

**BAM** Bundesanstalt für  
Materialforschung und -prüfung

## Forschungsbericht 210

Zur Erfassung der hysteretischen Dämpfung im  
Zeitraum

Dr.-Ing. Frank Buchhardt,  
Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und  
Dr.-Ing. Götz Magiera



Berlin 1995

## Aufgaben der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)

Die Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung ist als Bundesoberbehörde im Geschäftsbereich des Bundesministers für Wirtschaft das technisch-wissenschaftliche Staatsinstitut der Bundesrepublik Deutschland für Materialtechnologien, Chemische Analytik und Sicherheitstechnik. Dieser Komplex stellt in allen Industrieländern einen technologischen Schlüsselbereich dar, da Materialien als Konstruktions- und Funktionswerkstoffe die Grundlage der gesamten Technik bilden. Die Materialforschung, die zuverlässige, normengerechte Prüfung und chemische Analyse sowie die sicherheitstechnische Beurteilung von Werkstoffen, Bauteilen und Konstruktionen sind wesentliche Voraussetzungen für eine leistungs- und wettbewerbsfähige Wirtschaft im Hinblick auf die Anforderungen an Qualität und Zuverlässigkeit technischer Produkte, Umweltschutzerfordernisse und die Notwendigkeit der sparsamen Verwendung von Rohstoffen und Energie.

Die Bundesanstalt hat die Aufgabe, die Entwicklung der deutschen Wirtschaft zu fördern, indem sie Werkstoff- und Materialforschung betreibt, die Materialprüfung sowie die chemische Analytik und Sicherheitstechnik stetig weiterentwickelt.

In diesem Rahmen bestehen folgende Arbeitsschwerpunkte:

1. Technisch-wissenschaftliche Grundlagen des Materialwesens, der Sicherheitstechnik und der chemischen Analytik einschließlich zugehöriger Referenzmaterialien und -verfahren

2. Materialsicherung einschließlich Qualitätssicherung, Materialschutz, Recycling
3. Öffentliche technische Sicherheit
4. Technologien im Umwelt- und Gesundheitsschutz
5. Technologien in der Energiesicherung
6. Technologie- und Wissenstransfer

Ihre Arbeiten gliedern sich in:

- A Forschung und Entwicklung, besonders auf denjenigen Gebieten, die der Leistungssteigerung der Wirtschaft, der Sicherheitstechnik sowie der Schaffung und Erhaltung volkswirtschaftlicher Werte dienen,
- B Prüfung und Untersuchung von Stoffen und technischen Produkten auf der Basis von Gesetzen, Verordnungen oder technischen Regeln,
- C Beratung und Information von Bundesministerien sowie Durchführung von Aufgaben, die ihr von diesen im Einvernehmen mit dem Bundesministerium für Wirtschaft übertragen werden, Durchführung von Aufträgen aus der Wirtschaft, Beratung und Information von Wirtschafts- und Verbraucherorganisationen sowie Mitwirkung in nationalen und internationalen Gremien und Normenausschüssen und bei der Technischen Zusammenarbeit mit Entwicklungsländern.

Die Ergebnisse ihrer und fremder wissenschaftlicher Arbeiten hat die Bundesanstalt zu sammeln, zu ordnen und der Allgemeinheit zugänglich und nutzbar zu machen.

# Forschungsbericht 210

**Zur Erfassung der hysteretischen Dämpfung im Zeitraum**

Dr.-Ing. Frank Buchhardt,  
Dr.-Ing. Wolfgang Matthees und  
Dr.-Ing. Götz Magiera

78 Seiten, 16 Abbildungen, 39 Tabellen

Herausgegeben von der  
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)  
Unter den Eichen 87, 12205 Berlin  
✉ 12200 Berlin  
Telefon (030) 81 04-0  
Telefax (030) 811 20 29

Copyright © 1995 by Wirtschaftsverlag NW  
Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven

Herstellung und Verlag:  
Wirtschaftsverlag NW  
Verlag für neue Wissenschaft GmbH  
Am Alten Hafen 113 - 115, 27568 Bremerhaven  
✉ Postfach 10 11 10, 27511 Bremerhaven  
Telefon (0471) 4 60 93-95  
Telefax (0471) 427 65

ISSN 0938-5533  
ISBN 3-89429-595-3

## Vorwort

Komplexe dynamische Analysen waren bereits ein wesentlicher Arbeitsschwerpunkt, als sich die OE noch "Konstruktionstechnische Reaktorsicherheit" nannte. Bis heute wurde daher traditionell diskutiert, welche Einflüsse die Dämpfungsannahmen bei unterschiedlichen Lösungswegen auf die Resultate aufweisen. Ebenso wurde die Frage nach eindeutiger Zuweisung der Dämpfung im Hinblick auf modale oder direkte Vorgehensweise gestellt. Die thematische Formulierung nach der "Erfassung der hysteretischen Dämpfung im Zeitraum" ist somit bereits im Grundsatz von Herrn Prof. Jaeger - dem ehemaligen Leiter der OE - initiiert worden.



## Zusammenfassung

Dynamisch erregte Strukturen unterliegen in der Natur stets einem Dämpfungseinfluß. Je nach Formulierung und Integration der dynamischen Bewegungsgleichungen können verschiedene Lösungswege trotz identischer Vorgaben zu unterschiedlicher Dämpfung des betrachteten Systems führen. Ziel der Untersuchungen ist es, beliebige Dämpfungsverläufe in die allgemeinen, im Zeitraum formulierten Bewegungsgleichungen zu implizieren und vor allem die numerischen Konsequenzen der Resultate aufzuzeigen.

In Abschnitt 2 wird die Berücksichtigung der allgemeinen Dämpfung am Beispiel der hysteretischen, also frequenzunabhängigen Dämpfungsfunktion analytisch aufbereitet und folglich zwischen der modalen und direkten Zeitintegration differenziert; letztere - in den Programmcodes überwiegend angewendet - erfordert die komplette Erstellung der Dämpfungsmatrix; in dieser Studie wird die Dämpfungsmatrix durch die Reihendarstellung nach Caughey ermittelt. Zur Bestimmung der Caughey-Reihenoeffizienten ist eine punktweise Erfüllung der Dämpfungskurve beispielsweise in deren Eigenwerten - sofern bekannt - geeignet; ebenso können diese Koeffizienten durch einen optimierten Prozeß mittels Gauß- oder Fourier-Ansatz ermittelt werden. Die allgemeine Dämpfungsmatrix ist dann im Gegensatz zur Rayleigh-Dämpfung - als Zwei-Parameter-Sonderfall nach Caughey - voll besetzt.

In Abschnitt 3 werden Realisierungsmöglichkeiten für Systeme mit höherer Anzahl von Freiheitsgraden diskutiert. Es erfolgt zunächst eine Unterteilung in Systeme, bei denen die Eigenwerte zum einen berücksichtigt, zum anderen nicht berücksichtigt werden. Sind die Eigenwerte und Eigenformen bekannt, so empfiehlt sich gerade bei einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden, eine Frequenzabblendung der oberen Frequenzen bzw. eine Frequenzkondensation nur für die unteren, für das Antwortverhalten dominanten Frequenzen vorzunehmen. Dies ist bei der modalen Zeitintegration mühelos zu vollziehen; für die direkte Zeitintegration wird ein Verfahren entwickelt, das nur die Ermittlung der interessierenden Eigenwerte und Eigenformen erfordert, mit denen anschließend eine Transformation zu einem neuen, kondensierten System durchgeführt wird.

Ist die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenformen ausgeschlossen (z. B. bei der Betrachtung des Halbbrattes), werden sehr schnell Zahlengrößenordnungen erreicht, die mit den üblichen Standardroutinen des Rechners nicht mehr zu sinnvollen Resultaten führen. Hierfür werden Großzahlen-Operatoren für Zahlen mit beliebiger Mantissenlänge entwickelt, mittels derer für die in Abschnitt 2 erörterten Anwendungsmöglichkeiten der Caughey-Reihe eine vollständige numerische Formulierung der Dämpfungsmatrix erreicht wird. Es werden die Vor- und Nachteile der Einzelverfahren gegenübergestellt.

Ferner wird ein Lösungsverfahren entwickelt, das mittels komplexer Steifigkeitsansätze unter Verwendung zeitversetzter Belastung eine vollständige Erfassung allgemeiner Dämpfungsvorgaben gestattet; die Dämpfung wird hierbei jedoch je Harmonische implizit verarbeitet, so daß eine explizite Darstellung einer Dämpfungsmatrix nicht möglich ist.

Im Grundsatz führt eine beliebige Berücksichtigung der Dämpfung im Vergleich zur Rayleigh-Dämpfung zu erheblich höherem Rechenaufwand und sollte daher spezifischen Sonderfällen vorbehalten sein.

## Summary

In nature, dynamically excited structures are always subjected to damping influences. According to the specific formulation and integration of the differential equations different ways of solution can result in different damping despite of identical start conditions. It is the scope of this study to consider any damping function given for the general dynamic equations in the time domain and, after all, to demonstrate the numerical consequences of the results obtained.

In section 2 any damping function considered is analytically discussed on the assumption of hysteretic damping which means frequency-independency. It is distinguished between modal and direct time integration methods; the latter one - mostly applied in the programme codes - requires the formulation of a damping matrix which is appropriately realized by use of the Caughey series. In order to determine the Caughey coefficients it can be required that the damping function is satisfied point by point at the system eigenvalues - provided they are known; these coefficients can also be evaluated using an optimized process with Gauss or Fourier formulation. In contrast to Rayleigh damping which is a special case of Caughey damping the general damping matrix is completely filled up with non-zero members.

In section 3 the numerical feasibility is discussed for MDOF systems. It is subdivided into systems whose eigenvalues are known and into systems whose eigenvalues cannot or shall not be evaluated. In case the eigenvalues and eigenmodes are available it is recommended especially for a larger number of DOF to cut-off higher frequencies, i.e. to condense the system to its lower frequencies which are predominant for the structural response. This can be easily realized using the modal time integration method. In case of the direct time integration a process is developed which permits the transformation to a new, condensed structural system so that only the required lower eigenvalues and eigenmodes must be determined.

In case of unknown eigenvalues and eigenmodes, e.g. considering the half-space, the computational limits will be rapidly exceeded when using the computer standard routines. Therefore large digit-number operators are developed for any mantissa length so that a full applicability of the Caughey series for the damping matrix can be realized. Advantages and disadvantages are discussed for the above-mentioned procedures.

Furthermore a solution method is presented which also enables the implication of any damping function by use of a complex stiffness assumption; in this case the damping influence for every harmonic is implicitly taken into account which excludes an explicit formulation of the general damping matrix.

In general it must be stated that the implication of any damping function in the time domain leads to an extremely extended computational effort in comparison to the assumption of Rayleigh damping and, therefore, should be reserved for specific analyses only.

| <b>Inhaltsverzeichnis</b> |   | <b>Seite</b> |
|---------------------------|---|--------------|
| 1                         | Einführung  | 9            |
| 2                         | Ermittlung der Koeffizienten der Dämpfungsmatrix                                      | 9            |
| 2.1                       | Implizite Darstellung durch Modalintegration  | 9            |
| 2.2                       | Explizite Darstellung durch direkte Integration mittels Caughey-Reihe                 | 10           |
| 2.2.1                     | Verallgemeinerung der Bestimmungsgleichung  | 10           |
| 2.2.2                     | Punktweise Erfüllung  | 12           |
| 2.2.3                     | Gauß-Ansatz   | 14           |
| 2.2.4                     | Fourier-Entwicklung   | 15           |
| 3                         | Realisierung der hysteretischen Dämpfung bei einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden | 17           |
| 3.1                       | Gesamtproblematik   | 17           |
| 3.2                       | Beispiel am Balken mit 11 Freiheitsgraden   | 18           |
| 3.3                       | Lösungen mit Berücksichtigung weniger Eigenwerte                                      | 28           |
| 3.3.1                     | Modale Integration mit Frequenzausblendung  | 28           |
| 3.3.2                     | Direkte Integration mit Frequenzausblendung   | 28           |
| 3.3.2.1                   | Frequenzausblendung durch Kondensation im Modalraum                                   | 28           |
| 3.3.2.2                   | Verifikation am Zweimassenschwinger   | 30           |
| 3.3.2.3                   | Verifikation am Dreimassenschwinger   | 31           |
| 3.3.2.4                   | Beispiel am Balken mit 11 bzw. 40 Freiheitsgraden                                     | 33           |
| 3.4                       | Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte   | 35           |
| 3.4.1                     | Operatoren für Großzahlen   | 35           |
| 3.4.2                     | Beispiel am Balken mit 11 bzw. 40 Freiheitsgraden                                     | 39           |
| 3.4.3                     | Partikularansatz  | 42           |
| 3.4.3.1                   | Allgemeine Betrachtung am Einmassenschwinger  | 42           |
| 3.4.3.2                   | Allgemeine Ableitung in FFT-Schreibweise  | 45           |
| 3.4.3.3                   | Verifikation  | 49           |
| 4                         | Diskussion der Ergebnisse   | 54           |
| 5                         | Literatur   | 55           |
| A                         | Anhang  | 57           |



# 1 Einführung

Zur Lösung komplexer, dynamischer Probleme wird die Methode der finiten Elemente vorrangig wegen ihrer eminenten Vorteile angewandt; die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$[M] \cdot (\ddot{v}) + [C] \cdot (\dot{v}) + [K] \cdot (v) = (P) \quad (1-1)$$

werden hierbei überwiegend im Zeitbereich formuliert. [M] stellt die Massen-, [C] die Dämpfungs- und [K] die Steifigkeitsmatrix des Systems dar; die Lösungen des Verschiebungsvektors (v) bzw. dessen jeweilige Ableitungen sind für die gegebene Last (P) herzustellen. Die Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen (1-1) kann hierbei auf unterschiedliche Weise [s. z.B. /12/, /14/ bzw. /16/], sei es auf direktem oder modalem Weg, vollzogen werden.

Sollen beispielsweise aus sicherheitstechnischen Überlegungen möglichst "genaue" Lösungen erzielt werden, ist auch eine wirklichkeitstretue Spezifizierung der Dämpfung erforderlich, da in allgemeiner Schreibweise verschiedene Lösungswege zu unterschiedlicher Dämpfung innerhalb der Bewegungsbeziehungen führen können [s./1/ bis /24/]. Ziel der Untersuchungen ist es, Dämpfungsverläufe, die zunächst beliebig sein können, in die allgemeinen Bewegungsgleichungen zu implizieren und vor allem die numerischen Konsequenzen der Resultate zu erarbeiten. Dies wird am Sonderfall der hysteretischen Dämpfung gezeigt, die über das betrachtete Frequenzspektrum konstant, also frequenzunabhängig ist. Ferner wird für die weiteren Untersuchungen vorausgesetzt, daß es sich um lineare Systeme handelt, so daß das Superpositionsprinzip uneingeschränkt gültig bleibt.

## 2 Ermittlung der Koeffizienten der Dämpfungsmatrix

### 2.1 Implizite Darstellung durch Modalintegration

Erfolgt die Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen (1-1) in modaler Schreibweise, so erhält man mit der Transformationsgleichung

$$(v) = [\Phi] \cdot (y) \quad (2-1)$$

einen Satz von entkoppelten Differentialgleichungen für die modalen Bewegungsgrößen (y), und zwar je Modus j

$$\ddot{y}_j + 2 \cdot \beta_j \cdot \omega_j \cdot \dot{y}_j + \omega_j^2 \cdot y_j = P_j^* \quad (2-2)$$

mit  $j = 1, 2 \dots M$ ,  $M \leq \text{NDOF}$   
(NDOF, Zahl der Freiheitsgrade)

$[\Phi]$  ist hierbei die Matrix der Eigenformen des betrachteten Systems, die allein durch Massen- und Steifigkeitsmatrix determiniert wird. Die Unabhängigkeit der Eigenwerte von der Dämpfung erlaubt nur die Berechnung von Systemen mit kleinen oder mittleren Dämpfungsmaßen, wie sie üblicherweise in der Technik anzutreffen sind. Die Identität der Beziehungen (1-1) bzw. (2-2) folgt aus der (normierten) Orthogonalität der Eigenformen  $[\Phi]$ :

$$\begin{aligned} [\Phi^T] \cdot (P) &= (P^*) \\ [\Phi^T] \cdot [M] \cdot [\Phi] &= [I] \\ [\Phi^T] \cdot [K] \cdot [\Phi] &= [\omega^2] \\ [\Phi^T] \cdot [C] \cdot [\Phi] &= [2\beta \cdot \omega] \end{aligned} \quad (2-3 \text{ a-d})$$

Hierbei sind [I] die Einheitsmatrix,  $[\omega^2]$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte und  $[2\beta \cdot \omega]$  die mit den zugehörigen Eigenwerten korrelierte Diagonalmatrix der Dämpfungsfaktoren. Wegen der vollzogenen Entkoppelung kann nun die Betrachtung am beliebigen Eigenwert j erfolgen, so daß sich aus (2-3 d) ergibt:

$$(\Phi_j^T) \cdot [C] \cdot (\Phi_j) = 2\beta_j \cdot \omega_j \quad (2-3 \text{ e})$$

Im Sonderfall der hysteretischen Dämpfung ist  $\beta_j = \beta = \text{konstant}$  zu setzen, so daß man eine frequenzunabhängige Beziehungsgleichung erhält. Die Gesamtlösung des Schwingungsproblems erfolgt damit in modaler Schreibweise aus der Überlagerung der modalen Bewegungsgrößen ( $y$ ) mit den einzelnen Eigenformen entsprechend (2-1). Hierbei ist die Dämpfung in Form des je Eigenwert beliebig wählbaren, also auch als konstant definierbaren Dämpfungsmaßes  $\beta$  implizit in die Gesamtlösung einbezogen. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß zur Lösung eines Systems bei Kenntnis der Eigenwerte und Eigenformen die Gesamtdämpfungsmatrix  $[C]$  nicht notwendigerweise ermittelt werden muß. Durch Umkehrung läßt sich jedoch auch entsprechend (1-1) die Dämpfungsmatrix bzw. deren Koeffizienten aus (2-3 d) herleiten zu

$$[C] = 2\beta \cdot [\Phi^T]^{-1} \cdot [\omega] \cdot [\Phi]^{-1} \quad (2-4)$$

## 2.2 Explizite Darstellung durch direkte Integration mittels Caughey-Reihe

### 2.2.1 Verallgemeinerung der Bestimmungsgleichung

Wird die direkte Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen entsprechend den gängigen Programmcodes angestrebt, so muß die Dämpfungsmatrix  $[C]$  vorab explizit spezifiziert werden. In üblicher Codierung wird die Dämpfung nach Rayleigh formuliert, die eine Linearkombination aus Massen- und Steifigkeitsmatrix darstellt:

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [K] \quad (2-5)$$

Hierbei ist die Dämpfungsmatrix  $[C]$  nicht explizit im Lösungsalgorithmus zu erstellen, sondern wird durch die Summation (2-5) erhalten. Diese Schreibweise beinhaltet prinzipiell eine frequenzabhängige Formulierung, die durch die beiden Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  wesentlich beeinflusst werden kann, da die zu wählenden sogenannten Einhängfrequenzen für ein vorgegebenes Dämpfungsmaß das Gesamtergebn u. U. merklich bestimmen können. Im Grundsatz werden bei der Rayleigh-Dämpfung nur die mit den Einhängfrequenzen korrelierten Dämpfungsmaße genau angesprochen, während Frequenzen außerhalb der Einhängewerte stärker bzw. innerhalb der Einhängewerte schwächer gedämpft werden (s. Bild 2-1).

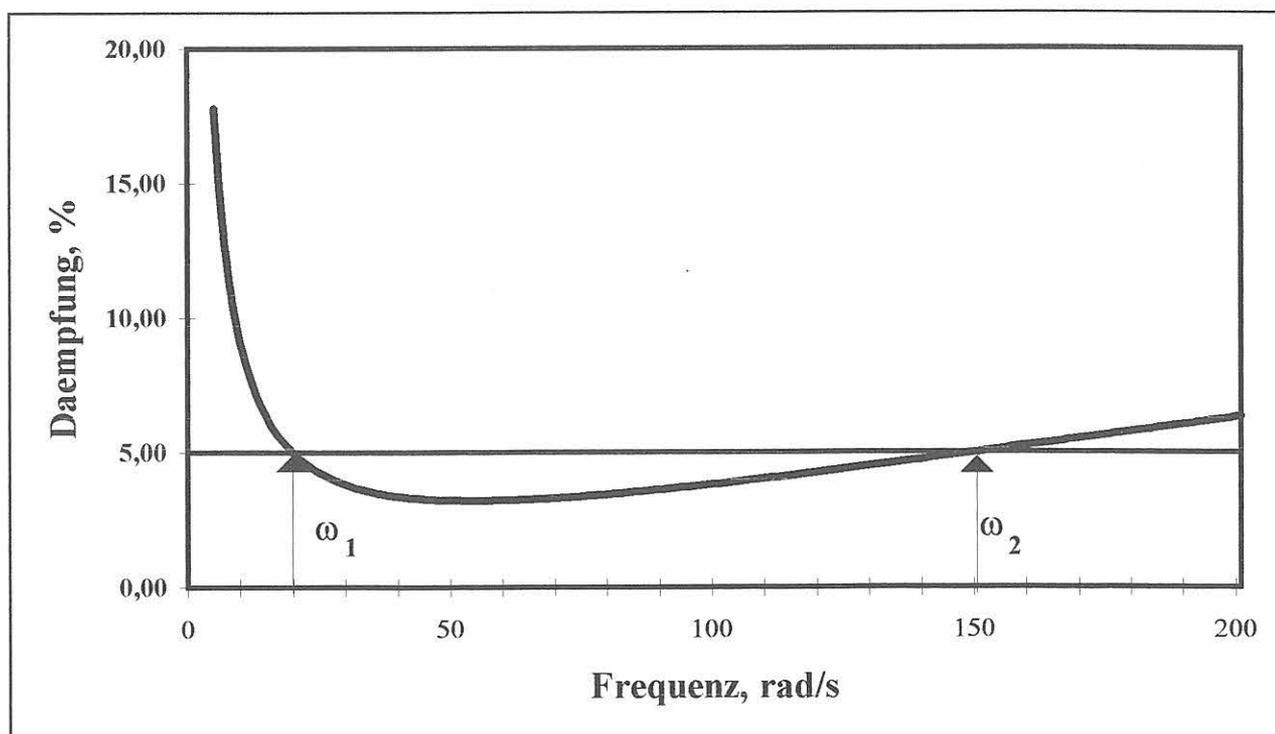


Bild 2-1: Einhängfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  für die Rayleigh-Dämpfung

Um eine frequenzunabhängige Darstellung der Dämpfung im Zeitraum zu gewährleisten, wird die Formulierung nach Caughey (s. /1/) angewandt:

$$[C] = [M] \cdot \sum_{i=0}^{p-1} a_i \cdot \{[M]^{-1} \cdot [K]\}^i \quad (2-6 a)$$

bzw.

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [M] \cdot \sum_{i=1}^{p-1} \kappa_i \cdot \{[M]^{-1} \cdot [K]\}^i \quad (2-6 b)$$

mit  $\kappa_{i+1} = a_{i+1} / a_i$  und  $\kappa_1 = 1$ .

In dieser Reihendarstellung ist als Sonderfall die Rayleigh-Dämpfung enthalten. Hier gilt es, eine Bestimmungsgleichung für die noch unbekanntenen Koeffizienten  $a_i$  herzuleiten. Setzt man (2-6 a) in (2-3 e) ein, so erhält man

$$2\beta_j \cdot \omega_j = (\Phi_j^T) \cdot \left[ a_0 \cdot [M] \cdot \{[M]^{-1} \cdot [K]\}^0 + a_1 \cdot [M] \cdot \{[M]^{-1} \cdot [K]\}^1 + a_2 \cdot [M] \cdot \{[M]^{-1} \cdot [K]\}^2 + \dots \right] \cdot (\Phi_j) \quad (2-7 a)$$

Unter Beachtung von

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\omega^2] \quad \text{bzw.}$$

$$[K] \cdot (\Phi_j) = [M] \cdot (\Phi_j) \cdot \omega_j^2$$

folgt

$$[M]^{-1} \cdot [K] \cdot (\Phi_j) = (\Phi_j) \cdot \omega_j^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega_j^2 \cdot (\Phi_j),$$

und somit wird (2-7 a) zu

$$2\beta_j \cdot \omega_j = a_0 \cdot \{(\Phi_j^T) \cdot [M] \cdot (\Phi_j)\} + a_1 \cdot \{(\Phi_j^T) \cdot [M] \cdot (\Phi_j) \cdot \omega_j^2\} + a_2 \cdot \{(\Phi_j^T) \cdot [M] \cdot (\Phi_j) \cdot \omega_j^4\} + \dots \quad (2-7 b)$$

und unter Beachtung von (2-3 b) ergibt sich dann die allgemeine Beziehungsgleichung zwischen Dämpfungsmaß und den Eigenwerten:

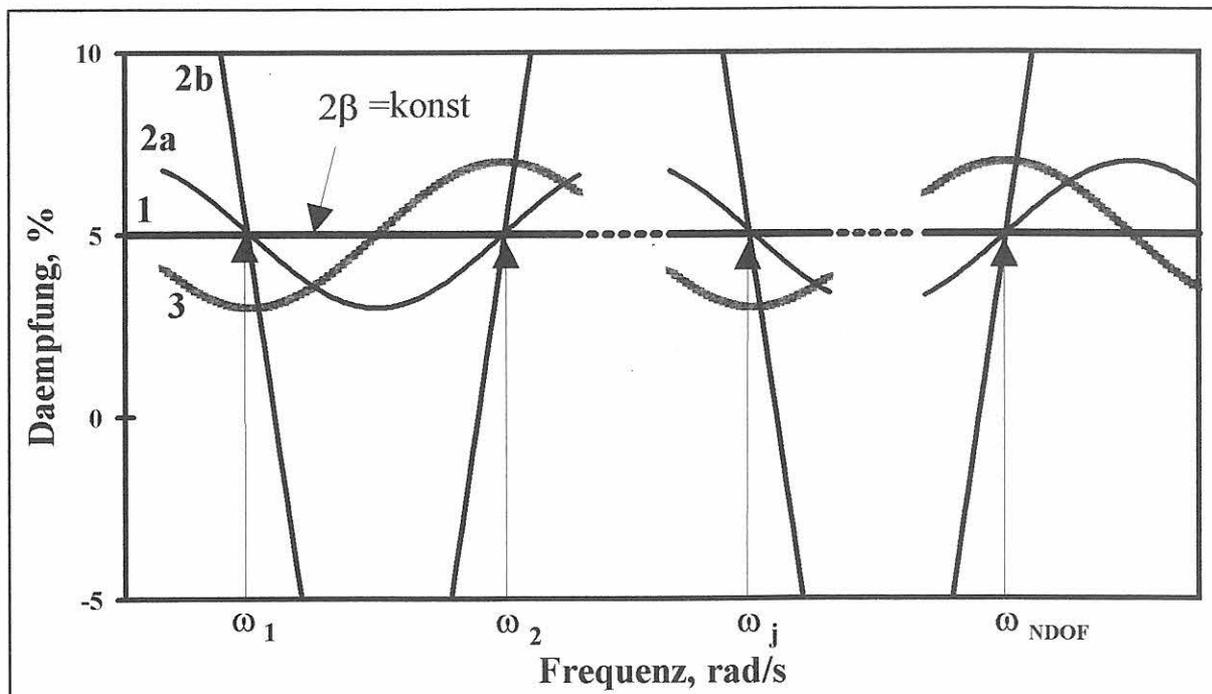


Bild 2-2 Erfassung der hysteretischen Dämpfung

$$2\beta_j = a_0/\omega_j + a_1 \cdot \omega_j + a_2 \cdot \omega_j^3 + \dots + a_{p-1} \cdot \omega_j^{2p-3} \quad (2-7 \text{ c})$$

Hier sind die Dämpfungsmaße je Eigenwert  $\omega_j$  noch beliebig. Wird nun  $\beta_j = \beta = \text{konstant}$  gesetzt, so erhält man die frequenzunabhängige Beziehung der hysteretischen Dämpfung.

