis der Eigenwerte anzugeben. Ausgehend von der Ermittlung der Freifeldschwingung, die aus einem Einheits(dreiecks)impuls an der Basis resultiert, werden in Kapitel 3. die identischen numerischen Wege (wie in Kapitel 2.3) zur Lösung des gestellten Problems aufgezeigt. Die exemplarische Anwendung der Verfahren wird im Anhang dokumentiert. Es zeigt sich, daß die entkoppelte Partikulärlösung immer dann den effektivsten Weg bedeutet, wenn natürliche [also mit Dämpfung behaftete] Systeme behandelt werden. Hier kann der erforderliche Rechenaufwand beträchtlich gesenkt werden.

## Summary

In seismic areas structures must also be designed against earthquake loads. In particular when analysing safety related systems such as nuclear facilities it could be necessary to implement the structural system and the connecting soil layers as well. In order to calculate the seismic event the earthquake excitations have to be related to the base of the structural system. While the freefield accelerations are seismographically registered the base excitations i. g. are not known so that an

inversion of the dynamic equations down to the base must be performed. This procedure is called deconvolution.

It is the scope of this report to present different deconvoluting methods in the time domain and to discuss their advantages and disadvantages in application. The methods developed are based on the general assumption of a linear material and structural behaviour which implies the principle of superimposition. In chapter 2.2 at first the given problem is inverted, and the general analytical solutions of a MDOF system excited at its base are presented at the freefield under the assumption of system eigenvalues explicitly known. In chapter 2.3 consequently different deconvolution procedures are developed in the time domain. Hereby it can be distinguished between the decoupled particular solution and the complete solution using Fourier and Gauß approaches.

When analysing MDOF systems mostly finite element programm codes are utilized which numericly integrate the general dynamic equations without the explicit evaluation of the system eigenvalues, i. e. the deconvolution process must also be formulated this way. On the assumption of a freefield acceleration resulting from a unit impulse identic numeric procedures (in comparison with chapter 2.3) are presented and documented in the annex. In general it can be stated that the decoupled particular solution is the most effective way in case that natural (i. e. damped) systems shall be analysed; hereby the computational effort can be reduced considerably.

# Inhaltsverzeichnis

	Seite	
<u>1.</u>	<u>Einführung</u>	7
1.1	Allgemeine Bemerkungen	7
1.2	Allgemeine Lösungen	9
<u>2.</u>	<u>Lösungen mit Berücksichtigung der Eigenwerte</u>	11
<u>2.1</u>	<u>Bereitstellung der Freifeldlösungen im Zeitbereich</u>	11
2.1.1	Vollständige Lösungen	11
2.1.1.1	1DOF-System ohne Dämpfung	11
2.1.1.2	MDOF-System ohne Dämpfung	13
2.1.1.3	1DOF-System mit Dämpfung	14
2.1.1.4	MDOF-System mit Dämpfung	16
2.1.2	Nur partikuläre Lösung mit Dämpfung	18
2.1.2.1	1DOF-System	20
2.1.2.2	MDOF-System	21
<u>2.2</u>	<u>Diskussion der Übertragungsfunktionen in den Frequenzbereich</u>	21
2.2.1	Allgemeine Bemerkungen	21
2.2.2	Transformation in den Frequenzbereich	22
2.2.3	Vollständige Lösungen	23
2.2.3.1	Ohne Dämpfung	23
2.2.3.1.1	Sinus-Ansatz	23
2.2.3.1.2	Exponential-Ansatz	24
2.2.3.2	Mit Dämpfung	25
2.2.3.2.1	Sinus-Ansatz	25
2.2.3.2.2	Exponential-Ansatz	25
2.2.4	Partikuläre Lösungen (mit Dämpfung)	26
2.2.5	Erläuterung der Ergebnisse	27
2.2.6	Anmerkungen zur FFT	27
<u>2.3</u>	<u>Berechnungsalternativen</u>	30
2.3.1	Allgemeines Prozedere	30
2.3.2	Entkoppelte Partikulärlösung im Zeitbereich	32
2.3.3	Fourier-Gesamtlösung im Zeitbereich	32
2.3.3.1	MDOF-System ohne Dämpfung	32
2.3.3.1.1	Sinus-Ansatz	32
2.3.3.1.2	Exponential-Ansatz	34
2.3.3.2	MDOF-System mit Dämpfung	34
2.3.3.2.1	Sinus-Ansatz	34
2.3.3.2.2	Exponential-Ansatz	35

2.3.4	Gauß'sche Gesamtlösung im Zeitbereich mit Sinus-Ansatz	35
2.3.4.1	1DOF-System ohne Dämpfung	35
2.3.4.2	MDOF-System ohne Dämpfung	38
2.3.4.3	1DOF-System mit Dämpfung	39
2.3.4.4	MDOF-System mit Dämpfung	40
2.3.5	Beispiele	42
2.3.5.1	Aufbereitung eines 2DOF-Systems	42
2.3.5.2	Aufbereitung eines 3DOF-Systems	42
2.3.5.3	Diskussion der unterschiedlichen Wege mit Einzelbeispielen	43
<u>3.</u>	<u>Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte</u>	50
3.1	Allgemeine Bemerkungen	50
<u>3.2</u>	<u>Iterative Ermittlung der Übertragungsfunktion</u>	51
<u>3.3</u>	<u>Anwendung der Einheitsimpulslösung im Zeitbereich</u>	54
3.3.1	Fehlerbetrachtung zur direkten rekursiven Dekonvolution	54
3.3.2	Anwendung modifizierter Fourier-Reihen	58
3.3.2.1	Fehlerbetrachtung	58
3.3.2.2	Gesamtlösung im Zeitbereich mit Sinus-Ansatz	59
3.3.2.2.1	Vollständige Gauß'sche Lösung	59
3.3.2.2.2	Frequenzabhängige Teillösung	63
3.3.2.2.3	Doppel-Fourier-Ansatz	69
3.3.2.2.4	Amplitudenkriterium	70
3.3.3	Entkoppelte Partikulärlösung im Zeitbereich	71
3.3.4	Beispiele - Vorbereitung und Diskussion der unterschiedlichen Wege	75
<u>4.</u>	<u>Schlußbemerkung</u>	85
Literatur		86
Anhang I	Beispiele mit Berücksichtigung der Eigenwerte	87
Anhang II	Beispiele ohne Berücksichtigung der Eigenwerte	115

# 1. Einführung

## 1.1 Allgemeine Bemerkungen

Größere Bewegungen der Erdkruste - seien sie plattentektonischer oder vulkanologischer Art - führen fast zwangsläufig zu menschlichen Katastrophen. Derartige Ereignisse verstärken jeweils das öffentliche Interesse hinsichtlich präventiver Maßnahmen gegen die äußere Erdbebeneinwirkung. Hierbei geht es aus geophysikalischer Sicht um das Bemühen, den Ablaufmechanismus im Erdinnern besser zu verstehen mit dem definierten Ziel, das Ereignis 'Erdbeben' genügend genau vorherzusagen; d. h. am Ende geophysikalischer Studien stände die Zielvorstellung einer Erdbebenprognostik - von der man bisher jedoch noch um einiges entfernt ist.

Dagegen hat der konstruktive Ingenieur für diejenigen Bauwerke, die in seismisch ausgewiesenen Gebieten errichtet werden, Vorsorge gegen diesen Zusatzlastfall 'Erdbeben' zu treffen (s. z. B. /2/,/9/). Hierfür ist das allgemeine Prozedere je nach der Spezifizierung des Gefährdungsgrades in den entsprechenden Bemessungsgrundlagen vorgegeben. Sind die zu untersuchenden Bauteile in Deutschland als sicherheitstechnisch nicht-relevant zu klassifizieren, so sind die DIN 4149 'Bauten in deutschen Erdbebengebieten - Lastannahmen, Bemessung und Ausführung üblicher Hochbauten' zu nennen und ebenso die entsprechenden Vorgaben im EUROCODE Nr. 8 'Gemeinsame einheitliche Regeln für Bauwerke in Erdbebengebieten'. Für sicherheitstechnisch relevante Konstruktionen - beispielsweise Kernkraftwerksbauten - sind aufgrund des höheren Gefährdungsgrades umfassendere Bemessungsannahmen zu treffen, wie in der KTA-Regel 2201 'Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen' angegeben.

Das wesentliche Hilfsmittel, um Einblick in die seismischen Erregungsvorgänge zu erhalten, sind seismographische Aufzeichnungen - in der Regel an der Erdoberfläche, dem sog. Freifeld. Hierüber wird ausführlich in /1/ berichtet. I. a. handelt es sich um die Protokollierung der gemessenen Beschleunigungswerte am Freifeld, die durch die seismischen Kenndaten der Erregung charakterisiert sind wie

- |              |                         |      |
|--------------|-------------------------|------|
| - Magnitude  | - Amplitude             |      |
| - Intensität | - Frequenzgehalt        |      |
| - Dauer      | - Maximalbeschleunigung | etc. |

Üblicherweise wird sich der konstruktive Ingenieur nicht mit den gemessenen Beschleunigungswerten befassen, da diese für eine konventionelle Bauwerksauslegung wegen des hohen Berechnungsaufwandes nicht geeignet sind. Sollen dagegen gesonderte Untersuchungen - beispielsweise an Baukonstruktionen mit hohem Gefährdungsgrad - durchgeführt werden, sind die Seismogramme gegebenenfalls heranzuziehen. Hierbei gilt zu beachten, daß der Wellendurchgang durch das Gesamtmedium 'Boden' bereits abgeschlossen ist, wenn die Aufzeichnung eines Seismogrammes am Freifeld erfolgt; d. h. die die Erdoberfläche bildende Sediment- oder Lockergesteinsschicht wird bei Auftreten eines Erdbebens zunächst durch die darunter liegende Fels- bzw. Festgesteinsschicht angeregt, und zwar durch Longitudinal- und Transversalwellen (s. z. B. /2/). Diese sind zwar i. a. wegen der Entfernung zum Erdbebenherd - dem Hypozentrum - am Freifeldmeßpunkt geneigt, jedoch weisen die Wellenstrahlen eine konkave Krümmung aus. Außerdem tritt - bei Vernachlässigung von Oberflächenwellen - keine relevante Veränderung des Erregungszustandes an der Basis auf, solange das zu betrachtende Gebiet keine unrealistisch großen Abmessungen aufweist.

Wegen ihrer eminenten Vorteile ist die Methode der 'Finiten Elemente' auch bei der Untersuchung komplexer Boden-Bauwerk-Systeme dominierend; hierbei wird die Struktur - soweit wie möglich genügend genau - einschließlich eines Bodenausschnitts mittels finiter Elemente abgebildet. Der Bodenausschnitt selbst ist hinreichend 'tief' darzustellen, damit gewährleistet wird, daß die Basis des Modells das Fels- bzw. Festgestein zufriedenstellend abbildet. Diese 'Basis' wird dann die darüberliegende Lockergesteinsschicht einschließlich der Struktur erregen, so daß die Boden-Bauwerk-Wechselwirkung analysiert werden kann.

Dem seismischen Ablauf entsprechend sind die meisten Programmcodes derart formuliert, daß für Erdbebenberechnungen die (Erdbeben-)Beschleunigungen an der Basis vorzugeben sind, und zwar üblicherweise für alle definierten Knoten des Rechenmodells aufgrund o. g. Überlegungen als identische Basiserregung; die so erhaltenen strukturellen Beschleunigungswerte sind dann relativ zur Basiserregung zu interpretieren. Dieses Prozedere erfordert jedoch die Kenntnis der Basisbeschleunigungen, die i. a. nicht vorliegen, während die Freifelderregungen seismogra-



phisch aufgezeichnet sind. Das bedeutet also, daß eine 'Rückrechnung' zur identischen Basiserregung zu erfolgen hat. Diese Prozedur wird Dekonvolution genannt.

Es ist das Ziel dieser Untersuchung, Möglichkeiten der Dekonvolution im Zeitbereich aufzuzeigen, auf deren entsprechende Vor- und Nachteile hinzuweisen und potentielle Anwendungsgrenzen zu ermitteln.

## 1.2 Allgemeine Lösungen

Die Gesamtproblematik ist durch die allgemeine Schwingungsgleichung

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{P} \quad (1)$$

definiert, in der  $\underline{M}$  die Massenverteilungs-,  $\underline{C}$  die Dämpfungs- und  $\underline{K}$  die Steifigkeitsmatrix darstellen. Mit  $\underline{P}$  als Lastvektor ergibt sich die Verschiebung  $\underline{u}$  und mit deren ersten Ableitung die Geschwindigkeit bzw. mit der zweiten Ableitung die Beschleunigung des Gesamtsystems. Die Erdbebenerregung wird an der Basis als für alle (Basis-)Knoten gleichartige Beschleunigung  $\ddot{u}_b(t)$  angesetzt, so daß der Lastvektor  $\underline{P}$  überführt wird zu

$$\underline{P} = -\underline{M} \cdot \underline{I} \cdot \ddot{u}_b(t) \quad (2)$$

Hierbei ist  $\underline{I}$  ein Einheitsvektor, sofern alle Freiheitsgrade in Richtung der Bodenerregung liegen; im gegenteiligen Fall ist  $\underline{I}$  mit Nullen besetzt (s. z. B. /2/). Das Gesamtsystem (1) geht damit über in

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = -\underline{M} \cdot \underline{I} \cdot \ddot{u}_b(t) \quad (3)$$

Es ist zu betonen, daß in Gleichung (3) die Basiserregung  $\ddot{u}_b(t)$  nicht bekannt ist, sondern laut Fragestellung gesucht wird. Dagegen liegt am Freifeld (z. B. am Freiheitsgrad k) das Seismogramm  $\ddot{u}_{total}^k(t)$  vor, so daß gilt

$$\ddot{u}_{total}^k(t) = \ddot{u}^k(t) + \ddot{u}_b(t) \quad (4a)$$

bzw.

$$\ddot{u}_b(t) = \ddot{u}_{total}^k(t) - \ddot{u}^k(t) \quad (4b)$$

Somit läßt sich die gesuchte Basiserregung  $\ddot{u}_b(t)$  nach der Ermittlung von  $\underline{u}(t)$  bestimmen. Zur Entkoppelung des Gesamtsystems erfolgt die Transformation der Gesamtschwingung  $\underline{u}$  in ihre Ei-

genformen  $\underline{\Phi}$ , wobei  $\underline{\Phi}$  die Matrix der einzelnen Eigenformen  $\underline{\Phi}_1$  darstellt. Mit  $\underline{u} = \underline{\Phi} \cdot \underline{y}$  folgt für die 1-te Eigenschwingung  $y_1$  :

$$\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_1 \cdot \ddot{y}_1 + \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\Phi}_1 \cdot \dot{y}_1 + \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\Phi}_1 \cdot y_1 = \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{P}$$

bzw.

$$M^*_{11} \cdot \ddot{y}_1 + C^*_{11} \cdot \dot{y}_1 + K^*_{11} \cdot y_1 = P^*_{11} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad M^*_{11} &= \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_1 \\ C^*_{11} &= \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\Phi}_1 \\ K^*_{11} &= \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\Phi}_1 \end{aligned}$$

Für die generalisierte Erdbebenlast je Eigenschwingung 1 ist

$$P^*_{11} = \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{P} = -\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{I} \cdot \ddot{u}_b(t) \quad . \quad (6)$$

Somit kann die relative Schwingung am Freifeld für den Freiheitsgrad k endgültig bestimmt werden :

$$u^k(t) = \underline{\Phi}^k \cdot \underline{y}(t)$$

oder

$$u^k(t) = \sum_1^L \underline{\Phi}^k_{11} \cdot y_1(t) \quad (7a)$$

Für jede Eigenschwingung 1 ergibt sich also

$$u^k_{11}(t) = \underline{\Phi}^k_{11} \cdot y_1(t) \quad (7b)$$

mit der Gesamtheit  $u^k(t) = \sum_1^L u^k_{11}(t) \quad .$

L gibt hier die maximale Zahl der berechneten Eigenwerte an. Es sollte an dieser Stelle betont werden, daß das hier vorausgesetzte Superpositionsgesetz nur dann seine Gültigkeit behält, solange lineares Strukturverhalten angenommen werden darf.

## 2. Lösungen mit Berücksichtigung der Eigenwerte

### 2.1 Bereitstellung der Freifeldlösungen im Zeitbereich

#### 2.1.1 Vollständige Lösungen

##### 2.1.1.1 1DOF-System ohne Dämpfung

Das generelle Prozedere soll am 1DOF-System ohne Dämpfungseinfluß exemplarisch erläutert werden. Aus der Beziehung (4b) geht hervor, daß - quasi rückwirkend - zunächst die relative Beschleunigung des Gesamtsystems zu ermitteln ist, so daß die unbekannte Basiserregung mittels Kenntnis des Seismogramms - als totaler Beschleunigung - berechnet werden muß.

Die relative Beschleunigung des Freifeldes (für den Freiheitsgrad  $k$ ) ergibt sich mit Hilfe des Duhamel-Integrals, das nach Auswertung die Anfangsbedingungen  $u^k(t=0)$  bzw.  $\dot{u}^k(t=0)$  identisch erfüllt (s. z. B. /2/ und /3/).

Für den (zunächst beliebigen) Eigenwert  $l$  erhält man bei Beachtung von (7b)

$$u^k_l(t) = \Phi^k_l \cdot y_l(t)$$

bzw.

$$u^k_l(t) = \Phi^k_l \cdot \frac{1}{M^*_{l1} \cdot \omega_{d1}} \int_0^t P^*_{l1} \cdot \exp[-D_1 \omega_1 (t-\tau)] \cdot \sin \omega_{d1} (t-\tau) d\tau \quad (8)$$

Bei Vernachlässigung der Dämpfung, also  $D_1 \Rightarrow 0$ , geht der Term  $\omega_{d1}$  in den echten Eigenwert  $\omega_1$  über, und man erhält mit (6)

$$u^k_l(t) = -BF^k_l \cdot \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \ddot{u}_b(\tau) \cdot \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau \quad .$$

$BF^k_l$  wird hier als Beteiligungsfaktor der  $l$ -ten Eigenform für den  $k$ -ten Freiheitsgrad eingeführt mit

$$BF^k_l = \Phi^k_l \cdot \underline{\Phi}^T_{l1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{I} \cdot (\underline{\Phi}^T_{l1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_1)^{-1} \quad . \quad (9)$$

Im Falle des Ein-Masse-Schwingers ist  $BF$  identisch Eins (mit  $l=k=1$ ). Dann geht auch die allgemeine Gleichung der relativen Verschiebung  $u^k_l(t)$  über in

$$u(t) = -BF \cdot \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_b(\tau) \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad . \quad (10)$$

In dieser Beziehung ist die Basisbeschleunigung  $\ddot{u}_b(\tau)$  zunächst nicht bekannt. Mit dem allgemeinen Ansatz

$$\ddot{u}_b(\tau) = f(\tau) \quad (11)$$

folgt bei Anwendung der Produktenregel und unter Beachtung von (4) mit  $l=1$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{\text{total}}(t) = & f(t) + \\ & + BF \cdot \left[ -\frac{1}{\omega^2} f^{II}(t) + \frac{1}{\omega^4} f^{IV}(t) - \frac{1}{\omega^6} f^{VI}(t) + \dots \right] + \\ & + BF \cdot \cos \omega t \cdot \left[ -\frac{1}{\omega^2} f^{II}(0) + \frac{1}{\omega^4} f^{IV}(0) - \frac{1}{\omega^6} f^{VI}(0) + \dots \right] + \\ & + BF \cdot \sin \omega t \cdot \left[ -\frac{1}{\omega^2} f^{II}(0) + \frac{1}{\omega^4} f^{IV}(0) - \frac{1}{\omega^6} f^{VI}(0) + \dots \right] + \end{aligned} \quad (12)$$

Hierbei wird das Seismogramm in allgemeiner Form durch die Basisbeschleunigung  $\ddot{u}_b(t)$  und deren Ableitungen in Verbindung mit den Eigenwerten ausgedrückt, nämlich

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = f(t) + BF \cdot [ ]_1 + BF \cdot [ ]_2 \cdot \cos \omega t + BF \cdot [ ]_3 \cdot \sin \omega t \quad (12a)$$

Durch einen geeigneten Ansatz für die Basisbeschleunigung kann rückwirkend  $\ddot{u}_{\text{total}}(t)$  gefunden werden.

### Beispiel B1 1DOF-System ohne Dämpfung

Für  $\ddot{u}_b(t) = f(t) = \sin \alpha t$  lassen sich die  $[ ]$ -Ausdrücke in Gleichung (12a) beispielsweise durch geometrische Reihen ersetzen, so daß schließlich die Freifeldbeschleunigung folgt zu

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2} \cdot [-\omega^2 \cdot \sin \alpha t + \alpha \omega \cdot \sin \omega t]$$

oder

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = A_1 \cdot \sin \alpha t + B_1 \cdot \sin \omega t$$

$$\text{mit } A_1 = -\frac{\omega^2}{\alpha^2 - \omega^2} \quad \text{und} \quad B_1 = \frac{\alpha \omega}{\alpha^2 - \omega^2}$$

### Beispiel B2 1DOF-System ohne Dämpfung

$$\ddot{u}_b(t) = f(t) = \exp(i s t) \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

ergibt die Freifeldbeschleunigung je Zähler  $s$

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = A_s \cdot \exp(i s t) + B_s \cdot \sin \omega t + C_s \cdot \cos \omega t$$

$$\text{mit } A_s = -\frac{\omega^2}{s^2 - \omega^2}$$

$$B_s = i \frac{s \omega}{s^2 - \omega^2}$$

$$C_s = \frac{\omega^2}{s^2 - \omega^2}$$

### 2.1.1.2 MDOF-System ohne Dämpfung

Die Bereitstellung der Lösungen geschieht in gleicher Weise, wie in (12) angegeben. Zusätzlich sind jedoch die Beteiligungsfaktoren  $BF^k_1$  nach (9) zu beachten, d. h. es ist jetzt die Summation über die berechneten Eigenwerte zu vollziehen. Damit geht (12a) über in

$$\begin{aligned} \ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_1^L \left\{ \frac{1}{L} \cdot f(t) + BF^k_1 \cdot [ ]^1_1 + \right. \\ \left. + BF^k_1 \cdot [ ]^1_2 \cdot \cos \omega_1 t + BF^k_1 \cdot [ ]^1_3 \cdot \sin \omega_1 t \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Die identischen Beispiele von Kap. 2.1.1.1 werden nun verallgemeinert.

#### Beispiel B3 MDOF-System ohne Dämpfung

$$\ddot{u}_b(t) = f(t) = \sum_n^{\infty} c_n \cdot \sin \alpha_n t$$

ergibt die Freifeldschwingung

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^{\infty} c_n \sum_1^L \{ A^1_n \cdot \sin \alpha_n t + B^1_n \cdot \sin \omega_1 t \}$$

$$\text{mit } A^1_n = \frac{[(1/L) - BF^k_1] \alpha_n^2 - (1/L) \omega_1^2}{\alpha_n^2 - \omega_1^2}$$

$$B^1_n = \frac{BF^k_1 \alpha_n \omega_1}{\alpha_n^2 - \omega_1^2}$$

$A^1_n$  und  $B^1_n$  sind Summenparameter, die von den beiden Variablen  $n$  und  $l$  gebildet werden. Hierbei stellt  $n$  die Last- und  $l$  die Eigenwertentwicklung dar. Zusätzlich ist der Parameter  $B^1_n$  noch mit der jeweiligen Eigenform funktionsmäßig verknüpft.

#### Beispiel B4 MDOF-System ohne Dämpfung

$$\ddot{u}_b(t) = f(t) = \sum_s^{-\infty + \infty} c_s \cdot \exp(i s t) \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

ergibt die Freifeldbeschleunigung

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_s^{-\infty + \infty} c_s \sum_1^L \{ A^1_s \cdot \exp(i s t) + B^1_s \cdot \sin \omega_1 t + C^1_s \cdot \cos \omega_1 t \}$$

$$\text{mit } A^1_s = \frac{[(1/L) - BF^k_1] s^2 - (1/L) \omega_1^2}{s^2 - \omega_1^2}$$

$$B^1_s = i \frac{BF^k_1 s \omega_1}{s^2 - \omega_1^2}$$

$$C^1_s = \frac{BF^k_1 \omega_1^2}{s^2 - \omega_1^2}$$

Hierbei sind die  $c_s$  i. a. komplexe Größen.

### 2.1.1.3 1DOF-System mit Dämpfung

Mit dem gegebenen Dämpfungsmaß  $D_1$  (für die 1-te Eigenschwingung) wird  $\omega_{d1} = \kappa_1 = \omega_1 \sqrt{1-D_1^2}$  in die allgemeine Lösung (8) eingeführt. Ersetzt man in dieser Beziehung  $\sin \phi$  durch  $-0.5 \cdot i \cdot [\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)]$ , erhält man

$$u^{k_1}(t) = i \frac{BF^{k_1}}{2 \kappa_1} \int_0^t \ddot{u}_b(\tau) \cdot [E_1(\tau) - E_2(\tau)] d\tau$$

mit  $E_1(\tau) = \exp[(-D_1 \omega_1 + i \kappa_1) \cdot (t - \tau)]$   
 $E_2(\tau) = \exp[(-D_1 \omega_1 - i \kappa_1) \cdot (t - \tau)]$

Wie in Abschnitt 2.1.1.1 (mit  $l=1$ ) erhält man nach Einführung der Ausdrücke

$$\begin{aligned} A &= D\omega - i\kappa \\ B &= D\omega + i\kappa \end{aligned} \quad (14)$$

für die Freifeldschwingung

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{total}(t) &= f(t) + \\ &+ i \frac{BF}{2\kappa} \left[ \frac{1}{A} f^{III}(t) - \frac{1}{A^2} f^{IIII}(t) + \frac{1}{A^3} f^{IV}(t) - \frac{1}{A^4} f^V(t) + \dots \right] - \\ &- i \frac{BF}{2\kappa} \left[ \frac{1}{B} f^{III}(t) - \frac{1}{B^2} f^{IIII}(t) + \frac{1}{B^3} f^{IV}(t) - \frac{1}{B^4} f^V(t) + \dots \right] - \\ &- i \frac{BF}{2\kappa} \cdot \exp(-At) \left[ A \cdot f(0) - f^I(0) + \frac{1}{A} f^{II}(0) - \frac{1}{A^2} f^{III}(0) + \dots \right] + \\ &+ i \frac{BF}{2\kappa} \cdot \exp(-Bt) \left[ B \cdot f(0) - f^I(0) + \frac{1}{B} f^{II}(0) - \frac{1}{B^2} f^{III}(0) + \dots \right] \end{aligned} \quad (15)$$

oder

$$\ddot{u}_{total}(t) = f(t) + i \frac{BF}{2\kappa} \left( [ ]_1 + [ ]_2 + [ ]_3 \cdot \exp(-At) + [ ]_4 \cdot \exp(-Bt) \right) \quad (15a)$$

Bei geeigneter Vorgabe von  $f(t)$  lassen sich die  $[ ]$ -Ausdrücke durch geometrische Reihen ersetzen.

### Beispiel B5 1DOF-System mit Dämpfung

Für die Basiserregung  $\ddot{u}_b(t) = f(t) = \sin \alpha t$  folgt bei Berücksichtigung der Dämpfung als Freifeldschwingung

$$\ddot{u}_{total}(t) = T_1 \cdot \exp(i\alpha t) + T_2 \cdot \exp(-i\alpha t) + T_3 \cdot \exp(-At) + T_4 \cdot \exp(-Bt) \quad .$$

Es gelten folgende Abkürzungen:

$$T_1 = -\frac{1}{2} \frac{BF\alpha^3}{K} \frac{S}{N} - i \frac{1}{2} \left[ '1' - \frac{BF\alpha^2}{K} \frac{KR-D\omega S}{N} \right]$$

$$T_2 = -\frac{1}{2} \frac{BF\alpha^3}{K} \frac{S}{N} + i \frac{1}{2} \left[ '1' - \frac{BF\alpha^2}{K} \frac{KR-D\omega S}{N} \right]$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{BF\alpha^3}{K} \frac{S}{N} + i \frac{1}{2} \frac{BF\alpha}{K} \frac{N-\alpha^2 R}{N}$$

$$T_4 = \frac{1}{2} \frac{BF\alpha^3}{K} \frac{S}{N} - i \frac{1}{2} \frac{BF\alpha}{K} \frac{N-\alpha^2 R}{N}$$

und

$$R = (D\omega)^2 - K^2 + \alpha^2$$

$$A = D\omega - iK$$

$$S = 2KD\omega$$

$$B = D\omega + iK$$

$$N = R^2 + S^2$$

Wegen  $l=1$  ist  $BF=1$  ebenso wie der Anteil  $'1'=1$ .

Wird das Verhältnis des Eigenwertes zur lastseitigen Basiserregung eingeführt mit  $\gamma = \omega / \alpha$ , so modifizieren sich die Beziehungen  $T_1 - T_4$  zu:

$$T_1 = -\frac{1}{2} BF \frac{2D\gamma}{NN} - i \frac{1}{2} \left[ '1' + BF \frac{\gamma^2 - 1}{NN} \right]$$

$$T_2 = -\frac{1}{2} BF \frac{2D\gamma}{NN} + i \frac{1}{2} \left[ '1' + BF \frac{\gamma^2 - 1}{NN} \right]$$

$$T_3 = \frac{1}{2} BF \frac{2D\gamma}{NN} + i \frac{1}{2} BF \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 1) + 2(D\gamma)^2}{NN}$$

$$T_4 = \frac{1}{2} BF \frac{2D\gamma}{NN} - i \frac{1}{2} BF \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 1) + 2(D\gamma)^2}{NN}$$

Hierbei ist  $NN = (\gamma^2 - 1)^2 + (2D\gamma)^2$  mit  $BF = 1$ .

Die komplexen Konstanten  $T_1 - T_4$  können auch in die Real- und Imaginärteile aufgespalten werden:

$$T_1 = T_{1R} + i T_{1S}$$

$$T_2 = T_{1R} - i T_{1S} \quad \equiv \quad \text{konjug. } T_1$$

$$T_3 = T_{3R} + i T_{3S}$$

$$T_4 = T_{3R} - i T_{3S} \quad \equiv \quad \text{konjug. } T_3$$

Die Rückführung von  $\ddot{u}_{\text{total}}(t)$  mittels trigonometrischer Funktionen ergibt

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = 2T_{1R} \cos at - 2T_{1S} \sin at + \exp(-D\omega t) \cdot [2T_{3R} \cos kt - 2T_{3S} \sin kt] .$$

Die zweite Zeile dieses Ausdrucks wird auch als 'transient term' bezeichnet, der je nach dem vorgegebenen Dämpfungsmaß zu Null 'ausdämpft' (s. z. B. /5/). Setzen wir hier  $D=0$ , verschwinden wegen  $S=0$  alle  $T_R$ -Anteile, und man erhält die identische Lösung des Beispiels B1, nämlich

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2} \cdot [-\omega^2 \cdot \sin \alpha t + \alpha \omega \cdot \sin \omega t] \quad .$$

### Beispiel B6 1DOF-System mit Dämpfung

$$\ddot{u}_b(t) = f(t) = \exp(ist) \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

ergibt die Freifeldbeschleunigung je Zähler  $s$

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = T_s \cdot \exp(ist) + T_{3s} \cdot \exp(-At) + T_{4s} \cdot \exp(-Bt)$$

$$\text{mit } T_s = '1' + i \frac{BF}{2K} \left[ -\frac{s^2}{A+is} + \frac{s^2}{B+is} \right]$$

$$T_{3s} = -i \frac{BF}{2K} \frac{A^2}{A+is}$$

$$T_{4s} = -i \frac{BF}{2K} \frac{B^2}{B+is}$$

mit  $BF=1$  und  $'1'=1$  wegen  $l=1$ .

### 2.1.1.4 MDOF-System mit Dämpfung

Das Prozedere ist identisch zum Teil 2.1.1.3, nur ist jetzt die Summation über die Zahl  $L$  der berechneten Eigenwerte vorzunehmen. Die Beziehung (15a) geht dann über zu

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{\text{total}}(t) = & \sum_1^L \left( \frac{1}{L} f(t) + i \frac{BF^k}{2K_1} \left[ [ ]^1_1 + [ ]^1_2 \right] + \right. \\ & \left. + i \frac{BF^k}{2K_1} \left[ [ ]^1_3 \exp(-A^1 t) + [ ]^1_4 \exp(-B^1 t) \right] \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Damit sind die Lösungen für die Freifeldbeschleunigungen unter Anwendung des Duhamel-Integrals in allgemeiner Form bereitgestellt, sofern an der Basis eine bekannte Funktion  $\ddot{u}_b(t) = f(t)$  vorliegt. Dies ist für die einschlägigen sin- und e-Funktionen verifiziert worden.



Da das Duhamel-Integral für die Anfangsbedingungen ( $t=0$ ) sowohl für die Verschiebung als auch für die Geschwindigkeit identisch verschwindet, soll im folgenden für die vollständige Lösung postuliert werden, daß diese Anfangsbedingungen grundsätzlich erfüllt werden.

### Beispiel B7 MDOF-System mit Dämpfung

$$\ddot{u}_p(t) = f(t) = \sum_n^1 c_n \cdot \sin \alpha_n t$$

ergibt

$$\ddot{u}_{total}(t) = \sum_n^1 c_n \sum_1^L \{ T_1^{1n} \cdot \exp(i\alpha_n t) + T_2^{1n} \cdot \exp(-i\alpha_n t) + T_3^{1n} \cdot \exp(-A^1 t) + T_4^{1n} \cdot \exp(-B^1 t) \}$$

mit

$$T_1^{1n} = -\frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n^3}{\kappa_1} \frac{S_1}{N_{1n}} - i \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} - \frac{BF^{k_1} \alpha_n^2}{\kappa_1} \frac{\kappa_1 R_{1n} - D_1 \omega_1 S_1}{N_{1n}} \right]$$

$$T_2^{1n} = -\frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n^3}{\kappa_1} \frac{S_1}{N_{1n}} + i \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} - \frac{BF^{k_1} \alpha_n^2}{\kappa_1} \frac{\kappa_1 R_{1n} - D_1 \omega_1 S_1}{N_{1n}} \right]$$

$$T_3^{1n} = \frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n^3}{\kappa_1} \frac{S_1}{N_{1n}} + i \frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n}{\kappa_1} \frac{N_{1n} - \alpha_n^2 R_{1n}}{N_{1n}}$$

$$T_4^{1n} = \frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n^3}{\kappa_1} \frac{S_1}{N_{1n}} - i \frac{1}{2} \frac{BF^{k_1} \alpha_n}{\kappa_1} \frac{N_{1n} - \alpha_n^2 R_{1n}}{N_{1n}}$$

und

$$R_{1n} = (D_1 \omega_1)^2 - \kappa_1^2 + \alpha_n^2$$

$$S_1 = 2\kappa_1 D_1 \omega_1$$

$$N_{1n} = R_{1n}^2 + S_1^2$$

$$A^1 = D_1 \omega_1 - i\kappa_1$$

$$B^1 = D_1 \omega_1 + i\kappa_1$$

$$\kappa_1 = \omega_1 \sqrt{1 - D_1^2}$$

Die Umschreibung auf das Verhältnis des zugehörigen Eigenwertes  $\omega_1$  zur identischen Erregung führt zu  $\gamma_{1n} = \omega_1 / \alpha_n$ .

Also folgen die modifizierten allgemeinen Parameter:

$$T_1^{1n} = -\frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{2D_1 \gamma_{1n}}{NN_{1n}} - i \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} + BF^{k_1} \frac{\gamma_{1n}^2 - 1}{NN_{1n}} \right]$$

$$T_2^{1n} = -\frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{2D_1 \gamma_{1n}}{NN_{1n}} + i \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} + BF^{k_1} \frac{\gamma_{1n}^2 - 1}{NN_{1n}} \right]$$

$$T_3^{1n} = \frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{2D_1 \gamma_{1n}}{NN_{1n}} + i \frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{1}{\sqrt{1 - D_1^2}} \frac{1}{\gamma_{1n}} \frac{\gamma_{1n}^2 (\gamma_{1n}^2 - 1) + 2(D_1 \gamma_{1n})^2}{NN_{1n}}$$

$$T_4^{1n} = \frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{2D_1 \gamma_{1n}}{NN_{1n}} - i \frac{1}{2} BF^{k_1} \frac{1}{\sqrt{1 - D_1^2}} \frac{1}{\gamma_{1n}} \frac{\gamma_{1n}^2 (\gamma_{1n}^2 - 1) + 2(D_1 \gamma_{1n})^2}{NN_{1n}}$$

und

$$NN_{1n} = (\gamma_{1n}^2 - 1)^2 + (2D_1 \gamma_{1n})^2$$

## Beispiel B8 MDOF-System mit Dämpfung

$$\ddot{u}_b(t) = f(t) = \sum_s^{-\infty} c_s \cdot \exp(ist) \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

ergibt die Freifeldbeschleunigung

$$\ddot{u}_{\text{total}}^k(t) = \sum_s^{-\infty} c_s \sum_1^L [ T_1^1 \cdot \exp(ist) + T_3^1 \cdot \exp(-A^1 t) + T_4^1 \cdot \exp(-B^1 t) ]$$

$$\text{mit} \quad T_1^1 = \frac{1}{L} + i \frac{BF^k}{2\kappa_1} \left[ -\frac{s^2}{A^1 + is} + \frac{s^2}{B^1 + is} \right]$$

$$T_3^1 = -i \frac{BF^k}{2\kappa_1} \frac{A^1{}^2}{A^1 + is}$$

$$T_4^1 = +i \frac{BF^k}{2\kappa_1} \frac{B^1{}^2}{B^1 + is}$$

und

$$A^1 = D_1 \omega_1 - i\kappa_1$$

$$B^1 = D_1 \omega_1 + i\kappa_1$$

$$\kappa_1 = \omega_1 \sqrt{1 - D_1^2}$$

Führt man zur Kontrolle

$$f(t) = -0.5 i [\exp(ist) - \exp(-ist)] = \sin st$$

ein, so kann gezeigt werden, daß die Konstanten des Beispiels B8 identisch zu den Parametern  $T_1^1$  -  $T_4^1$  des Beispiels B7 führen.

Hierbei sind die  $c_s$  i. a. komplexe Größen.

### 2.1.2 Nur partikuläre Lösung mit Dämpfung

Im Teil 2.1.1 sind die wesentlichen Lösungen vollständig entwickelt worden. Es wurde wegen der erheblich einfacheren Darstellung auch nach Systemen unterschieden, die gedämpft bzw. ungedämpft sind. Für die anschließende Betrachtung wird jetzt ein Dämpfungsmaß verschieden von Null angesetzt, eine Bedingung, wie sie für alle natürlichen Systeme gegeben ist.

Modifiziert man in den Beispielen B7 und B8 die letzten beiden Terme

$$\exp(-At) = \exp(-D\omega t) \cdot \exp(+ikt) \quad \text{bzw.}$$

$$\exp(-Bt) = \exp(-D\omega t) \cdot \exp(-ikt) \quad ,$$

so erhält man einen Gesamtausdruck einer schnell mit der Zeit abklingenden Funktion [nach /5/: 'This term damps out quickly']. Hierbei handelt es sich um den homogenen Anteil des Differentialgleichungssystems, der zur Erfüllung der Anfangsbedingungen benötigt wird. Mit wachsender Zeit dominiert jedoch nur noch der partikuläre Anteil der Gesamtlösung. Interessiert jetzt nur dieser partikuläre Anteil, so läßt sich die allgemeine Lösung auf anderem Wege sehr viel übersichtlicher entwickeln.

Entsprechend (5) und (6) erhält man je l-te Eigenschwingung die Ausgangsgleichung

$$M^*_{11} \cdot \ddot{y}_1 + C^*_{11} \cdot \dot{y}_1 + K^*_{11} \cdot y_1 = -\beta_1 \cdot \ddot{u}_b(t) \quad (17)$$

$$\text{mit} \quad \beta_1 = \underline{\Phi}^T_{11} \cdot \underline{M} \cdot \underline{I}$$

$$\text{Mit dem Ansatz} \quad \begin{aligned} \ddot{u}_b(t) &= H_n \exp(i\alpha_n t) && \text{bzw.} \\ y_1(t) &= E_n \exp(i\alpha_n t) \end{aligned}$$

ergibt sich aus (17) die charakteristische Gleichung

$$E_n [ -M^*_{11} \alpha_n^2 + iC^*_{11} \alpha_n + K^*_{11} ] = -H_n \beta_1 \quad ,$$

also der in  $y_1(t)$  gesuchte Parameter  $E_n$  zu

$$E_n = H_n \frac{-\beta_1}{[-M^*_{11} \alpha_n^2 + K^*_{11}] + iC^*_{11} \alpha_n} \quad .$$

$$\begin{aligned} \text{Nach Einführen von} \quad \omega^2_{1n} &= K^*_{11} / M^*_{11} \\ C^*_{11} &= 2M^*_{11} D_1 \omega_{1n} \\ \gamma_{1n} &= \omega_{1n} / \alpha_n \end{aligned} \quad \text{ergibt sich}$$

$$E_n = H_n \frac{-\beta_1}{M^*_{11} \alpha_n^2} \frac{1}{(\gamma^2_{1n} - 1) + i 2D_1 \gamma_{1n}}$$

und damit

$$\ddot{y}_1(t) = -E_n \alpha_n^2 \exp(i\alpha_n t) \quad .$$

Unter Beachtung von (7a und b) sowie (9) folgt damit die partikuläre Lösung für die Freifeldbeschleunigung

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = H_n \left( \sum_1^L \left[ \frac{1}{L} + BF^k_{11} \frac{1}{(\gamma^2_{1n} - 1) + i 2D_1 \gamma_{1n}} \right] \right) \exp(i\alpha_n t)$$

oder

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = H_n \left( \sum_1^L TF^k_{1n} \right) \exp(i\alpha_n t) \quad . \quad (18)$$

Hierbei stellt  $(TF^k_{1n})$  einen komplexen Ausdruck dar.

### 2.1.2.1 1DOF-System

Für den Sonderfall  $l=1$  mit  $BF^k_1=1$  reduziert sich Gleichung (18) für eine beliebige Basiserregung

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n \exp(i\alpha_n t) \quad \text{zu}$$

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n \left[ 1 + \frac{1}{(\gamma^2-1)+i2D\gamma} \right] \exp(i\alpha_n t)$$

oder

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n TF_{1n} \exp(i\alpha_n t) \quad .$$

#### Beispiel B9 1DOF-System

Für  $\ddot{u}_b(t) = \sin \beta t = -0.5 i [\exp(i\beta t) - \exp(-i\beta t)]$  ist die Freifeldbeschleunigung  $\ddot{u}_{\text{total}}(t)$  zu ermitteln. Die Entwicklung von  $\ddot{u}_b(t)$  für den Exponential-Ansatz erfordert die Bestimmung

$$H_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \ddot{u}_b(t) \exp(-in\alpha_0 t) dt \quad .$$

Die Auswertung ergibt allgemein

$$H_n = \frac{1}{2T_0} \left[ \frac{1}{\beta - n\alpha_0} \left( 1 - \exp[i(+\beta - n\alpha_0)T_0] \right) - \frac{1}{-\beta - n\alpha_0} \left( 1 - \exp[i(-\beta - n\alpha_0)T_0] \right) \right] \quad .$$

Die Forderung  $\alpha_0 = 2\pi / T_0$  mit  $\alpha_0 = 1$  und  $\beta$  ein Ganzzahliges von  $\alpha$  liefert für jedes  $\beta$   $H_{+\beta} = -0.5 i$  bzw.  $H_{-\beta} = +0.5 i$ , und damit für die Freifeldbeschleunigung

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = -0.5 i TF_{1\beta} \exp(+i\beta t) + 0.5 i TF_{1\beta} \exp(-i\beta t) \quad .$$

Unter Beachtung von  $\gamma_n = \omega / \alpha_n$ , wobei  $\gamma$  hier das Vorzeichen von  $\alpha_n$  annimmt, läßt sich  $TF_{1\beta}$  ausdrücken

$$TF_{1\beta} = 1 + \frac{\gamma^2 - 1}{NN} - i \frac{2D\gamma}{NN}$$

$$\text{mit} \quad NN = (\gamma^2 - 1)^2 + (2D\gamma)^2 \quad .$$

Damit wird

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = T_1 \exp(i\beta t) + T_2 \exp(-i\beta t) \quad \text{bzw.}$$

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = 2T_{1R} \cos \beta t - 2T_{1S} \sin \beta t \quad .$$

Dies ist der identische Ausdruck in Beispiel B5.

### 2.1.2.2 MDOF-System

Bei allgemeiner Belastung

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^{-\infty}{}^{+\infty} H_n \exp(i\alpha_n t)$$

folgt für die Freifeldbeschleunigung

$$\ddot{u}^k_{total}(t) = \sum_n^{-\infty}{}^{+\infty} H_n \sum_1^L \left( \frac{1}{L} + BF^k_{1n} \frac{1}{(\gamma^2_{1n}-1)+i2D_1\gamma_{1n}} \right) \exp(i\alpha_n t)$$

oder

$$\ddot{u}^k_{total}(t) = \sum_n^{-\infty}{}^{+\infty} H_n \left( \sum_1^L TF^k_{1n} \right) \exp(i\alpha_n t) \quad .$$

Diese allgemeine (partikuläre) Lösung ist insofern von Bedeutung, da Basis- wie Freifeldbeschleunigung von derselben Zeitfunktion bestimmt werden und sich nur durch den ()-Ausdruck unterscheiden; letztere stellt in komplexer Schreibweise eine Superposition der Eigenformen unter Ausblendung des Zeitparameters dar. So wird eine algebraische Beziehung zwischen Basis- und Freifeldniveau hergestellt, sofern "lastseitig" eine Separierung je n vorgenommen wird.

## 2.2 Diskussion der Übertragungsfunktionen

### 2.2.1 Allgemeine Bemerkungen

Nach Bereitstellung allgemeiner und exemplarischer Lösungen des Schwingungssystems am Freifeld, bedingt durch eine Basiserregung, kann die Übertragung (von der Basis zum Freifeld) formuliert werden:

$$TF = f(\lambda, \alpha_n; t) = \text{"Freifeld}(\lambda, \alpha_n; t)\text{"} / \text{"Basis}(\lambda, \alpha_n; t)\text{"} \quad (19a)$$

Hierbei ist TF mit  $\lambda$  und  $\alpha_n$  als Frequenz- sowie t als Zeitvariable eine allgemeine Funktion  $f(\lambda, \alpha_n; t)$ , wobei durch  $\alpha_n$  ein spezifisches Frequenzsignal (an der Basis) gegeben wird. Gelingt es, die Zeitvariable t zu eliminieren, kann die Beziehung für TF wegen  $\alpha_n$  als gegebener Festparameter überführt werden zu

$$TF = f(\lambda, \alpha_n; t) = \text{"Freifeld}(\lambda)\text{"} / \text{"Basis}(\lambda)\text{"} \quad , \quad (19b)$$

wobei  $TF(\lambda)$  die sog. Übertragungsfunktion darstellt; d. h.  $TF(\lambda)$  reproduziert für jedes  $\lambda$  den Frequenzdurchgang von der Basis zum Freifeld. Bei Kenntnis der Übertragungsfunktion  $TF(\lambda)$  ließe sich in Umkehrung der Beziehung (19b) somit die letztlich unbekannte Basisschwingung mittels einfacher arithmetischer Operation ermitteln.

### 2.2.2 Transformation in den Frequenzbereich

Eine beliebige Funktion  $f(t)$  soll mittels des Fourier-Integrals (s. z. /8/) in den Frequenzraum transformiert werden. Dann ist:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1=-\infty}^{\lambda_2=+\infty} d(\lambda) \exp(+i\lambda t) d\lambda \quad (20)$$

Die zugehörigen Fourier-Koeffizienten sind

$$d(\lambda) = \int_{t_1=-\infty}^{t_2=+\infty} f(t) \exp(-i\lambda t) dt \quad (21)$$

mit der allgemeinen Lösung für  $d(\lambda)$  mit  $Z = i\lambda$  :

$$d(\lambda) = \exp(-i\lambda t_1) \left[ \frac{1}{Z} f(t_1) + \frac{1}{Z^2} f^{(1)}(t_1) + \frac{1}{Z^3} f^{(11)}(t_1) + \dots \right] - \exp(-i\lambda t_2) \left[ \frac{1}{Z} f(t_2) + \frac{1}{Z^2} f^{(1)}(t_2) + \frac{1}{Z^3} f^{(11)}(t_2) + \dots \right] \quad (22)$$

Hierbei sind die Grenzwerte  $t_1$  und  $t_2$  endlich gesetzt.  $d(\lambda)$  ist i. a. eine komplexe Zahl.

Entsprechend (19b) folgt dann:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / TF(\lambda) \quad , \quad (23)$$

so daß dann mit (20) die gesuchte Basisfunktion ermittelt werden kann.

#### Beispiel B10      Sinus-Ansatz

Für die gegebene Funktion  $f(t) = \sin \alpha_n t$  folgt

$$d(\lambda) = \frac{\alpha_n}{\lambda^2 - \alpha_n^2} \left[ \cos \alpha_n t_2 \exp(-i\lambda t_2) - 1 \right] + i \frac{\lambda}{\lambda^2 - \alpha_n^2} \left[ \sin \alpha_n t_2 \exp(-i\lambda t_2) - 1 \right]$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$  .

## Beispiel B11      Exponential-Ansatz

Für die gegebene Funktion  $f(t) = \exp(ist)$  folgt

$$d(\lambda) = - \frac{1}{i(\lambda-s)} \left[ \exp[-i(\lambda-s)t_2] - 1 \right]$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$ .

Damit können die gesuchten Übertragungsfunktionen für alle Lastkonfigurationen in Abhängigkeit des Systems angegeben werden.

### 2.2.3 Vollständige Lösungen

#### 2.2.3.1 Ohne Dämpfung

##### 2.2.3.1.1 Sinus-Ansatz

Für die Basisschwingung mit dem Sinus-Ansatz folgen nach Beispiel B3:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = \sum_n^1 c_n \{ E_{1n}(\lambda) f_{1n}(\lambda) + i E_{2n}(\lambda) f_{2n}(\lambda) \} \quad (24)$$

$$d_{\text{Freifeld}}(\lambda) = \sum_n^1 c_n \left( \begin{aligned} & \left[ \sum_1^L A_{1n}^1 \right] E_{1n}(\lambda) f_{1n}(\lambda) + \sum_1^L B_{1n}^1 F_1^1(\lambda) g_1^1(\lambda) + \\ & + i \left[ \sum_1^L A_{1n}^1 \right] E_{2n}(\lambda) f_{2n}(\lambda) + \sum_1^L B_{1n}^1 F_2^1(\lambda) g_2^1(\lambda) \end{aligned} \right) \quad (25)$$

Also ergibt sich die Übertragungsfunktion je  $n$  zu:

$$TF(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / d_{\text{Basis}}(\lambda)$$

Zum besseren Verständnis werden noch einmal die Abkürzungen aus Abschnitt 2.1 angegeben:

$$A_{1n}^1 = \frac{[(1/L) - BF^{k_1}] \alpha_n^2 - (1/L) \omega_1^2}{\alpha_n^2 - \omega_1^2} \quad B_{1n}^1 = \frac{BF^{k_1} \alpha_n \omega_1}{\alpha_n^2 - \omega_1^2}$$

$k$  = Bezugspunkt für  $BF^{k_1} = \underline{\Phi}^{k_1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{I} \cdot (\underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi})^{-1}$

$L$  = Zahl der berechneten Eigenwerte

$c_n$  = Koeffizienten der Lastentwicklung  $\alpha_n$

$\omega_1$  = Eigenwert 1

$\lambda$  = beliebiger Frequenzwert

$$E_{1n}(\lambda) = \frac{\alpha_n}{\lambda^2 - \alpha_n^2}$$

$$E_{2n}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \alpha_n^2}$$

$$F_1^1(\lambda) = \frac{\omega_1}{\lambda^2 - \omega_1^2}$$

$$F_2^1(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \omega_1^2}$$

$$\begin{aligned}
f_{1n}(\lambda) &= \cos \alpha_n t_2 \exp(-i\lambda t_2) - 1 & f_{2n}(\lambda) &= \sin \alpha_n t_2 \exp(-i\lambda t_2) \\
g_1^1(\lambda) &= \cos \omega_1 t_2 \exp(-i\lambda t_2) - 1 & g_2^1(\lambda) &= \sin \omega_1 t_2 \exp(-i\lambda t_2)
\end{aligned}$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$  .

### 2.2.3.1.2 Exponential-Ansatz

Für die Basisschwingung mit dem Exponential-Ansatz folgen nach Beispiel B4:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = \sum_s^{-\infty, +\infty} c_s G_{1s}(\lambda) f'_{1s}(\lambda) \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
d_{\text{Freifeld}}(\lambda) &= \sum_s^{-\infty, +\infty} c_s \sum_1^L \left( A_s^1 G_{1s}(\lambda) f'_{1s}(\lambda) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (C_s^1 - iB_s^1) G_3^1(\lambda) g'_{1^1}(\lambda) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (C_s^1 + iB_s^1) G_4^1(\lambda) g'_{2^1}(\lambda) \right) \quad (27)
\end{aligned}$$

Also ist die Übertragungsfunktion je s :

$$TF(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / d_{\text{Basis}}(\lambda)$$

Es sind folgende Abkürzungen verwandt worden:

$$\begin{aligned}
A_s^1 &= \frac{[(1/L) - BF^k] s^2 - (1/L) \omega^2}{s^2 - \omega^2} & B_s^1 &= i \frac{BF^k s \omega}{s^2 - \omega^2} \\
C_s^1 &= \frac{BF^k \omega^2}{s^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

$c_s$  = Koeffizienten der Lastentwicklung in s

$$G_{1s}(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda - s} \quad G_3^1(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda - \omega_1} \quad G_4^1(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda + \omega_1}$$

$$f'_{1s}(\lambda) = \exp[-i(\lambda - s)t_2] - 1$$

$$g'_{1^1}(\lambda) = \exp[-i(\lambda - \omega_1)t_2] - 1$$

$$g'_{2^1}(\lambda) = \exp[-i(\lambda + \omega_1)t_2] - 1$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$  .



### 2.2.3.2 Mit Dämpfung

#### 2.2.3.2.1 Sinus-Ansatz

Für die Basisschwingung mit dem Sinus-Ansatz folgen nach Beispiel B7:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = \sum_n^1 c_n \{ E'_{1n}(\lambda) f'_{1n}(\lambda) + i E'_{2n}(\lambda) f'_{2n}(\lambda) \} \quad (28)$$

$$d_{\text{Freifeld}}(\lambda) = \sum_n^1 c_n \sum_1^L \left( T_1^{1n} G_{1n}(\lambda) f'_{1n}(\lambda) + T_2^{1n} G_{2n}(\lambda) f'_{2n}(\lambda) + T_3^{1n} G_3^{1n}(\lambda) h'_{11}(\lambda) + T_4^{1n} G_4^{1n}(\lambda) h'_{21}(\lambda) \right) \quad (29)$$

Also ergibt sich die Übertragungsfunktion je  $n$  zu:

$$TF(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / d_{\text{Basis}}(\lambda)$$

Es sind folgende Abkürzungen verwandt worden:

$T_1^{1n} - T_4^{1n}$  wie in Beispiel B7

$c_n$  = Koeffizienten der Lastentwicklung  $\alpha_n$

$$\begin{aligned} E'_{1n}(\lambda) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} & E'_{2n}(\lambda) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda + \alpha_n} \\ G_{1n}(\lambda) &= -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} & G_{2n}(\lambda) &= -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda + \alpha_n} \\ G_3^{1n}(\lambda) &= -\frac{1}{A^1 + i\lambda} & G_4^{1n}(\lambda) &= -\frac{1}{B^1 + i\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{1n}(\lambda) &= \exp[-i(\lambda - \alpha_n)t_2] - 1 & f'_{2n}(\lambda) &= \exp[-i(\lambda + \alpha_n)t_2] - 1 \\ h'_{11}(\lambda) &= \exp[-(A^1 + i\lambda)t_2] - 1 & h'_{21}(\lambda) &= \exp[-(B^1 + i\lambda)t_2] - 1 \end{aligned}$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$  .

#### 2.2.3.2.2 Exponential-Ansatz

Für die Basisschwingung mit dem Exponential-Ansatz folgen nach Beispiel B4:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = \sum_s^{-\infty, +\infty} c_s G_{1s}(\lambda) f'_{1s}(\lambda) \quad (30)$$

$$d_{\text{Freifeld}}(\lambda) = \sum_s^{-\infty, +\infty} c_s \sum_1^L \left( T_1^{1s} G_{1s}(\lambda) f'_{1s}(\lambda) + T_3^{1s} G_3^{1s}(\lambda) h'_{11}(\lambda) + T_4^{1s} G_4^{1s}(\lambda) h'_{21}(\lambda) \right) \quad (31)$$

Also ist die Übertragungsfunktion je s :

$$TF(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / d_{\text{Basis}}(\lambda)$$

Es sind folgende Abkürzungen verwandt worden:

$T_s^1$  ,  $T_3^1$  ,  $T_4^1$  wie in Beispiel B8

$c_s$  = Koeffizienten der Lastentwicklung s

$$G_{1s}(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda-s} \quad f'_{1s}(\lambda) = \exp[-i(\lambda-s)t_2]^{-1}$$

$$G_3^1(\lambda) = -\frac{1}{A^1+i\lambda} \quad h'_{1^1}(\lambda) = \exp[-(A^1+i\lambda)t_2]^{-1}$$

$$G_4^1(\lambda) = -\frac{1}{B^1+i\lambda} \quad h'_{2^1}(\lambda) = \exp[-(B^1+i\lambda)t_2]^{-1}$$

mit den Grenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2$  .

#### 2.2.4 Partikuläre Lösung (mit Dämpfung)

In Punkt 2.1.2.2 ist bereits - nach Anschauung - die Übertragungsfunktion enthalten. Wird die Ableitung formal entsprechend Punkt 2.2 vollzogen, folgen:

$$d_{\text{Basis}}(\lambda) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n G_{1n}(\lambda) f'_{1n}(\lambda) \quad (32)$$

$$d_{\text{Freifeld}}(\lambda) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n \left( \sum_1^L TF^k_{1n} \right) G_{1n}(\lambda) f'_{1n}(\lambda) \quad (33)$$

mit den (bereits bekannten) Abkürzungen

$$G_{1n}(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\lambda-\alpha_n} \quad f'_{1n}(\lambda) = \exp[-i(\lambda-\alpha_n)t_2]^{-1}$$

Also ist die Übertragungsfunktion je n

$$TF(\lambda) = d_{\text{Freifeld}}(\lambda) / d_{\text{Basis}}(\lambda)$$

bzw.

$$TF(\lambda) = \sum_1^L TF^k_{1n} \quad (34)$$

mit  $TF^k_{1n}$  entsprechend (18).

### 2.2.5 Erläuterung der Ergebnisse

Um die erforderlichen Entwicklungen insgesamt bereitzustellen, sind die Übertragungsfunktionen in den Punkten 2.2.3 und 2.2.4 abgeleitet worden.

Betrachtet man z. B. die allgemeine Form des Exponential-Ansatzes [s. (31)], läßt sich das vollständige Ergebnis der Übertragungsfunktion dreigeteilt beurteilen:

- Die (bereits aus der Schwingungslösung bekannten) Parameter  $T$  sind jeweils lastabhängig ( $s$ ) ebenso wie eigenwertabhängig ( $l$ )
- Die Funktionen  $G(\lambda)$  sind im partikulären Lösungsteil nur lastabhängig [ $G_{1s}(\lambda)$ ], während im homogenen Teil eine Abhängigkeit von den Eigenwerten vorliegt [ $G_3^{-1}(\lambda)$  und  $G_4^{-1}(\lambda)$ ].
- Ebenso wie bei den Funktionen  $G(\lambda)$  verhalten sich die Zusatzfunktionen  $f'_{1s}(\lambda)$  sowie  $h'_{1^{-1}}(\lambda)$  bzw.  $h'_{2^{-1}}(\lambda)$ . Diese Zusatzfunktionen spezifizieren den Gesamtperiodenbereich, für den die Gültigkeit der Time-History definiert wurde.

Die vollständige Übertragungsfunktion wird also aus der Superposition der Lastgliedentwicklung mit Anteilen der Eigenwerte in Verbindung mit der definierten Zeitgeschichte gebildet.

Wird dagegen nur der partikuläre Anteil abgespalten, erhält man einen einfachen Summenausdruck in  $(n,l)$  - also in Abhängigkeit der Last- und Eigenwert-Variablen, der aber nur noch [bei Rücktransformation in den Zeitbereich] einer Zeitfunktion in Abhängigkeit des Lastparameters  $n$  zugeordnet ist. Letztere Lösung erfüllt jedoch nicht die Anfangsbedingungen des Schwingungssystems.

### 2.2.6 Anmerkungen zur Fast Fourier Transformation (FFT)

Im Abschnitt 2.2 ist die theoretische Ermittlung der Übertragungsfunktionen aufgezeigt worden, die einen vollständigen Einblick des Aufbaus und der Einzelparameter ermöglichen. Zur praktischen Berechnung ist es allerdings (extrem) vorteilhaft, sich der 'Fast Fourier Transform Analysis' (FFT) zu bedienen; das Prozedere hierzu ist z. B. in /5/ ausführlich behandelt.

Das allgemeine Funktionenpaar (20) und (21) wird in diskrete Abschnitte unterteilt, so daß hieraus folgt:

$$f(t_m) = \frac{\Delta\lambda}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d(\lambda_n) \exp(+i\lambda_n t_m) \quad (35a)$$

bzw.

$$d(\lambda_n) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(t_m) \exp(-i\lambda_n t_m) \quad (35b)$$

Es gilt  $\lambda_1 = \Delta\lambda = 2\pi / T_p$  ; wobei  $T_p$  die entsprechend 'lang zu wählende' Zeitperiode darstellt, die auch über den eigentlichen Schwingungsablauf hinausgeht, also signifikante Nullen aufweist.  $\Delta\lambda$  als jeweiliger Frequenzzuwachs wird durch die vorher gewählte Größe von  $T_p$  festgelegt. Der diskrete Zeitschritt ist  $t_m = m \Delta t$  , wenn  $\Delta t$  das konstant gewählte Zeitinkrement bedeutet. Mit

$$m = 1, 2, \dots, N \quad \text{und}$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

erhält man aus den Beziehungen (35a) und (35b)

$$f(t_m) = \frac{\Delta\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} d(\lambda_n) \exp(+i2\pi nm/N) \quad (36a)$$

bzw.

$$d(\lambda_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} f(t_m) \exp(-i2\pi nm/N) \quad (36b)$$

Die Auswertung des Exponential-Ausdrucks vereinfacht sich extrem, wenn die Zahl der Zeitinkremente gesetzt wird zu

$$N = 2^M \quad . \quad (37)$$

Die hierfür erforderlichen Programmroutinen sind standardmäßig abrufbar.

Bei der FFT einer gegebenen Funktion (im Zeitbereich) ist nach Wahl des Parameters M die Zahl der Zeitschritte nach (37) festgelegt, also auch die Gesamtzeit

$$T_p = N \cdot \Delta t \quad .$$

Ebenso ergibt sich der Frequenzzuwachs

$$\Delta\lambda = 2\pi / (N \cdot \Delta t) \quad .$$

Nach der Durchführung der FFT liegt für den gewandelten (komplexen) Vektor, dessen Wertepaare die Koeffizienten der spezi-

fischen Frequenzen realisieren, folgender Aufbau nach Bild 1 vor:

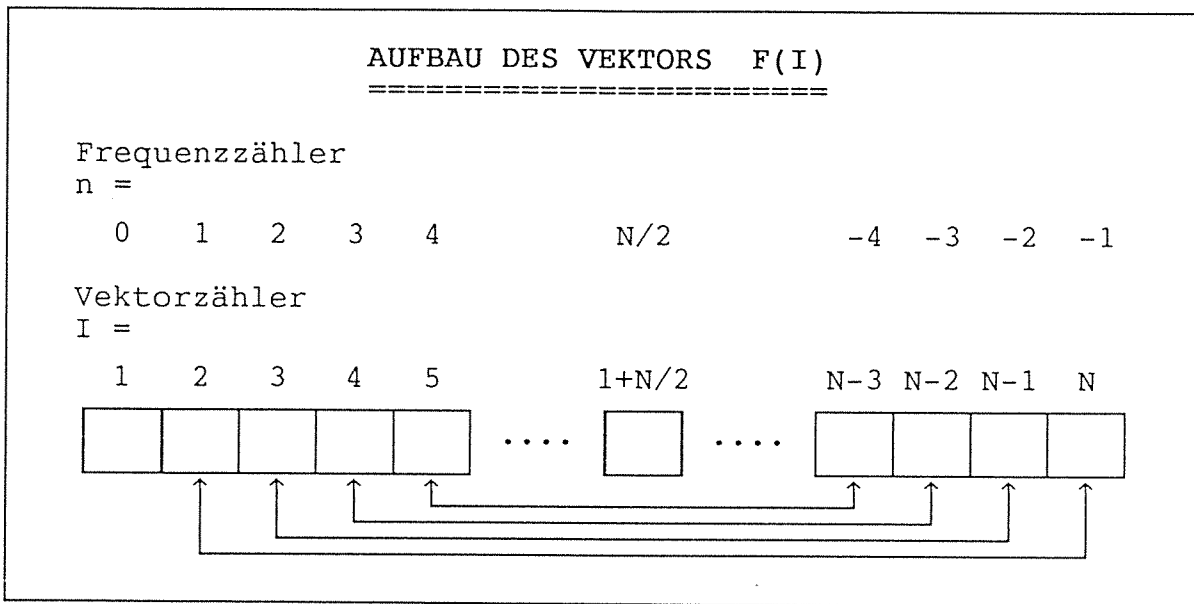


Bild 1

Entsprechend (35a) ist die Interpretation für  $\lambda_n$  innerhalb des Bereiches  $-\infty \leq \lambda_n \leq +\infty$  durchzuführen, während in (36a) nur der positive Bereich gewählt wird. Daher ist die Besetzung des komplexen Vektors  $F(I)$ ,  $I=1, N$  in Bild 1 gewählt:

$$I = 1 \quad \lambda_0 = 0 \cdot \Delta\lambda$$

(Dieser Wert entspricht dem arithmetischen Mittel der realen Zeitfunktion)

$$I = 2 \quad \lambda_1 = 1 \cdot \Delta\lambda$$

$$I = 3 \quad \lambda_2 = 2 \cdot \Delta\lambda$$

.

.

.

$$I = 1+N/2 \quad \lambda_{N/2} = N/2 \cdot \Delta\lambda$$

Der Restvektor wird dann durch die 'negativen' Anteile der Beziehung (35a) gebildet, und zwar

$$I = N-1 \quad \lambda_{-2} = -2 \cdot \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad F(N-1) = \text{CONJG}(F(3))$$

$$I = N \quad \lambda_{-1} = -1 \cdot \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad F(N) = \text{CONJG}(F(2))$$

Die Rücktransformation liefert selbstverständlich die reale Ausgangsfunktion (im Zeitbereich).

## 2.3 Berechnungsalternativen

### 2.3.1 Allgemeines Prozedere

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 sind die erforderlichen Lösungen - im Zeit- und Frequenzraum - derart vorbereitet worden, daß bei Kenntnis der Basiserregung die zugehörige Freifeldschwingung angegeben wird. Es gilt jedoch, die Umkehrung des Vorgangs vorzunehmen, also aus  $\ddot{u}^k_{\text{total}}(t)$  [Freifeld] die entsprechende Basiserregung  $\ddot{u}_b(t)$  [Basis] zu ermitteln.

Beim gegebenen Modell des Schwingungssystems ist laut Grundvoraussetzung des Kapitels 2. als erster Schritt eine Berechnung der Eigenwerte und -formen vorzunehmen (s. z. B. /6/), wie sie in allen gängigen Programm-Codes implementiert ist. Hier sei bereits bemerkt, daß in Abhängigkeit der berechneten Eigenwerte  $L$  der Aufwand entsprechend steigen wird. Des Weiteren ist die (gegebene) Zeit-Geschichte der Freifeldschwingung lastspezifisch aufzubereiten, je nachdem welcher Lösungsweg verfolgt werden soll, z. B.

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^1 U_n \cdot \sin \alpha_n t \quad (38a)$$

bzw.

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^{-\infty} U_n \cdot \exp(i\alpha_n t) \quad (38b)$$

Mittels dieser Schreibweise können nun (unter o. g. Voraussetzungen) unterschiedliche Lösungswege angegeben werden.

### 2.3.2 Entkoppelte Partikulärlösung im Zeitbereich

Entsprechend Abschnitt 2.1.2.2 ist die Freifeldschwingung mittels der Übertragungsfunktion direkt auf die Basisschwingung zurückzuführen. Es gilt also

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^{-\infty} U_n \cdot \exp(i\alpha_n t) \quad (39a)$$

oder

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^{-\infty} H_n \left( \sum_1^L \text{TF}^k_{1n} \right) \exp(i\alpha_n t) \quad (39b)$$

Damit erhält man die unbekanntenen Koeffizienten  $H_n$  zu

$$H_n = U_n / \sum_1^L \text{TF}^k_{1n} \quad (40)$$

und mit den Abkürzungen aus (2.1.2) :

$$TF^{k_{1n}} = \frac{1}{L} + BF^{k_{1n}} \frac{1}{(\gamma_{1n}^2 - 1) + i2D_1 \gamma_{1n}}$$

und

$$\gamma_{1n} = \omega_1 / \alpha_n$$

$$BF^{k_{1n}} = \underline{\Phi}^k_{1n} \cdot \underline{\Phi}^T_{1n} \cdot \underline{M} \cdot \underline{I} \cdot (\underline{\Phi}^T_{1n} \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_{1n})^{-1} .$$

Nach Bestimmung der Übertragungsfunktion mit

$$\alpha_n = n \alpha_0 \quad \text{und} \quad T_0 \alpha_0 = 2\pi$$

ist für jedes n der unbekannte Koeffizient  $H_n$  zu ermitteln, so daß sich letztlich ergibt

$$\ddot{u}_{b \text{ Partikulär}}(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n \cdot \exp(i\alpha_n t) . \quad (41)$$

Zu dieser Lösung gilt zu bemerken, daß sie eine Teillösung, nämlich den Partikuläranteil, darstellt, da aus der Gesamtlösung die mit dem Dämpfungsglied behafteten homogenen Anteile vernachlässigt werden. Es ist jedoch davon auszugehen, daß wegen des Dämpfungsanteils [s. (2.1.2)] der Einfluß der homogenen Lösung nach einem bestimmten Zeitschritt verschwinden wird. Infolge dieses Phänomens gelingt es, eine Entzerrung bzw. Abspaltung beider Lösungsanteile vorzunehmen, so daß nun mit dem entkoppelten Partikuläranteil allein eine Gesamtlösung erreicht werden kann.