Die Bestimmungsgleichung (2-7 c) ist auf der Basis aller bekannten Eigenwerte  $\omega_j$  eines Systems mit NDOF Freiheitsgraden spezifiziert worden. Im Grundsatz handelt es sich hier jedoch um eine vorgegebene Funktion  $\beta(\omega)$ , die die hysteretische Dämpfung  $2\beta = \text{konstant}$  aufweist und die nach unterschiedlichen Kriterien zu erfüllen ist. Wie in (2-7) formuliert, kann hierbei die diskret punktweise Erfüllung z. B. für die bekannten Eigenfrequenzen des Systems gefordert sein. Werden nicht alle Eigenfrequenzen herangezogen, sind nach Bild 2-2 (Kurve 2 b) auch negative Dämpfungswerte denkbar. Besonders bei Systemen mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden ist diese Eigenschaft nachteilig einzustufen. Wird dagegen mittels Gauß- bzw. Fourieransatz die Erfüllung der Dämpfungskurve als optimierter Prozeß realisiert, so gelingt es, die vorgegebene Funktion  $2\beta = \text{konstant}$  zwar nur näherungsweise zu beschreiben, jedoch immer entsprechend Kurventyp 3 im Bild 2-2, d. h., über den gesamten betrachteten Frequenzbereich  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_{\text{NDOF}}$  wird die Dämpfung immer ein positives Vorzeichen haben. Diese Betrachtungsweise zeigt, daß die Anzahl der Koeffizienten  $a_i$  nicht unbedingt identisch der Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems sein muß, sie kann diese vielmehr unter- als auch überschreiten.

## 2.2.2 Punktweise Erfüllung

Sollen möglichst viele Frequenzen punktweise erfüllt werden, so folgen nach (2-7 c) für die hysteretische Dämpfung mit  $\beta_j = \beta = \text{konstant}$  die Koeffizienten (a) aus dem Gleichungssystem

$$[Q] \cdot (a) = 2\beta \cdot (I) \quad (2-8)$$

also mit dem Einheitsvektor (I)

$$(a) = 2\beta \cdot [Q]^{-1} \cdot (I) \quad (2-9 \text{ a})$$

$$(a) = 2\beta \cdot (b) \quad (2-9 \text{ b}) \quad \text{bzw.}$$

Die Frequenzmatrix [Q] ist hier unsymmetrisch und vollständig besetzt:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1/\omega_1 & \omega_1 & \omega_1^3 & \dots & \omega_1^{2p-3} \\ 1/\omega_2 & \omega_2 & \omega_2^3 & \dots & \omega_2^{2p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/\omega_p & \omega_p & \omega_p^3 & \dots & \omega_p^{2p-3} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Die vollständige Erfassung vieler Frequenzen stellt ein außerordentlich strenges Kriterium dar. Einmal können laut (2-10) extrem hohe wie extrem kleine Zahlenwerte für [Q] entstehen; zum anderen ist sicherzustellen, daß nicht erfaßte Frequenzbereiche keinesfalls zu negativer Dämpfung (s. Bild 2-2) führen. Unter Annahme von  $p=61$  Stützstellen in einem Frequenzbereich zwischen  $f_1 = 0.01$  Hz und  $f_p = 50$  Hz ist der kleinste Koeffizient in [Q]

$$\omega_1^{2p-3} = 0.063^{119} = 1.32 \cdot 10^{-143}$$

und der größte Koeffizient in [Q]

$$\omega_p^{2p-3} = 314^{119} = 1.36 \cdot 10^{+297}$$

Für die Erfassung eines breiten Frequenzspektrums erfordert somit die punktweise Erfüllung Zahlendarstellungen, die mit normalen Standardoperationen nicht mehr geleistet werden können; bei Anwendung üblicher Standardoperationen ist dann eine vernünftige Lösung der Koeffizienten  $a_i$  nicht erreichbar.

Tabelle 2-1 Systemmatrizen eines Modells mit vier Freiheitsgraden

| STEIFIGKEITSMATRIX |             |             |             |             |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                    | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1                  | 0.2000E+01  | -0.1000E+01 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 2                  | -0.1000E+01 | 0.2000E+01  | -0.1000E+01 | 0.0000E+00  |
| 3                  | 0.0000E+00  | -0.1000E+01 | 0.2000E+01  | -0.1000E+01 |
| 4                  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1000E+01 | 0.2000E+01  |

| MASSENMATRIX |            |            |            |            |
|--------------|------------|------------|------------|------------|
|              | 1          | 2          | 3          | 4          |
| 1            | 0.6667E-02 | 0.1667E-02 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 2            | 0.1667E-02 | 0.6667E-02 | 0.1667E-02 | 0.0000E+00 |
| 3            | 0.0000E+00 | 0.1667E-02 | 0.6667E-02 | 0.1667E-02 |
| 4            | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.1667E-02 | 0.6667E-02 |

Tabelle 2-2 Hysteretische Dämpfungsmatrix eines Modells mit vier Freiheitsgraden

| CAUGHEY-DÄMPFUNGSMATRIX MIT 4 KOEFF. |             |             |             |             |
|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                                      | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1                                    | 0.1061E-01  | -0.1753E-02 | -0.1005E-02 | -0.1661E-03 |
| 2                                    | -0.1753E-02 | 0.9604E-02  | -0.1919E-02 | -0.1005E-02 |
| 3                                    | -0.1005E-02 | -0.1919E-02 | 0.9604E-02  | -0.1753E-02 |
| 4                                    | -0.1661E-03 | -0.1005E-02 | -0.1753E-02 | 0.1061E-01  |

| CAUGHEY-KOEFFIZIENTEN |           |           |            |           |
|-----------------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 1                     | 0.379E+00 | 0.669E-02 | -0.825E-05 | 0.449E-08 |

| ORTHOGONALITÄT DER CAUGHEY-MATRIX |             |             |            |             |
|-----------------------------------|-------------|-------------|------------|-------------|
|                                   | 1           | 2           | 3          | 4           |
| 1                                 | 0.5000E-01  | -0.1091E-17 | 0.3483E-18 | 0.7138E-18  |
| 2                                 | -0.5200E-18 | 0.5000E-01  | 0.9560E-09 | -0.9374E-14 |
| 3                                 | 0.1032E-18  | 0.5944E-09  | 0.5000E-01 | 0.1193E-08  |
| 4                                 | 0.1510E-18  | -0.4161E-14 | 0.8516E-09 | 0.5000E-01  |

| IMPLIZITE HYSTERETISCHE DÄMPFUNGSMATRIX |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1                                       | 0.1061E-01  | -0.1753E-02 | -0.1005E-02 | -0.1661E-03 |
| 2                                       | -0.1753E-02 | 0.9604E-02  | -0.1919E-02 | -0.1005E-02 |
| 3                                       | -0.1005E-02 | -0.1919E-02 | 0.9604E-02  | -0.1753E-02 |
| 4                                       | -0.1661E-03 | -0.1005E-02 | -0.1753E-02 | 0.1061E-01  |

Systeme mit wenigen Freiheitsgraden lassen jedoch problemlose Lösungen zu. Die Diskretisierung eines kontinuierlichen Systems in 4 Freiheitsgrade führt zu den in Tabelle 2-1 angegebenen Steifigkeits- und Massenmatrizen. Deutlich ist hier der Bandcharakter beider Matrizen bei konsistenter Massendarstellung. Die Caughey-Reihenbildung (2-6 a) mit den in den 4 Eigenfrequenzen ( $f_1 = 1.017$  Hz,  $f_2 = 2.133$  Hz,  $f_3 = 3.430$  Hz,  $f_4 = 4.805$  Hz) ermittelten Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3$  führt mit  $\beta = 5\%$  zu der hysteretischen Dämpfungsmatrix in Tabelle 2-2. Der prinzipielle Unterschied zwischen der viskosen Rayleigh-Dämpfung und der hysteretischen Caughey-Dämpfung besteht darin, daß viskose Dämpfungsmatrizen entsprechend ihrer Steifigkeits- und Massenmatrix einen Bandcharakter haben und daß hysteretische Dämpfungsmatrizen Koppelungen auch zwischen nicht benachbarten Freiheitsgraden durch die von Null verschiedenen Nebendiagonalglieder aufweisen. Die Orthogonalität der Caughey-Matrix gemäß (2-3 e) ist erfüllt. Tabelle 2-2 zeigt, daß allen 4 Eigenwerten  $\beta = 0.05$  zugeordnet ist. Die implizite, hysteretische Dämpfungsmatrix (2-4) erweist sich identisch mit der Caughey-Matrix (Tabelle 2-2).

### 2.2.3 Gauß-Ansatz

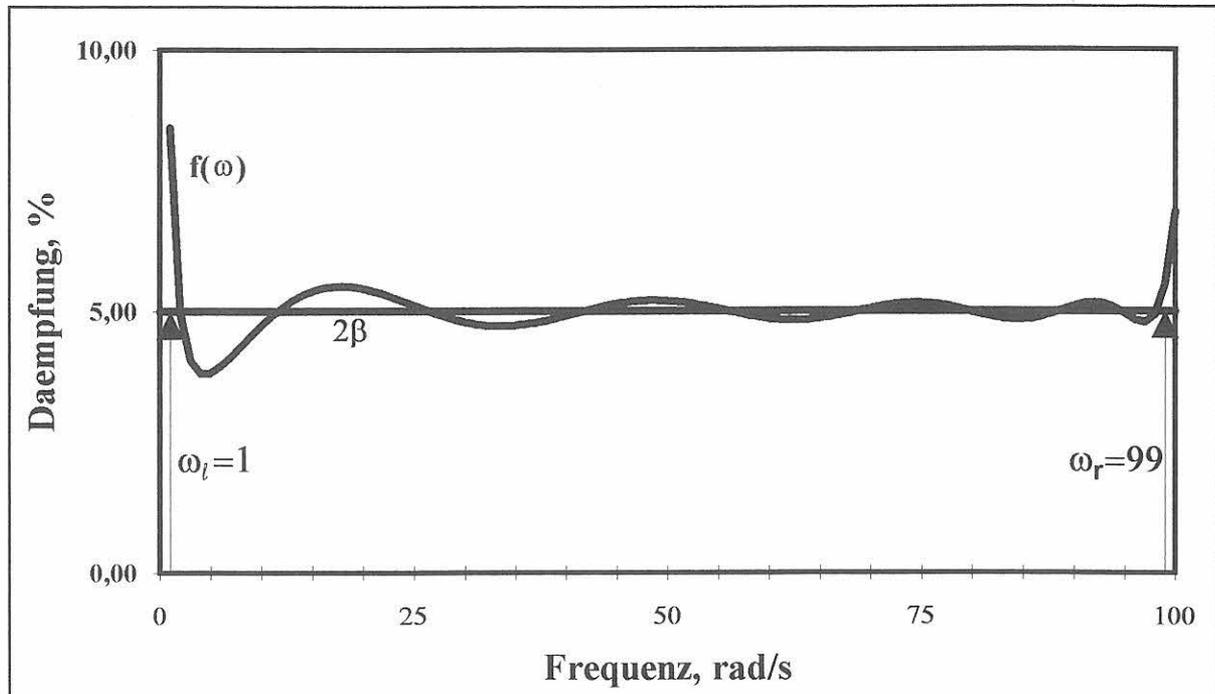


Bild 2-3 Gauß-Ansatz

Aus der Betrachtung des Minimums des Fehlers ergibt sich innerhalb eines definierten Frequenzbereiches  $\omega_l \leq \omega \leq \omega_r$

$$\int_{\omega_l}^{\omega_r} [2\beta - f(\omega)]^2 d\omega \implies \text{Min.}$$

mit der Funktion (2-7c)

$$f(\omega) = a_0 / \omega + a_1 \cdot \omega + a_2 \cdot \omega^3 + \dots + a_{p-1} \cdot \omega^{2p-3}$$

die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten  $a_i$  zu:

$$0 = \int_{\omega_l}^{\omega_r} \left[ -2\beta + a_0 / \omega + a_1 \cdot \omega^1 + a_2 \cdot \omega^3 + \dots + a_{p-1} \cdot \omega^{2p-3} \right] \cdot \frac{df(\omega)}{da_i} \cdot d\omega \quad \text{mit } i = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2-11)$$

Die Auswertung von (2-11) führt damit zum bestimmenden Gleichungssystem

$$[Q] \cdot (a) = (c) \quad (2-12 a)$$

bzw.

$$(a) = [Q]^{-1} \cdot (c) \quad (2-12 b)$$

In diesem Fall ist die voll besetzte Frequenzmatrix symmetrisch:

$$[Q] = \begin{bmatrix} -1/\omega_r + 1/\omega_\ell & \omega_r - \omega_\ell & \frac{1}{3} \cdot (\omega_r^3 - \omega_\ell^3) & \dots \\ \omega_r - \omega_\ell & \frac{1}{3} \cdot (\omega_r^3 - \omega_\ell^3) & \frac{1}{5} \cdot (\omega_r^5 - \omega_\ell^5) & \dots \\ \frac{1}{3} \cdot (\omega_r^3 - \omega_\ell^3) & \frac{1}{5} \cdot (\omega_r^5 - \omega_\ell^5) & \frac{1}{7} \cdot (\omega_r^7 - \omega_\ell^7) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2-13 \text{ a})$$

bzw.

$$[Q] = \sum_{I=1}^{0,p-1} \sum_{J=1}^{0,p-1} \frac{1}{IN} \cdot (\omega_r^{IN} - \omega_\ell^{IN}) \quad \text{mit } IN = 2(I+1+J) - 3 \quad (2-13 \text{ b})$$

Die rechte Seite (c) ergibt sich dann zu

$$(c) = 2\beta \cdot \begin{pmatrix} \ln \omega_r - \ln \omega_\ell \\ \frac{1}{2} (\omega_r^2 - \omega_\ell^2) \\ \frac{1}{4} (\omega_r^4 - \omega_\ell^4) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

Da das Kriterium des Fehlerausgleichs nicht so rigide wie das der punktweisen Erfüllung ist, erhält man nach Lösung von (2-12) eine Dämpfungsfunktion, die im betrachteten Bereich  $\omega_\ell \leq \omega \leq \omega_r$  stets positiv verläuft. Nimmt man eine gleichartige Frequenzabschätzung wie in Abschnitt 2.2.2 mit  $f_1 = 0.01 \text{ Hz}$  ( $\cong \omega_\ell = 0.06 \text{ rad/s}$ ) und  $f_r = 50 \text{ Hz}$  ( $\cong \omega_r = 314. \text{ rad/s}$ ) vor, so erhält man den kleinsten Koeffizienten zu  $Q_{11} \approx 17$ . Der Größtwert hängt entscheidend von der Anzahl der gewählten Freiheitsgrade ab, wobei bei deren Einschränkung zwar eine Güteminderung des Ergebnisses, jedoch eine hinreichende Dämpfungsfunktion erzielt wird. Der Maximalwert der Frequenzmatrix [Q] ergibt sich für

$$p-1 = 10 \quad Q_{\max, \max} \approx \frac{1}{39} (314^{39}) = 6.15 \cdot 10^{95} \quad \text{bzw.}$$

$$p-1 = 61 \quad Q_{\max, \max} \approx \frac{1}{243} (314^{243}) = 2.34 \cdot 10^{604}$$

Diese Abschätzung zeigt, daß auch der etwas gutmütigere Ansatz nach Gauß zu unvernünftigen Ergebnissen wegen der hohen Zahlendifferenzen führen kann; innerhalb eines kleinen Frequenzbereiches führt es jedoch zu vernünftiger Approximation an das vorgegebene Dämpfungsmaß  $\beta$ .

## 2.2.4 Fourier-Entwicklung

Der Fourier-Entwicklung liegt der gleiche Fehleransatz wie in Abschnitt 2.2.3 zugrunde, jedoch werden die zueinander orthogonalen Kreisfunktionen gewählt, die zu einer Diagonalisierung des allgemeinen Systems führen.

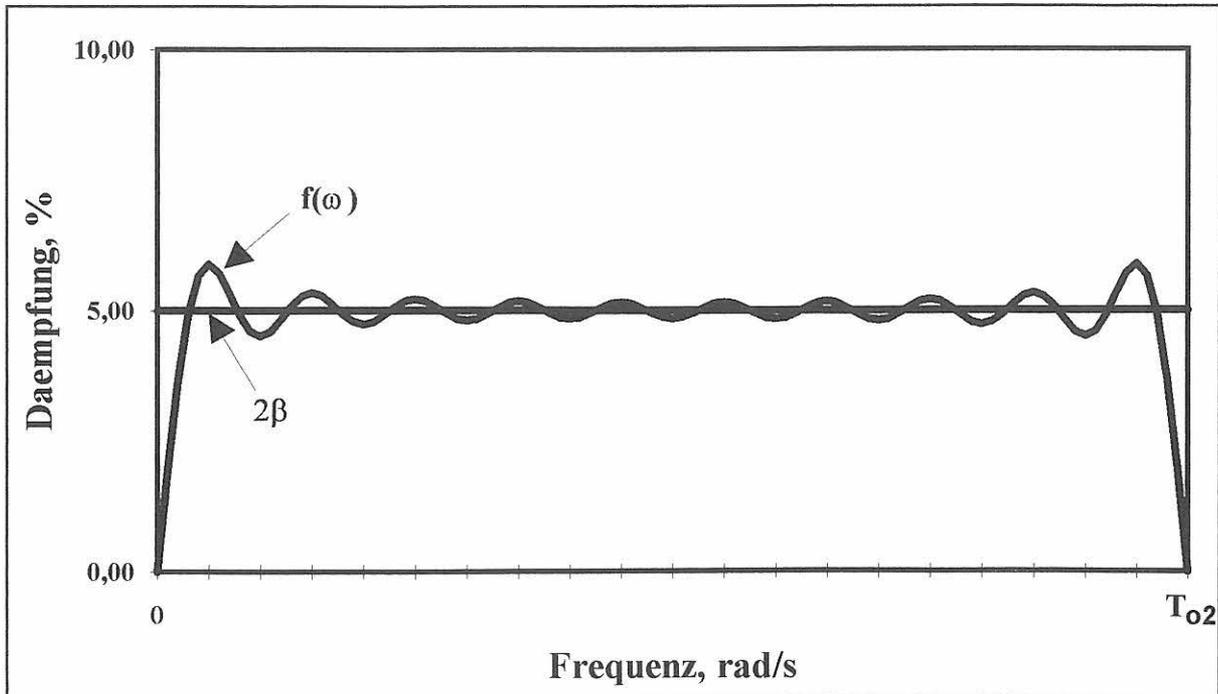


Bild 2-4 Fourier-Entwicklung

Mit  $\omega_0 = \pi / T_{02}$  folgen aus dem (ungeraden) Ansatz

$$\int_0^{T_{02}} \left[ 2\beta - \sum_j^{1,M} b_j \cdot \sin(j \cdot \omega_0 \cdot t) \right]^2 dt \implies \text{Min.}$$

die Fourier-Koeffizienten direkt zu

$$b_j = \frac{4 \cdot 2\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{j} \quad (2-15)$$

mit  $j = 1, 3, 5, \dots$  (ungerade)

Nimmt man nunmehr für

$$2\beta = \sum_j^{\text{ungerade}} b_j \cdot \sin(j \cdot \omega_0 \cdot t)$$

eine Reihenentwicklung vor, so erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cdot \beta &= b_1 \cdot \frac{(1 \cdot \omega_0)^1}{1!} \cdot t^1 - b_1 \cdot \frac{(1 \cdot \omega_0)^3}{3!} \cdot t^3 + b_1 \cdot \frac{(1 \cdot \omega_0)^5}{5!} \cdot t^5 - + \dots b_1 \cdot (-1)^{i-1} \frac{(1 \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot t^{2i-1} \\ &+ b_3 \cdot \frac{(3 \cdot \omega_0)^1}{1!} \cdot t^1 - b_3 \cdot \frac{(3 \cdot \omega_0)^3}{3!} \cdot t^3 + b_3 \cdot \frac{(3 \cdot \omega_0)^5}{5!} \cdot t^5 - + \dots b_3 \cdot (-1)^{i-1} \frac{(3 \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot t^{2i-1} \\ &+ b_5 \cdot \frac{(5 \cdot \omega_0)^1}{1!} \cdot t^1 - b_5 \cdot \frac{(5 \cdot \omega_0)^3}{3!} \cdot t^3 + b_5 \cdot \frac{(5 \cdot \omega_0)^5}{5!} \cdot t^5 - + \dots b_5 \cdot (-1)^{i-1} \frac{(5 \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot t^{2i-1} \\ &+ \dots \\ &+ b_j \cdot \frac{(j \cdot \omega_0)^1}{1!} \cdot t^1 - b_j \cdot \frac{(j \cdot \omega_0)^3}{3!} \cdot t^3 + b_j \cdot \frac{(j \cdot \omega_0)^5}{5!} \cdot t^5 - + \dots b_j \cdot (-1)^{i-1} \frac{(j \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot t^{2i-1} \\ &= a_1 \cdot t^1 + a_2 \cdot t^3 + a_3 \cdot t^5 + \dots a_i \cdot t^{2i-1} \end{aligned} \quad (2-16)$$

Diese Bestimmungsgleichung entspricht (2-7c), in der das erste Glied (nämlich der Hyperbelanteil) nicht enthalten ist. Die Glieder des Koeffizientenvektors (a) sind somit:

$$a_i = \sum_{j=1,3,5,\dots}^M b_j \cdot \frac{(j \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot (-1)^{i-1} \quad (2-17a)$$

bzw.

$$a_i = \frac{4}{\pi} \cdot 2\beta \cdot (-1)^{i-1} \cdot \frac{\omega_0^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot \sum_{j=1,3,5,\dots}^M j^{2i-2} \quad (2-17b)$$

Der maximale Wert des Indexes i wäre beispielsweise so zu bestimmen, daß eine gewählte Fehlerschranke mit

$$b_M \cdot \frac{(M \cdot \omega_0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot t^{2i-1} \leq \varepsilon \quad (2-18 a)$$

bzw.

$$\frac{4}{\pi} \cdot 2\beta \cdot \frac{(M \cdot \pi)^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot \frac{1}{M} \leq \varepsilon \quad (2-18 b)$$

nicht überschritten wird. Da M die Anzahl der Fourier-Koeffizienten und damit die Genauigkeit der Fourier-Entwicklung bestimmt, wird hiermit die maximale Anzahl der resultierenden Parabelkoeffizienten  $a_i$  ( $\hat{=}$  maximaler Wert von i) erheblich beeinflusst. In diesem Fall erweist sich die Formulierung (2-6 b) als vorteilhaft, da mit

$$\kappa_{i+1} = -\frac{\omega_0^2}{(2i+1) \cdot 2i} \cdot \frac{\sum_{j=1,3,5,\dots}^M j^{2i}}{\sum_{j=1,3,5,\dots}^M j^{2i-2}} \quad (2-19)$$

eine zyklische Berechnung der Koeffizienten erfolgen kann. Eine Abschätzung der Zahlengrößenordnung sei hier mit etwa 6 Fourier-Koeffizienten bei maximalem Wert  $i \approx 5 \cdot 6 = 30$  vorgenommen. Es folgt dann für diesen relativ kleinen Wert bereits  $M^{2i} \approx 11^{60} \approx 3.04 \cdot 10^{62}$ . Es sei hier angemerkt, daß sich eine grobe Fourier-Entwicklung im Bereich kleiner Frequenzen als nachteilig erweist, da hier die Approximation an den gegebenen konstanten Dämpfungsverlauf schwer erreichbar ist.

## 3. Realisierung der hysteretischen Dämpfung bei einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden

### 3.1 Gesamtproblematik

In Abschnitt 2 sind alternative Wege zur geschlossenen Lösung der hysteretischen Dämpfung im Zeitraum gezeigt worden. Werden Systeme betrachtet, für die sich die Eigenformen und Eigenwerte vollständig (und realistisch) ermitteln lassen, stellt die implizite Lösung den numerisch sinnvollsten Weg dar. Im Falle hoher Eigenfrequenzen bzw. sehr eng beieinander liegender Eigenwerte stellen sich zunehmend numerische Schwierigkeiten ein. Dies kann leicht durch die Anwendung von (2-4) verifiziert werden.

Bei direkter Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen muß eine explizite Berechnung der Dämpfungsmatrix [C] vorab erfolgen; das bedeutet die Bestimmung der Parabel-Koeffizienten mittels der Caughey-Reihe - gekoppelt mit notwendigem Gleichungslöser bzw. entkoppelt in rekursiver Form. Abgeschätzt für einen relativ kleinen Frequenzbereich ist hier durch die einzelnen Bestimmungsmöglichkeiten bereits gezeigt worden, daß innerhalb der Bestimmungsbeziehungen außerordentlich große Zahlen und entsprechende Zahlendifferenzen auftreten. Aufgrund dieser extrem schlechten Konditionierung führen Lösungsroutinen mit den üblichen Standardoperationen schnell zu unrealistischen, d.h. unbrauchbaren bis fehlerhaften Ergebnissen.

Zur Realisierung der Lösungen sollen daher Optionen diskutiert werden, die sich näherungsweise in einen "physikalischen" bzw. "mathematischen" Teilbereich untergliedern lassen. Im ersten Fall trifft dies auf Systeme zu,

für die beispielsweise mit vernünftigen Aufwand näherungsweise nur die unteren Eigenwerte und Eigenformen innerhalb eines begrenzten Frequenzbereiches betrachtet werden, da höhere Frequenzanteile nur noch geringe Beiträge zur Gesamtlösung erbringen.

Sind jedoch Modelle beispielsweise zur Simulation des Halbraumes in der Bodendynamik zu betrachten, ist der implizite Weg über Eigenformentwicklung ausgeschlossen; hier kann die explizit formulierte Dämpfungsmatrix eingesetzt werden. Für diesen Fall werden Operatoren entwickelt, die die Berechnung beliebig großer Zahlen (und deren entsprechende Matrizen) unter Umgehung üblicher Standardroutinen gestatten. Des Weiteren wird ein modifizierter Ansatz für die direkte Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen erörtert, der auf implizitem Wege die gesuchten Schwingungsgrößen bei Unterstellung hysteretischer Dämpfung hinreichend genau approximiert; hierbei ist jedoch eine Verifikation der Gesamtdämpfungsmatrix nicht mehr möglich.

Bei jeder diskutierten Alternative zeigt sich selbstverständlich, daß die Forderung nach Berücksichtigung einer beliebigen (z. B. von der üblichen Rayleigh-Beziehung abweichenden) Dämpfung zu einem außerordentlichen numerischen Aufwand führt, der sinnvollerweise nur für spezifische Sonderbetrachtungen anzuwenden ist.

### 3.2 Beispiel am Balken mit 11 Freiheitsgraden

Als Beispiel zur Ermittlung der hysteretischen Dämpfungsmatrix soll ein einfacher Balken auf 2 Stützen mit einer Stützweite von  $\ell = 4$  m dienen. Der Rechteckquerschnitt habe die Maße bei einer Breite und Höhe von  $b = 0.12$  m und  $h = 0.20$  m, d. h.

|                   |                 |             |
|-------------------|-----------------|-------------|
| Fläche            | $F = 0.024$     | $m^2$       |
| Trägheitsmoment   | $J = 0.00008$   | $m^4$       |
| Elastizitätsmodul | $E = 30\,000$   | $MN/m^2$    |
| Dichte            | $\rho = 0.0024$ | $MNs^2/m^4$ |

Die Eigenwerte des kontinuierlichen Systems folgen aus

$$\omega_j = \frac{\lambda_j^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot F}} \quad \text{mit } \lambda_j = j \cdot \pi, \quad j = 1, 2, \dots$$

z. B.  $\omega_1 = 125.9$  rad/s, d. h.  $f_1 = 20.04$  Hz.

Die Diskretisierung des Balkens als ebenes Finite-Element-Modell mit 4 Balkenelementen führt bei nicht eingespannter, symmetrischer Lagerung auf 11 Freiheitsgrade, wenn in den drei mittleren Knoten axiale Verschiebungen zugelassen sind. Die Zuordnung der Knoten des in 11 Freiheitsgrade diskretisierten Balkens ist Bild 3-1 zu entnehmen.

Die Steifigkeitsmatrix und die Massenmatrix sind Tabelle 3-1 und Tabelle 3-2 zu entnehmen. Die Freiheitsgrade 2, 5 und 8 entsprechen axialen Verschiebungen. Die Eigenfrequenzen des diskreten Systems lauten bei konsistenter Massendarstellung:

|       |   |           |          |   |            |
|-------|---|-----------|----------|---|------------|
| $f_1$ | = | 20.02 Hz  | $f_7$    | = | 861.35 Hz  |
| $f_2$ | = | 80.15 Hz  | $f_8$    | = | 974.62 Hz  |
| $f_3$ | = | 181.97 Hz | $f_9$    | = | 1269.60 Hz |
| $f_4$ | = | 350.09 Hz | $f_{10}$ | = | 1527.40 Hz |
| $f_5$ | = | 453.37 Hz | $f_{11}$ | = | 1583.80 Hz |
| $f_6$ | = | 551.38 Hz |          |   |            |

Die einfachste Anwendung der Caughey-Dämpfung ist der Sonderfall  $p-1 = 1$ , wodurch (2-7 c) zur (viskosen) Rayleigh-Dämpfung überführt wird (2-5), also

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

Hierbei erfolgt die Einhängung des Polynoms an 2 Stützstellen (Frequenzen) und setzt sich aus einer Geraden und einer Hyperbel zusammen:

$$\beta_j = \frac{1}{2} \cdot (a_0 / \omega_j + a_1 \cdot \omega_j) \tag{3-1}$$

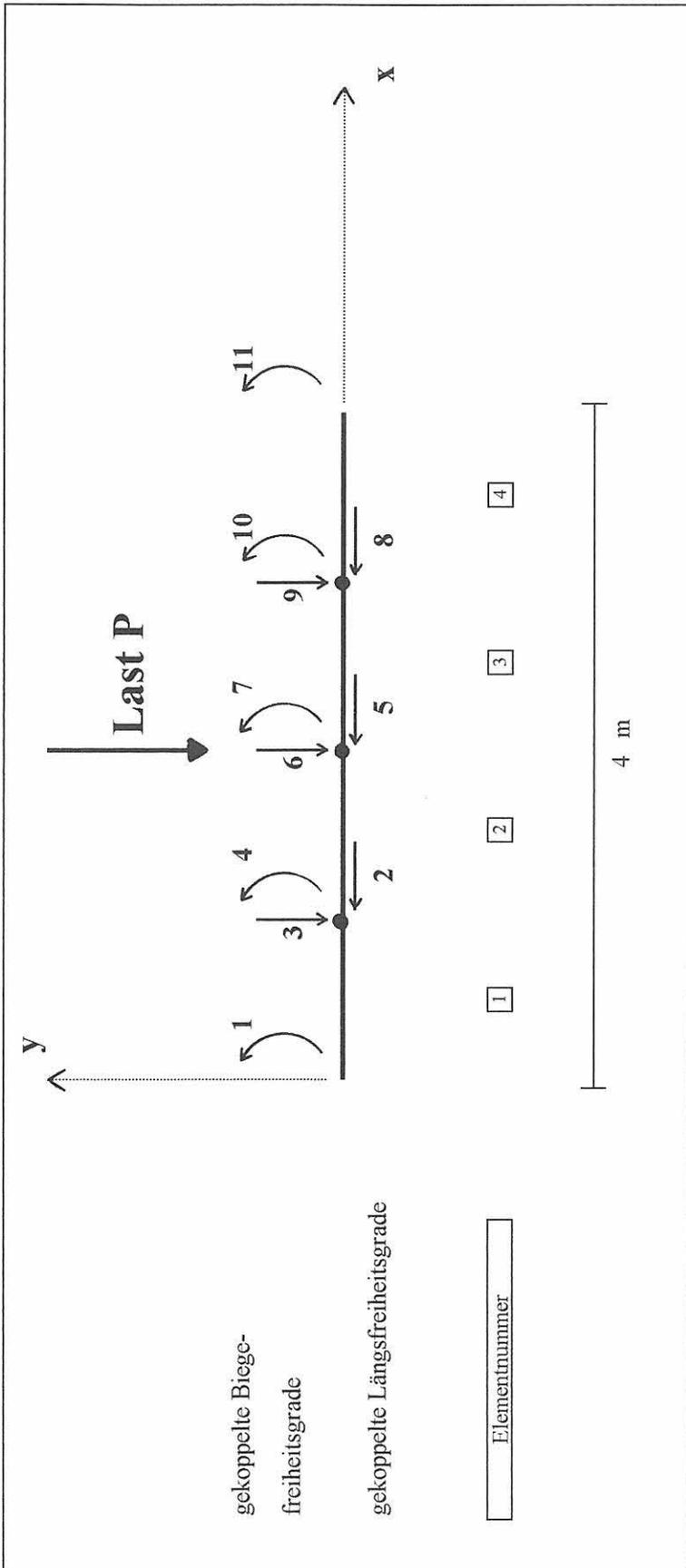


Bild 3-1 Diskretisierter Balken auf 2 Stützen

## STEIFIGKEITSMATRIX

|    |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|
| 1  | 0.9600E+01  | 0.0000E+00  | -0.1440E+02 | 0.4800E+01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 2  | 0.0000E+00  | 0.1440E+04  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.7200E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 3  | -0.1440E+02 | 0.0000E+00  | 0.5760E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2880E+02 | 0.1440E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 4  | 0.4800E+01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1920E+02  | 0.0000E+00  | -0.1440E+02 | 0.4800E+01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 5  | 0.0000E+00  | -0.7200E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1440E+04  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.7200E+03 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 6  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2880E+02 | -0.1440E+02 | 0.0000E+00  | 0.5760E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.2880E+02 | 0.1440E+02  | 0.0000E+00 |
| 7  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1440E+02  | 0.4800E+01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1920E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | -0.1440E+02 | 0.4800E+01 |
| 8  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.7200E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1440E+04  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 9  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2880E+02 | -0.1440E+02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.5760E+02  | 0.0000E+00 |
| 10 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1440E+02  | 0.4800E+01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1920E+02 |
| 11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.1440E+02  | 0.4800E+01 |

11

|    |            |
|----|------------|
| 1  | 0.0000E+00 |
| 2  | 0.0000E+00 |
| 3  | 0.0000E+00 |
| 4  | 0.0000E+00 |
| 5  | 0.0000E+00 |
| 6  | 0.0000E+00 |
| 7  | 0.0000E+00 |
| 8  | 0.0000E+00 |
| 9  | 0.1440E+02 |
| 10 | 0.4800E+01 |
| 11 | 0.9600E+01 |

Tabelle 3-2 Massenmatrix eines Balkens mit 11 Freiheitsgraden

MASSENMATRIX

|    | 1           | 2          | 3           | 4           | 5          | 6           | 7           | 8          | 9           | 10          |
|----|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.5742E-06  | 0.0000E+00 | 0.1764E-05  | -0.4178E-06 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 2  | 0.0000E+00  | 0.3840E-04 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.9600E-05 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3  | 0.1764E-05  | 0.0000E+00 | 0.4325E-04  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.7175E-05  | -0.1764E-05 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 4  | -0.4178E-06 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.1148E-05  | 0.0000E+00 | 0.1764E-05  | -0.4178E-06 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 5  | 0.0000E+00  | 0.9600E-05 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.3840E-04 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.9600E-05 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.7175E-05  | 0.1764E-05  | 0.0000E+00 | 0.4325E-04  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.7175E-05  | -0.1764E-05 |
| 7  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.1764E-05 | -0.4178E-06 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.1148E-05  | 0.0000E+00 | 0.1764E-05  | -0.4178E-06 |
| 8  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.9600E-05 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.3840E-04 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.7175E-05  | 0.1764E-05  | 0.0000E+00 | 0.4325E-04  | 0.0000E+00  |
| 10 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.1764E-05 | -0.4178E-06 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.1148E-05  |
| 11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.1764E-05 | -0.4178E-06 |

11

|    |             |
|----|-------------|
| 1  | 0.0000E+00  |
| 2  | 0.0000E+00  |
| 3  | 0.0000E+00  |
| 4  | 0.0000E+00  |
| 5  | 0.0000E+00  |
| 6  | 0.0000E+00  |
| 7  | 0.0000E+00  |
| 8  | 0.0000E+00  |
| 9  | -0.1764E-05 |
| 10 | -0.4178E-06 |
| 11 | 0.5742E-06  |

Bei Einhängung in die erste und dritte Eigenfrequenz, welche bei symmetrischer Belastung maßgeblich das Deformationsverhalten bestimmen, ist für Frequenzen oberhalb der zweiten Stützstelle eine linear ansteigende Erhöhung sichtbar, siehe Bild 3-2 für  $\beta_j = 5\%$ . Die Dämpfungsmatrix hat gemäß (2-5) den Bandcharakter von [M] und [K].

Der Balken wird durch eine Stufenlast in Balkenmitte zu Biegeschwingungen angeregt. Charakteristisch für diese zeitlich konstante Lastfunktion ist, daß im wesentlichen kleine Erregerfrequenzen vorliegen; höhere Erregerfrequenzen werden ausgeblendet. Eine modale Zerlegung des Schwingungsverlaufes zeigt, daß er zu ca. 99 % der ersten Eigenform zugeordnet werden kann. Das Antwortverhalten des Systems für den Deformationsverlauf von Freiheitsgrad 6 zeigt Bild 3-3 zum einen für das ungedämpfte System und zum anderen für die viskose Dämpfung gemäß Bild 3-2.

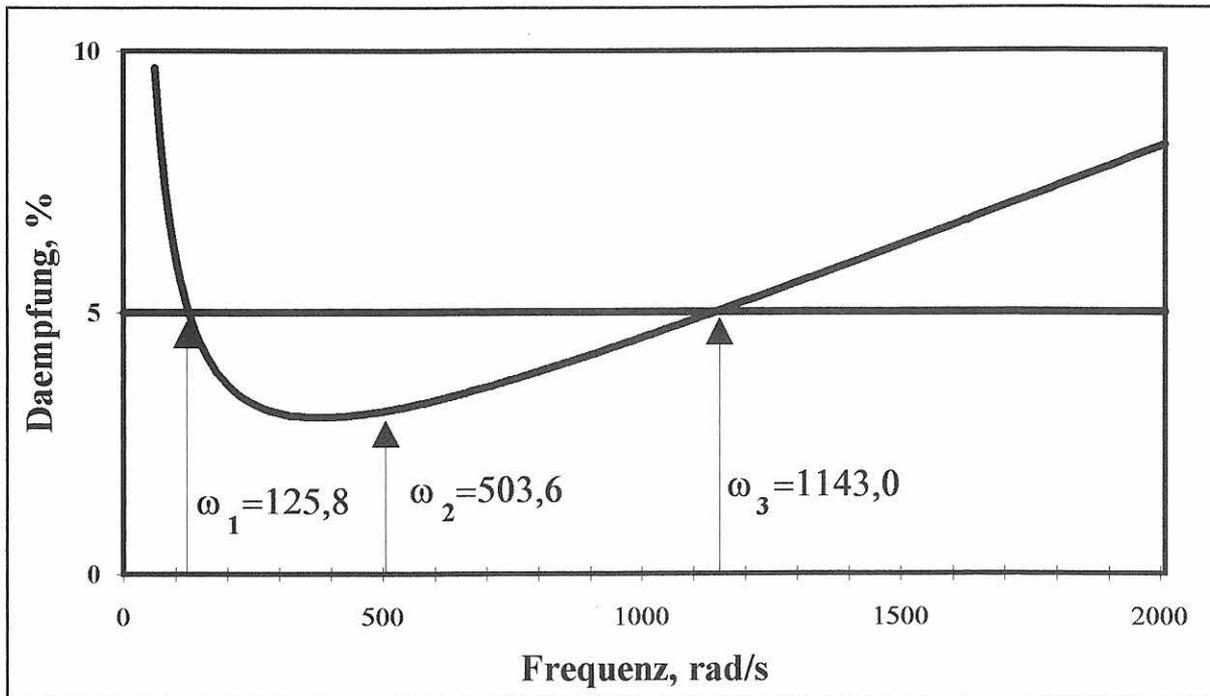


Bild 3-2 Dämpfungsverhalten eines Systems mit 11 Freiheitsgraden bei viskoser Dämpfung

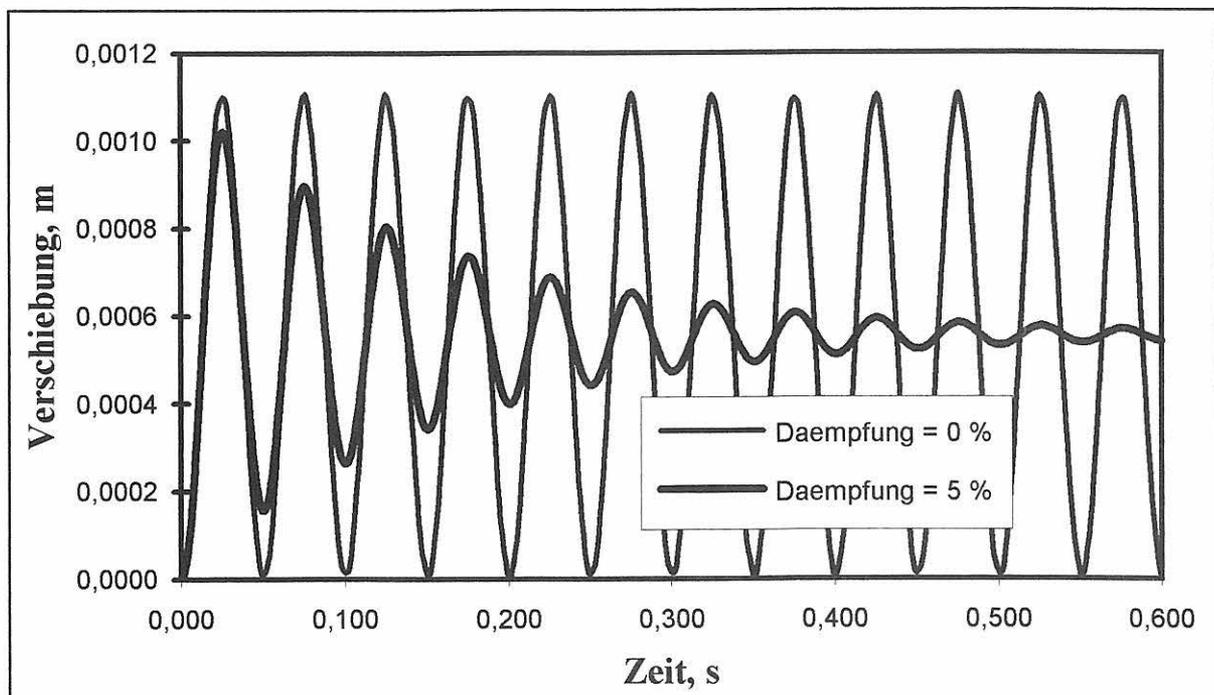


Bild 3-3 Antwortverhalten des Balkens bei viskoser Dämpfung

Da die Dämpfung für beliebige Erregerfrequenzen ausschließlich durch die Dämpfungsfaktoren in den Eigenwerten definiert wird, ist es im Falle der frequenzunabhängigen, hysteretischen Dämpfung hinreichend, das Caughey-Polynom ausschließlich in den Eigenfrequenzen zu entwickeln. Es wird also nach Abschnitt 2.2.2 die punktweise Erfüllung unterstellt, wofür folgend die Problematik der numerischen Handhabung des Polynoms gezeigt wird. Eine Annäherung an die hysteretische Dämpfung kann die Einhängung für die ersten, jedoch nicht für alle Eigenfrequenzen sein. Hieraus resultiert ein verstärkter Anstieg der Dämpfung in den höheren Frequenzen. Es ist zu beachten, daß bei reduzierter Einhängung eine gerade Zahl von Frequenzen zu wählen ist, da das Polynom sonst in den höheren Frequenzen negative Dämpfungsverhältnisse aufweist, was zu instabilen Systemeigenschaften in der weiteren Analyse führt. Mit wachsender Anzahl von Stützstellen und steigenden Frequenzen weicht das Polynom von der Sollvorgabe  $\beta_{\text{soll}} = 5\%$  immer stärker ab. Entscheidend für den Anstieg, also für die Abweichung vom konstanten Verlauf des Dämpfungsverhältnisses, ist der jeweils letzte Summand des Polynoms. Hieraus resultiert bei jeder Stützstelle ein Vorzeichenwechsel der Dämpfung mit ansteigendem Gradienten.

Daraus folgt, daß das Verfahren nach Caughey im hohen Frequenzbereich nicht mehr anwendbar ist, da auch die Eigenwerte mit einer ansteigenden Genauigkeit ermittelt und für die Einhängung bereitgestellt werden müssen, so daß selbst bei der hier verwendeten REAL\*8-Darstellung für die Mantisse die Genauigkeitsgrenze überschritten wird. Für den Balken folgt dann zwar eine orthonormierte Dämpfungsmatrix nach Caughey, die höheren Dämpfungsverhältnisse weichen dann aber zunehmend von der Sollvorgabe ab:

$$\beta_1 \text{ bis } \beta_8 = 0.050 \quad \beta_9 = 0.059 \quad \beta_{10} = 0.066 \quad \beta_{11} = 0.070$$

Erst eine vollständige REAL\*16 Mantisse ermöglicht die genaue Anwendung der Caughey-Reihe. Tabelle 3-3 zeigt hierfür die mit (2-6) gebildete hysteretische Dämpfungsmatrix einschließlich ihrer Caughey-Koeffizienten  $a_i$ .

Die Nebendiagonalglieder mit dem Wert Null folgen aus der vollkommenen Entkoppelung der Längssteifigkeit von der Biegesteifigkeit des Balkens. Der mit ansteigender Frequenz abnehmende Exponent von  $a_i$  verdeutlicht die Grenze der Anwendbarkeit von (2-6) für Standardzahldarstellungen. Das Generieren der hysteretischen Dämpfungsmatrix nach (2-4) aus den Eigenformen führt zu identischen Werten. Der Nachteil der Schreibweise von (2-4) ist, daß vorher alle Eigenformen ermittelt werden müssen. Die in Tabelle 3-3 angegebene Dämpfungsmatrix ist orthogonal und hat in den Eigenformen die gemäß (2-3d)

$$[\beta] = \frac{1}{2} \cdot [\omega]^{-1} \cdot [\phi^T] \cdot [C] \cdot [\phi] \quad (3-2)$$

eingestellten Dämpfungsverhältnisse, s. Tabelle 3-4.

Ein Vorteil der Summierung entsprechend der Caughey-Reihe (2-6) ist, daß nicht in jedem Fall alle Eigenwerte überlagert, d.h. auch ermittelt werden müssen. Diese Möglichkeit besteht dann, wenn die Systemantwort in einem begrenzten unteren Frequenzbereich zu erwarten ist. Hieraus resultiert gleichzeitig eine verstärkte Dämpfung in den höheren Eigenfrequenzen. Die verstärkte Dämpfung in den höheren Frequenzen läßt die Koeffizienten der Caughey-Dämpfungsmatrix erheblich ansteigen. Die Grenze dieser Methode der begrenzten Frequenzhöhe ist dann erreicht, wenn bei Systemen mit vielen hohen Frequenzen die Exponenten die Darstellbarkeit in den Standardzahlendefinitionen überschreiten. Für das gewählte System kann diese Grenze schon erreicht sein, wenn 10 Summanden überlagert werden, die einer Einhängung im unteren Frequenzbereich zuzuordnen sind. Die Vergrößerung der Koeffizienten wird in Tabelle 3-5 verdeutlicht, wenn die Einhängung in den ersten 4 Eigenwerten vorgenommen wird. Tabelle 3-6 zeigt die Orthogonalität dieser Dämpfungsmatrix mit einem deutlichen Anstieg der Dämpfung in den höheren Frequenzen. Die gezeigte Überhöhung der Koeffizienten hat aber bei Anregung der unteren Frequenzen keinen Einfluß auf die Lösung, also z. B. auf die Ermittlung der Verschiebungen des Systems.



Tabelle 3-4 Orthogonalität der Caughey-Dämpfungsmatrix eines Balkens mit 11 Freiheitsgraden

| ORTHOGONALITÄT DER CAUGHEY-MATRIX                         |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1   | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          | 11          |
| 1   | 0.5000E-01  | -0.3552E-17 | -0.3340E-17 | -0.1595E-17 | 0.5594E-27  | -0.4840E-17 | 0.7629E-18  | -0.2935E-13 | 0.4750E-12  | -0.3988E-18 |
| 2   | -0.8873E-18 | 0.5000E-01  | -0.4529E-09 | -0.3569E-17 | 0.2014E-16  | -0.1084E-17 | 0.1456E-17  | -0.1443E-26 | 0.1989E-13  | -0.2717E-17 |
| 3   | -0.3675E-18 | -0.1995E-09 | 0.5000E-01  | 0.1193E-17  | 0.1243E-10  | 0.3027E-12  | 0.5676E-18  | 0.7411E-27  | 0.1167E-17  | 0.1047E-17  |
| 4   | -0.9123E-19 | -0.8169E-18 | 0.6203E-18  | 0.5000E-01  | 0.4602E-10  | -0.2801E-17 | -0.8399E-18 | 0.1965E-27  | -0.7850E-18 | -0.3352E-19 |
| 5   | 0.2471E-28  | 0.3561E-17  | 0.4990E-11  | 0.3953E-10  | 0.5000E-01  | -0.1204E-10 | 0.4813E-12  | 0.6639E-18  | 0.1057E-13  | 0.5019E-14  |
| 6   | -0.1758E-18 | -0.1575E-18 | 0.9988E-13  | -0.1778E-17 | -0.9902E-11 | 0.5000E-01  | 0.4411E-18  | 0.2385E-26  | 0.2351E-17  | 0.1512E-17  |
| 7   | 0.1773E-19  | 0.1355E-18  | 0.1199E-18  | -0.3414E-18 | 0.2533E-12  | 0.2823E-18  | 0.5000E-01  | -0.6384E-21 | 0.1907E-12  | 0.7232E-14  |
| 8   | -0.6029E-15 | -0.1187E-27 | 0.1384E-27  | 0.7059E-28  | 0.3088E-18  | 0.1349E-26  | -0.5642E-21 | 0.5000E-01  | 0.6200E-10  | 0.2904E-17  |
| 9   | 0.7492E-14  | 0.1256E-14  | 0.1673E-18  | -0.2165E-18 | 0.3773E-14  | 0.1021E-17  | 0.1294E-12  | 0.4759E-10  | 0.5000E-01  | 0.5952E-11  |
| 10  | -0.5228E-20 | -0.1426E-18 | 0.1247E-18  | -0.7683E-20 | 0.1490E-14  | 0.5458E-18  | 0.4078E-14  | 0.1853E-17  | 0.4947E-11  | 0.5000E-01  |
| 11  | -0.3294E-12 | 0.1632E-20  | -0.4067E-12 | -0.4056E-24 | -0.1887E-14 | -0.8027E-18 | -0.6293E-14 | -0.1108E-17 | -0.2255E-11 | 0.2495E-07  |
| 11  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | -0.2606E-10 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 2   | 0.3225E-19  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 3   | -0.3540E-11 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 4   | -0.1835E-23 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 5   | -0.6590E-14 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 6   | -0.2306E-17 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 7   | -0.1157E-13 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 8   | -0.1801E-17 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 9   | -0.2813E-11 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 10  | 0.2587E-07  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 11  | 0.5000E-01  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| DIAGONALGLIEDER : DÄMPFUNGSVERHÄLTNISSE IN DEN EIGENWERTE |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.5000E-01  |
| 11  | 0.5000E-01  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |