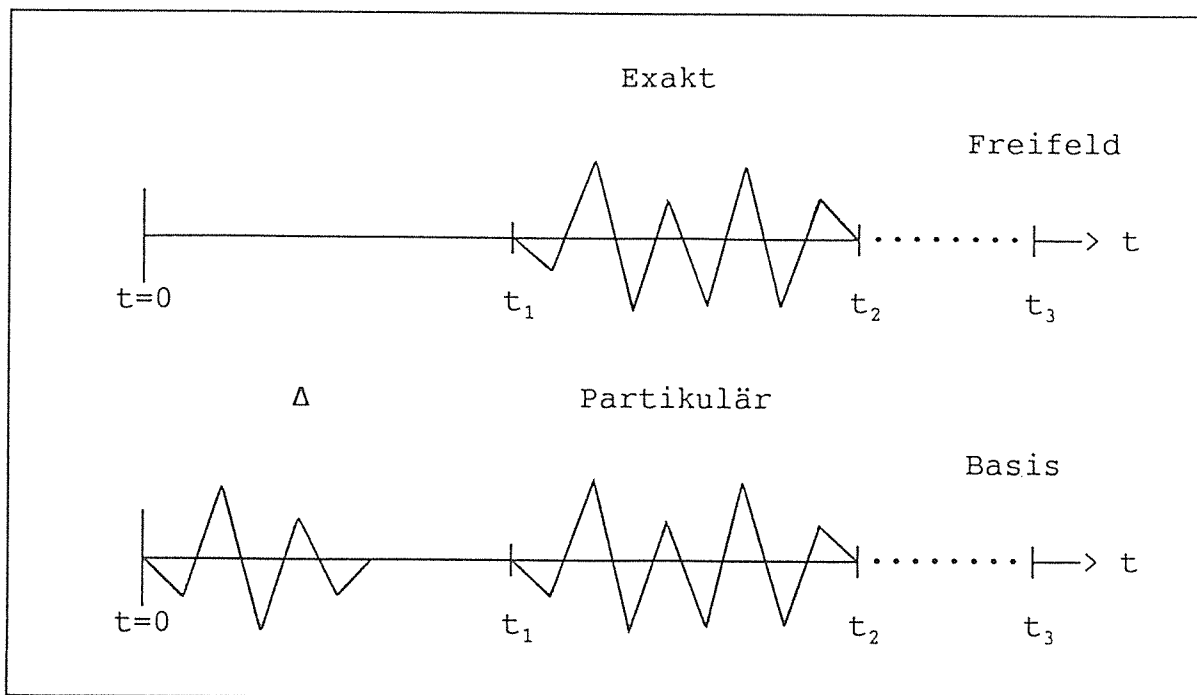


Bild 2 Prinzip der Partikulärlösung

Entsprechend Bild 2 wird definiert, daß die Freifeldschwingung erst zum Zeitpunkt  $t_1$  einsetzt, wobei  $t_1$  größer als der registrierbare Einfluß des homogenen Anteils sei. Die eigentliche Schwingung selbst liegt zwischen  $t_1 \leq t \leq t_2$ , während die Reihenentwicklung selbst zwischen  $0 \leq t \leq t_3$  (mit  $t_3 > t_2$ ) vorgenommen wird.

Das Ergebnis (im Zeitbereich) liefert für die Basisschwingung für  $t_1 \leq t \leq t_2$  die 'exakte' Lösung, während im Anfangsbereich  $0 \leq t \leq t_3$  noch eine  $\Delta$ -Schwingung an der Basis zu verzeichnen ist; diese ergibt sich aus dem alleinigen Partikuläransatz, der die Anfangsbedingungen nicht erfüllt und bei Anwendung von (39b) zu der Restschwingung im Anfangsbereich führt.

### 2.3.3 Fourier-Gesamtlösung im Zeitbereich

Während im vorangehenden Kapitel die Gesamtlösung unter Vernachlässigung der sog.  $\Delta$ -Lösung erhalten wurde, soll die vollständige Lösung nun direkt erzielt werden. Hierbei wird analog zum Kapitel 2.2.3 vorgegangen.

#### 2.3.3.1 MDOF-System ohne Dämpfung

##### 2.3.3.1.1 Sinus-Ansatz

Aus der allgemeinen (noch unbekannt) Basisbeschleunigung

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^1 c_n \cdot \sin \alpha_n t \quad (42)$$

erhält man die (gemessene) Freifeldbeschleunigung mit

$$v(t) = \ddot{u}_{total}^k(t) \quad \text{zu}$$

$$v(t) = \sum_n^1 c_n F_n(t) \quad (43)$$

mit der Funktion

$$F_n(t) = c_n \sum_1^L [ A_n^1 \sin \alpha_n t + B_n^1 \sin \omega_1 t ] \quad .$$

Hier sind die Konstanten  $A_n^1$  bzw.  $B_n^1$  dem Beispiel B3 zu entnehmen.



Die gemessene Freifeldfunktion wird nun entsprechend (38a) nach Fourier in sin-Reihen entwickelt zu

$$\ddot{u}^k_{\text{total}}(t) = \sum_n^1 U_n \cdot \sin \alpha_n t \quad . \quad (\alpha_n = n\alpha_0 \quad ; \quad T_0 \alpha_0 = 2\pi)$$

Um auch die Identität zu den Funktionen  $F_n(t)$  herzustellen, werden die Ausdrücke  $F_n(t)$  ebenso in sin-Reihen entwickelt, so daß sich die gekoppelte Beziehung ergibt

$$\sum_n^1 U_n \cdot \sin \alpha_n t = \sum_n^1 c_n \sum_m^1 f_{m_n} \cdot \sin \alpha_m t$$

bzw.

$$\sum_n^1 U_n \cdot \sin \alpha_n t = \sum_n^1 \sum_m^1 c_m \cdot f_{n_m} \cdot \sin \alpha_n t$$

mit  $(\alpha_n = n\alpha_0 \quad ; \quad T_0 \alpha_0 = 2\pi)$  und  $(\alpha_m = m\alpha_0 \quad ; \quad T_0 \alpha_0 = 2\pi)$  .

Hierbei ist  $n$  fest und  $m$  variabel , also ist  $f_{n_m} \neq f_{m_n}$  :

$$U_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \ddot{u}^k_{\text{total}}(t) \sin \alpha_n t dt$$

und

$$f_{n_m} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F_m(t) \sin \alpha_n t dt$$

Diese Beziehung führt zu einem allgemeinen Gleichungssystem

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad , \quad (44)$$

in dem  $\underline{F}$  die Koeffizientenmatrix der Unbekannten  $\underline{c}$  und  $\underline{v}$  die bekannte rechte Seite darstellt. Betrachtet man die  $n$ -te Zeile der Matrix  $\underline{F}$ , so folgt für die Einzelmatrixglieder und mit der Maximalzahl  $N$  der Fourierentwicklung

$$f_{n_1} \cdot c_1 + f_{n_2} \cdot c_2 + \dots + f_{n_{N-1}} \cdot c_{N-1} + f_{n_N} \cdot c_N = U_n \quad .$$

Wegen der allgemeinen Form der Funktionen  $F_n(t)$  erhält man eine vollbesetzte Matrix  $\underline{F}$ , die für die jeweiligen geraden Glieder symmetrisch und für die ungeraden Glieder antimetrisch belegt ist. Nach Aufstellung und Lösung von (44) mit

$$\underline{c} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{v} \quad (45)$$

liegen nunmehr die Unbekannten  $c_n$  vor, so daß jetzt die Basisbeschleunigung nach (42) berechnet werden kann.

### 2.3.3.1.2 Exponential-Ansatz

Aus der allgemeinen (noch unbekanntem) Basisbeschleunigung

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} c_n \cdot \exp(i\alpha_n t) \quad (46)$$

erhält man wie vorher die Freifeldbeschleunigung

$$v(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} c_n F_n(t) \quad (47)$$

mit der Funktion

$$F_n(t) = c_n \sum_1^L \{ A_n^1 \cdot \exp(i\alpha_n t) + B_n^1 \cdot \sin \omega_1 t + C_n^1 \cdot \cos \omega_1 t \} .$$

Die Konstanten  $A_n^1$ ,  $B_n^1$  sowie  $C_n^1$  sind dem Beispiel B4 zu entnehmen.

Die gemessene Freifeldfunktion wird nun entsprechend (38b) nach Fourier in Exponential-Reihen entwickelt zu

$$\ddot{u}_{\text{total}}^k(t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} U_n \cdot \exp(i\alpha_n t) \quad \text{bei } (\alpha_n = n\alpha_0 ; T_0 \alpha_0 = 2\pi) .$$

Mit

$$U_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \ddot{u}_{\text{total}}^k(t) \exp(-i\alpha_n t) dt$$

und

$$f_{nm} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} F_m(t) \exp(-i\alpha_n t) dt$$

kann das [in diesem Fall komplexe] Gleichungssystem

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad (48)$$

aufgestellt werden; somit sind die Unbekannten  $c_n$  bekannt, und die Basiserregung kann mit (46) ermittelt werden.

### 2.3.3.2 MDOF-System mit Dämpfung

#### 2.3.3.2.1 Sinus-Ansatz

Das identische Vorgehen wie in Abschnitt 2.3.3.1 führt mit den Funktionen

$$F_n(t) = c_n \sum_1^L \{ T_1^1 \cdot \exp(i\alpha_n t) + T_2^1 \cdot \exp(-i\alpha_n t) + \\ + T_3^1 \cdot \exp(-A^1 t) + T_4^1 \cdot \exp(-B^1 t) \}$$

zu den gesuchten Unbekannten  $c_n$ .

Die Konstanten  $T_1^1$  -  $T_4^1$  sowie  $A^1$  und  $B^1$  sind dem Beispiel B7 zu entnehmen.

### 2.3.3.2.2 Exponential-Ansatz

Das identische Vorgehen wie in Abschnitt 2.3.3.1 führt mit den Funktionen

$$F_n(t) = c_n \sum_1^L [ T_n^1 \cdot \exp(i\alpha_n t) + T_3^1 \cdot \exp(-A^1 t) + T_4^1 \cdot \exp(-B^1 t) ]$$

zu den gesuchten Unbekannten  $c_n$ .

Die Konstanten  $T_n^1$ ,  $T_3^1$  und  $T_4^1$  sowie  $A^1$  und  $B^1$  sind dem Beispiel B8 zu entnehmen.

An dieser Stelle sei auf den Sonderfall hingewiesen; falls nur der partikuläre Lösungsansatz verwandt wird, werden die beiden restlichen Terme von  $F_n(t)$  wegen der Dämpfungsglieder nach einer bestimmten Zeit  $t$  verschwinden.

$T_n^1$  (s. Beispiel B8) entspricht identisch  $TF_{1n}^k$  nach (18), also der Übertragungsfunktion. In diesem Fall wird

$$T_n^1 \Rightarrow TF_{1n}^k \quad .$$

Dann ist die weitere Berechnung identisch Abschnitt 2.3.2 .

### 2.3.4 Gauß'sche Gesamtlösung im Zeitbereich mit Sinus-Ansatz

#### 2.3.4.1 1DOF-System ohne Dämpfung

Ziel ist, die Basisfunktion im Gesamtschritt, d. h. ohne die Fourier-Einzelentwicklung zu ermitteln.

Der Lösungsweg wird - entsprechend Beispiel B3 - nur für den Sinus-Ansatz der Basisbeschleunigung gezeigt, also

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^{\infty} c_n \sin \alpha_n t \quad .$$

Die Freifeldschwingung läßt sich dann in allgemeiner Form angeben

$$v(t) = \sum_n^{\infty} c_n F_n(t) \quad (49a)$$

oder

$$\ddot{u}_{\text{total}}^k(t) = \sum_n^{\infty} c_n [ A_n \sin \alpha_n t + B_n \sin \omega t ] \quad (49b)$$

Hierbei sind  $A_n$  und  $B_n$  die in Abschnitt 2.1.1.2 verwendeten Abkürzungen (mit  $l=1$ ). Aus der Forderung des Minimums der Fehlerquadrate über einen gewählten Zeitschritt  $T$ , also

$$\int_0^T \left[ v(t) - \sum_n^1 c_n F_n(t) \right]^2 dt \Rightarrow \text{Min} \quad ,$$

ergibt sich die Ausgangsbeziehung einer beliebigen Zeile  $m$  für die unbekanntenen Koeffizienten  $c_n$

$$\int_0^T \left[ v(t) - \sum_n^1 c_n [ A_n \sin \alpha_n t + B_n \sin \omega t ] \right] \cdot \left( A_m \sin \alpha_m t + B_m \sin \omega t \right) dt = 0 \quad (50)$$

Diese Beziehung führt zu einem allgemeinen Gleichungssystem

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad , \quad (51)$$

in dem  $\underline{F}$  die Matrix der unbekanntenen Koeffizienten  $\underline{c}$  und  $\underline{v}$  die bekannte rechte Seite darstellt. Betrachtet man die  $m$ -te Zeile der Matrix  $\underline{F}$ , so folgt für die Einzelglieder der Matrix

$$f_{mn} = \int_0^T \left[ A_m A_n \sin \alpha_m t \sin \alpha_n t + A_m B_n \sin \alpha_m t \sin \omega t + B_m A_n \sin \alpha_n t \sin \omega t + B_m B_n \sin \omega t \sin \omega t \right] dt$$

und

$$v_m = \int_0^T v(t) [ A_m \sin \alpha_m t + B_m \sin \omega t ] dt \quad .$$

$f_{mn}$  läßt sich in eine Summenmatrix  $\underline{S}$  überführen zu

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\text{mit} \quad f_{mn} = S_{11} + S_{12} + S_{21} + S_{22} \quad .$$

Hierbei ist:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & m \neq n \\ A_m A_n T / 2 & m = n \end{array} \right. \\ S_{21} & = B_m A_n \frac{-\alpha_n (-1)^n}{\alpha_n^2 - \omega^2} \sin \omega T \\ S_{12} & = A_m B_n \frac{-\alpha_m (-1)^m}{\alpha_m^2 - \omega^2} \sin \omega T \\ S_{22} & = B_m B_n T / 2 \end{aligned} \right\}$$

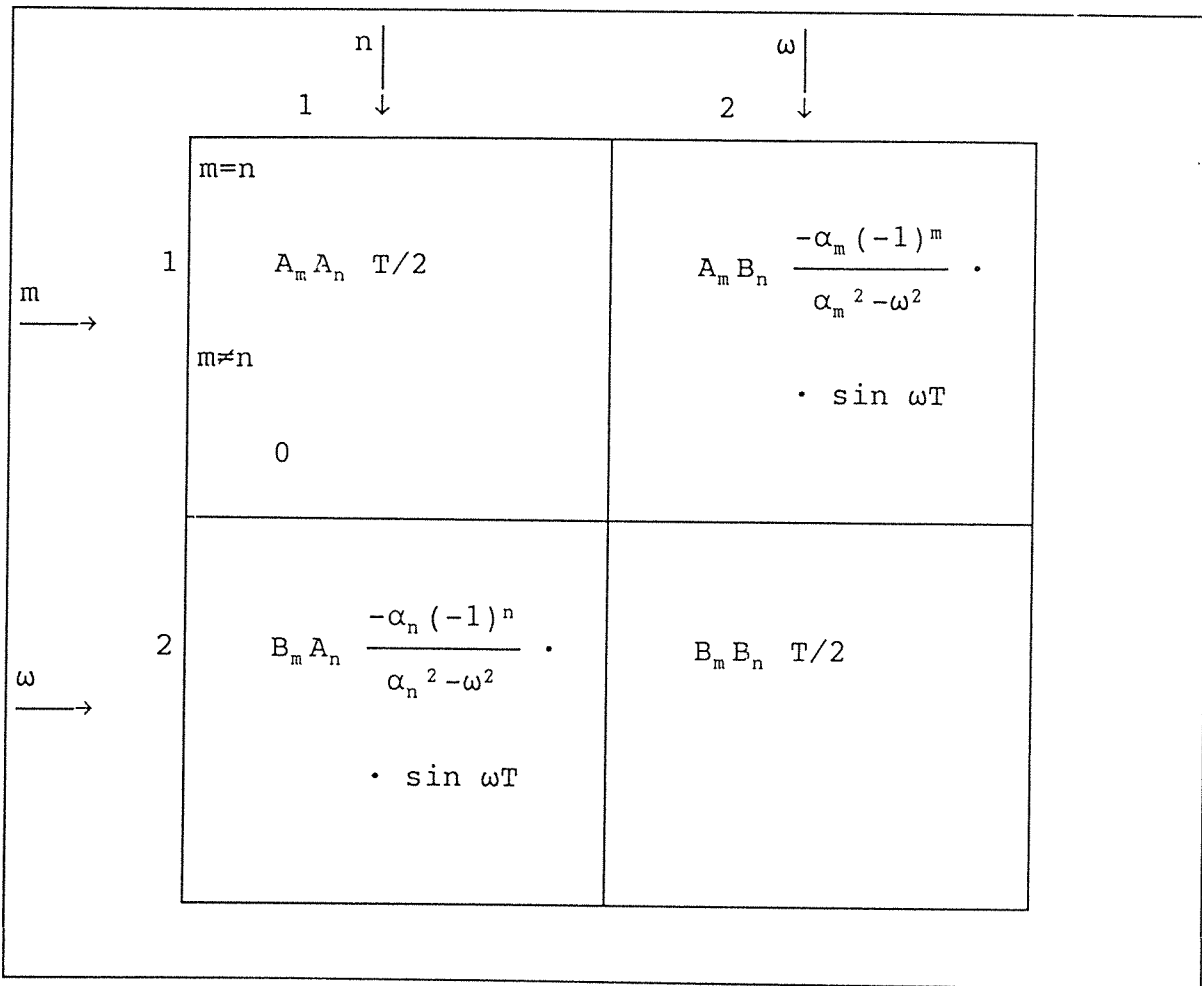


Bild 3 Summenmatrix-Prinzip  
(1DOF-System ohne Dämpfung)

Um die allgemeinen Beziehungen anzugeben, wird (52) für die Summenmatrix  $\underline{S}$  schematisch entwickelt (s. Bild 3).

Nach Aufstellung und Lösung von (51) mit

$$\underline{c} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{v} \tag{53}$$

sind die Unbekannten  $c_n$  bekannt, so daß danach die Basisbeschleunigung  $\ddot{u}_b(t)$  berechnet werden kann.

Wegen der durch die Eigenschwingung bedingten Zusatzfunktion ist das Gesamtsystem  $\underline{F}$  auch in den Nebengliedern besetzt, so daß - wie in der allgemeinen Fourier-Analyse - keine Entkopplung der Gesamtmatrix vorliegt. Wird bei einer beliebigen 'Lastvorgabe' eine große Anzahl der Funktionenentwicklung erforderlich, erhält man - besonders für große m- bzw. n-Anteile - eine ungünstiger konditionierte Matrix  $\underline{F}$ ; diese Eigenschaft gilt auch für die Hauptdiagonalglieder.

### 2.3.4.2 MDOF-System ohne Dämpfung

Das identische MDOF-System kann dann aus dem System der Summenmatrix entwickelt werden, in dem jetzt in Form der Doppelsumme über die Zahl der berechneten Eigenwerte zu summieren ist.

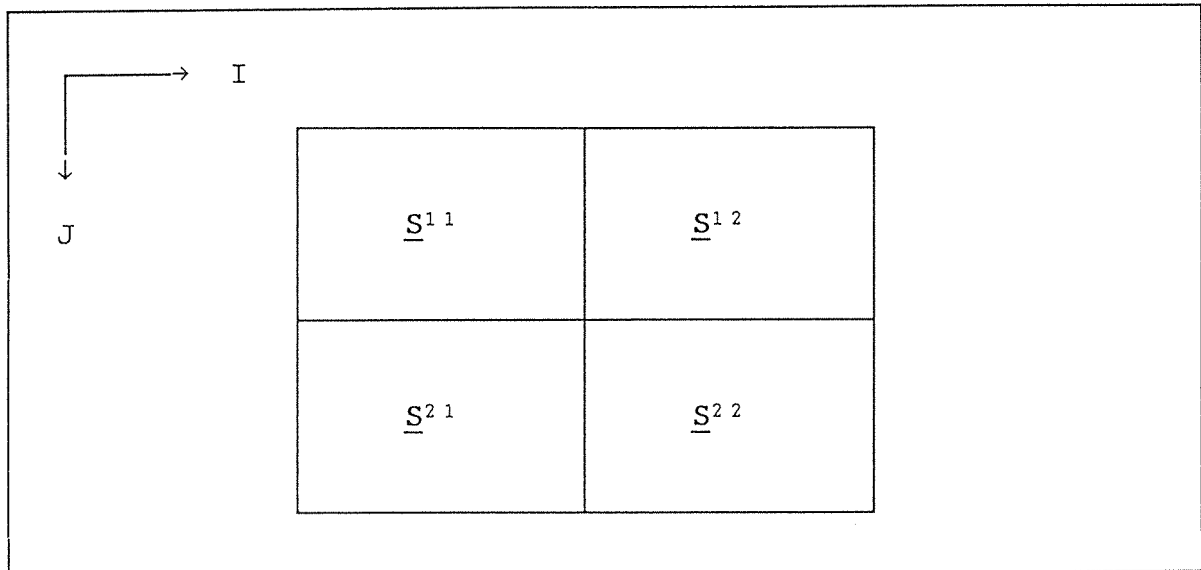


Bild 4 Summenmatrix-Prinzip  
(2DOF-System ohne Dämpfung)

Am Beispiel  $L = 2$  ist das Schema für  $\underline{S}$

$$\underline{S} \llcorner == \sum_I^{1,L} \sum_J^{1,L} \underline{S}^{I,J} \quad (1\text{DOF}) \quad (54)$$

oder schematisch (wie in Bild 4 bezeichnet).

Die allgemeinen Koeffizienten mit  $I, J = 1, L$  sind dann gegeben:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^{I,J} & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & m \neq n \\ A_m^I A_n^J T / 2 & m = n \end{array} \right. \\ S_{21}^{I,J} & = B_m^I A_n^J \frac{-\alpha_n (-1)^n}{\alpha_n^2 - \omega_I^2} \sin \omega_I T \\ S_{12}^{I,J} & = A_m^I B_n^J \frac{-\alpha_m (-1)^m}{\alpha_m^2 - \omega_J^2} \sin \omega_J T \\ S_{22}^{I,J} & \left\{ \begin{array}{ll} B_m^I B_n^J T / 2 & I = J \\ B_m^I B_n^J \left[ -\frac{\omega_I}{\omega_I^2 - \omega_J^2} \cos \omega_I T \sin \omega_J T + \right. & \\ \left. + \frac{\omega_J}{\omega_I^2 - \omega_J^2} \cos \omega_J T \sin \omega_I T \right] & I \neq J \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

### 2.3.4.3 1DOF-System mit Dämpfung

Für die identische Basisschwingung

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^1 c_n \sin \alpha_n t$$

ist die Freifeldschwingung nach Beispiel B7

$$\ddot{u}_{\text{total}}(t) = \sum_n^1 c_n \{ T_{1n} \cdot \exp(i\alpha_n t) + T_{2n} \cdot \exp(-i\alpha_n t) + T_{3n} \cdot \exp(-At) + T_{4n} \cdot \exp(-Bt) \} .$$

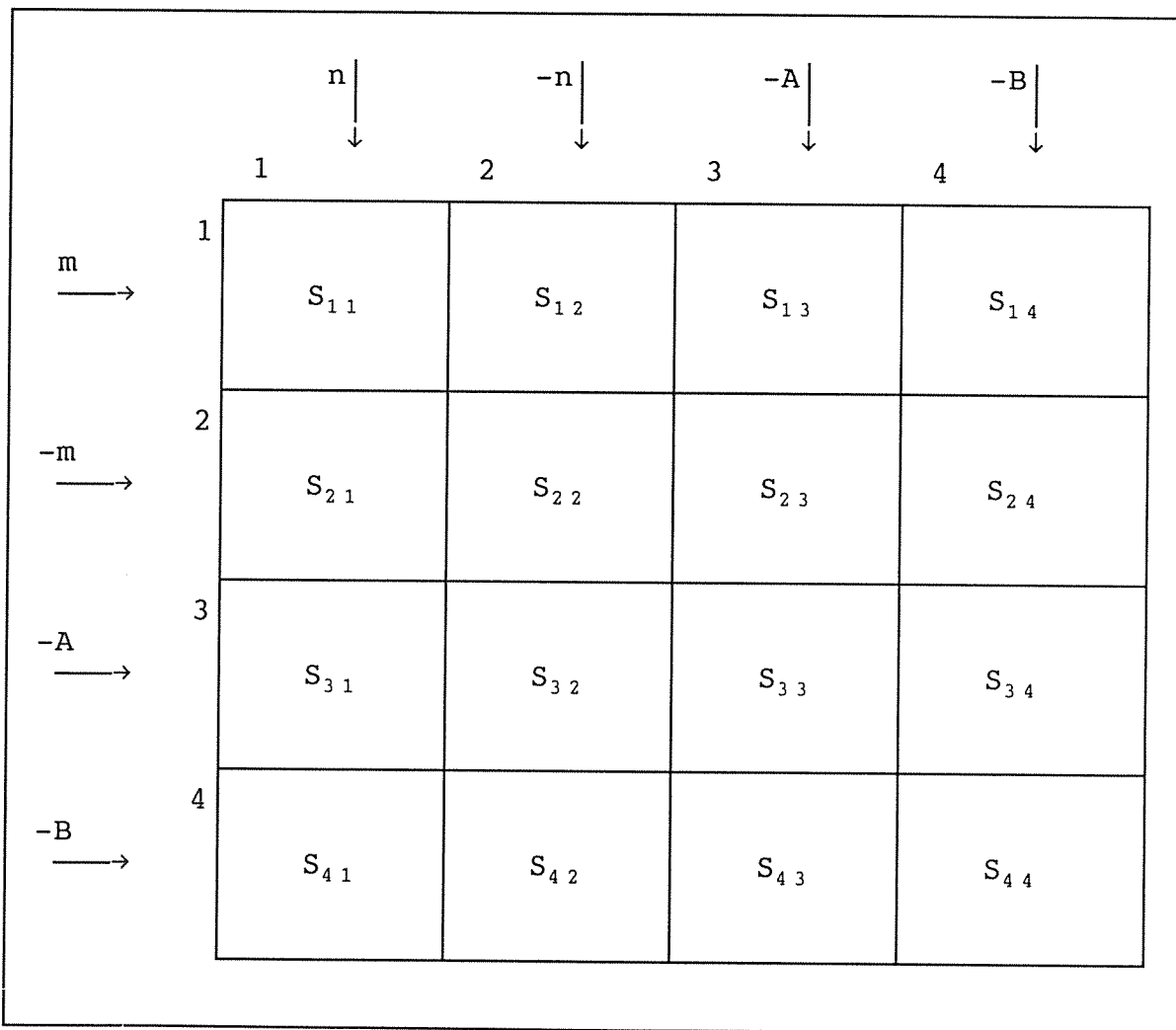


Bild 5 Summenmatrix-Prinzip (1DOF-System mit Dämpfung)

Die Forderung des Minimums der Fehlerquadrate führt in diesem Falle auf eine Summenmatrix  $\underline{S}$  mit

$$\underline{S} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ & \end{bmatrix} , \quad (55)$$

deren Schema wie in Kapitel 2.3.4.1 nach den Variablen  $m$  und  $\omega$

bzw.  $n$  und  $\omega$  zu zerlegen sind, wobei hierbei die  $\omega$ -Werte durch  $A (= D\omega - ik)$  bzw.  $B (= D\omega + ik)$  zu ersetzen sind, dargestellt in Bild 5.

In Tab. 1 sind die spezifischen Werte der Matrix-Einzelsummanden zusammengestellt (mit  $L$  identisch Eins, also  $I=J=1$ ), so daß die Besetzung der Matrix  $\underline{F}$  folgt:

$$f_{mn} = \sum_i^1 \sum_j^4 S_{ij}$$

#### 2.3.4.4 MDOF-System mit Dämpfung

Wie in Abschnitt 2.3.4.2 erfolgt eine erweiterte Entwicklung am 1DOF-System zu

$$\underline{S} \Leftarrow \sum_I^L \sum_J^L \underline{S}^{IJ} \quad (1\text{DOF}) \quad . \quad (56)$$

Die Einzelkoeffizienten der Summenmatrix sind in Tab. 1 angegeben.

Setzt man hier die Dämpfung  $D = 0$ , so kann gezeigt werden, daß die Werte der Tab. 1 in die Ausdrücke des Abschnitts 2.3.4.2 überführt werden.



Tab. 1

Einzelglieder der Summenmatrix  
(MDOF-System mit Dämpfung)

$S_{11}^{IJ} = T_{1m}^I T_{1n}^J$	$\begin{cases} 0 & m=n \\ \frac{1}{i(\alpha_m + \alpha_n)} [(-1)^{m+n} - 1] & m \neq n \end{cases}$
$S_{12}^{IJ} = T_{1m}^I T_{2n}^J$	$\begin{cases} T & m=n \\ \frac{1}{i(\alpha_m - \alpha_n)} [(-1)^{m-n} - 1] & m \neq n \end{cases}$
$S_{13}^{IJ} = T_{1m}^I T_{3n}^J$	$\frac{1}{-A^J + i\alpha_m} [(-1)^m \exp(-A^J T) - 1]$
$S_{14}^{IJ} = T_{1m}^I T_{4n}^J$	$\frac{1}{-B^J + i\alpha_m} [(-1)^m \exp(-B^J T) - 1]$
$S_{21}^{IJ} = T_{2m}^I T_{1n}^J$	$\begin{cases} T & m=n \\ \frac{1}{-i(\alpha_m - \alpha_n)} [(-1)^{m-n} - 1] & m \neq n \end{cases}$
$S_{22}^{IJ} = T_{2m}^I T_{2n}^J$	$\begin{cases} 0 & m=n \\ \frac{1}{-i(\alpha_m + \alpha_n)} [(-1)^{m+n} - 1] & m \neq n \end{cases}$
$S_{23}^{IJ} = T_{2m}^I T_{3n}^J$	$\frac{1}{-A^J - i\alpha_m} [(-1)^m \exp(-A^J T) - 1]$
$S_{24}^{IJ} = T_{2m}^I T_{4n}^J$	$\frac{1}{-B^J - i\alpha_m} [(-1)^m \exp(-B^J T) - 1]$
$S_{31}^{IJ} = T_{3m}^I T_{1n}^J$	$\frac{1}{-A^I + i\alpha_n} [(-1)^n \exp(-A^I T) - 1]$
$S_{32}^{IJ} = T_{3m}^I T_{2n}^J$	$\frac{1}{-A^I - i\alpha_n} [(-1)^n \exp(-A^I T) - 1]$
$S_{33}^{IJ} = T_{3m}^I T_{3n}^J$	$\frac{1}{-A^I - A^J} [\exp(-\{A^I + A^J\}T) - 1]$
$S_{34}^{IJ} = T_{3m}^I T_{4n}^J$	$\frac{1}{-A^I - B^J} [\exp(-\{A^I + B^J\}T) - 1]$
$S_{41}^{IJ} = T_{4m}^I T_{1n}^J$	$\frac{1}{-B^I + i\alpha_n} [(-1)^n \exp(-B^I T) - 1]$
$S_{42}^{IJ} = T_{4m}^I T_{2n}^J$	$\frac{1}{-B^I - i\alpha_n} [(-1)^n \exp(-B^I T) - 1]$
$S_{43}^{IJ} = T_{4m}^I T_{3n}^J$	$\frac{1}{-A^J - B^I} [\exp(-\{A^J + B^I\}T) - 1]$
$S_{44}^{IJ} = T_{4m}^I T_{4n}^J$	$\frac{1}{-B^J - B^I} [\exp(-\{B^J + B^I\}T) - 1]$

### 2.3.5 Beispiele

#### 2.3.5.1 Aufbereitung eines 2DOF-Systems

Entsprechend /10/ (S. 38) wird ein Beispiel für ein 2DOF-System gewählt, wie in Bild 6 abgebildet, mit den Parametern:

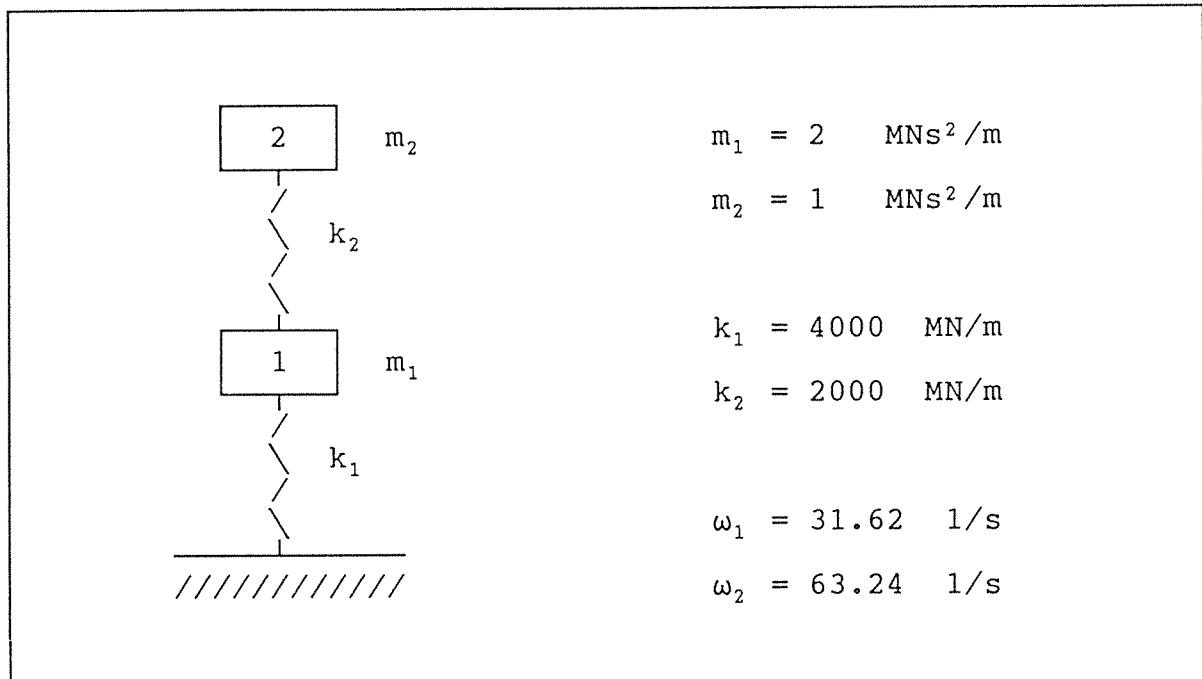


Bild 6 2DOF-System

Die gesuchten Beteiligungsfaktoren ergeben sich nach (9) mit

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{zu}$$

$$\underline{\mathbf{BF}} = \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.3333 \\ 0.6666 & 0.3333 \end{bmatrix} .$$

#### 2.3.5.2 Aufbereitung eines 3DOF-Systems

Entsprechend /4/ (S. 127) wird ein Beispiel für ein 3DOF-System nach Bild 7 mit folgenden Parametern gewählt:

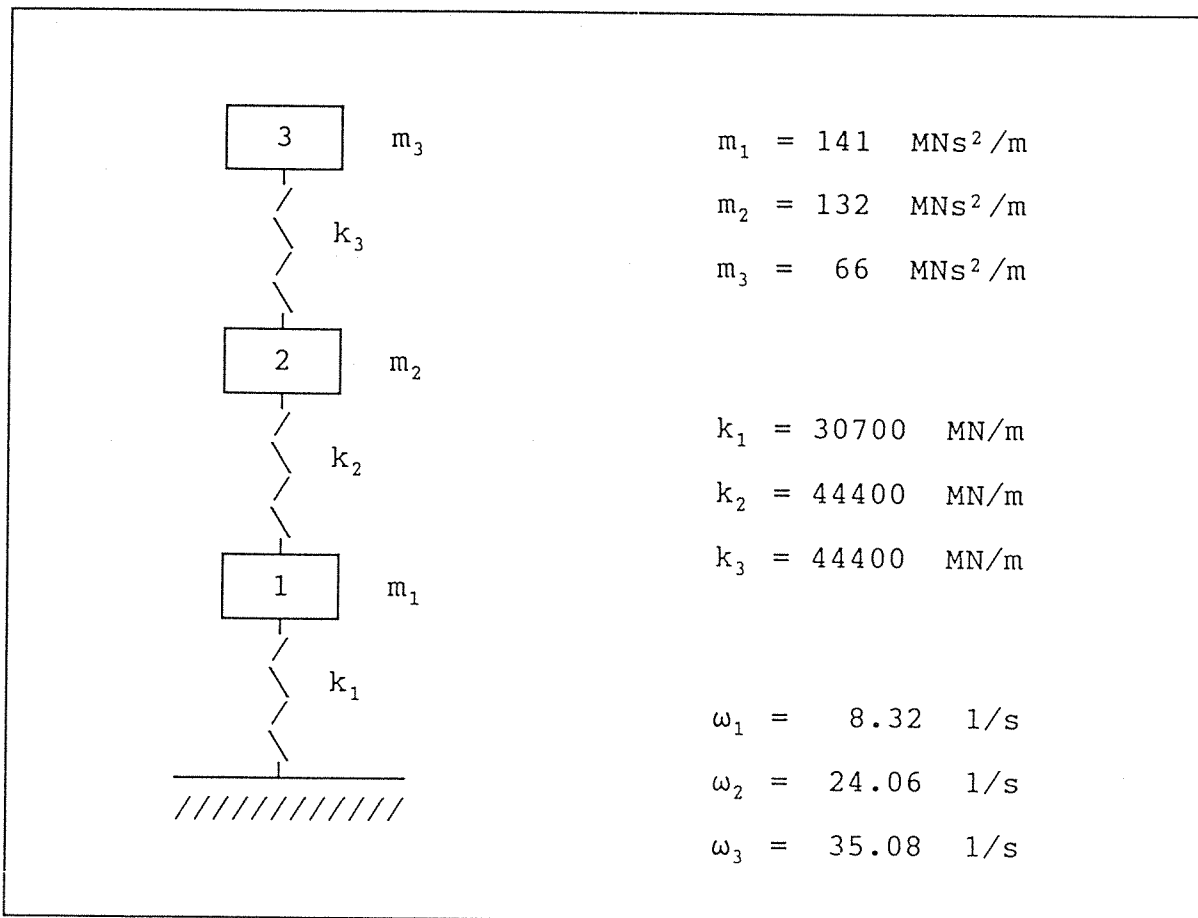


Bild 7 3DOF-System

Die gesuchten Beteiligungsfaktoren ergeben sich nach (9) mit

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 141 & & \\ & 132 & \\ & & 66 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.471 & -0.146 & -2.320 \\ 1.639 & -1.041 & 2.680 \end{bmatrix}$$

zu

$$\underline{\underline{BF}} = \begin{bmatrix} 0.7340 & 0.2460 & 0.0190 \\ 1.0797 & -0.0403 & -0.0422 \\ 1.2030 & -0.2561 & 0.0509 \end{bmatrix} .$$

### 2.3.5.3 Diskussion der unterschiedlichen Wege mit Einzelbeispielen

---

Die Anwendung der Lösungsprozeduren (in den Abschnitten 2.3.2 - 2.3.4) wird exemplarisch durchgeführt. Ist die Zahl der Freiheitsgrade größer als Eins, so hat zunächst die Berechnung der Beteiligungsfaktoren des gegebenen Modells zu erfolgen; ein 2DOF-Modell ist in Abschnitt 2.3.5.1 und ein 3DOF-Modell in Abschnitt 2.3.5.2 aufbereitet worden.

Die Verifizierung der Einzellösungen geschieht nun in folgender Weise: In Abschnitt 2.1 sind die Freifeldschwingungen z. B. für den Sinus-Ansatz entwickelt worden. Die so verwandten Freifeldlösungen müssen daher an der Basis wieder zur identischen Ausgangsschwingung führen, die zur besseren Übersicht auf den Einheitswert normiert wird. Als Beispiele sind die Lösungen in den Bildern 8 - 10 für die in Tab. 2 angegebenen Parameter gezeichnet.

Tab. 2 Parameter-Übersicht zu den Beispielen mit konstanter Dämpfung  $D = 0.1$

DOF-Grad	Lösungs-prozedur	Erregung $\beta$ [Bogenmaß/s]	Verhältniswert: Erregung $\beta$ / benachb. Eigenwert $\omega$	Schwing.-dauer $T_1$ [s]
1DOF	Partik.	3	1.	4.
3DOF	Fourier	10	0.944	4.
2DOF	Gauß	40	0.994	4.

Hierbei wird die Basislösung jeweils auf dem unteren (Teil-) Bild geplottet, während die gegebene Oszillation des Freifeldes auf dem oberen (Teil-)Bild zur Kontrolle dargestellt ist. Der Bildbezeichnung sind die maßgeblichen Parameter (entsprechend Tab. 2) zu entnehmen. Der wesentliche Unterschied der Lösungsprozeduren - nämlich der Partikulär-Lösung einerseits und der Fourier- bzw. Gauß-Lösung andererseits - ist auch aus der Darstellung der Time-Histories zu ersehen, da ersterer Ansatz eine bedingte Abklingzeit des homogenen Lösungsanteils beinhaltet; somit sind die Funktionen aus dem Partikulär-Ansatz auch zeitlich verschoben dargestellt.

Die in allen 3 Beispielen gewählte Erregungsfrequenz  $\beta$  ist in die direkte Nähe der Eigenfrequenz des Modells gerückt, da somit eine merkbare (wegen der Dämpfung begrenzte) Schwingungsüberhöhung auf der Freifeldseite bei gleichzeitiger Phasenverschiebung entsteht. Die zugehörigen Freifeldschwingungen sind für die Einheitserregung an der Basis in Abschnitt 2.1 ermittelt worden; somit ist in Umkehrung die Lösungskontrolle (an der Basis für das entsprechende Verfahren) vorgegeben: Die Freifeldschwingung muß an der Basis wieder auf den Einheitsam-

plitudenwert zurückgeführt werden (, wie in den Bildern 8 - 10 ersichtlich).

Wird die Lösungsprozedur mittels des Partikulär-Ansatzes gewählt, empfiehlt sich bei der Realisierung die Anwendung der FFT (s. z. B. Abschnitt 2.2.6). Die Lösung durch Transformation in den Frequenzraum ist hinsichtlich des Aufwandes elegant durchzuführen [und erfordert bei weitem die geringste Rechenzeit]. Hierbei darf die sog.  $\Delta$ -Schwingung (s. Abschnitt 2.3.2) unberücksichtigt bleiben. Die erhaltene Basislösung stellt dann die Superposition aller Basisfunktionen in Relation mit den zugehörigen Fourier-Koeffizienten dar; wegen der konjugiert komplexen Zuordnung untereinander ist die erforderliche Superposition für die Frequenzanteile  $\lambda_n$  (mit  $n_{max} = N/2$ ) durchzuführen, wenn  $N$  die Gesamtzahl der Zeitschritte bedeutet. Die Lösungsqualität selbst wird nicht durch die Zahl der Koeffizienten - z. B. bedingt durch die Anfangserregung - nach oben limitiert.

Es zeigt sich, daß die Art der Lösungsdarstellung von dem Zuordnungsverhältnis  $\rho = \beta/\omega$  abhängig ist, wenn  $\beta$  die Frequenz der Basiserregung und  $\omega$  der benachbarte Eigenwert ist. Liegt  $\rho$  etwa bei Eins (d. h.  $\omega$  ist fast bzw. größer  $\beta$ ), erhält man eine 'direkt verwendbare' Basisfunktion. Im Falle  $\rho$  größer als Eins (d. h.  $\omega$  ist fast bzw. kleiner  $\beta$ ) ergibt sich eine Time-History-Funktion  $f(t)$ , die in Originaldarstellung ein 'Flimmern' zeigt, wobei jeweils  $f(t) \sim -f(t+\Delta t)$  ist;  $\Delta t$  repräsentiert eine sehr kleine Abszissendifferenz im Hinblick auf den Gesamtverlauf der Funktion  $f(t)$ . D. h. die Gesamtlösung wird durch merkbare Beiträge aller Koeffizienten hergestellt, so daß die Einschaltung eines (Zeit-)Filters erforderlich wird, der dann zu einer 'verwertbaren' Basislösung führt (s. Bild 8).

Das alternative Prozedere mittels der Fourier-Gesamtlösung wird integral im Zeitraum durchgeführt. Die Bestimmung der Matrix-Koeffizienten  $f_{nm}$  bzw.  $U_n$  wird allgemeinerweise mittels der Simpson-Integration realisiert. Hierbei zeigt sich, daß die ungeraden Zähler  $(n,m)$  zu symmetrischen Nebengliedern führen, also  $f_{nm} = f_{mn}$ , während die (zugeordneten) geraden bzw. ungeraden Zähler  $(n,m)$  antimetrische Nebenglieder  $f_{nm} = -f_{mn}$  ergeben. Die Approximation der Freifeldoszillation mit den nichtkonformen Sinus-Funktionen führt daher auch zu originär negativen

Hauptdiagonalgliedern; die Matrix  $\underline{F}$  jedoch zeigt sich lösungsstabil.

Wird der Minimalansatz (im Zeitbereich) mit der direkten Freifeldfunktion hergestellt, erhält man eine Koeffizientenmatrix mit durchweg positiven Hauptdiagonalgliedern. Die (mittels der genauen Integrationswerte) so gebildete Koeffizientenmatrix ist wegen des Einflusses der Eigenfunktionen allgemein besetzt und läßt keine Regelmäßigkeiten (wie bei der Fourier-Gesamtlösung) erkennen. Die Matrix selbst ist wieder lösungsstabil. Da hier die Matrix  $\underline{F}$  nach exakter Evaluierung der Einzelkoeffizienten aufgestellt wird, ist hierbei der numerische Aufwand geringer (als bei der Fourier-Gesamtlösung), jedoch erfordern beide (letzteren) Wege die Lösung eines Gleichungssystems (im Gegensatz zum Partikulär-Ansatz). Der bei der Partikulär-Lösung beobachtete 'Flimmer-Effekt' ist bei beiden anderen Wegen nicht aufgetreten. Die so berechneten unbekanntenen Koeffizienten  $c_n$  sind für beide Minimalansätze identisch. [Eine weitere Kontrolle stellt die Identität der Basis-Koeffizienten - sofern bekannt - dar.]

Die Möglichkeit der Anwendungsbeispiele ist durch die Zahl der bestimmenden Parameter vorgegeben, nämlich beispielsweise (s. auch Tab. 2) :

- Lösungsprozedur
  - o mit/ohne 'Flimmern'
  - o Zahl der unbekanntenen Koeffizienten
  - o Zeitschritt  $\Delta t$
- Zahl der berechneten Eigenwerte
- Basiserregung  $\beta$
- $\rho$  = Erregung  $\beta$ /benachb. Eigenwert  $\omega$ 
  - o  $\rho \sim 1$
  - o  $\rho \ll 1$
  - o  $\rho \gg 1$
- Schwingungsgesamtdauer
- Dämpfung

Im Anhang (Teil I) sind einige wesentliche Beispiele unter Berücksichtigung der genannten Parameter zusammengestellt.

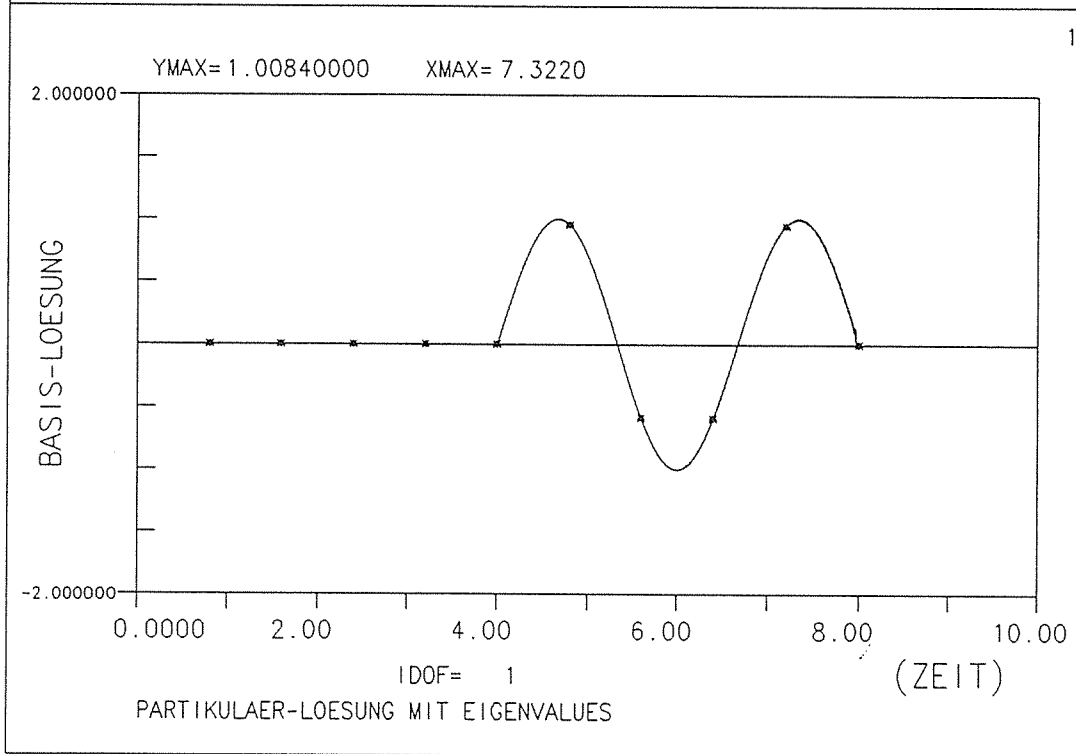
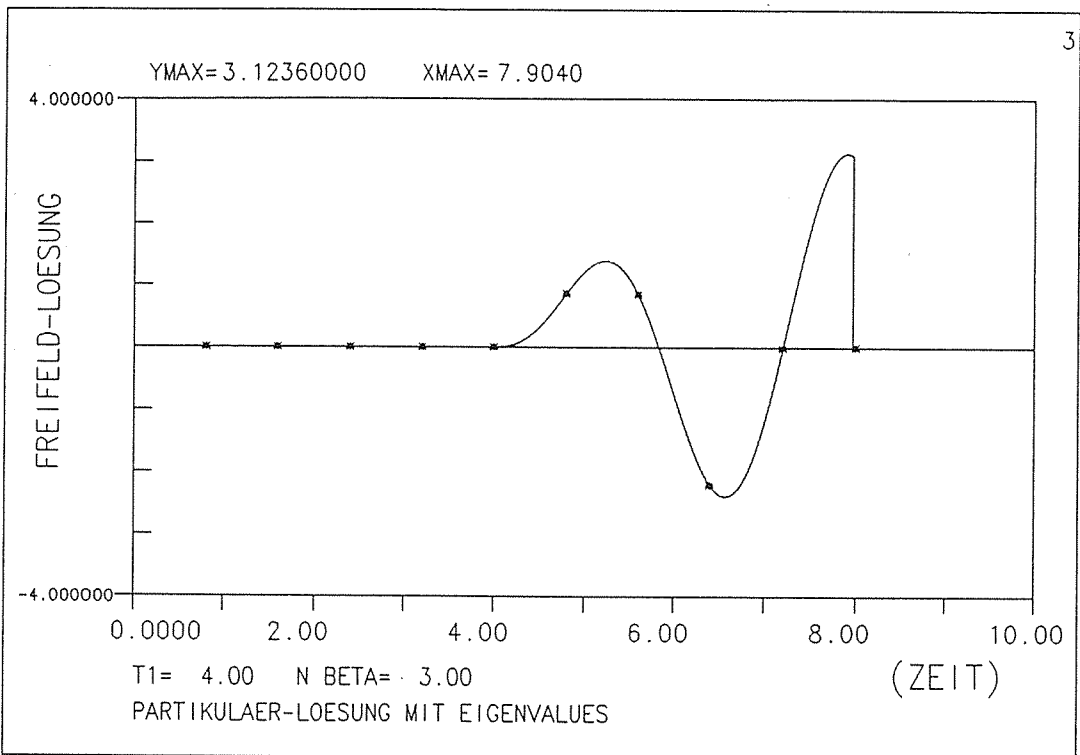


Bild 8 Partikulaer-Loesung mit Eigenvalues

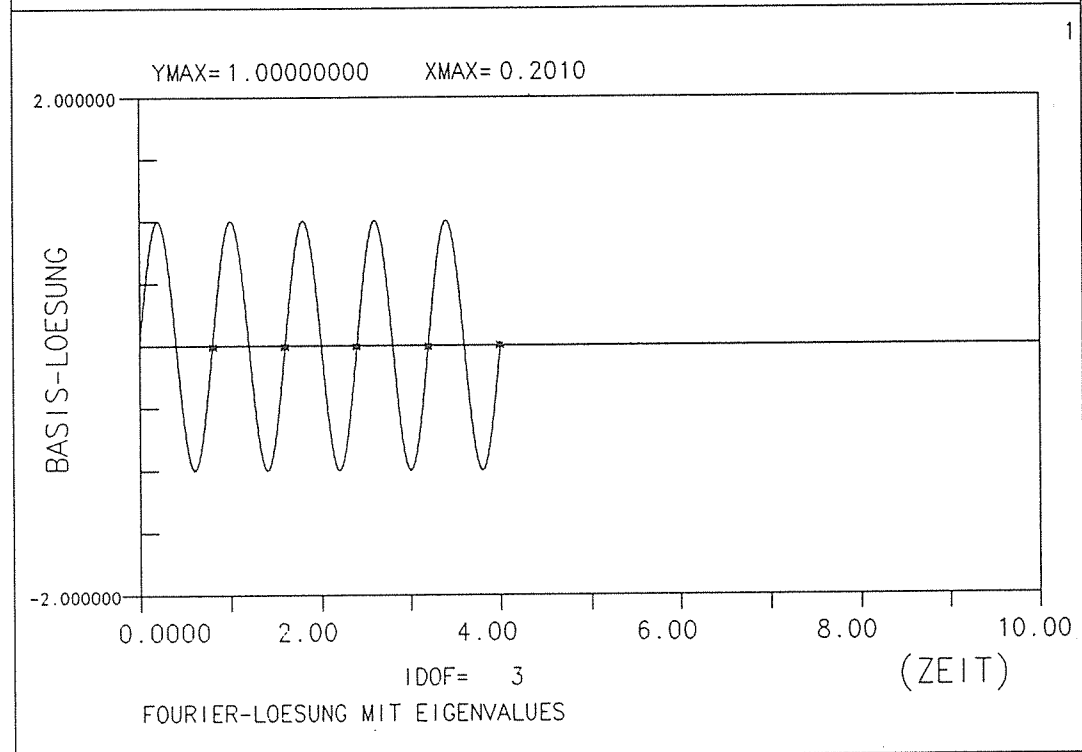
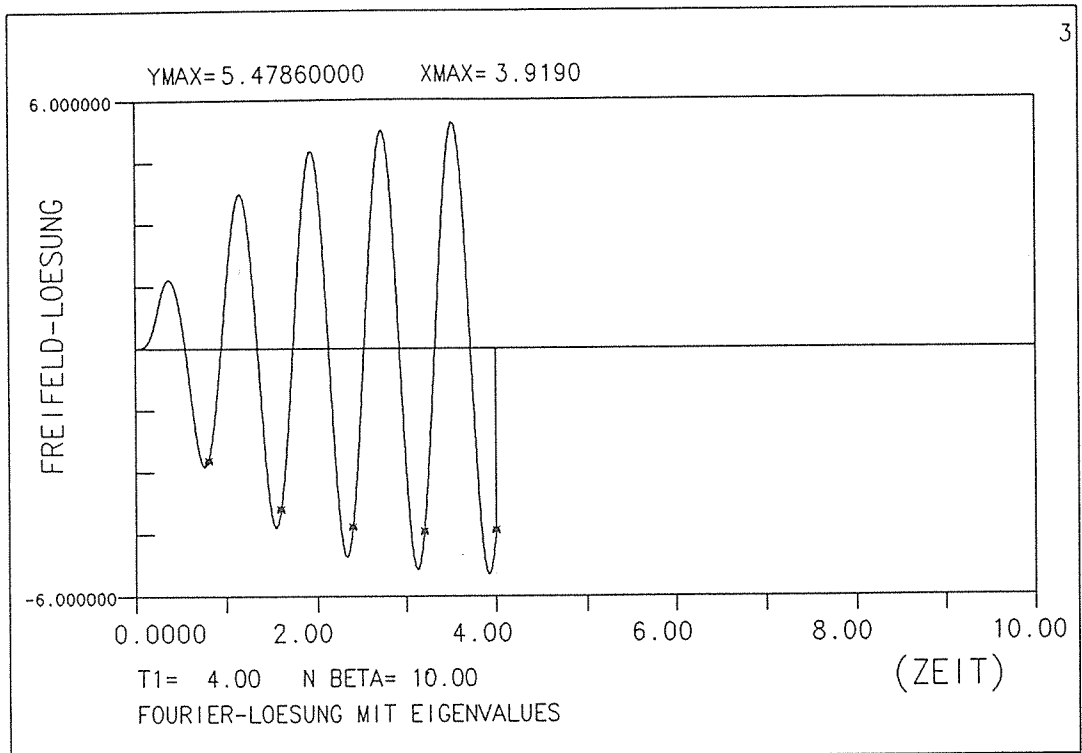


Bild 9 Fourier-Loesung mit Eigenvalues



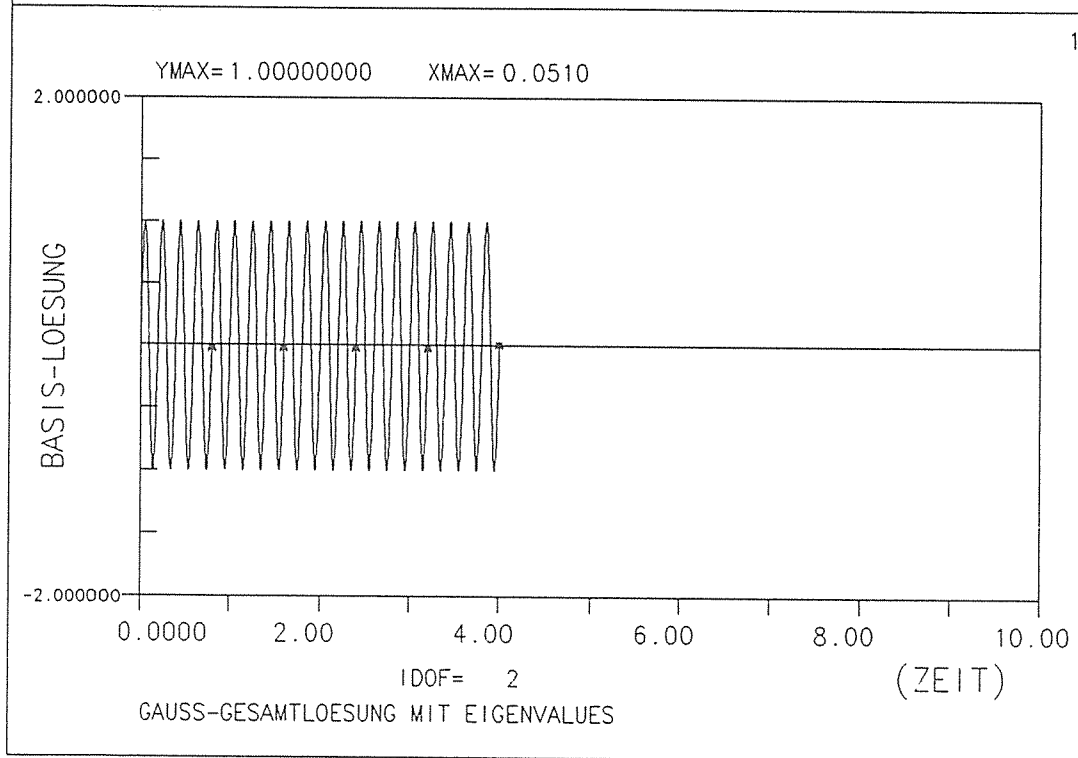
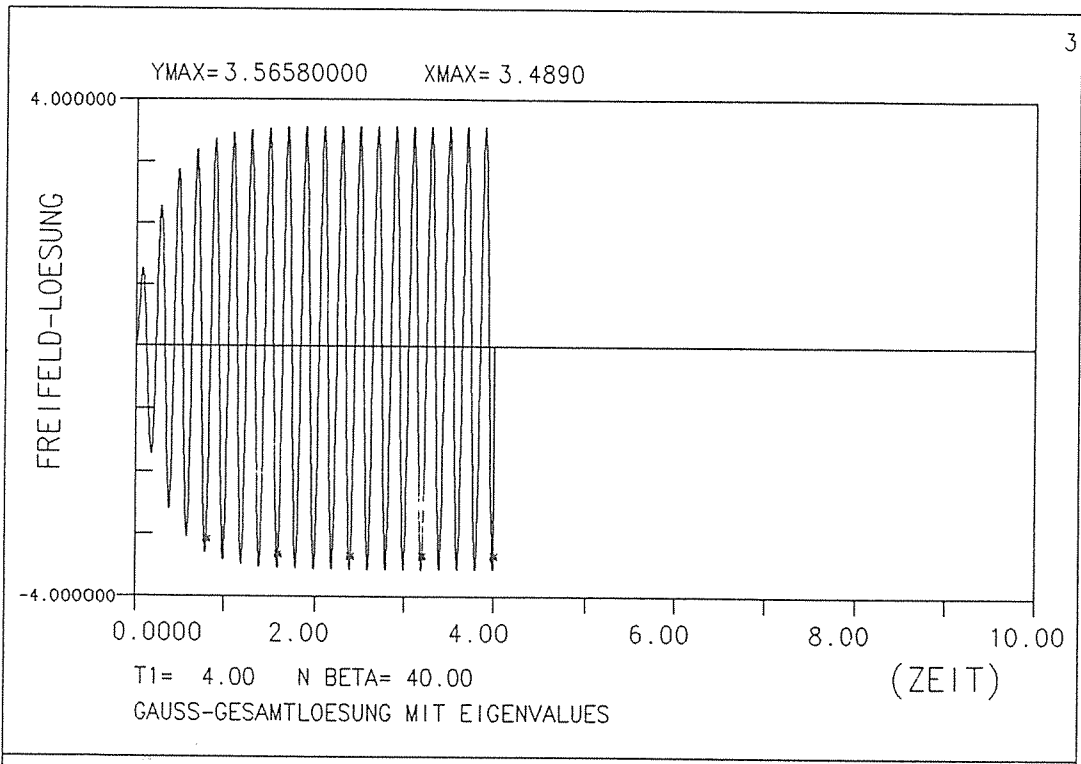


Bild 10 Gauss-Gesamtloesung mit Eigenvalues

### 3. Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte

#### 3.1 Allgemeine Bemerkungen

Die Lösung der allgemeinen Schwingungsgleichung (1) ist in Abschnitt 2. mittels geeigneter Funktionen durchgeführt worden, die die Zeitintegration des Schwingungssystems ermöglichen. Hierbei ist die generelle Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen vorausgesetzt worden. Die Lösungen selbst sind also durch Superposition der Ansatz- bzw. der Eigenfunktionen zu erreichen.

Handelt es sich um MDOF-Systeme, bei denen eine hohe Zahl von Freiheitsgraden vorliegt, ist die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenformen ebenso möglich (s. z. B. /6/ u. a.), aber der rechnerische Aufwand steigt mit zunehmender Zahl der Freiheitsgrade erheblich an; somit erweist es sich als notwendig, bei einer großen Zahl von Freiheitsgraden Lösungswege ohne Berücksichtigung der expliziten Eigenwerte und -formen zu entwickeln.

Bei der Behandlung komplexerer Probleme - z. B. strukturelle, Boden-Bauwerk- oder bodendynamische Untersuchungen - mit einer Vielzahl von Freiheitsgraden wird i. a. die Methode der finiten Elemente wegen ihrer eminenten Vorteile angewandt; die Integration der allgemeinen Bewegungsgleichung (1) wird hier nicht mehr analytisch, sondern auf numerischem Wege vollzogen. In /6/ wird die Anwendung der unterschiedlichen Integrationsverfahren ausführlich erörtert. Die numerische Vorgehensweise sei hier exemplarisch für die direkte Zeitintegration nach Newmark erläutert.

Mit den Parametern  $\delta \geq 0.50$  und  $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$  folgen die Integrationskonstanten

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad ;$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad ; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad ; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right] \quad ;$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad ; \quad a_7 = \delta \Delta t \quad .$$

Aus der allgemeinen Schwingungsgleichung (1)

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{P}}$$

wird nun die effektive Steifigkeitsmatrix

$$\underline{K}^* = \underline{K} + a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}$$

gebildet. Für jeden beliebigen Zeitschritt  $t+\Delta t$  berechnet sich der effektive Kraftvektor aus den vorherigen Zeitintervallen

$$\underline{P}^*_{t+\Delta t} = \underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{M}(a_0 \underline{u}_t + a_2 \dot{\underline{u}}_t + a_3 \ddot{\underline{u}}_t) + \underline{C}(a_1 \underline{u}_t + a_4 \dot{\underline{u}}_t + a_5 \ddot{\underline{u}}_t) \quad ,$$

so daß die Schwingungsgleichung (1) je Zeitschritt  $t+\Delta t$  auf die Verschiebungsgleichung reduziert wird:

$${}^{t+\Delta t}\underline{K}^* \cdot \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{P}^*_{t+\Delta t} \quad (57)$$

Mittels der Integrationskonstanten können anschließend die zugehörigen Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektoren im gleichen Zeitschritt  $t+\Delta t$  ermittelt werden:

$$\ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = a_0 (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t) - a_2 \dot{\underline{u}}_t - a_3 \ddot{\underline{u}}_t \quad (58)$$

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + a_6 \ddot{\underline{u}}_t + a_7 \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} \quad (59)$$

Die so je Zeitintervall erhaltenen Resultate stellen numerisch diskrete Lösungen [im Gegensatz zu den analytisch entwickelten Funktionen des Abschnitts 2.] dar und werden in den einschlägigen Programmcodes für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgegeben, und zwar ohne explizite Ermittlung der spezifischen Eigenwerte und -formen. Unter Beachtung dieses numerischen Vorgehens werden folgend Möglichkeiten zur Bestimmung der Basisschwingungen (aus der Kenntnis des gegebenen Freifeldes) angegeben.

### 3.2 Iterative Ermittlung der Übertragungsfunktion

Ist die Übertragungsfunktion bekannt, so ergibt sich die gesuchte Basislösung entsprechend (19a bzw. b) aus der Division von Freifeldschwingung und Übertragungsfunktion [im Frequenzbereich]. In Abschnitt 2.2 ist in allgemeiner Schreibweise die Komplexität der Übertragungsfunktion dargelegt worden, die neben den Eigenwertanteilen und den Zeitintegrationsgrenzen auch noch direkt durch die Last selbst beeinflußt wird.

Geht man davon aus, über eine dem Frequenzgehalt der 'echten' Last genügend benachbarte Funktion zu verfügen, läßt sich die Übertragungsfunktion iterativ approximieren, wie in /11/ ausführlich dargelegt. Hierbei wird die 'benachbarte' Time-History an der Basis des Schwingungssystems angesetzt. Die Lösung wird mittels numerischer Integration [unter Einsatz eines einschlägigen Programmcodes] gewonnen. Anschließend erhält man nach Überführung beider Time-Histories [an der Basis bzw. am Freifeld] in den Frequenzbereich eine erste Näherung für die Übertragungsfunktion, mit deren Kenntnis nun mittels der vorher gegebenen Freifeldoszillation eine Verbesserung des Basisansatzes vorgenommen wird. Diese Prozedur wird solange zyklisch wiederholt, bis sich die so verbesserte Lösung am Freifeld der gegebenen Freifeldschwingung genügend genau annähert. Die optimale Anwendung ist in /11/ an zahlreichen Beispielen mit unterschiedlichen Systemen, Modifikation der Randbedingungen der einzelnen Modelle sowie verschiedenen Dämpfungsannahmen demonstriert worden.

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, daß zur zeitlichen Integration des Schwingungssystems nur die (rechte) Lastseite modifiziert wird, ohne einen Eingriff in den allgemeinen Programmablauf vorzunehmen. Die Berechnung der jeweils verbesserten Übertragungsfunktion mit der anschließenden verbesserten Basis-Zeit-Funktion kann in einem separaten Zusatzschritt erfolgen.