26 Tabelle 3-5 Caughey-Dämpfungsmatrix eines Balkens mit 11 Freiheitsgraden bei Einhängung in den ersten 4 Eigenwerten

| CAUGHEY-DÄMPFUNGSMATRIX MIT 4 KOEFFIZIENTEN |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10         |
| 1   | 0.3971E+00  | 0.0000E+00  | -0.2648E+00 | 0.6438E+00  | 0.0000E+00  | -0.2588E+00 | 0.3609E+00  | 0.0000E+00  | -0.1209E+00 | 0.1696E+00 |
| 2   | 0.0000E+00  | 0.9275E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1141E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.6872E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 3   | -0.2648E+00 | 0.0000E+00  | 0.4536E+00  | -0.2588E+00 | 0.0000E+00  | 0.2709E+00  | 0.1440E+00  | 0.0000E+00  | -0.1087E-02 | 0.2588E+00 |
| 4   | 0.6438E+00  | 0.0000E+00  | -0.2588E+00 | 0.1155E+01  | 0.0000E+00  | -0.3857E+00 | 0.8133E+00  | 0.0000E+00  | -0.2588E+00 | 0.4721E+00 |
| 5   | 0.0000E+00  | -0.1141E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1615E+03  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1141E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 6   | -0.2588E+00 | 0.0000E+00  | 0.2709E+00  | -0.3857E+00 | 0.0000E+00  | 0.4525E+00  | 0.4081E-34  | 0.0000E+00  | 0.2709E+00  | 0.3857E+00 |
| 7   | 0.3609E+00  | 0.0000E+00  | 0.1440E+00  | 0.8133E+00  | 0.0000E+00  | 0.9431E-34  | 0.9053E+00  | 0.0000E+00  | -0.1440E+00 | 0.8133E+00 |
| 8   | 0.0000E+00  | 0.6872E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1141E+03 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.9275E+02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 9   | -0.1209E+00 | 0.0000E+00  | -0.1087E-02 | -0.2588E+00 | 0.0000E+00  | 0.2709E+00  | -0.1440E+00 | 0.0000E+00  | 0.4536E+00  | 0.2588E+00 |
| 10  | 0.1696E+00  | 0.0000E+00  | 0.2588E+00  | 0.4721E+00  | 0.0000E+00  | 0.3857E+00  | 0.8133E+00  | 0.0000E+00  | 0.2588E+00  | 0.1155E+01 |
| 11  | 0.5560E-01  | 0.0000E+00  | 0.1209E+00  | 0.1696E+00  | 0.0000E+00  | 0.2588E+00  | 0.3609E+00  | 0.0000E+00  | 0.2648E+00  | 0.6438E+00 |

| CAUGHEY-KOEFFIZIENTEN |            |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------------------|------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1                     | 0.5560E-01 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2                     | 0.0000E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3                     | 0.1209E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4                     | 0.1696E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5                     | 0.0000E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6                     | 0.2588E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7                     | 0.3609E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8                     | 0.0000E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9                     | 0.2648E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10                    | 0.6438E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11                    | 0.3971E+00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

0.969E+01 0.184E-03 -0.987E-10 0.144E-16

Tabelle 3-6 Orthogonalität der Caughey-Dämpfungsmatrix eines Balkens mit 11 Freiheitsgraden bei Einhängung in den ersten 4 Eigenwerten

|    | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.5000E-01  | -0.3552E-17 | -0.3340E-17 | -0.1595E-17 | 0.3687E-25  | -0.1761E-15 | 0.4858E-15  | -0.2935E-13 | 0.4760E-12  | -0.4369E-14 |
| 2  | -0.8873E-18 | 0.5000E-01  | -0.4529E-09 | -0.3569E-17 | 0.1900E-15  | -0.4798E-16 | 0.7690E-15  | -0.8485E-23 | 0.1099E-13  | -0.2986E-13 |
| 3  | -0.3675E-18 | -0.1995E-09 | 0.5000E-01  | 0.1268E-17  | 0.1173E-09  | 0.1123E-10  | 0.3012E-15  | 0.3863E-23  | 0.4055E-14  | 0.5190E-14  |
| 4  | -0.9123E-19 | -0.8169E-18 | 0.6591E-18  | 0.5000E-01  | 0.4341E-09  | -0.1149E-15 | -0.9238E-16 | -0.1871E-23 | -0.1971E-14 | 0.2349E-14  |
| 5  | 0.1629E-26  | 0.3388E-16  | 0.4706E-10  | 0.3352E-09  | 0.4716E+00  | -0.4467E-09 | 0.2506E-09  | 0.6303E-17  | 0.4390E-10  | 0.5443E-10  |
| 6  | -0.6394E-17 | -0.6974E-17 | 0.3705E-11  | -0.7294E-11 | -0.3673E-09 | 0.1855E+01  | 0.2027E-15  | 0.9131E-23  | 0.9582E-14  | 0.1557E-13  |
| 7  | 0.1129E-16  | 0.7155E-16  | 0.6363E-16  | -0.3755E-16 | 0.1319E-09  | 0.1297E-15  | 0.2603E+02  | 0.3280E-18  | 0.7928E-09  | 0.7847E-10  |
| 8  | -0.6029E-15 | -0.6977E-24 | 0.7212E-24  | -0.6721E-24 | 0.2932E-17  | 0.5165E-23  | 0.2899E-18  | 0.5110E+02  | 0.2577E-06  | 0.3151E-13  |
| 9  | 0.7508E-14  | 0.6935E-15  | 0.5812E-15  | -0.5436E-15 | 0.1568E-10  | 0.4161E-14  | 0.5378E-09  | 0.1978E-06  | 0.2078E+03  | 0.6472E-07  |
| 10 | -0.5727E-16 | -0.1567E-14 | 0.6184E-15  | 0.5385E-15  | 0.1616E-10  | 0.5619E-14  | 0.4425E-10  | 0.2011E-13  | 0.5380E-07  | 0.5421E+03  |
| 11 | -0.3294E-12 | 0.1775E-20  | -0.4075E-12 | -0.4887E-12 | -0.2467E-10 | -0.1050E-13 | -0.8240E-10 | -0.1160E-13 | -0.2969E-07 | 0.3362E-03  |

|    | 1           | 11 |
|----|-------------|----|
| 1  | -0.2606E-10 |    |
| 2  | 0.3507E-19  |    |
| 3  | -0.3547E-11 |    |
| 4  | -0.2211E-21 |    |
| 5  | -0.8618E-10 |    |
| 6  | -0.3015E-13 |    |
| 7  | -0.1515E-09 |    |
| 8  | -0.1885E-13 |    |
| 9  | -0.3703E-07 |    |
| 10 | 0.3486E-03  |    |
| 11 | 0.6533E+03  |    |

ORTHOGONALITÄT DER CAUGHEY-MATRIX

DIAGONALGLIEDER : DÄMPFungsverhältnisse IN DEN EIGENWERTEN

|    | 1         | 11        |
|----|-----------|-----------|
| 1  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 2  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 3  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 4  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 5  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 6  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 7  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 8  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 9  | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 10 | 0.500E-01 | 0.500E-01 |
| 11 | 0.500E-01 | 0.500E-01 |

### 3.3 Lösungen mit Berücksichtigung weniger Eigenwerte

#### 3.3.1 Modale Integration mit Frequenzausblendung

In Abschnitt 2.1 ist die Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen des diskreten, schwingenden Systems mittels modaler Integration über alle Eigenmoden dargestellt worden. Bei diesem Lösungsweg besteht die Möglichkeit, gezielt Eigenformen auszublenden. Dadurch kann einerseits der rechnerische Aufwand für die Integration erheblich reduziert und andererseits kann der Einfluß der höheren und gleichzeitig ungenaueren Moden ausgeschaltet werden. Es ist auf Grund der numerischen Probleme ratsam, sich auf einen begrenzten Frequenzbereich, der in der Baudynamik weit unterhalb 100 Hz liegt, zu beschränken, wie es durch Frequenzbegrenzung im Modalraum leicht vollzogen werden kann. Die Transformation nach (2-1) erlaubt das Ausblenden von Eigenformen durch eine unvollständige Überlagerung, indem nicht alle Eigenformen  $j = 1, 2 \dots M$ , sondern nur eine begrenzte Anzahl von Eigenformen  $j = 1, 2 \dots m$  (mit  $m < M$ ) verwendet werden. Hierbei wird die Eigenvektormatrix  $[\phi]$  in Eigenvektoren aufgesplittet. Anstelle der vollständigen Superposition

$$[\phi] = [(\varphi_1), (\varphi_2), \dots, (\varphi_m), \dots, (\varphi_M)] \quad (3-3)$$

lautet die reduzierte Eigenvektormatrix dann

$$[\phi]_{\text{red}} = [(\varphi_1), (\varphi_2), \dots, (\varphi_m)] \quad (3-4)$$

Durch diese Schreibweise werden nur die ersten  $m$  Eigenformen mit der Grenzfrequenz

$$f_m = \omega_m / 2\pi \quad (3-5)$$

überlagert. Hierbei wird die Eigenschaft des Systems ausgenutzt, daß die sog. Beteiligungsfaktoren (s. /7/, /22/) im höheren Frequenzbereich von kleiner Größenordnung sind, also nur einen geringen bzw. vernachlässigbaren Anteil an der Gesamtlösung haben.

#### 3.3.2 Direkte Integration mit Frequenzausblendung

##### 3.3.2.1 Frequenzausblendung durch Kondensation im Modalraum

Die Möglichkeit des Ausblendens höherer Systemfrequenzen ist ein häufiges Argument für modale Integrationstechniken, zumal die vorzunehmende Modalanalyse nicht der Ermittlung aller Eigenformen bedarf, sondern sich auf die dominanten, unteren Eigenformen beschränken kann. Eine dieser modalen Technik vergleichbare Vorgehensweise läßt sich auch für die direkten Integrationstechniken formulieren, wobei der Weg zunächst wieder über eine erforderliche Modalanalyse führt, bei der nur die dominanten, unteren Eigenformen ermittelt werden müssen. Durch die Art der vorgeschlagenen Reduktion von Freiheitsgraden mittels Ausblenden höherer Frequenzen kann sich die Anzahl der Freiheitsgrade erheblich reduzieren. Allerdings entsteht hiermit ein völlig neues mechanisches Modell mit neuen Freiheitsgraden, die in keiner Weise identisch sind mit den Freiheitsgraden des Ausgangssystems. Nach ausgeführter Integration am Reduktionsmodell unter Verwendung der ebenfalls reduzierten Caughey-Dämpfungsmatrix folgt eine modale Rücktransformation auf die Topologie des Ausgangsmodells. Die Steifigkeitsmatrix des Reduktionsmodells ähnelt der eines Kettenschwingers, d. h. es existiert eine wechselseitige Koppelung aller Freiheitsgrade.

Die Herleitung eines direkten Reduktionsmodells basiert auf der Umkehrung von (2-3) bei der Ermittlung der Systemmatrizen  $[K]$  bzw.  $[M]$ :

$$\begin{aligned} [M] &= [\phi^T]^{-1} \cdot [I] \cdot [\phi]^{-1} \\ [K] &= [\phi^T]^{-1} \cdot [\omega^2] \cdot [\phi]^{-1} \\ [C] &= [\phi^T]^{-1} \cdot [2\beta \cdot \omega] \cdot [\phi]^{-1} \\ (P) &= [\phi^T]^{-1} \cdot (P^*) \end{aligned} \quad (3-6 \text{ a-d})$$

Bei vollständiger Überlagerung über alle Modalterme ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) entstehen die Systemmatrizen des Ausgangssystems. Die entsprechende Schreibweise der unvollständigen Überlagerung resultiert aus den reduzierten Matrizen des Modalraums, d. h. anstelle von

$$[1] = \begin{matrix} & j=1 & m & M \\ j=1 & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cdot & 1 & & \\ \cdot & & \dots & \\ m & & & 1 \\ \cdot & & & & 1 \\ \cdot & & & & & 1 \\ M & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

wird

$$[\hat{1}] = \begin{matrix} & j=1 & m \\ j=1 & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \cdot & 1 & \\ \cdot & & \dots \\ m & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

(3-7 a)

und anstelle von

$$[\omega^2] = \begin{matrix} & j=1 & m & M \\ j=1 & \left[ \begin{array}{cccc} \omega_1^2 & & & \\ \cdot & \omega_2^2 & & \\ \cdot & & \dots & \\ m & & & \omega_m^2 \\ \cdot & & & & \dots \\ \cdot & & & & & \dots \\ M & & & & & & \omega_M^2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

wird

$$[\hat{\omega}^2] = \begin{matrix} & j=1 & m \\ j=1 & \left[ \begin{array}{ccc} \omega_1^2 & & \\ \cdot & \omega_2^2 & \\ \cdot & & \dots \\ m & & & \omega_m^2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

(3-7 b)

und anstelle von

$$[\phi]^{-1} = [B] = [(b_1), (b_2), \dots, (b_m), \dots, (b_M)]$$

wird

$$[\hat{\phi}]^{-1} = [\hat{B}] = [(b_1), (b_2), \dots, (b_m)]$$

(3-7c)

verwendet.

Die Kennzeichnung mit der Dach-Tilde soll darauf hinweisen, daß diese Matrizen durch Streichen von Spalten und Zeilen der Matrizen des Ausgangssystems der Größe  $M \times M$  entstanden sind. Die Wellen-Tilde markiert die Systemmatrizen des durch Frequenzausblendung verkleinerten Systems der Größe  $m \times m$ . Bei der Bereitstellung der Eigenvektormatrix  $[\phi]$  ist es nicht nötig, daß entsprechend (3-3) alle Eigenwerte ermittelt werden müssen, sondern es reichen die ersten  $m$  Eigenwerte, während für den Bereich  $m+1, \dots, M$  beliebige Vektoren ( $\varepsilon$ ) als Platzhalter bereitgestellt werden, wobei ( $\varepsilon$ )  $\neq 0$  sein muß. So kann  $[\phi]$  lauten:

$$[\phi] = [(\varphi_1), (\varphi_2), \dots, (\varphi_m), (\varepsilon), \dots, (\varepsilon)] \quad (3-8)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $[\tilde{K}]$  und die Massenmatrix  $[\tilde{M}]$  des reduzierten Systems werden gemäß (3-6) ermittelt:

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= [\hat{\phi}^T]^{-1} \cdot [\hat{\omega}^2] \cdot [\hat{\phi}]^{-1} \\ [\tilde{M}] &= [\hat{\phi}^T]^{-1} \cdot [\hat{I}] \cdot [\hat{\phi}]^{-1} \end{aligned} \quad (3-9 \text{ a-b})$$

Der modal reduzierte Belastungsvektor lautet

$$(\tilde{P}) = [\hat{\phi}^T]^{-1} \cdot (P^*) \quad (3-9 \text{ c})$$

wobei  $(\tilde{P}^*)$  aus  $(P^*)$  hervorgeht, indem alle modalen Anteile für  $j > m$  zu Null gesetzt werden.

Im weiteren ist die Differentialgleichung

$$[\tilde{M}] \cdot (\ddot{\tilde{v}}) + [\tilde{C}] \cdot (\dot{\tilde{v}}) + [\tilde{K}] \cdot (\tilde{v}) = (\tilde{P}) \quad (3-10)$$

für die  $m$  unbekanntes Verschiebungsgrößen  $(\tilde{v})$  zu lösen. Die Dämpfungsmatrix  $[\tilde{C}]$  läßt sich je nach Erfordernis aus den Systemmatrizen  $[\tilde{K}]$  und  $[\tilde{M}]$  bilden. Das Produkt

$$[2\beta \cdot \tilde{\omega}] = [\tilde{\phi}^T] \cdot [\tilde{C}] \cdot [\tilde{\phi}] \quad (3-11)$$

ist wiederum orthogonal.

Die am reduzierten System durchzuführende Modalanalyse führt auf die Eigenvektoren  $[\tilde{\phi}]$  und die Eigenwerte  $[\tilde{\lambda}] = [\tilde{\omega}^2]$ . Hierbei gilt

$$[\tilde{\omega}^2] = [\tilde{\phi}^T] \cdot [\hat{\phi}^T]^{-1} \cdot [\hat{\omega}^2] \cdot [\hat{\phi}]^{-1} \cdot [\tilde{\phi}]$$

Es kann die Identität der Eigenwerte  $[\tilde{\omega}^2] = [\omega^2]$  für  $1 \leq j \leq m$  nur rechnerisch gezeigt werden, da Eigenwertprobleme für Systeme mit mehr als zwei Freiheitsgraden nicht in allgemeiner Form abgeleitet werden können. Deshalb kann der Nachweis für die Zulässigkeit von (3-8) auch nicht in allgemeiner Form, sondern nur in rechnerischer Form erfolgen. Lediglich für den Dreimassenschwinger wird die Richtigkeit von (3-8) nachgewiesen.

Abschließend sind die Ergebnisse  $(\tilde{v})$  des Reduktionsmodells wieder auf das Ausgangssystem zu transformieren. Der Ansatz zur Transformation liegt in der Identität der modalen Deformationsverläufe  $(y)$  für  $1 \leq j \leq m$  aus (2-2) und einer existierenden modalen Lösung  $(\tilde{v})$  aus (3-10). Hieraus folgt

$$(v) = [\hat{\phi}] \cdot [\tilde{\phi}]^{-1} \cdot (\tilde{v}) \quad (3-12)$$

### 3.3.2.2 Verifikation am Zweimassenschwinger

Ein Zweimassenschwinger mit konsistenter Massendarstellung soll auf einen Einmassenschwinger reduziert werden. Die Ableitung erfolgt unter Vernachlässigung des Dämpfungsterms. Die Eigenformen folgen aus der homogenen Zustandsgleichung:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (0) \quad (3-13)$$

Mit dem harmonischen Ansatz  $\ddot{v}_i = -a_i \omega^2 v_i$  wird die Determinante von (3-13) ermittelt:

$$\begin{bmatrix} -m_{11} \cdot \omega^2 + k_{11} & -m_{12} \cdot \omega^2 + k_{12} \\ -m_{21} \cdot \omega^2 + k_{21} & -m_{22} \cdot \omega^2 + k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (0) \quad (3-14)$$

Die Lösung des hieraus entstehenden Polynoms

$$\omega^4 - \frac{m_{11} \cdot k_{22} + m_{22} \cdot k_{11} - m_{12} \cdot k_{21} - m_{21} \cdot k_{12}}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12}} \cdot \omega^2 + \frac{k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12}} = 0 \quad (3-15)$$

lautet mit  $\lambda = \omega^2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{m_{11} \cdot k_{22} + m_{22} \cdot k_{11} - m_{12} \cdot k_{21} - m_{21} \cdot k_{12}}{2(m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12})} \\ &\mp \sqrt{\frac{(m_{11} \cdot k_{22} + m_{22} \cdot k_{11} - m_{12} \cdot k_{21} - m_{21} \cdot k_{12})^2 - k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}}{4(m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12})^2 - m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12}}} \end{aligned} \quad (3-16)$$

Die Eigenformen  $[\hat{\phi}]$  in nicht normierter Form

$$[\hat{\phi}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

mit  $\alpha_i = a_1 / a_2$  werden entsprechend /20/ durch Summation der Gleichungen in (3-14)

$$(-m_{11} \omega^2 + k_{11} - m_{21} \omega^2 + k_{21}) a_1 + (-m_{12} \omega^2 + k_{12} - m_{22} \omega^2 + k_{22}) a_2 = 0$$

ermittelt:

$$\alpha_i = \frac{-m_{12} \cdot \omega^2 + k_{12} - m_{22} \cdot \omega^2 + k_{22}}{-m_{11} \cdot \omega^2 + k_{11} - m_{21} \cdot \omega^2 + k_{21}} \quad (3-18)$$

Abschließend ist aus  $[\hat{\phi}]$  die orthonormierte Form  $[\phi]$  gemäß (2-3 b) herzustellen:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Die Inverse der Eigenvektormatrix in Termen der Eigenvektoren lautet:

$$[B] = [\phi]^{-1} = 1/D \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{22} & -\varphi_{12} \\ -\varphi_{21} & \varphi_{11} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad D = \varphi_{11} \cdot \varphi_{22} - \varphi_{21} \cdot \varphi_{12} \quad (3-20)$$

Aus (3-9) mit (3-7 c) resultiert das reduzierte System, d. h. mit der Steifigkeit  $\tilde{k} = \varphi_{22} \cdot \omega_1^2 \cdot \varphi_{22}$  und der Masse  $\tilde{m} = \varphi_{22} \varphi_{22}$  ergibt sich der Einmassenschwinger. Die Eigenfrequenz des Einmassenschwingers folgt aus  $\tilde{\omega}^2 = \tilde{k} / \tilde{m}$ , d. h. beide Systeme haben dieselbe Eigenfrequenz

$$\tilde{\omega}^2 = \varphi_{22} \omega_1^2 \varphi_{22} / \varphi_{22} \varphi_{22} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\omega}^2 = \omega_1^2.$$

### 3.3.2.3 Verifikation am Dreimassenschwinger

Gegeben sei ein Dreimassenschwinger mit konsistenter Massendarstellung der gemäß (2-3 c) orthonormierten Eigenvektormatrix:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

und den Eigenwerten  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$ . Die Inverse dieser Eigenvektormatrix lautet:

$$[B] = [\phi]^{-1} = 1/D \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

mit  $D = \varphi_{11} \cdot \varphi_{22} \cdot \varphi_{33} + \varphi_{12} \cdot \varphi_{23} \cdot \varphi_{31} + \varphi_{13} \cdot \varphi_{21} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{13} \cdot \varphi_{22} \cdot \varphi_{31} - \varphi_{11} \cdot \varphi_{23} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{12} \cdot \varphi_{21} \cdot \varphi_{33}$   
und

$$\begin{aligned} b_{11} &= + \varphi_{22} \cdot \varphi_{33} - \varphi_{23} \cdot \varphi_{32} \\ b_{21} &= - \varphi_{21} \cdot \varphi_{33} + \varphi_{23} \cdot \varphi_{31} \\ b_{31} &= + \varphi_{21} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{31} \cdot \varphi_{22} \\ b_{12} &= + \varphi_{13} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{12} \cdot \varphi_{33} \\ b_{22} &= + \varphi_{11} \cdot \varphi_{33} - \varphi_{13} \cdot \varphi_{31} \\ b_{32} &= - \varphi_{11} \cdot \varphi_{32} + \varphi_{31} \cdot \varphi_{12} \\ b_{13} &= + \varphi_{12} \cdot \varphi_{23} - \varphi_{13} \cdot \varphi_{22} \\ b_{23} &= - \varphi_{11} \cdot \varphi_{23} + \varphi_{13} \cdot \varphi_{21} \\ b_{33} &= + \varphi_{11} \cdot \varphi_{22} - \varphi_{12} \cdot \varphi_{21} \end{aligned}$$

Gemäß (3-9 a) und (3-9 b) werden aus dem Dreimassenschwinger unter Fortlassen der dritten Eigenfrequenz die Massen- und die Steifigkeitsmatrix eines Zweimassenschwingers gebildet:

$$[\tilde{M}] = \frac{1}{D^2} \cdot \begin{bmatrix} b_{11}^2 + b_{21}^2 & b_{11} \cdot b_{12} + b_{22} \cdot b_{21} \\ b_{11} \cdot b_{12} + b_{21} \cdot b_{22} & b_{12}^2 + b_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

$$[\tilde{K}] = \frac{1}{D^2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot b_{11}^2 + \lambda_2 \cdot b_{21}^2 & \lambda_1 \cdot b_{11} \cdot b_{12} + \lambda_2 \cdot b_{22} \cdot b_{21} \\ \lambda_1 \cdot b_{11} \cdot b_{12} + \lambda_2 \cdot b_{21} \cdot b_{22} & \lambda_1 \cdot b_{12}^2 + \lambda_2 \cdot b_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

$[\tilde{K}]$  und  $[\tilde{M}]$  sind symmetrisch. Die Eigenwerte des Zweimassenschwingers resultieren aus (3-16):

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{Z}{2N} \mp \sqrt{\frac{Z^2}{4N^2} - \frac{X}{N}} \quad (3-25)$$

mit

$$\begin{aligned} Z &= (b_{11}^2 + b_{21}^2) \cdot (\lambda_1 \cdot b_{12}^2 + \lambda_2 \cdot b_{22}^2) \\ &+ (b_{12}^2 + b_{22}^2) \cdot (\lambda_1 \cdot b_{11}^2 + \lambda_2 \cdot b_{21}^2) \\ &- 2(b_{11}b_{12} + b_{22}b_{21}) \cdot (\lambda_1 \cdot b_{11} \cdot b_{12} + \lambda_2 \cdot b_{21} \cdot b_{22}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= (b_{11}^2 + b_{21}^2) \cdot (b_{12}^2 + b_{22}^2) - (b_{11}b_{12} + b_{22}b_{21})^2 \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= (\lambda_1 \cdot b_{11}^2 + \lambda_2 \cdot b_{21}^2) \cdot (\lambda_1 \cdot b_{12}^2 + \lambda_2 \cdot b_{22}^2) - (\lambda_1 \cdot b_{11} \cdot b_{12} + \lambda_2 \cdot b_{22} \cdot b_{21})^2 \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^2 \end{aligned}$$

Die Auflösung von (3-25) führt auf die einfache Schreibweise

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - \lambda_1 \lambda_2} \quad \text{bzw.}$$

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

Somit folgen die Eigenwerte aus der Auflösung für die quadratische Gleichung

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = \lambda_2 \quad \text{und}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = \lambda_1$$

Beide Systeme beinhalten also die identischen ersten beiden Eigenwerte.

Für den Dreimassenschwinger soll die Praktikabilität der begrenzten Eigenwertanalyse gezeigt werden. Dann lautet mit (3-8) gemäß (3-21) die Eigenformmatrix

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varepsilon \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varepsilon \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varepsilon \end{bmatrix},$$

wobei  $\varepsilon$  ein beliebiger Wert ist. Es ist nicht erforderlich, die nicht ermittelten Eigenformen durch konstante Werte  $\varepsilon$  zu ersetzen; es können beliebige Werte der Größe ungleich Null sein. Die Inverse von  $[\phi]$  folgt aus (3-22)

$$\text{mit } D = \varepsilon \cdot (\varphi_{11} \cdot \varphi_{22} + \varphi_{12} \cdot \varphi_{31} + \varphi_{21} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{22} \cdot \varphi_{31} - \varphi_{11} \cdot \varphi_{32} - \varphi_{12} \cdot \varphi_{21})$$

und

$$b_{11} = \varepsilon \cdot (+\varphi_{22} - \varphi_{32})$$

$$b_{21} = \varepsilon \cdot (-\varphi_{21} + \varphi_{31})$$

$$b_{12} = \varepsilon \cdot (+\varphi_{32} - \varphi_{12})$$

$$b_{22} = \varepsilon \cdot (+\varphi_{11} - \varphi_{31})$$

Steifigkeitsmatrix  $[\tilde{K}]$  und Massenmatrix  $[\tilde{M}]$  des kondensierten Systems ergeben sich wieder aus (3-23) und (3-24).

Durch die Quotientenbildung kann  $\varepsilon$  gekürzt werden, d.h. die Größe  $\varepsilon$  ist ohne Einfluß auf  $[\tilde{K}]$  und  $[\tilde{M}]$  und somit ohne Einfluß auf die Eigenwerte  $\tilde{\lambda}$ . Die so ermittelten Systemmatrizen  $[\tilde{K}]$  und  $[\tilde{M}]$  sind nicht identisch mit den aus (3-22) folgenden Werten der vollständigen Matrix  $[B]$ .

### 3.3.2.4 Beispiel am Balken mit 11 bzw. 40 Freiheitsgraden

Der aus Bild 3-1 in 4 Elemente diskretisierte Balken soll auf ein Reduktionsmodell für die vier unteren Eigenfrequenzen kondensiert werden. Die zugehörige Steifigkeitsmatrix zeigt in Tabelle 3-7, daß alle neuen Freiheitsgrade miteinander gekoppelt sind. Die vier unteren Eigenwerte sind identisch mit denen des vollständigen Systems; natürlich hat die Eigenvektormatrix eine andere Struktur als die des Ausgangssystems, s. Tabelle 3-7. Die gemäß (2-6) entwickelte Caughey-Dämpfungsmatrix ist für  $\beta_{\text{Soll}} = 5\%$  Tabelle 3-8 zu entnehmen. Diese Matrix zeigt eine Kopplung aller Freiheitsgrade miteinander; sie ist orthogonal und erfüllt in den 4 Eigenfrequenzen exakt  $\beta_1 = 5\%$ . Der Balken sei wiederum durch eine stufenförmig einsetzende Einzellast in der Mitte auf Biegung beansprucht. Eine Rücktransformation der Verschiebungsgrößen ( $v$ ) des reduzierten Systems führt mit (3-12) auf den identischen Verlauf wie am Ausgangssystem.

Die Frequenzabblendung kann an Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden vorgenommen werden. Folgend sei der betrachtete Balken nicht in 4, sondern in 20 Elemente diskretisiert. Nach Ausschluß der axialen Freiheitsgrade verfügt dieses Balkenmodell über 40 Freiheitsgrade. Diese Verfeinerung bewirkt eine Genauigkeitssteigerung der Eigenwerte. Da dem Balkenmodell eine konsistente Massendarstellung zugrunde liegt, sind die Eigenwerte des diskreten Modells größer als die des kontinuierlichen Balkens. Mithin sind die vergleichbaren Eigenfrequenzen des

Tabelle 3-7 Auf vier Freiheitsgrade kondensierte Systemmatrix eines Balkens mit 11 Freiheitsgraden

MASSENMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.3037E-06  | 0.2467E-05  | -0.3615E-06 | -0.4721E-06 |
| 2 | 0.2467E-05  | 0.4110E-04  | -0.4721E-06 | 0.8906E-05  |
| 3 | -0.3615E-06 | -0.4721E-06 | 0.7311E-06  | 0.2658E-05  |
| 4 | -0.4721E-06 | 0.8906E-05  | 0.2658E-05  | 0.4055E-04  |

STEIFIGKEITSMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.7454E+00  | 0.1383E+01  | -0.1382E+01 | -0.1526E+01 |
| 2 | 0.1383E+01  | 0.1463E+02  | -0.1526E+01 | -0.1262E+02 |
| 3 | -0.1382E+01 | -0.1526E+01 | 0.2659E+01  | 0.2190E+01  |
| 4 | -0.1526E+01 | -0.1262E+02 | 0.2190E+01  | 0.1869E+02  |

EIGENWERTE DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   |     |             |           |                |
|---|-----|-------------|-----------|----------------|
| 1 | EW= | 0.12582E+03 | FREQUENZ= | 20.02446828Hz  |
| 2 | EW= | 0.50358E+03 | FREQUENZ= | 80.14670664Hz  |
| 3 | EW= | 0.11434E+04 | FREQUENZ= | 181.97293977Hz |
| 4 | EW= | 0.21997E+04 | FREQUENZ= | 350.09419869Hz |

NORMIERTE EIGENVEKTORMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | -0.2618E+05 | -0.4183E+05 | -0.3610E+05 | -0.1562E+05 |
| 2 | 0.1430E+04  | 0.2066E+04  | 0.1972E+04  | 0.8534E+03  |
| 3 | -0.1309E+05 | -0.2091E+05 | -0.1805E+05 | -0.6390E+04 |
| 4 | 0.3663E+03  | 0.4302E+03  | 0.2375E+03  | 0.4961E+02  |

Tabelle 3-8 Caughey-Dämpfung eines auf vier Freiheitsgrade kondensierten Balkens mit 11 Freiheitsgraden

| CAUGHEY-DÄMPFUNGSMATRIX MIT 4 KOEFFIZIENTEN |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1   | 0.4195E-04  | 0.1586E-03  | -0.7022E-04 | -0.1256E-03 |
| 2   | 0.1586E-03  | 0.2015E-02  | -0.1256E-03 | -0.8936E-03 |
| 3   | -0.7022E-04 | -0.1256E-03 | 0.1322E-03  | 0.2026E-03  |
| 4   | -0.1256E-03 | -0.8936E-03 | 0.2026E-03  | 0.1932E-02  |

| CAUCHEY-KOEFFIZIENTEN $a_i$ |           |           |            |           |
|-----------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|
|                             | 0.969E+01 | 0.184E-03 | -0.987E-10 | 0.144E-16 |

| ORTHOGONALITÄT DER CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |
|-----------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                                   | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1                                 | 0.5000E-01  | 0.2383E-15  | -0.3348E-25 | -0.5566E-25 |
| 2                                 | 0.5953E-16  | 0.5000E-01  | -0.1553E-22 | -0.1514E-30 |
| 3                                 | -0.3685E-26 | -0.6838E-23 | 0.5000E-01  | -0.1370E-15 |
| 4                                 | -0.3184E-26 | -0.8215E-32 | -0.7118E-16 | 0.5000E-01  |

| DIAGONALGLIEDER DER CAUGHEY-MATRIX |           |           |           |           |
|------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                                    | 0.500E-01 | 0.500E-01 | 0.500E-01 | 0.500E-01 |

Modells mit 40 Freiheitsgraden kleiner, da genauer als die mit 11 Freiheitsgraden. Die Reduktion wird wiederum auf 4 Frequenzen vorgenommen; die entsprechenden Massen- und Steifigkeitsmatrizen sind Tabelle A.3-9<sup>(1)</sup> zu entnehmen. Gegenüber dem von 11 auf 4 Freiheitsgrade reduzierten System fällt auf, daß in Tabelle A.3-9 sowohl die Massen- als auch die Steifigkeitsmatrix von kleinerer Größenordnung sind, während die Koeffizienten der Eigenvektormatrix ansteigen. Die Eigenwerte des reduzierten Systems sind wieder identisch mit denen des Ausgangssystems.

Gegenüber der aus 11 Freiheitsgraden kondensierten Caughey-Dämpfungsmatrix hat diejenige mit 40 Freiheitsgraden kleinere Koeffizienten, führt aber - wiederum wie die Orthogonalitätsbeziehung in der Tabelle A.3-10 zeigt - zur Sollvorgabe  $\beta_i = \beta_{\text{soll}} = 5\%$ . Die berechneten Verschiebungsgrößen des kondensierten Modells haben wieder den identischen Verlauf wie die am originären Balkensystem.

### 3.4 Lösungen ohne Berücksichtigung der Eigenwerte

#### 3.4.1 Operatoren für Großzahlen

Die in den Einzelpunkten in Abschnitt 2 vorgenommenen numerischen Abschätzungen werden in Tabelle 3-11 noch einmal gegenübergestellt unter der Annahme

$$\begin{aligned} \min f_1 &= 0,01 \text{ Hz} & (\omega_1 &= 2\pi \cdot f_1) \\ \max f_p &= 50,00 \text{ Hz} & (\omega_p &= 2\pi \cdot f_p) \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich eindeutig entnehmen, daß bereits für einen limitierten Frequenzbereich zwischen  $0,01 \leq f \leq 50$  Hz Größenordnungen für die Zahlendifferenzen auftreten, die selbst bei 4 fach vergrößerter Mantissenlänge (REAL\*16) - die nicht an allen Computern allgemein verfügbar ist - in keinem Fall hinreichend dargestellt werden können. Eine Realisierung der Lösungen für die hysteretische Dämpfung - in expliziter Schreibweise - läßt sich daher mit den übli-

<sup>(1)</sup> Tabellen, die mit "A" bezeichnet werden, befinden sich im Anhang

Tabelle 3-11 Abschätzung der Größenordnung bei unterschiedlichen Ansätzen

| Abschnitt | Gleichung | Minimalbereich                                 | Maximalbereich                    | Parameter               |
|-----------|-----------|--|-----------------------------------|-------------------------|
| 2.2.2     | 2.10      | $1/\omega_1$<br>$1,59 \cdot 10^1$              | $1/\omega_p$<br>$3,18 \cdot 10^3$ | $p = 61$                |
| 2.2.3     | 2.13      | $1/\omega_1 + 1/\omega_p$<br>$1,59 \cdot 10^1$ | $1/\omega_p$<br>$3,18 \cdot 10^3$ | $p - 1 = 61$            |
| 2.2.4     | 2.18      | $1/\omega_1 + 1/\omega_p$<br>$1,59 \cdot 10^1$ | $1/\omega_p$<br>$3,18 \cdot 10^3$ | $\beta = 0,05$          |
|           |           |  |                                   | $\epsilon \leq 10^{-5}$ |

chen Standardoperationen nicht vollziehen, sondern führt numerisch zur 'Nicht-Machbarkeit'. Um weiter verwendbare Lösungen zu erhalten, ist es also notwendig, eine Zahlendarstellung im Rechner mit beliebig wählbarer Mantissenlänge zu implementieren. Der Praktikabilität wegen erfolgt diese Darstellung wie bei der Standardroutine in Gleitkomma-Schreibweise. Diese REAL-Zahlensimulation wird durch die Bereitstellung

- eines Steuervektors
  - eines Mantissenvektors
- sowie

entsprechend Tabelle 3-12 durch Integer-Felder realisiert.

Tabelle 3-12 Prinzipielle Zahlendarstellung in beliebiger Länge

| Steuervektor IST (1 - 3)                |                      |              |
|---|----------------------|--------------|
| Vorzeichen<br>Nullwert                  | Mantissen-<br>laenge | Exponent     |
| 1 positiv                               | KH                   | IEX          |
| -1 negativ                              |                      |              |
| 0 absolut                               | z.B. 100             | z.B. 500     |
| Null                                    | z.B. 1000            | z.B. -700    |
| Mantissenvektor IM (1-KH)               |                      | z.B. KH = 20 |
| 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 5 |                      |              |

Über den dreifeldrigen Steuervektor wird die notwendige Umgebungsinformation der betrachteten Zahl transportiert. Das 1. Steuerfeld IST (1) speichert das Vorzeichen (positiv bei dem zugewiesenen Wert "1" bzw. negativ bei "-1"). Wird dieses Feld zu "0" gesetzt, ist angezeigt, daß der Zahlenwert echt Null ist. Das 2. Feld IST (2) übermittelt die gewünschte Mantissenlänge, und das 3. Feld IST (3) ist für die Angabe der Exponenten (auf der Basis 10) reserviert. Die eigentliche REAL-Zahl wird durch den Mantissenvektor in IM (1-KH) symbolisiert, wobei - aufsteigend von 1 bis zur Endadresse KH - die reelle Mantisse aus 1 stelligen Integer-Werten (zwischen 0 und 9) gebildet wird. Hierbei wird - über die Exponentensteuerung - sichergestellt, daß der erste Mantissenwert, also IM (1), immer ungleich Null ist. In Tabelle 3-13 wird am Beispiel des Wertes  $\pi$  die Darstellung dieser Zahl mit der gewählten Mantissenlänge von KH = 4000 gezeigt. [Die Zahl der Reihenglieder N = 3100 ist so gewählt worden, daß die Größenordnung der Restglieder unterhalb der gewählten Genauigkeit verbleibt.] Es handelt sich hier um eine positive Größe mit dem Exponenten "1", so daß in üblicher Weise transformiert werden kann:

$$\pi = \begin{matrix} + \\ \text{IST (1)} \end{matrix} \quad 0.314 \dots\dots 039 \quad \cdot \quad 10^1 \quad \text{IST (2) = KH}$$

IM (1 - KH)

also  $\pi = 3.14\dots\dots 039.$

Nach Bereitstellung der Grunddefinition zur Zahlendarstellung in beliebiger Länge sind anstelle der üblichen Grundrechenarten die notwendigen Operatoren zu definieren:

Im ersten Schritt sind **Zahlenwandler** zu implementieren, die das Umschalten vom Normal- in den Langbereich und ebenso umgekehrt ermöglichen, also

- Vorwärtswandler : Normal ==> Lang
- Rückwärtswandler : Lang ==> Normal .

Dies kann sowohl durch READ/WRITE-Routinen in unterschiedlicher Formatierung oder auch durch reine Umrechnung zu bzw. aus singulären Integer-Größen erfolgen. Die Großzahlen-Operatoren werden für die Grundrechenarten entwickelt:

IST(1)= 1    IST(2)= 4000    IST(3)= 1

IM(1 - 4000) :

```

3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067
9821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819
6442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127
3724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609
4330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491
2983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513
2000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923
5420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185
9502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730
3598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198
9380952572010654858632788659361533818279682303019520353018529689957736225994138912497217752834791315
1557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401
2858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069491
293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640247496264013639443745530506820
9678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295
5321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793800
0816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418494684385233239073941433
3454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438
3827967976681454100953883786360950680064225125205117392984896084128488626945604241965285022210661186
3067442786220391949450471237137869609563643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900
9946576407895126946839835259570982582262052248940772671947826848260147699090264013639443745530506820
3496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387410597885959772975498930161753928468138
2686838689427741559918559252459539594310499725246808459872736446958486538367362226260991246080512438
8439045124413654976278079771569143599770012961608944169486855584840635342207222582848864815845602850
6016842739452267467678895252138522549954666727823986456596116354886230577456498035593634568174324112
5150760694794510965960940252288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385
8900971490967598526136554978189312978482168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436
4542858444795265867821051141354735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934
4037420073105785390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192
7819119793995206141966342875444064374512371819217999839101591956181467514269123974894090718649423196
1567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346722182562599661501421
5030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881907104863317346496514539057962685
6100550810665879699816357473638405257145910289706414011097120628043903975951567715770042033786993600
7230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198414848829164470609575270695722091756711
6722910981690915280173506712748583222871835209353965725121083579151369882091444210067510334671103141
26711136990865851639831501971651511685171437657183515565088490998985998238734552833163550764791853
5893226185489632132933089857064204675259070915481416549859461637180270981994309924488957571282890592
3233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428138830320382490375898524374417029132765
6180937734440307074692112019130203303801976211011004492932151608424448596376698389522868478312355265
8213144957685726243344189303968642624341077322697802807318915441101044682325271620105265227211166039
    
```

**Addition/Subtraktion  $A \pm B = C$**

Nach der Vorzeichenregulierung wird über die Indexsteuerung die notwendige Mantissenverschiebung mit anschließender Addition / Subtraktion vorgenommen. Eine Endsteuerung reguliert das Aufrunden im Bedarfsfall, so daß die erste Mantissenstelle jeweils verschieden von Null ist (s. Tabelle A. 3-14) <sup>(1)</sup>.

**Multiplikation  $A \cdot B = C$**

Nach der Vorzeichenfestlegung und Indexsteuerung wird mit Hilfe eines Puffervektors der doppelten Mantissenlänge, also  $2 \cdot KH$ , eine zyklische, jeweils stellenverschobene Aufaddierung der Teilsummanden vorgenommen. Anschließend erfolgt eine Umwandlung in einstellige Integer-Werte, so daß der Puffervektor insgesamt als Mantisse des Endvektors gelesen werden kann. Falls sich  $IM(1) = 0$  ergibt, wird nach Aufschiebung eine Indexkorrektur vorgenommen und anschließend für die gewählte Mantissenlänge auf- bzw. abgerundet (s. Tabelle A.3-15).

**Division  $A / B = C$**

Der Divisionsoperator ist numerisch der weitaus aufwendigste und bedient sich u. a. der Additionsgrundroutine. Zunächst erfolgt die Vorzeichenjustierung und die Indexvorsteuerung, die bei anschließendem Vergleich der Mantissengrößensordnung gegebenenfalls bereinigt wird. Zyklisch vorwärts zählend wird für die jeweilige Stelle ein Größen-

<sup>(1)</sup> Tabellen, die mit "A" bezeichnet werden, befinden sich im Anhang.

vergleich der betrachteten Restsumme und dem faktorisierten Divisor über die gewählte Mantissenlänge hinaus vorgenommen, damit eventuelle Rundungen ebenfalls erfaßt werden können. Im Beispiel der Tabelle A.3-16 ist deutlich der Einfluß der Mantissenlänge auf das Endergebnis zu erkennen.

Damit sind die Operatoren bereitgestellt, mittels derer sehr große und sehr kleine Zahlen bzw. kleine Differenzen sehr großer Zahlen sinnvoll im Rechner verarbeitet werden können. Anstelle der Standardroutinen sind diese Operatoren dann gegebenenfalls als jeweilige SUBROUTINES aufzurufen. Es sollte hier der Hinweis nicht fehlen, daß mit zunehmender Länge der Mantisse KH der Rechenaufwand beträchtlich ansteigt.

### 3.4.2 Beispiel am Balken mit 11 bzw. 40 Freiheitsgraden

Wie in Abschnitt 3.3 werden dieselben Modelle mit 11 bzw. 40 Freiheitsgraden verwandt, das letztere wird aufgrund seiner Größe im Anhang dokumentiert. Da in diesem Teil die Eigenwerte nicht berücksichtigt werden, entfällt die punktweise Erfüllung nach Abschnitt 2.2.2, jedoch behält auch hier die Anwendung der Großzahlen ihre volle Gültigkeit.

Tabelle 3-17 Übersicht der gewählten Beispiele für das Dämpfungsmaß  $\beta = 5\%$

| System | Verfahren                            |                   |                     |                        |
|--------|--------------------------------------|-------------------|---------------------|------------------------|
|        | Gauss                                |                   | Fourier             |                        |
|        | N = Anzahl der Caughey-Koeffizienten |                   |                     |                        |
|        | N = 10                               |                   | $M_{\sin} = 10$     | $\wedge = N = 83$      |
|        | N = 60                               |                   | $M_{\sin} = 20/100$ | $\wedge = N = 168/850$ |
|        | Frequenzbereich und Tabellenhinweis  |                   |                     |                        |
| 11 DOF | ≤ 100 Hz                             | Tabelle 3-18a/b   | ≤ 100 Hz            | Tabelle A.3-21a/b      |
|        | ≤ 500 Hz                             | Tabelle A.3-19a/b | ≤ 500 Hz            | Tabelle A.3-22a/b      |
|        | ≤ 1600 Hz                            | Tabelle A.3-20a/b | ≤ 1600 Hz           | Tabelle A.3-23a/b      |
| 40 DOF | ≤ 5000 Hz                            | Tabelle A.3-24a/b | ≤ 5000 Hz           | Tabelle A.3-26a/b      |
|        | ≤ 20000 Hz                           | Tabelle A.3-25a/b | ≤ 20000 Hz          | Tabelle A.3-27a/b      |

Die ausgewählten Parameter werden in Tabelle 3-17 in Abhängigkeit vom Lösungsverfahren und selektierten Frequenzbereichen übersichtlich dargestellt. Das hysteretische Dämpfungsmaß ist wie in Abschnitt 3.3 unverändert 5%. Am kleineren Modell wird die Sensibilität der Größenordnung der Caughey-Matrix-Glieder in bezug auf den spezifizierten Frequenzbereich gezeigt. Im Falle eines engen Frequenzbereiches mit dem Vorteil der leichter erzielbar genaueren Dämpfungskurve können sich extreme Zahlengrößen einstellen, die eine weitere Berechnung der Verschiebungen ebenfalls nur mittels Großzahlendarstellung gestatten.

Wird dagegen ein größerer Frequenzbereich betrachtet, gelingt es u.U. bereits nach Bildung der Caughey-Matrix, verwendbare Resultate mit den üblichen Standardoperationen zu erzielen. Sollen alle Eigenfrequenzen des Systems miteinbezogen werden, so kann die vorgegebene Dämpfungsfunktion nur mit größerem Aufwand approximiert werden; die so gebildete Caughey-Matrix ist dann allerdings von gleicher (kleinerer) Größenordnung wie bei der Anwendung der Rayleigh-Dämpfung, so daß weitere Folgerechnungen ohne zusätzlichen mathematischen Aufwand durchgeführt werden können. Zur besseren Überprüfung der Caughey-Matrix erfolgt eine Orthogonalisierung entsprechend Abschnitt 3.3, d.h. die in den Eigenwerten vorliegende Dämpfung wird der mit Großzahlen berechneten Dämpfung vergleichsweise gegenübergestellt. Aus letzterer, d.h. exakter Darstellung kann sofort der Gültigkeitsbereich der hysteretischen Dämpfung (mit bzw. ohne Frequenzausblendung) abgelesen werden. Diese Phänomene sind in den Tabellen 3-18 (bzw. im Anhang in den Tabellen A.3-19 bis A.3-27) gezeigt.

Tabelle 3-18a 11 DOF bis 100 Hz, Gauß  $N = 10$ ,  $\beta = 5\%$ 

| CAUGHEY-MATRIX   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-----------|-----------|
| 1  | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |            |           |           |
| 1  | 0.1339E+20  | 0.0000E+00  | -0.1269E+19 | 0.2611E+20  | 0.0000E+00  | -0.1788E+19 | 0.2450E+20  | 0.0000E+00  | -0.1259E+19 | 0.2289E+20 |           |           |
| 2  | 0.0000E+00  | 0.7483E+22  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1058E+23 | 0.0000E+00  | 0.7476E+22  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |
| 3  | -0.1269E+19 | 0.0000E+00  | 0.1420E+19  | -0.1788E+19 | 0.0000E+00  | 0.1986E+19  | 0.1024E+17  | 0.0000E+00  | 0.1388E+19  | 0.1788E+19 |           |           |
| 4  | 0.2611E+20  | 0.0000E+00  | -0.1788E+19 | 0.5128E+20  | 0.0000E+00  | -0.2529E+19 | 0.4901E+20  | 0.0000E+00  | -0.1788E+19 | 0.4673E+20 |           |           |
| 5  | 0.0000E+00  | -0.1058E+23 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1496E+23  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1058E+23 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |
| 6  | -0.1788E+19 | 0.0000E+00  | 0.1986E+19  | -0.2529E+19 | 0.0000E+00  | 0.2809E+19  | 0.800E-178  | 0.0000E+00  | 0.1986E+19  | 0.2529E+19 |           |           |
| 7  | 0.2450E+20  | 0.0000E+00  | 0.1024E+17  | 0.4901E+20  | 0.0000E+00  | 0.208E-178  | 0.4901E+20  | 0.0000E+00  | -0.1024E+17 | 0.4901E+20 |           |           |
| 8  | 0.0000E+00  | 0.7476E+22  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1058E+23 | 0.0000E+00  | 0.7483E+22  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |
| 9  | -0.1259E+19 | 0.0000E+00  | 0.1388E+19  | -0.1788E+19 | 0.0000E+00  | 0.1986E+19  | -0.1024E+17 | 0.0000E+00  | 0.1420E+19  | 0.1788E+19 |           |           |
| 10   | 0.2289E+20  | 0.0000E+00  | 0.1788E+19  | 0.4673E+20  | 0.0000E+00  | 0.2529E+19  | 0.4901E+20  | 0.0000E+00  | 0.1788E+19  | 0.5128E+20 |           |           |
| 11   | 0.1112E+20  | 0.0000E+00  | 0.1259E+19  | 0.2289E+20  | 0.0000E+00  | 0.1788E+19  | 0.2450E+20  | 0.0000E+00  | 0.1259E+19  | 0.2611E+20 |           |           |
| 11   | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18          | 19          | 20          |            |           |           |
| 1  | 0.1112E+20  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 2  | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 3  | 0.1259E+19  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 4  | 0.2289E+20  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 5  | 0.0000E+00  | 1           | 0.265E+07   | -0.177E+07  | 0.279E+06   | 0.305E+12   | 0.288E+14   | 0.863E+15   | 0.185E+19   | 0.153E+20  | 0.140E+22 | 0.327E+23 |
| 6  | 0.1788E+19  | 11          | 0.606E+23   |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 7  | 0.2450E+20  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 8  | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 9  | 0.1269E+19  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| 10   | 0.2611E+20  | 1           | 0.528E-01   | 0.496E-01   | 0.144E+07   | 0.305E+12   | 0.288E+14   | 0.863E+15   | 0.185E+19   | 0.153E+20  | 0.140E+22 | 0.327E+23 |
| 11   | 0.1339E+20  | 11          | 0.606E+23   |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSSZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |

Tabelle 3-18b 11 DOF bis 100 Hz, Gauß N = 60,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 1   | -0.700E+136 | 0.0000E+00  | 0.689E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | 0.975E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | 0.689E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | 0.689E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | 0.689E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | 0.689E+127  | -0.140E+137 | 0.0000E+00 |
| 2   | 0.0000E+00  | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 3   | 0.689E+127  | 0.0000E+00  | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00  | -0.108E+128 | 0.496E+122  | 0.0000E+00  | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 |
| 4   | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | 0.137E+128  | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 |
| 5   | 0.0000E+00  | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.319E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 6   | 0.975E+127  | 0.0000E+00  | -0.108E+128 | 0.137E+128  | 0.0000E+00  | -0.153E+128 | -0.110E-160 | 0.0000E+00  | -0.108E+128 | 0.137E+128  | 0.0000E+00 | -0.108E+128 | 0.137E+128  | 0.0000E+00 | -0.108E+128 | 0.137E+128  | 0.0000E+00 | -0.108E+128 | 0.137E+128  | 0.0000E+00 |
| 7   | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | 0.496E+122  | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | -0.113E-161 | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | 0.496E+122  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.496E+122  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.496E+122  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.496E+122  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 |
| 8   | 0.0000E+00  | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.225E+141  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 | -0.159E+141 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |
| 9   | 0.689E+127  | 0.0000E+00  | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00  | -0.108E+128 | -0.496E+122 | 0.0000E+00  | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 | -0.766E+127 | 0.975E+127  | 0.0000E+00 |
| 10  | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | 0.137E+128  | -0.280E+137 | 0.0000E+00  | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 | 0.975E+127  | -0.280E+137 | 0.0000E+00 |
| 11  | -0.700E+136 | 0.0000E+00  | -0.689E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | -0.975E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00  | -0.689E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | -0.689E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | -0.689E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00 | -0.689E+127 | -0.140E+137 | 0.0000E+00 |
|   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 1   | -0.700E+136 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 2   | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 3   | -0.689E+127 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 4   | -0.140E+137 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 5   | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 6   | -0.975E+127 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 7   | -0.140E+137 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 1   | -0.54E+125  | -0.72E+122  | 0.40E+125   | -0.57E+125  | -0.67E+127  | 0.72E+125   | -0.91E+122  | -0.76E+130  | -0.18E+140  |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 11  | -0.12E+142  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
|   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 1   | 0.443E-01   | 0.530E-01   | -0.111E+35  | -0.415E+65  | -0.463E+78  | -0.371E+88  | -0.15E+111  | -0.28E+117  | -0.76E+130  | -0.18E+140  |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |
| 11  | -0.12E+142  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |             |             |            |             |             |            |

### 3.4.3 Partikularansatz

Der bisherige Lösungsweg, der keine Berücksichtigung der Eigenwerte und Eigenformen postulierte, erweist sich wegen der erforderlichen Nutzung der Operatoren für beliebige Zahlenlängen extrem aufwendig. Es wird daher ein weiterer Weg untersucht, der von der exakten Lösung der Schwingungsgleichung des Einmassenschwingers ausgeht.