Bezeichnen wir - jeweils nur im Frequenzraum - die komplexen Vektoren  $\underline{TF}_j$  als Übertragungsfunktion,  $\underline{U}_j$  als Basis- und  $\underline{O}_j$  als berechnete Freifeldfunktion sowie  $\underline{E}$  als exakte vorgegebene Oszillation am Freifeld (s. Bild 11), bei denen  $j$  die jeweilige Iterationsstufe angibt, so erhält man:

$$\begin{array}{lll}
 \underline{TF}_1 & = \underline{O}_1 / \underline{U}_1 & \text{bzw.} & \underline{U}_2 & = \underline{E} / \underline{TF}_1 \\
 \underline{TF}_2 & = \underline{O}_2 / \underline{U}_2 & \text{bzw.} & \underline{U}_3 & = \underline{E} / \underline{TF}_2 \\
 & \cdot & & & \\
 & \cdot & & & \\
 \underline{TF}_j & = \underline{O}_j / \underline{U}_j & \text{bzw.} & \underline{U}_{j+1} & = \underline{E} / \underline{TF}_j
 \end{array}$$

(60)

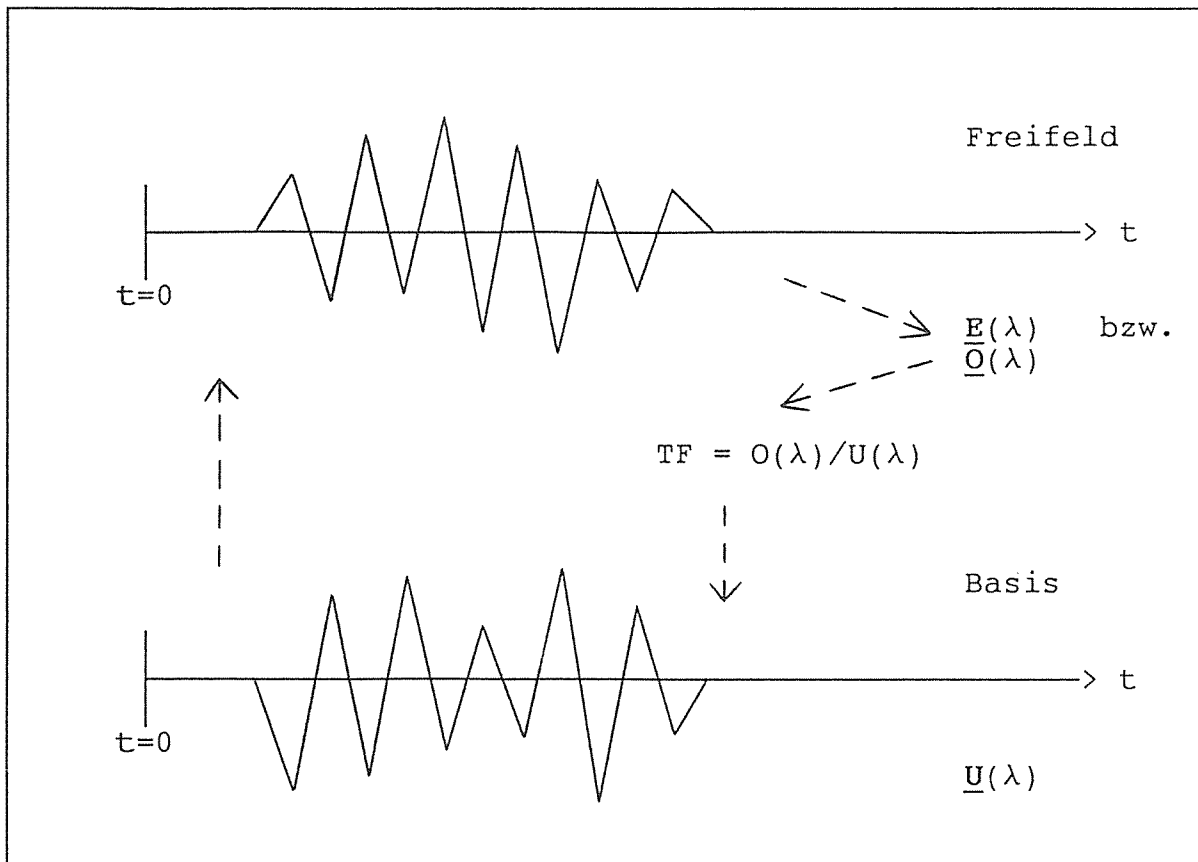


Bild 11 Prinzip des iterativen Ablaufs

Bezeichnet man symbolisch die jeweilige Transformation in den Zeitbereich mit '\*' ,so läßt sich die verbesserte Basisfunktion angeben zu:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_2 &= \underline{E}/\underline{O}_1 \quad \underline{U}_1 \\
 \underline{U}_3 &= \underline{E}/\underline{O}_2 * \underline{E}/\underline{O}_1 \quad \underline{U}_1 \\
 &\vdots \\
 \underline{U}_{j+1} &= \underline{E}/\underline{O}_j * \underline{E}/\underline{O}_{j-1} * \dots * \underline{E}/\underline{O}_2 * \underline{E}/\underline{O}_1 \quad \underline{U}_1 \quad (61)
 \end{aligned}$$

Konvergenz ist erreicht, wenn der Gesamtfehler der Stufe j ein definiertes Fehlerminimum unterschreitet, also

$$\begin{aligned}
 \underline{O}_j(\lambda) &\Rightarrow \underline{E}(\lambda) \quad [\text{im Frequenzbereich}] && \text{bzw.} \\
 \underline{O}_j'(t) &\Rightarrow \underline{E}'(t) \quad [\text{im Zeitbereich}]
 \end{aligned}$$

konvergiert oder das Verhältnis

$$\underline{O}_j(\lambda) / \underline{E} \Rightarrow \underline{I} \quad (62)$$

in den Einheitsvektor überführt werden kann. In /11/ wird gezeigt, daß bei Annahme der gegebenen Freifeldschwingung [  $\underline{E}$  ] als erster Schätzung der Basisschwingung [  $\underline{U}_1$  ] das Kriterium (62) in der überwiegenden Zahl der Beispiele nach wenigen Schritten  $j$  hinreichend erfüllt ist. Daß dies nicht in allen Fällen zufriedenstellend erreicht wird, läßt sich beispielsweise an der symbolischen Schreibweise (61) ablesen. Der Vektor  $\underline{E}$  als konstante Vorgabe bleibt unbeeinflusst von der Zahl der Iterationen, während - abgesehen von den sonstigen physikalischen Eigenschaften des Schwingungssystems - die Vektoren  $\underline{O}_1 \dots \underline{O}_j$  jeweils auch Funktionen der Ausgangsbasis  $\underline{U}_1$  sind, also

$$\underline{O}_j = f(\underline{U}_1) \quad .$$

Diese Beziehung impliziert jedoch, daß der Frequenzinhalt der Ausgangsbasisfunktion  $\underline{U}_1$  von wesentlichem Einfluß auf die Konvergenz der letztlich gesuchten Basisfunktion  $\underline{U}_{j+1} = \underline{U}$  ist.

### 3.3 Anwendung der Einheitsimpuslösung im Zeitbereich

#### 3.3.1 Fehlerbetrachtung zur direkten rekursiven Dekonvolution

Die in Abschnitt 3.2 beschriebene Methodik erzielt die Lösung durch iterative Verbesserung des 'Lastvektors' bzw. der rechten Seite; d. h. hierbei wird der FEM-Programmcode zur Lösung der Bewegungsgleichungen  $k$ -fach aufgerufen, wenn  $k$  die Zahl der notwendigen Iterationsstufen bedeutet.

In Anlehnung an die Lösungsprozedur in Abschnitt 2.1, die das sog. Duhamel-Integral heranzieht, kann ebenso numerisch eine beliebige Funktion an der Basis identisch durch Einheitsimpulse gebildet werden: Jeder Einheitsimpuls repräsentiert dann eine Time-History über jeweils 3 Zeitschritte mit

$$I(t - \Delta t) = 0.$$

$$I(t) = 1.$$

$$I(t + \Delta t) = 0.$$

Bei Kenntnis der zugehörigen Koeffizienten  $a_i$  (s. Bild 12) wird eine beliebige Basisfunktion durch Superposition der affinen Impulsfunktionen erhalten:

$$\ddot{u}_b(t_i) = a_i$$

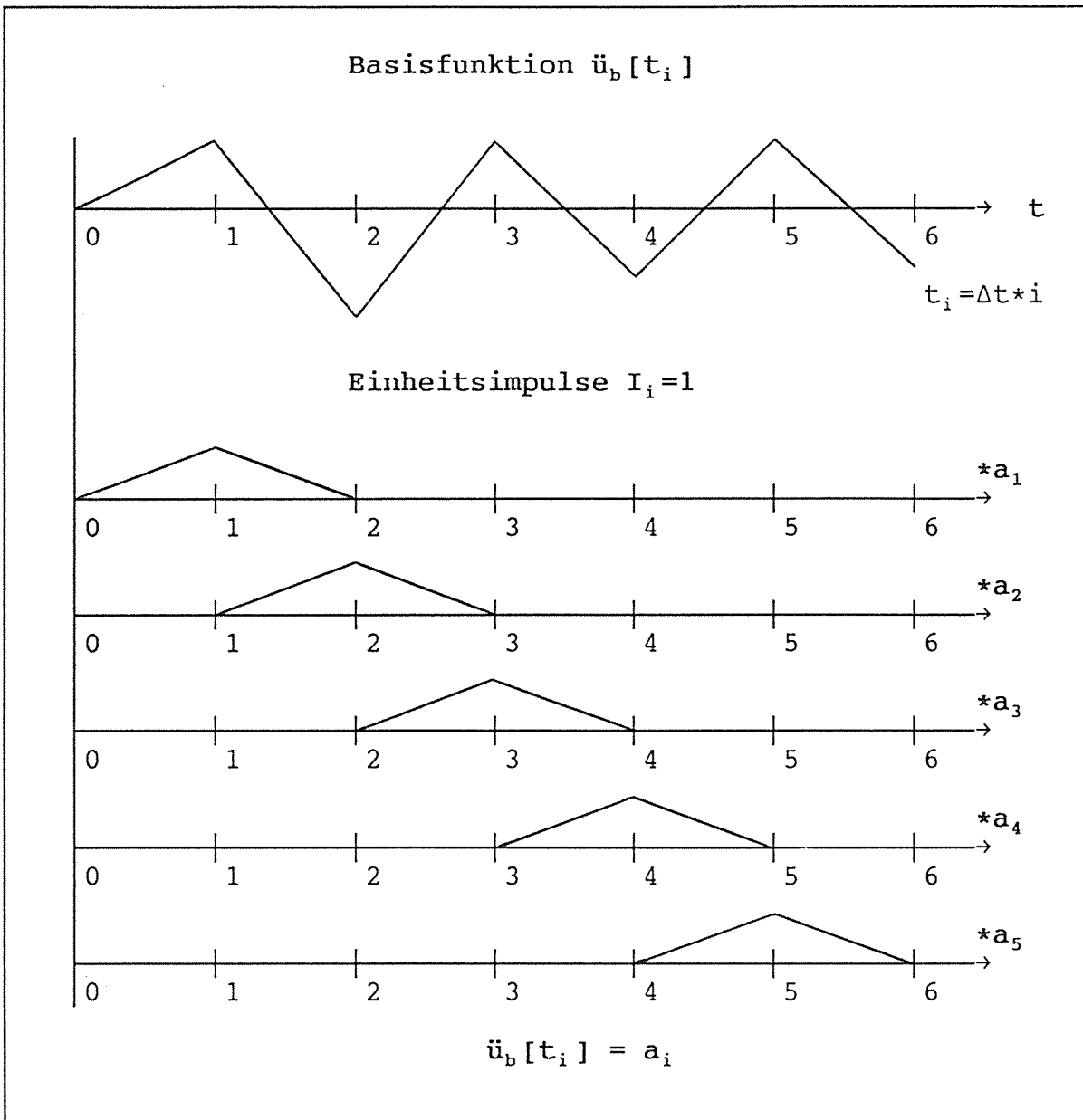


Bild 12 Bildung der Basisfunktion durch Einheitsimpulse

Mittels der Time-History des Einheitsimpulses  $I$  erhält man bei einmaligem Aufruf des entsprechenden Programmcodes die allgemeine Zeit-Geschichte  $g(t_i)$  am Freifeld, die im Falle einer definierten Dämpfung über die Zeitachse  $t$  abklingt. In gleicher Weise wird dann durch Superposition der  $g(t_i)$  bei Kenntnis der Koeffizienten  $a_i$  (s. Bild 13) die Gesamtfunktion erhalten, nämlich  $\ddot{u}_{total}(t_i) = v(t_i)$ .

Realiter liegt jedoch die Umkehrung der Problemstellung vor, da sowohl  $v(t_i)$  als auch die Einheitslösung  $g(t_i)$  für diskrete Zeitschritte am Freifeld bekannt sind; somit läßt sich folgende direkte Lösungsprozedur darstellen, wenn man zur Vereinfachung die zugehörigen Zeitinkremente als Indizes einführt:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= a_1 g_1 && \rightarrow && a_1 &= [v_1] / g_1 \\
 v_2 &= a_1 g_2 + a_2 g_1 && \rightarrow && a_2 &= [v_2 - a_1 g_2] / g_1 \\
 v_3 &= a_1 g_3 + a_2 g_2 + a_3 g_1 && \rightarrow && a_3 &= [v_3 - a_1 g_3 - a_2 g_2] / g_1 \\
 v_4 &= a_1 g_4 + a_2 g_3 + a_3 g_2 + a_4 g_1 && \rightarrow && a_4 &= [v_4 - a_1 g_4 - a_2 g_3 - a_3 g_2] / g_1 \\
 &\vdots && && \vdots & \\
 &\vdots && && \vdots & \\
 &\vdots && && \vdots & \\
 v_i &= \sum_n^{1, i-1} a_n g_{i+1-n} + a_i g_1 && \rightarrow && a_i &= [v_i - \sum_n^{1, i-1} a_n g_{i+1-n}] / g_1 \quad (63)
 \end{aligned}$$

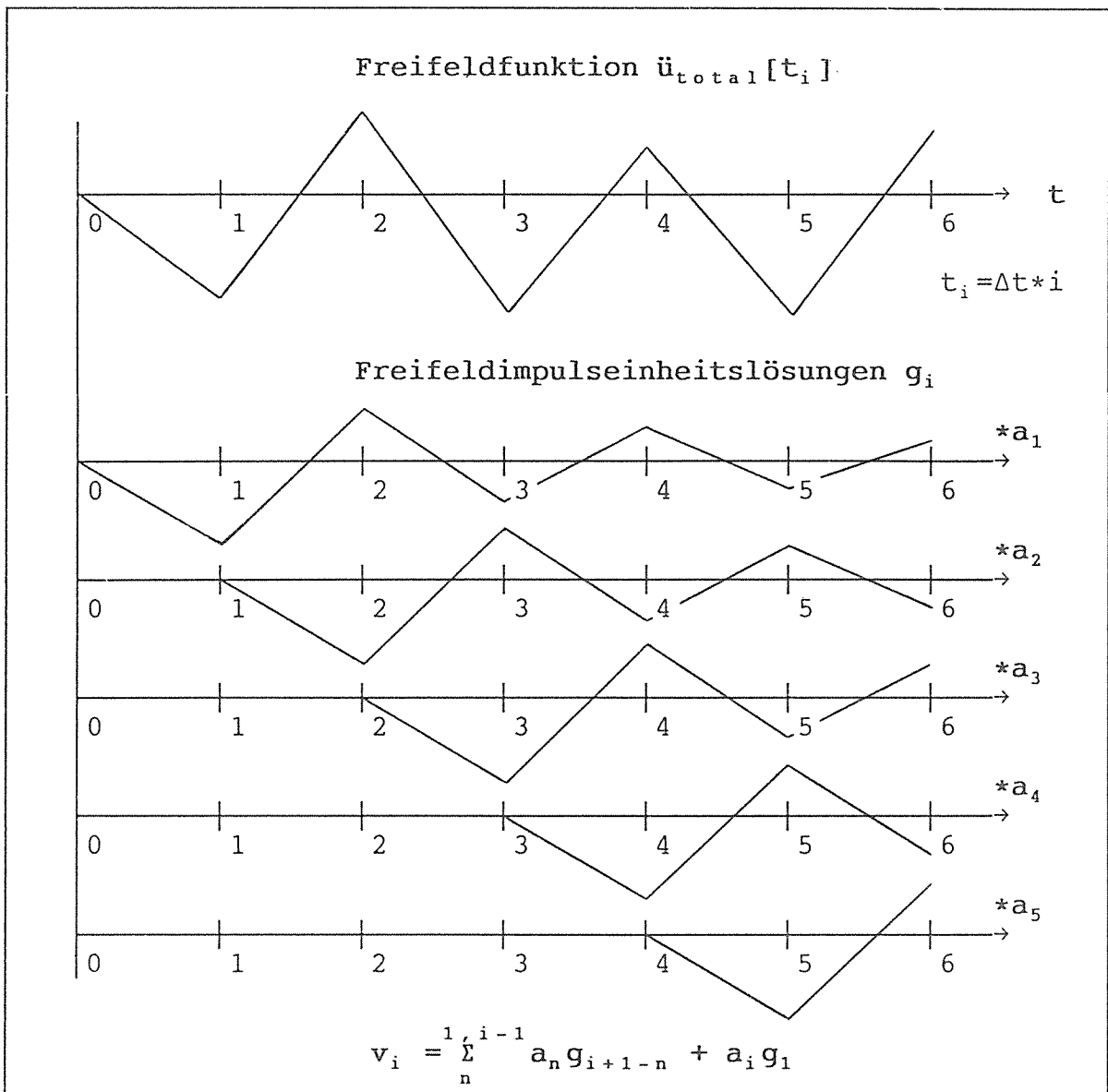


Bild 13 Bildung der Freifeldfunktion durch Einheitsimpulslösungen



Das Bildungsgesetz für die Koeffizienten  $a_i$  zeigt deutlich an, daß diese in aufsteigender Weise (in Abhängigkeit vom Zeitschritt  $i$ ) rekursiv berechnet werden; m. a. W., die numerische Güte sinkt infolge der Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Zahl der zurückliegenden Operationen eminent mit der Schrittzahl  $i$ .

Testrechnungen zeigen, daß bereits nach ca. 100 Schritten eine sehr große Überschätzung des  $a_i$ -wertes im Vergleich zum Sollwert vorliegt. Zur Verifizierung dieses Resultates wird ein mittlerer Fehler  $\varepsilon$  für alle Rechenoperationen eingeführt, so daß für jeden Teilschritt gilt  $\gamma = \gamma_{\text{exakt}}(1+\varepsilon)$ . Bei verketteten Algorithmen - wie bei (63) - folgt unter Annahme von  $\gamma_{\text{exakt}} \rightarrow 1$  näherungsweise als größter Fehler

$$(1+\varepsilon)^{\text{Fe}(i)} = b \quad , \quad (64a)$$

bzw. nach Umkehrung

$$\varepsilon = \frac{1}{\text{Fe}(i)} \ln b \quad , \quad (64b)$$

falls  $\varepsilon \ll 1$  ist.

Hierbei ist  $\text{Fe}(i)$  als Funktion der maßgeblichen Rechenschritte anzusehen, die aber auch von der Größenordnung der Einheitslösung  $g$  (am Freifeld) und der Relation der Rechenarten untereinander bestimmt wird. Kontrollrechnungen zeigen, daß  $b$  für  $i > 100$  im Bereich von  $10^4$  gegenüber dem Einheitswert liegt. Somit kann mit (64b) - bei Kenntnis von  $\text{Fe}(i)$  - eine Abschätzung des mittleren Fehlers  $\varepsilon$  vorgenommen werden. Zählt man die Zahl der Rechenoperationen nach (63) gleichwertig, so erhält man die Größenordnung von  $\text{Fe}(i)$  :

$i = 1$	$\text{Fe}(1) = 1$
$= 2$	$\text{Fe}(2) = 4$
$= 3$	$\text{Fe}(3) = 10$
$= 4$	$\text{Fe}(4) = 22$
$= 5$	$\text{Fe}(5) = 46$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$i$	$\text{Fe}(i) = 3 * 2^{i-1} - 2$

Die extrem große Zahl von  $Fe(100) \sim 1.9 \cdot 10^{30}$  führt somit bei Kenntnis von  $b$  auf einen mittleren [noch zulässigen] Fehler von  $\epsilon \sim 0.5 \cdot 10^{-31}$ , eine Größenordnung, die außerhalb der üblichen Zahlendarstellung liegt.

Bei Berücksichtigung des Bildungsgesetzes der Koeffizienten  $a_i$  nach (63) läßt sich erkennen, daß jeweils die höchsten Anteile ( $a_{i-1}$ ) mit den größten Funktionswerten von  $g$  korreliert werden und damit die größten Fehlerpotentiale aufweisen. Verbindet man näherungsweise eine geeignete (abklingende) Gütefunktion mit  $Fe(i)$ , so kann ein mittlerer Fehler im Größenbereich der üblichen Zahlendarstellung erzielt werden.

Fazit dieser Abschätzung ist, daß die direkte rekursive Dekonvolution mittels Superposition der Einheitsimpulslösung (des Freifeldes) aus numerischen Gründen nicht verifizierbar ist.

### 3.3.2 Anwendung modifizierter Fourier-Reihen

#### 3.3.2.1 Fehlerbetrachtung

Bei Anwendung der Einheitsimpulslösung nach Abschnitt 3.3.1 soll ein alternativer Weg beschrrieben werden, der erheblich weniger fehlersensibel ist und damit letztlich zu einer probanten Lösung des gestellten Problems führt.

In den Abschnitten 2.3.3 bzw. 2.3.4 wird die Basisbeschleunigung durch sin-Reihen repräsentiert, also

$$\ddot{u}_b(t) = \sum_n^1 c_n \sin \alpha_n t \quad , \quad (65)$$

und hieraus ist die Freifeldlösung mit

$$v(t) = \sum_n^1 c_n F_n(t) \quad (66)$$

entwickelt worden. In dieser analytischen Darstellung ist  $t$  die kontinuierliche Zeitkoordinate.

Nach Teil 3.3.1 ist die Basisbeschleunigung  $\ddot{u}_b(t)$  in die diskrete Schreibweise  $\ddot{u}_b(t_i)$  zu überführen, d. h. die einzelnen sin-Funktionen sind (an der Basis) durch die Einheitsimpulse

mittels des Superpositionsprinzips zu bilden. Somit werden die Koeffizienten  $a_i$  determiniert, so daß am Freifeld entsprechend (63) die Funktion  $F_n(t_i)$  in diskreter Schreibweise

$$F_{(n)}(t_i) = v_i = \sum_n^i a_n g_{i+1-n}$$

erhalten wird.

Zunächst wird wie in Abschnitt 3.3.1 eine überschlägliche Ermittlung des mittleren Fehlers  $\varepsilon$  vorgenommen, und man erhält für den diskreten Schritt  $i$  in diesem Fall

$$F_e(i) = 2i - 1 \quad .$$

Bei einem definierten  $\varepsilon \sim 0.5 \cdot 10^{-9}$  folgt für  $i \Rightarrow 10^4$  entsprechend (64a)

$$b \Rightarrow (1 + 0.5 \cdot 10^{-9})^{2 \cdot 10^4 - 1} \quad ,$$

also liegt der zu erwartende Fehler in der Größenordnung

$$b \Rightarrow 10^{-3} \% \quad .$$

Hieraus läßt sich erkennen, daß die Darstellbarkeit diskreter Freifeldfunktionen  $v_i$  mittels der Einheitsimpulslösungen  $g_i$  selbst für  $i \Rightarrow 10^4$  im tolerablen Fehlerbereich liegt.

### 3.3.2.2 Gesamtlösung im Zeitbereich mit Sinus-Ansatz

#### 3.3.2.2.1 Vollständige Gauß'sche Lösung

Nachdem mit Hilfe des Superpositionsprinzips die Freifeldfunktionen  $F_n(t_i)$  numerisch darstellbar sind, repräsentieren die  $F_n(t_i)$  die gleiche Schreibweise wie in (49b), allerdings in diskreter und geschlossener Form; letzteres bedeutet, daß die Anteile der einzelnen Eigenformen nicht mehr explizit vorliegen. Da die Funktionen  $F_n(t_i)$  aus sin-Reihen an der Basis generiert werden, können die  $F_n(t_i)$  auch als modifizierte Fourier-Reihen bezeichnet werden.

Beispiele der modifizierten Fourier-Reihen und deren Abweichung zu den originären Kreisfunktionen sind in Bild 14 dargestellt.

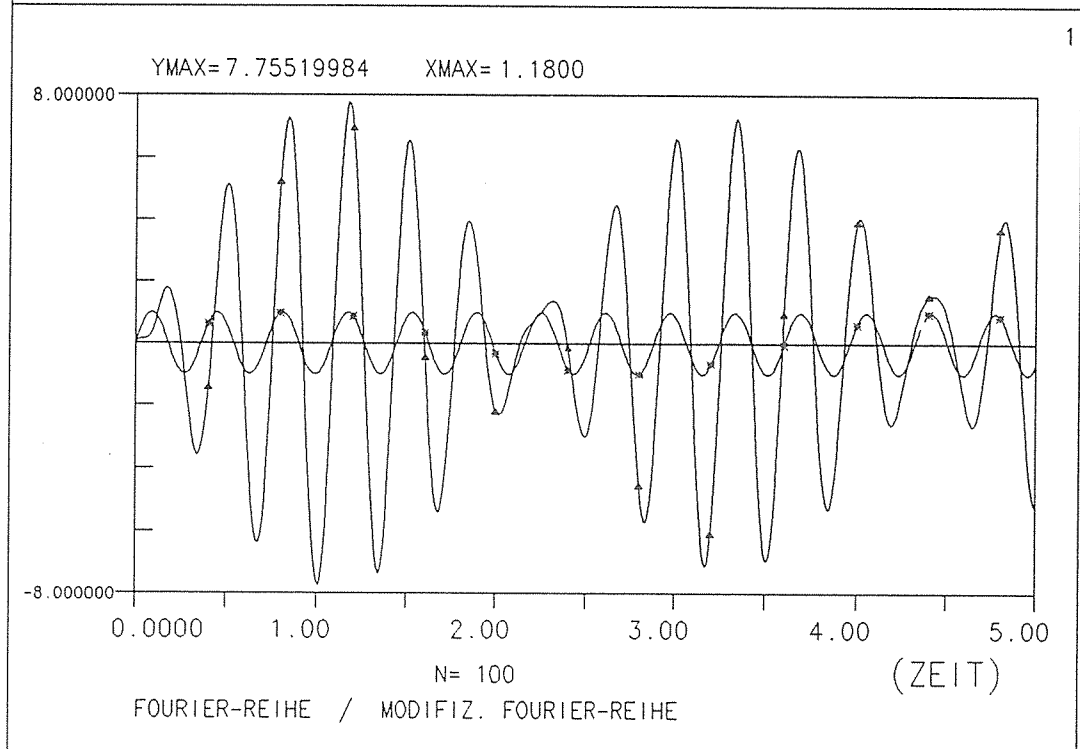
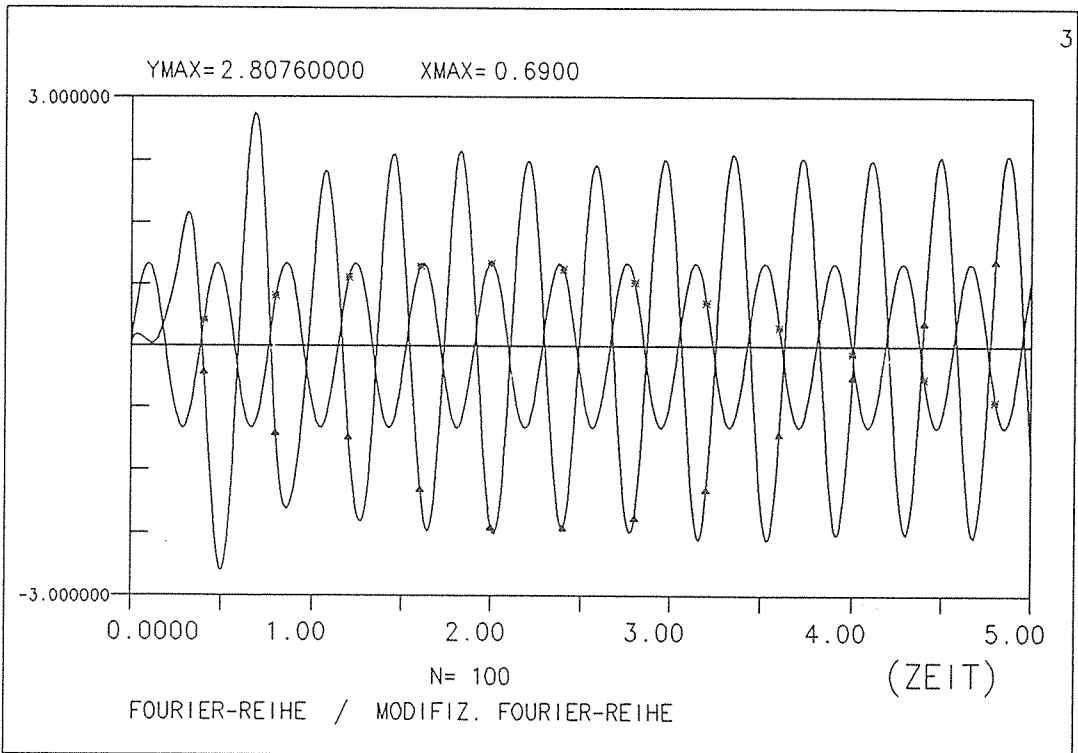


Bild 14 VERGLEICH : Daempfung - oben 5. % - unten 0 %

Hierbei ist ein Bodenmodell nach /11/ unterstellt worden, das zur Generierung der Impuslösungsfunktion  $g_i$  verwandt wurde.

Im Bild ist eine Erregungsfrequenz dargestellt, die einem Eigenwert des mechanischen Modells benachbart ist. Entsprechend erhält man am ungedämpften System (1) bei einer harmonischen Basiserregung von  $N=100$  Halbschwingungen [in Bezug auf die Gesamtzeit  $T_{g_{es}}=18$  s] deutliche Überhöhungen, wobei die Einhüllende zusätzlich durch die Überlagerung der Eigenformen bestimmt wird. Wegen des Zusammenwirkens der homogenen und partikulären Lösungsanteile ist die Freifeldoszillation auch bei Null-Dämpfung nicht phasenkonform mit der Basisschwingung.

Im oberen Bildteil (3) ist die gleiche Untersuchung unter Annahme einer mittleren Dämpfung von 5 % [in Bezug auf die Gesamtzeit  $T_{g_{es}}=19.03$  s] wiederholt worden; hier zeigt sich der Einfluß der Dämpfung deutlich, die nach Abklingen der Anfangsphase zu einer harmonischen Schwingung mit merkbarer Phasenverschiebung [ca.  $180^\circ$ ] führt.

Wie in Teil 2.3.4 wird die Forderung gestellt, daß die gegebene Freifeldfunktion aus den modifizierten Fourier-Reihen gebildet wird [s. (49a)], so daß die unbekanntenen Koeffizienten  $c_n$  aus der Forderung nach dem Minimum der Fehlerquadrate zu evaluieren sind, also

$$\int_0^T \left[ v(t_i) - \sum_n^1 c_n F_n(t_i) \right]^2 dt \Rightarrow \text{Min} \quad (67)$$

mit  $t = \Delta t \cdot i$ , wenn  $i$  einen beliebigen, diskreten Zeitschritt beschreibt, und der Periode  $T = \Delta t \cdot i_{max}$ ;  $\Delta t$  ist hier ein (beliebig) konstant gewähltes Zeitintervall.

Wird nun eine beliebige Zeile  $m$  betrachtet, erhält man für die Variation von

$$\frac{\delta}{\delta c_m} : \int_0^T \left[ v(t_i) - \sum_n^1 c_n F_n(t_i) \right] F_m(t_i) dt = 0 \quad (68)$$

Das Fehlerminimum führt auf ein allgemeines Gleichungssystem

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad , \quad (69)$$

in dem  $\underline{F}$  die Matrix der unbekannt Koeffizienten  $\underline{c}$  und  $\underline{v}$  die gegebene rechte Seite darstellt. Die m-te Zeile ergibt dann für die Einzelglieder der Matrix

$$f_{mn} = \int_0^T F_n(t_i) F_m(t_i) dt \quad (70a)$$

und

$$v_m = \int_0^T v(t_i) F_m(t_i) dt \quad (70b)$$

Im Gegensatz zu den orthogonalen Eigenschaften der Fourier-Reihen folgt für die Nachbar-Koeffizienten dieser modifizierten Funktionen  $f_{mn} \neq 0$ , jedoch gilt  $f_{mn} = f_{nm}$  [nach Gleichung (70a)]; d. h. je nach gewählter Maximalzahl N der Koeffizienten n ergibt sich zwar ein zur Hauptdiagonale symmetrisches, aber vollbesetztes Gleichungssystem entsprechend dem Schema in Bild 15.

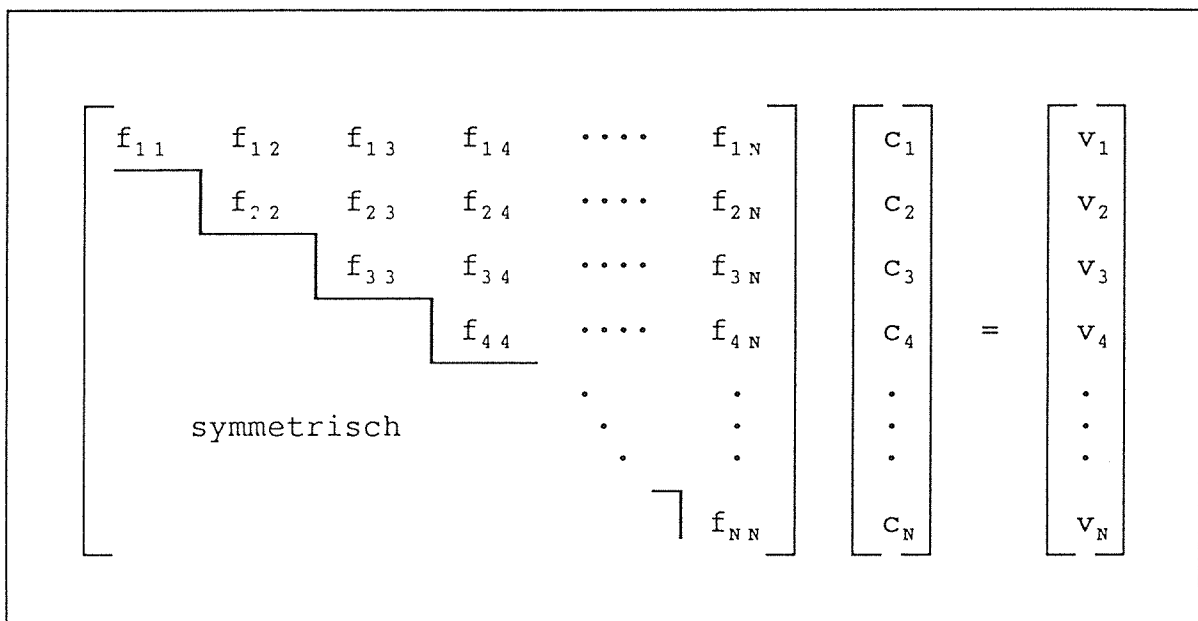


Bild 15 Matrixaufbau bei der Gauß'schen Gesamtlösung

Nach Bild 14 ist bereits die parametrische Vielfalt des Verlaufs der modifizierten Fourier-Reihen [am Freifeld wirkend] diskutiert worden. Eine genaue Analyse des Verlaufs der Einzel-funktionen weist für die Berechnung der einzelnen Matrixglieder  $f_{mn}$  aus, daß sich auch für  $m \neq n$  und  $m-n \gg 1$  Größenordnungen einstellen, die i.a. einen deutlichen Anteil der Hauptdiagonale ausmachen bzw. sogar größer als diese sein können. Liegen nun entsprechende Aufzeichnungen mit hoher diskreter Zeitschrittzahl vor, so ist es allgemein erforderlich, die Matrix  $\underline{F}$  unter Berücksichtigung der Symmetrie zu generieren und



### Fall 1 : Untere und/oder obere Frequenzschranke

Es sei eine Freifeldoszillation gegeben, deren Entwicklung entsprechend (67) sowohl unterhalb als auch oberhalb einer Frequenzschranke der modifizierten Fourier-Reihen Lösungskoeffizienten kleinerer Ordnung mit  $\underline{c}_1 = \varepsilon \underline{c}_2$  und  $\underline{c}_3 = \varepsilon \underline{c}_2$  (mit  $\varepsilon \ll 1$ .) erwarten lassen. Das allgemeine Gleichungssystem (69) läßt sich dann durch die Untermatrizen ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ \underline{F}_{31} & \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \underline{c}_2 \\ \underline{c}_2 \\ \varepsilon \underline{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{bmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile ist dann abzulesen:

$$\varepsilon [ \underline{F}_{21} + \underline{F}_{23} ] \underline{c}_2 + \underline{F}_{22} \underline{c}_2 = \underline{v}_2 \quad ,$$

d. h. nach Maßgabe eines kleinen  $\varepsilon$  reduziert sich die Gesamtmatrix zu

$$\underline{F}_{22} \underline{c}_2 = \underline{v}_2 \quad . \quad (71)$$

Für den Fall 1 folgt als Entscheidungskriterium

- a) die vollständige Auswertung des Vektors  $\underline{v}$
- b) die begleitende Auswertung der Maxima / Minima der zug. modifizierten Fourier-Reihe.

Hierbei stellt Kriterium a) die absolut vergleichbaren Größenordnungen der Lastseite dar, die eine potentielle Ausblendung unterer und/oder oberer Frequenzbereiche zuließe. Im Hinblick auf die zusätzlich angeregten Eigenschwingungen des Systems erlaubt das Kriterium b) noch eine relative Zuordnung des Größenvergleichs, da es Hinweise auf die Eigenwertnähe liefert.

Für Schwingungen mit begrenztem Frequenzband (der modifizierten Fourier-Reihen) stellt der Fall 1 eine erhebliche Reduzierung des Rechenaufwandes dar.



## Fall 2 : Selektiv gewählte obere Frequenzschranke

Lassen sich die im Fall 1 definierten Grenzen nicht eindeutig ziehen, ist zur Reduzierung der Gesamtmatrix  $\underline{F}$  die Möglichkeit des Abbruchs in Bezug auf eine selektierte obere Frequenzschranke gegeben, so daß auf diese oberen Lösungskoeffizienten verzichtet wird. Somit ergibt sich die Ausgangsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\underline{F}_{11}} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\underline{c}_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\underline{v}_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

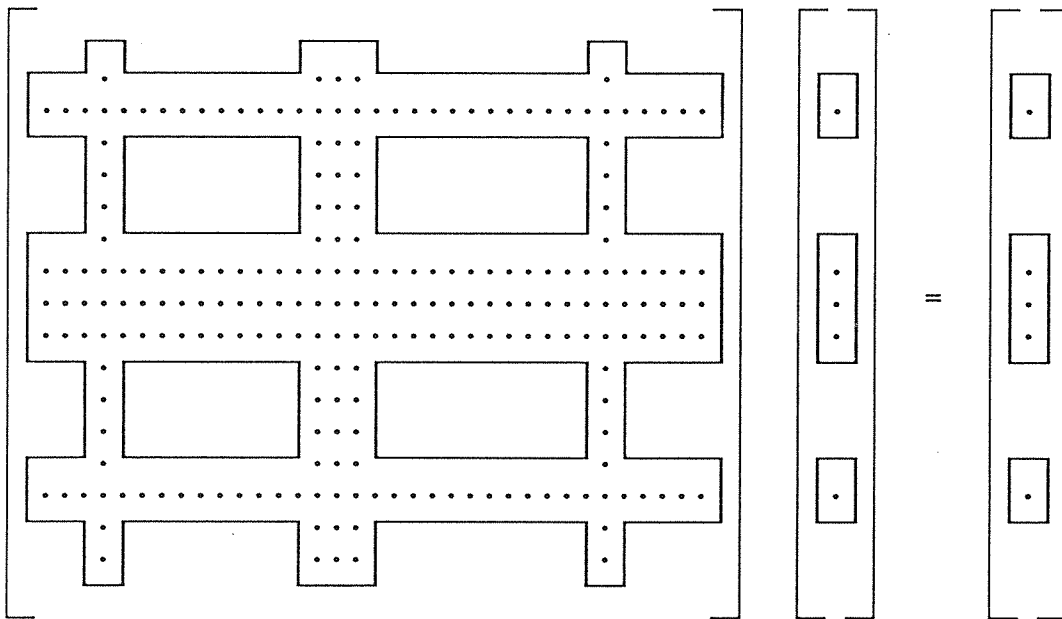
Die erste Zeile liefert dann die Reduktion der Matrix  $\underline{F}$  für den Fall 2

$$\underline{F}_{11} \underline{c}_1 = \underline{v}_1 \quad . \quad (72)$$

Im Gegensatz zum Fall 1 ist ein Entscheidungskriterium zur Wahl der oberen Abbruchfrequenz unter den definierten Bedingungen nicht vorher anzugeben; vielmehr ist nach Lösung von (72) zu überprüfen, ob die (begrenzte) Basisschwingung - transformiert mittels der Freifeldimpulslösung - eine hinreichende Oberflächenoszillation [im Vergleich zur gegebenen Freifeldfunktion] ergibt. Hierzu sind unterschiedliche Fehlerkriterien denkbar. Für die weiteren Untersuchungen ist vorrangig die diskrete prozentuale Abweichung der Soll- zur Ist-Kurve mit der zusätzlichen Gewichtung in Bezug zum absoluten Maximalwert der Ausgangsfunktion gewählt.

## Fall 3a : Selektierte Frequenzen [Gesamtbereich]

Wenn ebenso wie beim Fall 2 definierte Frequenzbereiche nicht eindeutig aus den Entscheidungskriterien a) und b) ersichtlich sind und eine gleichmäßige Ausbildung des Vektors  $\underline{v}$  vorliegt, ist zur Reduktion der Gesamtmatrix  $\underline{F}$  eine selektierte Frequenzauswahl denkbar. [Diese Selektion ist beispielsweise möglich aus dem Größenvergleich des Vektors  $\underline{v}$  in Verbindung mit den berechneten absoluten Schwingungsmaxima.] Hierdurch erfolgt eine bereichsweise Zusammenschiebung der Matrix  $\underline{F}$  im Fall 3a, die sich auf den Gesamtbereich der Time-History bezieht:



Unter Beachtung der korrespondierenden Zeilen und Spalten reduziert sich somit das Gesamtsystem zu

$$\underline{F}_{red} \cdot \underline{c}_{red} = \underline{v}_{red} \quad (73)$$

Ebenso wie beim Fall 2 ist die hinreichende Lösungsgenauigkeit mit Hilfe des definierten Fehlerkriteriums erst nachträglich zu überprüfen und möglicherweise neu anzupassen. Es wird sich jedoch in jedem Fall entsprechend dem Bildungsgesetz für die Einzelmatrixglieder  $f_{mn}$  bzw.  $v_m$ , deren Integration über den Gesamtbereich der Time-History am Freifeld zu vollziehen ist, eine Lösung für die selektierten Koeffizienten  $\underline{c}_{red}$  einstellen.

### Fall 3b : Selektierte Frequenzen [Teilbereiche]

An dieser Stelle soll noch auf einen Sonderfall des Falles 3a hingewiesen werden.

Für den Lösungsvollzug mittels Minimierung des Aufwandes ist auch ein pragmatisches Vorgehen denkbar - wie in Bild 17 angegeben -, indem die Time-History in Einzelabschnitte unterteilt wird. Abschnittsweise erfolgt nun nach Zahl der diskreten Punkte die Entwicklung der Reihenglieder, so daß für den ersten Abschnitt die Beziehung (69) identisch aufgestellt wird. Die so erhaltene, über den Abschnitt wirkende Basiserregung wird mittels der Impulslösung ins Freifeld transformiert und ist dann

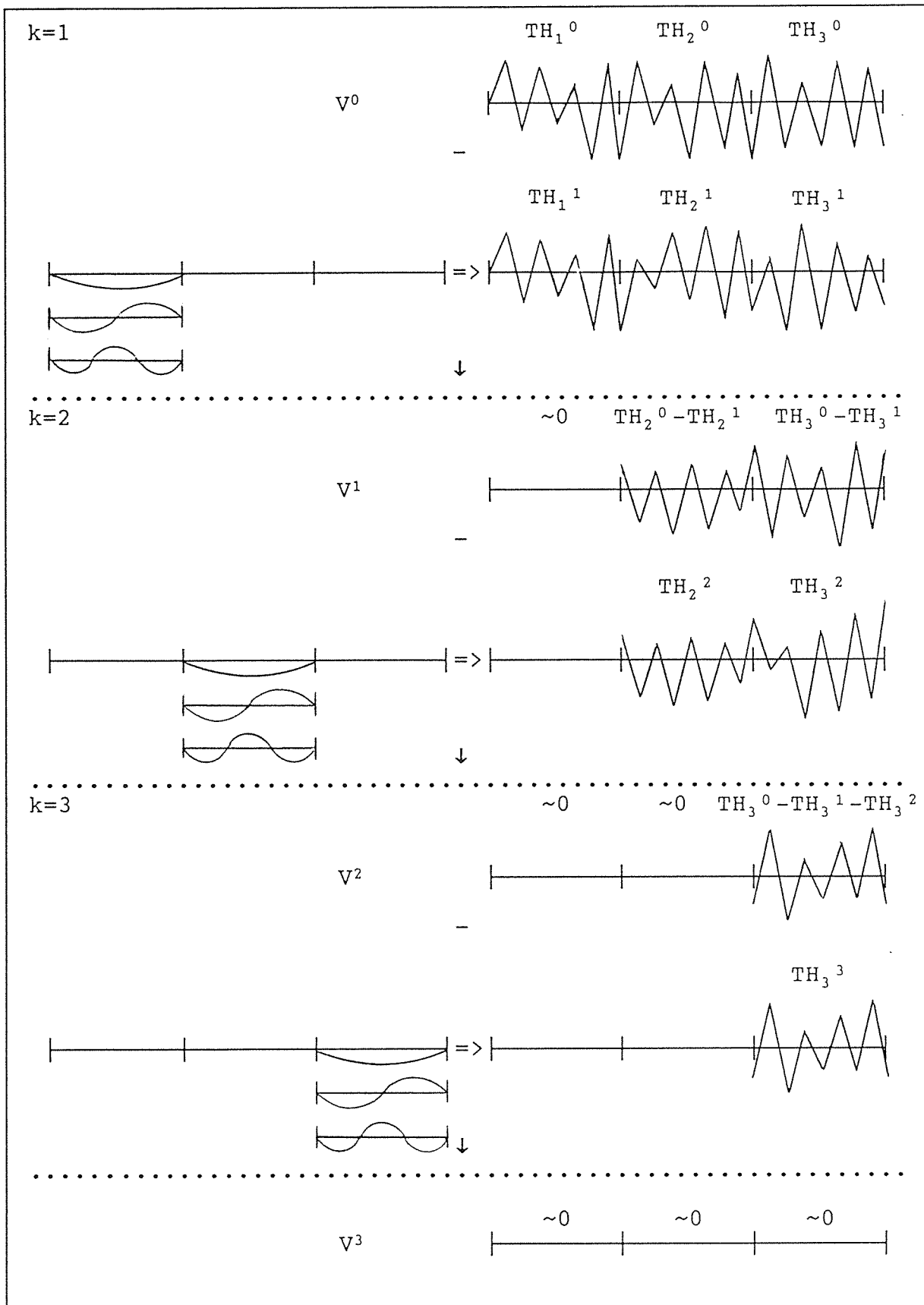


Bild 17 Prinzip der selektierten Frequenzen [Teilbereiche] mit  $K=3$

von der aktuell vorhandenen Zeit-Geschichte zu subtrahieren. Damit kann der Übergang zum nächsten Abschnitt vollzogen werden. Die endgültige Lösung wird durch zyklische Wiederholung des beschriebenen Vorganges erhalten, d. h. gemäß Bild 17 läßt sich das allgemeine Lösungsschema formulieren: Hierbei kennzeichnet der tiefgestellte Index den jeweiligen Abschnitt und der hochgestellte Index die ermittelte Time-History im Zyklus, also ist  $TH_i^k$  die Time-History für den Bereich des  $i$ -ten Abschnittes im  $k$ -ten Zyklus. Das Superskript "0" kennzeichnet die originäre Freifeldfunktion, und  $K$  ist die Gesamtzahl der unterteilten Abschnitte.

Zyklus  $k = 1, K$

aktuelle Freifeldfunktion  
(nur Abschnitt  $k$ )

$$V_k^{k-1} = TH_k^0 \quad k=1$$

$$V_k^{k-1} = TH_k^0 - \sum_j^{1, k-1} TH_k^j \quad k>1$$

Lösung (nur Abschnitt  $k$ )

$$\underline{C}_k \text{ red} = \underline{F}_k^{-1} \text{ red} \cdot \underline{V}_k \text{ red}$$

berechnete Freifeldfunktion  
für die Abschnitte  $j=k, K$

$$\sum_j^{k, K} TH_j^k$$

$k=k+1$

nein

k = K ?

ja

ENDE

Im Grundsatz stellt der Fall 3b einen Sonderfall von 3a dar, was unmittelbar aus der Zuordnung der korrespondierenden Grundschwingzeiten resultiert. Mit  $T_0$  als Gesamtschwingzeit nach

(65) ergibt sich die Abschnittszeit  $T_0^* = T_0/K$ , so daß die abschnittsweise Entwicklung umzuschreiben ist in

$$\sum_j^J c_j^* \cdot \sin \alpha_j^* t \quad ,$$

wenn  $J$  die Maximalzahl der freien diskreten Stützstellen des Abschnitts ist. Im Vergleich zur Gesamtschwingzeit sind somit die (regelmäßig) selektierten Frequenzen abzulesen, nämlich

$$\alpha_j^* = j \pi / T_0^* \quad \text{bzw.} \quad \alpha_j^* = jK \pi / T_0 \quad ;$$

es ist damit die Selektion der  $jK$ -Frequenzen vorgenommen, wobei nur  $j$  als freier Zähler wirkt.

Dies führt also im Grundsatz zur gleichen Schreibweise des Falles 3a, nämlich zur Beziehung (73); da jedoch die Lösung sukzessiv je Abschnitt mit der Forderung des Fehlerminimums erzielt wird, kann bei ungünstiger Frequenzselektion eine Vergrößerung der Time-History und damit eine Überhöhung der Lösungskoeffizienten für die nachfolgenden Abschnitte eintreten. M. a. W. ist eine konvergente Lösung bei Anwendung dieser schrittweisen Prozedur nicht immer gewährleistet.

### 3.3.2.2.3 Doppel-Fourier-Ansatz

Nach der numerischen Entwicklung der modifizierten Fourier-Reihen am Freifeld mittels der Einheitsimpulslösung ist ein identisches Vorgehen wie in Abschnitt 2.3.3 möglich, indem sowohl die Freifeldfunktion als auch die modifizierten Reihen durch echte Fourier-Reihen approximiert werden. Wieder führt der Ansatz (43) auf das allgemeine System

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad , \quad (74)$$

nach dessen Aufstellung und Lösung mit

$$\underline{c} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{v} \quad (75)$$

nunmehr die unbekanntenen Koeffizienten  $c_n$  zur Ermittlung der gesuchten Basisbeschleunigung bereit stehen. Die Matrixglieder bestimmen sich ebenso zu

$$f_{nm} = \frac{2}{T} \int_0^T F_m(t_i) \sin \alpha_n t_i dt \quad (76a)$$

und

$$v_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t_i) \sin \alpha_n t_i dt \quad (76b)$$

Es ist ersichtlich, daß die Matrix  $\underline{F}$  keine orthogonalen Eigenschaften aufweist, da - ebenso wie in Abschnitt 3.3.2.2.1 -  $f_{mn}$  i. a. verschieden von Null sind. Wegen  $f_{mn} \neq f_{nm}$  entsprechend (76a) geht zusätzlich die vorteilhafte Symmetrieeigenschaft der Matrix  $\underline{F}$  verloren; jedoch gibt es wegen der Zuordnung zu den spezifischen Harmonischen eine deutlichere Konzentration zur Hauptdiagonale [im Vergleich zum vorstehenden Kapitel]. Diese Eigenschaft könnte ausgenutzt werden, indem näherungsweise eine schmalbandige [unsymmetrische] Matrix  $\underline{F}$  zur Bestimmung der Koeffizienten  $c_n$  verwandt wird.

#### 3.3.2.2.4 Amplitudenkriterium

Der Vollständigkeit halber soll ein weiteres Kriterium zum Aufbau des Systems

$$\underline{F} \cdot \underline{c} = \underline{v} \quad (77)$$

erwähnt werden bei gleichem Vorgehen zur numerischen Ermittlung der modifizierten Fourier-Reihen. Es ist auch möglich, anstelle des Minimums der Fehlerquadrate die Forderung aufzustellen, direkt die Gleichheit der Amplituden an den diskreten [festen] Stützstellen  $t_i$  zu etablieren, also

$$v(t_i) - \sum_n^{1, \text{imax}} c_n \cdot F_n(t_i) = 0 \quad (78)$$

Diese Forderung ist ungleich schärfer als das Minimum der Fehlerquadrate und führt auf ein allgemeines, unsymmetrisches Gleichungssystem, dessen Hauptdiagonalen u. U. auch verschwinden können.

### 3.3.3 Entkoppelte Partikulärlösung im Zeitbereich

In Abschnitt 3.3.2 ist mittels Anwendung der Einheitsimpulslösungen die Gesamtlösung am Freifeld vollzogen worden, indem Fourier-Reihen - an der Basis wirkend - zum Freifeld transformiert und dort im Vergleich zur gegebenen Schwingung spezifischen Bestimmungskriterien unterworfen werden. Da es sich hierbei um die Gesamtlösung handelt, sind weitere Vorgaben nicht erforderlich.

Nachteilig für das Prozedere in Abschnitt 3.3.2 ist, daß in jedem Fall die Bestimmungsmatrix  $\underline{F}$  aufzustellen und zu lösen ist, wobei der Aufwand beträchtlich von der Zahl gewählter bzw. notwendiger diskreter Stützwerte abhängt. In Kapitel 2.3.2 ist bereits - unter Berücksichtigung der Eigenwerte - gezeigt worden, daß sich für alle natürlichen, d. h. mit Dämpfung behafteten Systeme durch Entkoppelung der mit den Dämpfungsgliedern verbundenen homogenen Lösungsanteile von den Partikuläranteilen ein eleganter Weg anbietet, der nicht die explizite Bereitstellung und Evaluierung eines Gleichungssystems erfordert. In jedem Fall muß jedoch die definierte Dämpfung verschieden von Null sein.

In Kapitel 2.3.2 ist es gelungen, eine direkt auflösbare Beziehung zwischen Basis- und Freifeldschwingung herzuleiten, wenn eine Beschreibung beider Funktionen durch den komplexen Exponential-Ansatz erfolgt und die mit der Dämpfung behafteten homogenen Anteile unterdrückt werden. Dies führt zu der einfachen algebraischen Beziehung (40), die eine direkte, für jede Harmonische  $n$  getrennte Berechnung der Einzelkoeffizienten gestattet, also je  $n$

$$H_n = U_n / \sum_1^L TF^{k_1}_n \quad . \quad (79)$$

Hierbei ist der  $\Sigma$ -Ausdruck der Beitrag aller berechneten Eigenwerte und -formen des untersuchten Systems, der jedoch je Harmonische  $n$  insgesamt einen komplexen Transformationsparameter  $P_n$  darstellt; also ist nach Abschnitt 2.3.2

$$P_n = \sum_1^L \left( \frac{1}{L} + BF^{k_1} \frac{1}{(\gamma_{1n}^2 - 1) + i2D_1 \gamma_{1n}} \right) \quad . \quad (80)$$

Somit läßt sich der allgemeine Ansatz (39a und b) umschreiben zu

$$\sum_n^{-\infty, +\infty} U_n \exp(i\alpha_n t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n \left( \sum_1^L \text{TF}^k_{1n} \right) \exp(i\alpha_n t)$$

oder (81)

$$\sum_n^{-\infty, +\infty} U_n \exp(i\alpha_n t) = \sum_n^{-\infty, +\infty} H_n P_n \exp(i\alpha_n t)$$

Hierbei repräsentiert die linke Seite die gegebene [, jetzt in Exponential-Funktionen überführte] Freifeldfunktion, während die rechte Seite als diejenige Freifeldschwingung interpretiert werden kann, die aus der jeweiligen Einheitsschwingung  $\exp(i\alpha_n t)$  - an der Basis wirkend - am Freifeld erhalten wird.

Die gegebene Freifeldfunktion wird i. a. jedoch in diskreten Werten vorliegen, so daß eine optimale Überführung mittels der 'Fast Fourier Transform Analysis' (s. Abschnitt 2.2.6) vorzunehmen ist. Entsprechend Bild 1 erfolgt dann die Besetzung des Vektors  $F_{g_{eg_{eb}}}(I)$ , so daß die komplexen Koeffizienten  $U_n$  für alle Harmonischen  $n$  mit  $n = 0, \pm 1 \dots \pm N/2$  vorliegen.

Mit der Kenntnis des Freifeldeinheitsimpulses kann die diskrete Basisfunktion zum Freifeld transformiert werden, so daß je  $n$  für jeden diskreten Zeitschritt  $t_i$  gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Basis} & \text{BAS}(t_i) = \exp(i\alpha_n t_i) \\ \text{Freifeld} & \text{FREI}(t_i) = P_n \exp(i\alpha_n t_i) \end{array} \quad (82)$$

M. a. W. läßt sich der komplexe Transformationsparameter  $P_n$  ohne Ermittlung der Eigenwerte und -formen für jedes beliebige  $t_i$  aus (82) ermitteln zu

$$P_n = \text{FREI}(t_i) / \text{BAS}(t_i) \quad (83)$$

Die Freifeldfunktion  $\text{FREI}(t_i)$  ist aus der Basisfunktion  $\text{BAS}(t_i)$  mit der Impulslösung generiert worden; hier zeigen sich in der Einschwingphase kleinere Ungenauigkeiten. Es ist daher empfehlenswert, die Funktion  $\text{FREI}(t_i)$  für so große  $t_i$  zu entwickeln, bis schließlich der Verhältniswert

$$\rho = P_n(t_i) / P_n(t_{i+1})$$



gegen einen konstanten Wert konvergiert; d. h. es ist keinesfalls erforderlich, die Exponentialfunktion über die gesamte Zeitperiode  $T_p$  (nach Abschnitt 2.2.6) auszuwerten. [Hierdurch kann die Rechenzeit erheblich gesenkt werden.]

Die rechte Seite von (81) ist nun ebenfalls in den Frequenzbereich zu transformieren. Entsprechend Abschnitt 2.2.6 ist der Frequenzwert  $\alpha_n$  determiniert zu

$$\alpha_n = 2\pi \cdot n / ( N \cdot \Delta t ) \quad \text{und} \quad n = 0, N/2,$$

wenn  $N$  die Zahl der Stützstellen und  $\Delta t$  den konstanten Zeitschritt angeben. Bei dieser Wahl des Frequenzintervalls ist für die FFT die Besetzung des Vektors  $F_{\text{Einheitsfkt.}}(I)$  entsprechend Bild 1 vorzunehmen, wobei sich aus (81) oder (82) direkt ergibt:

$$F_{\text{Einheitsfkt.}}(I) \quad I=1,1+N/2 \quad \Longleftarrow \quad P_n \quad n=0,N/2$$

Der Restvektor von  $F_{\text{Einheitsfkt.}}(I)$  wird dann konjugiert komplex aufgefüllt. Nach (40) können nun die gesuchten (komplexen) Koeffizienten  $H_n$  mit derselben Zuordnung wie in Bild 1 ermittelt werden, also mit  $I=1,N$  zu

$$H(I) = F_{\text{gegeben.}}(I) / F_{\text{Einheitsfkt.}}(I) \quad . \quad (84)$$

Die so erhaltene Funktion  $H(I)$  wird mittels FFT anschließend in den Zeitraum zurücktransformiert und stellt die Basislösung der gegebenen Freifeldschwingung [nach Anwendung des Partikuläranteils der Differentialgleichung] dar. Es sei noch einmal betont, daß wegen dieses Ansatzes die Vorlaufphase zur eigentlichen Schwingung so groß zu wählen ist, bis die homogenen Anteile 'ausgedämpft' sind und damit die interessierende Lösung nicht mehr beeinflussen können. Prinzipiell ist mit diesem Prozedere die Basislösung gefunden.

Nimmt man nun nachträglich einen Lösungsvergleich vor, indem die mit (84) berechnete Basisschwingung mit der Impulslösung zum Freifeld transformiert und von der gegebenen Freifeldoszillation subtrahiert wird, so erhält man im Anfangsbereich deutliche Ausschläge, die aber schnell abklingen. Dies ist auf den

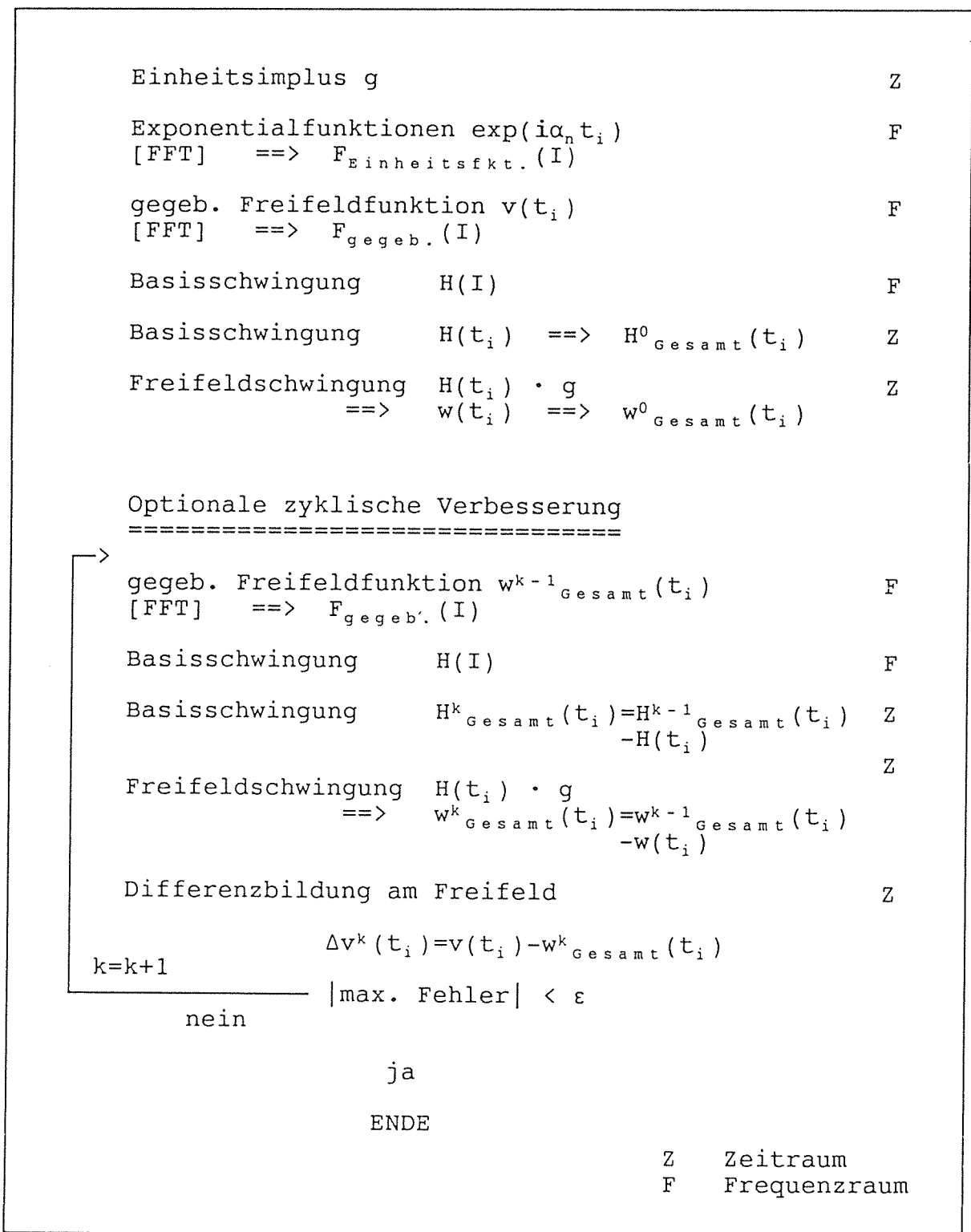


Bild 18 Prinzip der entkoppelten Partikulärlösung

gewählten partikulären Ansatz zurückzuführen. Man kann diesen Anfangsbereich bereinigen, indem die so gebildete Differenzfunktion noch einmal derselben Lösungsprozedur unterworfen und deren [neu erhaltenen] Koeffizienten von den bereits bekannten abgezogen werden. Es zeigt sich bei erneutem Vergleich ein schnelles Abklingen dieses 'Anfangsfehlers', der bei zyklischer Wiederholung beliebig reduziert werden kann. Ist die Funktion

$F_{\text{Einheitsfkt.}}(I)$  einmal ermittelt, so ist der erforderliche Lösungsaufwand selbst bei  $N = 2^{14} = 16384$  Zeitschritten gering.

Das allgemeine Lösungsschema bei gegebener Dämpfung kann somit formuliert werden (s. Bild 18). Hierbei stellt die zyklische Nachkorrektur eine Option dar, da bei Unterdrückung der Anfangsphase bereits ein genaues Resultat des tatsächlich zu betrachtenden Zeitabschnittes erhalten wird.

### 3.3.4 Beispiele - Vorbereitung und Diskussion der unterschiedlichen Wege

Zur Verifizierung ist es notwendig, die entsprechenden Lösungen des Freifeldimpulses bereitzustellen. Wegen der besseren Vergleichbarkeit wird wie in /11/ das gleiche mechanische Modell zugrunde gelegt<sup>N</sup>, und zwar unter der Annahme eines ungedämpften sowie eines im Mittel mit ca. 5% bzw. 7% gedämpften Systems, das bei ca. 700 Knoten etwa 2000 DOF (bei rotationssymmetrischen Annahmen) ausweist. Dieses ist in Bild 19 dargestellt. Die so erhaltenen Freifeldlösungen sind vergleichsweise in den Bildern 20 und 21 gegenübergestellt. Hierbei zeigt sich der Einfluß der Systemdämpfung sehr deutlich, die im Falle von  $D \sim 7\%$  zum schnellen Abklingen führt, während bei  $D = 0\%$  nur langfristig aus der Abstrahlung eine Abnahme zu verzeichnen ist.

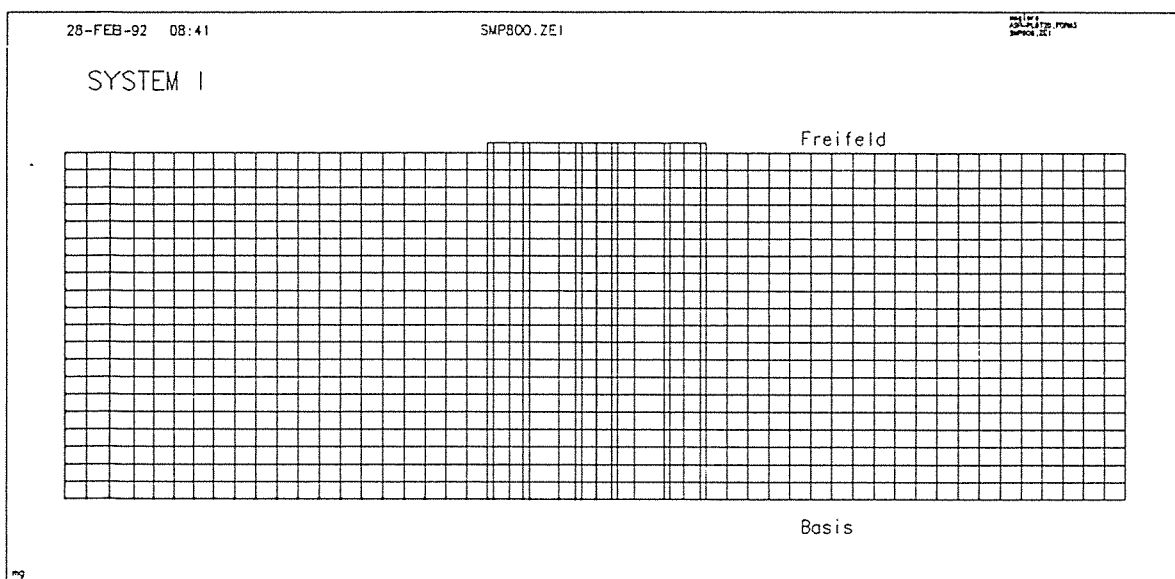


Bild 19 Mechanisches Modell nach /11/ zur Ermittlung des Freifeldimpulses

N. Bild 19 nebst zugeh. Freifeldlösungen sind von den Autoren freundlicherweise zur Verfügung gestellt worden.

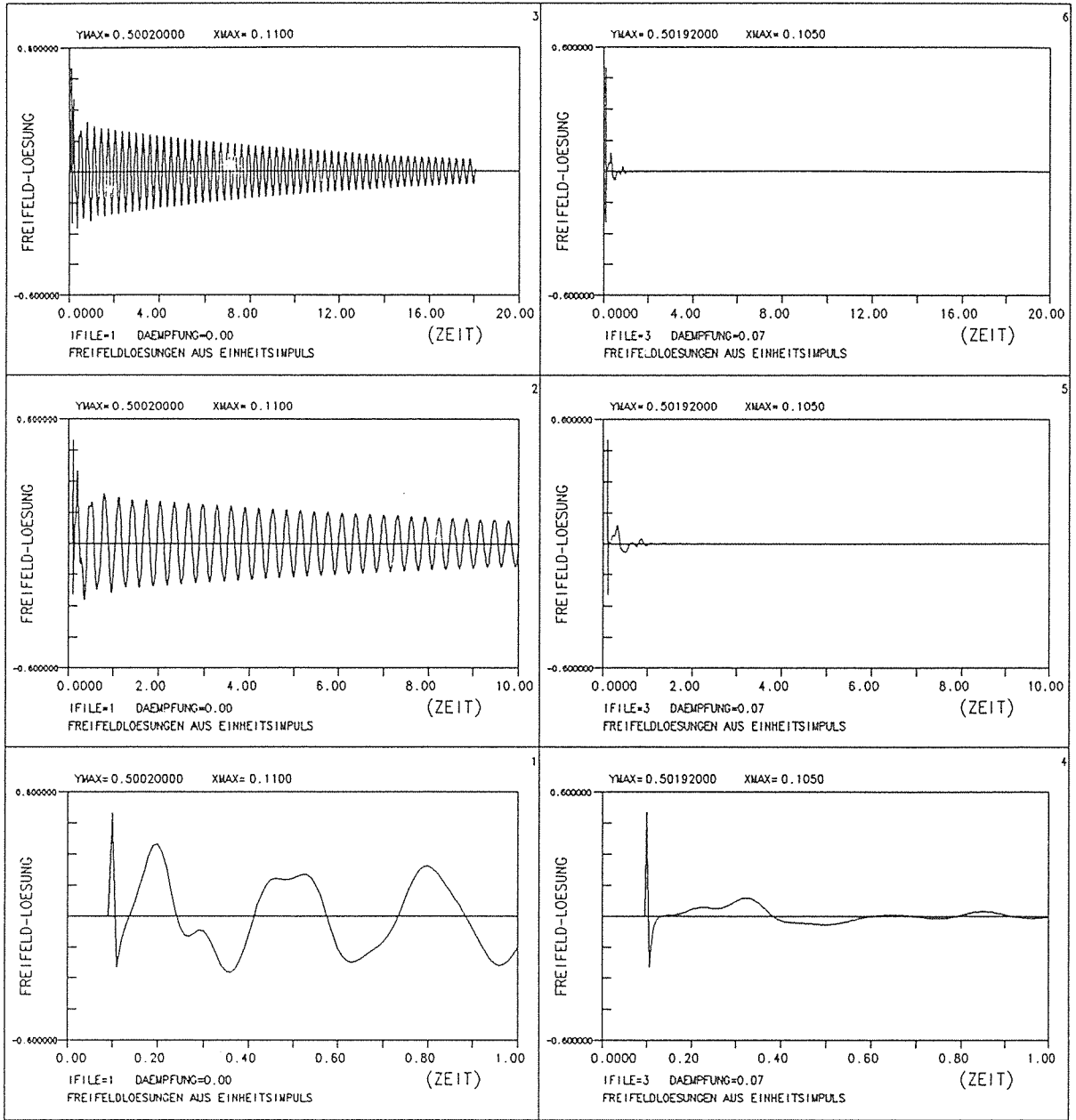


Bild 20 VERGLEICH : mit und ohne Daempfung

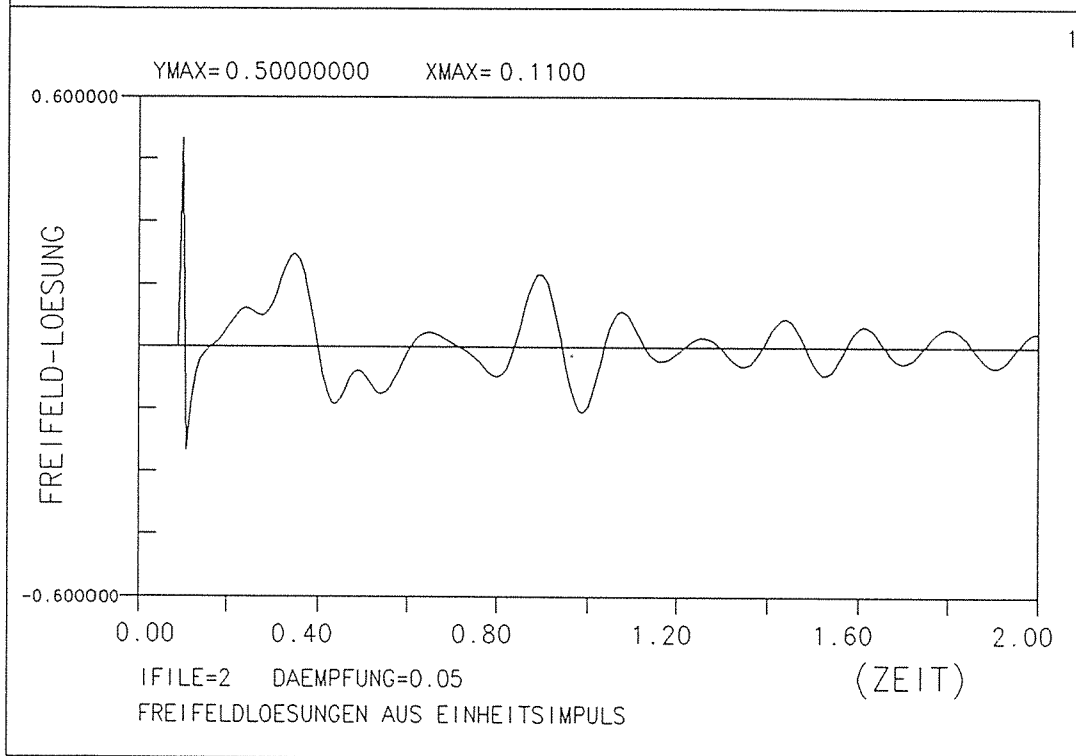
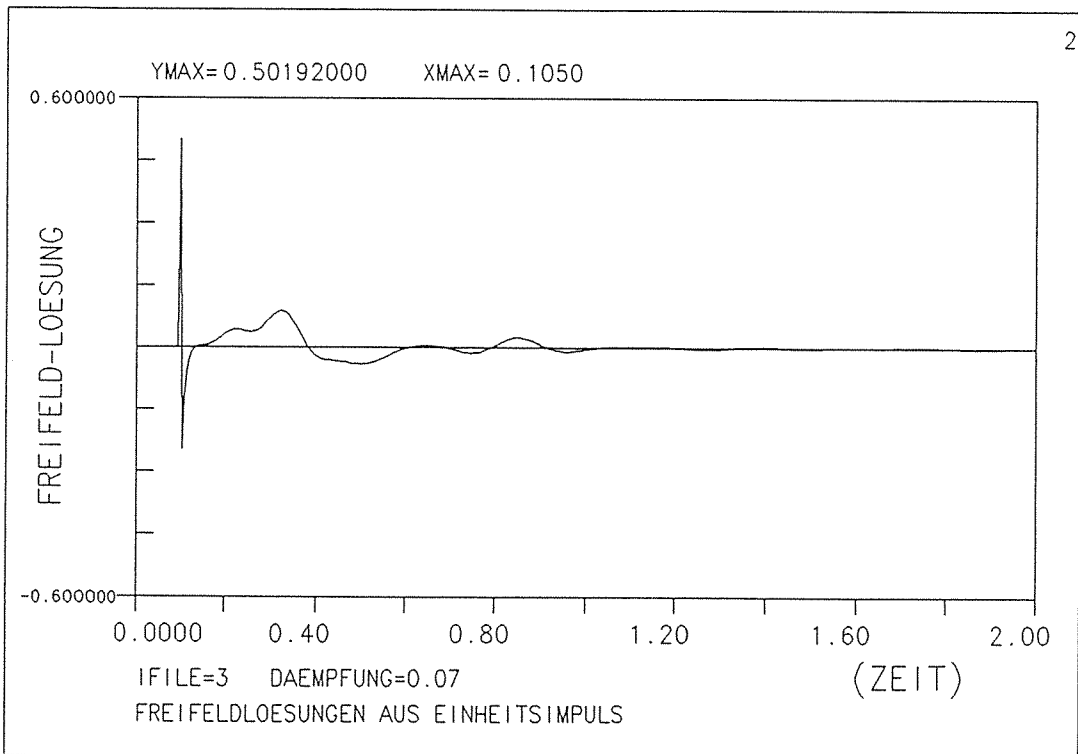


Bild 21 VERGLEICH: oben DT=0.005 s unten DT=0.01 s

Die Anwendung der Lösungsprozeduren (in den Abschnitten 3.3.2.2 und 3.3.3) wird exemplarisch durchgeführt. [Wegen des größeren Aufwandes wird jedoch auf die Anwendung des Doppel-Fourier-Ansatzes bzw. des Amplitudenkriteriums verzichtet.] Als Beispiele sind die Lösungen in den Bildern 22 - 26 für die in der Tab. 3 angegebenen Parameter gezeichnet; hierbei ist jeweils das mechanische System nach Bild 19 mit ca. 2000 DOF unterstellt.