#### 3.4.3.1 Allgemeine Betrachtung am Einmassenschwinger

Nach /14/ ergibt sich für die Bewegungsgleichung des Einmassenschwingers, der harmonisch erregt wird,

$$m \cdot \ddot{v} + c \cdot \dot{v} + k \cdot v = p_0 \cdot \sin(\tilde{\omega} \cdot t) \quad (3-26 \text{ a})$$

bzw.

$$\ddot{v} + 2\beta \cdot \omega \cdot \dot{v} + \omega^2 \cdot v = \frac{p_0}{m} \cdot \sin(\tilde{\omega} \cdot t) \quad (3-26 \text{ b})$$

mit

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k / m \\ c / m &= 2\beta \cdot \omega \\ \omega_D &= \omega \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \\ \gamma &= \tilde{\omega} / \omega \\ N &= (1 - \gamma^2)^2 + (2\beta \cdot \gamma)^2 \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung zu:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{p_0}{k} \cdot e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \left[ -\frac{1}{\omega_D} \cdot \frac{\tilde{\omega} \cdot (1 - \gamma^2) - \omega \cdot 2\beta^2 \cdot \gamma}{N} \right] \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\ &+ \frac{p_0}{k} \cdot e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \left[ \frac{2\beta \cdot \gamma}{N} \right] \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \\ &+ \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1 - \gamma^2}{N} \right] \cdot \sin(\tilde{\omega} \cdot t) \\ &+ \frac{p_0}{k} \left[ -\frac{2\beta \cdot \gamma}{N} \right] \cdot \cos(\tilde{\omega} \cdot t) \end{aligned} \quad (3-27)$$

Diese Beziehung gilt für die Anfangsbedingungen  $v(t=0) = 0$  sowie  $\dot{v}(t=0) = 0$  und setzt sich prinzipiell aus dem homogenen und dem partiellen Anteil zusammen. Die homogenen Glieder sind mit der abklingenden Exponentialfunktion verknüpft, sind jedoch sonst vergleichbare Größen gegenüber der partiellen Teillösung. Für den Abklingeffekt der homogenen Anteile gilt somit folgende Abschätzung, wenn  $\varepsilon$  eine vorgegebene Fehlerschranke darstellt:

$$\varepsilon \geq e^{-\beta \cdot \omega \cdot t_{\text{erf}}} \quad (3-28 \text{ a})$$

bzw.

$$t_{\text{erf}} \geq -2.30 \cdot \frac{\lg \varepsilon}{\beta \cdot \omega} \quad (3-28 \text{ b})$$

Mit  $\varepsilon = 1\%$ ,  $\beta = 5\%$  und  $\omega_{\text{min}} \approx 2\pi \text{ rad/s} \cong 1 \text{ Hz}$  wird damit  $t_{\text{erf}} < 15 \text{ s}$ . Die exakte Lösung wird m.a.W. nach der Zeit  $t \geq t_{\text{erf}}$  prinzipiell allein durch die partielle Lösung repräsentiert. Diese Eigenschaft wird nun verwendet, um eine modifizierte Lastbetrachtung vorzunehmen, nämlich indem die äußere Erregung auf der Zeitachse erst bei  $t_A \geq t_{\text{erf}}$  einsetzt (s. Bild 3-4).

Entwickelt man nun diese vorgegebene, um  $t_A$  versetzte Lastfunktion in Fourier-Reihen

$$\sin \tilde{\omega} \cdot (t - t_A) = \sum_{\ell} b_{\ell} \cdot \sin(\ell \cdot \alpha_0 \cdot t) \quad (3-29),$$

so erhält man die gesuchten Koeffizienten

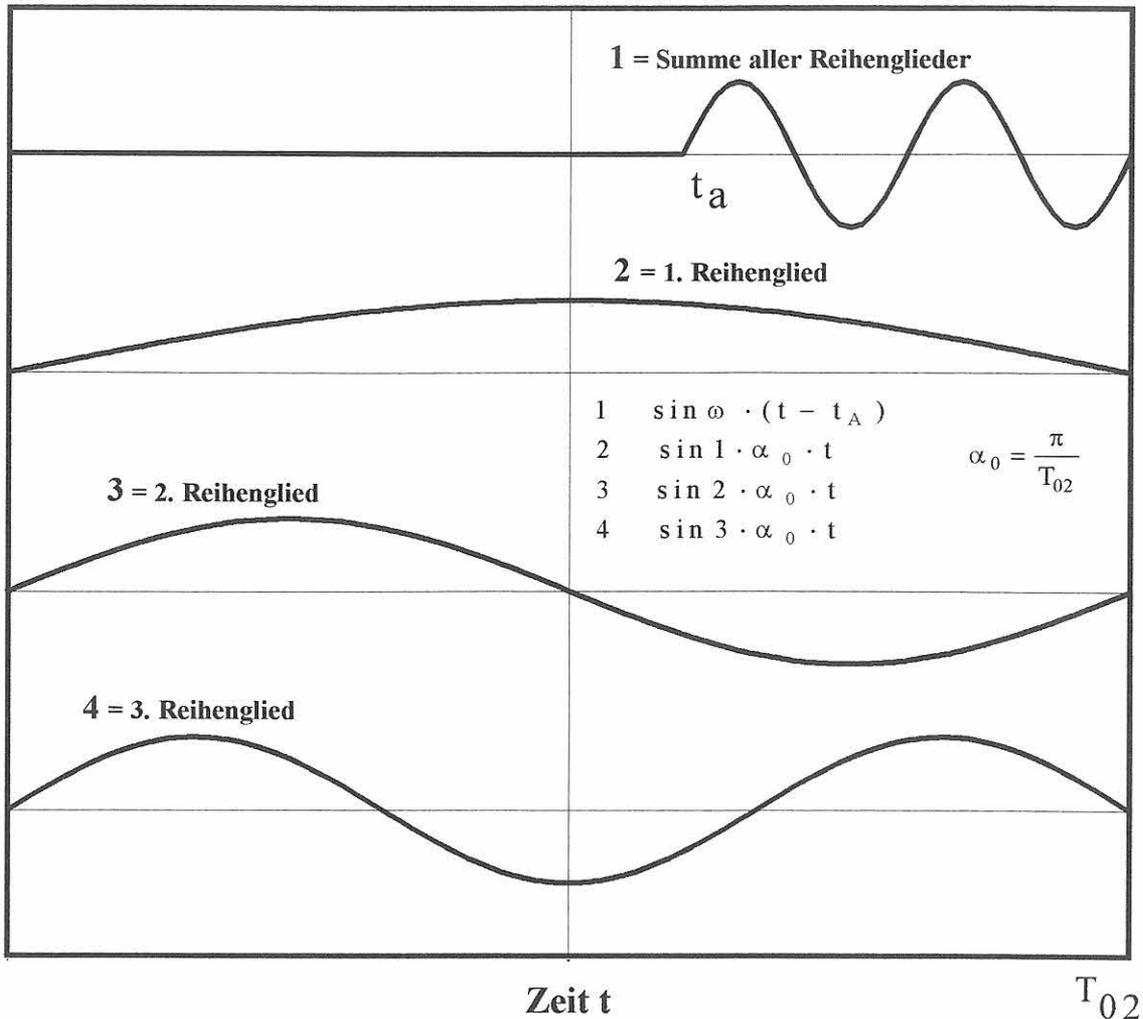


Bild 3-4 Entwicklung einer beliebigen Last durch Fourier-Reihen

$$b_\ell = \frac{2}{T_{O2}} \cdot \int_{t_A}^{T_{O2}} \sin(\tilde{\omega} \cdot (t - t_A)) \cdot \sin(\ell \cdot \alpha_0 \cdot t) dt$$

mit  $\alpha_0 = \pi / T_{O2}$   
 $\ell = 1, 2, 3, \dots, \infty$

(3-30 a) bzw.

$$b_\ell = \frac{2}{T_{O2}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}}{\ell \cdot \alpha_0}\right)^2} \cdot \left\{ -\frac{1}{\ell \cdot \alpha_0} \cdot \sin(\tilde{\omega} \cdot (T_{O2} - t_A)) \cdot \cos(\ell \cdot \pi) - \frac{\tilde{\omega}}{\ell \cdot \alpha_0} \cdot \frac{1}{\ell \cdot \alpha_0} \cdot \sin\left(\ell \cdot \frac{\pi}{T_{O2}} \cdot t_A\right) \right\}$$

für  $\tilde{\omega} \neq \ell \cdot \alpha_0$

(3-30 b) und

$$b_\ell = \frac{1}{T_{O2}} \cdot \left\{ (T_{O2} - t_A) \cdot \cos(\ell \cdot \alpha_0 \cdot (T_{O2} - t_A)) \cdot \cos(\ell \cdot \pi) + \frac{1}{\ell \cdot \alpha_0} \cdot \sin\left(\ell \cdot \frac{\pi}{T_{O2}} \cdot t_A\right) \right\}$$

für  $\tilde{\omega} = \ell \cdot \alpha_0$

(3-30 c).

Unter Beachtung von (3-28) für  $t_A$  kann die jetzt im Grundsatz exakte Lösung allein aus den partiellen Anteilen für die jeweiligen Koeffizienten  $\ell$  gebildet werden. Es gilt dann für (3-27)

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{k} \cdot \sum_{\ell} \frac{b_{\ell}}{N_{\ell}} \left[ (1 - \gamma_{\ell}^2) \cdot \sin(\ell \cdot \alpha_0 \cdot t) - 2\beta \cdot \gamma_{\ell} \cdot \cos(\ell \cdot \alpha_0 \cdot t) \right]$$

mit  $\gamma_{\ell} = \ell \cdot \alpha_0 / \omega$

$$N_{\ell} = (1 - \gamma_{\ell}^2)^2 + (2\beta \cdot \gamma_{\ell})^2$$

(3-31).

Die Übereinstimmung der "exakten" Beziehung (3-31) mit der genauen analytischen Lösung wird in Bild 3-5 gezeigt; d.h. in Abhängigkeit von der Zahl der Fourier-Koeffizienten wird die exakte Schwingung - **also einschließlich des Einschwingvorganges** - durch einen zeitlich fiktiv versetzten Lastansatz realisiert.

Es gilt somit als nachgewiesen, daß allein der partikuläre Lösungsanteil unter Vernachlässigung des homogenen Lösungsanteiles bei zeitlich versetztem Lastangriff die vollständige Lösung einschließlich des Einschwingvorganges beinhaltet.

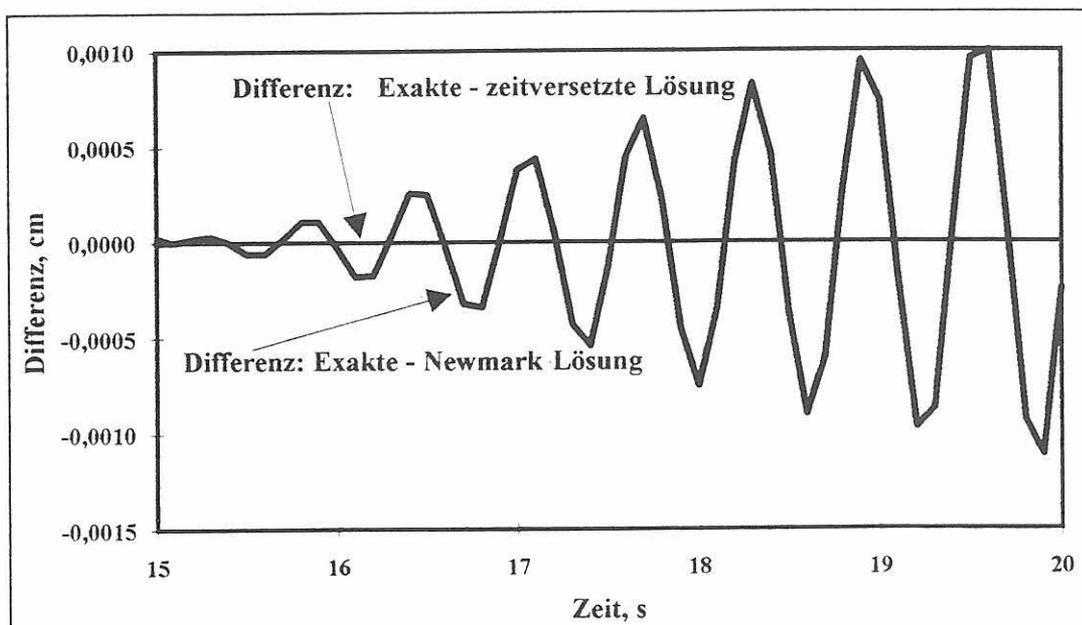
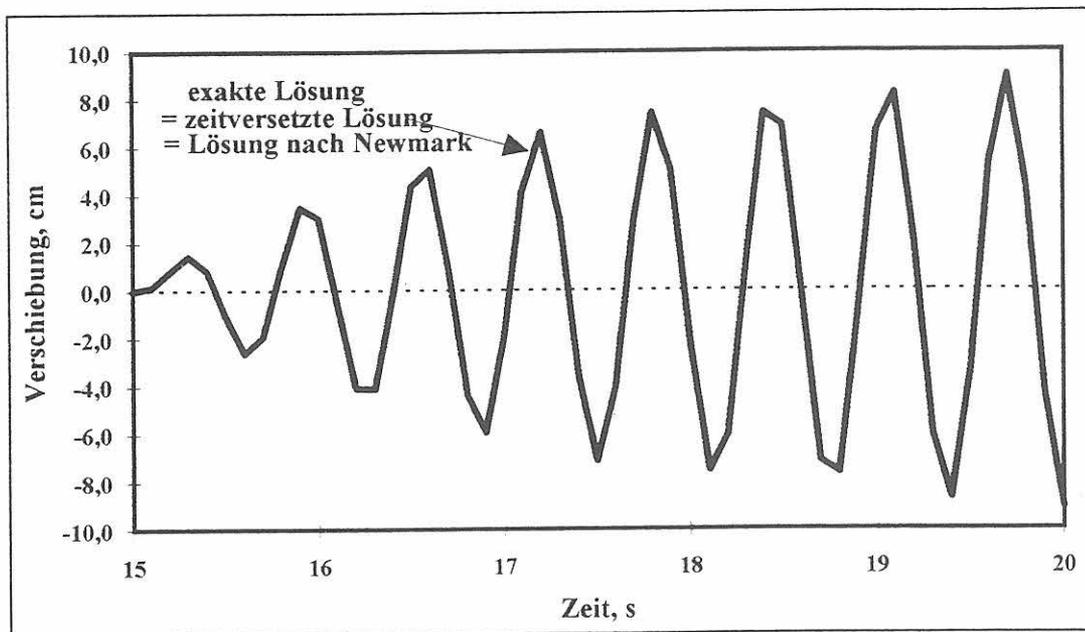


Bild 3-5 Übereinstimmung des zeitversetzten Ansatzes mit genauer Lösung

### 3.4.3.2 Allgemeine Ableitung in FFT-Schreibweise

Aus der im vorigen Abschnitt entwickelten Lösung mit Zeitdifferenz kann man ferner ablesen, daß jeder Koeffizient nur einer spezifischen monofrequenten Teilschwingung zugeordnet ist. Wenn dieser Effekt allgemeingültig verifiziert ist, so kann auch für Systeme mit beliebiger Freiheitsgradzahl mit Hilfe einer modifizierten Dämpfungsmatrix eine Lösung ohne Berücksichtigung der Eigenwerte erreicht werden. Die äußere Last ist dann entsprechend Bild 3-6 anzusetzen.

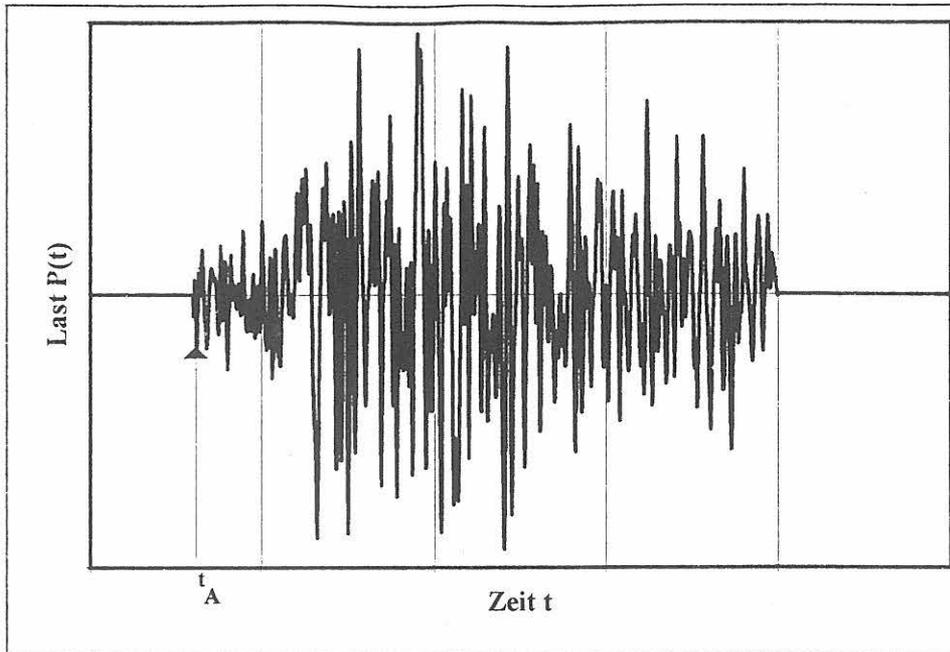


Bild 3-6 Beliebige Last mit Zeitdifferenz  $t_A$

Geht man wieder von der allgemeinen Bewegungsgleichung (1-1) aus, so wird jetzt sowohl für die Last wie für die Verformung eine Exponentialentwicklung vorgenommen:

$$\begin{aligned} (P) &= (P(t)) = \sum_n^{-\infty, +\infty} (P)_n \cdot e^{i\alpha_n \cdot t} \\ (v) &= (v(t)) = \sum_n^{-\infty, +\infty} (v)_n \cdot e^{i\alpha_n \cdot t} \end{aligned} \quad (3-32 \text{ a-b})$$

Damit geht die allgemeine Bewegungsgleichung (1-1) je Einzelglied  $n$  über in

$$(P)_n \cdot e^{i\alpha_n \cdot t} = \left\{ -\alpha_n^2 \cdot [M] + i \cdot \alpha_n \cdot [C] + [K] \right\} \cdot (v)_n \cdot e^{i\alpha_n \cdot t},$$

so daß man für die unbekanntten Verschiebungen die folgende Beziehungsgleichung erhält:

$$(v)_n = \left\{ -\alpha_n^2 \cdot [M] + i \cdot \alpha_n \cdot [C] + [K] \right\}^{-1} \cdot (P)_n \quad (3-33 \text{ a})$$

bzw.

$$(v)_n = [A]_n^{-1} \cdot (P)_n \quad (3-33 \text{ b})$$

Hierbei handelt es sich insgesamt um komplexe Größen im Frequenzraum. Wird nun in gleicher Weise wie in /22/ eine schnelle Fourier-Transformation (FFT) durchgeführt, so erhält man mit der Zahl  $N$  der Zeitinkremente aus

$$N = 2^M \quad (3-34 \text{ a})$$

die entsprechenden Frequenzinkremente

$$\alpha_n = \frac{2\pi \cdot n}{N \cdot \Delta t} \quad (3-34 \text{ b}),$$

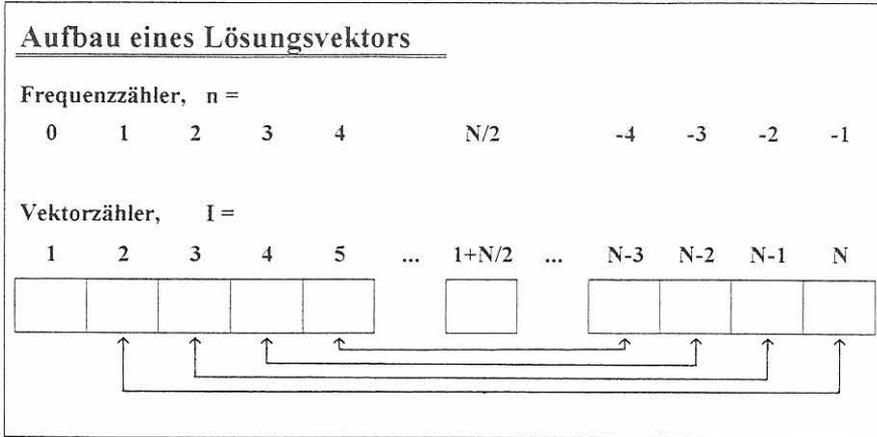


Bild 3-7 Systematik der FFT (aus /22/)

wenn  $\Delta t$  der zugewiesene Zeitschritt ist. Hierbei ist definiert:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2 \quad (3-34 \text{ c})$$

Aus Bild 3-7 kann die prinzipielle Systematik der FFT-Schreibweise entnommen werden; mit Ausnahme von  $n = 0$  (dem arithmetischen Mittel der betrachteten Funktion) sind die zugeordneten Größen konjugiert komplex. Für den Sonderfall  $n = 0$  kann man bei dieser Schreibweise aus (3-33 a) leicht ablesen, daß hier eine rein statische Auslenkung erfolgt, da  $\alpha_n = 0$  ist. Die restlichen Glieder für  $n \neq 0$  schwingen also um die statische Ruhelage. Aus (3-33 a/b) ist zu entnehmen, daß die Gesamtmatrix  $[A]_n$  abhängig von der gerade betrachteten Schwingungsfrequenz  $\alpha_n$  ist. Zusätzlich ist jedoch auch die bisher nicht diskutierte Dämpfungsmatrix  $[C]$  eine Funktion der Schwingungsfrequenz  $\alpha_n$ , so daß mit jedem Schritt  $n$

$$[C(n)] = \alpha_n [C]$$

neu zu bilden ist, d.h. es ist für jeden Schnitt  $n$  zu gewährleisten, daß sich jeweils die geforderte konstante Dämpfung  $\beta$  einstellt. Hierzu wird wie in /22/ noch einmal hypothetisch der modale Lösungsansatz vollzogen, so daß sich (3-33 a/b) überführen läßt in

$$[A]_n^{-1} = \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \sum_{\ell}^{1,L} (\varphi_{\ell}^T) \cdot \frac{1}{M_{\ell}^*} \cdot \frac{1}{\gamma_{\ell n}^2 - 1 + i \cdot 2\beta_{\ell} \gamma_{\ell n}}$$

mit  $\gamma_{\ell n} = \omega_{\ell} / \alpha_n$ ,  $L = \text{Anzahl der Eigenwerte}$  (3-35)

Je Eigenwert  $\ell$  ist hierbei  $M_{\ell}^*$  die generalisierte Masse;  $(\varphi_{\ell})$  definiert als Vektor der zugehörigen Eigenform auch den entsprechenden Beteiligungsfaktor;  $\gamma_{\ell n}$  ist das Verhältnis der Eigenfrequenz  $\omega_{\ell}$  zur Erregungsfrequenz  $\alpha_n$  der  $n$ -ten Teilschwingung. Die Dämpfung  $\beta_{\ell}$  ist damit für die jeweiligen Eigenfrequenzen  $\omega_{\ell}$  konstant einzustellen, damit eine hysteretische Dämpfung allgemein erzielt werden kann. Somit könnte allgemein die Matrix  $[C]$  entsprechend Abschnitt 3.3 gebildet werden, was jedoch sehr aufwendig wäre. Um die Eigenwerte nicht zu berücksichtigen zu müssen, wird mit Blick auf (3-35) für den Nennerausdruck folgende Abschätzung vorgenommen:

|        |       |                       |                            |
|--------|-------|-----------------------|----------------------------|
| Fall 1 | d. h. | $\gamma_{\ell n} = 1$ | $\alpha_n = \omega_{\ell}$ |
| Fall 2 | d. h. | $\gamma_{\ell n} > 1$ | $\alpha_n < \omega_{\ell}$ |
| Fall 3 | d. h. | $\gamma_{\ell n} < 1$ | $\alpha_n > \omega_{\ell}$ |

Ferner wird für jeden Schritt  $n$  entsprechend Bild 2-1 die Rayleigh-Beziehung unterstellt, und zwar wird die erste Einhängfrequenz  $\alpha_n$  jeweils variiert, während die zweite Einhängfrequenz für einen kleinen Frequenzwert  $\Theta$  festgehalten wird. Damit ergibt sich nach (2-7 c)

$$a_0(n) = 2\beta \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} \cdot n + \Theta} \cdot \Theta \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} \cdot n \quad (3-36 \text{ a}) \text{ und}$$

$$a_1(n) = 2\beta \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} \cdot n + \Theta} \quad (3-36 \text{ b})$$

Für den Fall 1 ist die Erregerfrequenz  $\alpha_n$  identisch der Eigenfrequenz  $\omega_\ell$ , so daß der Nenner in (3-35) den kleinsten, imaginären Wert  $i \cdot 2\beta$  annimmt. Die Eigenschwingungsanteile sind mit dem korrekten Wert  $\beta$  gedämpft.

Im Fall 2 liegt die Erregerfrequenz  $\alpha_n$  unterhalb einer Eigenfrequenz  $\omega_\ell$ . Je weiter die Eigenfrequenz  $\omega_\ell$  die Erregerfrequenz  $\alpha_n$  übersteigt, desto größer wird der Verhältniswert  $\gamma$  gegenüber Eins. Zwar wird jetzt entsprechend Bild 2-1 die tatsächliche Dämpfung oberhalb von  $\beta$  liegen, wegen des Verhältniswerts  $\gamma$  relativiert sich die Näherung jedoch etwa mit dem Faktor  $1/\gamma$ .

Im Fall 3 ist die Erregerfrequenz  $\alpha_n$  höher als die Eigenfrequenz  $\omega_\ell$ , so daß der Verhältniswert  $\gamma$  kleiner als Eins wird. Mit steigendem Abstand zwischen  $\omega_\ell$  und  $\alpha_n$  (s. Bild 2-1) reduziert sich der tatsächliche Dämpfungswert gegenüber  $\beta_{\text{soll}}$ , jedoch wird diese Abweichung durch den kleiner werdenden Verhältniswert  $\gamma$  wieder kompensiert.

Aus (3-35) läßt sich ablesen, daß die Lösung gemäß dem viskosen Ansatz eine Näherung darstellt. Führt man dagegen entsprechend /15/ bzw. /23/ den komplexen Ansatz für den Schubmodul

$$G^* = G \cdot \left\{ 1 - 2\beta^2 + i \cdot 2\beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \right\}, \quad (3-37)$$

ein, so erhält man die komplexe Steifigkeitsmatrix nach (3-33 a/b) in modifizierter Form zu

$$(\mathbf{v})_n = \left\{ -\alpha_n^2 \cdot [\mathbf{M}] + (1 - 2\beta^2) \cdot [\mathbf{K}] + i \cdot 2\beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \cdot [\mathbf{K}] \right\}^{-1} \cdot (\mathbf{P})_n \quad (3-38 \text{ a})$$

bzw.

$$(\mathbf{v})_n = \left\{ \mathbf{A}^* \right\}_n^{-1} \cdot (\mathbf{P})_n \quad (3-38 \text{ b})$$

Hierbei stellt  $\beta$  zunächst das kritische Dämpfungsmaß je Harmonische  $n$  dar, ist jedoch im Falle der hysteretischen Dämpfung über alle Perioden konstant. Gemäß den getroffenen Voraussetzungen liegt hier eine exakte Lösung vor.

Damit wird der Dämpfungsausdruck  $\left\{ \mathbf{A}^* \right\}_n^{-1}$  frequenzunabhängig (s.(3-38 a)).

Für den Fall der Modellierung des Halbraumes /23/ ist zusätzlich zu beachten, daß entlang der Berandung des Modells keine Fixierung irgendeines Freiheitsgrades vorgenommen werden darf. Das führt jedoch für die erste Entwicklung  $n = 0$  wegen  $\alpha_n = 0$  auf eine singuläre, komplexe Steifigkeitsmatrix, so daß sich numerisch eine sehr große Gesamtverschiebung des Systems ergibt. Für alle Folgeglieder  $n \neq 0$  stellen sich dagegen wegen  $\alpha_n \neq 0$  die erwarteten Schwingungsgrößen um die statische Ruhelage ein. Um für den Halbraum zu vernünftigen Resultaten zu gelangen, ist folgende Vorgehensweise möglich:

- Wird die Lösung über einen längeren Zeitraum für kurzzeitige Belastung ermittelt, so kann die erste Lastentwicklung  $n = 0$  näherungsweise vernachlässigt werden.
- Für eine genaue Analyse werden **nur für  $n = 0$**  Randelemente zugelassen, die mit ihren Steifigkeitseigenschaften den übrigen Halbraum genügend genau erfassen.

Diese Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt angewandt.

Es sind jetzt alle Voraussetzungen getroffen, um die Bewegungsgleichungen ohne notwendige Kenntnis der Eigenwerte zu integrieren. Zunächst ist die Lastseite unter Beachtung der Zeitdifferenz  $t_A$  mittels FFT in die Einzelfrequenzen  $\alpha_n$  zu entwickeln. Danach erfolgt zyklisch für  $n = 0$  bis  $n = N/2$  jeweils die Ermittlung der komplexen Gesamtmatrix  $[\mathbf{A}]_n$  bzw.  $\left\{ \mathbf{A}^* \right\}_n$ . Nach Lösung von (3-33 b) bzw. (3-38 b) wird der Lösungsvektor  $(\mathbf{v})$  aufgebaut (s. Bild 3-8). Anschließend werden die Restgrößen im Lösungsvektor  $(\mathbf{v})$  konjugiert komplex aus den zugehörigen Werten aufgefüllt und mittels FFT die Rücktransformation in den Zeitbereich durchgeführt. Die so erhaltene Lösung gilt dann nur für  $t \geq t_A$ , also entsprechend der für die Lastentwicklung vorgegebenen Zeitdifferenz unter Beachtung

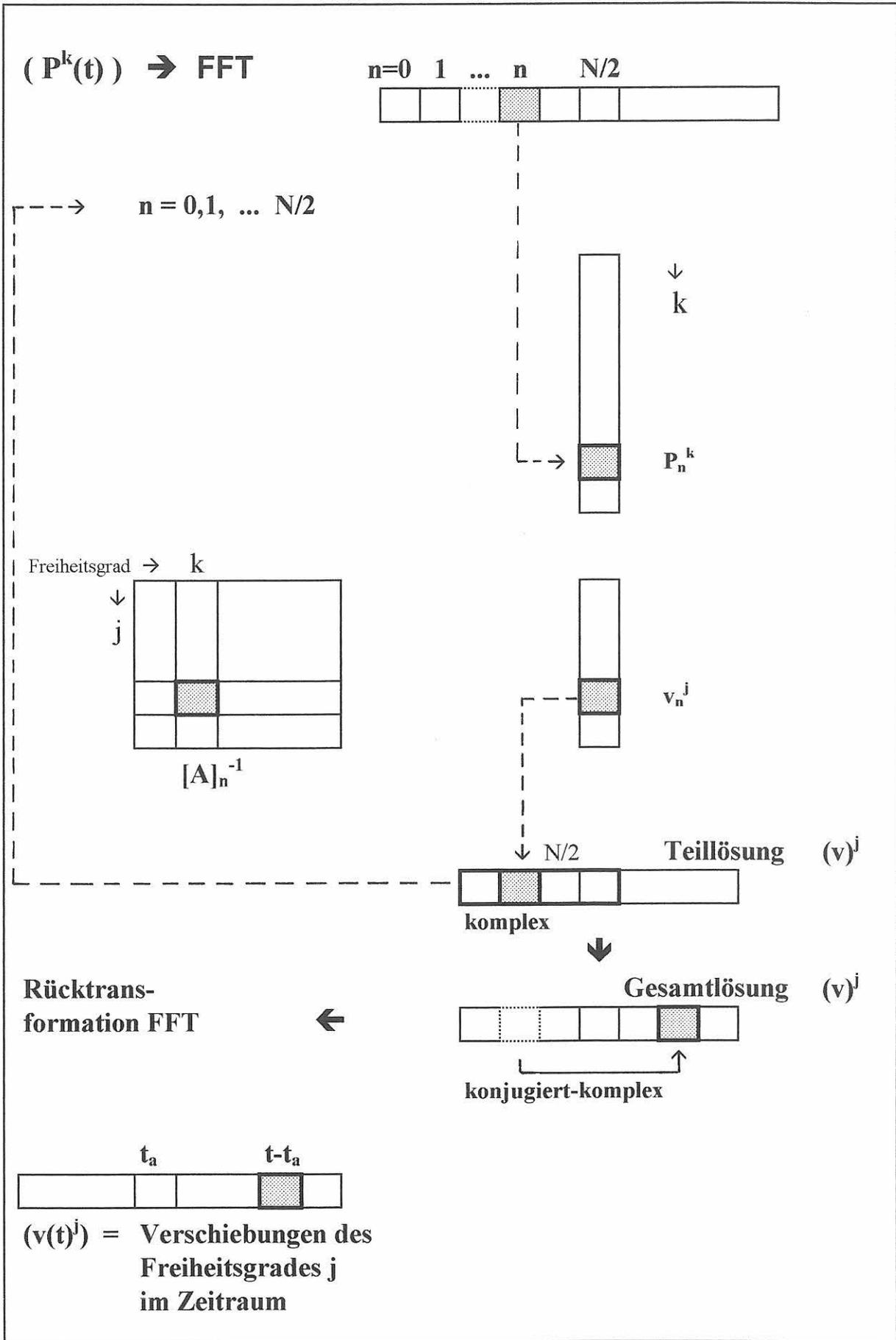


Bild 3-8

Implizites Verfahren

des Grenzkriteriums (3-28 b). Für diesen Lösungsweg kann eine Gesamtdämpfungsmatrix also nicht allgemein formuliert werden, es handelt sich vielmehr um ein schrittweises, die Dämpfungsmatrix implizierendes Verfahren.

### 3.4.3.3 Verifikation

Die hysteretische Dämpfung ohne Berücksichtigung von Eigenwerten wird an einem den elastischen Halbraum simulierenden, diskreten Modell verifiziert. Derartige Modelle, die durch einen begrenzten Diskretisierungsbereich die Eigenschaften des Halbraumes erfassen, haben keine starren Randbedingungen, sondern allseitig viskose Randdämpfer /23/, d.h. es lassen sich wegen der Singularität der Steifigkeitsmatrix für derartige Modelle keine Eigenwerte finden. Aus der Literatur sind Impedanzfunktionen für den elastischen und viskoelastischen Halbraum als analytische Lösung bekannt, wobei die Halbraumdämpfung entweder viskos, d.h. frequenzabhängig, oder hysteretisch, d.h. frequenzunabhängig, sein kann. Die Richtigkeit des gewählten Dämpfungsansatzes kann durch den Vergleich der durch diskrete Modelle *numerisch* ermittelten mit den *analytisch* ermittelten Impedanzen nachgewiesen werden. Die numerischen Impedanzfunktionen werden aus dem Last-Verschiebungsverhalten eines geeigneten Modells durch Transformation /23/ ermittelt.

Real- und Imaginärteil der Impedanz für den Kippmodus bei ebenem Spannungszustand lauten beispielsweise:

$$\begin{aligned} k_{MM} &= 4 \cdot (1 - \nu) / (\pi \cdot G) \cdot \operatorname{RE}\left\{P^f / v_v^f\right\} \\ c_{MM} &= c_s \cdot 4 \cdot (1 - \nu) / (\pi \cdot G \cdot B) \cdot \operatorname{IM}\left\{P^f / v_v^f\right\} \cdot 1 / \omega \end{aligned} \quad (3-39)$$

G und  $\nu$  sind Schubmodul und Querdehnung,  $c_s$  ist die Scherwellengeschwindigkeit im Boden und B die halbe Plattenbreite einer angeregten Fundamentplatte.

Zur Ermittlung der Impedanz wird ein Bodenausschnitt von 50 m Tiefe und 100 m Breite mit

$$\begin{aligned} G &= 400 \quad \text{MN} / \text{s}^2 \\ \nu &= 1 / 3 \\ \rho &= 0,0019 \quad \text{MN} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^4 \end{aligned}$$

gewählt.

Die analytische Lösung des viskoelastischen Halbraumes bei hysteretischer Dämpfung ist Bild 3-9 (s. /24/) zu entnehmen. Der Parameter ist das Dämpfungsmaß  $\beta$ . Hierbei entspricht  $\xi = 0.1, 0.3$  und  $0.5$  dem Dämpfungsverhältnis  $\beta = 5\%, 15\%$  und  $25\%$  (s. /23/).

Demgegenüber stehen die numerisch ermittelten Impedanzfunktionen für hysteretische Dämpfung in Bild 3-10 nach dem *viskosen* Ansatz gemäß (3-33a) und in Bild 3-11 nach dem *komplexen* Ansatz für den Schubmodul gemäß (3-38a), und zwar für beide Optionen zur Berücksichtigung der nullten Harmonischen. Der Vergleich zeigt, daß beide Ansätze zum gleichen Resultat führen; dieses ist wiederum mit der analytischen Lösung nach Bild 3-9 vergleichbar. Aus dem Parameterwert  $\beta = 0$  folgt die Impedanz des ungedämpften Modells, an dem lediglich die viskosen Randdämpfer wirken. Der hierfür ausgewiesene Realanteil hat nicht den monotonen Verlauf der analytischen Funktion, sondern weist Überhöhungen, bedingt durch die relativ geringe Modelltiefe von 50 m, auf. Diese Überhöhungen werden mit steigender Dämpfung reduziert. Der Imaginärteil hat dagegen einen relativ monotonen Verlauf und stimmt mit der analytischen Sollvorgabe bis auf den Bereich  $a_0 < 0.8$  überein. Der Bereich kleinerer Frequenzen ist ebenso mit Bild 3-9 vergleichbar, wenn das Bodenmodell als echter Halbraum abgebildet wird, also ohne starre Randlagerung, jedoch mit allseitig viskosen Randdämpfern. Bild 3-12 dient dem Vergleich der aus der algebraischen Lösung (3-33a) ermittelten Impedanz in Bild 3-10 und Bild 3-11 mit einer durch direkte Integration gewonnenen Impedanz desselben Modells. Für die Dämpfung  $\beta = 0$  hat die Impedanz aus der algebraischen Lösung höhere Ordinate, was auf eine zunehmende Genauigkeit /23/ schließen läßt. Der Einfluß viskoser Dämpfung auf die Impedanz wird in Bild 3-12 für  $\beta = 10\%$  gezeigt. Die zugrundegelegten Rayleigh-Koeffizienten folgen aus einer Festlegung der Einhängfrequenzen bei 1 Hz und 10 Hz.

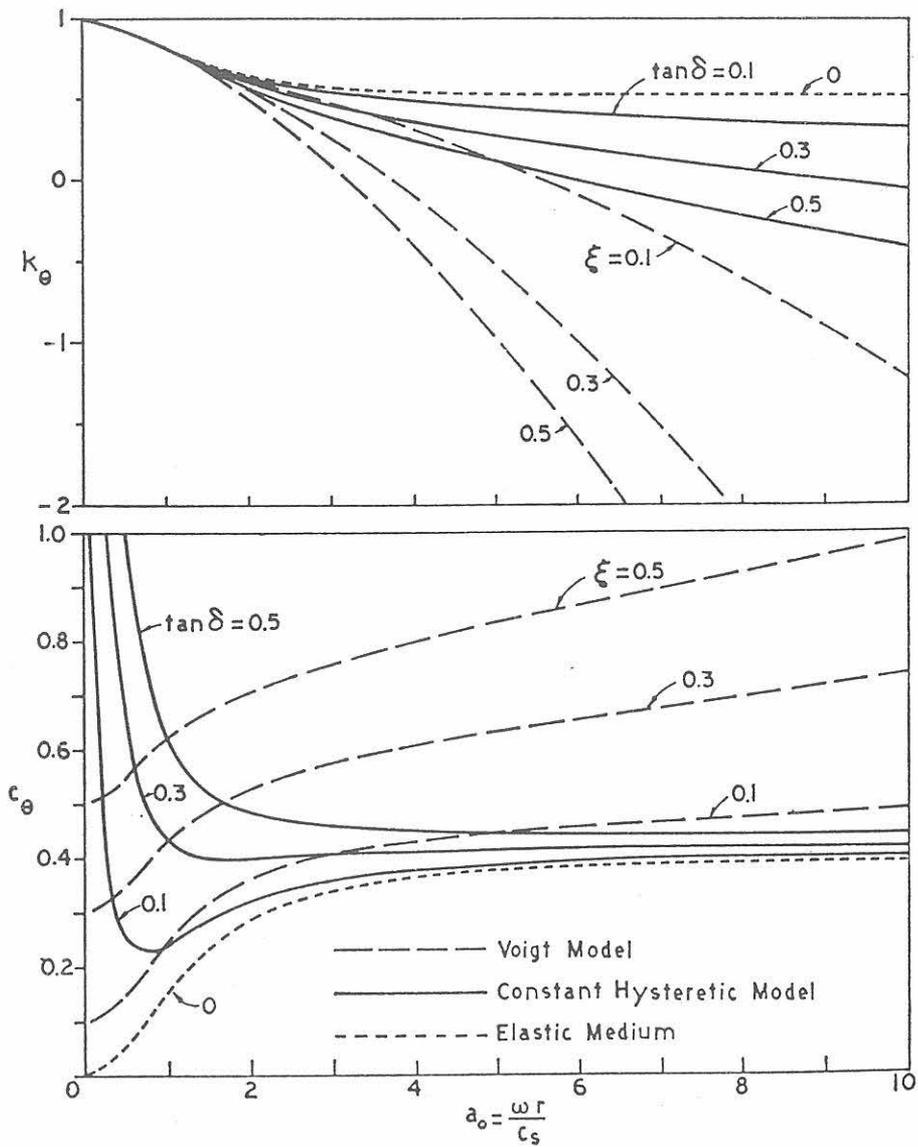
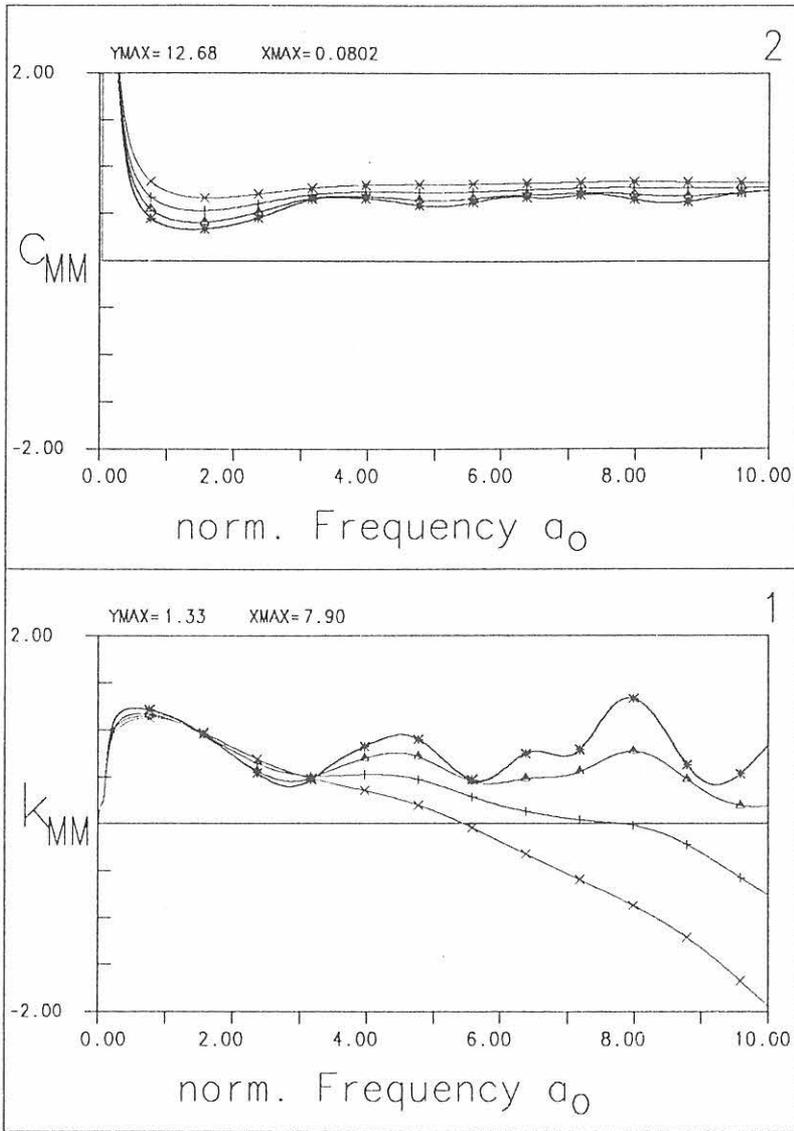


Bild 3-9 Analytisch ermittelte Impedanz des Kippmodus an viskoelastischem Halbraum /24/



Element = Volumen  
 Operator = algebraisch

BC = 5  
 B/2(Platte) = 30.0 m  
 B' (Boden) = 50.0 m  
 H (Boden) = 50.0 m

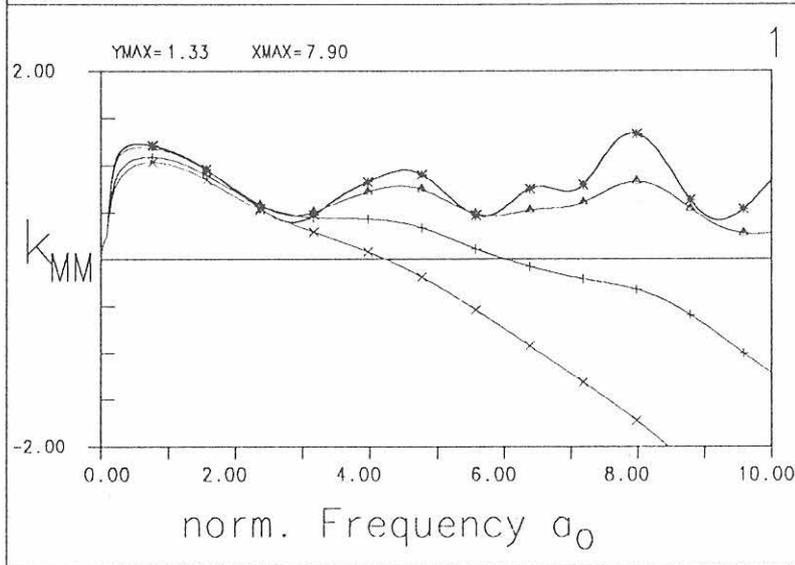
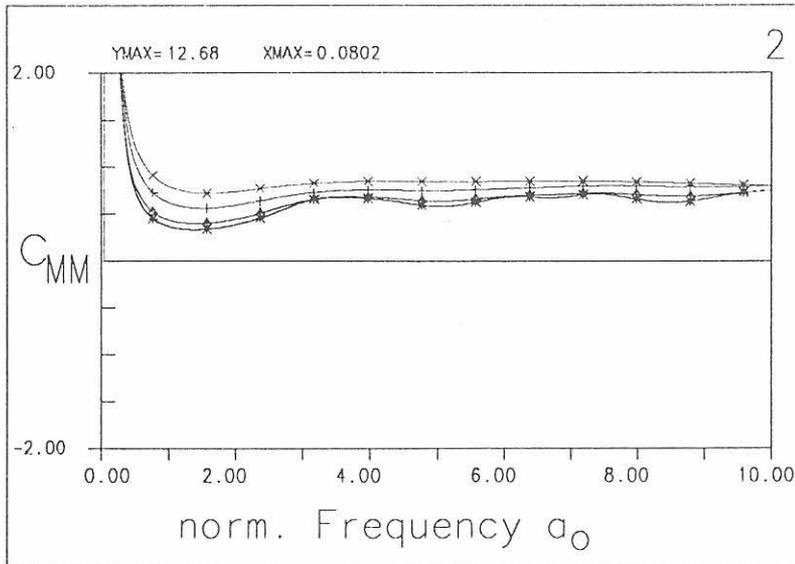
G = 400.00 MN/m  
 $\rho$  = 0.0019 MNs<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>  
 $\nu$  = 0.33

SYSTEMDAEMPfung

$\beta$  = 0 % (\*)  
 $\beta$  = 5 % ( $\Delta$ ) (HDP1)  
 $\beta$  = 15 % (+) (HDP3)  
 $\beta$  = 25 % (x) (HDP5)

Bild 3-10

Numerisch ermittelte Impedanz des Kippmodus für hysteretische Dämpfung bei viskosem Ansatz



Element = Volumen  
 Operator = algebraisch

BC = 5  
 B/2(Platte) = 30.0 m  
 B' (Boden) = 50.0 m  
 H (Boden) = 50.0 m

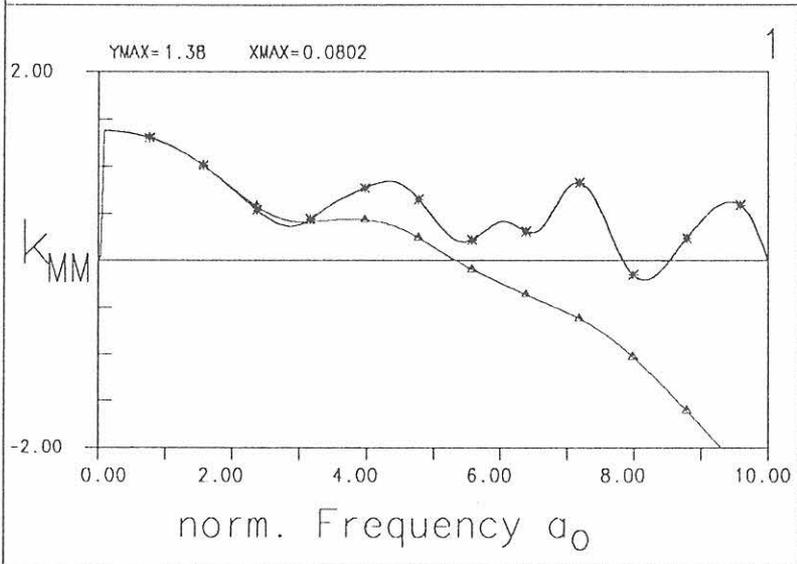
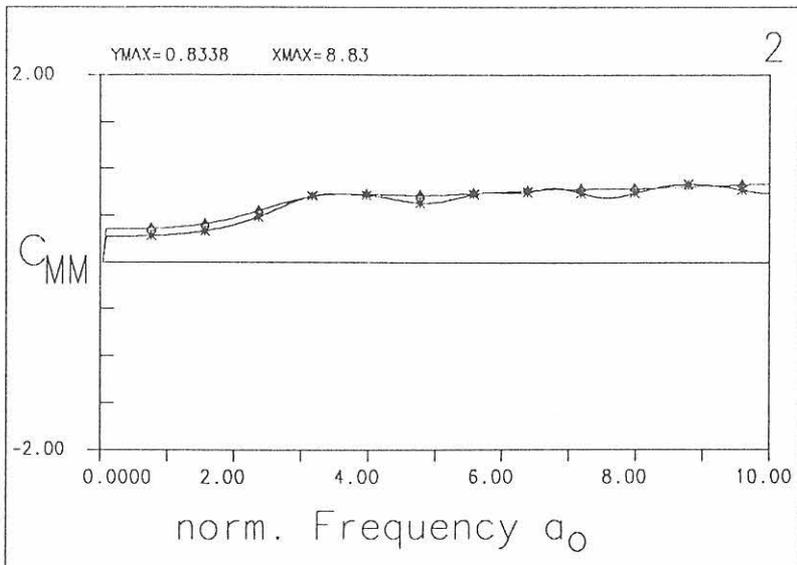
G = 400.00 MN/m  
 $\rho$  = 0.0019 MNs<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>  
 $\nu$  = 0.33

SYSTEMDAEMPfung

$\beta$  = 0 % (\*)  
 $\beta$  = 5 % ( $\Delta$ ) (HDP1)  
 $\beta$  = 15 % (+) (HDP3)  
 $\beta$  = 25 % (x) (HDP5)

Bild 3-11

Numerisch ermittelte Impedanz des Kippmodus für hysteretische Dämpfung bei komplexem Ansatz



Element = Volumen  
 Operator = mit Zeitintegration

BC = 5  
 B/2(Platte) = 30.0 m  
 B' (Boden) = 50.0 m  
 H (Boden) = 50.0 m

G = 400.00 MN/m  
 $\rho$  = 0.0019 MNs<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>  
 $\nu$  = 0.33

SYSTEMDAEMPfung

$\beta$  = 0 % (x)  
 $\beta$  = 10 % (Δ) (VD $\beta$ 10)  
 (Einhaengefrequenzen 1Hz, 10Hz)

Bild 3-12

Numerisch ermittelte Impedanz des Kippmodus für viskose Dämpfung bei Zeitintegration

## 4 Diskussion der Ergebnisse

In den Abschnitten 2 und 3 ist diskutiert worden, wie eine spezifische Dämpfungs Vorgabe im Zeitraum numerisch behandelt werden kann. Erfolgt die modale Zeitintegration der Bewegungsgleichungen, liegt ein probates Lösungsverfahren für die Erfassung beliebiger Dämpfungsverläufe - in Abhängigkeit von der Frequenz - vor, da für den jeweiligen Eigenmode das vorgegebene Dämpfungsmaß direkt einzusetzen ist. Im Falle sehr hoher bzw. sehr nah beieinander liegenden Eigenfrequenzen ist die eigentliche Problematik vielmehr, noch eine realistische Erfassung der Eigenformmatrix vornehmen zu können. Eine komplette Dämpfungsmatrix kann -im Vergleich zu anderen Wegen - nachträglich gebildet werden, ist jedoch für den eigentlichen Lösungsprozeß nicht erforderlich. Daher wird im Hinblick auf die Dämpfung von einer impliziten Erfassung gesprochen. Läßt sich das Verfahren der modalen Zeitintegration anwenden, so können beliebige Dämpfungswerte problemlos vorgegeben werden.