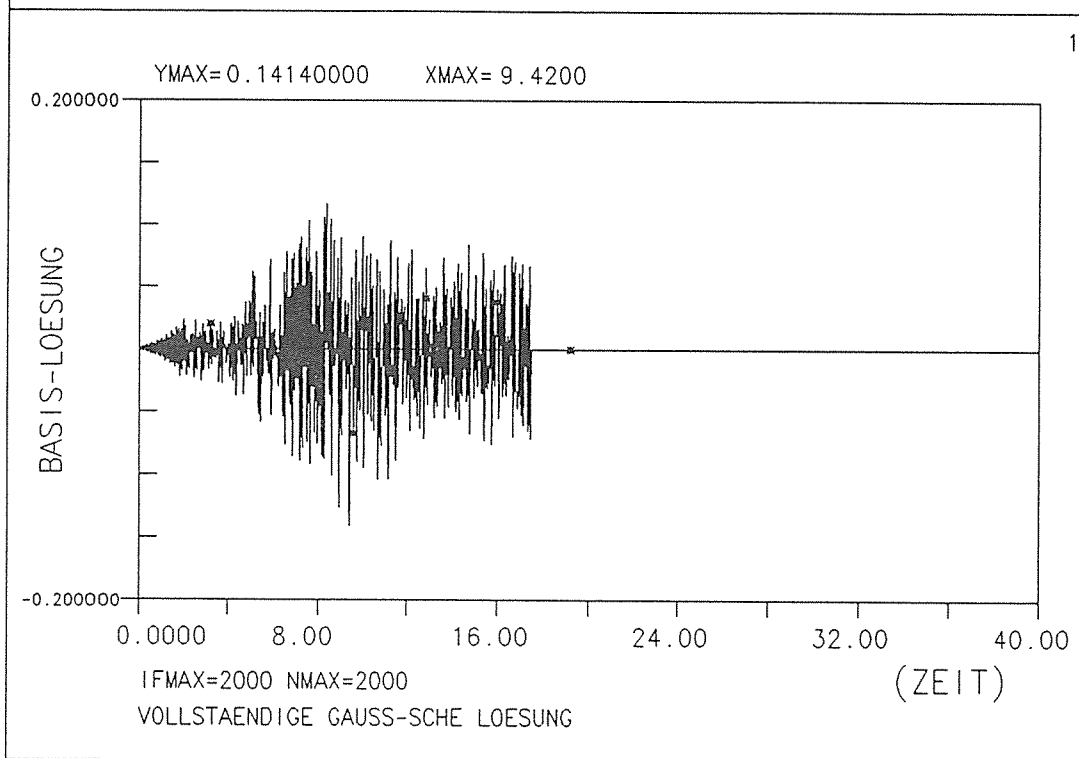
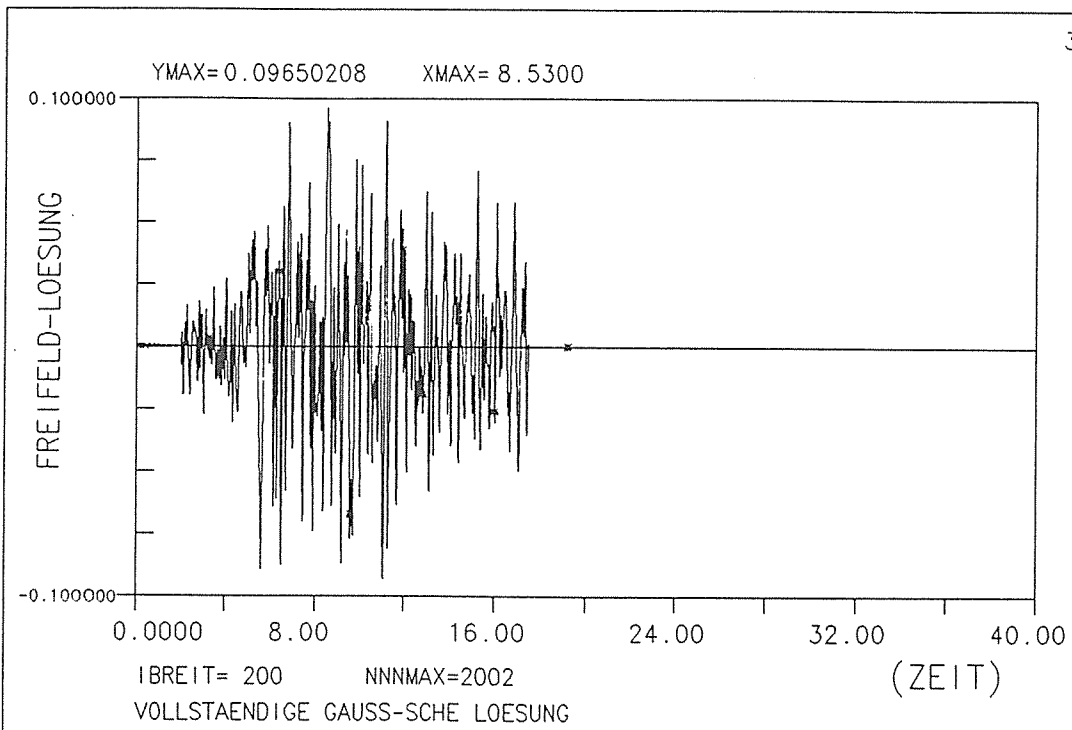
Bild-Nr.	Lösungsprozedur	Dämpfung	Freifeldschwingung
22	Vollständig	0.05	TAFT-Erdbeben
23	Frequenzabh. (3b)	0.07	TAFT-Erdbeben
24	Partikulär	0.07	TAFT-Erdbeben
25	Partikulär	0.07	Sinus MMM=3
26	Frequenzabh. (3a)	0.07	Sinus MMM=3

Tab. 3 Übersicht zu den Beispielen

Ebenso wie in Abschnitt 2.3.5.3 wird die Basislösung jeweils auf dem unteren (Teil-)Bild geplottet. Auf dem oberen (Teil-)Bild wird sowohl die gegebene Freifeldschwingung als auch zur Kontrolle die mittels der Impulslösung zum Freifeld transformierte Basislösung im gleichen Maßstab [übereinander] gezeichnet und die erhaltene Differenz prozentual nach dem gewichteten Fehlerquadrat (Parameter: PROZMAG) bzw. prozentual gewichtet nach der absoluten Maximaldifferenz mit Stellenangabe (Parameter: PROZBUC) ausgewertet.

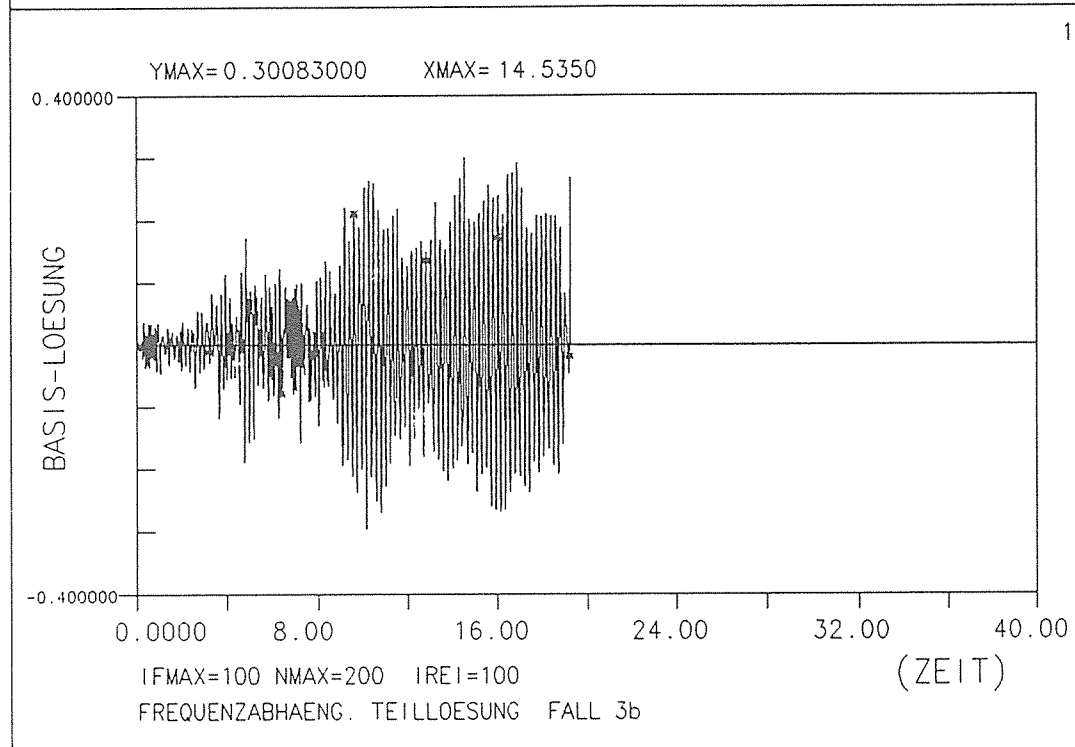
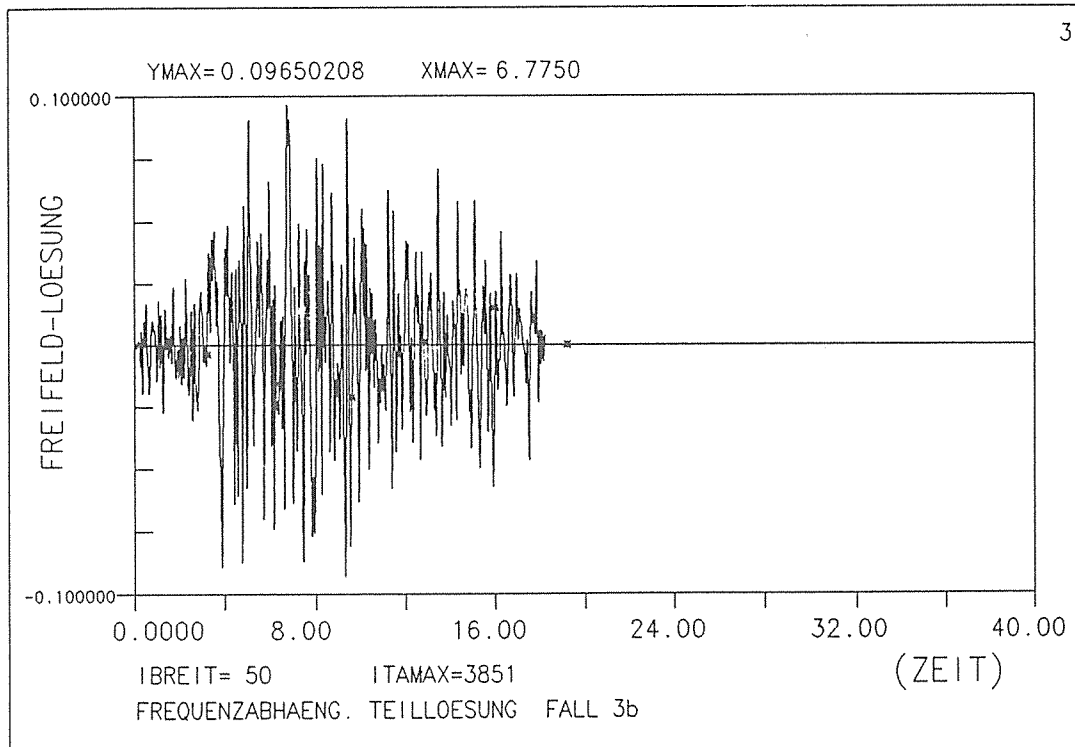
Für die Verifizierung wird das TAFT-Erdbeben als eine Ausgangsschwingung herangezogen und für unterschiedliche Dämpfungsannahmen ( $D = 5\%$  bzw.  $7\%$ ) mit den angegebenen Lösungsprozeduren auf die Basiserregung zurückgeführt und partiell vergleichsweise gegenübergestellt. Dasselbe gilt für die Sinus-Schwingung der Bilder 25 und 26.

Hierbei gilt für die vollständige Gauß'sche Lösung, daß sie uneingeschränkt, allgemein gültig ist, also keine Vorgaben zur Dämpfung oder andere Bedingungen einzuführen sind. Jedoch steigt der Rechenaufwand bei entsprechend hoher Zahl der Zeitinkremente beträchtlich, da das Ausgangsgleichungssystem voll zu besetzen und zu lösen ist. Die Lösung weist u. U. im Anfangs- und im Endbereich merkbare Schwingungsüberhöhungen



PROZUAG= 0.61122E+00 PROZBUC= 0.12853E+01 BEI I= 57

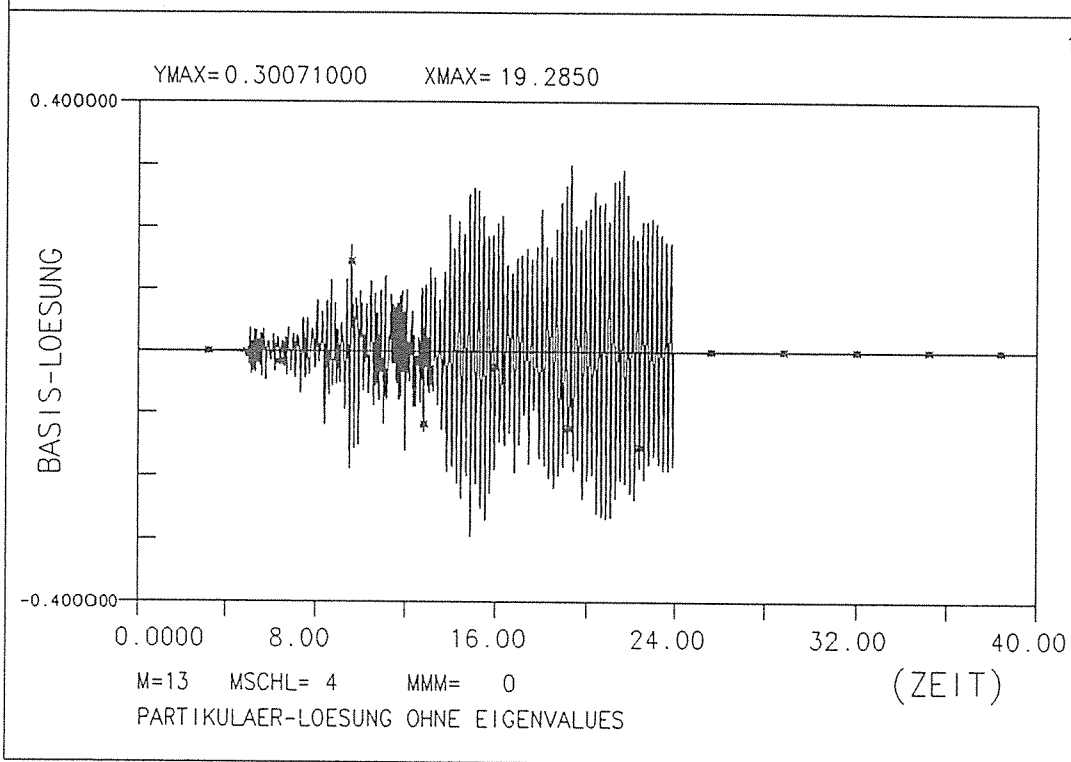
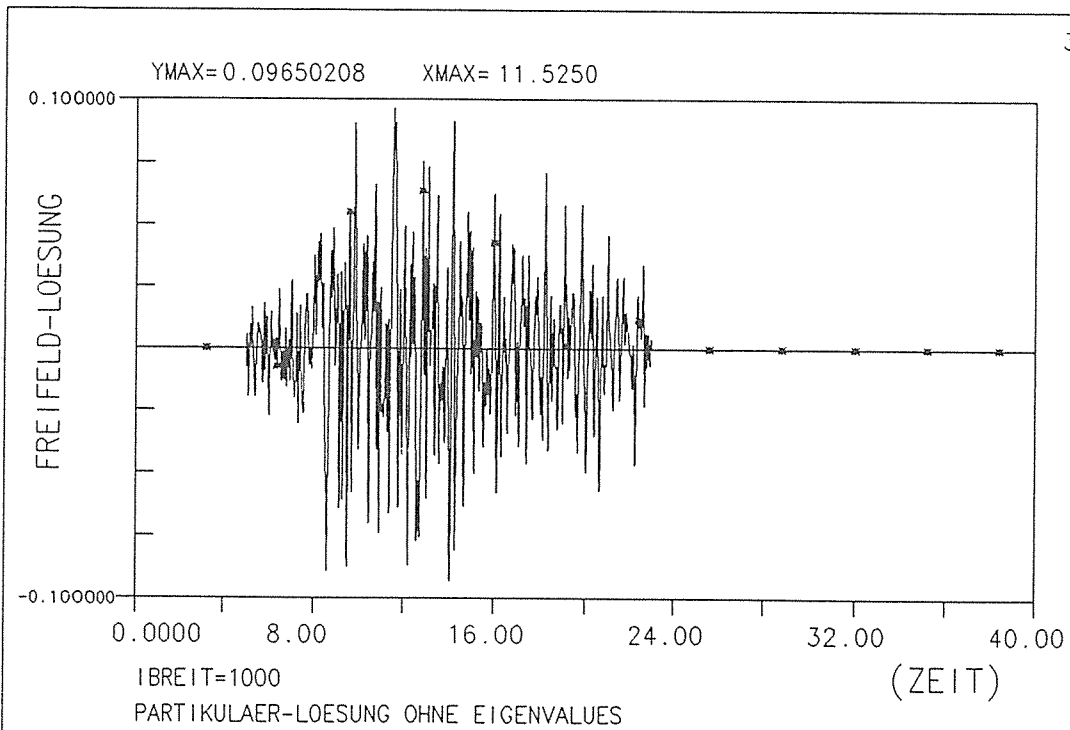
Bild 22 Vollstaendige Gauss-sche Loesung (I=1750)



PROZMAC= 0.56615E+00 PROZBUC= 0.18181E+01 BEI 1= 37

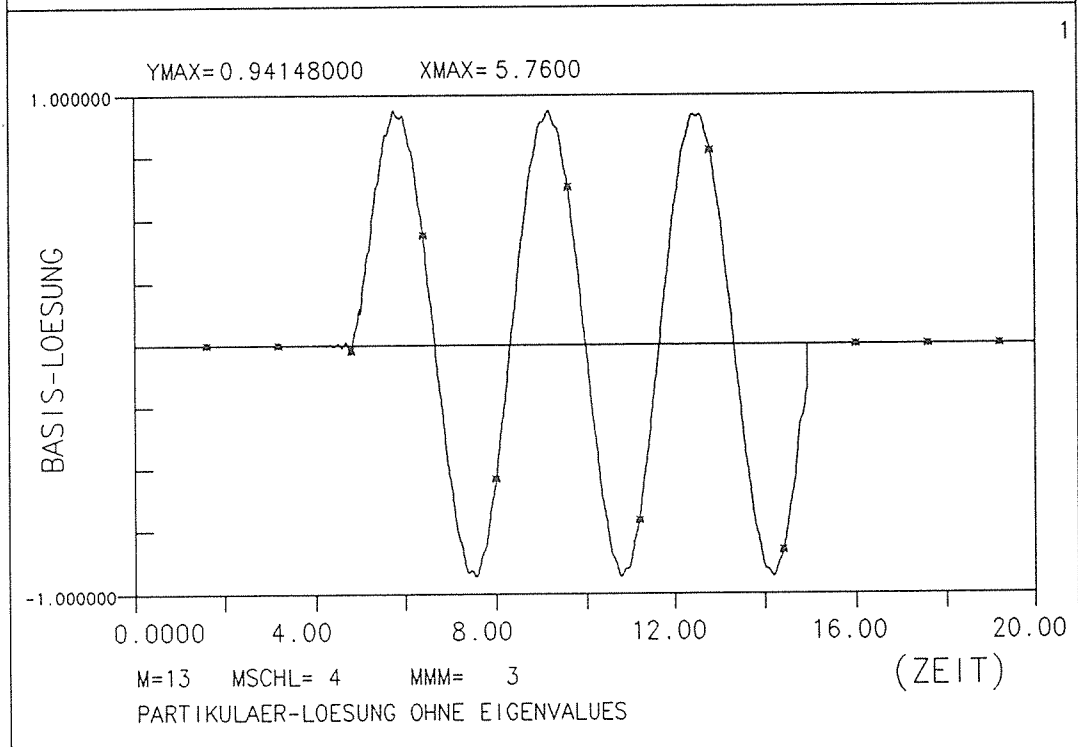
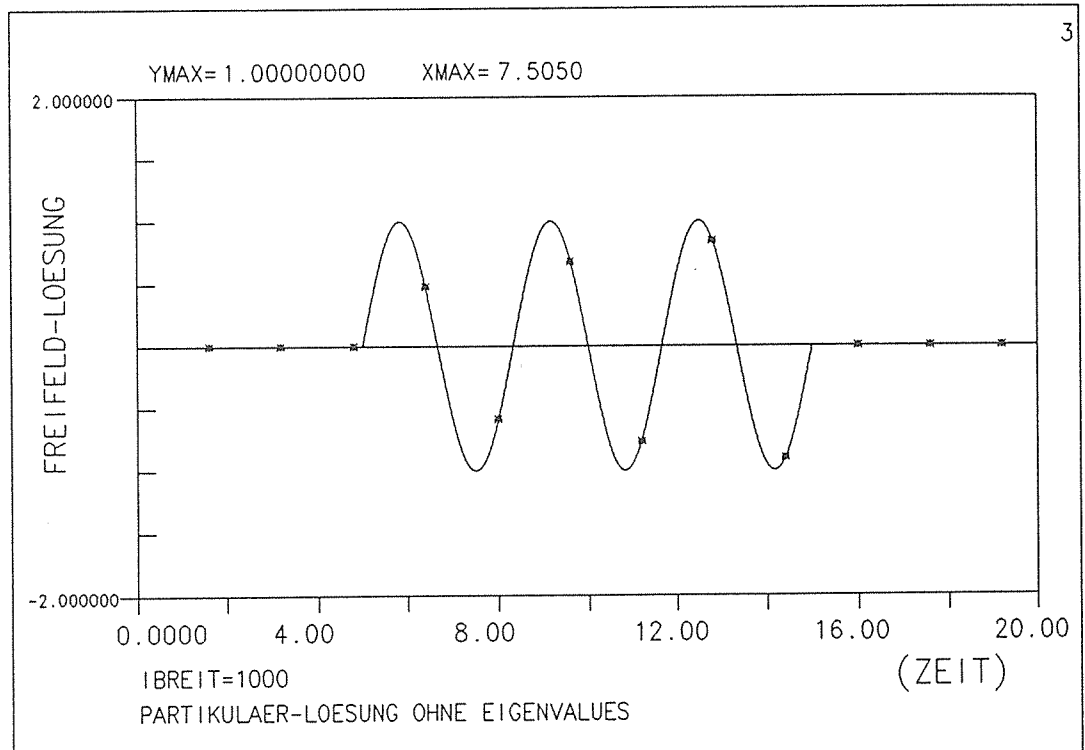
Bild 23 Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 3b





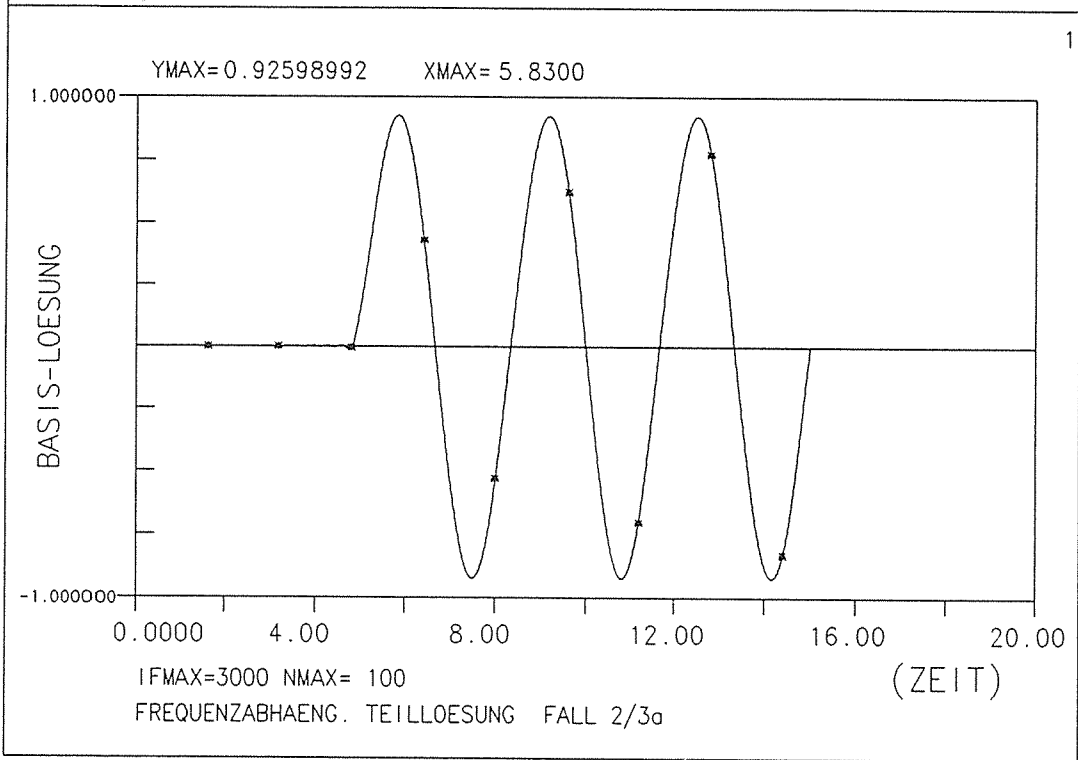
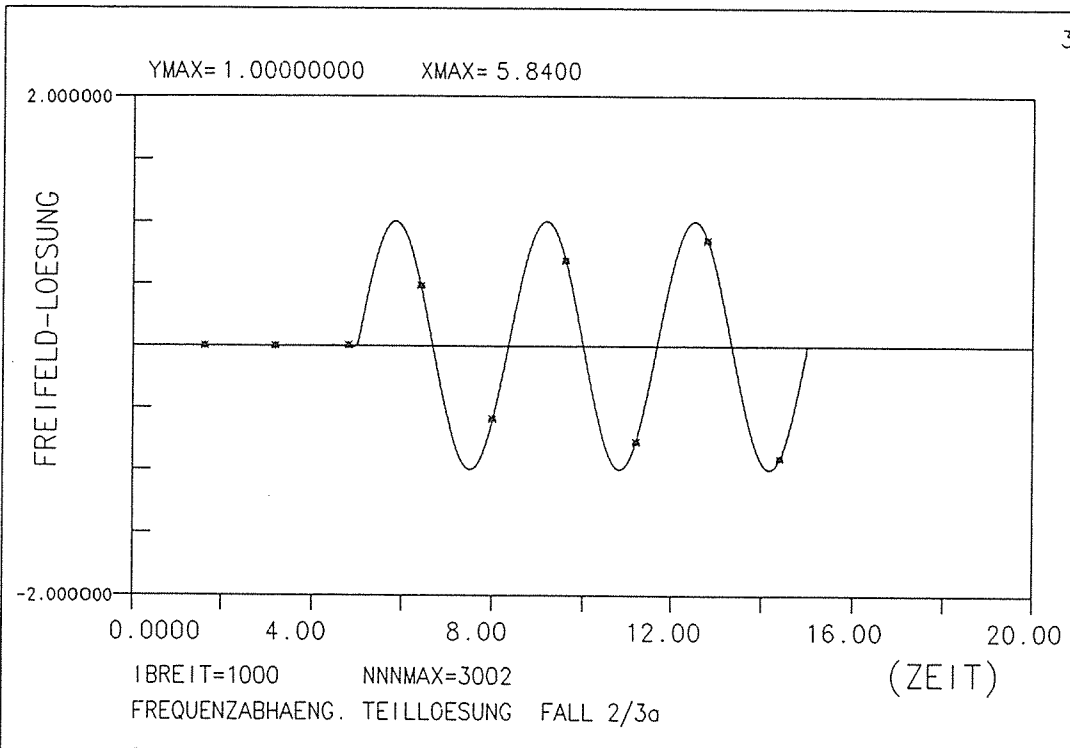
PROZMAG= 0.66851E-02 PROZBUC= 0.10092E-01 BEI 1= 78

Bild 24 Partikulaer-Loesung ohne Eigenvalues



PROZMAG= 0.88621E-03 PROZBUC= 0.39473E-03 BEI 1-1971

Bild 25 Partikulaer-Loesung ohne Eigenvalues



PROZMAG= 0.39235E+00 PROZBUC= 0.28708E+01 BEI 1=1001

Bild 26 Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3 $\alpha$

auf, die bei deutlichen Funktionsunstetigkeiten mit der Gibb'schen Störung erklärt werden. [Diese dürfen zulässigerweise als numerische Störung unterdrückt werden.] In Bild 22 ist dieses Phänomen im Anfangsbereich an der Basis zu erkennen, ohne daß es zu einem Fehler bei der Transformation zum Freifeld führt. Es ist empfehlenswert, die Gesamtschwingperiode (weiter) über die gegebene Freifeldoszillation hinaus zu führen, wobei jedoch dann eine Aufwandssteigerung in Kauf zu nehmen wäre.

Um letzteren Punkt zu reduzieren, empfiehlt sich die frequenzabhängige Teillösung. Handelt es sich um Freifeldschwingungen mit erkennbar begrenztem Frequenzspektrum (FALL 1,2 und 3a), so kann die Lösung der Basiserregung mit geringem Rechenaufwand genügend genau gefunden werden, wie die Fehlerparameter deutlich in Bild 26 ausweisen.

Ein Vorgehen entsprechend FALL 3b - nämlich die abschnittsweise Berechnung der Gesamt-Time-History - stellt ebenso eine Frequenzselektion dar, in diesem Falle über das Gesamtspektrum verteilt (s. Kapitel 3.3.2.2.2). Hierbei ist das Erreichen der Lösungskonvergenz anfangs nicht eindeutig erkennbar; die Konvergenz kann jedoch wesentlich gesteigert werden, wenn die Teilbereiche entsprechend Bild 17 jeweils rückwärtig gegeneinander partiell versetzt werden. Hierzu ist die entsprechende Lösung in Bild 23 für das TAFT-Erdbeben angegeben.

Die entkoppelte Partikulärlösung im Zeitbereich stellt - unter der Bedingung der Vorgabe einer Dämpfung - die mit dem geringsten Aufwand verbundene Prozedur dar. Ist einmal der FFT-Vektor nach Abschnitt 3.3.3 etabliert - was bereits erheblich geringere Rechen- und Speicherkapazität im Vergleich zur Gesamtlösung bedeutet -, so können beliebig viele Beispiele auch mit zyklischer Nachverbesserung entsprechend Bild 18 bei kürzester Rechenzeit behandelt werden. Das gilt bis zur Zahl der Zeitinkremente von  $2^{13}$  bis  $2^{14}$ . Vergleichend mit den anderen Prozeduren sind hier die gleichen Beispiele in den Bildern 24 bzw. 25 geplottet.

Bei diesem Weg ist die gewählte Gesamtperiode immer (erheblich) größer als die gegebene Time-History. Hierbei kann sich u. U. bei großen Funktionsunstetigkeiten in der Nachschwingphase ein Zusatzoszillieren einstellen; dies wird damit erklärt, daß die

anschließende "Null-Time-History" nicht vollständig durch die  $\Delta\lambda$ -Frequenzen der FFT erfaßt werden (s. Abschnitt 2.2.6).

Dieses Phänomen läßt sich auch in Bild 25 erkennen. Da die gegebene Sinus-Schwingung nicht simultan im Rhythmus der  $\Delta\lambda$ -Frequenzen der FFT-Analyse liegt, stellen sich geringfügige Oberschwingungen ein, die jedoch auf das Gesamtergebnis keinen Einfluß haben, wie die nachträgliche Fehlerbetrachtung der Parameter PROZMAG und PROZBUC ausweist.

Im Anhang (Teil II) sind einige wesentliche Beispiele unter Berücksichtigung der genannten Phänomene zusammengestellt.

#### 4. Schlußbemerkung

Es ist Ziel dieses Berichtes, Lösungsprozeduren für die Dekonvolution im Zeitbereich anzugeben und deren Vor- und Nachteile in der Anwendung aufzuzeigen. Die angegebene Methodik basiert auf der grundsätzlichen Annahme linearen Material- bzw. Strukturverhaltens, das die volle Gültigkeit des Superpositionsgesetzes impliziert. Hierbei ist es notwendig, zunächst den umgekehrten Weg zu beschreiten, also aus der Basiserregung die Freifeldschwingung zu ermitteln. Unter Annahme der Kenntnis der Systemeigenwerte werden zunächst analytisch die geschlossenen Lösungen für das MDOF-System bereitgestellt (s. Kapitel 2.2) und in einem weiteren Schritt in Kapitel 2.3 verschiedene Methoden zur Umkehrung des Problems diskutiert.

Für hochgradig unbestimmte Systeme werden i. a. Finite-Element-Programmcodes eingesetzt, so daß die Ermittlung der Eigenwerte und -formen extrem aufwendig und fehlersensibel wird; hier interessieren Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte. Ausgehend von der Ermittlung des Freifeldimpulses (erhalten aus dem Einheitsimpuls an der Basis) werden in Kapitel 3. identische Methoden zur numerischen Behandlung des Problems angegeben. Bei deren Anwendung (im Anhang dokumentiert) zeigt sich, daß die entkoppelte Partikulärlösung immer dann den effektivsten Weg bedeutet, wenn natürliche [also mit Dämpfung behaftete] Systeme behandelt werden.

## Literatur

- / 1/ B. A. Bolt  
Erdbeben, Springer Verlag, 1984
- / 2/ F. P. Müller, E. Keintzel  
Erdbebensicherung von Hochbauten  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1978
- / 3/ I. Szabo  
Einführung in die Technische Mechanik  
Springer Verlag, 1961
- / 4/ J. M. Biggs  
Introduction to Structural Dynamics  
McGraw-Hill Book Company, 1964
- / 5/ R. W. Clough, J. Penzien  
Dynamics of Structures  
McGraw-Hill Book Company, 1975
- / 6/ K. J. Bathe, E. L. Wilson  
Numerical Methods in Finite Element Analysis  
Prentice-Hall, Inc., 1976
- / 7/ G. König, M. Heunisch  
Realistische seismische Lastannahmen für bauliche  
Anlagen mit erhöhtem Sekundärrisiko  
Abschlußbericht IV/1-5-377/82 des IfBt, 1983
- / 8/ H.-J. Bartsch  
Mathematische Formeln  
Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft m. b. H., 1969
- / 9/ M. Dogunke, F. Buchhardt  
Zur geowissenschaftlichen Einordnung der Bundesrepu-  
blik Deutschland und einer sicheren Auslegung tech-  
nischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben  
BAM-Forschungsbericht 138, 1987
- /10/ F. Buchhardt  
Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter  
dynamischer Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-  
Wechselwirkung  
BAM-Forschungsbericht 171, 1990
- /11/ W. Matthees, G. Magiera  
Iterative Dekonvolution der seismischen Basiserregung  
für den Zeitraum  
BAM-Forschungsbericht 176, 1990

## ANHANG I

Im Anhang I sind beispielartig Lösungen mit Berücksichtigung der Eigenwerte der betrachteten mechanischen Modelle geplottet, wie sie in Abschnitt 2.3.5 beschrieben sind. Zur besseren Übersicht sind die bestimmenden Parameter noch einmal in der Tab. I zusammengestellt. Die Bilder sind jeweils zweigeteilt, und zwar wird im oberen Teil (3) die gegebene Freifeldoszillation der Basislösung im unteren Teil (1) gegenübergestellt. Hierbei bezeichnen die Parameter "T1" die Gesamtschwingzeit (in Bezug auf die Basisschwingung), "N BETA" die Zahl der Halbwellen je Gesamtperiode und "IDOF" die Zahl der gewählten Freiheitsgrade. Der jeweils ausgewiesene maximale Amplitudenwert (mit der Abszisse XMAX) ist mit YMAX bezeichnet. In der Tab. I sind für den spezifischen Lösungsweg die Abkürzungen verwendet worden:

- P Partikulärlösung
- G Gauß-Gesamtlösung
- F Fourierlösung

Tab. I Zusammenstellung der Beispiele

Bild-Nr.	I.1	I.2	I.3	I.4
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	3	3	3	3
Erregung $\beta$	10.	10.	10.	10.
$\rho = \beta/\omega$	0.755	0.755	0.755	0.755
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.1	0.1	0.1	0.1
Filter	nein	ja	nein	nein

Bild-Nr.	I.5	I.6	I.7	I.8
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	2	2	2	2
Erregung $\beta$	30.	30.	30.	30.
$\rho = \beta/\omega$	0.596	0.596	0.596	0.596
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.1	0.1	0.1	0.1
Filter	nein	ja	nein	nein

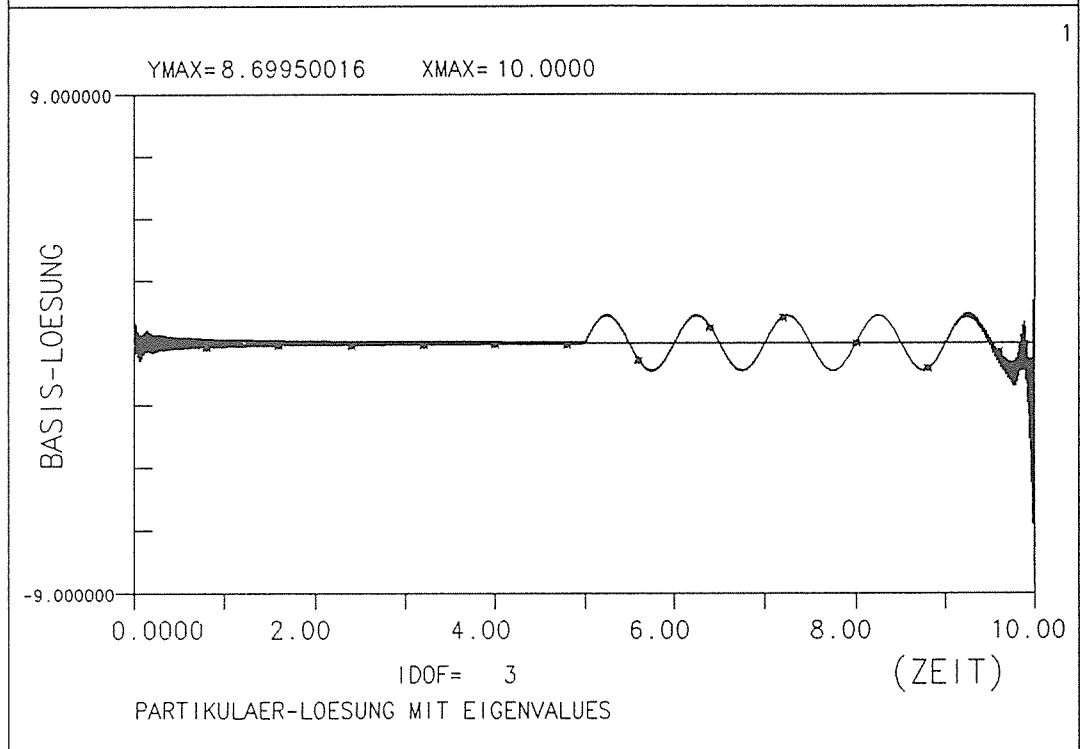
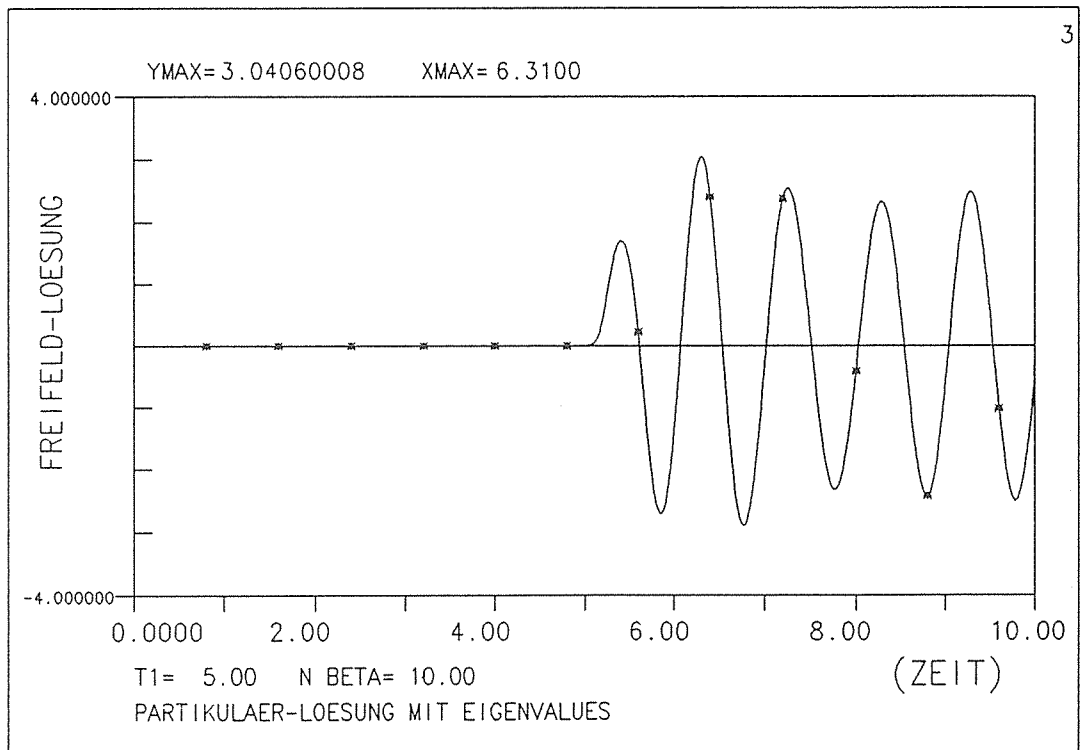
Bild-Nr.	I.9	I.10	I.11	I.12
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	1	1	1	1
Erregung $\beta$	10.	10.	10.	10.
$\rho = \beta/\omega$	1.	1.	1.	1.
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.1	0.1	0.1	0.1
Filter	nein	ja	nein	nein

Bild-Nr.	I.13	I.14	I.15	I.16
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	1	1	1	1
Erregung $\beta$	20.	20.	20.	20.
$\rho = \beta/\omega$	2.	2.	2.	2.
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.1	0.1	0.1	0.1
Filter	nein	ja	nein	nein



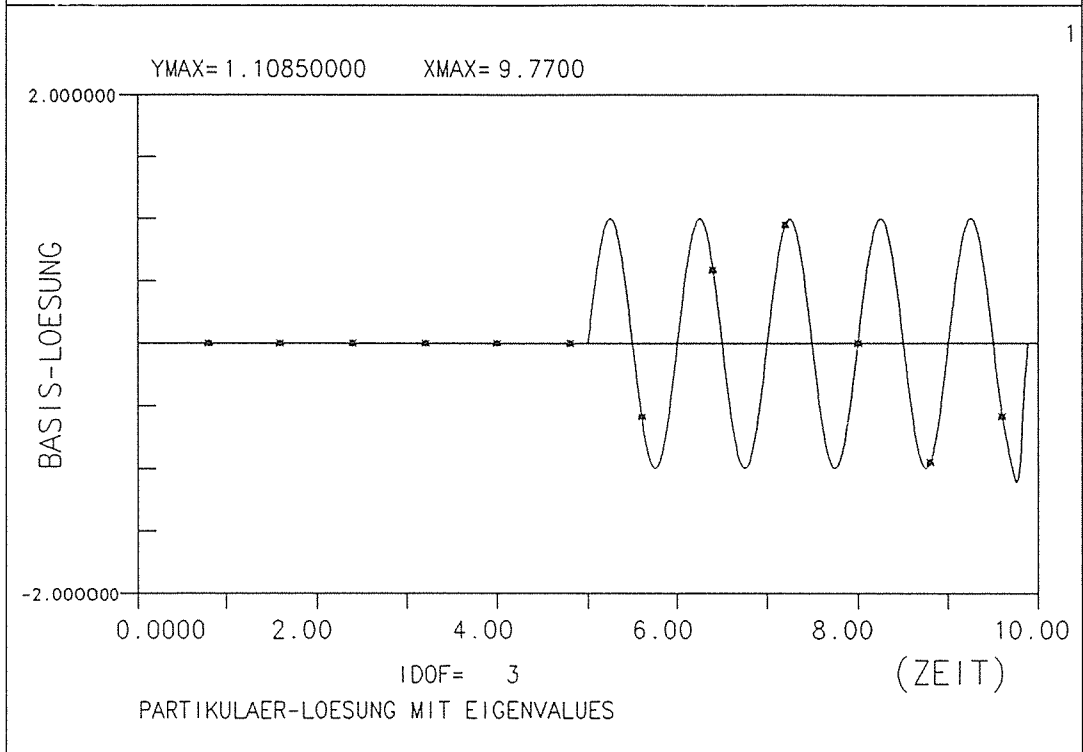
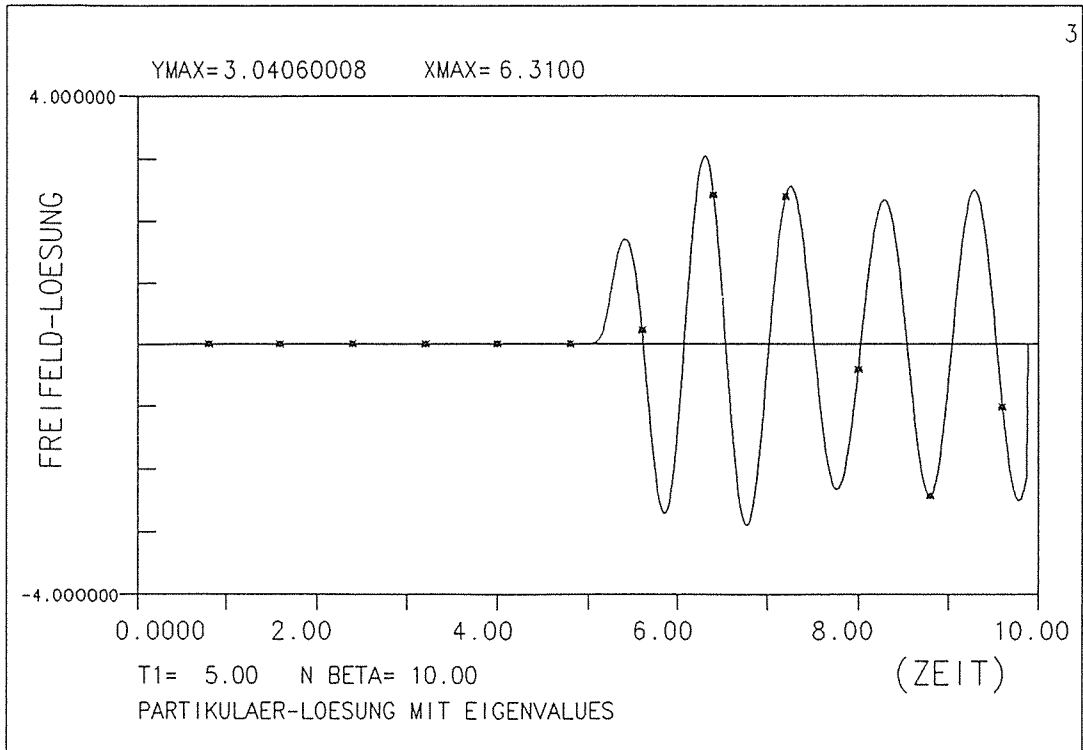
Bild-Nr.	I.17	I.18	I.19	I.20
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	1	1	1	1
Erregung $\beta$	2.5	2.5	2.5	2.5
$\rho = \beta/\omega$	0.5	0.5	0.5	0.5
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.1	0.1	0.1	0.1
Filter	nein	ja	nein	nein

Bild-Nr.	I.21	I.22	I.23	I.24
Lösungsweg	P	P	G	F
DOF-Grad	1	1	1	1
Erregung $\beta$	2.5	2.5	2.5	2.5
$\rho = \beta/\omega$	0.5	0.5	0.5	0.5
Gesamtzeit $T_1$	5.	5.	5.	5.
Dämpfung	0.05	0.05	0.05	0.05
Filter	nein	ja	nein	nein



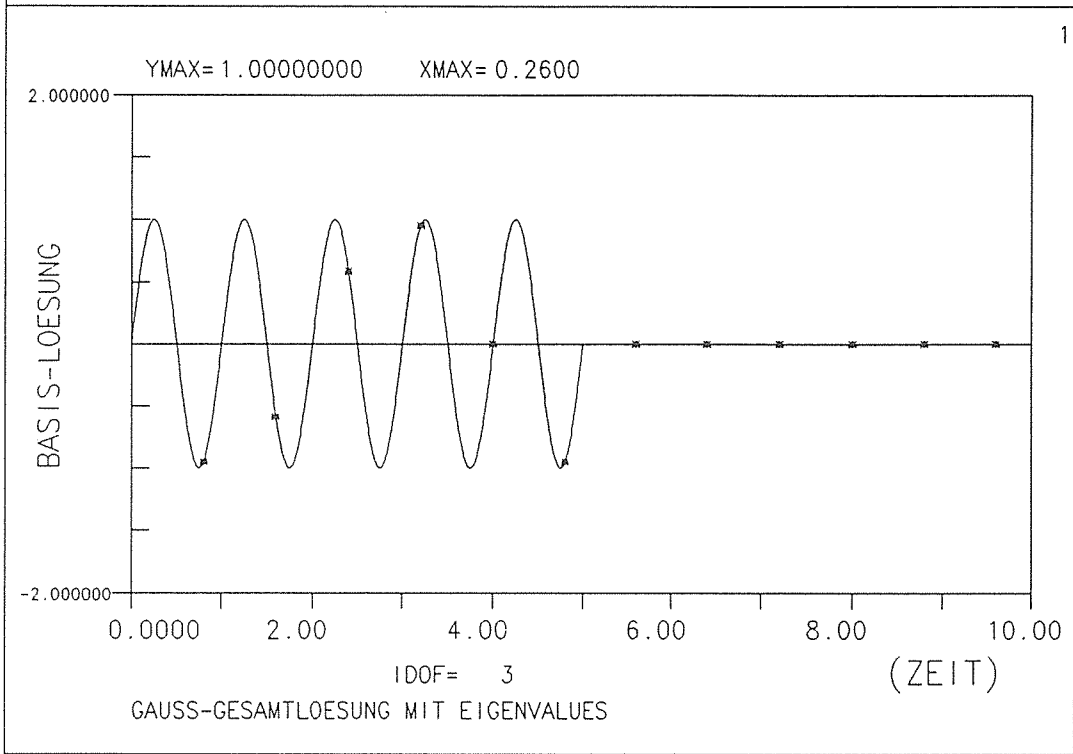
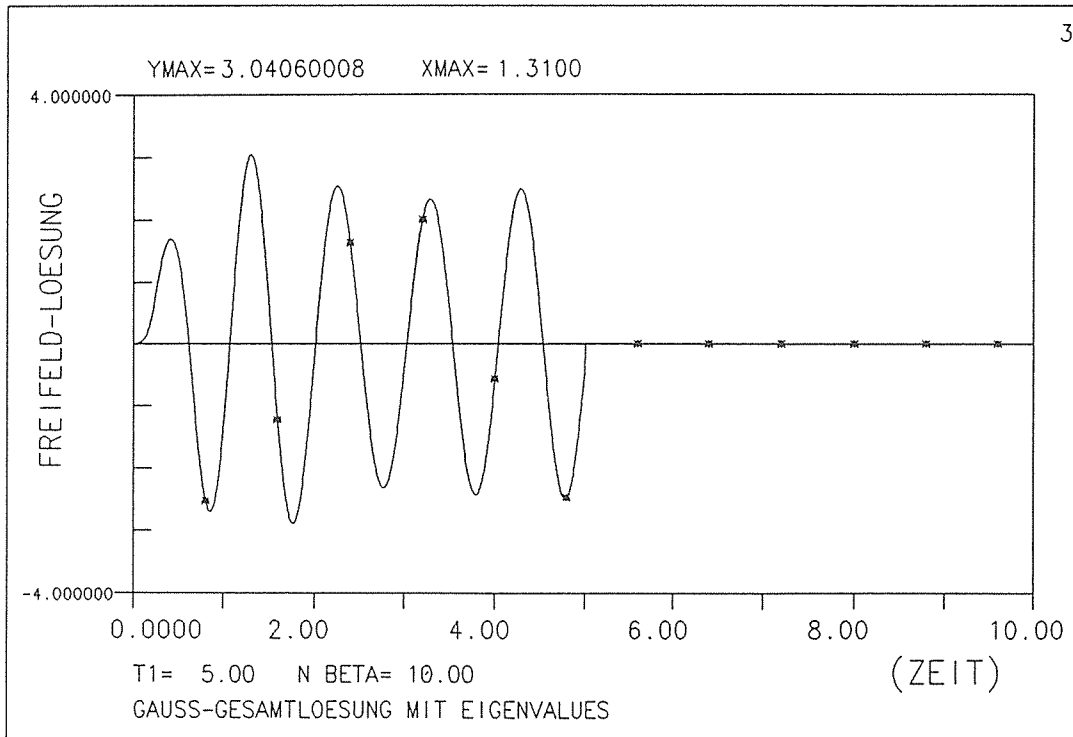
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.1



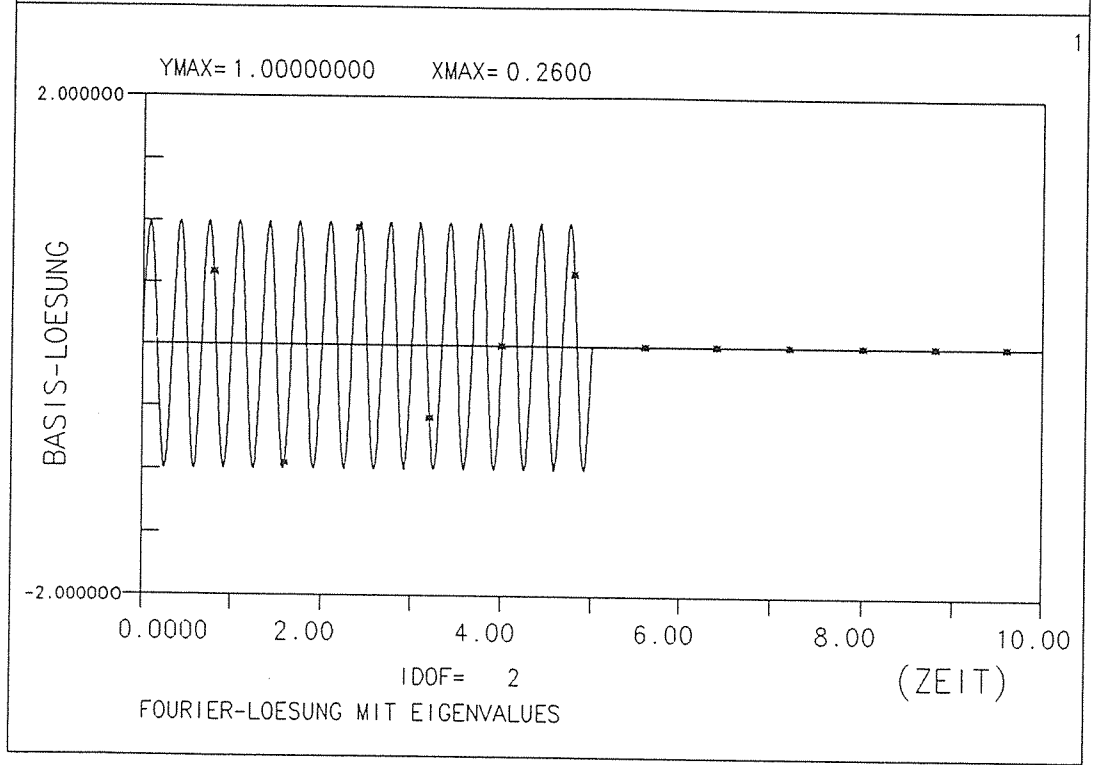
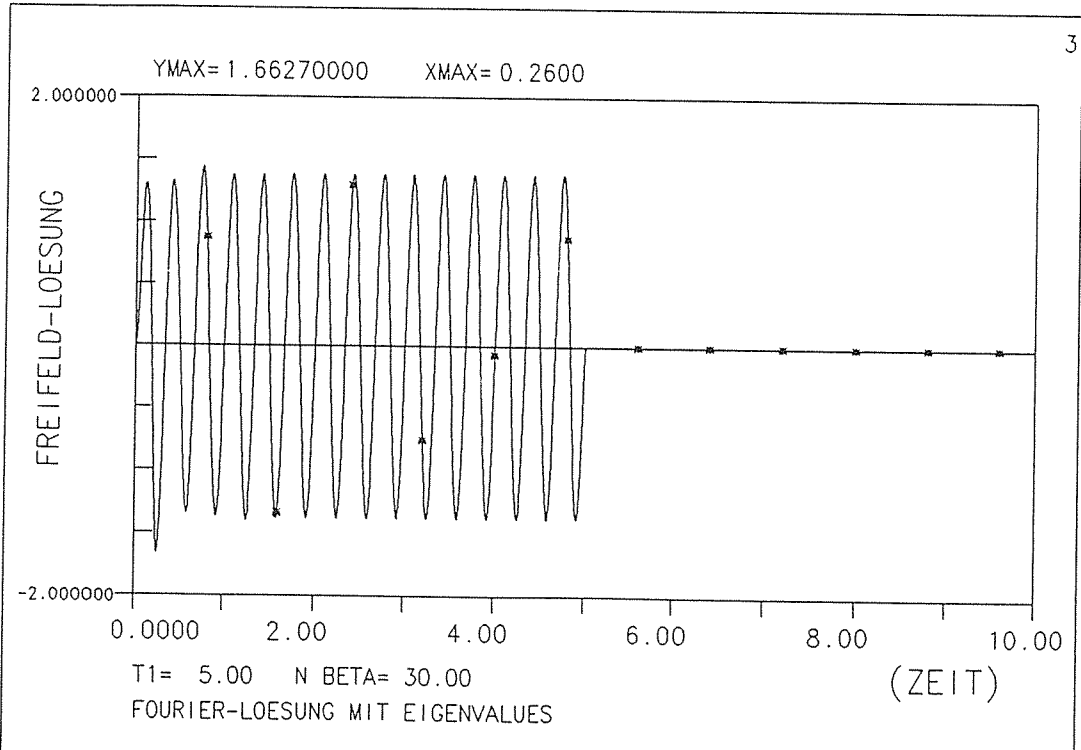
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.2



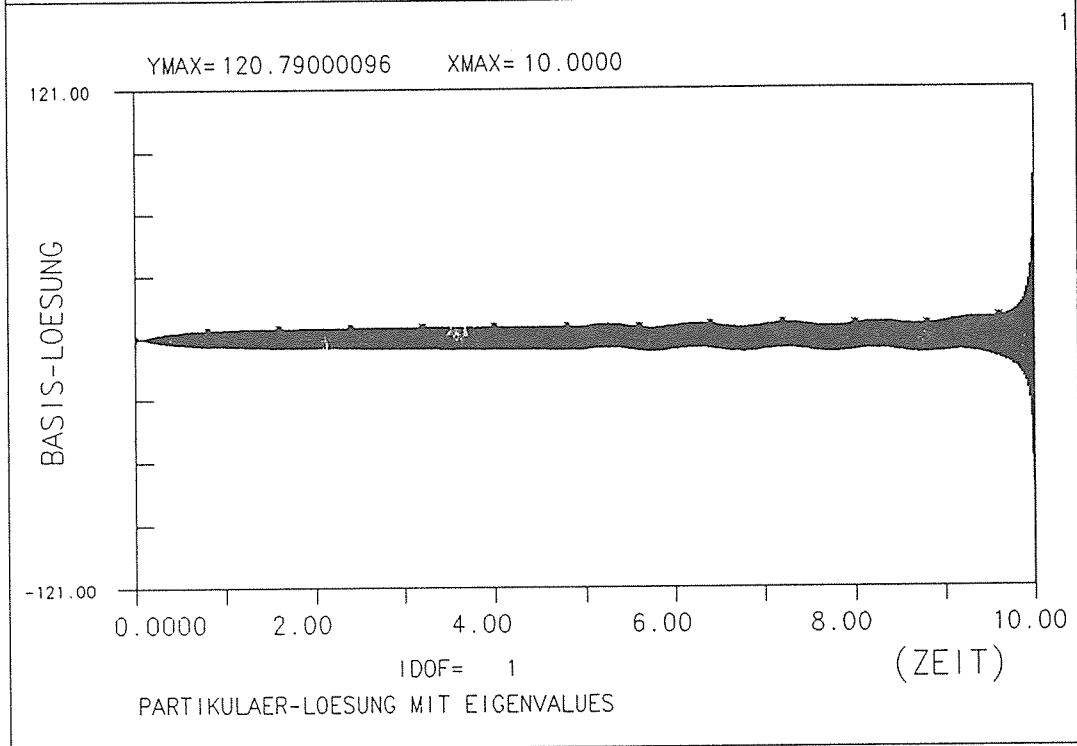
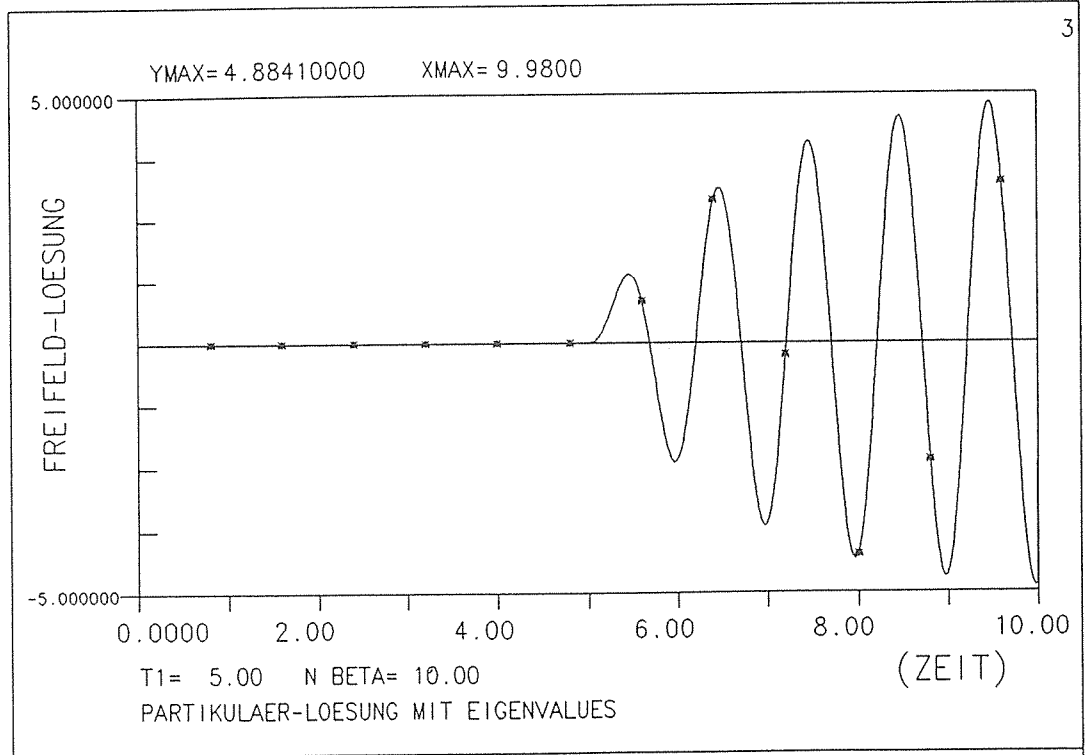
BEISPIEL : Gauss-Gesamtloesung

Bild I.3



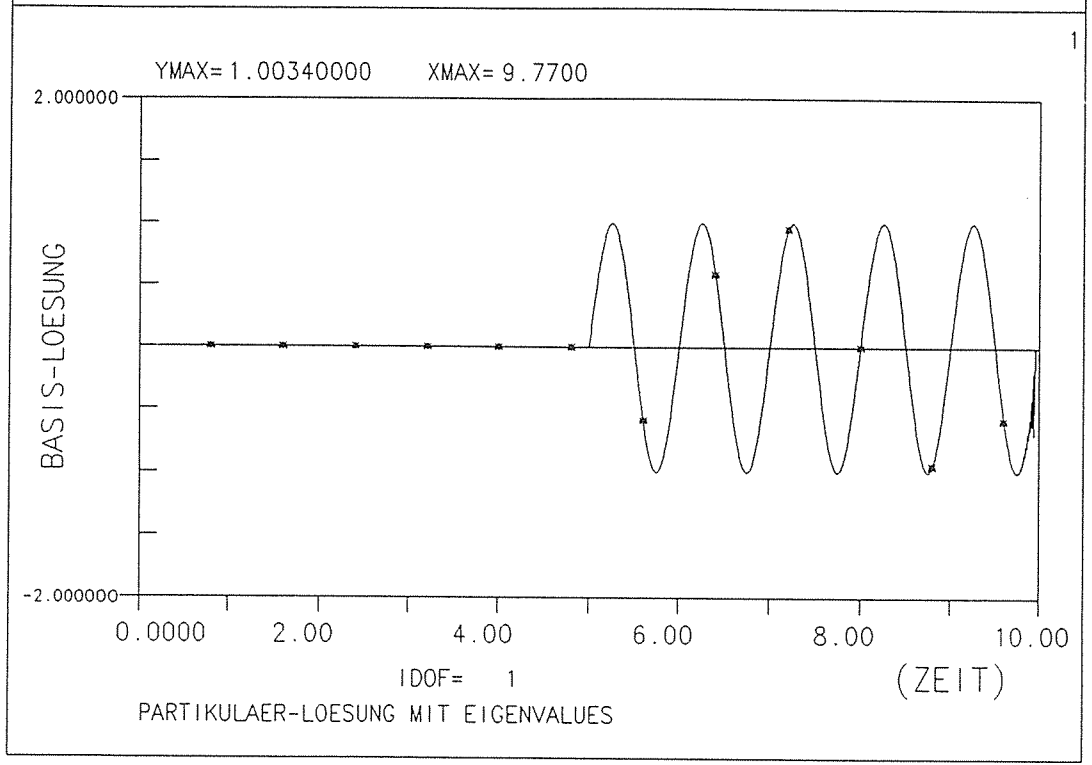
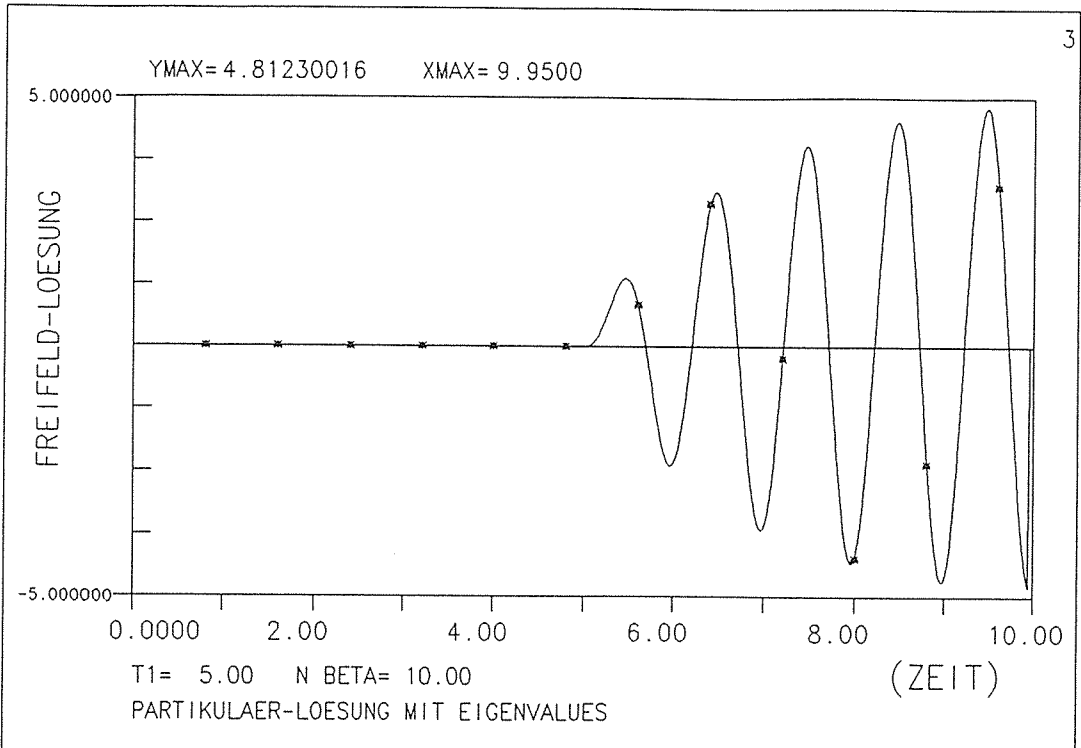
BEISPIEL : Fourier-Loesung

Bild I.8



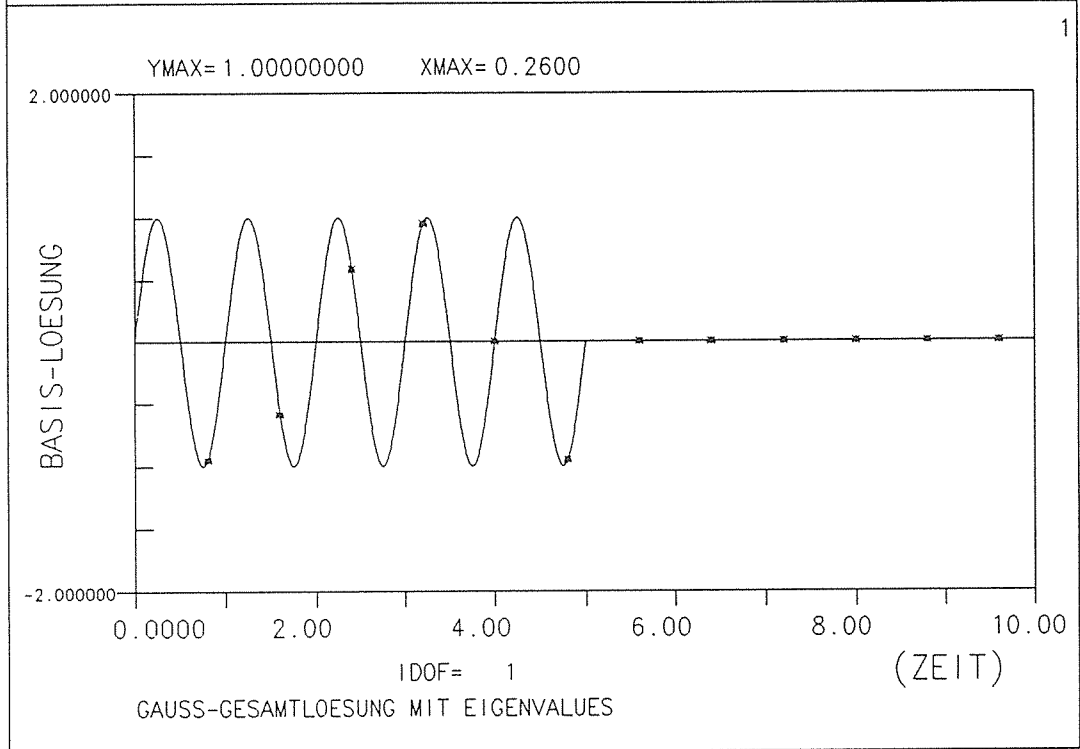
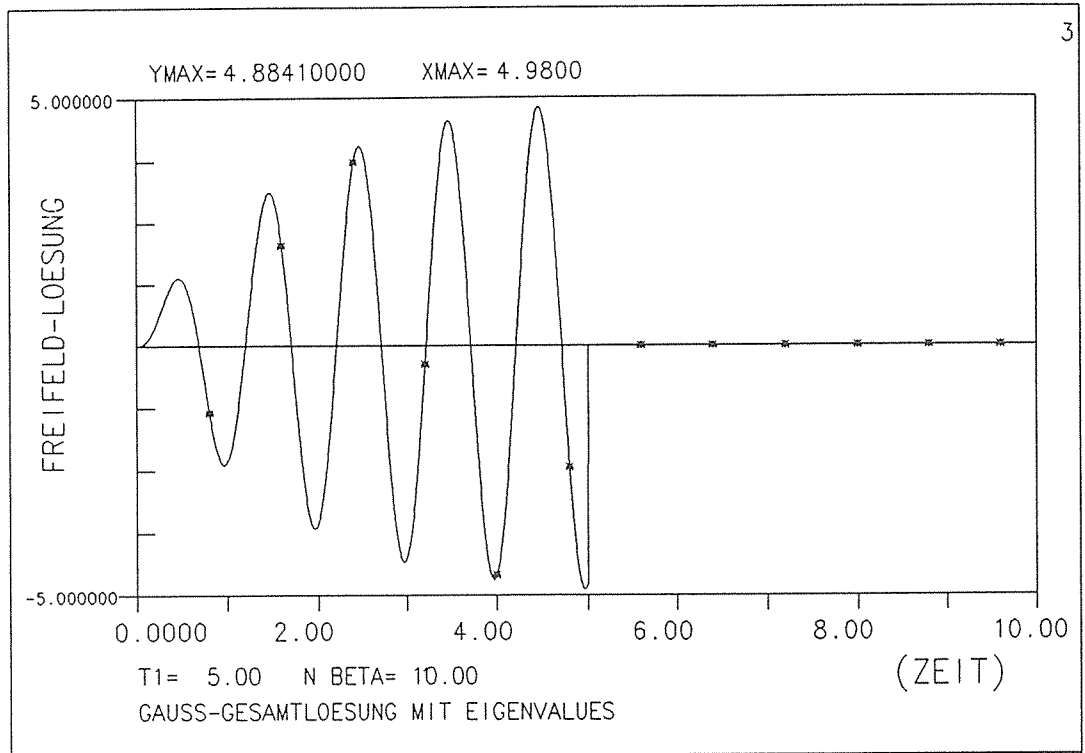
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.9



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

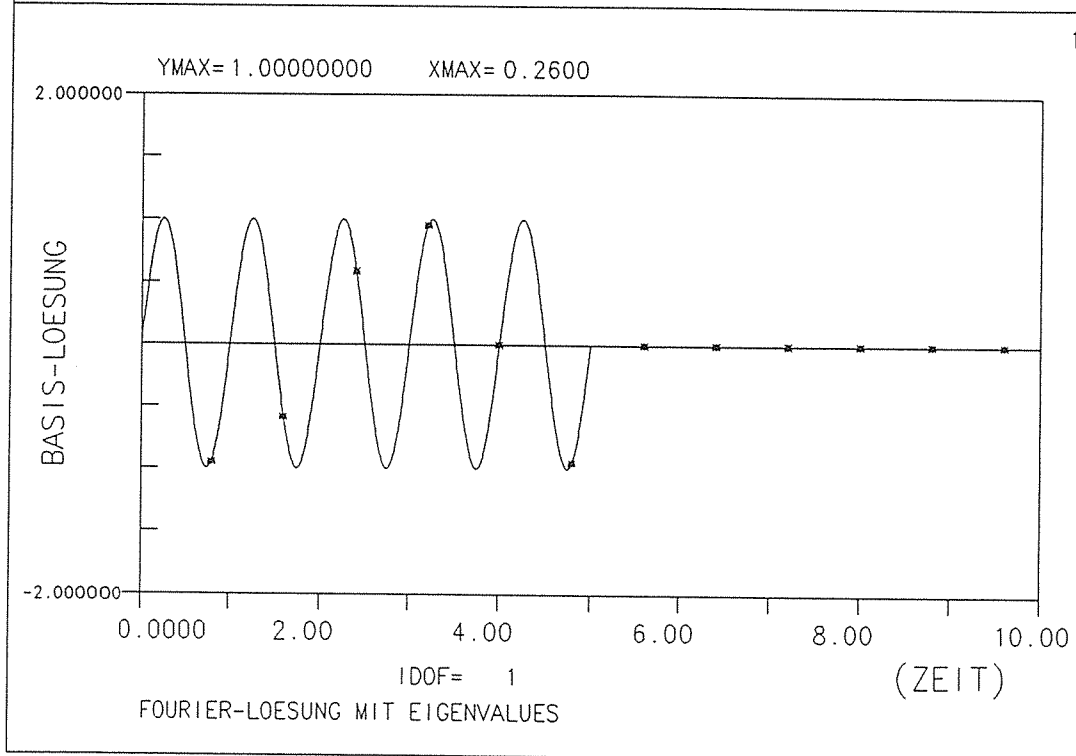
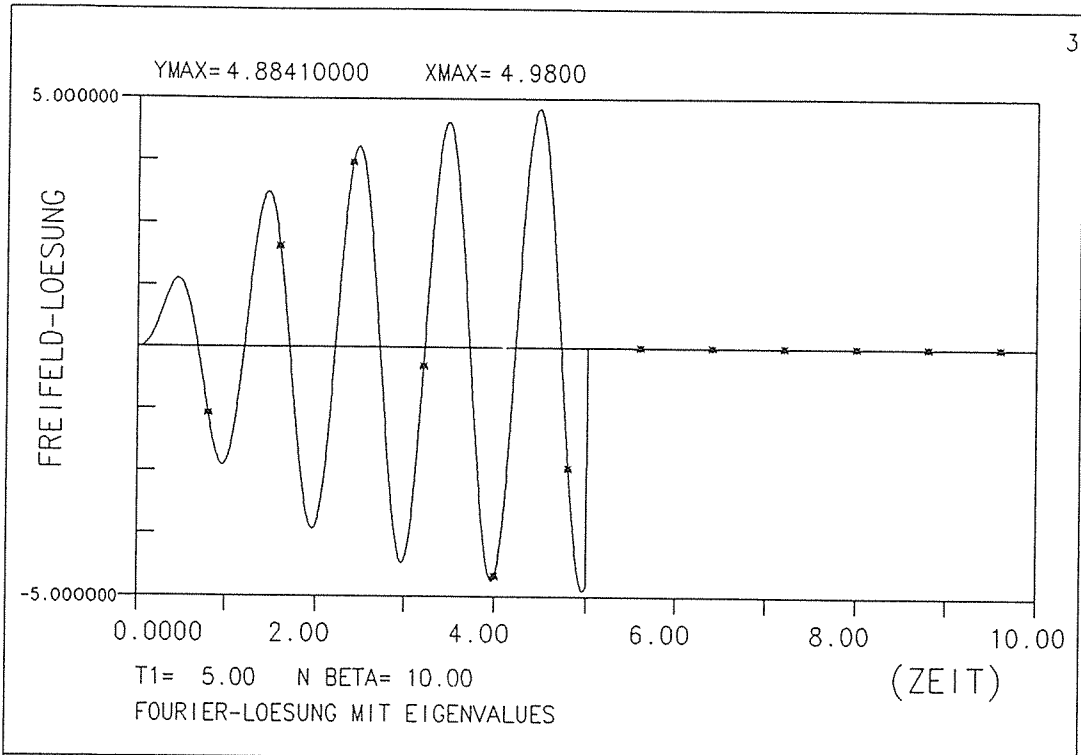
Bild I.10



BEISPIEL : Gauss-Gesamtloesung

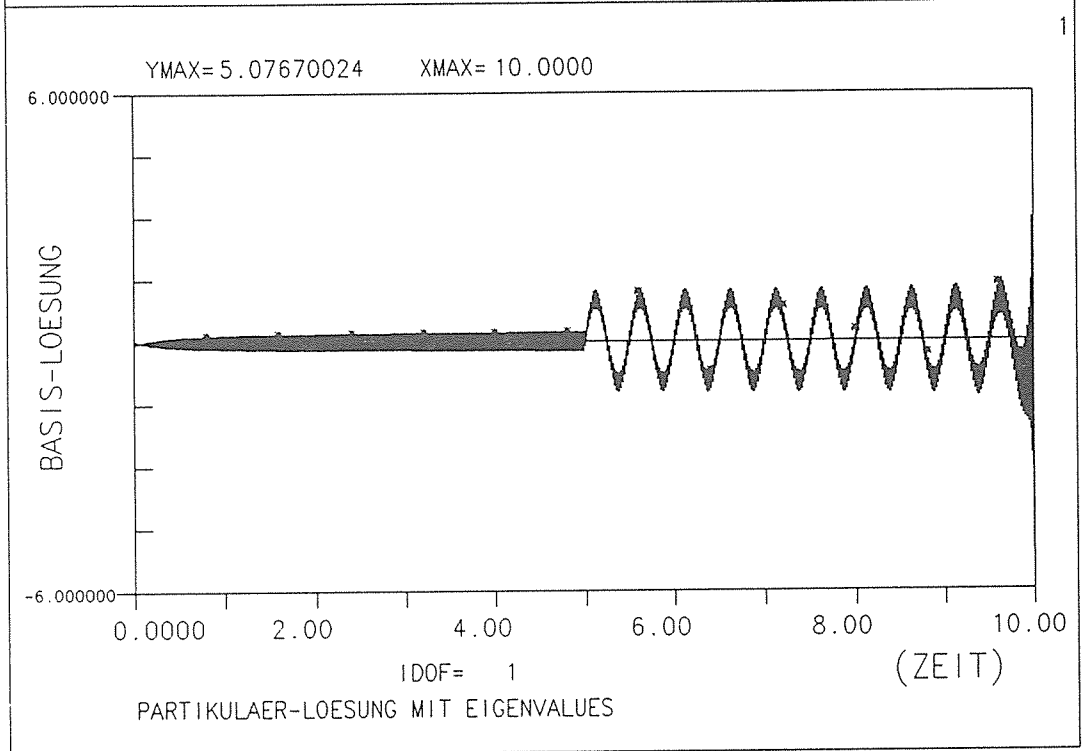
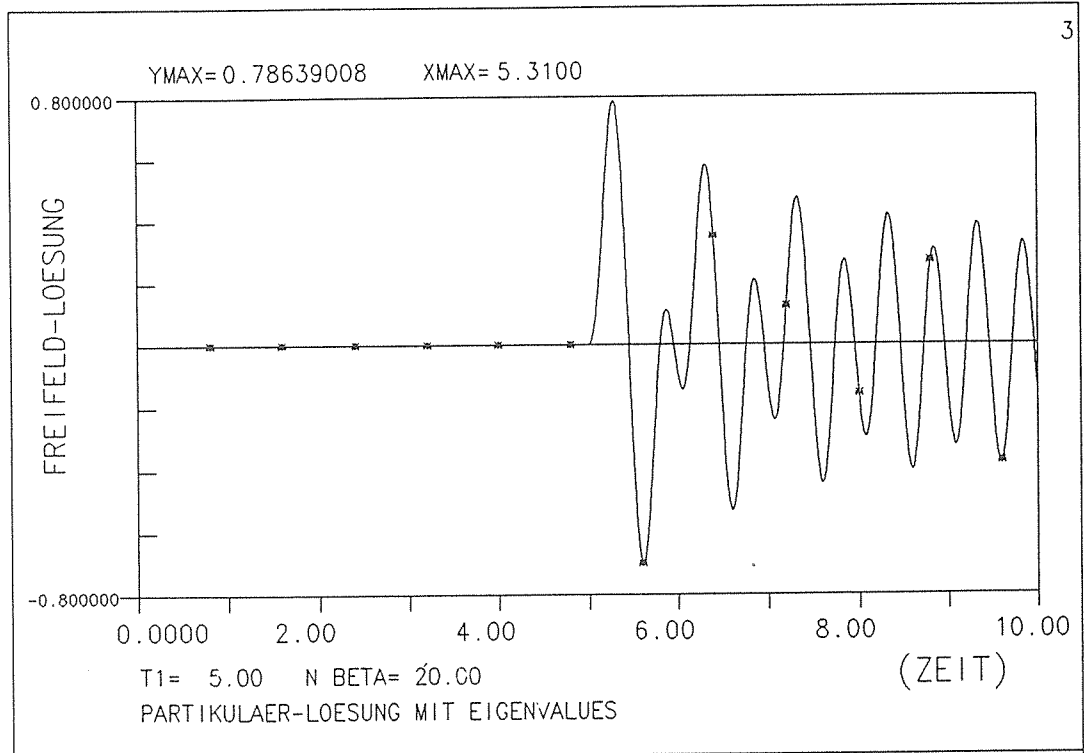
Bild I.11





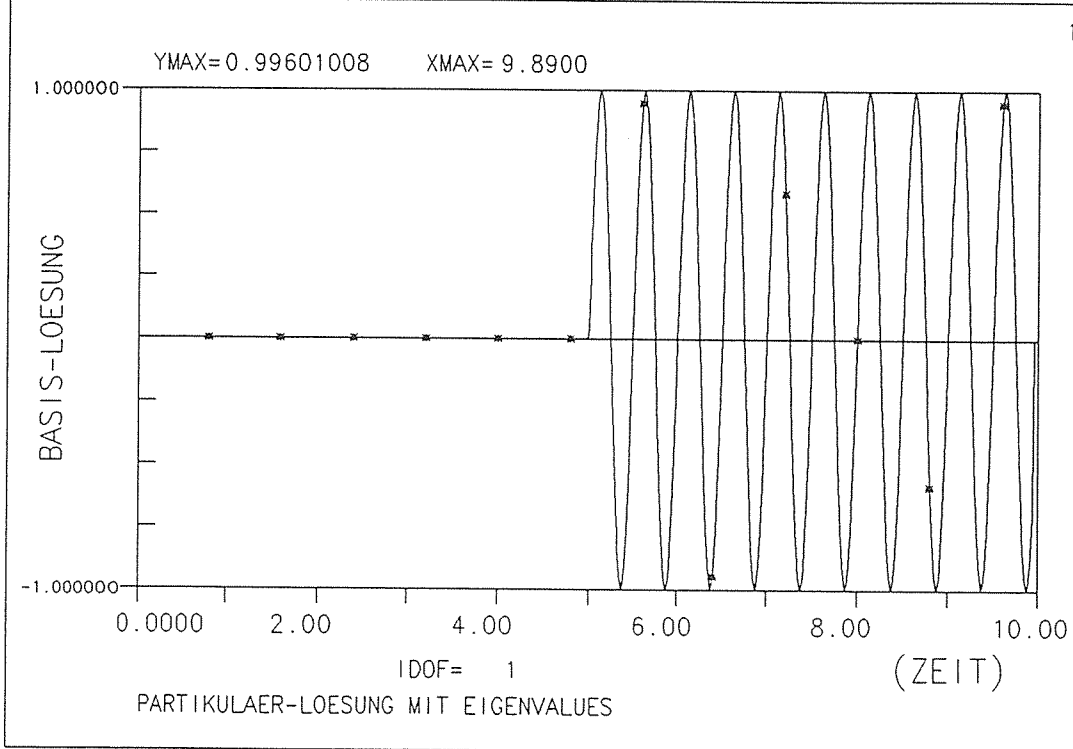
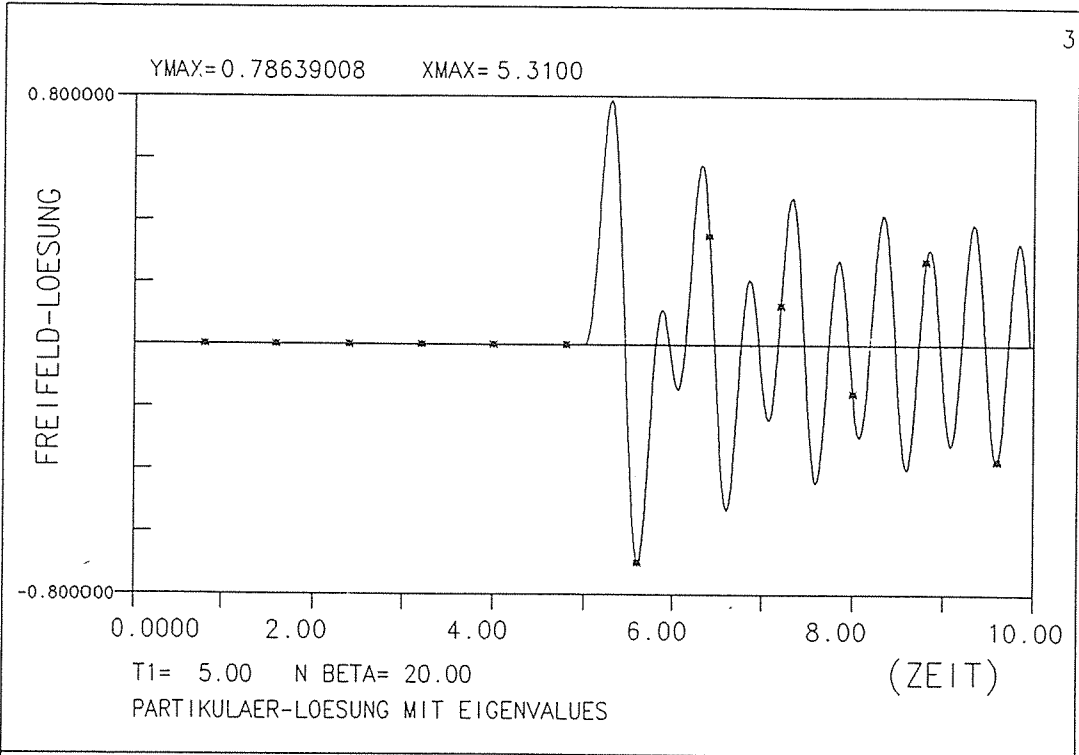
BEISPIEL : Fourier-Loesung

Bild I.12



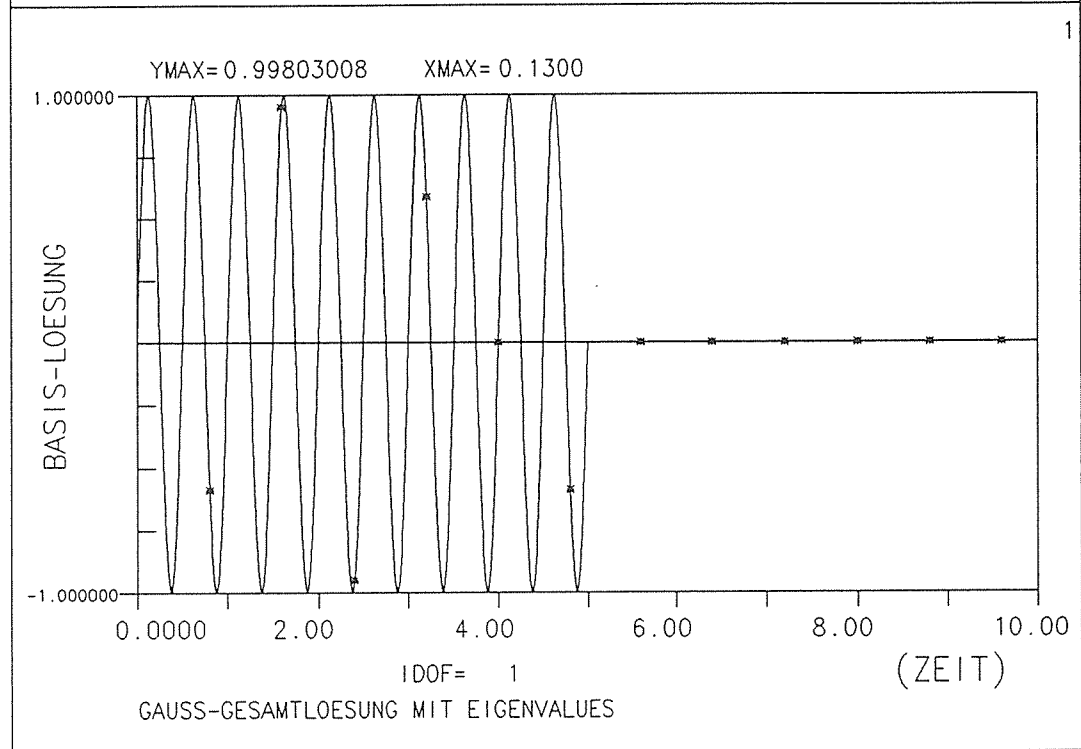
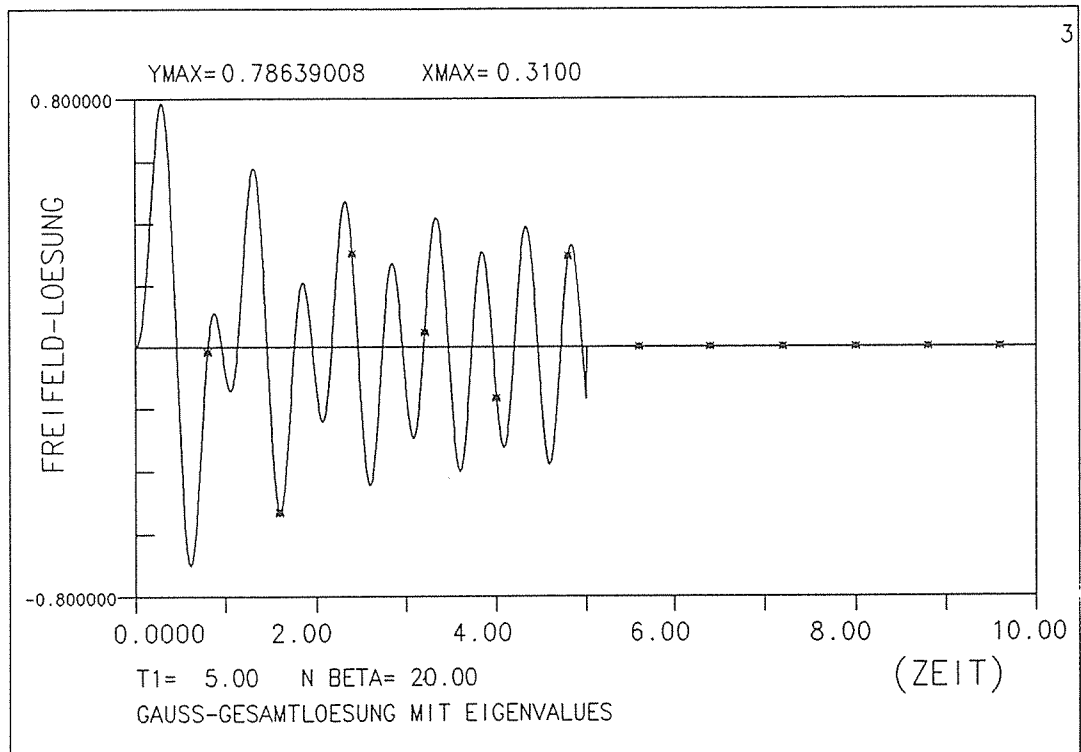
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.13



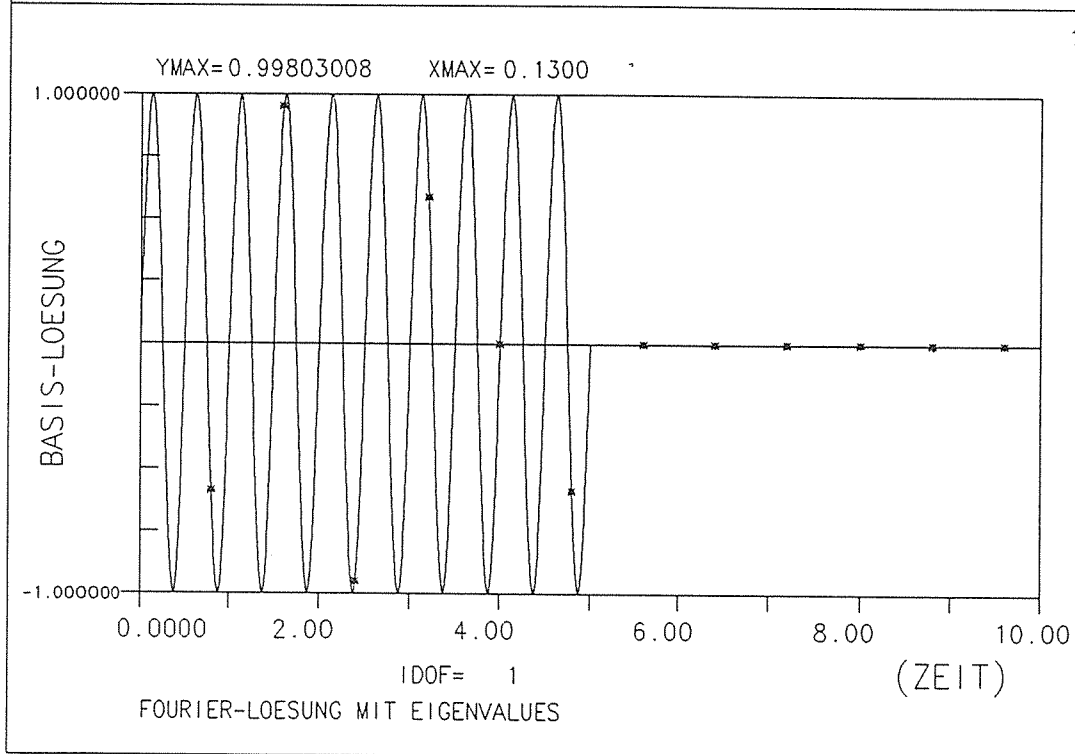
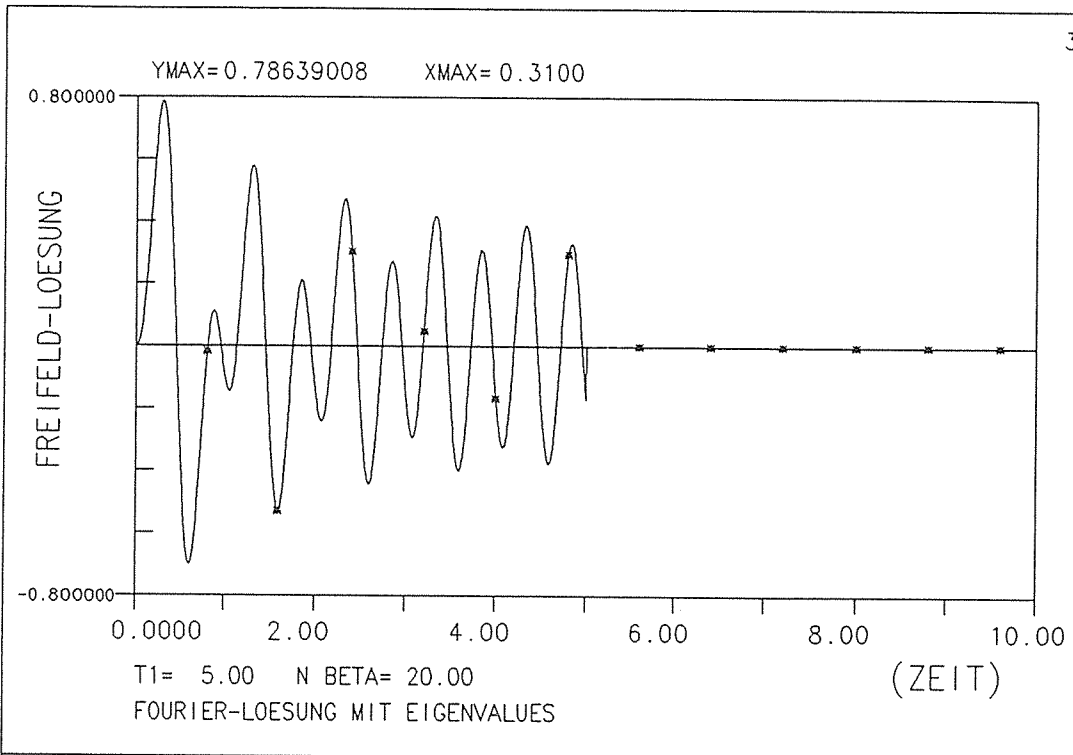
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.14



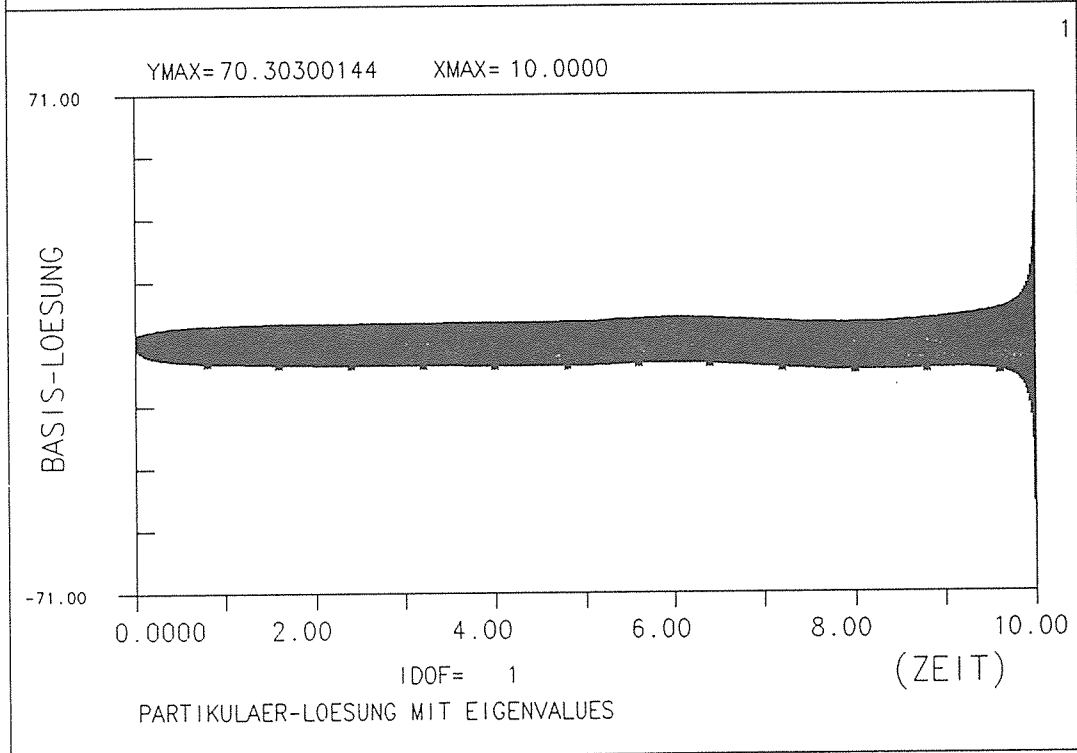
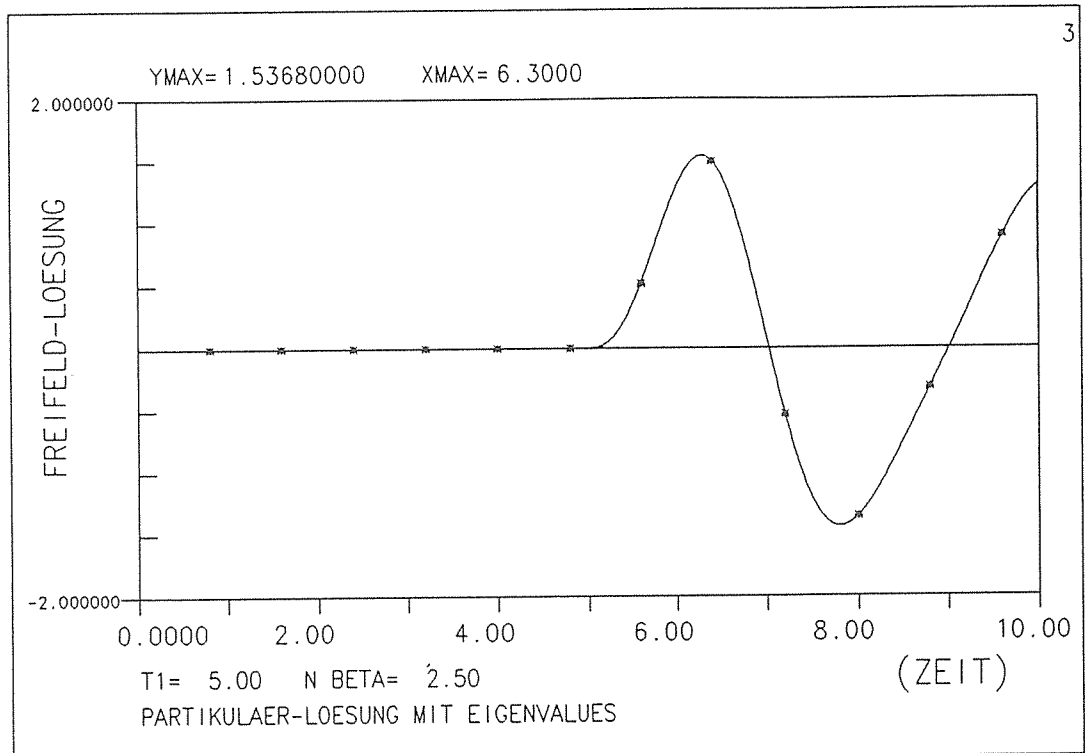
BEISPIEL : Gauss-Gesamtloesung

Bild I.15



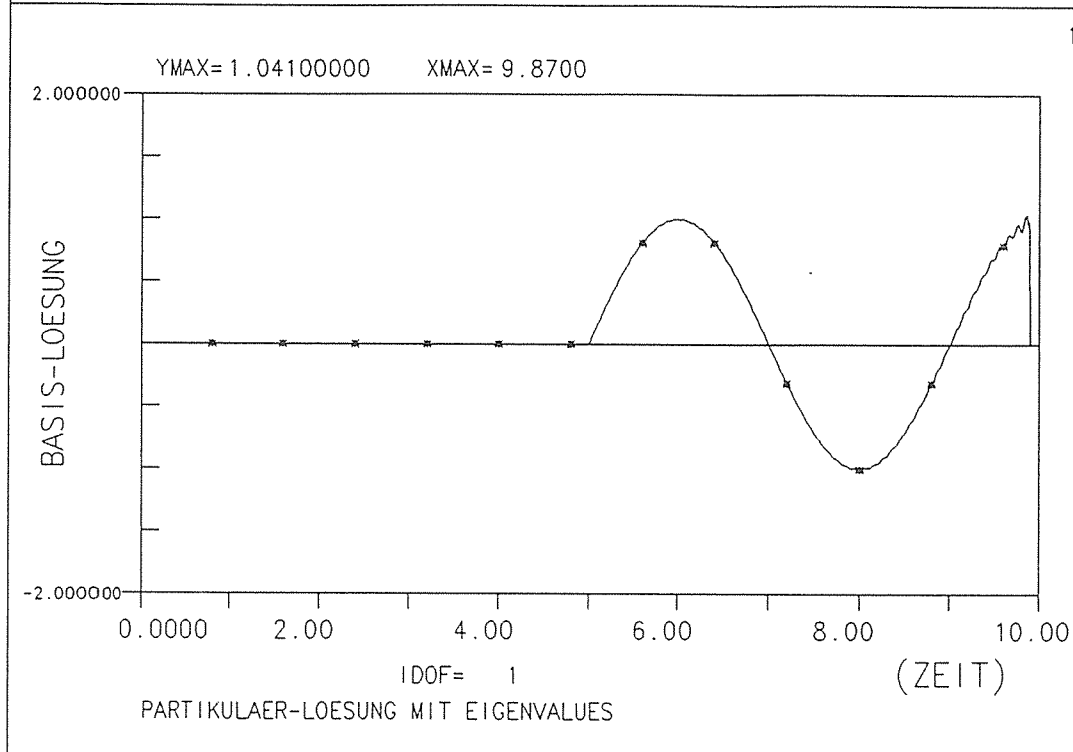
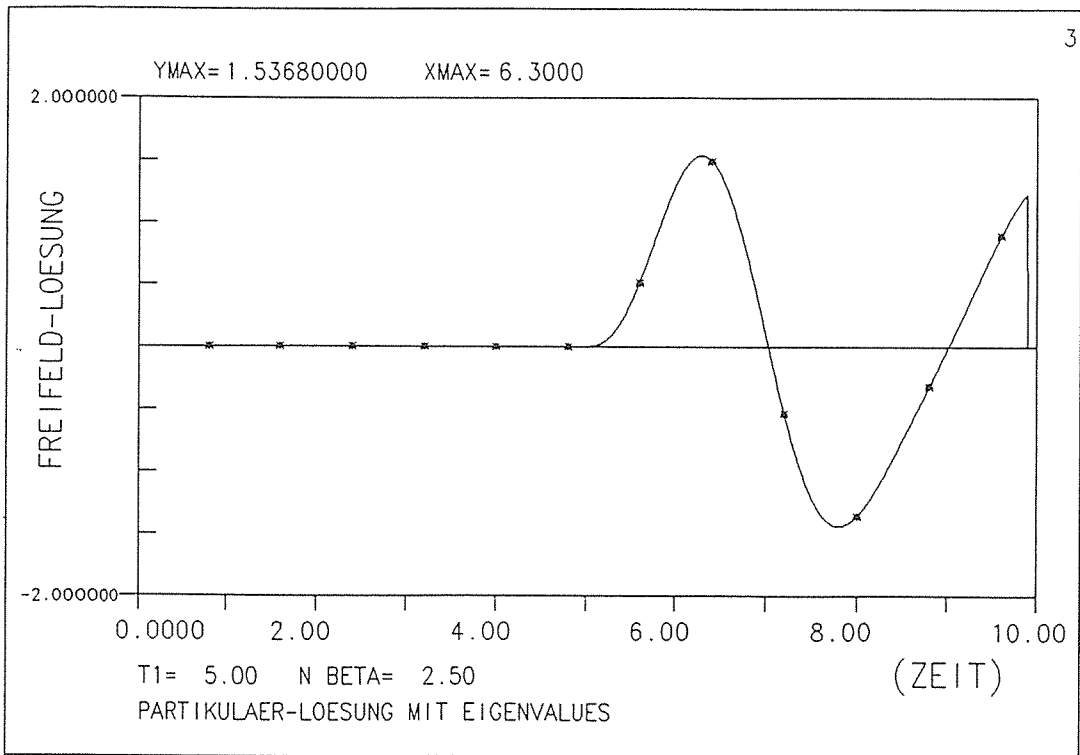
BEISPIEL : Fourier-Loesung

Bild I.16



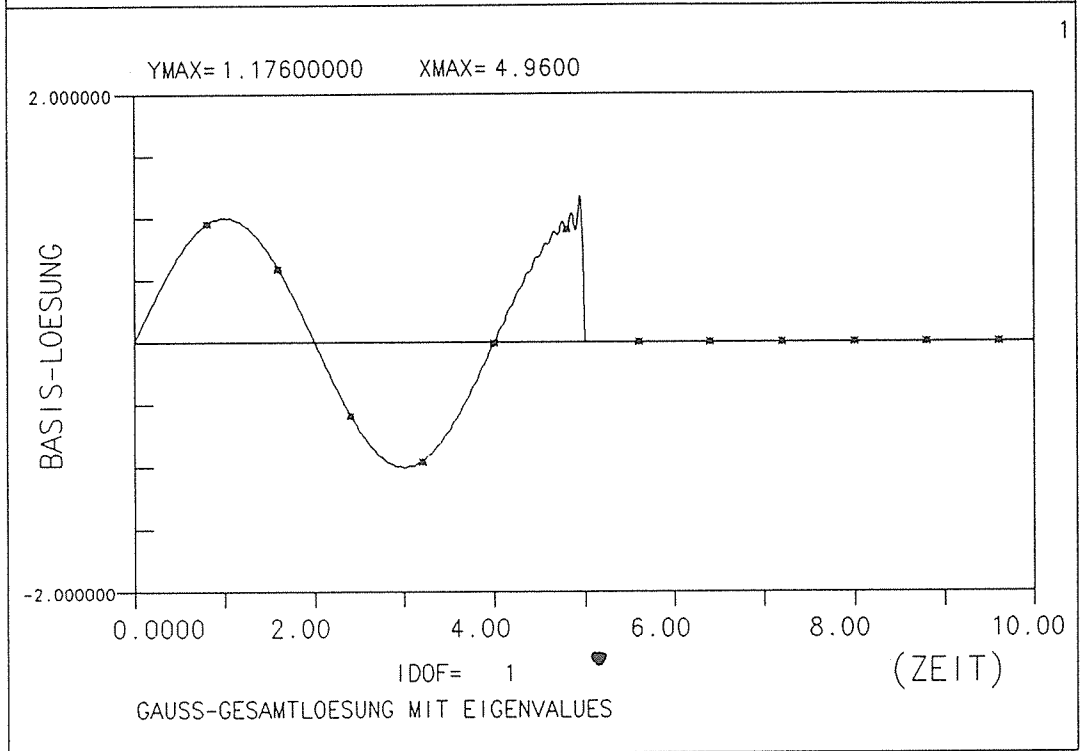
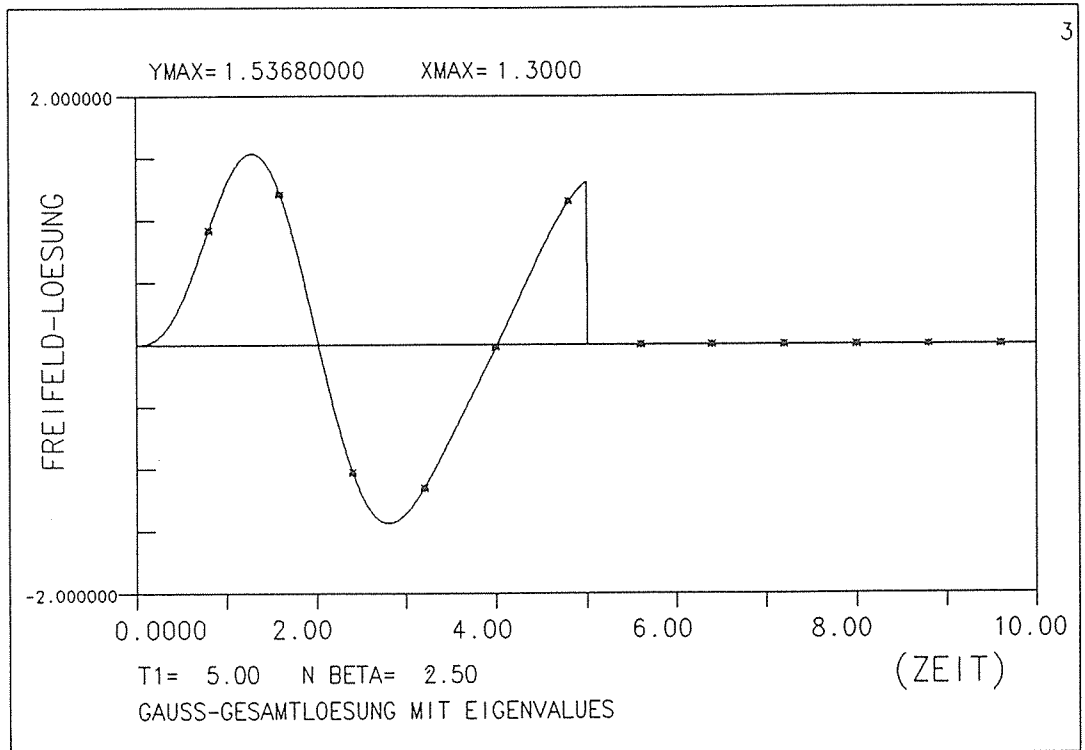
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.17



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

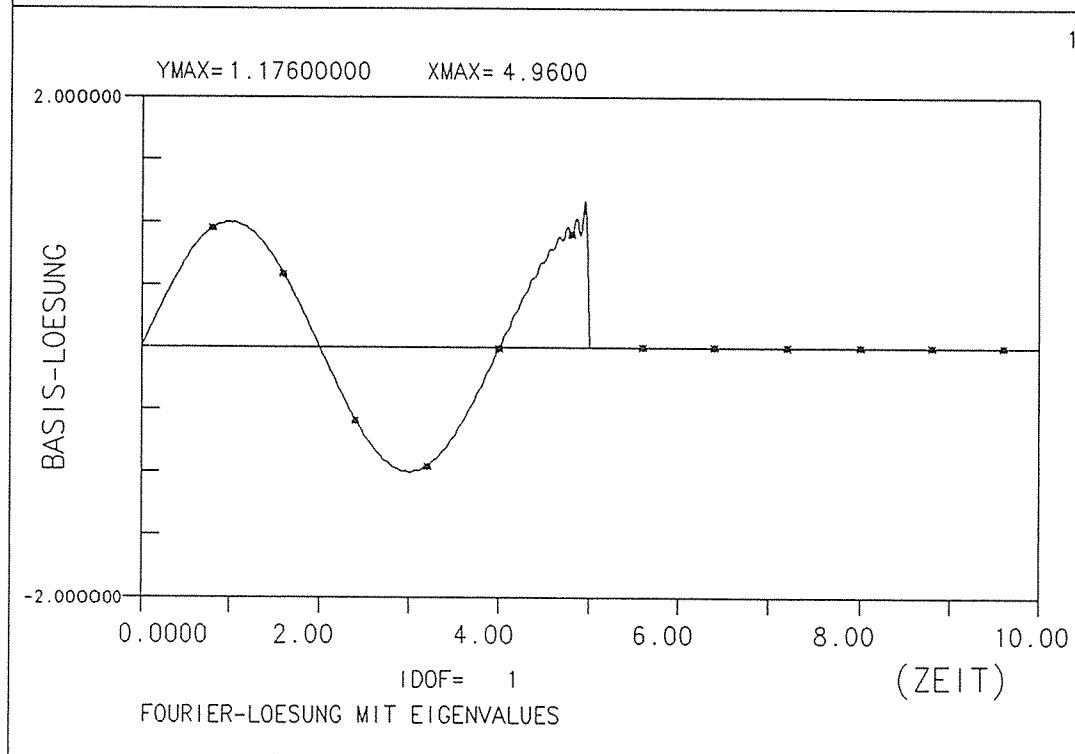
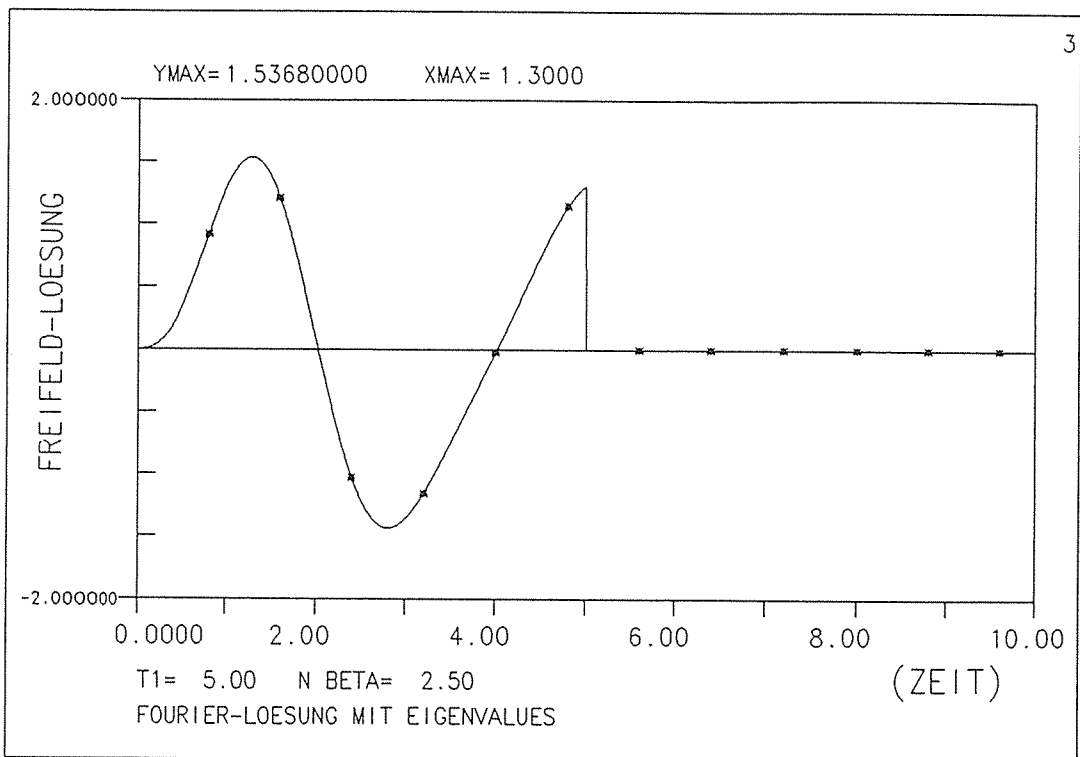
Bild I.18



BEISPIEL : Gauss-Gesamtloesung

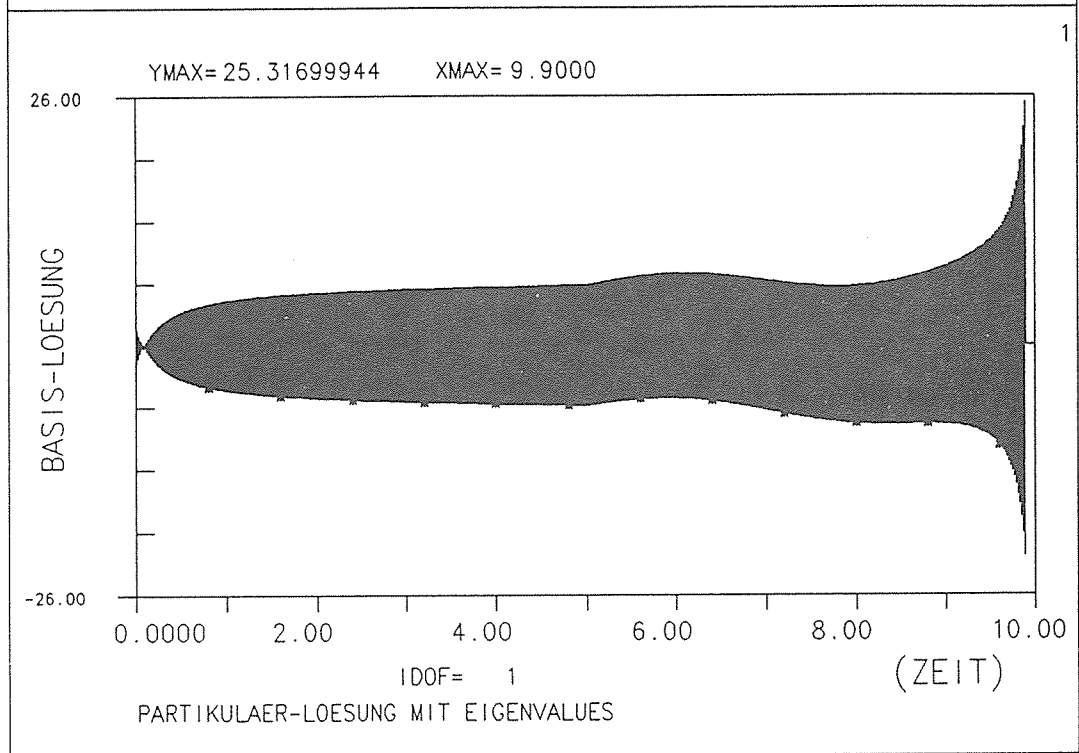
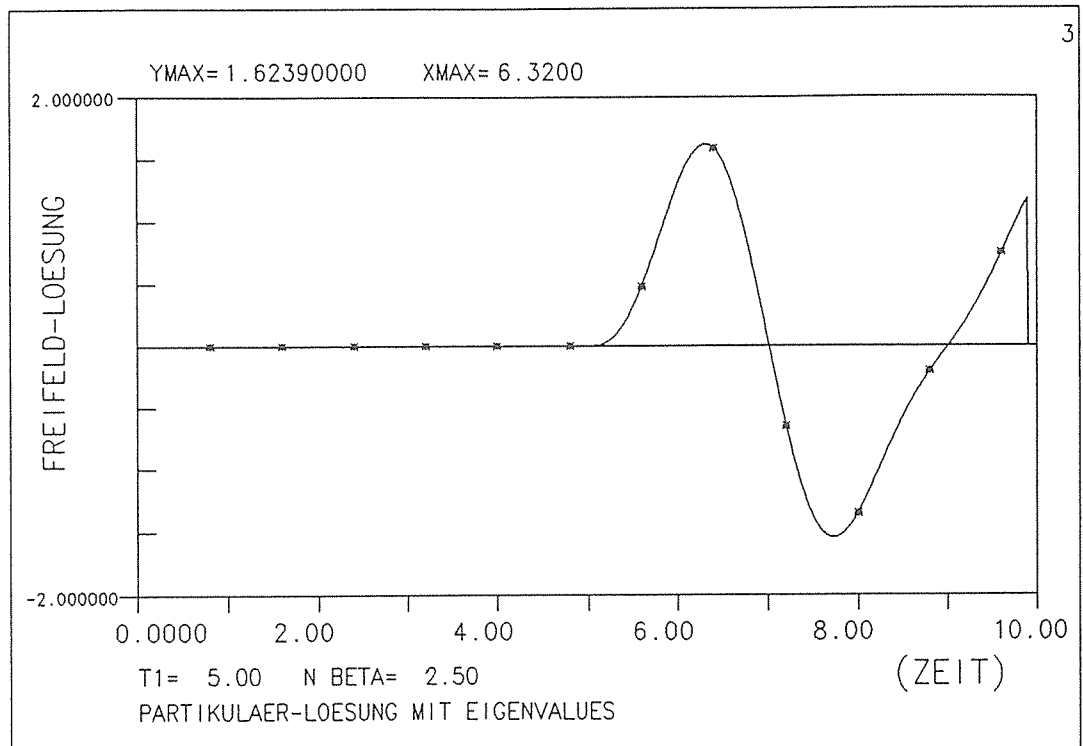
Bild I.19





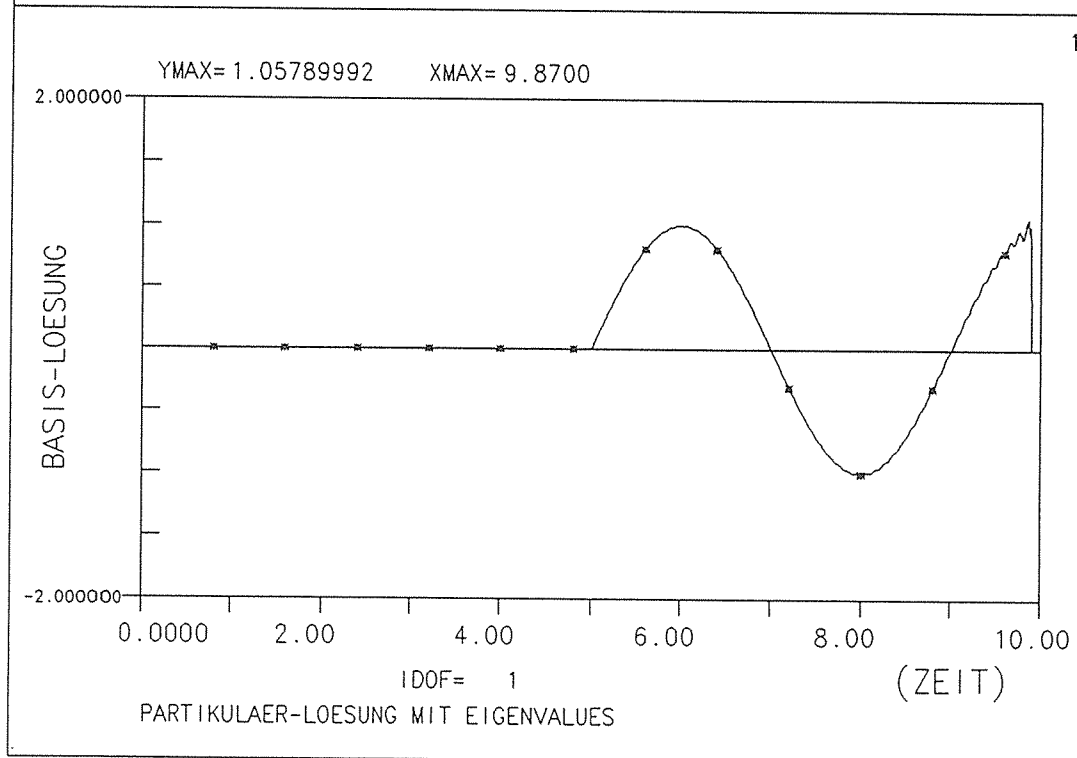
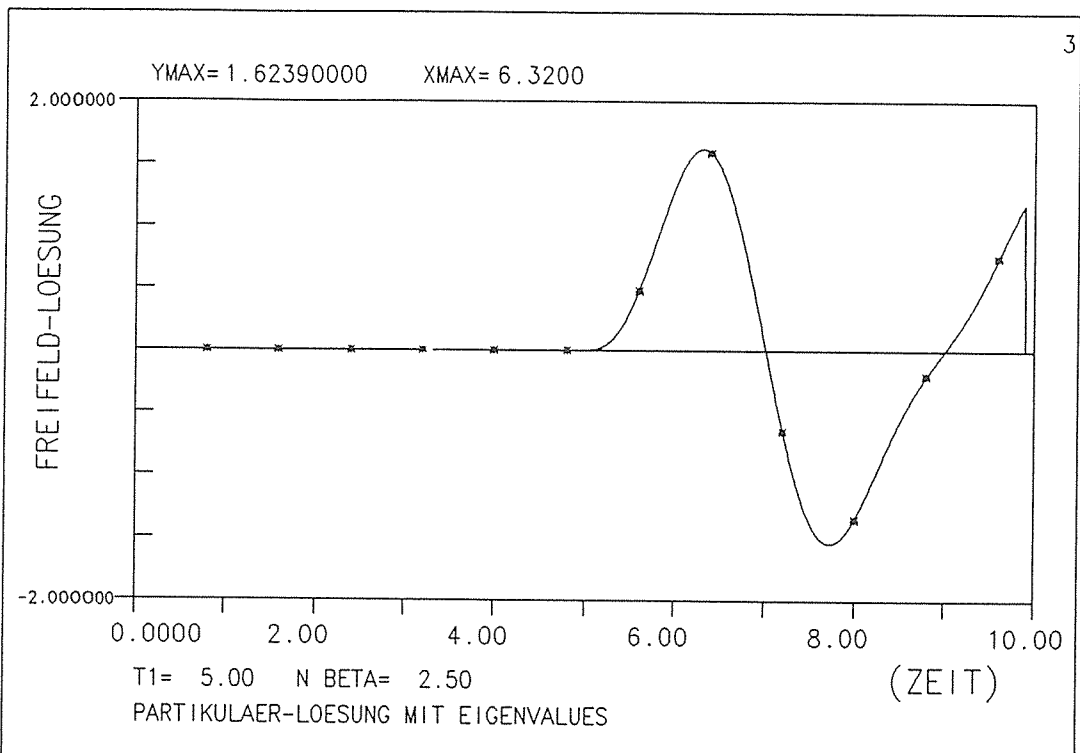
BEISPIEL : Fourier-Loesung

Bild I.20



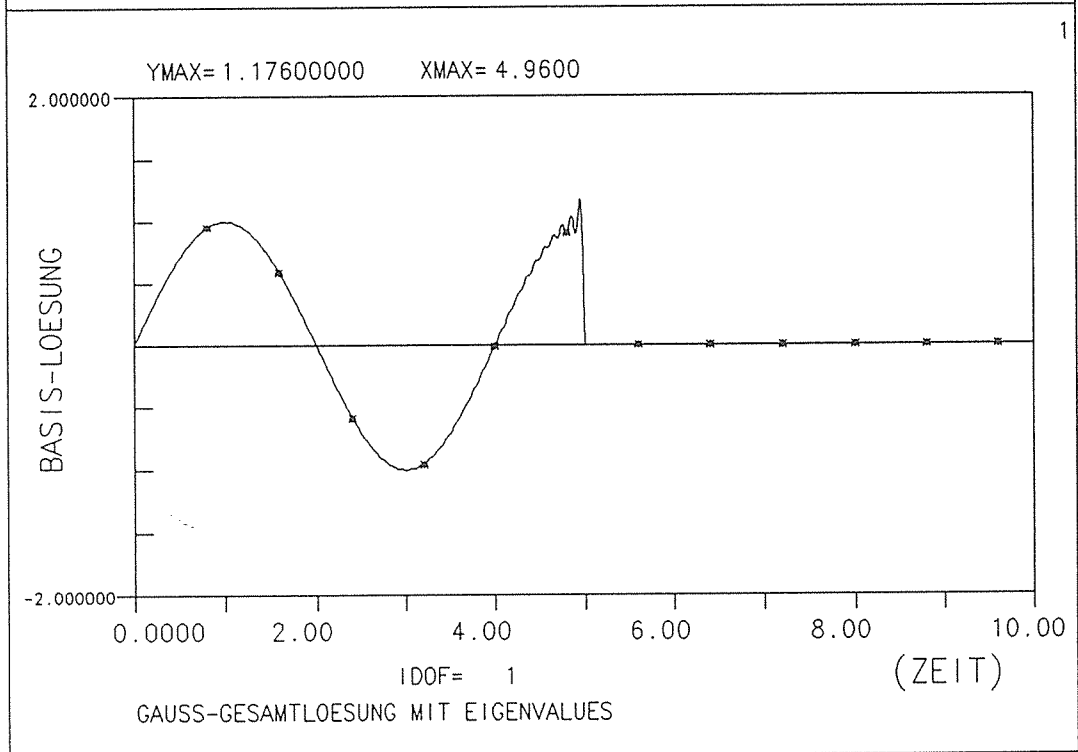
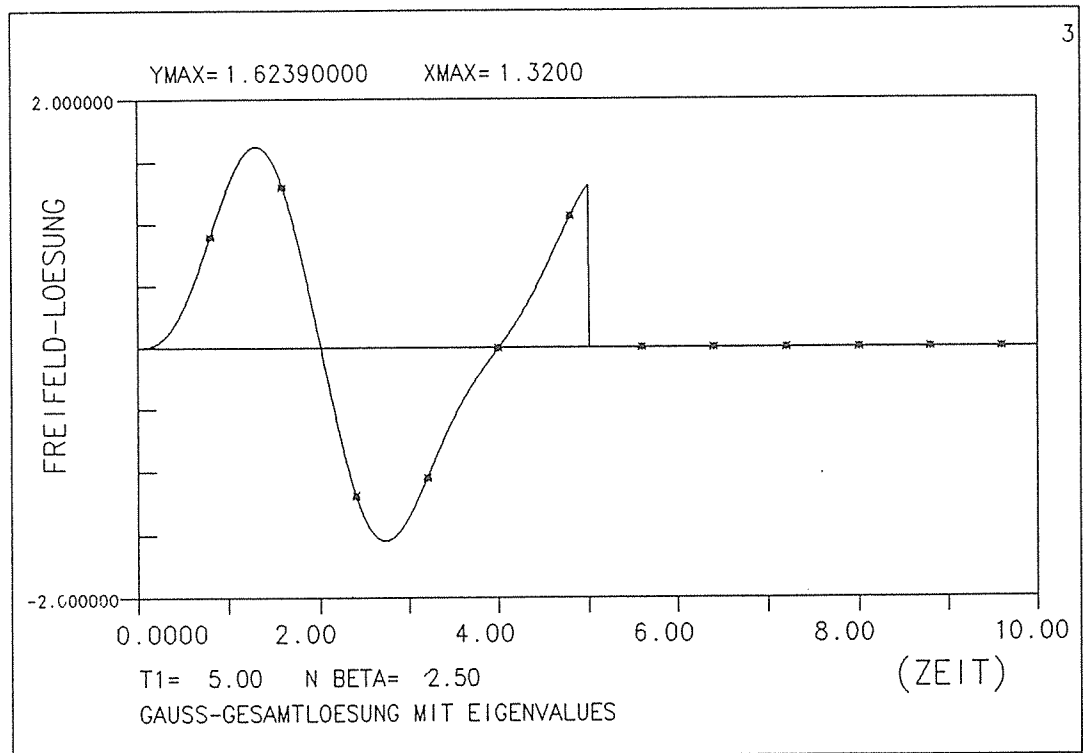
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.21



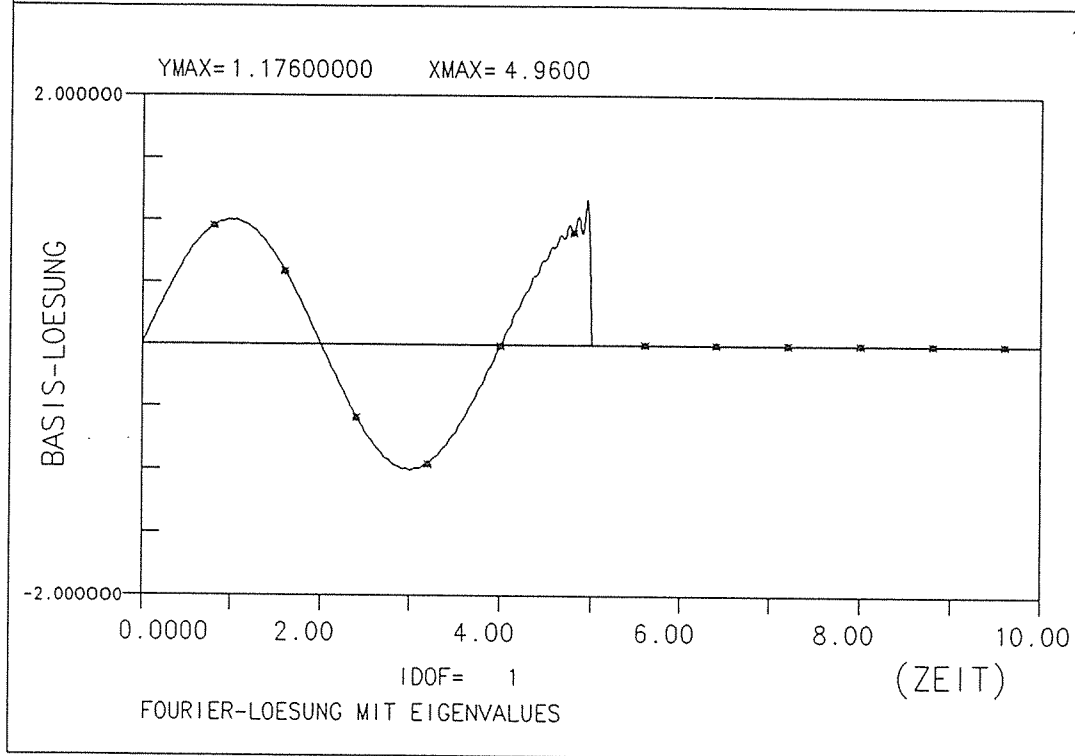
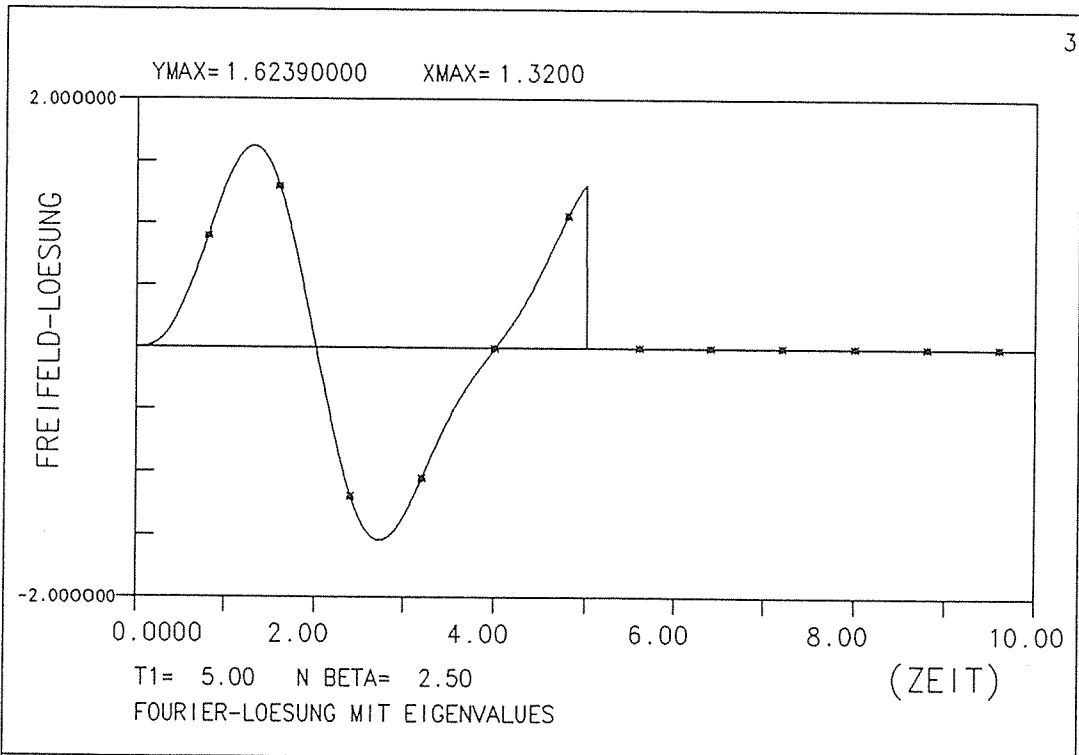
BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

Bild I.22



BEISPIEL : Gauss-Gesamtloesung

Bild I.23



BEISPIEL : Fourier-Loesung

Bild I.24



## ANHANG II

Im Anhang II sind beispielartig Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte am betrachteten mechanischen Modell geplottet, wie in Abschnitt 3. beschrieben. Zur besseren Übersicht sind die bestimmenden Parameter noch einmal in der Tab. II zusammengestellt. Die Bilder sind jeweils zweigeteilt, und zwar wird im oberen Teil (3) die gegebene Freifeldoszillation der Basislösung im unteren Teil (1) gegenübergestellt. Der jeweils ausgewiesene maximale Amplitudenwert (mit der Abszisse XMAX) ist mit YMAX bezeichnet. Zur Kontrolle wird die Basislösung mittels des Freifeldimpulses zum Freifeld transformiert und die Abweichung zur gegebenen Schwingung berechnet. Hierzu sind die jeweiligen Fehlerparameter gesondert ausgewiesen, und zwar gibt der Parameter PROZMAG die Gewichtung in Bezug auf das Fehlerquadrat und der Parameter PROZBUC die Gewichtung zum (absolut gemessenen) Schwingungsmaximum prozentual mit der spezifischen Zeitschrittangabe an; hierbei wird noch unterschieden, ob dieser maximale Fehler innerhalb oder außerhalb der eigentlichen Schwingung auftritt. Für die Bilder II.1 - II.25 wird das TAFT-Erdbeben als Freifeldschwingung und für die Bilder II.26 - II.34 eine Sinus-Schwingung unterstellt. In Abhängigkeit der gewählten Gesamtperiode  $T_1$  stellen sich teilweise nach Schwingungsende des Freifeldes [die im Hauptteil diskutierten] Störungsschwingungen an der Basislösung ein, die vergleichsweise korrigiert und unkorrigiert gegenübergestellt werden. In der Tab. II ist dies mit dem Parameter "Nullkorrektur" gekennzeichnet. In Abhängigkeit des Lösungsweges wird ebenfalls die Zahl der mitgeführten Frequenzen bzw. der Iterationsschleifen angegeben. Für den spezifischen Lösungsweg sind in Tab. II folgende Abkürzungen verwendet worden:

- G Vollständige Gauß-sche Lösung
- T Frequenzabhängige Teillösung FALL 2/3a
- S Frequenzabhängige Teillösung FALL 3b
- P Partikulär-Lösung

Tab. II Zusammenstellung der Beispiele

Bild-Nr.	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	II.6
Lösungsweg	G	G	G	G	T	T
Gesamtzeit $T_1$	20.01	20.01	30.01	30.01	30.01	30.01
Zeitschritt $\Delta t$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Stützstellen	2002	2002	3002	3002	3002	3002
Frequenzen	2000	2000	3000	3000	1500	1500
Schleifen						
Startzeit	2.0	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
Dämpfung	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Erregungsart	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT
Fehler [%]: PROZMAG PROZBUC	0.6112 1.2853	0.6112 1.2853	0.0463 0.0775	0.0463 0.0775	2.2087 3.5100	2.2087 3.5100
I (innerhalb) I (außerhalb)	57	57	27	27	501	501
Nullkorrektur ab I		1750		2400		2400

Bild-Nr.	II.7	II.8	II.9	II.10	II.11	II.12
Lösungsweg	T	T	T	T	T	T
Gesamtzeit $T_1$	30.01	30.01	30.01	30.01	30.01	30.01
Zeitschritt $\Delta t$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Stützstellen	3002	3002	3002	3002	3002	3002
Frequenzen	1000	1000	750	750	500	500
Schleifen						
Startzeit	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
Dämpfung	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Erregungsart	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT
Fehler [%]: PROZMAG PROZBUC	2.8654 3.9212	2.8654 3.9212	4.5688 4.9113	4.5688 4.9113	38.377 29.089	38.377 29.089
I (innerhalb) I (außerhalb)	501	501	505	505	1093	1093
Nullkorrektur ab I		2400		2400		2400

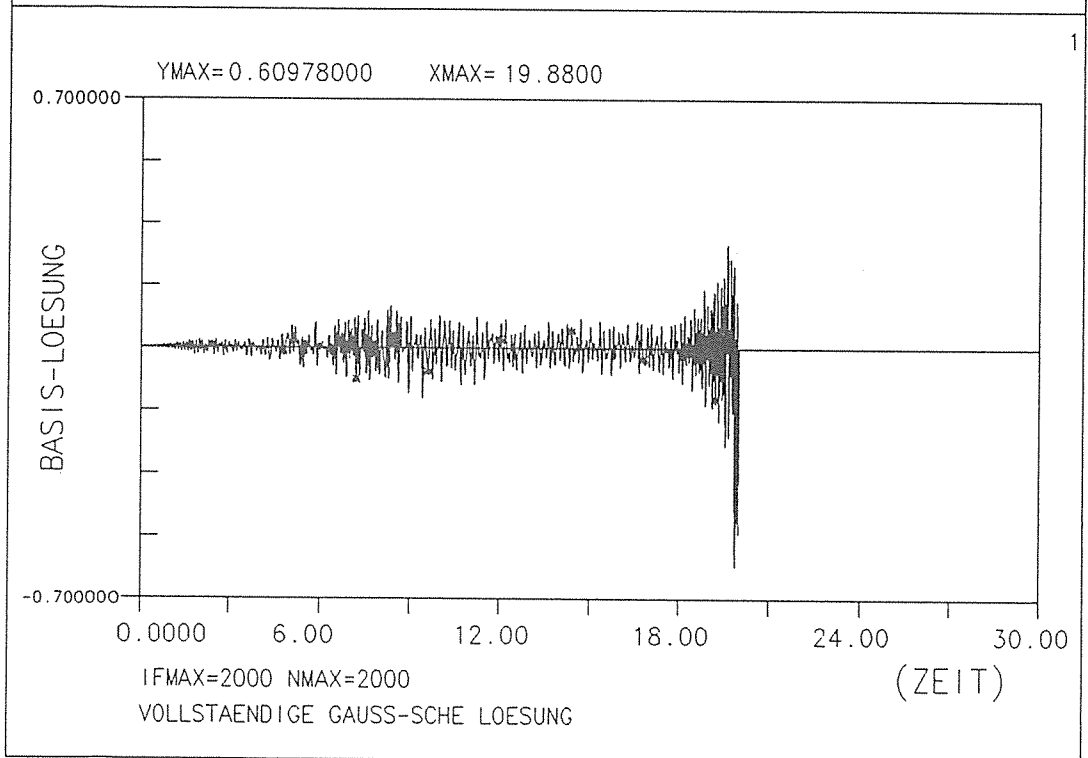
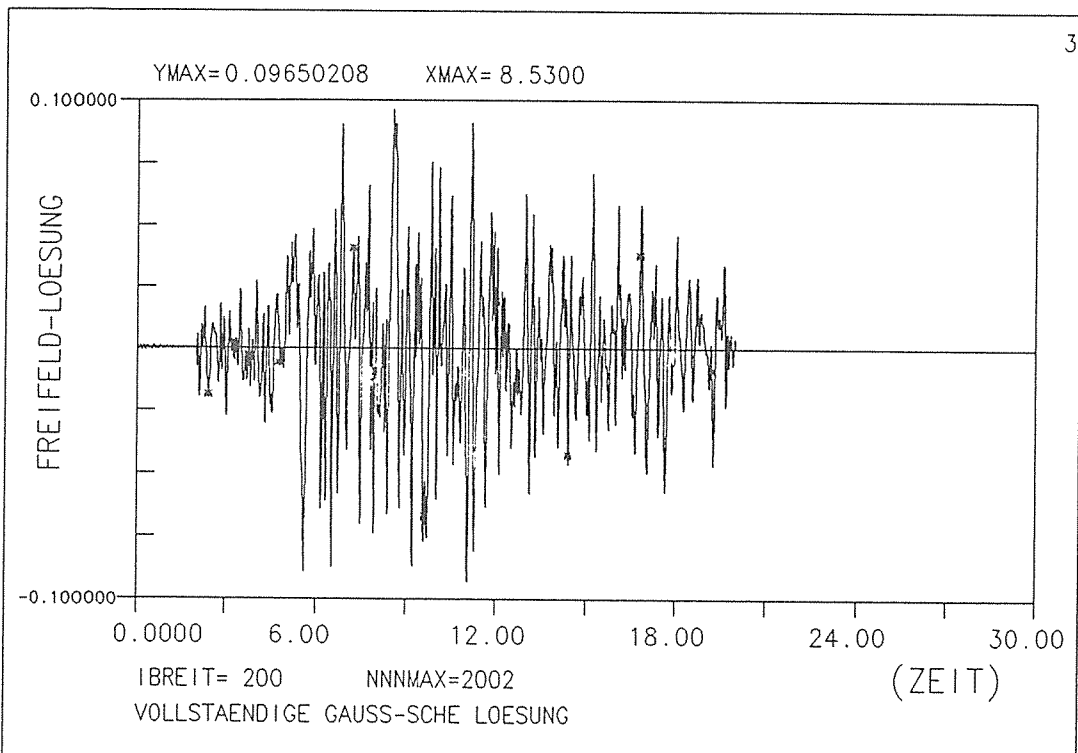


Bild-Nr.	II.13	II.14	II.15	II.16	II.17	II.18
Lösungsweg	S	P	P	S	P	P
Gesamtzeit $T_1$	19.01	40.96	40.96	19.26	40.96	40.96
Zeitschritt $\Delta t$	0.01	0.01	0.01	0.005	0.005	0.005
Stützstellen	1903	4097	4097	3852	8193	8193
Frequenzen		$\pm 2048$	$\pm 2048$		$\pm 4096$	$\pm 4096$
Schleifen	100			100		
Startzeit	0.5	19.50	19.50	0.25	10.0	10.0
Dämpfung	0.05	0.05	0.05	0.07	0.07	0.07
Erregungsart	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT
Fehler [%]: PROZMAG	4.6339	0.8385	0.8385	0.5661	0.0077	0.0077
PROZBUC	6.0220	0.4959	0.4959	1.8181	0.0129	0.0129
I (innerhalb)	78			37	73	73
I (außerhalb)		3863	3863			
Nullkorrektur ab I			1951			1851

Bild-Nr.	II.19	II.20	II.21	II.22	II.23	II.24
Lösungsweg	P	P	P	S	S	G
Gesamtzeit $T_1$	40.96	81.92	81.92	18.00	18.00	18.00
Zeitschritt $\Delta t$	0.005	0.005	0.005	0.01	0.01	0.01
Stützstellen	8193	16385	16385	1800	1800	1800
Frequenzen	$\pm 4096$	$\pm 8192$	$\pm 8192$			2200
Schleifen				100	100	
Startzeit	5.0	10.0	10.0	0.25	0.25	2.0
Dämpfung	0.07	0.07	0.07	0	0	0
Erregungsart	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT	TAFT
Fehler [%]: PROZMAG	0.0060	0.0005	0.0005	0.0059	0.0059	0.0008
PROZBUC	0.0010	0.0002	0.0002	0.0231	0.0231	0.0008
I (innerhalb)	78	4078	4078	1799	1799	
I (außerhalb)						2202
Nullkorrektur ab I	1851		1851		1790	

Bild-Nr.	II.25	II.26	II.27	II.28	II.29	II.30
Lösungsweg	G	P	P	T	T	T
Gesamtzeit $T_1$	18.00	40.96	40.96	22.01	22.005	22.005
Zeitschritt $\Delta t$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.005	0.005
Stützstellen	1800	4097	4097	2202	2202	2202
Frequenzen	2200	$\pm 2048$	$\pm 2048$	100	200	200
Schleifen						
Startzeit	2.0	19.0	19.0	2.0	1.0	1.0
Dämpfung	0	0.05	0.05	0.05	0.07	0.07
Erregungsart	TAFT	sin-25 Freif.	sin-25 Freif.	sin-25 Freif.	sin-25 Freif.	sin-25 Freif.
Fehler [%]: PROZMAG PROZBUC	0.0008 0.0008	0.1782 0.1966	0.1782 0.1966	2.3158 19.862	0.6699 9.0557	0.6699 9.0557
I (innerhalb) I (außerhalb)		2850	2850	201	201	201
Nullkorrektur ab I	2000		2100			2000

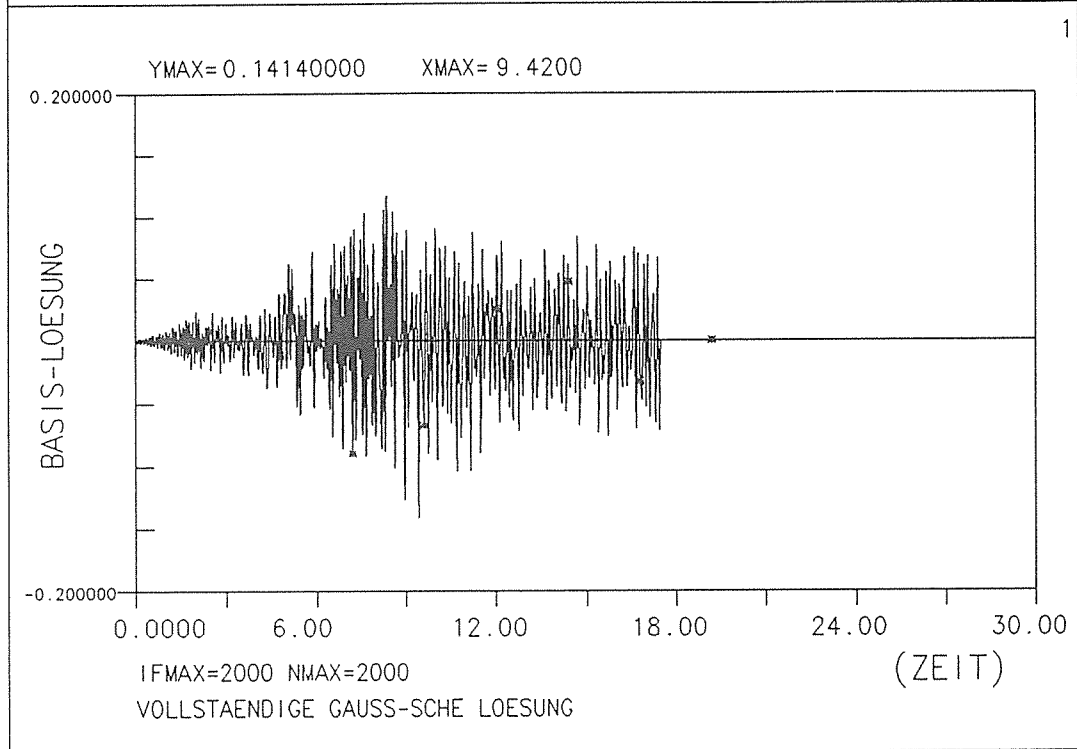
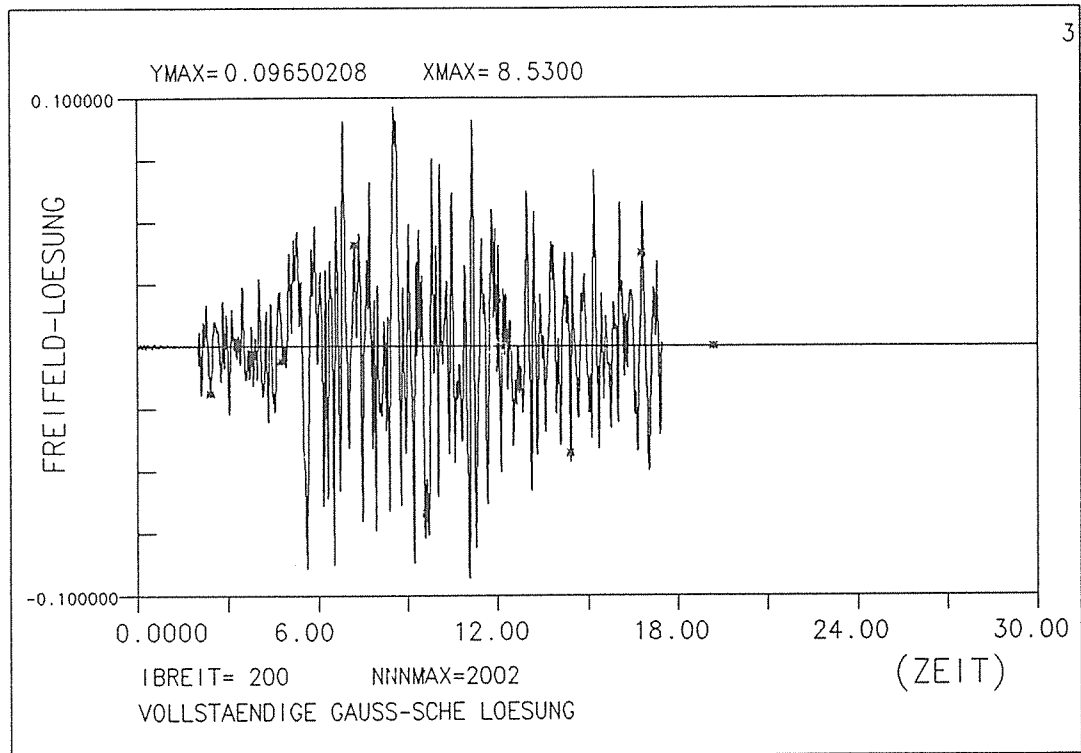
Bild-Nr.	II.31	II.32	II.33	II.34
Lösungsweg	P	P	P	P
Gesamtzeit $T_1$	40.96	40.96	40.96	40.96
Zeitschritt $\Delta t$	0.005	0.005	0.005	0.005
Stützstellen	8193	8193	8193	8193
Frequenzen	$\pm 4096$	$\pm 4096$	$\pm 4096$	$\pm 4096$
Schleifen				
Startzeit	10.0	10.0	10.0	10.0
Dämpfung	0.07	0.07	0.07	0.07
Erregungsart	sin-25 Freif.	sin-25 Freif.	sin-25 Basis	sin-25 Basis
Fehler [%]: PROZMAG PROZBUC	0.0006 0.0009	0.0006 0.0009	0.0005 0.0007	0.0005 0.0007
I (innerhalb) I (außerhalb)		67	70	70
Nullkorrektur ab I		2100		2100



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAG= 0.61122E+00 PROZBUC= 0.12853E+01 BEI 1= 57

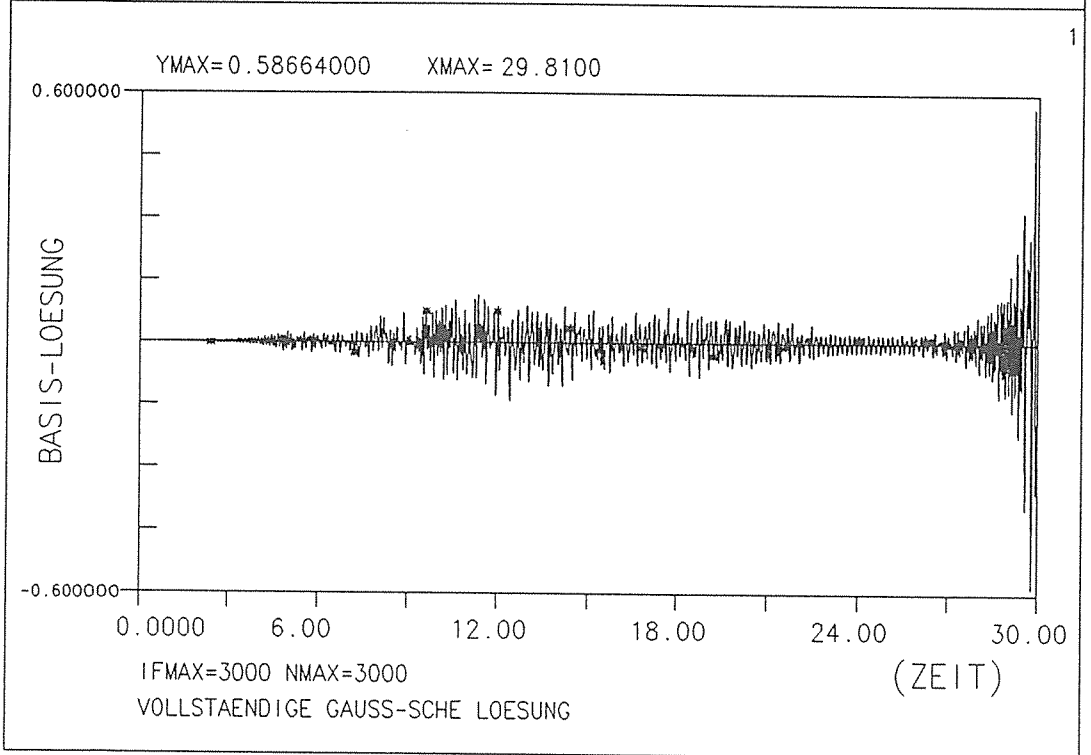
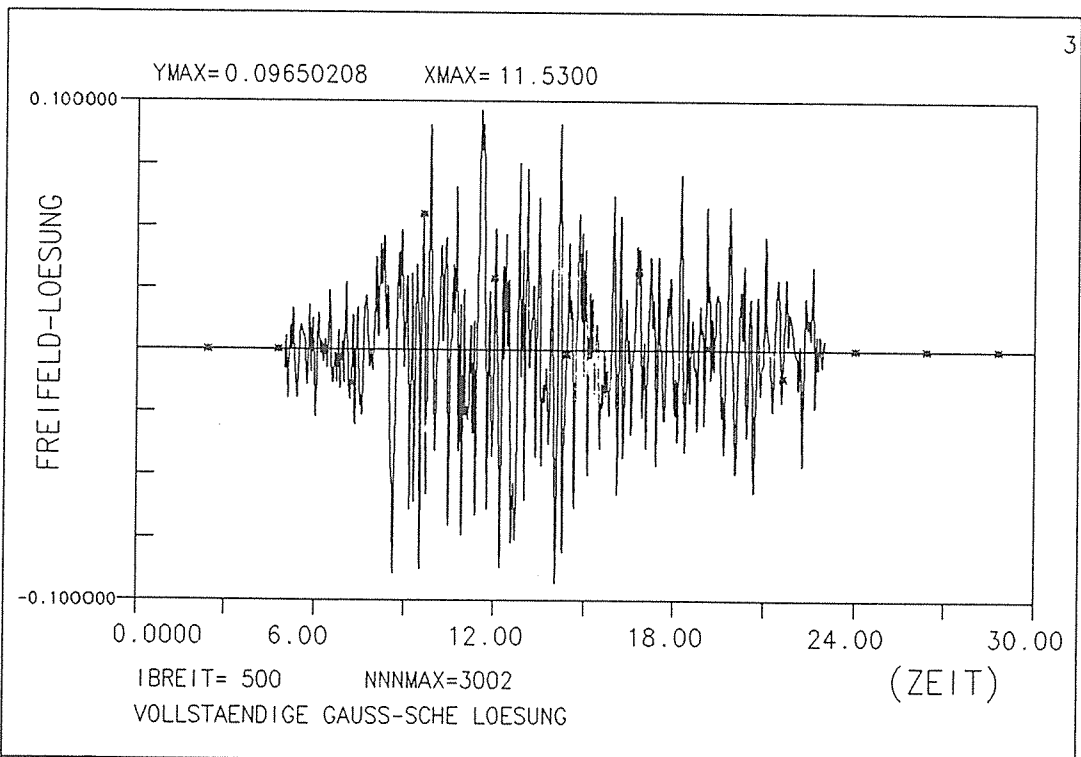
Bild II.1



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAG= 0.61122E+00 PROZBUC= 0.12853E+01 BEI 1- 57

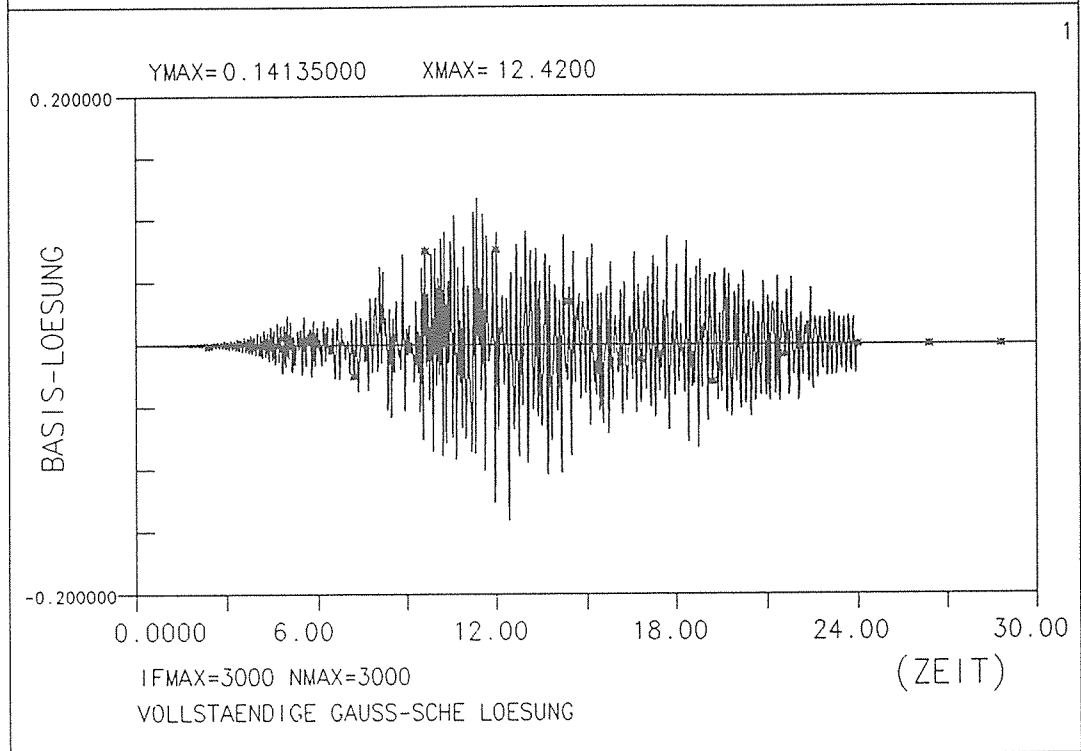
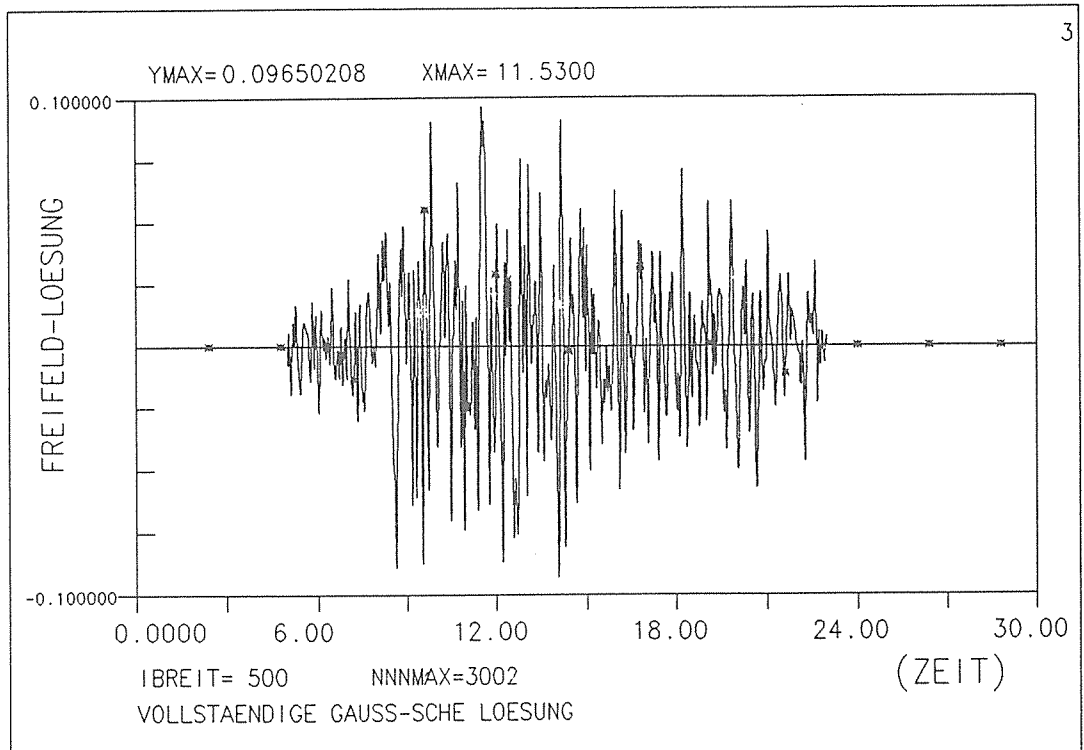
Bild II.2



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAG= 0.46379E-01 PROZBUC= 0.77562E-01 BEI I= 27

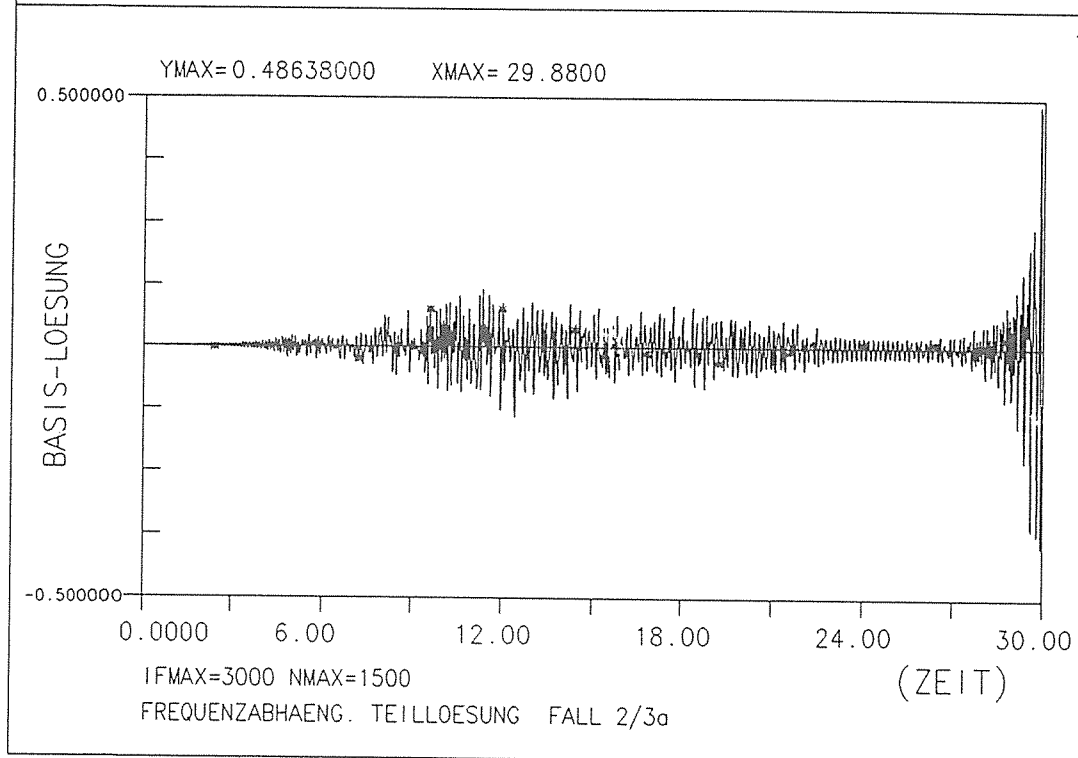
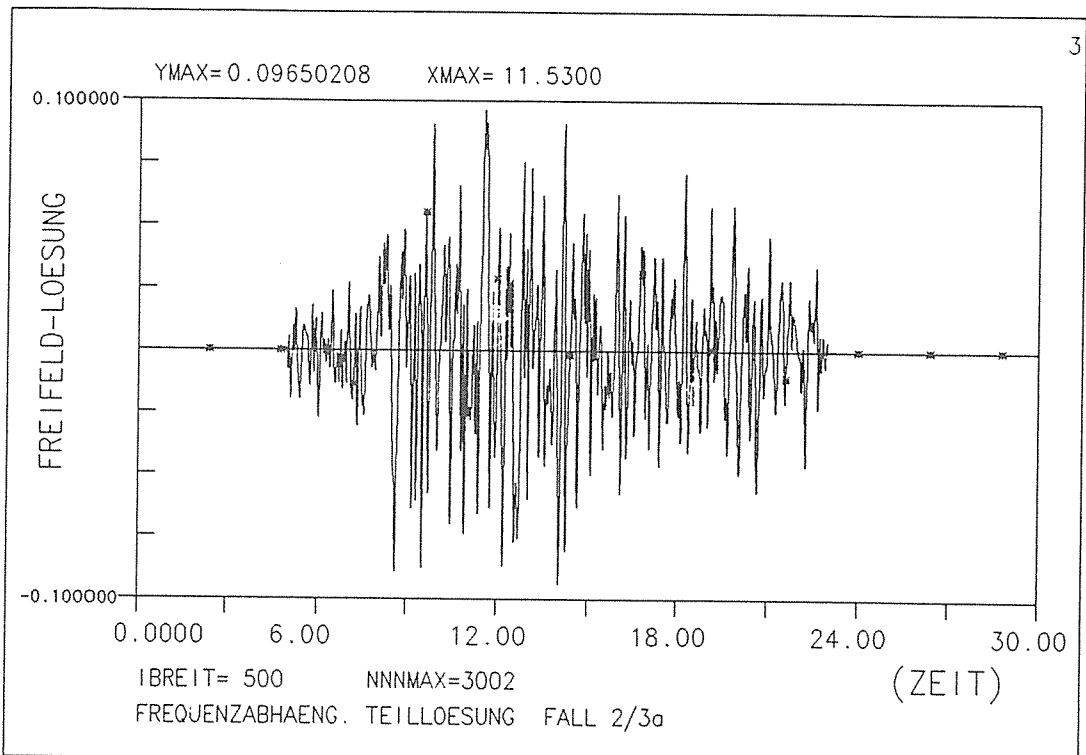
Bild II.3



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAC= 0.46379E-01 PROZBXC= 0.77562E-01 BEI 1= 27

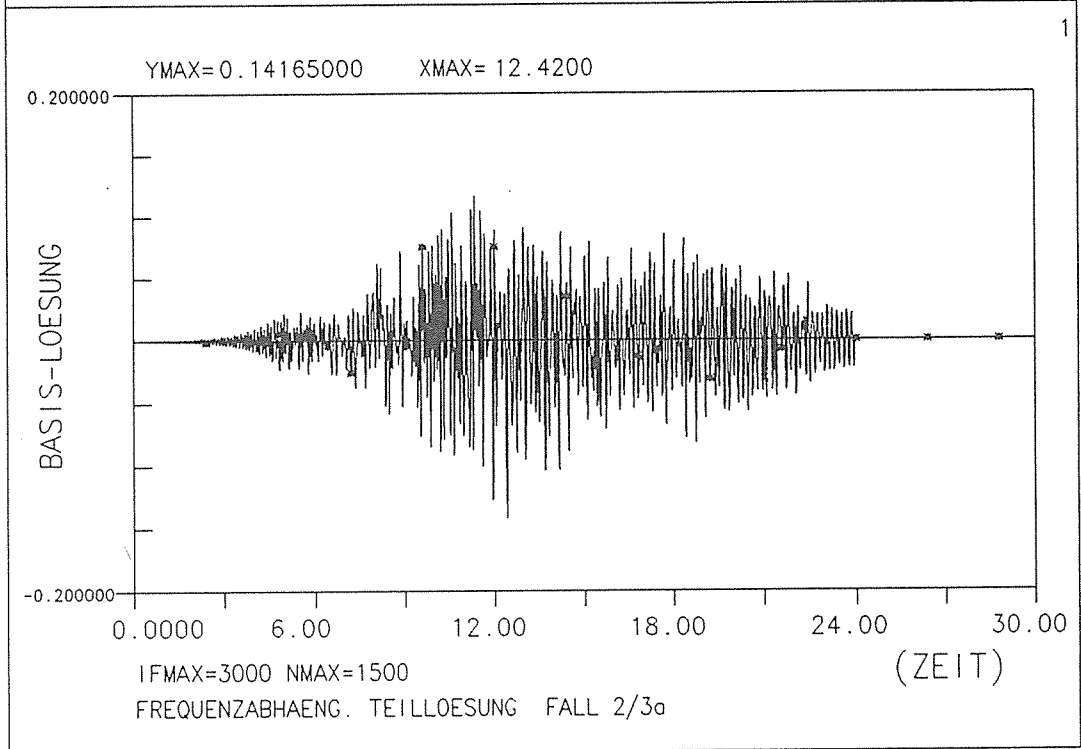
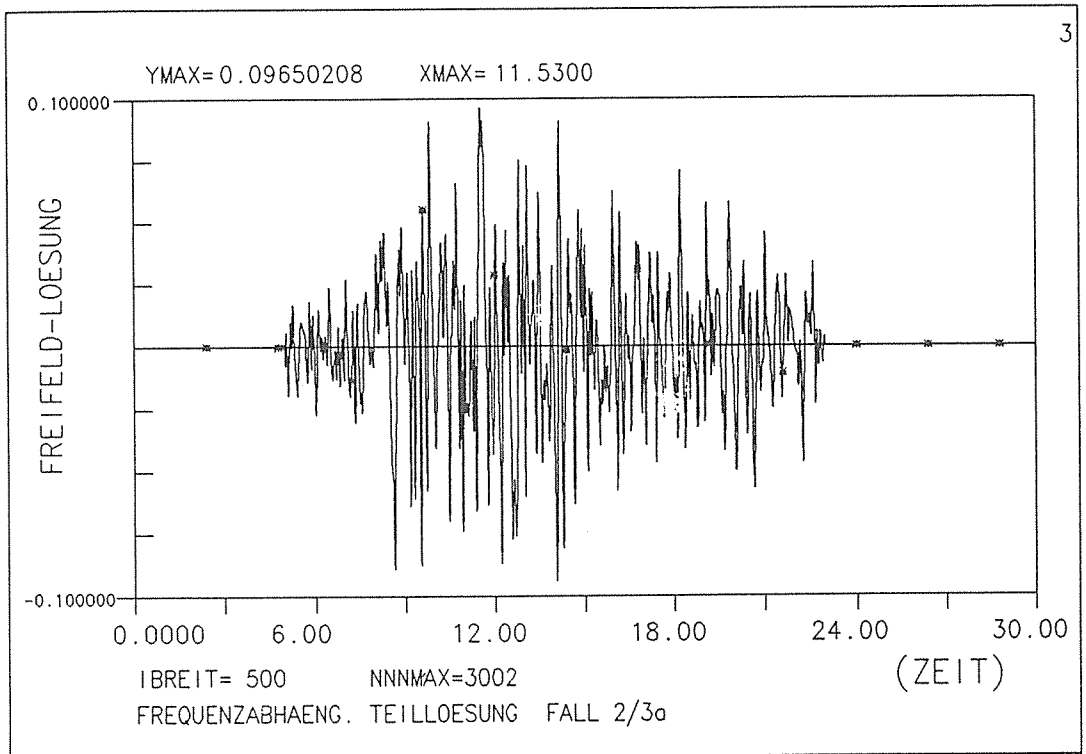
Bild II.4



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3 $\sigma$

PROZMAG= 0.22087E+01 PROZBUC= 0.35100E+01 BEI 1= 501

Bild II.5

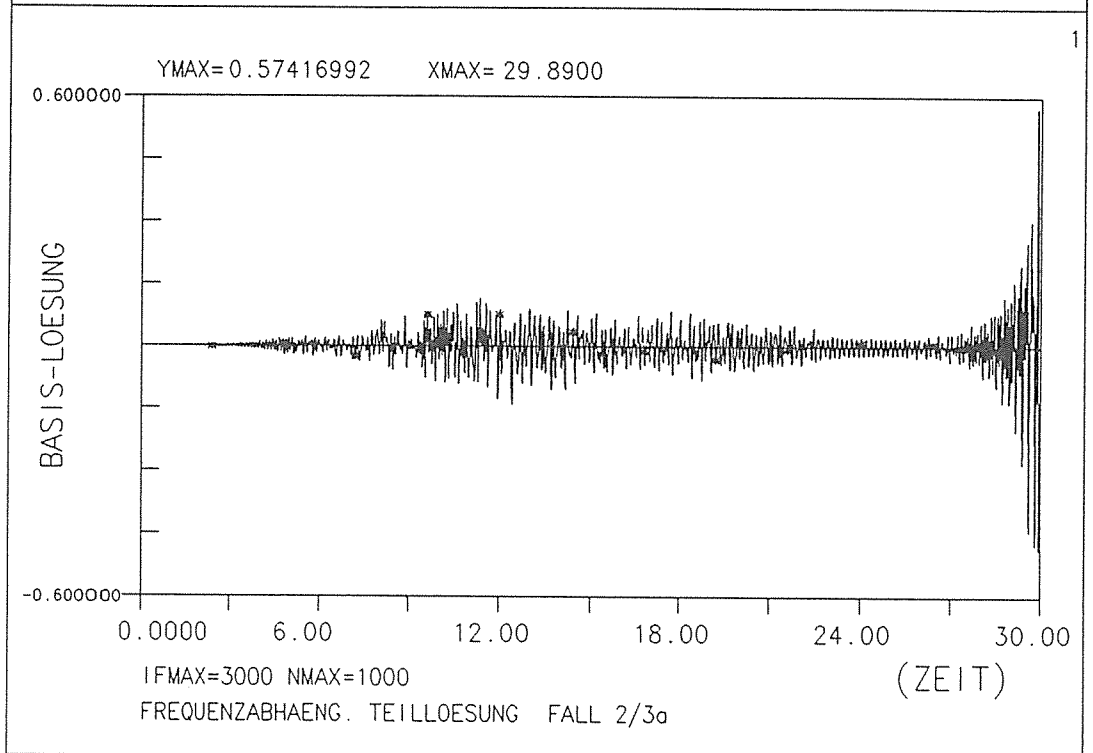
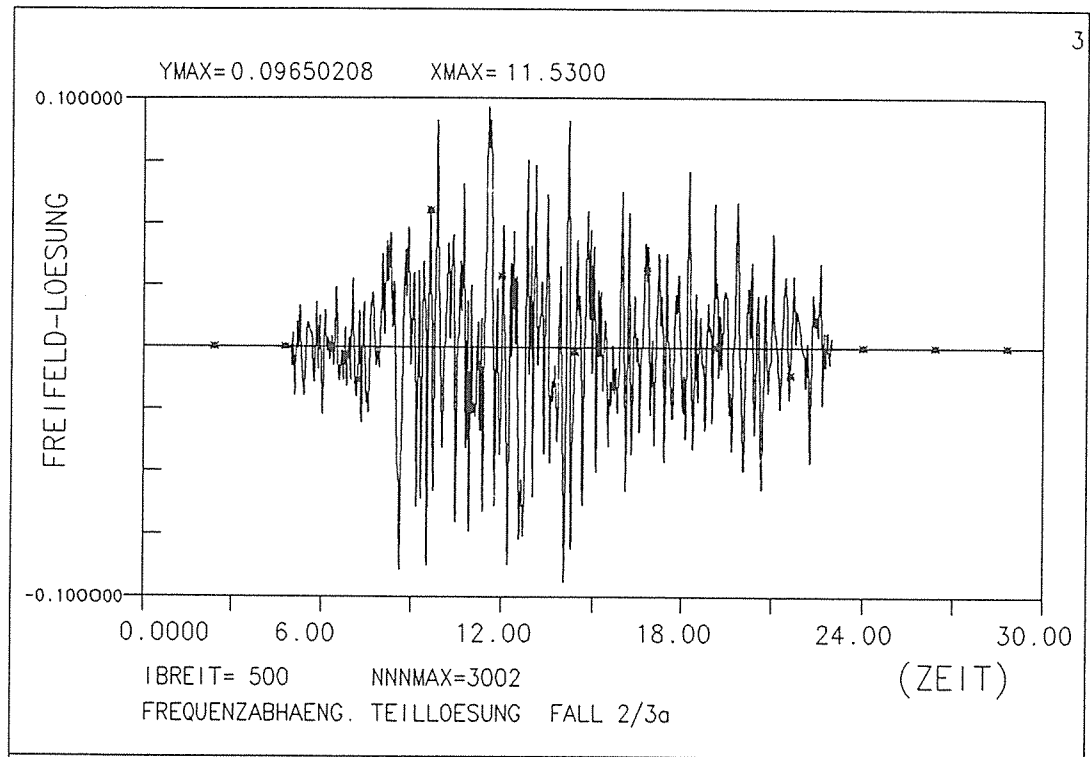


BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3 $\sigma$

PROZMAG= 0.22087E+01 PROZBJC= 0.35100E+01 BEI 1= 501

Bild II.6

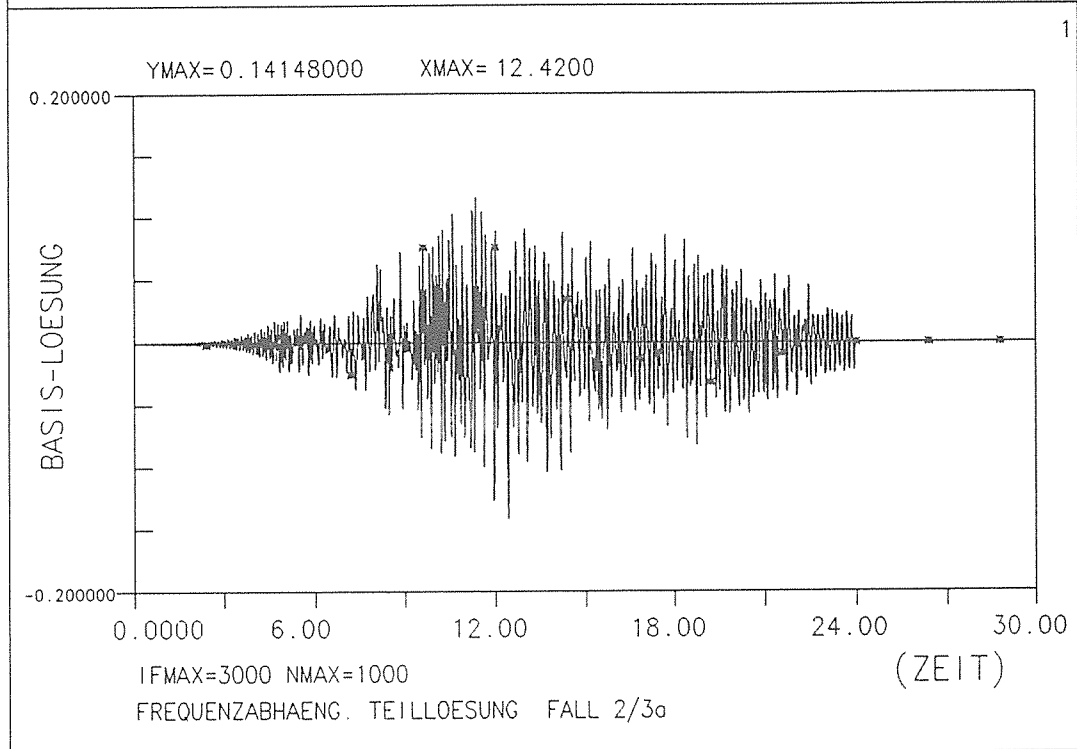
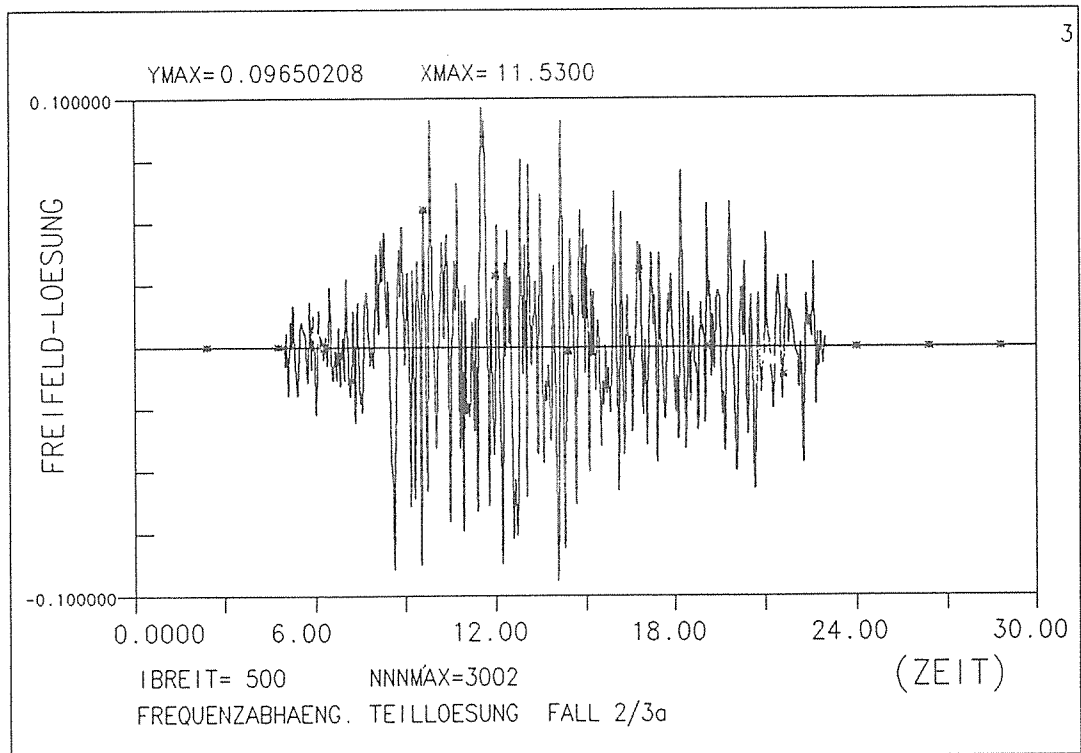




BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAC= 0.28654E+01 PROZBXC= 0.39212E+01 BEI 1= 501

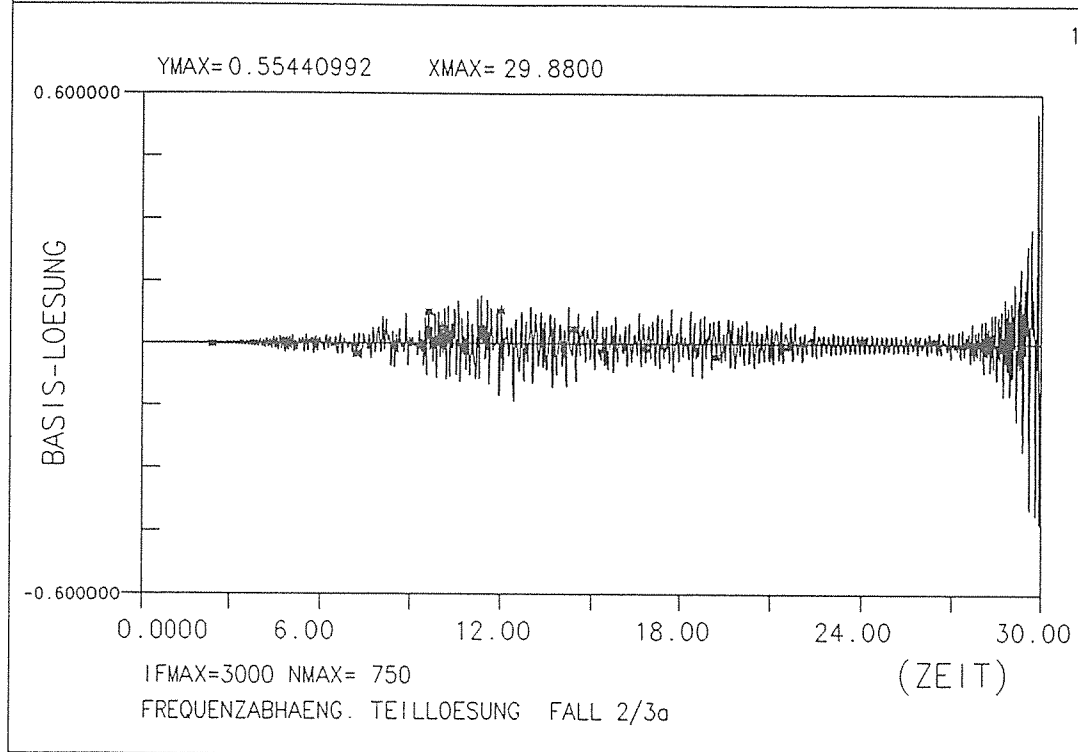
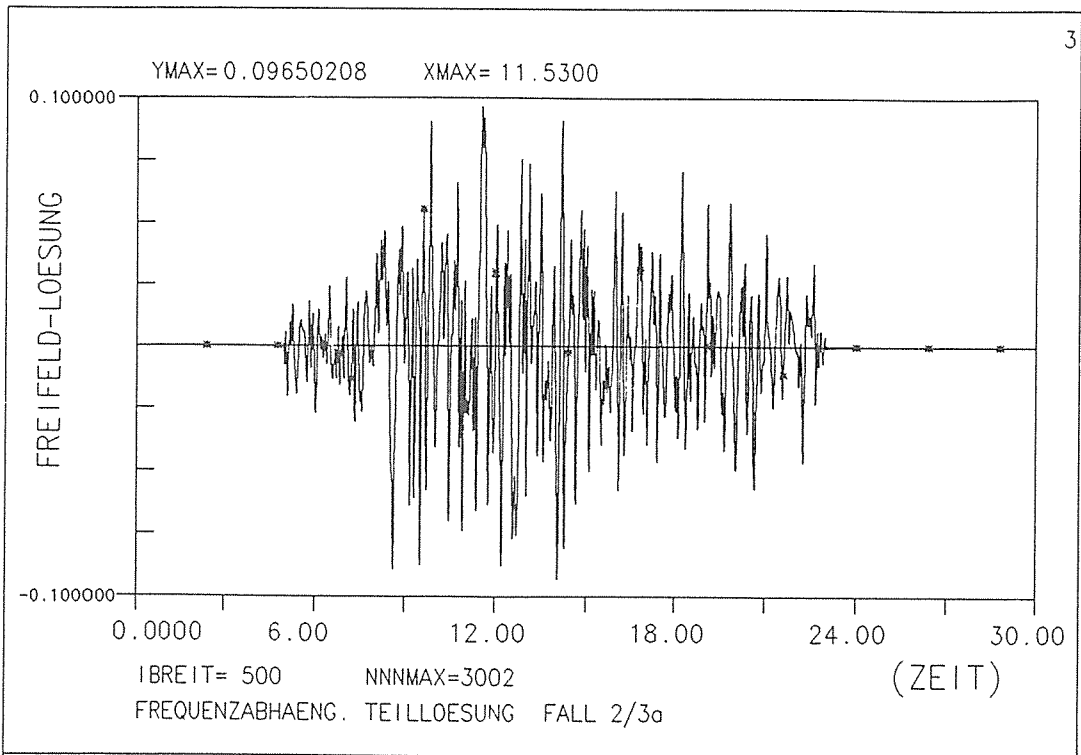
Bild II.7



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3 $\sigma$

PROZMAG= 0.28654E+01 PROZBUC= 0.39212E+01 BEI 1= 501

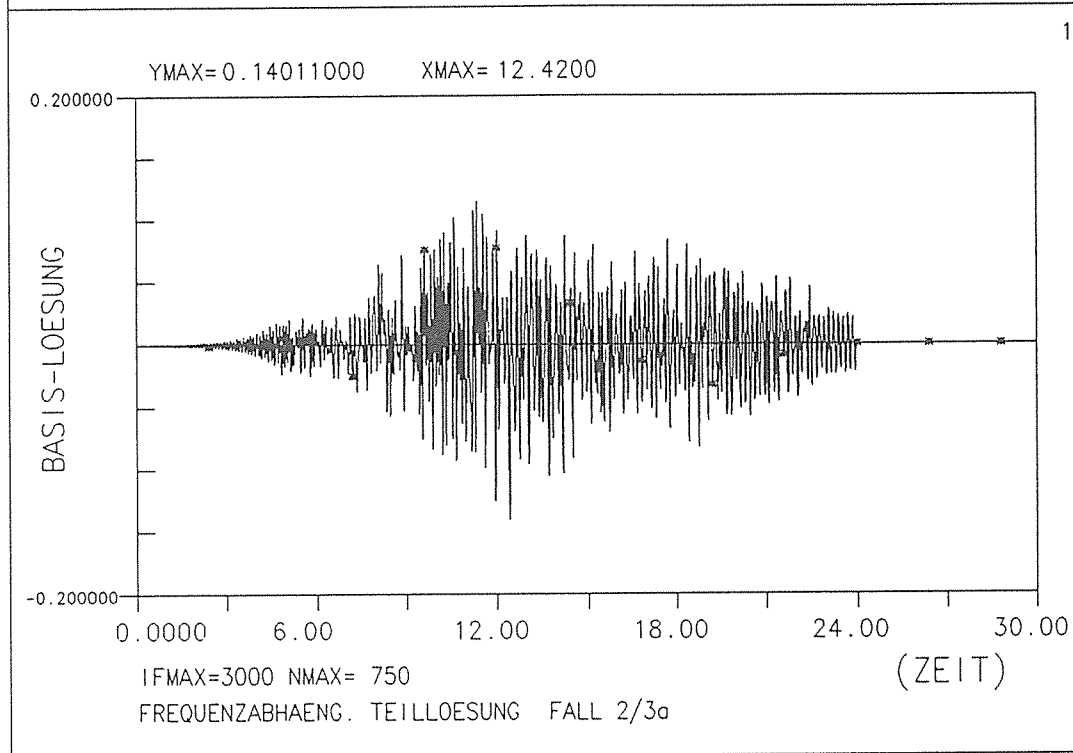
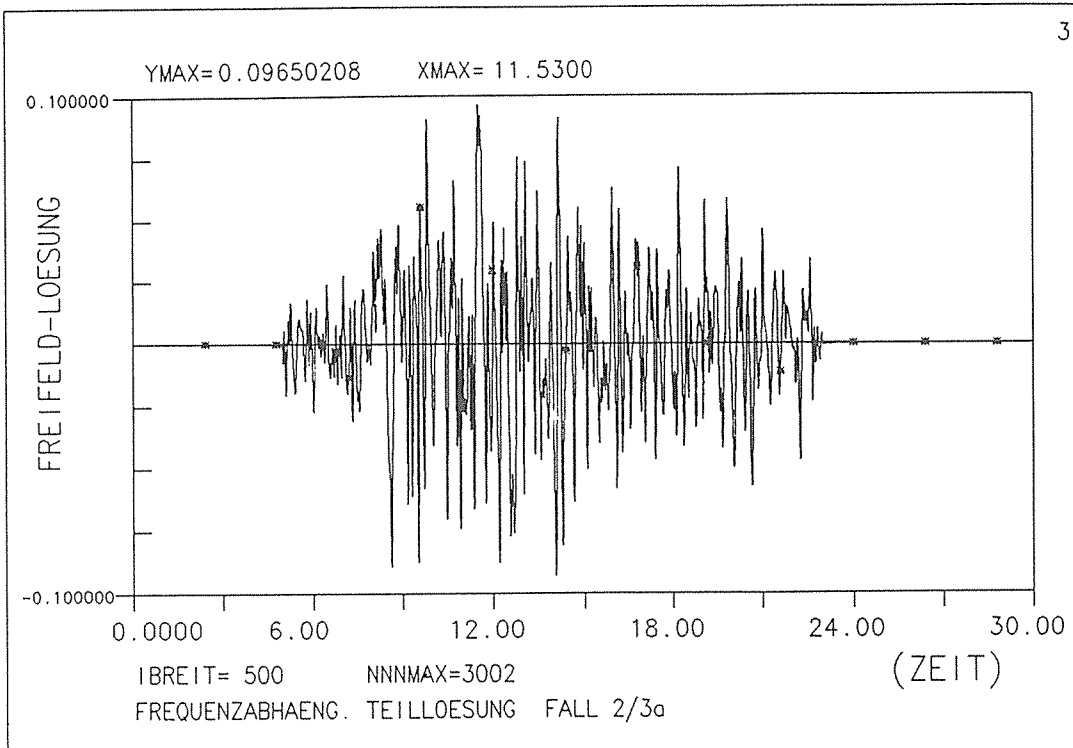
Bild II.8



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3 $\sigma$

PROZMAC= 0.45688E+01 PROZBUC= 0.49113E+01 BEI I= 505

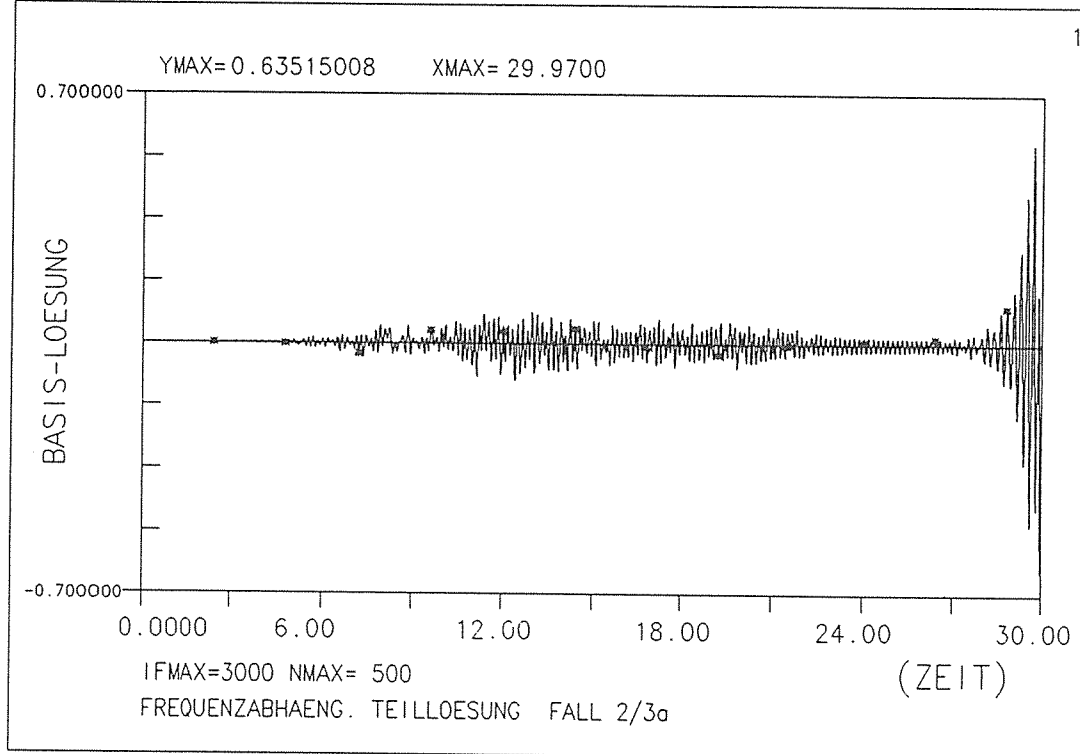
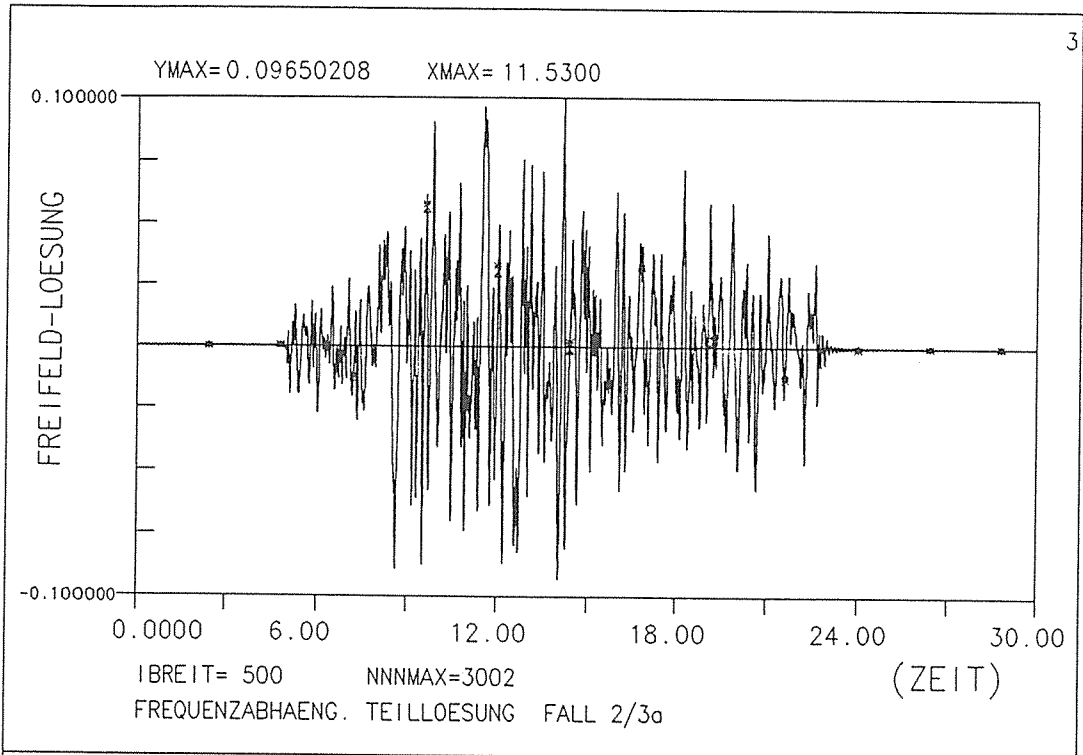
Bild II.9



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAG= 0.45688E+01 PROZBUC= 0.49113E+01 BEI 1= 505

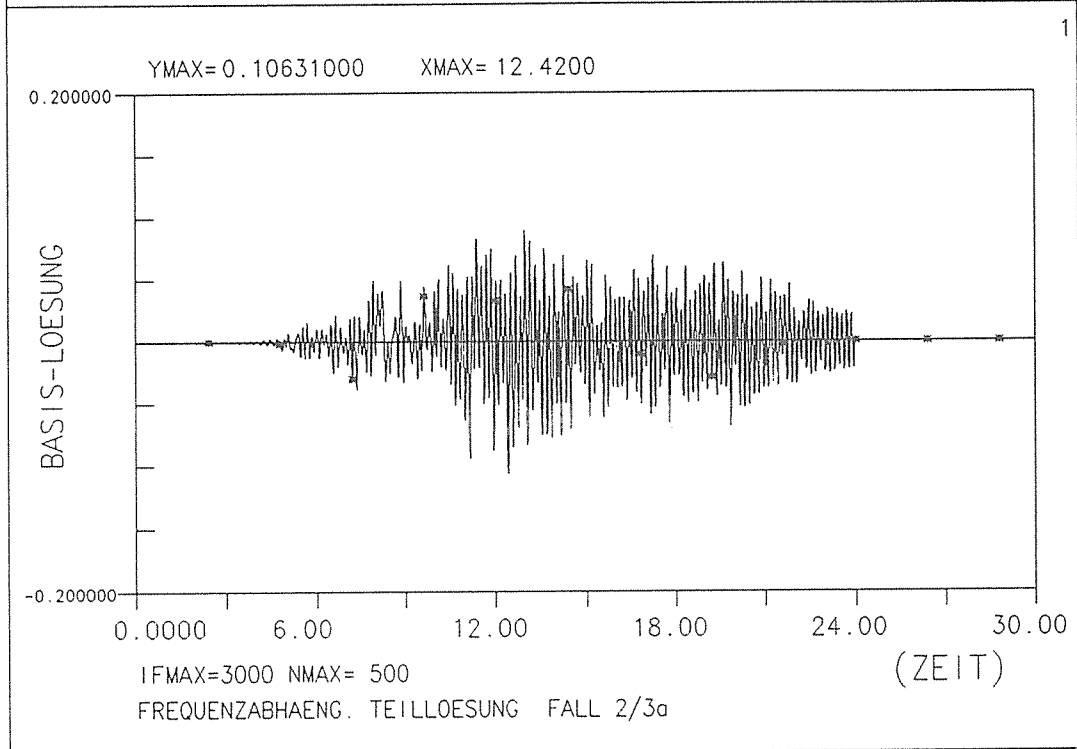
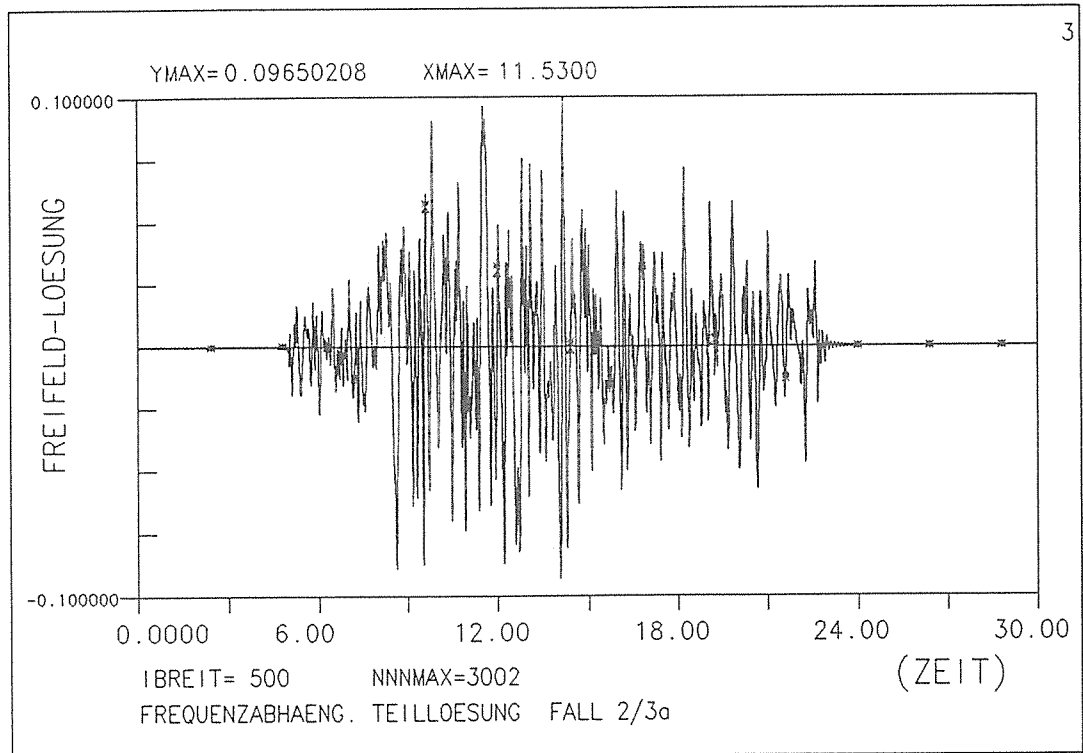
Bild II.10



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZJAG= 0.38377E+02 PROZJUC= 0.29089E+02 BEI 1=1093

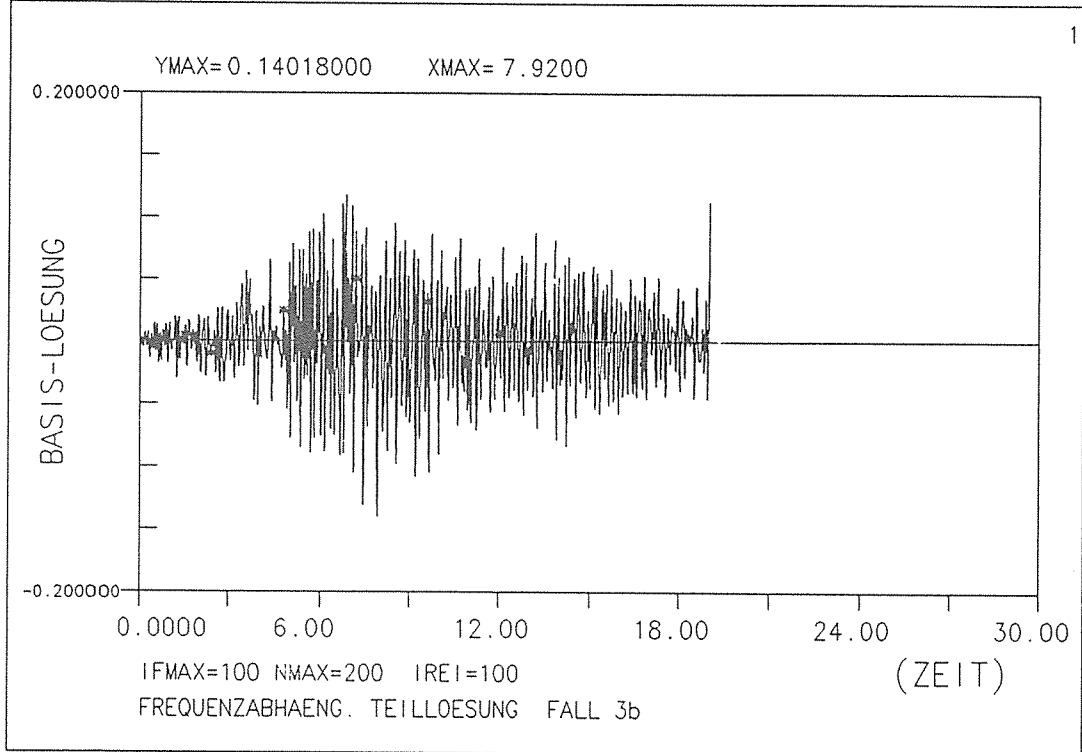
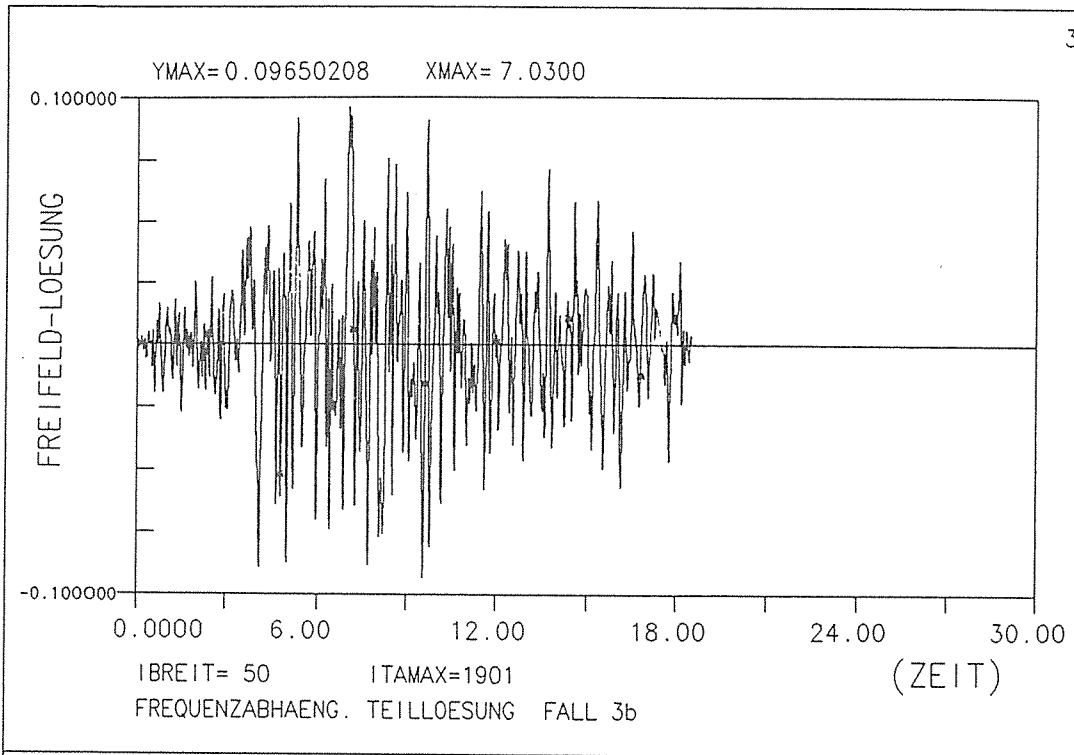
Bild II.11



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAG= 0.38377E+02 PROZBUC= 0.29089E+02 BEI 1-1093

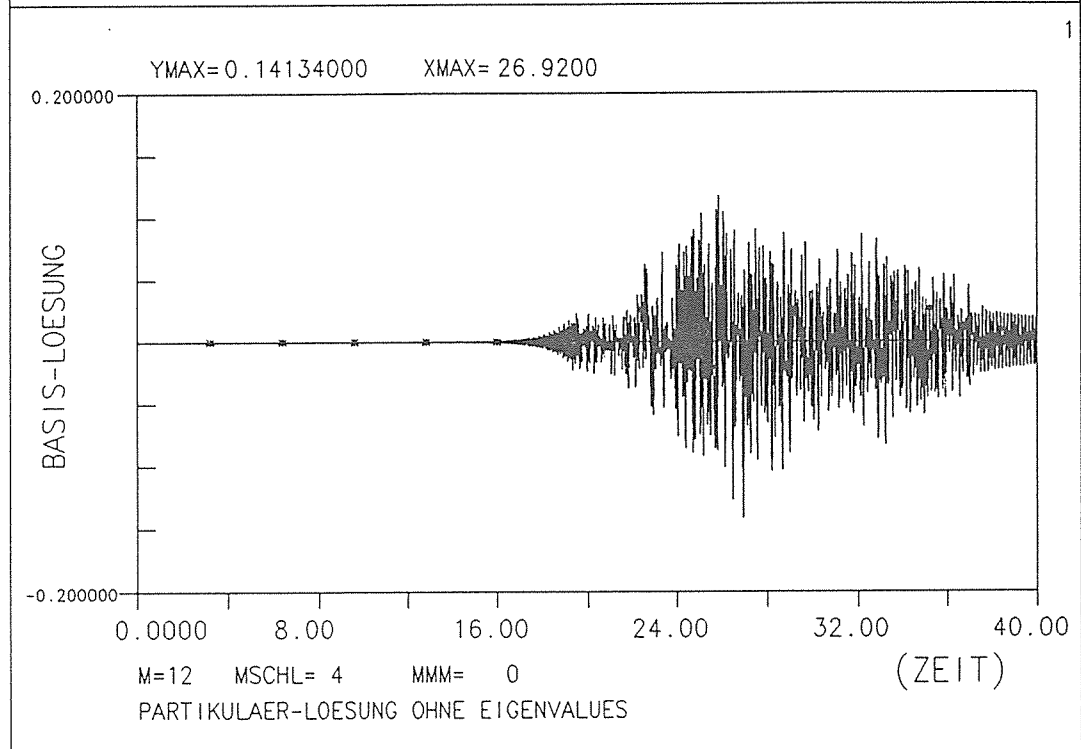
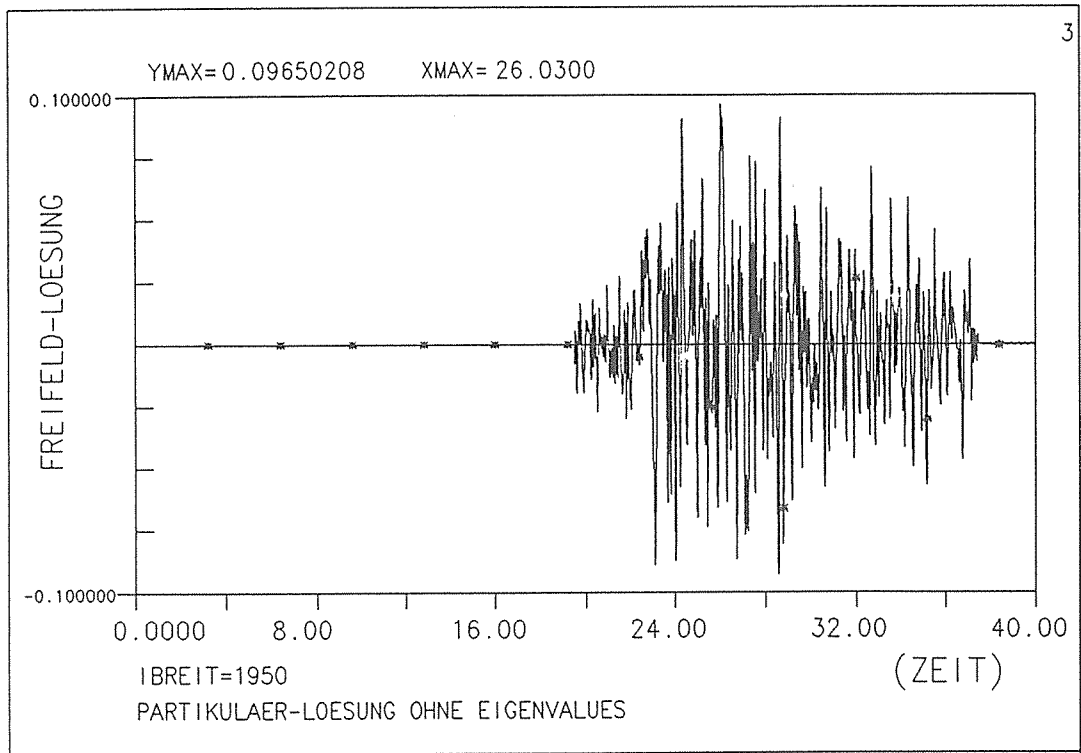
Bild II.12



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 3b

PROZBAG= 0.46339E+01 PROZBAC= 0.60220E+01 BEI 1= 78

Bild II.13

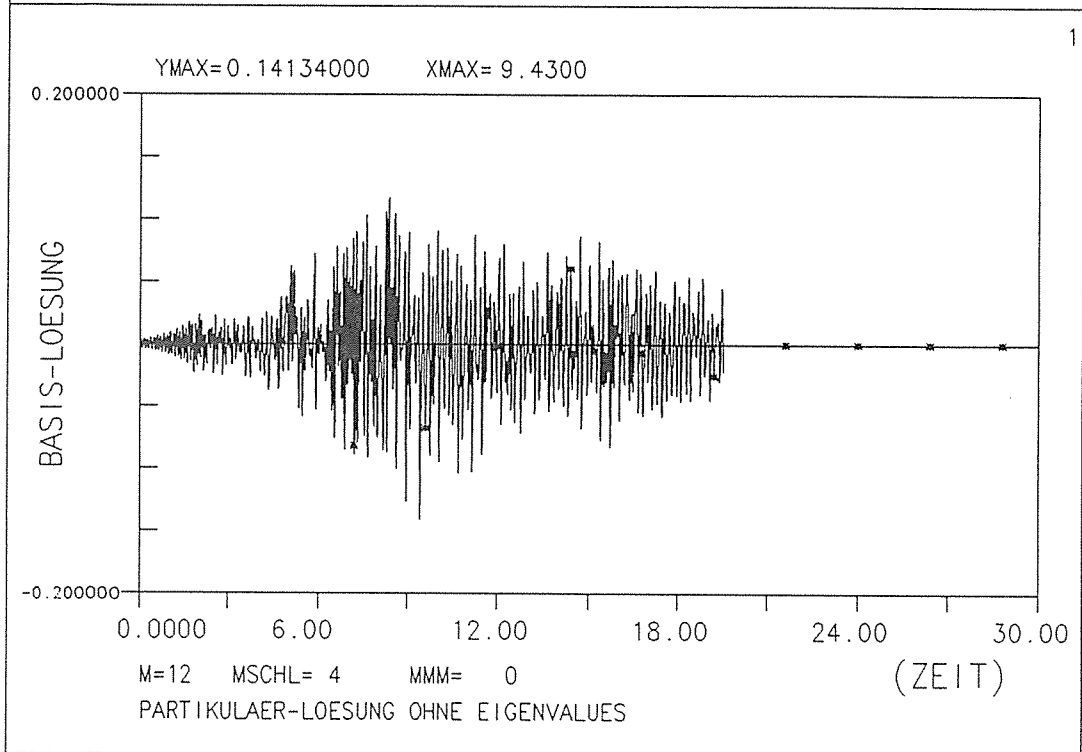
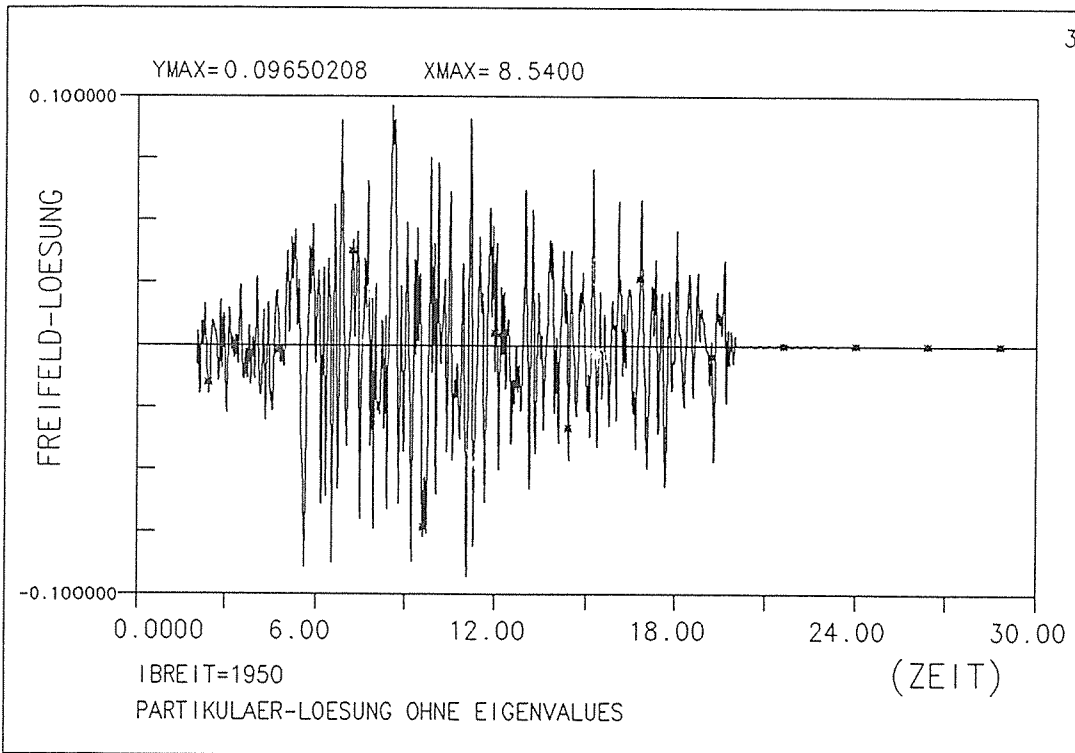


BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.83857E+00 PROZBUC= 0.49593E+00 BEI 1=3863

Bild II.14

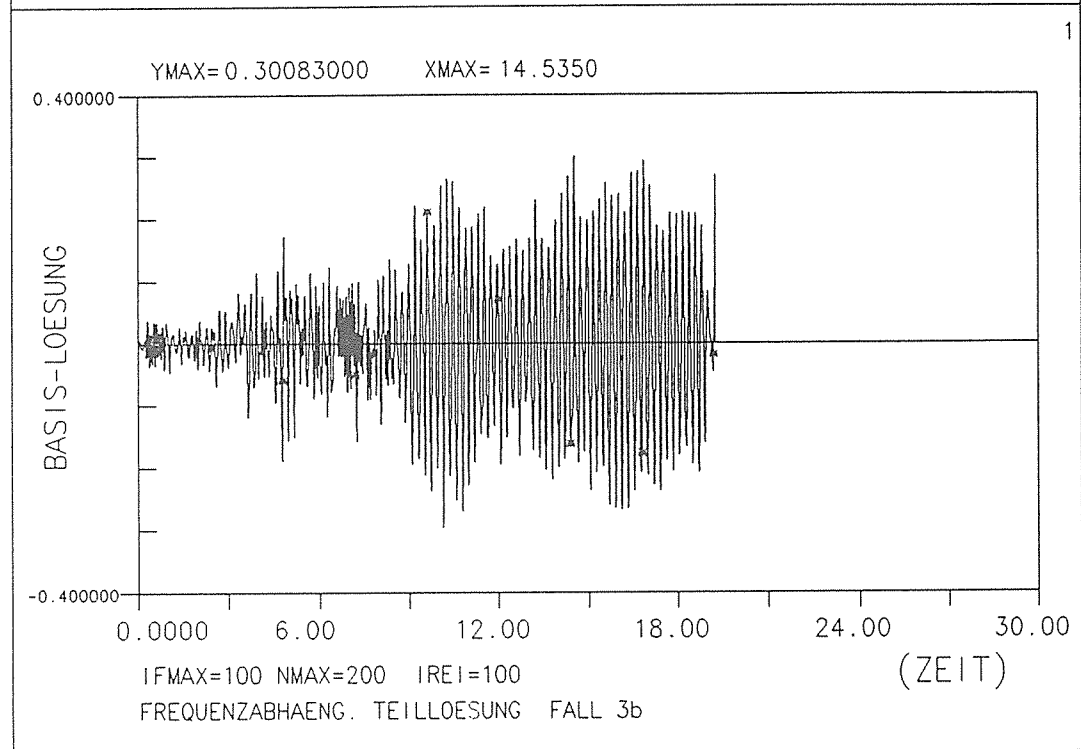
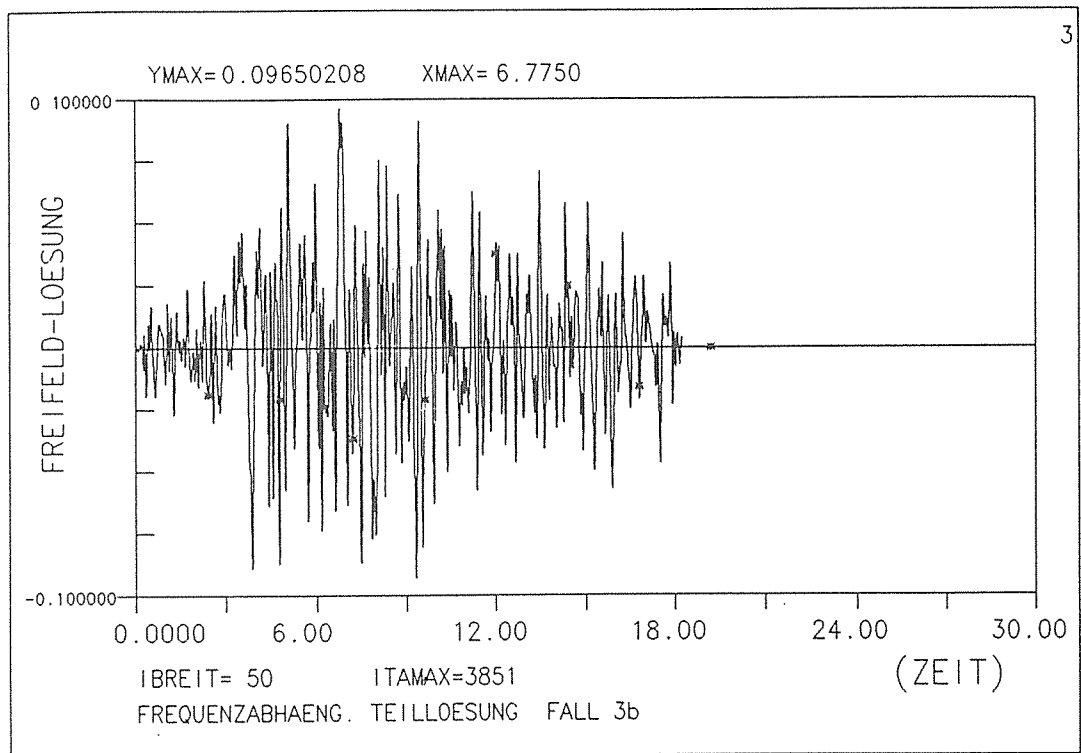




BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAC= 0.83857E+00 PROZBUC= 0.49693E+00 BEI 1=3863

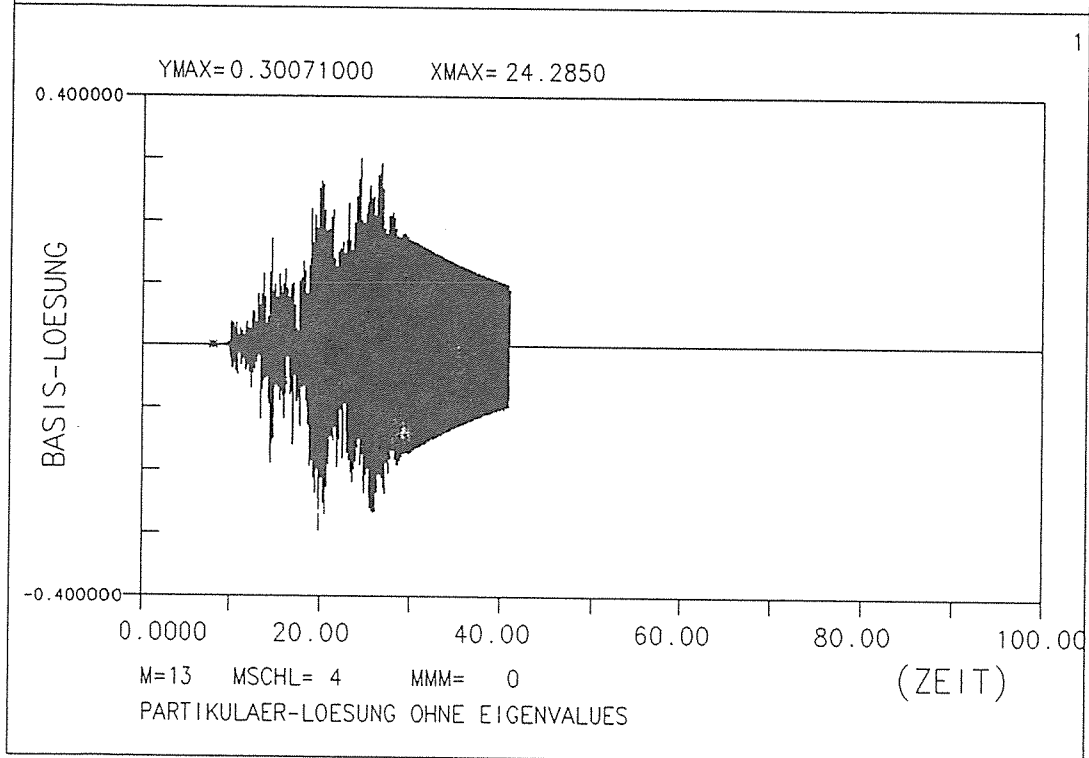
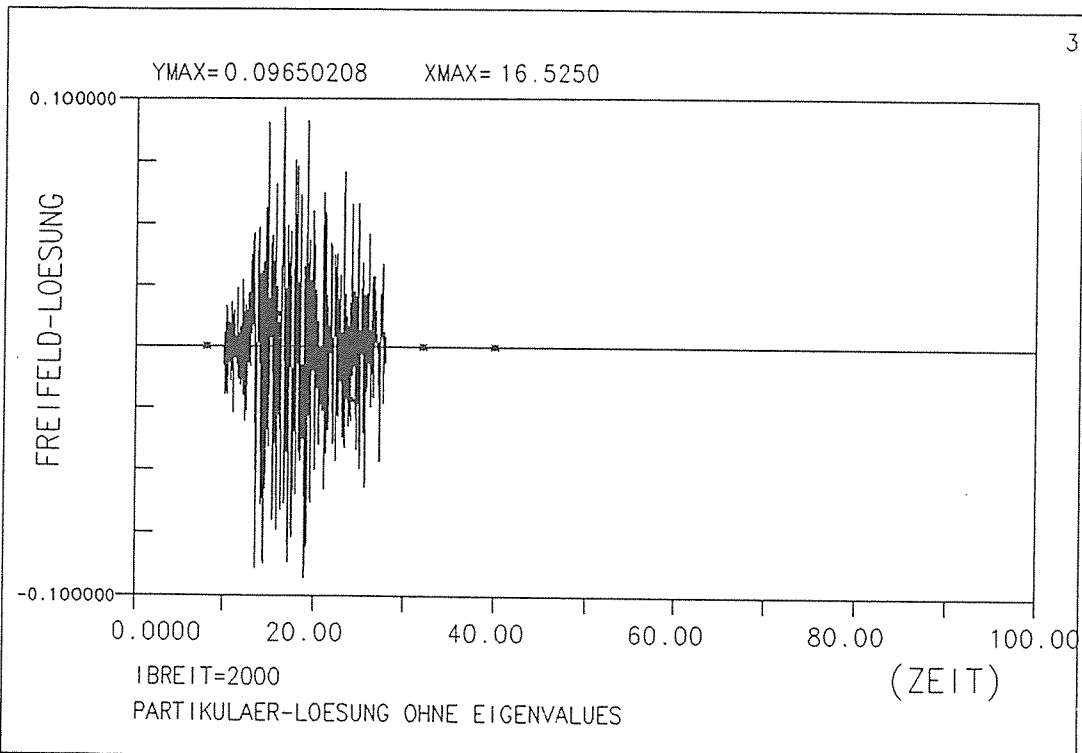
Bild II.15



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 3b

PROZMAG= 0.56615E+00 PROZBUC= 0.18181E+01 BEI 1= 37

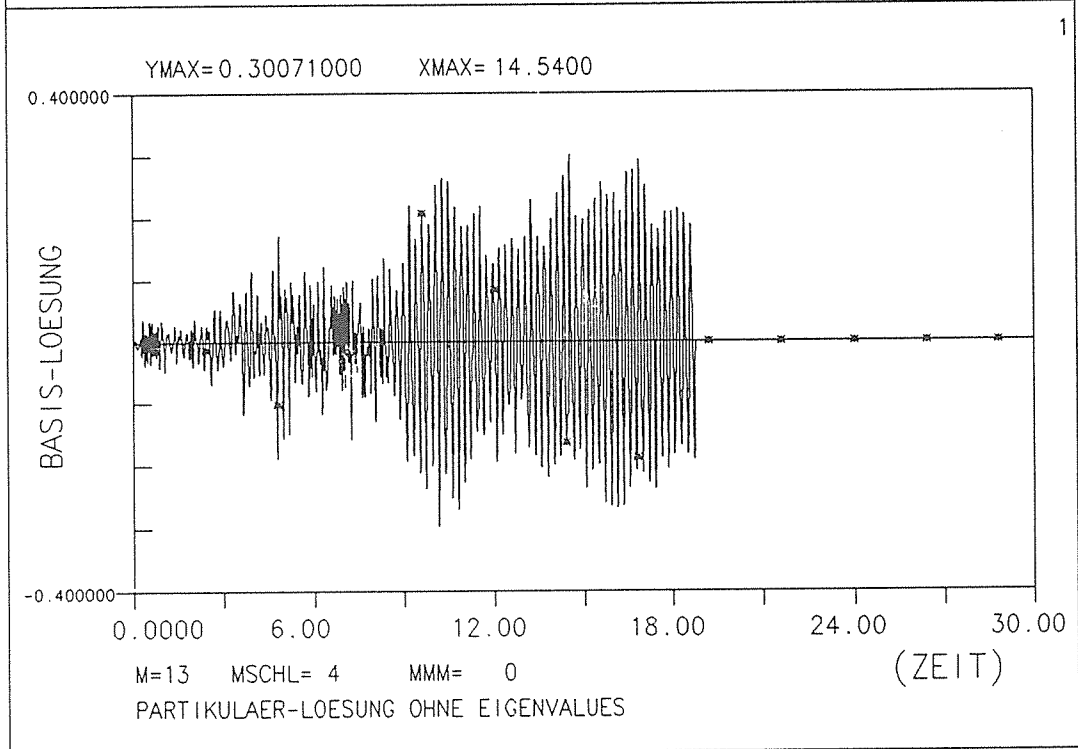
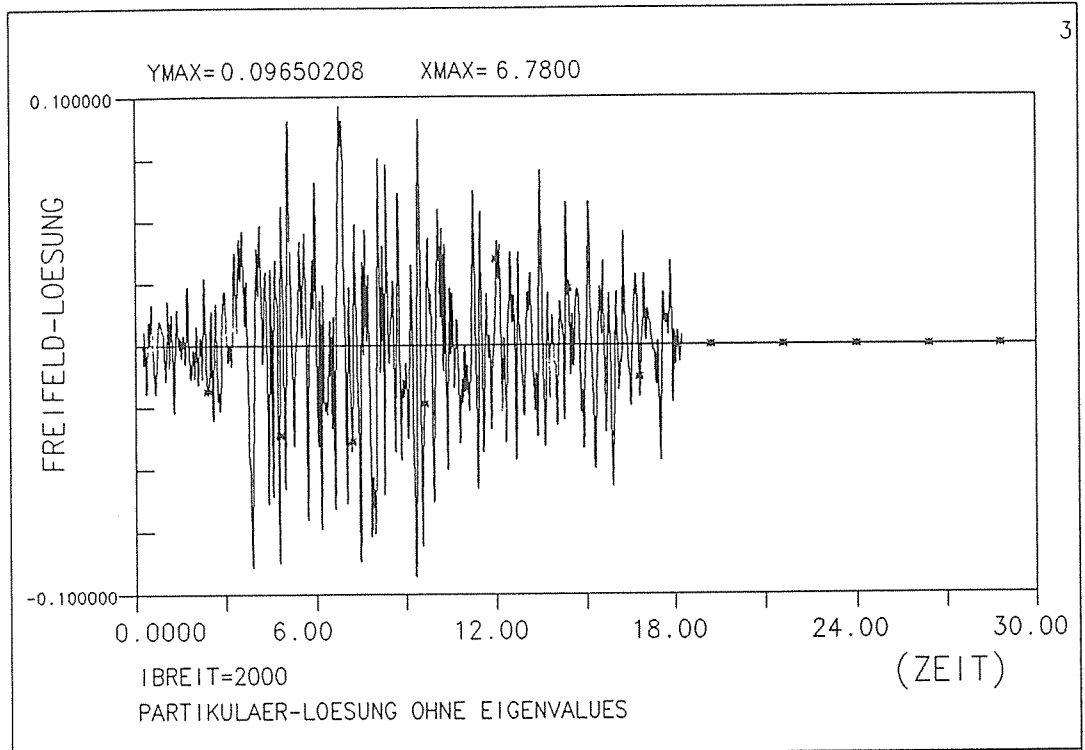
Bild II.16



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.77916E-02 PROZBUC= 0.12948E-01 BEI 1= 73

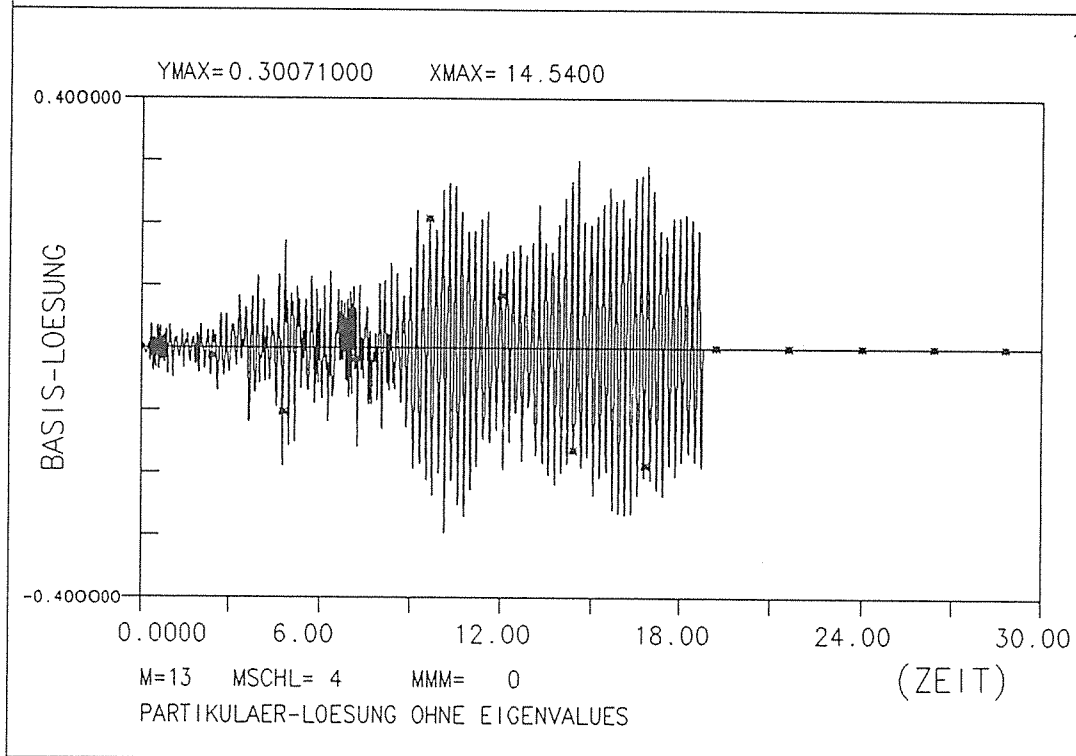
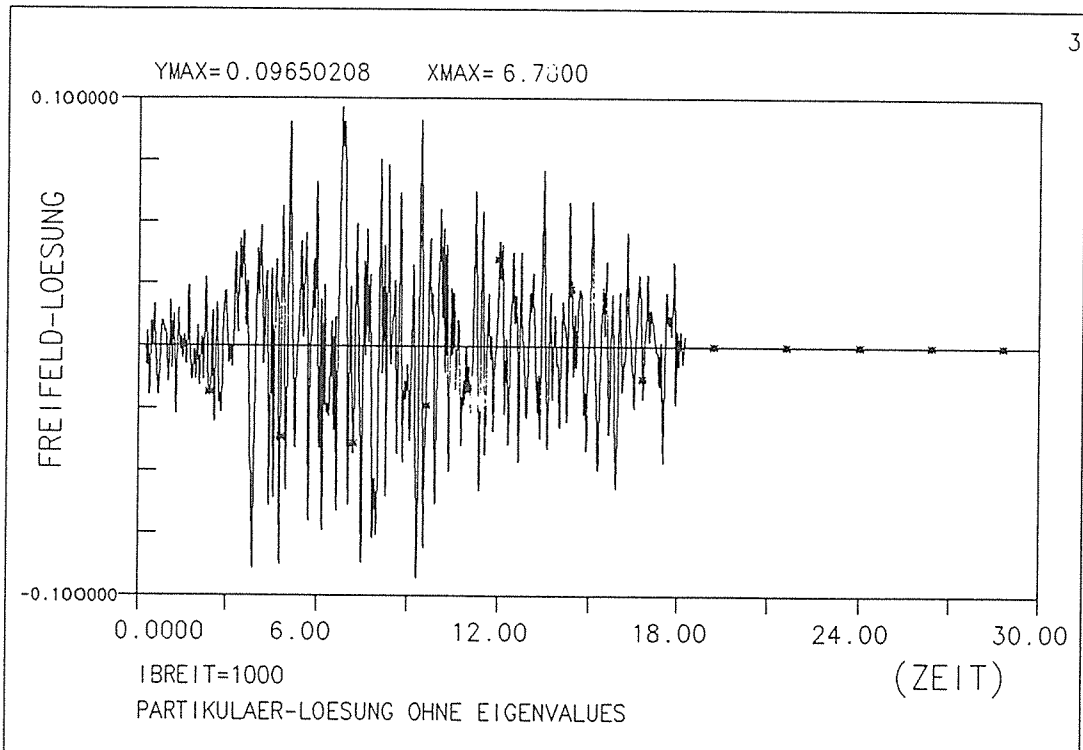
Bild II.17



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.77916E-02 PROZBUC= 0.12949E-01 BEI 1= 73

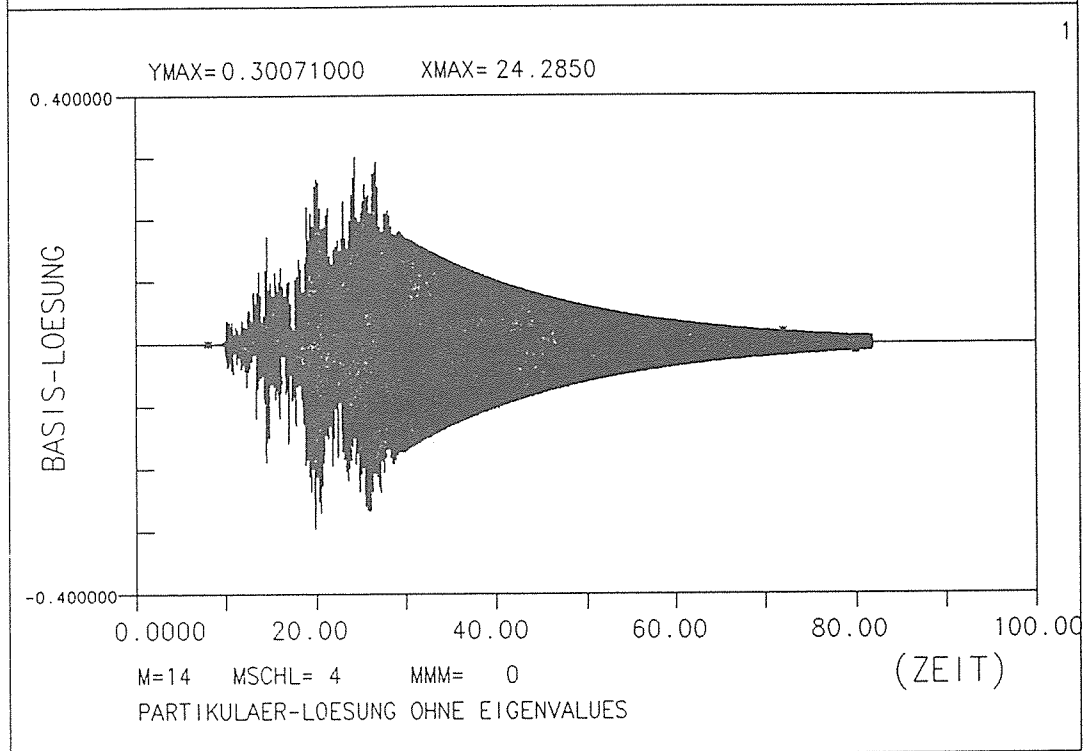
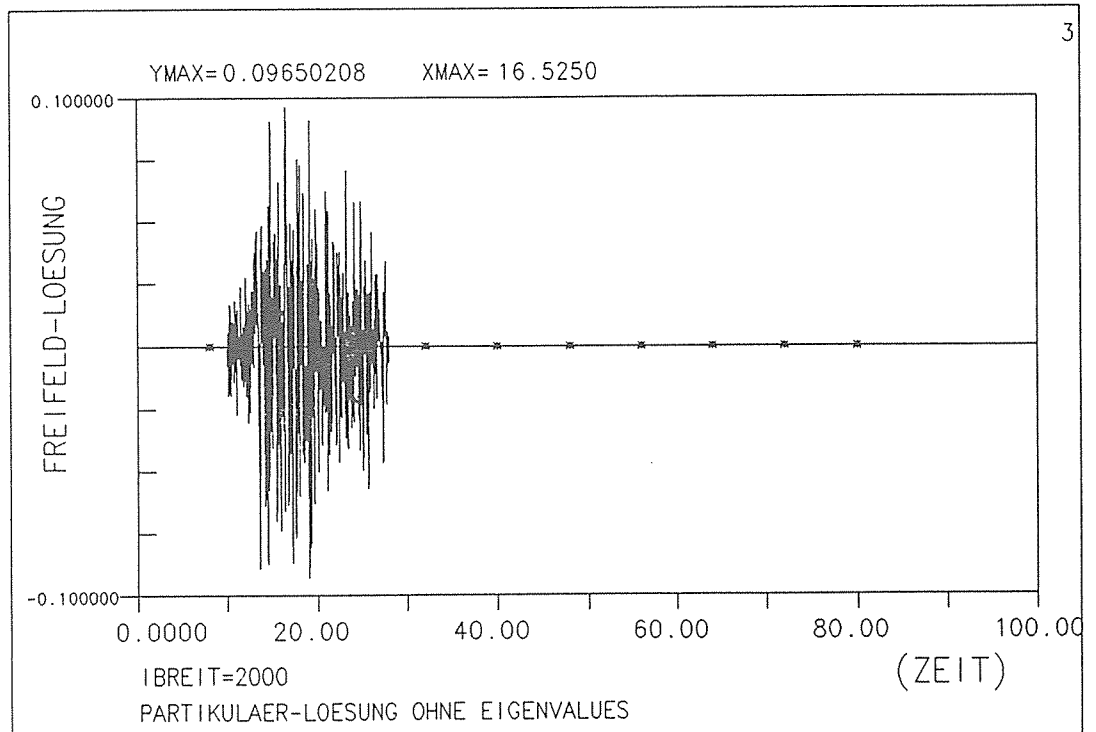
Bild II.18



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.60851E-02 PROZBUC= 0.10082E-01 BEI 1= 78

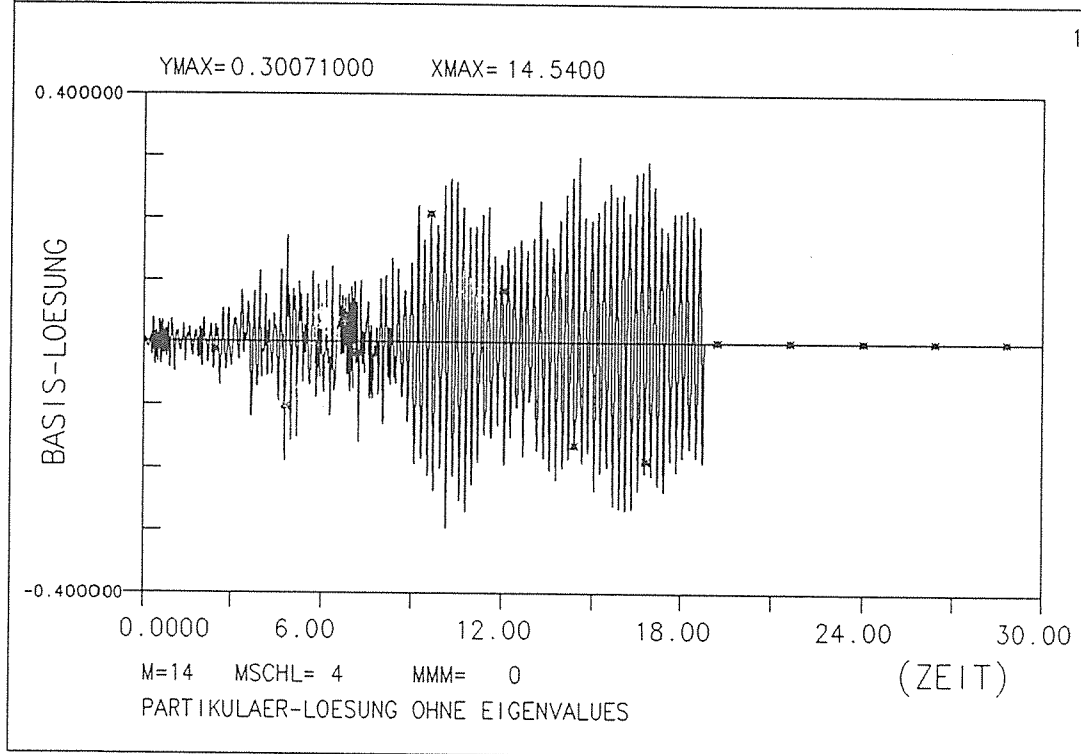
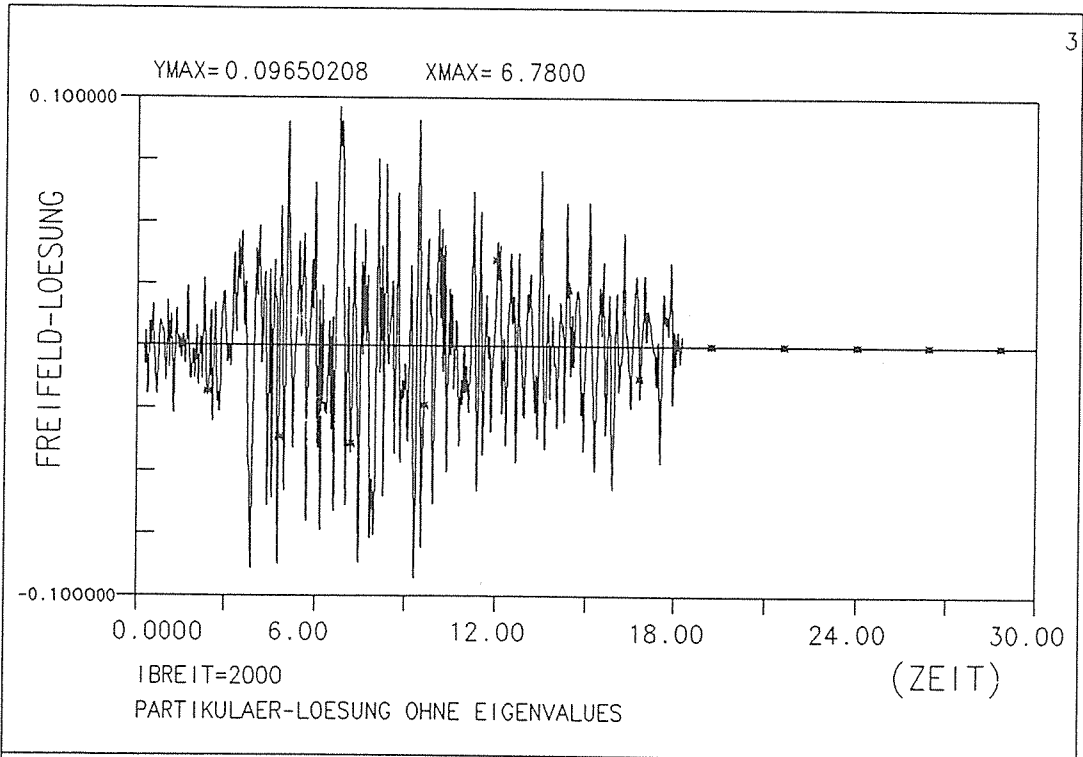
Bild II.19



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.53024E-03 PROZBUC= 0.21876E-03 BEI 1=4078

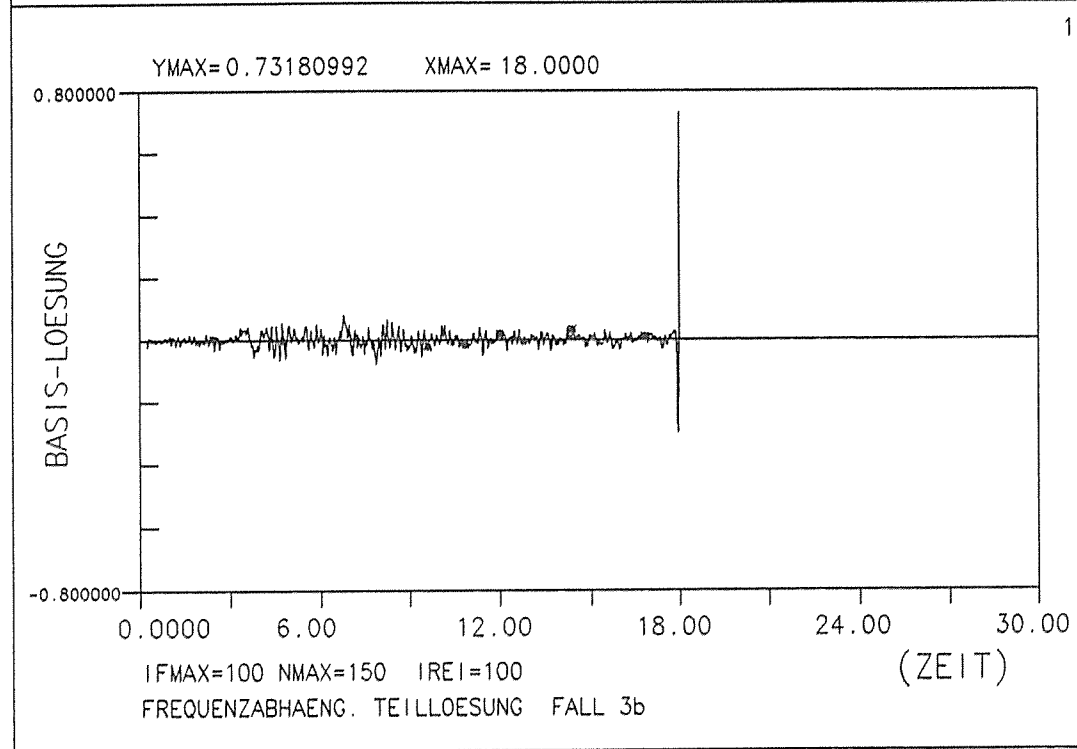
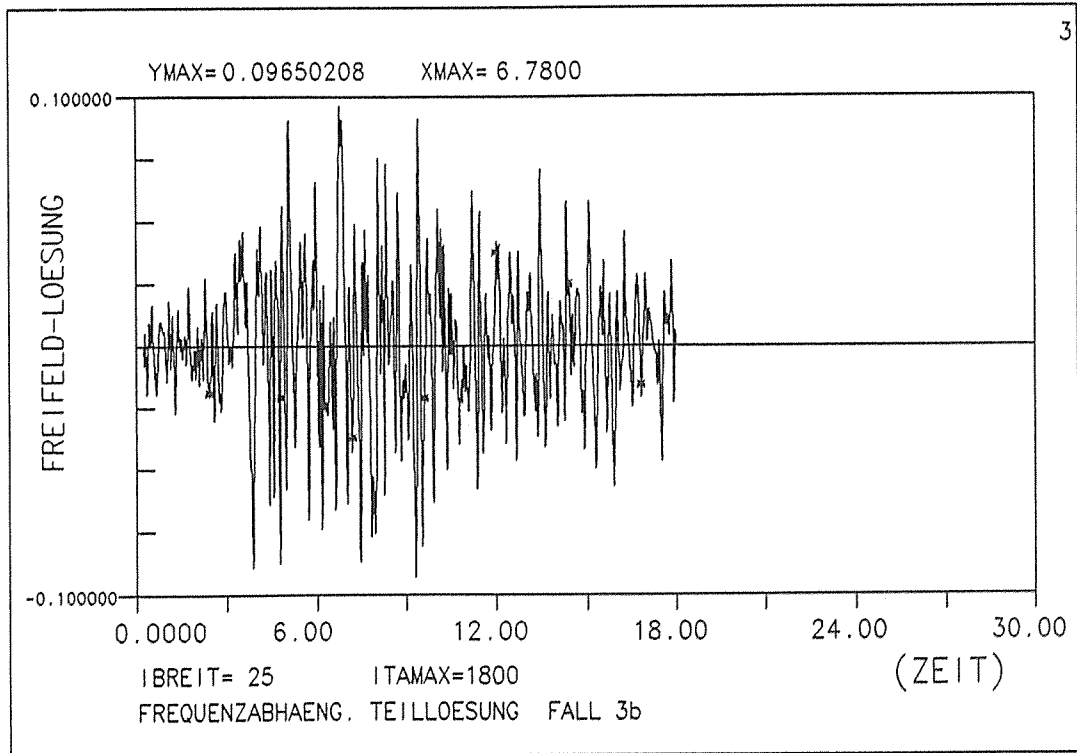
Bild II.20



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.53024E-03 PROZBUC= 0.21876E-03 BEI 1=4078

Bild II.21

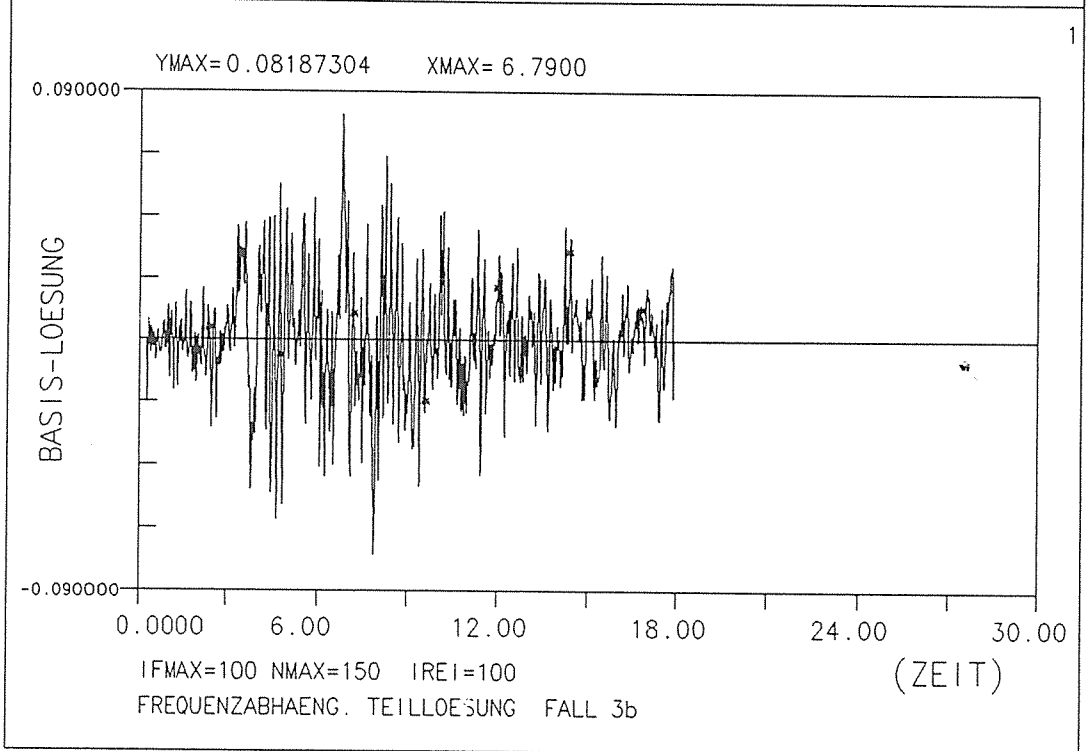
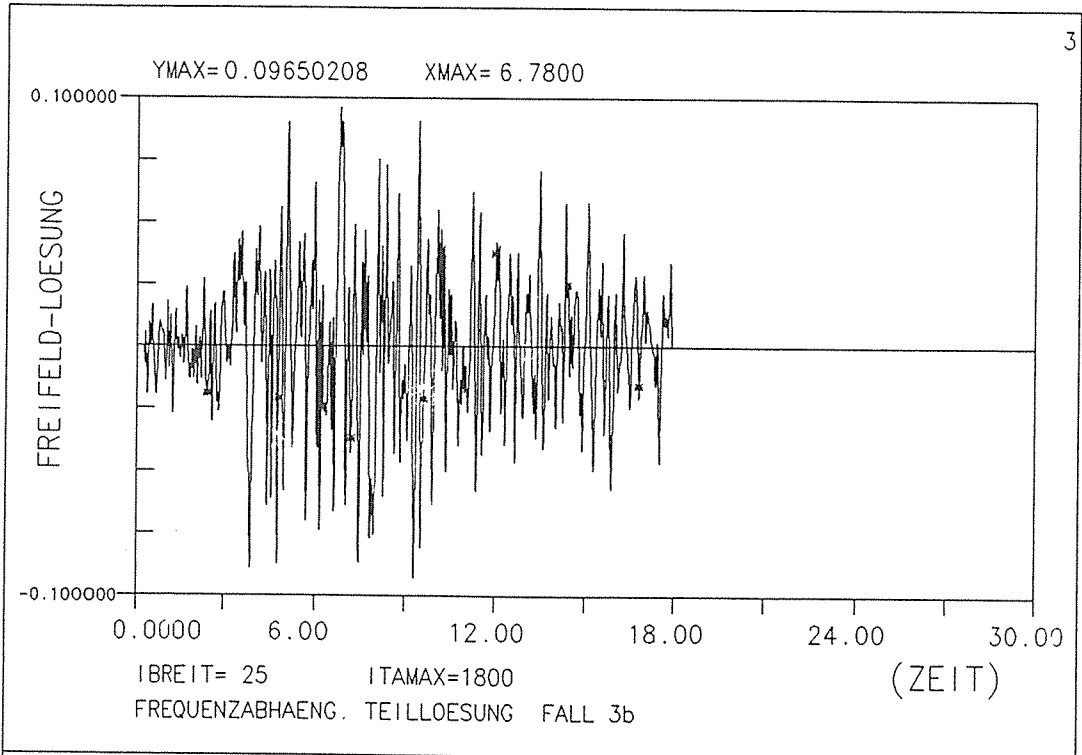


BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 3b

PROZMAG= 0.59243E-02 PROZBUC= 0.23139E-01 BEI 1=1799

Bild II.22

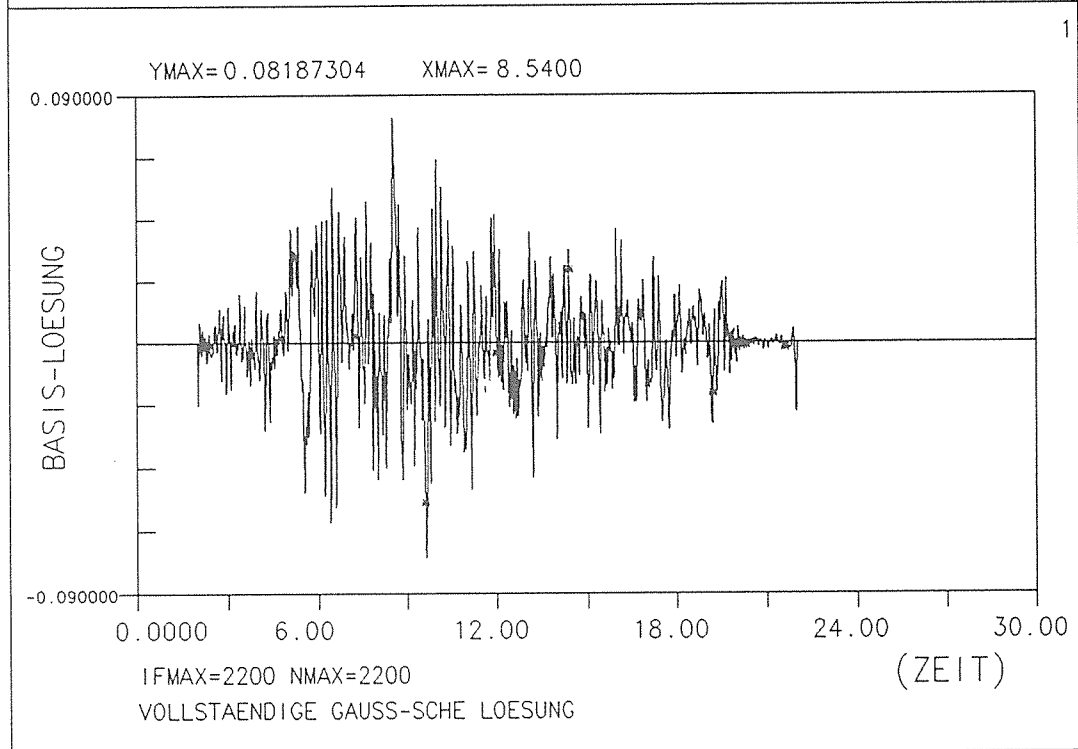
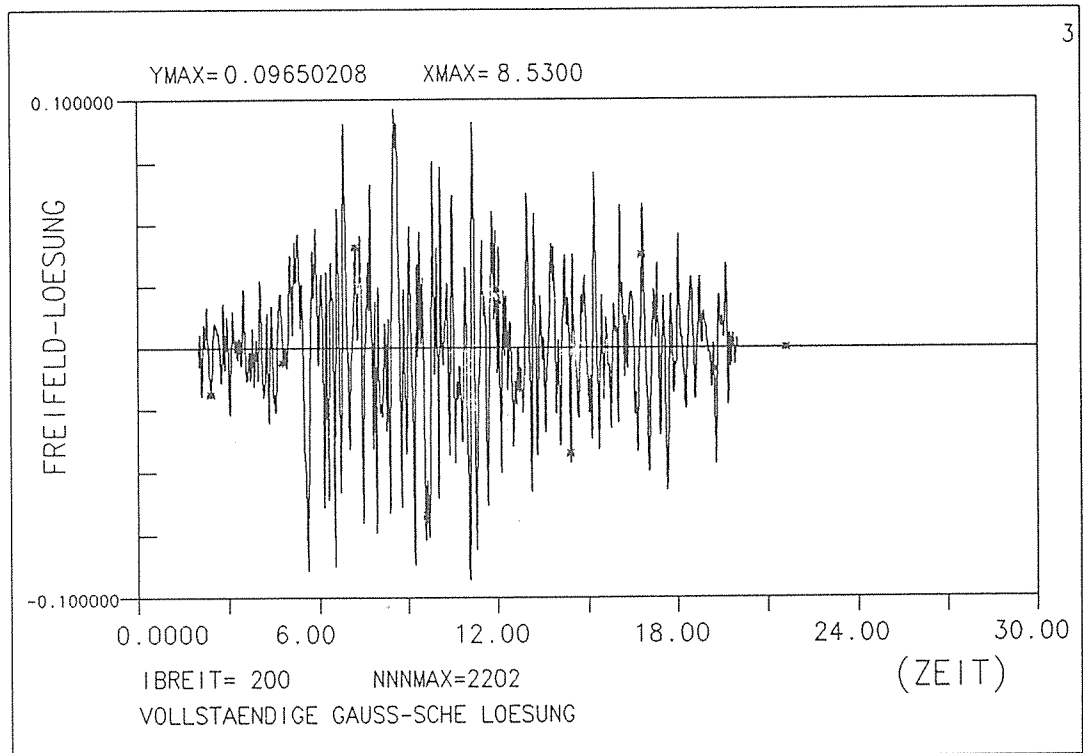




BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 3b

PROZMAC= 0.59243E-02 PROZBUC= 0.23136E-01 BEI 1=1799

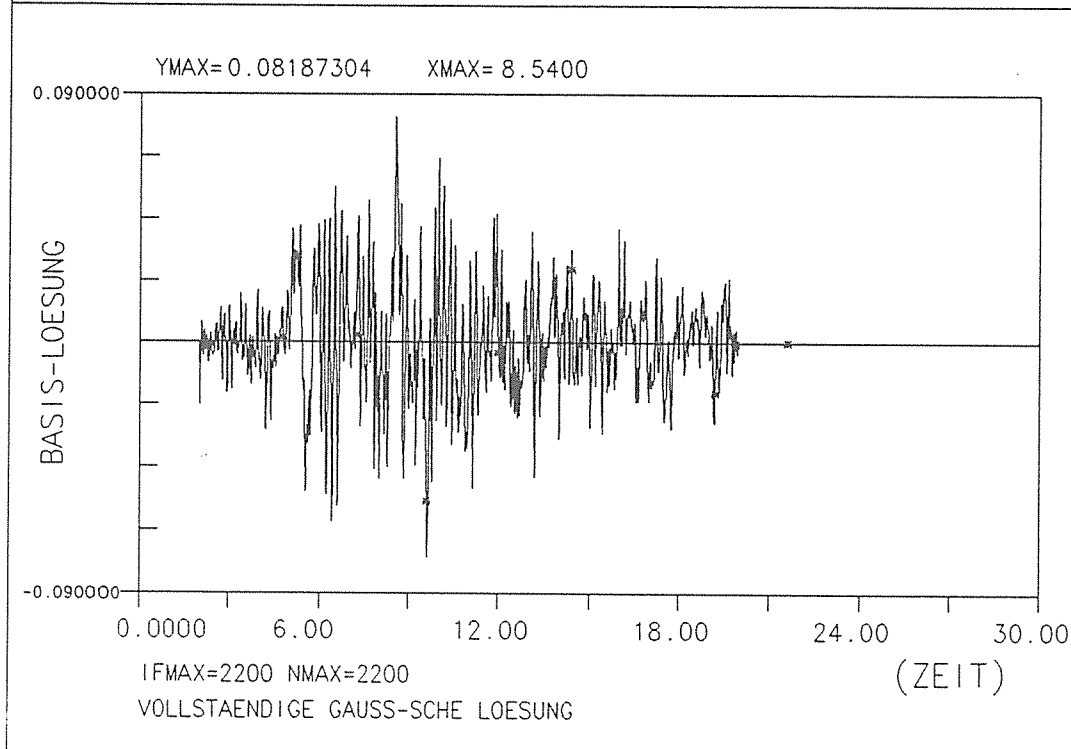
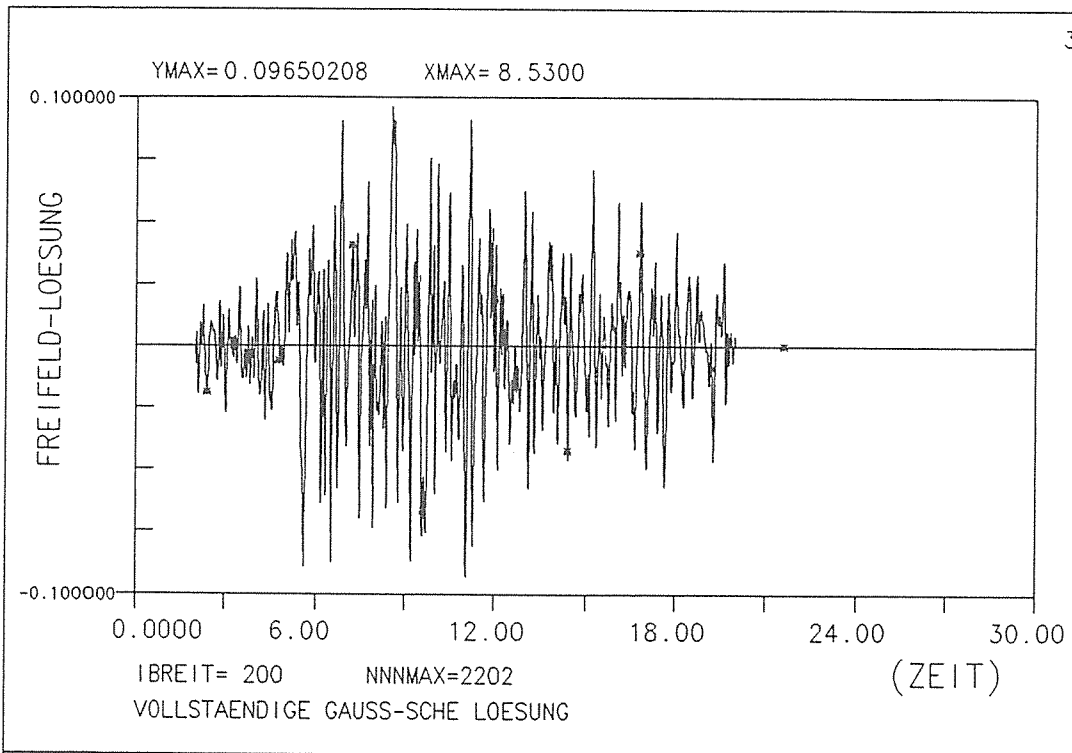
Bild II.23



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAG= 0.86576E-03 PROZBUC= 0.85723E-03 BEI 1-2202

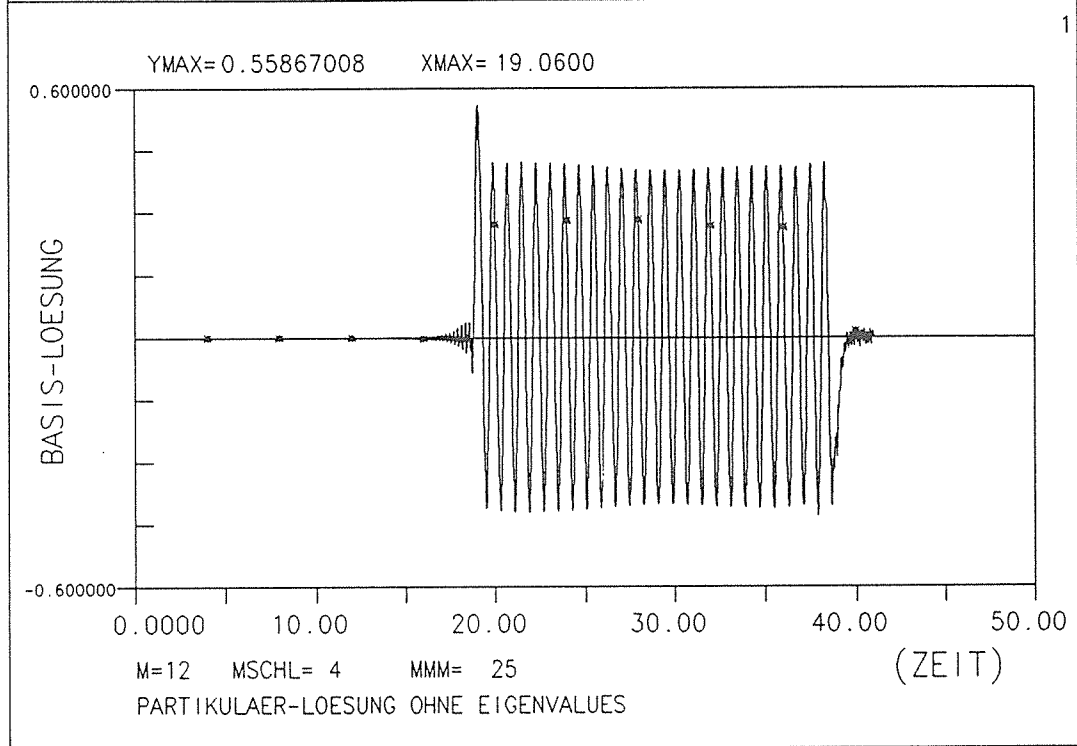
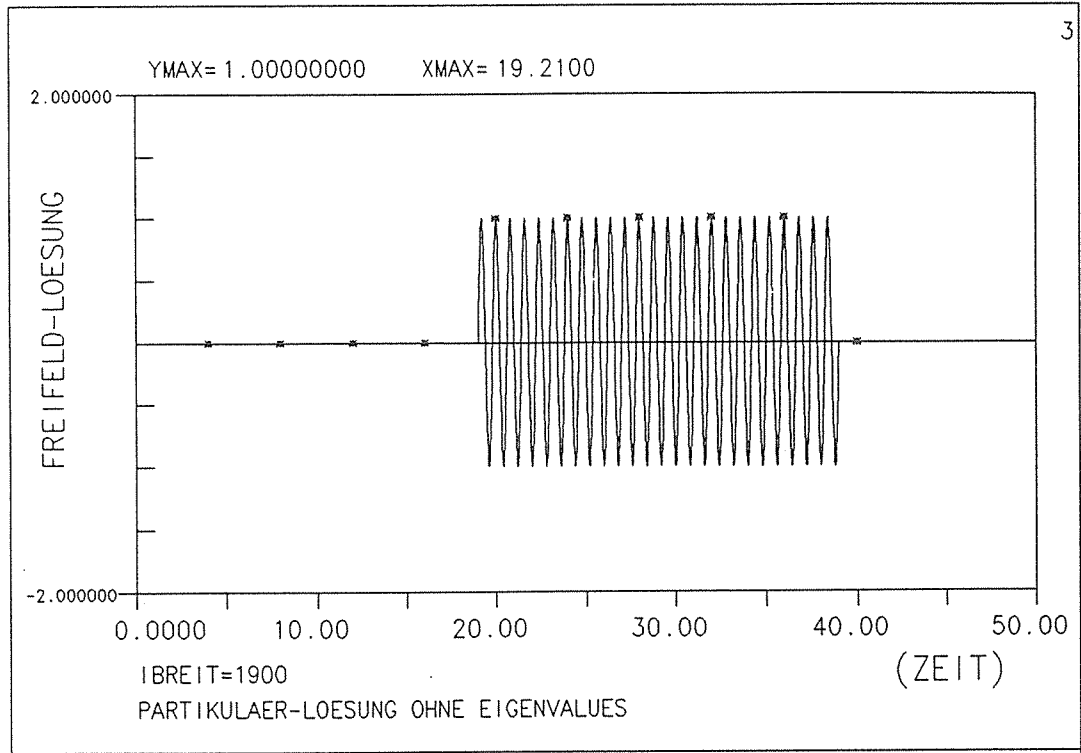
Bild II.24



BEISPIEL : Vollstaendige Gauss-sche Loesung

PROZMAC= 0.86576E-03 PROZBAC= 0.85723E-03 BE1 1-2202

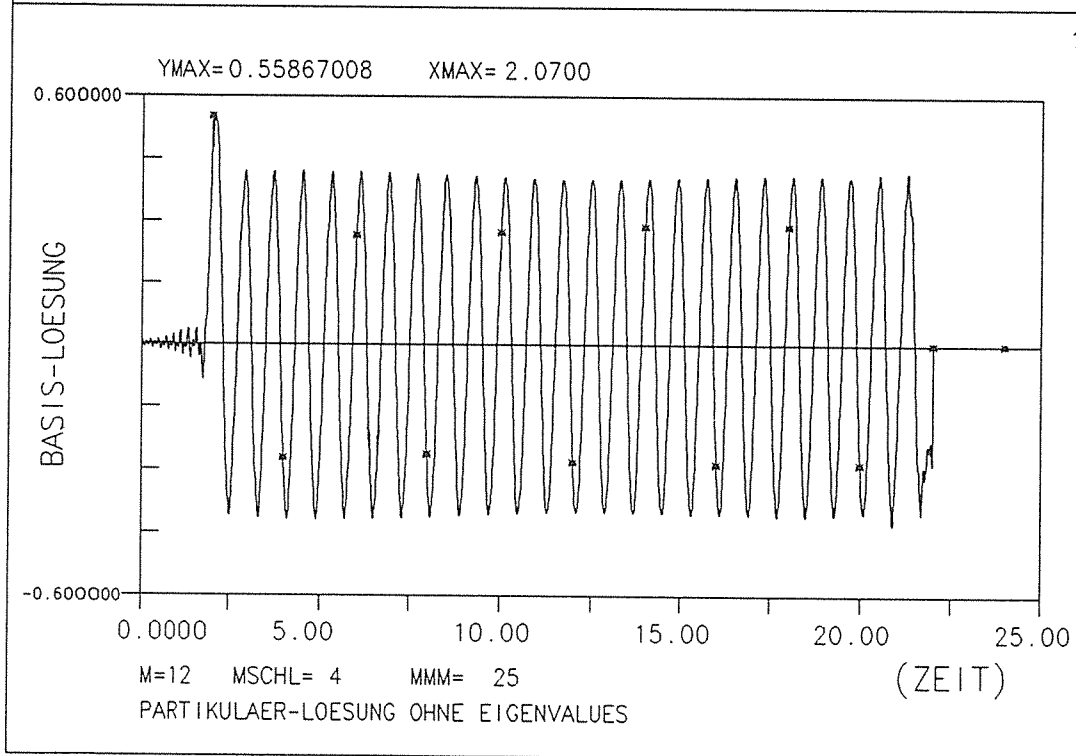
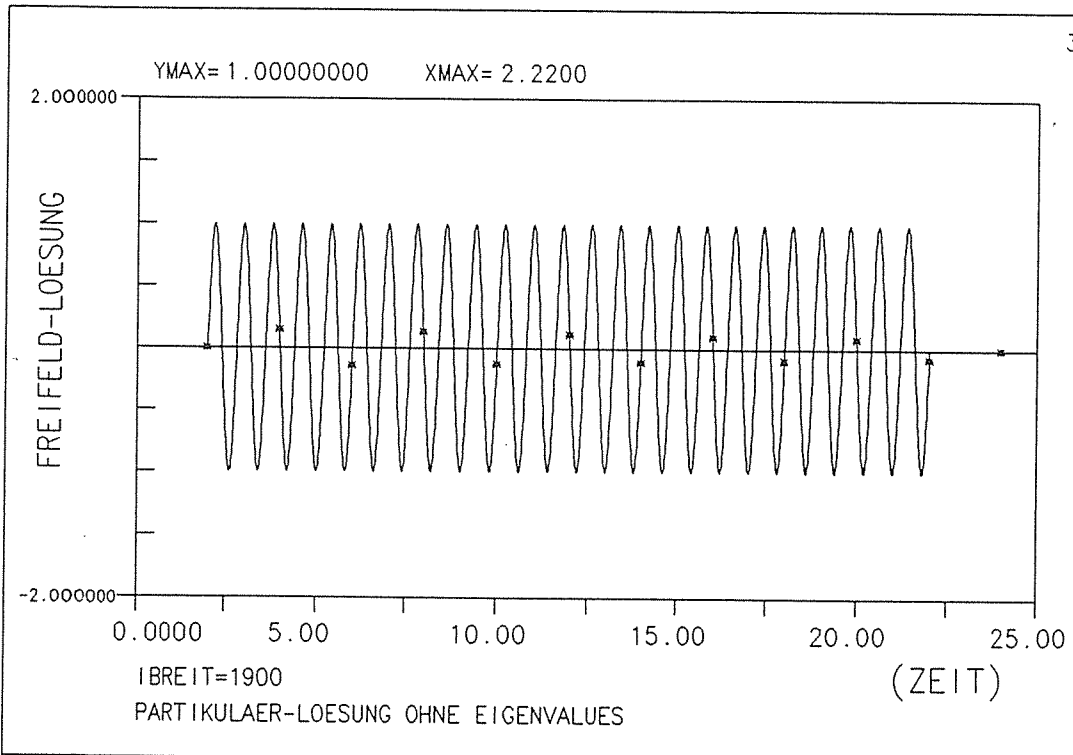
Bild II.25



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZBAG= 0.17828E+00 PROZBUC= 0.19669E+00 BEI 1=2850

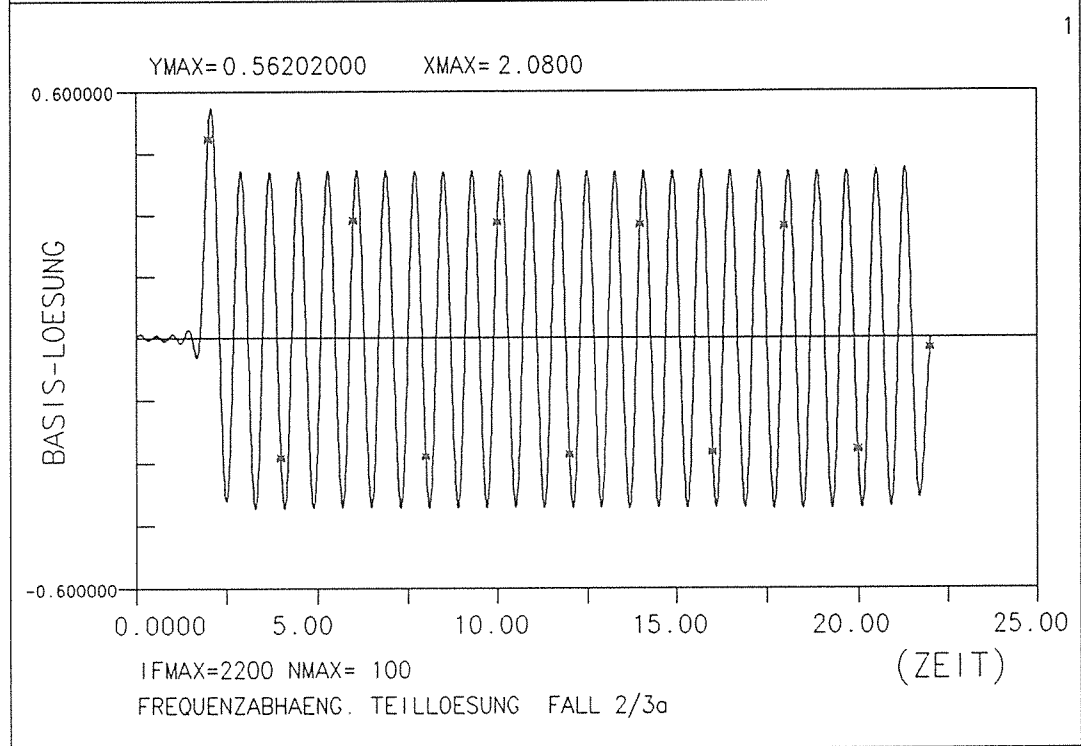
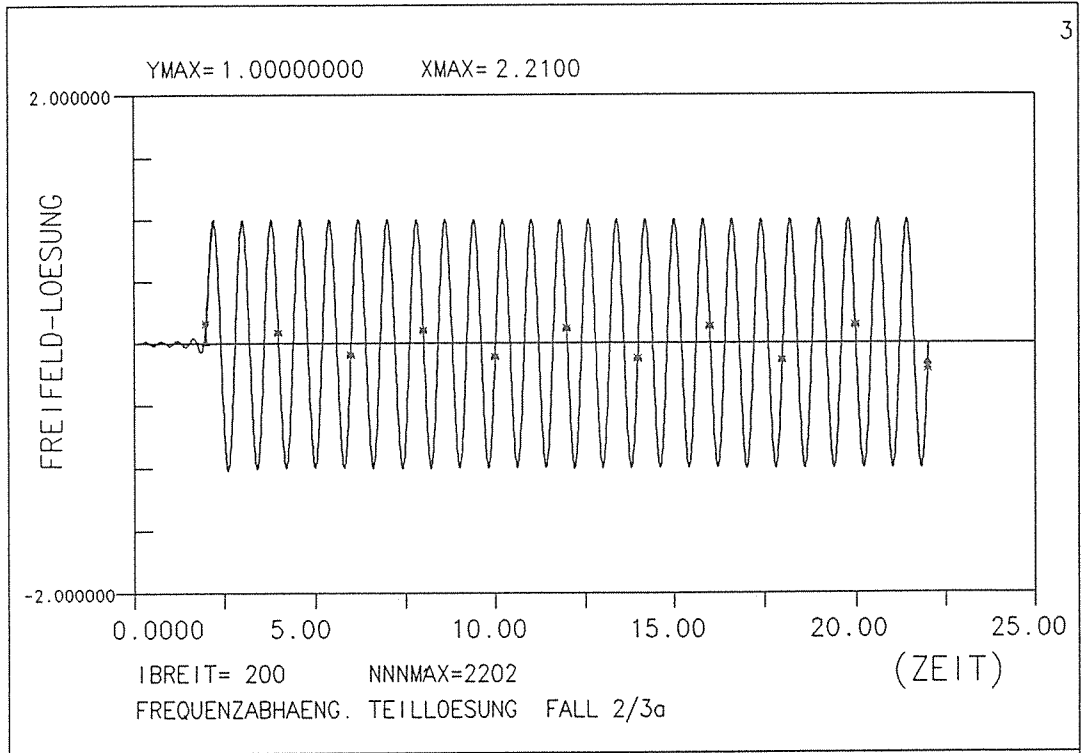
Bild II.26



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZLAG= 0.17828E+00 PROZBUC= 0.19669E+00 BEI 1=2850

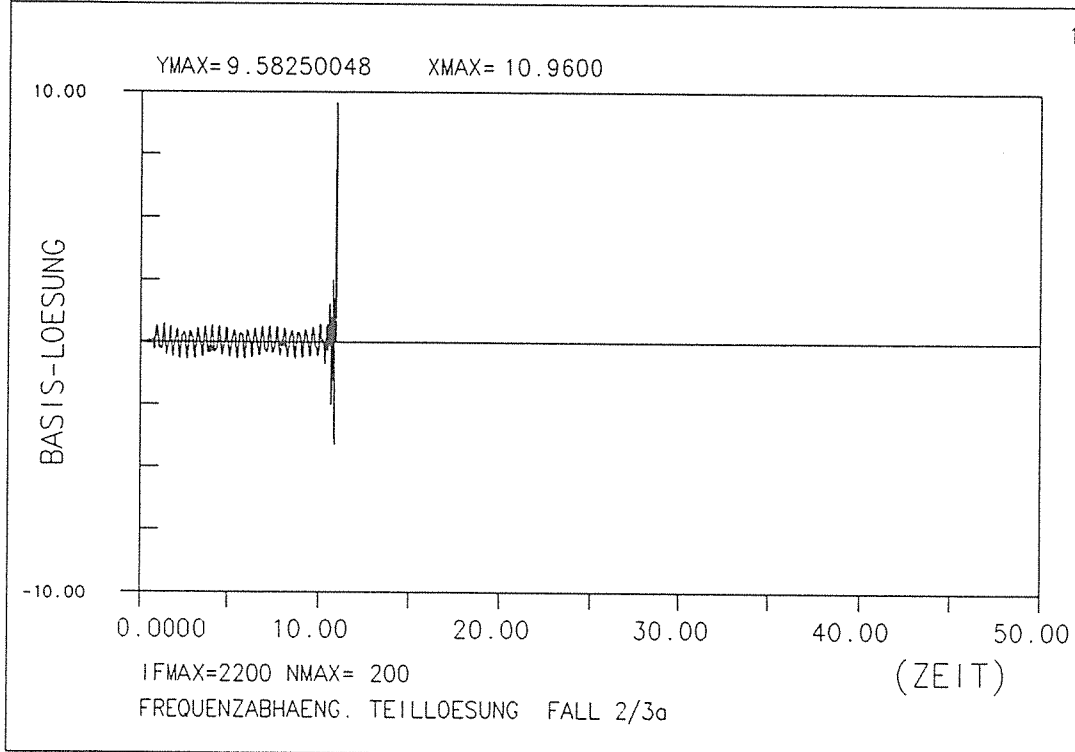
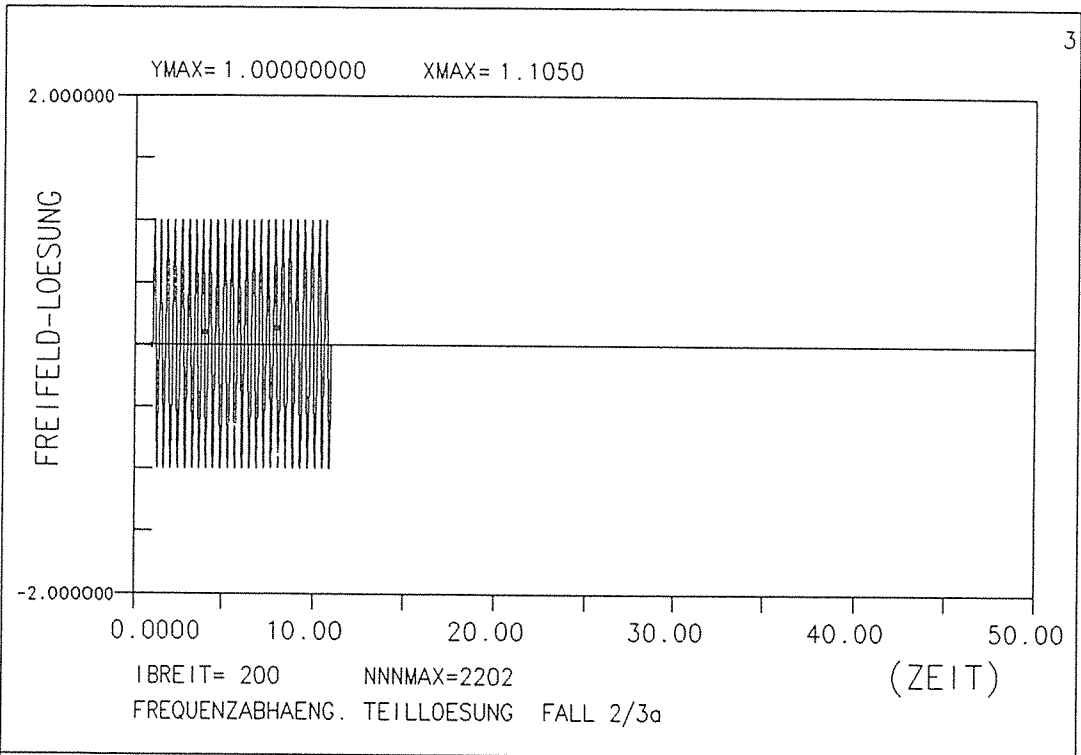
Bild II.27



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAC= 0.23158E+01 PROZBUC= 0.19862E+02 BE1 1- 201

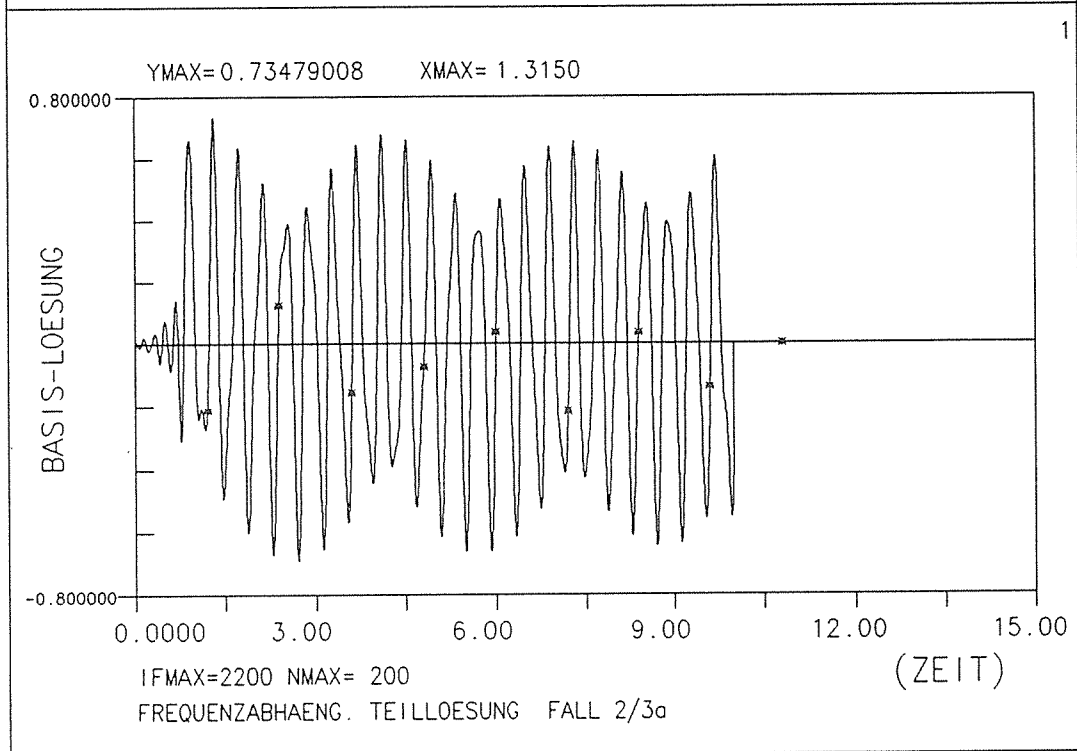
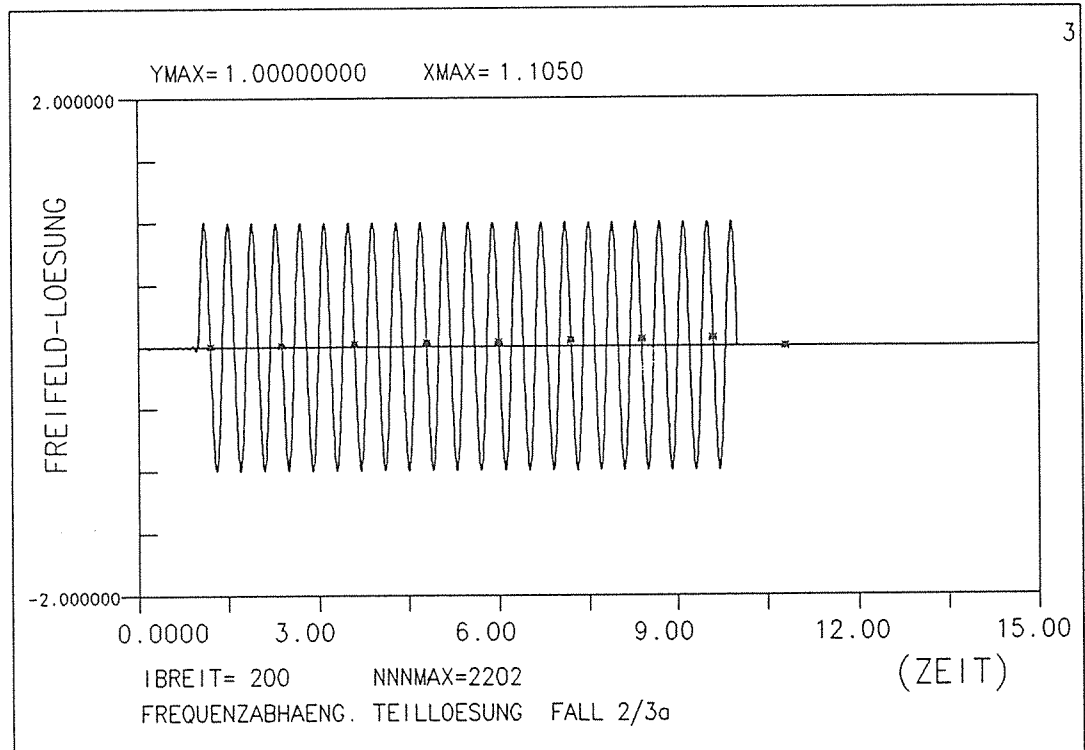
Bild II.28



BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAG= 0.66996E+00 PROZBUC= 0.90557E+01 BEI 1= 201

Bild II.29

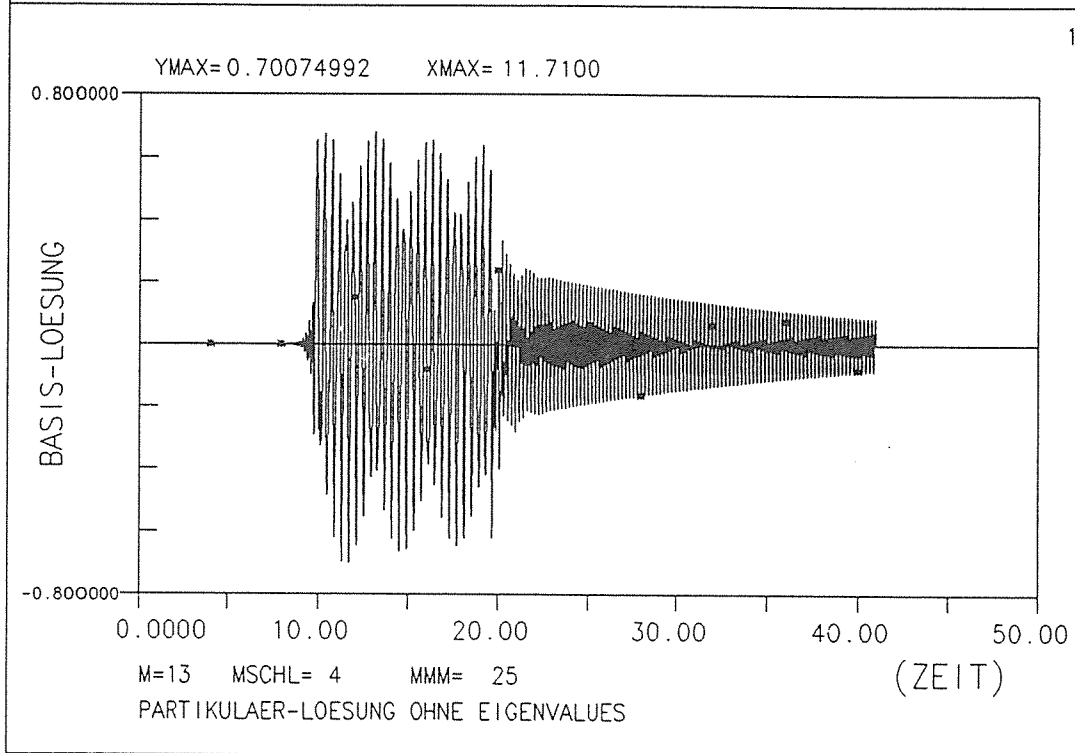
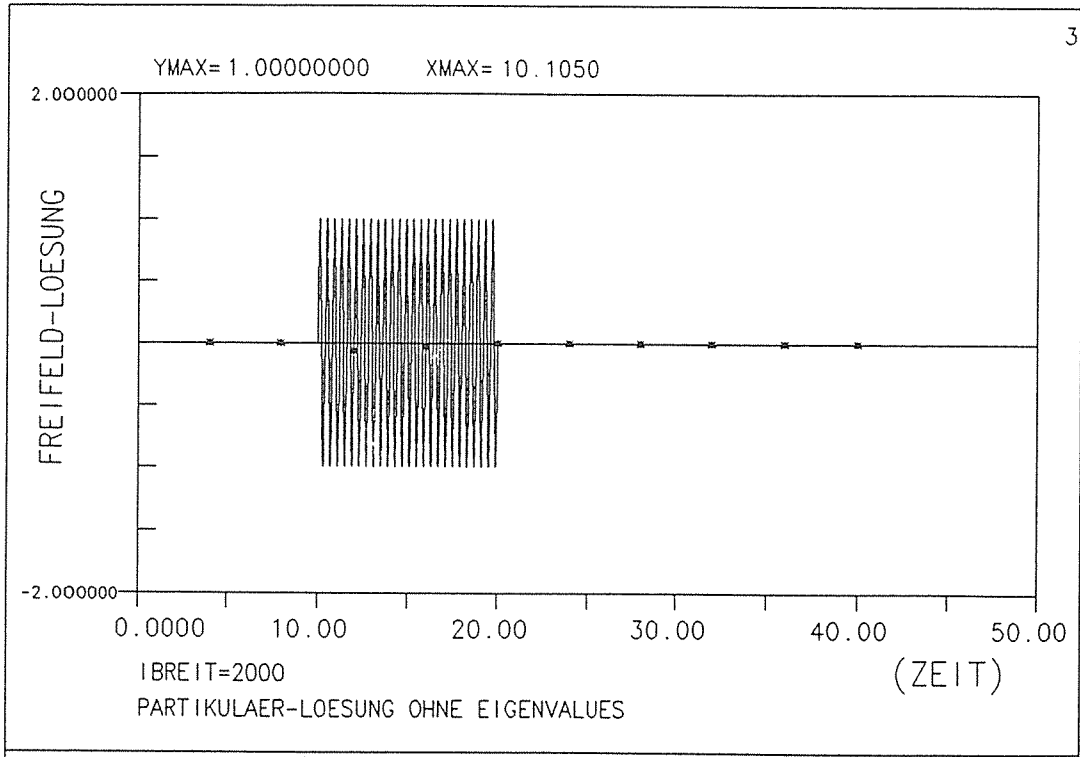


BEISPIEL : Frequenzabhaeng. Teilloesung FALL 2/3a

PROZMAG= 0.66996E+00 PROZBUC= 0.90557E+01 BEI 1- 201

Bild II.30

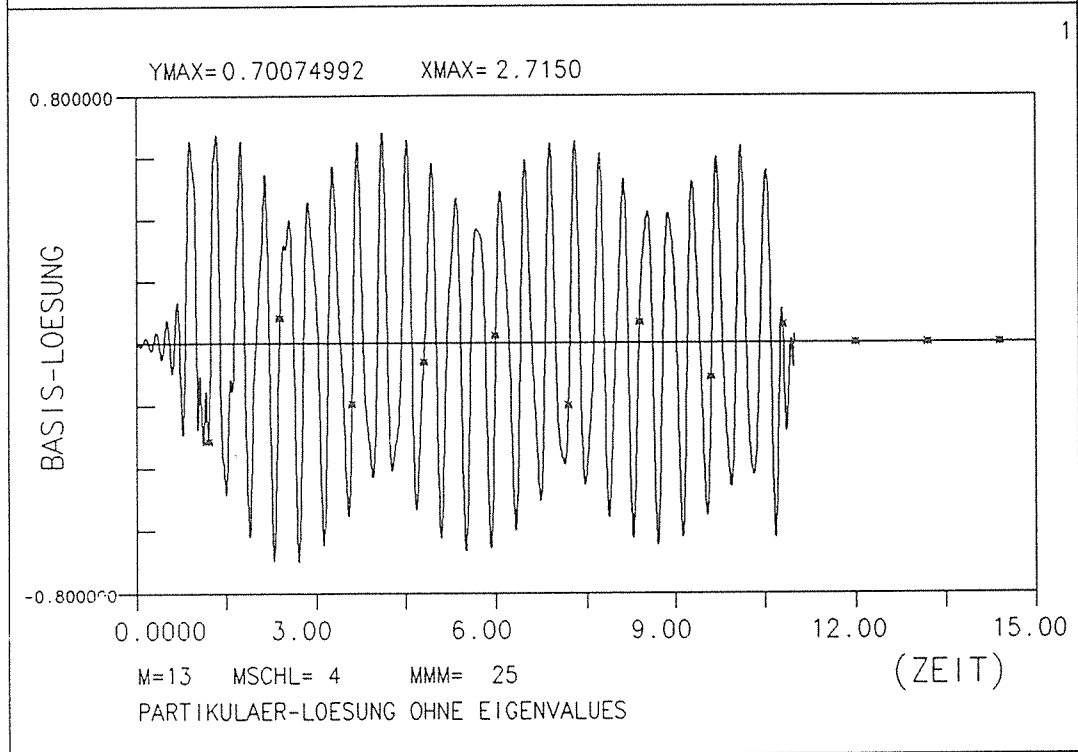
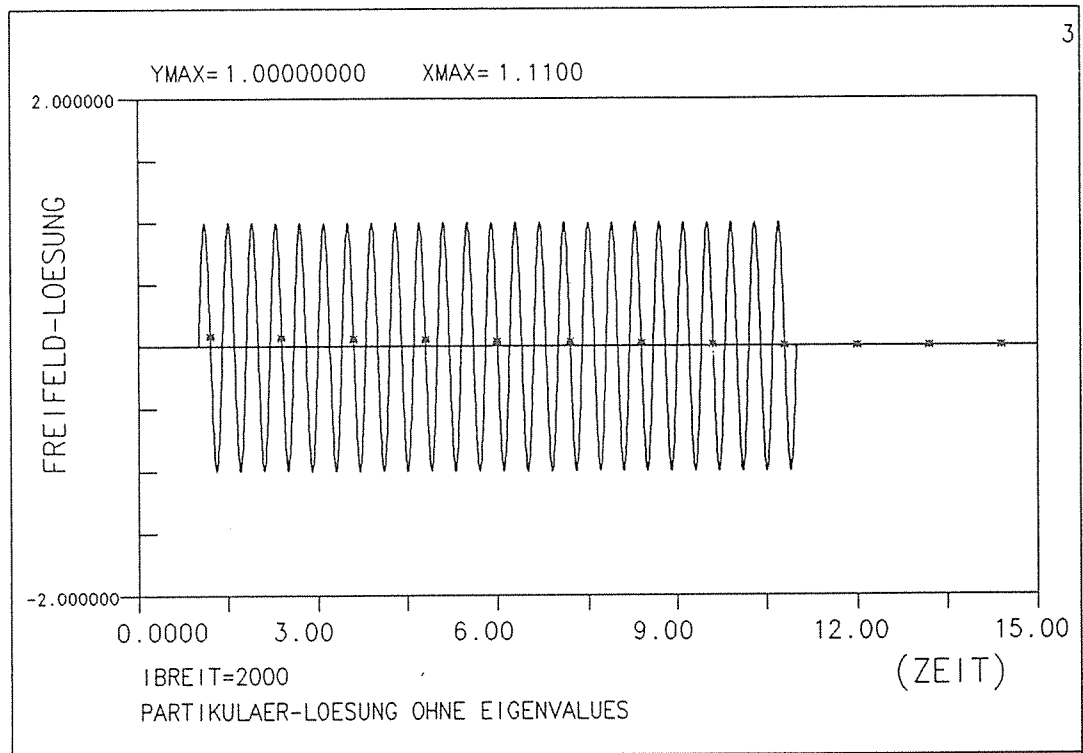




BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.60712E-03 PROZBUC= 0.94894E-03 EE1 I= 67

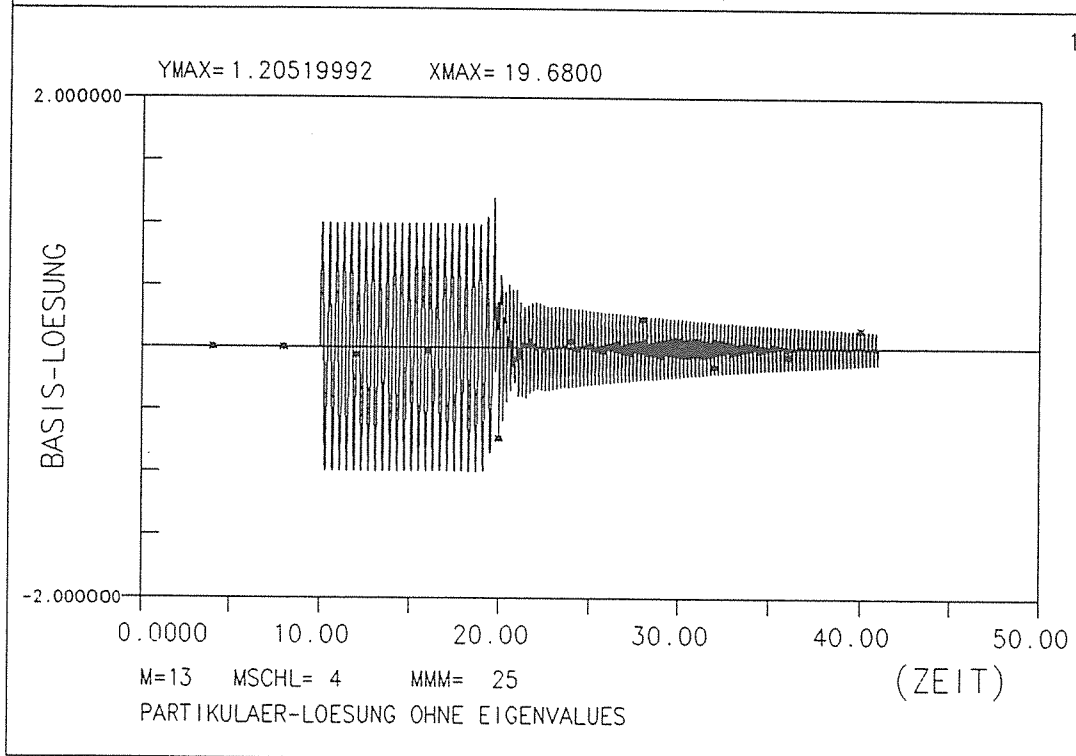
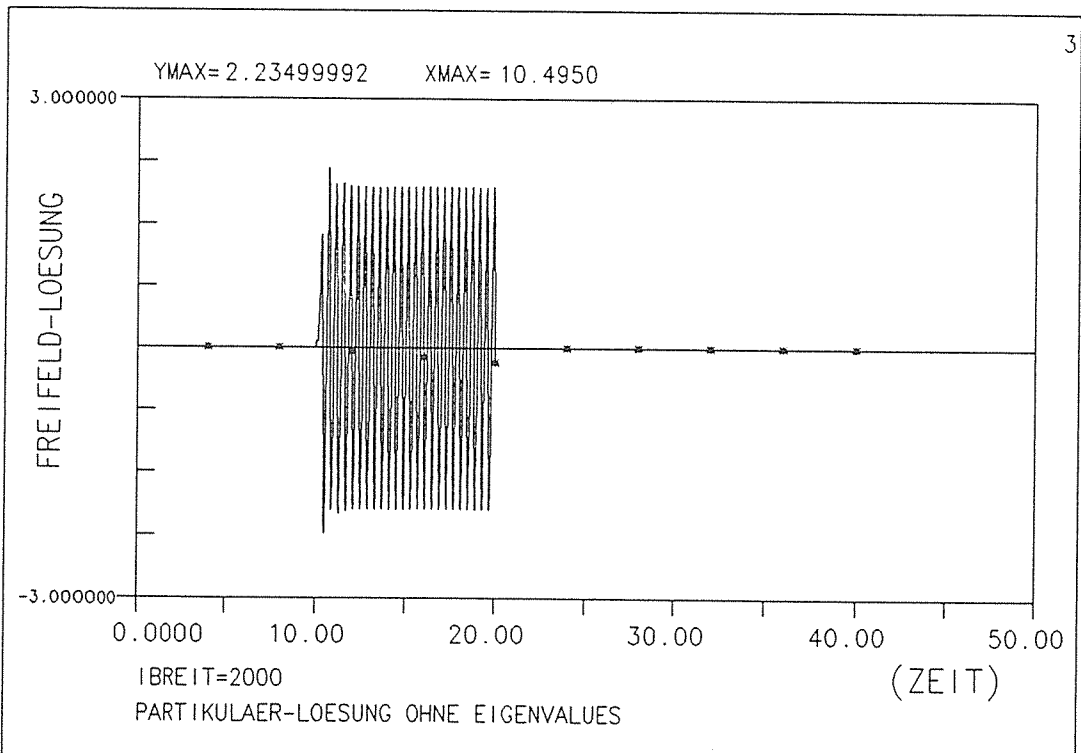
Bild II.31



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAC= 0.60712E-03 PROZBUC= 0.94894E-03 BEI 1= 67

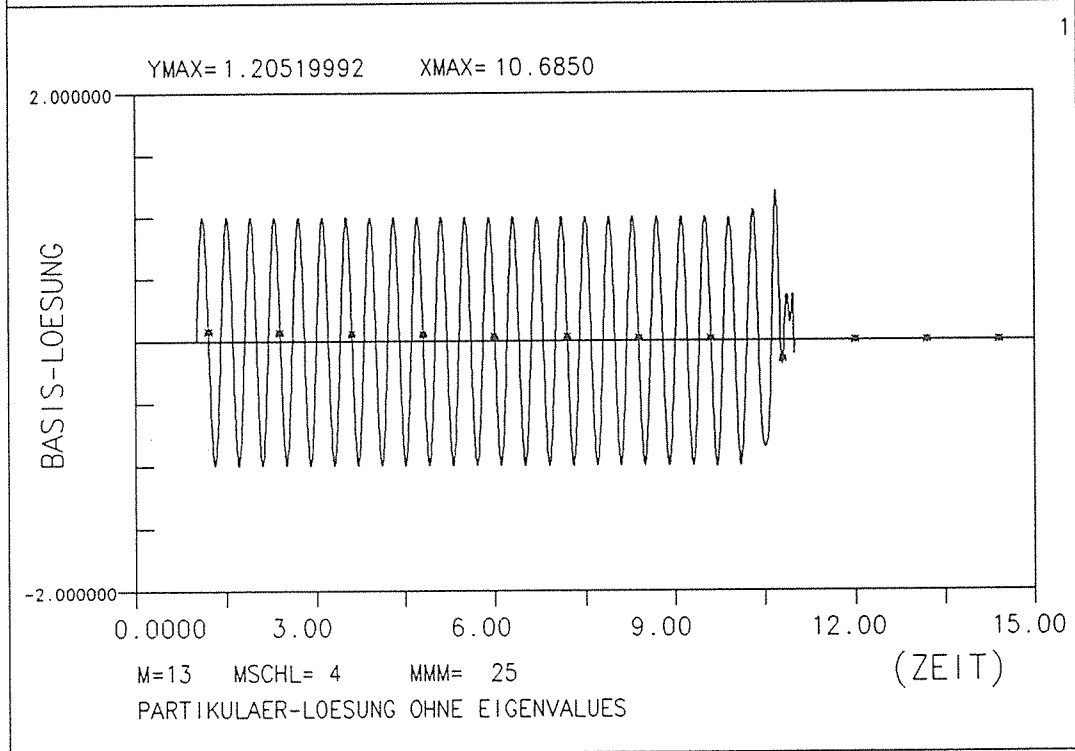
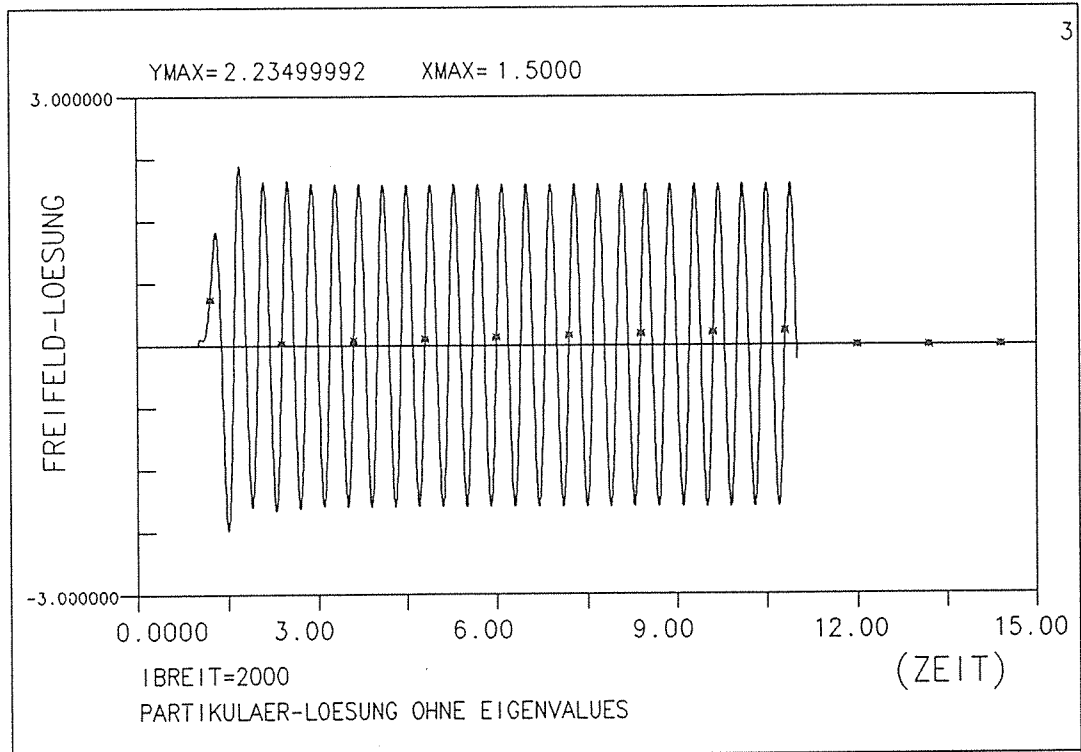
Bild II.32



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.58396E-03 PROZBUC= 0.71690E-03 BEI 1= 70

Bild II.33



BEISPIEL : Partikulaer-Loesung

PROZMAG= 0.58396E-03    PROZBUC= 0.71690E-03    BEI 1= 70

Bild II.34

## isher erschienene orschungsberichte der BAM

- Nr. 1/1968  
orschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für  
aterialprüfung (BAM)  
schenschaftsbericht für den Bundesminister für Bil-  
ng und Wissenschaft
- Nr. 2/1970 (vergriffen)  
. Andrae  
um Problem des Feuchtigkeitsschutzes von De-  
ngsmeßstreifen und Halbleitergebern
- Nr. 3/1970  
Ziebs  
er das mechanische Verhalten von Aluminium-  
ahl-Freileitungseilen als Beispiel für Verbundbau-  
ile
- Nr. 4/1970 (vergriffen)  
Burmester  
rmbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit  
Grundlagen und Vergütungsverfahren
- Nr. 5/1971  
Steiner  
e Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerk-  
tendichte für die Beschreibung der elastischen Ein-  
nschaften und des Abbaus von elastomeren Netz-  
rken
- Nr. 6/1971  
Schneider  
ir Problematik der Prüfung und Beurteilung des  
tschallschutzes von Bauelementen bei unter-  
iedlichen Einbaubedingungen
- Nr. 7/1971  
J. Petrowitz  
romatographie und chemische Konstitution - Un-  
rsuchungen über den Einfluß der Struktur organi-  
her Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünn-  
icht-Chromatographie
- Nr. 8/1971  
Veith  
m Spannungs-Drehungs-Verhalten von Baustäh-  
i bei Wechselbeanspruchung
- Nr. 9/1971  
H. Möller  
tersuchung über die sichernde Wirkung poröser  
ssen in Acetylenflaschen
- Nr. 10/1972  
Aurich, E. Martin  
tersuchungen über die Korngrößenbestimmung  
Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis ge-  
neten zerstörungsfreien Meßmethode
- Nr. 11/1972  
J. Krause  
itrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und  
nützigkeitwerte beim Brennschneiden
- Nr. 12/1972  
Feuerberg  
r Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Textu-  
en
- Nr. 13/1972  
H. Habig, K. Kirschke, W.-W. Maennig, H. Tischer  
tkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Ko-  
t, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in ein-  
n Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen  $760$   
 $12 \cdot 10^{-7}$  Torr
- Nr. 14/1972  
ischer  
ersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der  
schalldämpfung in Metallen bei 20 kHz
- Nr. 15/1972  
ohl  
die und Probleme der chemischen Edelmetall-  
lyse
- Nr. 16/1972  
nublauch  
r Ausführung und Assagefähigkeit des Norm-  
rsversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick  
die Nachbildung natürlicher Schadensfeuer
- Nr. 17/1972  
simers  
vierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Pho-  
n und geladenen Teilchen
- Nr. 18/1973  
truck  
Spröbruchverhalten des Baustahles RSt 37-2 N  
schweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe  
Methode des Temperaturvergleiches
- Nr. 19/1973  
affanke, H. Czichos
- Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei  
tribologischen Vorgängen
- Nr. 20/1973  
R. Rudolphi  
Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen  
in Wänden
- Nr. 21/1973  
D. Klaffke, W. Maennig  
Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitli-  
chen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen  
bei der Zerrütung
- Nr. 22/1973  
R. Rudolphi, E. Knublauch  
Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemess-  
ung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen
- Nr. 23/1973  
W. Ruske  
Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin  
Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversi-  
täre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der  
politischen Instanzen
- Nr. 24/1973  
J. Stanke, E. Klement, R. Rudolphi  
Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druck-  
beanspruchung
- Nr. 25/1973  
E. Knublauch  
Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines  
brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksich-  
tigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen
- Nr. 26/1974  
P. Jost, P. Reimers, P. Weise  
Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM - Ei-  
genschaften und erste Anwendungen
- Nr. 27/1974  
H. Wüstenberg  
Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköp-  
fen für die Materialprüfung mit Ultraschall
- Nr. 28/1974  
H. Heinrich  
Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen  
verbundenen Behältern
- Nr. 29/1974  
P. Schneider  
Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei ein-  
em idealisotropen porösen Material mit starrem  
Skelet für senkrechten, schrägen und allseitigen  
Schallenfall
- Nr. 30/1974 (vergriffen)  
H. Czichos, G. Salomon  
The Application of Systems Thinking and Systems  
Analysis to Tribology
- Nr. 31/1975  
G. Fuhrmann  
Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermo-  
plastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbean-  
spruchung
- Nr. 32/1975  
R. Rudolphi, B. Böttcher  
Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Be-  
rechnung stationärer Temperatur- und Wärmestrom-  
verteilungen mit Anwendungsbeispielen
- Nr. 33/1975  
A. Wagner, G. Kieper, R. Rudolphi  
Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von  
Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßver-  
fahrens
- Nr. 34/1976 (vergriffen)  
H.-J. Deppe  
Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoff-Nr.  
35/1976  
E. Limberger  
Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmat-  
erial leichter Wände verwendet werden, gegenüber  
dem Aufprall harter Körper - Vorschlag für ein Prüf-  
verfahren -
- Nr. 36/1976 (vergriffen)  
J. Hundt  
Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Ein-  
wirkung eines Temperaturgefälles
- Nr. 37/1976  
W. Struck  
Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragen-  
der Bauteile durch einen mit der Schulter gegenpral-  
lenden Menschen  
- Vorschlag für ein Prüfverfahren -
- Nr. 38/1976  
K.-H. Habig  
Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ioni-  
triertem Stahl 42 CrMo 4

- Nr. 39/1976  
K. Kirschke, G. Kempf  
Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften  
von Flüssigkeiten (mit nicht-Newtonschem Fließver-  
halten) insbesondere bei höherer Scherbeanspru-  
chung
- Nr. 40/1976  
H. Hantsche  
Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spek-  
tren nach verschiedenen Verfahren
- Nr. 41/1976  
B. Böttcher  
Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssig-  
keiten
- Nr. 42/1976  
S. Dietlen  
Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase  
in Mischung mit Luft
- Nr. 43/1976  
W. Struck  
Das Spröbruchverhalten geschweißter Bauteile aus  
Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten,  
dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturver-  
gleiches
- Nr. 44/1976  
W. Matthees  
Berechnung von räumlichen, linear elastischen Sys-  
temen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen  
zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Pro-  
gramms „Stab-Werk“
- Nr. 45/1976  
W. Paatsch  
Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum  
aufgedampfter Metallschichten
- Nr. 46/1977 (vergriffen)  
G. Schickert, H. Winkler  
Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung  
von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung  
Results of Test Concerning Strength and Strain of  
Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stres-  
ses
- Nr. 47/1977  
A. Plank  
Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von  
Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
- Nr. 48/1977  
U. Holzlöhner  
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last,  
angewandt auf die Fundamente einer geplanten  
Schnellbahn
- Nr. 49/1977  
G. Wittig  
Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in  
der zerstörungsfreien Prüfung
- Nr. 50/1978 (vergriffen)  
N. Czaika, N. Mayer, C. Amberg, G. Magiera, G.  
Andrae, W. Markowski  
Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und  
-überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehäl-  
tern
- Nr. 51/1978  
J. Sickfeld  
Auswirkung von chemischen und physikalisch-tech-  
nologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeits-  
verhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der  
Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
- Nr. 52/1978  
A. Tomov  
Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribolo-  
gische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei rei-  
ner Festkörperreibung
- Nr. 53/1978  
R.-G. Rohrmann, R. Rudolphi  
Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen-  
und Brückenbeläge
- Nr. 54/1978  
H. Sander  
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei  
mechanischer Wechselbeanspruchung
- Nr. 55/1978  
D. Klaffke  
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der  
Oberflächenkristallite polykristalliner 99,999 %-Al-  
Proben bei Biegewechselbeanspruchung
- Nr. 56/1979  
W. Brünner, C. Langlie  
Stabilität von Sandwichbauteilenn
- Nr. 57/1979  
M. Stadthaus  
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpul-  
verprüfung

- Investigations on Inspection-Media for Magnetic Particle-Testing
- Nr. 58/1979  
W. Struck  
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
- Nr. 59/1979  
G. Plauk  
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
- Nr. 60/1979  
H. Spreckelmeyer, R. Helms, J. Ziebs  
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
- Nr. 61/1979  
K. Richter  
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmetrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
- Nr. 62/1979  
W. Gerisch, G. Becker  
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
- Nr. 63/1979  
E. Behrend, J. Ludwig  
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
- Nr. 64/1980  
W. Rücker  
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
- Nr. 65/1980  
P. Schmidt, D. Aurich, R. Helms, H. Veith, J. Ziebs  
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
- Nr. 66/1980  
M. Hattwig  
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
- Nr. 67/1980  
W. Matthees  
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
- Nr. 68/1980  
D. Petersohn  
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik.  
Entwicklung eines volleuzentrischen Präzisionsgoniometers
- Nr. 69/1980  
F. Buchhardt, P. Brandl  
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitschillen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
- Nr. 70/1980 (vergriffen)  
G. Schickert  
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
- Nr. 71/1980  
W. Matthees, G. Magiera  
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
- Nr. 72/1980  
R. Rudolphi  
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
- Nr. 73/1980  
P. Wegener  
Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
- Nr. 74/1980  
R. Rudolphi, R. Müller  
ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
- Nr. 75/1980  
H.-J. Heinrich  
Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
- Nr. 76/1980  
D. Klaffke, W.-W. Maennig  
Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegebeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
- Nr. 77/1981  
M. Gierloff, M. Maulzsch  
Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
- Nr. 78/1981  
W. Rücker  
Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund
- Nr. 79/1981  
V. Neumann  
Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflussten Kaltfrißeigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
- Nr. 80/1981  
A. Plank, W. Struck, M. Tzschätzsch  
Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
- Nr. 81/1981  
J. Schmidt  
Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
- Nr. 82/1982  
R. Helms, H.-J. Kühn, S. Ledworuski  
Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches  
Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test
- Nr. 83/1982  
H. Czichos, P. Feinle  
Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen  
- Kontakte deformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen -
- Nr. 84/1982  
R. Müller, R. Rudolphi  
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/1982  
H. Czichos  
Technische Materialforschung und -prüfung  
- Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm „Basic Technological Research“ -  
Materials Research and Testing  
- Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme “Basic Technological Research” -
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/1982  
K. Niesel, P. Schimelwitz  
Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/1982  
B. Isecke, W. Stichel  
Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/1983  
A. Erhard  
Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/1983  
D. Conrad, S. Dietlen  
Untersuchungen zur Zertfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/1983  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/1983  
M. Weber  
Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/1983  
L. Auersch  
Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden
- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/1983  
P. Studt  
Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/1983  
Xian-Quan Dong  
Untersuchungen der Störschwingungen beim Keuschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/1983  
M. Römer  
Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatte
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/1983  
H. Eifler  
Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem tonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/1983  
G. Fuhrmann, W. Schwarz  
Typische Bruchflächenausbildung thermoplastischer Kunststoffstoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/1983  
E. Schnabel  
Bestimmung des elastischen Verhaltens von I-schleifen  
- Stretch- und Erholungsvermögen -
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/1983  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
Kinetische Grenztragfähigkeit von Stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/1984  
G. Klamrowski, P. Neustupny  
Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Froststand
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/1984  
P. Reimers, J. Goebbels, H. Heidt, P. Weise, K. Wildi  
Röntgen- und Gammastrahlen Computer-Tomographie
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/1984  
G. Magiera  
Weiterentwicklung des hydraulischen Kompressionsverfahrens zur Druckspannungsmessung Beton
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/1984  
D. Schnitger  
Radiographie mit Elektronen aus Metallverstärkungen
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/1984  
M. Gierloff  
Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/1984  
B. Schulz-Förberg  
Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/1984  
J. Lehnert  
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Lasten
- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/1984  
W. Stichel, J. Ehreke  
Korrosion von Stahlradiatoren
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/1984  
L. Auersch  
Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen - Ergebnisse von Modellrechnung
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/1985  
M. Omar  
Zur Wirkung der Schrumpfbegrenzung auf die Schweißspannungszustand und das Sprüchverhalten von unterpulvergeschweißten I-schleifen aus St E 460 N
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/1985  
H. Walde, B. Kropp  
Wasserstoff als Energieträger
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/1985  
K. Ziegler  
Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Zersetzung von Anhydrid-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/1985  
W. Lützw  
Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/1985  
R. Helms, H. Henke, G. Oelrich, T. Saito  
Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf Schwingungskorrosion von Offshore-Konstruktionen

- r. 114/ISBN 3-88314-419-3/1985  
Rose, P. Raabe, W. Daum, A. Szameit  
**neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen**
- r. 115/ISBN 3-88314-420-7/1985  
Richter  
**Arbeitsempfindungsmerkmal Elementaruntun und untheitsabstände als Funktion von Farbart und euchtichte von In- und Umfeld**
- r. 116/ISBN 3-88314-460-6/1985  
-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi, A. Wagner  
**heoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik**
- r. 117/ISBN 3-88314-468-1/1985  
Czichos, G. Sievers  
**Materials Technologies and Techno-Economic Development  
Study for the German Foundation for International development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)**
- r. 118/ISBN 3-88314-469-X/1985  
Treumann, H. Andre, E. Blossfeld, N. Pfeil, M.-M. nleder  
**Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung. Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen**
- r. 119/ISBN 3-88314-472-X/1985  
Herter, K. Brandes, E. Limberger  
**kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil I  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part I**
- r. 120/ISBN 3-88314-514-9/1986  
Hecht  
**Störungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückreuung**
- r. 121/ISBN 3-88314-530-0/1986  
Feinle, K.-H. Habig  
**Prüfkriterien von Stahlgleitpaarungen unter schiebungsbedingungen: Einflüsse von Stahlzusammensetzung und Wärmebehandlung**
- r. 122/ISBN 3-88314-521-1/1986  
Mischke  
**Inspektion kerntechnischer Anlagen.**
- r. 123/ISBN 3-88314-531-9/1986  
Rennoch  
**Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organischemischer Baustoffe entstehenden Brandgase**
- r. 124/ISBN 3-88314-538-6/1986  
M. Thomas  
**Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung**
- r. 125/ISBN 3-88314-540-8/1986 (vergriffen)  
Droste, U. Probst  
**Versuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzgliederung von Flüssiggas-Lagertanks**
- r. 126/ISBN 3-88314-547-5/1986  
Stichel  
**Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmhallen**
- r. 127/ISBN 3-88314-564-5/1986 (vergriffen)  
Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner  
**kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil I  
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part I**
- r. 128/ISBN 3-88314-568-8/1986 (vergriffen)  
Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner  
**kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil II  
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part II**
- r. 129/ISBN 3-88314-569-6/1980 (vergriffen)  
Brandes, E. Limberger, J. Herter, K. Berner  
**kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load**
- Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit  
**Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates**  
Nr. 130/ISBN 3-88314-570-X/1986  
W. Struck  
**Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material bei Belastung durch eine Einzelkraft**
- Nr. 131/ISBN 3-88314-585-8/1986  
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load  
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil II  
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part II**
- Nr. 132/ISBN 3-88314-595-5/1987  
Chr. Herold, F.-U. Vogdt  
**Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen**
- Nr. 133/ISBN 3-88314-609-9/1987 (vergriffen)  
M. Woydt, K.-H. Habig  
**Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe**
- Nr. 134/ISBN 3-88314-615-3/1987  
G. Andrae, G. Niessen  
**Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen**
- Nr. 135/ISBN 3-88314-618-8/1987  
J. Ludwig, W.-D. Mischke, A. Ulrich  
**Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen**
- Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/1987  
H.-J. Deppe, K. Schmidt  
**Untersuchung zur Beurteilung von Brettschichtverleimungen für den Holzbau**
- Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/1987  
D. Aurich  
**Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiete der Komponentensicherheit**
- Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/1987  
M. Dogunke, F. Buchhardt  
**Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben.**
- Nr. 139/ISBN 3-88314-658-7/1987  
J. Olschewski, S.-P. Scholz  
**Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle**
- Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/1987  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members**
- Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/1987  
F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera, F. Mathiak  
**Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdbebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken**
- Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/1987  
H. Treumann, G. Krüger, N. Pfeil, S. von Zahn-Ullmann  
**Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefahrezahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen**
- Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/1987  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung  
Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load**
- Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/1987  
F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber, J. Altes  
**Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktorgebäudes**
- Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/1987  
U. Holzöhner  
**Untersuchung selbstähnlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden**
- Nr. 146/ISBN 3-88314-714-1/1987  
W. Schön, M. Mallon  
**Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks**
- Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/1987  
H.-D. Kleinschrodt  
**Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen**
- Nr. 148/ISBN 3-88314-774-5/1988  
W. Müller  
**Theoretische Untersuchung von Variationsprinzipien für elastoplastisches Materialverhalten sowie Entwicklung und numerische Erprobung von Finite-Element-Verfahren für den ebenen Spannungszustand**
- Nr. 149/ISBN 3-88314-775-3/1988  
U. Holzöhner  
**Bestimmung baugruddynamischer Kenngrößen aus der Untersuchung von Bodenproben**
- Nr. 150/ISBN 3-88314-776-1/1988  
M. Weber  
**VG3D Zeichenprogramm für Vektorgraphische Darstellung dreidimensionaler Strukturen**
- Nr. 151/ISBN 3-88314-785-0/1988  
L. Auersch-Saworski  
**Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch Bodenschütterungen**
- Nr. 152/ISBN 3-88314-796-6/1988  
G. Plauk, G. Kretschmann, R.-G. Rohrmann  
**Untersuchung des baulichen Zustandes und der Tragfähigkeit vorgespannter Riegel von Verkehrszeichenbrücken der Berliner Stadtautobahn**
- Nr. 153/ISBN 3-88314-797-4/1988  
H. Sander, W.-W. Maennig  
**Magnetisches Verhalten von Eisenproben bei mechanischer Wechselbeanspruchung**
- Nr. 154/ISBN 3-88314-822-9/1988  
K. Breikreutz, R. Uttech, K. Haedecke  
**Druckgesinterte Stähle als zertifiziertes Referenzmaterial für die Spektrometrie**
- Nr. 155/ISBN 3-88314-825-3/1988  
L. Auersch  
**Zur Entstehung und Ausbreitung von Schienenverkehrserschütterungen: Theoretische Untersuchungen und Messung am Hochgeschwindigkeitstzug Intercity Experimental**
- Nr. 156/ISBN 3-88314-887-3/1989  
G. Klamrowski, P. Neustupny, H.-J. Deppe, K. Schmidt, J. Hundt  
**Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von Faserzementen**
- Nr. 157/ISBN 3-88314-888-1/1989  
E. Limberger, K. Brandes  
**Versuche zum Verhalten von Stahlbetonbalken mit Übergreifungsstößen der Zugbewehrung unter stoßartiger Belastung**
- Nr. 158/ISBN 3-88314-889-X/1989  
R. Wäsche, K.-H. Habig  
**Physikalisch-chemische Grundlagen der Feststoffschmierung - Literaturübersicht -**
- Nr. 159/ISBN 3-88314-890-3/1989  
R. Müller, R. Rudolphi  
**Berechnung des Wärmedurchlaßwiderstandes und der Temperaturverteilung im Querschnitt von Hausschornsteinen nach DIN 18160 Teil 6**
- Nr. 160/ISBN 3-88314-917-9/1989  
W. Matthees  
**Entwicklung eines Makroelementes durch Kondensation am Beispiel der Lastfälle Flugzeugabsturz und Erdbeben bei Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit biegeweichen Fundamenten**
- Nr. 161/ISBN 3-88314-920-9/1989  
G. Mellmann, M. Maultzsch  
**Untersuchung zur Ermittlung der Biegefestigkeit von Flachglas für bauliche Anlagen**
- Nr. 162/ISBN 3-88314-921-7/1989  
W. Brünner  
**Untersuchungen zur Tragfähigkeit großer Glasscheiben**
- Nr. 163/ISBN 3-88314-922-5/1989  
W. Brünner, G. Mellmann, W. Struck  
**Biegefestigkeit und Tragfähigkeit von Scheiben aus Flachglas für bauliche Anlagen**
- Nr. 164/ISBN 3-88314-934-9/1989  
R. Helms, B. Jaenicke, H. Wolter, C.-P. Bork  
**Zur Schwingfestigkeit großer geschweißter Stahlträger**

- Nr. 165/ISBN 3-88314-935-7/1989  
P. Göbel, L. Meckel, W. Schiller  
**Untersuchung zur Erarbeitung von Kennwerten bei Einrichtungsmaterialien (Holzwerkstoffen, Möbeln und Textilien) hinsichtlich der Formaldehyd-Emission.**  
Teil B: Textilien
- Nr. 166/ISBN 3-88314-936-5/1989  
K. Breittkreutz  
**Modelle für Stereologische Analysen**
- Nr. 167/ISBN 3-88314-937-3/1989  
A. Mitakidis, W. Rücker  
**Erschütterungsausbreitung im elastischen Halbraum bei transienten Belastungsvorgängen**
- Nr. 168/ISBN 3-88314-958-6/1990  
F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi  
**Numerische Untersuchung geometriebedingter Wärmebrücken (Winkel und Ecken) unter Einsatz hochauflösender Farbgraphik bei Berücksichtigung der Tauwasserproblematik und des Mindestluftwechsels**
- Nr. 169/ISBN 3-88314-959-4/1990  
Chr. Kohl, W. Rücker  
**Integration der Untergrunddynamik in das Programmsystem MEDYNA, dargestellt am Beispiel des Intercity Experimental (ICE)**
- Nr. 170/ISBN 3-88314-960-8/1990  
P. Studt, W. Kerner, Tin Win  
**Untersuchung der mikrobiologischen Schädigung wassergemischter Kühlschmierstoffe mit dem Ziel der Verbesserung der Arbeitshygiene, der Minderung der Geruchsbelastung und der Menge zu entsorgender Emulsionen**
- Nr. 171/ISBN 3-88314-997-7/1990  
F. Buchhardt  
**Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter dynamischer Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung**
- Nr. 172/ISBN 3-88314-998-5/1990  
J. Vielhaber, G. Plauk  
**Grenztragfähigkeit großer Verbundprofilstützen**
- Nr. 173/ISBN 3-88314-999-3/1990  
B. Droste, J. Ludwig, B. Schulz-Förberg  
**Höherwertige Transporttechnik und ihre Konsequenzen für die Beförderung gefährlicher Güter**
- Nr. 174/ISBN 3-88429-021-8/1990  
D. Aurich  
**Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte**
- Nr. 175/ISBN 3-88429-022-6/1990  
W. Brocks, D. Klingbeil, J. Olschewski  
**Lösung der HRR-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik**
- Nr. 176/ISBN 3-88429-035-6/1990  
W. Matthees, G. Magiera  
**Iterative Dekonvolution der seismischen Basiseregung für den Zeitraum**
- Nr. 177/ISBN 3-89429-090-0/1991  
G. Schickert, M. Krause, H. Wiggenhauser  
**Studie zur Anwendung zerstörungsfreier Prüfverfahren bei Ingenieurbauwerken**
- Nr. 178/ISBN 3-89429-429-9/1991  
G. Andreae, J. Knapp, G. Niessen  
**Entwicklung und Untersuchung eines kapazitiven Hochtemperatur-Dehnungsaufnehmers für Einsatztemperaturen bis ca. 1000 °C**
- Nr. 179/ISBN 3-89429-100-1/1991  
H. Eifler  
**Die Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbeton-Plattenbalken, bewehrt mit naturhartem Betonstahl BSt 500 S im Bereich negativer Biegemomente**
- Nr. 180/ISBN 3-89429-101-X/1991  
E. Klement, G. Wieser  
**Zur numerischen Übertragbarkeit von Prüfungsergebnissen an Hausschornsteinen auf Schornsteine mit anderen lichten Querschnitten**
- Nr. 181/ISBN 3-89429-105-2/1991  
H. Czichos, R. Helms, J. Lexow  
**Industrial and Materials Technologies: Research and Development Trends and Needs**
- Nr. 182/ISBN 3-89429-145-1/1992  
M. Weber  
**Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich geometriebedingter Wärmebrücken**
- Nr. 183/ISBN 3-89429-163-x/1992  
F. Buchhardt  
**Zur Dekonvolution im Zeitbereich**
- Nr. 184/ISBN 3-89429-164-8/1992  
M. Maultzsch, W. Stichel, E.-J. Vater  
**Feldversuche zur Einwirkung von Aufbaumitteln auf Verkehrsbauwerke (im Rahmen des Großversuchs „Umweltfreundlicheres Streusalz“)**
- Nr. 185/ISBN 3-89429-165-6/1992  
Renate Müller  
**Ein numerisches Verfahren zur simultanen Bestimmung thermischer Stoffeigenschaften oder Größen aus Versuchen**  
- Anwendung auf das Heißdraht-Parallelverfahren und auf Versuche an Hausschornsteinen