Die direkte Integration der Bewegungsgleichungen wird in den meisten Programmcodes vorgenommen. Dies erfordert jedoch vorab die explizite Formulierung einer Dämpfungsmatrix, wozu - für die Erfassung eines allgemeinen Dämpfungsverlaufes - die Reihendarstellung nach Caughey eine geeignete Bildungsvorschrift ist. Zur Bestimmung der Caughey-Reihenoeffizienten ist eine punktweise Erfüllung der Dämpfungskurve beispielsweise in deren Eigenwerten - falls bekannt - geeignet; ebenso können diese Koeffizienten auch durch einen optimierten Prozeß mittels Gauß- oder Fourier-Ansatz ermittelt werden. Die Aufstellung der allgemeinen Dämpfungsmatrix, die im Gegensatz zur Rayleigh-Dämpfung voll besetzt ist, kann zwar formelmäßig leicht vollzogen werden, jedoch werden bei Überschreiten relativ kleiner Frequenzen schnell Zahlengrößen erreicht, die mit den üblichen Standardroutinen des Rechners (wegen zu kurzer Mantissenlänge) nicht mehr sinnvoll dargestellt werden können. Zur Realisierung des allgemeinen Dämpfungsverhaltens für die direkte Zeitintegration werden verschiedene Lösungswege vorgeschlagen.

Die Grenzen der Anwendbarkeit der Caughey-Reihe werden grundsätzlich an einem Modell mit 11 Freiheitsgraden demonstriert; wird der gesamte Frequenzbereich des Modells mit 11 Caughey-Gliedern abgedeckt, wird bereits die Zahlendarstellungsgrenze erreicht. Begnügt man sich dagegen mit weniger Caughey-Gliedern, die ca. 40% der maximalen Frequenz umfassen, so reduziert sich einerseits der erforderliche Aufwand, andererseits bleiben die Ergebnisse trotz übermäßig großer Einzelglieder der Dämpfungsmatrix [im Vergleich zu Steifigkeits- bzw. Massenmatrix] noch innerhalb der normalen Zahlendarstellung des Rechners.

Liegen Systeme mit höherer Anzahl der Freiheitsgrade vor, empfiehlt sich die Vorgehensweise der Frequenzausblendung. Im Falle modaler Integrationsweise wird die Superposition zur Gesamtlösung nur mit wenigen (unteren) Eigenmoden durchgeführt; die darüberliegenden Frequenzen dürfen wegen der zunehmend kleiner werdenden Beteiligungsfaktoren vernachlässigt werden.

Dieses Prinzip der Frequenzausblendung kann auch auf die direkte Zeitintegration übertragen werden, indem nach Ermittlung der Eigenmoden des Systems eine Kondensation im Modalraum derart vollzogen wird, daß ein neues, modifiziertes mechanisches Gesamtsystem [mit modifizierter Steifigkeits- und Massenmatrix] entsteht, das ausschließlich die kondensierten Frequenzen beinhaltet. Der große Vorteil liegt darin, daß die Matrix der Eigenformen nur für die Anzahl der kondensierten Frequenzen zu bilden ist, sich somit der erforderliche Rechenaufwand erheblich reduzieren kann. Hierbei muß allerdings auch beachtet werden, daß aufgrund der Kondensation auf eine begrenzt besetzte Eigenformmatrix Systemmatrizen mit großen Zahlen entstehen können, die u. U. den Rahmen der üblichen Zahlendarstellung im Rechner überschreiten können.

Erfolgt die Vorgabe der Dämpfung für einen spezifizierten Frequenzbereich, so kann die Dämpfung mittels eines optimierten Prozesses mit Gauß- bzw. Fourier-Ansatz in Abhängigkeit der gewählten Genauigkeit approximiert werden. Der wesentliche Vorteil nach Gauß folgt aus der Berücksichtigung des Hyperbelanfangsgliedes, so daß gerade im unteren - für Bauwerke interessanten - Frequenzbereich eine vernünftige Dämpfungsannäherung an den gewünschten Verlauf erzielt werden kann. Danach stellt sich etwa im unteren Drittel des Frequenzbereiches wegen des Hyperbel-Durchschlageffektes der Näherungsfunktion eine jeweils zu kleine Dämpfung ein, während der höhere Frequenzbereich immer genauer approximiert wird. Nachteilig erweist sich das zu lösende Gleichungssystem, weil es wegen der auftretenden Extremzahlenbereiche äußerst ungünstig konditioniert ist.--- Der Ansatz nach Fourier liefert wegen der Orthogonalität der Kreisfunktionen eine direkte Lösung der Caughey-Koeffizienten. Wegen des Sinus-Ansatzes ist aber gerade der untere Frequenzbereich sehr viel schwerer genügend genau approximierbar, so daß eine höhere Anzahl von Caughey-Gliedern erforderlich wird. Daher treten hier ebenfalls Extremzahlenbereiche auf, die nur mittels Einsatzes von Großzahlen-Operatoren darstellbar sind. Eine Reduzierung auf einen geschätzten kleineren [ca. 40%] Frequenzbereich des Gesamtsystems ermöglicht zwar eine genauere Dämpfungsdarstellung, kann aber leicht zu übergroßen Koeffizienten in den Dämpfungsmatrizen führen. Wird dagegen der ganze Frequenzbereich des Systems erfaßt, erhält man nach Bildung der Dämpfungsmatrix mittels Großzahlen Zahlengrößenordnungen, die vergleichbar zur Rayleigh-Dämpfungsmatrix sind - allerdings mit dem wesentlichen Unterschied einer voll besetzten Dämpfungsmatrix. Nach diesem Zwischenschritt zur Bildung der Dämpfungsmatrix mittels Großzahlen kann die weitere dynamische Rechnung dann mit den üblichen Standardroutinen fortgesetzt werden.

Da die entwickelten Großzahlen-Operatoren nicht allgemein zur Verfügung stehen, wird ein weiterer Lösungs-

algorithmus erörtert. Es wird die Identität der Lösung der Bewegungsgleichungen einschließlich des Einschwingvorganges bei zeitversetztem Lastangriff allein bei Anwendung des Partikuläranteils nachgewiesen, so daß eine Gesamtlösung des vorliegenden Problems durch komplexe Steifigkeitsbeziehungen ermittelt werden kann. Hierin ist auch der Halbraum bei Sonderbetrachtung für die statische Ruhelage, also  $n=0$ , impliziert. Die Berücksichtigung der Dämpfung kann hierbei sowohl mit komplexem Ansatz direkt bzw. näherungsweise z. B. mit der Rayleigh-Beziehung je betrachteter Frequenz erfolgen. Beide Ansätze ergeben nahezu identische Ergebnisse. Bei diesem Vorgehen ist es nicht möglich, eine Dämpfungsmatrix insgesamt zu formulieren. Da die komplexe Steifigkeitsmatrix für jede Harmonische wegen des Frequenzfaktors aufzustellen und zu lösen ist, erweist sich auch dieses Prozedere als relativ aufwendig.

Mit verschiedensten Ansätzen sind Wege zur Lösung dynamischer Probleme unter Berücksichtigung einer beliebigen Dämpfungsfunktion erörtert worden. In Abhängigkeit der jeweils vorliegenden Aufgabe dürften Mischformen u. U. den optimalsten Lösungsweg darstellen. Eine allgemeine Erfassung der Dämpfung für beliebige Dämpfungsverhältnisse in Abhängigkeit von der Frequenz wird - abgesehen von der reinen modalen Zeitintegration - immer je nach Anforderung erheblich aufwendiger sein und wäre gegebenenfalls für Sonderuntersuchungen einzusetzen.

## Literatur

- 1 T. K. Caughey  
Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems  
Journal of Applied Mechanics, June 1960, S. 269 - 271
- 2 T. K. Caughey, M. E. J. O'Kelly  
Effect of Damping on the Natural Frequencies of Linear Dynamic Systems  
Journal of the Acoustical Soc. of America, Vol 33, No. 11, 1961, S. 1458-1461
- 3 T. K. Caughey, M. E. J. O'Kelly  
Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems  
Journal of Applied Mechanics, 1965, S. 583-588
- 4 E. L. Wilson, J. Penzien  
Evaluation of Orthogonal Damping Matrices  
Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering  
Vol. 4, 1972, S. 5-10
- 5 D. Hitchings, S. H. Dance  
Response of Nuclear Structural Systems to Transient and Random  
Excitations, Using Both Deterministic and Probabilistic Methods  
Proceedings of SMiRT-2, Berlin, 1973, Paper E4/1
- 6 K. Schildberg  
Modale Analyse gedämpfter Systeme zur Berechnung erdbebenerregter Gebäudeschwingungen  
Konstruktiver Ingenieurbau Berichte der Ruhr-Universität Bochum  
Heft 23, 1975, S. 91-103
- 7 F. C. Nelson, R. Greif  
Damping  
Shock and Vibration Computer Programs  
Univ. Press of Virginia, W. Pilkey, 1975, S. 603-623
- 8 B. Prange  
Parameters Affecting Damping Properties  
Proceedings of Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics  
Karlsruhe, 1977, Vol. 1, S. 61-78
- 9 E. Krämer  
Dämpfung aus der Sicht des Ingenieurs  
VDI-Berichte Nr. 627, 1987, S. 1-20

- 10 G. Waas  
Dämpfung von Bauwerksschwingungen  
Dämpfung und Duktilität  
Vortragsband der 4. Tagung der Deutschen Gesellschaft für  
Erdbeben-Ingenieurwesen und Baudynamik, 1987, S. 1-30
- 11 I. Szabó  
Einführung in die Technische Mechanik  
Springer Verlag, 1961
- 12 J. M. Biggs  
Introduction to Structural Dynamics  
McGraw-Hill Book Company, 1964
- 13 B. J. Lazan  
Damping of Materials and Members in Structural Mechanics  
Pergamon Press, 1968
- 14 R. W. Clough, J. Penzien  
Dynamics of Structures  
McGraw-Hill Book Company, 1975
- 15 J. Lysmer et. al.  
F L U S H  
University of California, Report No. EERC 75-30, 1975
- 16 K. J. Bathe, E. L. Wilson  
Numerical Methods in Finite Element Analysis  
Prentice-Hall Inc., 1976
- 17 F. P. Müller, E. Keintzel  
Erdbebensicherung von Hochbauten  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1978
- 18 S. J. Pietrzko  
Verfahren zur Identifikation der Dämpfungsmatrix mechanischer Systeme  
EMPA, Bericht NR. 223, 1992
- 19 R. Flesch  
Baudynamik, Band I  
Bauverlag, 1993
- 20 F. Buchhardt  
Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter dynamischer  
Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung  
BAM-Forschungsbericht 171, 1990
- 21 W. Matthees, G. Magiera  
Iterative Dekonvolution der seismischen Basiserregung für den Zeitraum  
BAM-Forschungsbericht 176, 1990
- 22 F. Buchhardt  
Zur Dekonvolution im Zeitbereich  
BAM-Forschungsbericht 183, 1992
- 23 W. Matthees, G. Magiera  
Impedanzeigenschaften von Finiten Elemente Modellen bei Integration im Zeitraum  
BAM-Forschungsbericht 189, 1992
- 24 A.S. Veletsos, B. Verbic  
Vibration of Viscoelastic Foundations  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1973, S. 87-102

# Anhang

Tabelle A.3-9 Auf 4 Freiheitsgrade kondensierte Systemmatrizen eines Balkens mit 40 Freiheitsgraden

## MASSENMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1          | 2          | 3          | 4          |
|---|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.3774E-10 | 0.5362E-08 | 0.6480E-10 | 0.9222E-08 |
| 2 | 0.5362E-08 | 0.7624E-06 | 0.9222E-08 | 0.1313E-05 |
| 3 | 0.6480E-10 | 0.9222E-08 | 0.1118E-09 | 0.1593E-07 |
| 4 | 0.9222E-08 | 0.1313E-05 | 0.1593E-07 | 0.2272E-05 |

## STEIFIGKEITSMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1          | 2          | 3          | 4          |
|---|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.9455E-04 | 0.1325E-01 | 0.1557E-03 | 0.2183E-01 |
| 2 | 0.1325E-01 | 0.1857E+01 | 0.2183E-01 | 0.3061E+01 |
| 3 | 0.1557E-03 | 0.2183E-01 | 0.2568E-03 | 0.3602E-01 |
| 4 | 0.2183E-01 | 0.3061E+01 | 0.3602E-01 | 0.5054E+01 |

## EIGENWERTE DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   |     |             |           |                |
|---|-----|-------------|-----------|----------------|
| 1 | EW= | 0.12578E+03 | FREQUENZ= | 20.01927864Hz  |
| 2 | EW= | 0.50160E+03 | FREQUENZ= | 79.83228027Hz  |
| 3 | EW= | 0.11229E+04 | FREQUENZ= | 178.71864748Hz |
| 4 | EW= | 0.19825E+04 | FREQUENZ= | 315.52360784Hz |

## NORMIERTE EIGENVEKTORMATRIX DES REDUZIERTEN SYSTEMS

|   | 1           | 2           | 3           | 4           |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | -0.1465E+12 | -0.1484E+12 | -0.6498E+11 | -0.1117E+11 |
| 2 | 0.1575E+10  | 0.1596E+10  | 0.6985E+09  | 0.1199E+09  |
| 3 | -0.4778E+11 | -0.4831E+11 | -0.2108E+11 | -0.3604E+10 |
| 4 | 0.1907E+08  | 0.1884E+08  | 0.7907E+07  | 0.1278E+07  |

Tabelle A.3-10 Caughey-Dämpfungsmatrix eines auf 4 Freiheitsgrade kondensierten Balkens mit 40 Freiheitsgraden

| CAUGHEY-DÄMPFUNGSMATRIX MIT 4 KOEFFIZIENTEN |            |            |            |            |
|---|------------|------------|------------|------------|
|   | 1          | 2          | 3          | 4          |
| 1   | 0.5525E-08 | 0.7778E-06 | 0.9226E-08 | 0.1300E-05 |
| 2   | 0.7778E-06 | 0.1095E-03 | 0.1300E-05 | 0.1832E-03 |
| 3   | 0.9226E-08 | 0.1300E-05 | 0.1545E-07 | 0.2179E-05 |
| 4   | 0.1300E-05 | 0.1832E-03 | 0.2179E-05 | 0.3074E-03 |

| CAUCHEY-KOEFFIZIENTEN $a_i$ |           |           |            |           |
|-----------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|
|                             | 0.965E+01 | 0.187E-03 | -0.106E-09 | 0.180E-16 |

| ORTHOGONALITÄT DER CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |
|-----------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                                   | 1           | 2           | 3           | 4           |
| 1                                 | 0.5000E-01  | 0.1087E-15  | 0.1982E-16  | 0.1777E-17  |
| 2                                 | -0.5176E-16 | 0.5000E-01  | -0.9871E-17 | -0.1160E-17 |
| 3                                 | 0.1724E-16  | 0.1334E-16  | 0.5000E-01  | -0.7417E-17 |
| 4                                 | -0.7915E-17 | -0.6811E-17 | -0.6880E-17 | 0.5000E-01  |

| DIAGONALGLIEDER DER CAUGHEY-MATRIX |           |           |           |           |
|------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                                    | 0.500E-01 | 0.500E-01 | 0.500E-01 | 0.500E-01 |

Tabelle A.3-14 Beispiel ADDITION

|    |   |             |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|-------------|---|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) |   | +401,667    | + | +0,0056 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2) | <table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr></table> | 1           | 6 | 3       | <table border="1"><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table> | 4 | 0 | 1 | 6 | 6 | 6 | 7 | + | <table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>-2</td></tr></table> | 1 | 7 | -2 | <table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 6   | 3           |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 0   | 1           | 6 | 6       | 6   | 7 |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | 7   | -2          |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | 6   | 0           | 0 | 0       | 0   | 0 |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3) | <table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr></table> | 1           | 7 | 3       | <table border="1"><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table> | 4 | 0 | 1 | 6 | 6 | 6 | 7 |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | 7   | 3           |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 0   | 1           | 6 | 6       | 6   | 7 |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | +   |             |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | <table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr></table> | 1           | 7 | 3       | <table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td></tr></table> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | 7   | 3           |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0  | 0   | 0           | 0 | 0       | 5   | 6 |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | =   |             |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | <table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr></table> | 1           | 7 | 3       | <table border="1"><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>3</td></tr></table> | 4 | 0 | 1 | 6 | 7 | 2 | 3 |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | 7   | 3           |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 0   | 1           | 6 | 7       | 2   | 3 |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4) |   | = +401,6723 |   |         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |



Tabelle A.3-16 Beispiel DIVISION

1)  $0,35 : -76,04$

2)  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 6 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$

3)  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 6 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 4 & -2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$

$\rightarrow$  (4)

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 4 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 & 0 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow$  (6)

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow$  (0)

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$  (2)

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 9 & 0 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 9 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$  (3)

4)  $0,35 : -76,04 = -0,0046028$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 6 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 4 & -2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$

Tabelle A.3-19a 11 DOF bis 500 Hz, Gauß N= 10,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-----------|-----------|-----------|----|----|--|--|--|--|--|
|                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10         |           | 17        | 18        | 19 | 20 |  |  |  |  |  |
| 1              | 0.1340E+08  | 0.0000E+00  | -0.1029E+07 | 0.2626E+08  | 0.0000E+00  | -0.1453E+07 | 0.2495E+08  | 0.0000E+00  | -0.1026E+07 | 0.2364E+08 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 2              | 0.0000E+00  | 0.7883E+10  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1115E+11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.7880E+10  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 3              | -0.1029E+07 | 0.0000E+00  | 0.1146E+07  | -0.1453E+07 | 0.0000E+00  | 0.1614E+07  | 0.3207E+04  | 0.0000E+00  | 0.1136E+07  | 0.1453E+07 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 4              | 0.2626E+08  | 0.0000E+00  | -0.1453E+07 | 0.5174E+08  | 0.0000E+00  | -0.2055E+07 | 0.4989E+08  | 0.0000E+00  | -0.1453E+07 | 0.4804E+08 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 5              | 0.0000E+00  | -0.1115E+11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1576E+11  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1115E+11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 6              | -0.1453E+07 | 0.0000E+00  | 0.1614E+07  | -0.2055E+07 | 0.0000E+00  | 0.2282E+07  | 0.4000E-90  | 0.0000E+00  | 0.1614E+07  | 0.2055E+07 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 7              | 0.2495E+08  | 0.0000E+00  | 0.3207E+04  | 0.4989E+08  | 0.0000E+00  | -0.6000E-91 | 0.4990E+08  | 0.0000E+00  | -0.3207E+04 | 0.4989E+08 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 8              | 0.0000E+00  | 0.7880E+10  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1115E+11 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.7883E+10  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 9              | -0.1026E+07 | 0.0000E+00  | 0.1136E+07  | -0.1453E+07 | 0.0000E+00  | 0.1614E+07  | -0.3207E+04 | 0.0000E+00  | 0.1146E+07  | 0.1453E+07 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 10             | 0.2364E+08  | 0.0000E+00  | 0.1453E+07  | 0.4804E+08  | 0.0000E+00  | 0.2055E+07  | 0.4989E+08  | 0.0000E+00  | 0.1453E+07  | 0.5174E+08 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 11             | 0.1155E+08  | 0.0000E+00  | 0.1026E+07  | 0.2364E+08  | 0.0000E+00  | 0.1453E+07  | 0.2495E+08  | 0.0000E+00  | 0.1029E+07  | 0.2626E+08 |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 11             | 0.1155E+08  |             | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18          | 19         | 20        |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 1              | 0.1155E+08  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 3              | 0.1026E+07  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 4              | 0.2364E+08  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 5              | 0.0000E+00  |             | 1           | 0.260E-01   | 0.579E-01   | 0.462E-01   | 0.504E-01   | 0.513E-01   | 0.448E+01   | 0.579E+06  | 0.721E+07 | 0.114E+10 | 0.333E+11 |    |    |  |  |  |  |  |
| 6              | 0.1453E+07  |             | 11          | 0.638E+11   |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 7              | 0.2495E+08  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 9              | 0.1029E+07  |             |             |             |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |
| 10             | 0.2626E+08  |             | 1           | 0.218E-01   | 0.568E-01   | 0.457E-01   | 0.502E-01   | 0.513E-01   | 0.448E+01   | 0.579E+06  | 0.721E+07 | 0.114E+10 | 0.333E+11 |    |    |  |  |  |  |  |
| 11             | 0.1340E+08  |             | 11          | 0.638E+11   |             |             |             |             |             |            |           |           |           |    |    |  |  |  |  |  |

Tabelle A.3-19b 11 DOF bis 500 Hz, Gauß  $N=60$ ,  $\beta=5\%$ 

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|
| 1              | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9          | 10          |             |            |            |
| 1              | -0.2210E+55 | 0.0000E+00  | 0.5158E+46  | -0.4420E+55 | 0.0000E+00  | 0.7294E+46  | -0.4420E+55 | 0.0000E+00 | 0.5158E+46  | -0.4420E+55 |            |            |
| 2              | 0.0000E+00  | -0.4759E+59 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.6730E+59  | 0.0000E+00  | -0.4759E+59 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 3              | 0.5158E+46  | 0.0000E+00  | -0.5729E+46 | 0.7294E+46  | 0.0000E+00  | -0.8102E+46 | 0.1566E+41  | 0.0000E+00 | -0.5729E+46 | -0.7294E+46 |            |            |
| 4              | -0.4420E+55 | 0.0000E+00  | 0.7294E+46  | -0.8839E+55 | 0.0000E+00  | 0.1032E+47  | -0.8839E+55 | 0.0000E+00 | 0.7294E+46  | -0.8839E+55 |            |            |
| 5              | 0.0000E+00  | 0.6730E+59  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.9517E+59 | 0.0000E+00  | 0.6730E+59  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 6              | 0.7294E+46  | 0.0000E+00  | -0.8102E+46 | 0.1032E+47  | 0.0000E+00  | -0.1146E+47 | -0.400E-242 | 0.0000E+00 | -0.8102E+46 | -0.1032E+47 |            |            |
| 7              | -0.4420E+55 | 0.0000E+00  | 0.1566E+41  | -0.8839E+55 | 0.0000E+00  | -0.267E-243 | -0.8839E+55 | 0.0000E+00 | -0.1566E+41 | -0.8839E+55 |            |            |
| 8              | 0.0000E+00  | -0.4759E+59 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.6730E+59  | 0.0000E+00  | -0.4759E+59 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 9              | 0.5158E+46  | 0.0000E+00  | -0.5729E+46 | 0.7294E+46  | 0.0000E+00  | -0.8102E+46 | -0.1566E+41 | 0.0000E+00 | -0.5729E+46 | -0.7294E+46 |            |            |
| 10             | -0.4420E+55 | 0.0000E+00  | 0.7294E+46  | -0.8839E+55 | 0.0000E+00  | -0.1032E+47 | -0.8839E+55 | 0.0000E+00 | -0.7294E+46 | -0.8839E+55 |            |            |
| 11             | -0.2210E+55 | 0.0000E+00  | -0.5158E+46 | -0.4420E+55 | 0.0000E+00  | -0.7294E+46 | -0.4420E+55 | 0.0000E+00 | -0.5158E+46 | -0.4420E+55 |            |            |
| 11             | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18          | 19         | 20          |             |            |            |
| 1              | -0.2210E+55 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 3              | -0.5158E+46 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 4              | -0.4420E+55 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 5              | 0.0000E+00  | 1           | -0.474E+41  | 0.241E+42   | 0.360E+42   | 0.211E+42   | -0.162E+45  | 0.627E+42  | 0.650E+42   | -0.272E+34  | -0.570E+49 | -0.589E+58 |
| 6              | -0.7294E+46 | 11          | -0.385E+60  |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 7              | -0.4420E+55 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 9              | -0.5158E+46 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 10             | -0.4420E+55 | 1           | 0.105E-01   | 0.395E-01   | 0.589E-01   | 0.485E-01   | 0.464E-01   | -0.248E+10 | -0.487E+32  | -0.128E+38  | -0.570E+49 | -0.589E+58 |
| 11             | -0.2210E+55 | 11          | -0.385E+60  |             |             |             |             |            |             |             |            |            |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS  
EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS  
FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROBZAHLEN)

Tabelle A.3-20a 11 DOF bis 1600 Hz, Gauß  $N = 10$ ,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| 1              | 0.1870E-03  | 0.0000E+00  | -0.1774E-03 | -0.3318E-04 | 0.0000E+00  | -0.3056E-04 | 0.3314E-05  | 0.0000E+00  | 0.4272E-04  | -0.1218E-04 |
| 2              | 0.0000E+00  | 0.2071E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.3567E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1570E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3              | -0.1774E-03 | 0.0000E+00  | 0.2390E-02  | -0.3056E-04 | 0.0000E+00  | -0.1620E-02 | 0.2201E-03  | 0.0000E+00  | 0.2762E-03  | 0.3056E-04  |
| 4              | -0.3318E-04 | 0.0000E+00  | -0.3056E-04 | 0.3772E-03  | 0.0000E+00  | -0.1346E-03 | -0.4537E-04 | 0.0000E+00  | -0.3056E-04 | 0.1529E-04  |
| 5              | 0.0000E+00  | -0.3567E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1914E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.3567E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6              | -0.3056E-04 | 0.0000E+00  | -0.1620E-02 | -0.1346E-03 | 0.0000E+00  | 0.2666E-02  | 0.2515E-98  | 0.0000E+00  | -0.1620E-02 | 0.1346E-03  |
| 7              | 0.3314E-05  | 0.0000E+00  | 0.2201E-03  | -0.4537E-04 | 0.0000E+00  | 0.3028E-99  | 0.3859E-03  | 0.0000E+00  | -0.2201E-03 | -0.4537E-04 |
| 8              | 0.0000E+00  | -0.1570E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.3567E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2071E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9              | 0.4272E-04  | 0.0000E+00  | 0.2762E-03  | -0.3056E-04 | 0.0000E+00  | -0.1620E-02 | -0.2201E-03 | 0.0000E+00  | 0.2390E-02  | 0.3056E-04  |
| 10             | -0.1218E-04 | 0.0000E+00  | 0.3056E-04  | 0.1529E-04  | 0.0000E+00  | 0.1346E-03  | -0.4537E-04 | 0.0000E+00  | 0.3056E-04  | 0.3772E-03  |
| 11             | 0.5990E-05  | 0.0000E+00  | -0.4272E-04 | -0.1218E-04 | 0.0000E+00  | 0.3056E-04  | 0.3314E-05  | 0.0000E+00  | 0.1774E-03  | -0.3318E-04 |
|                | 11          | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18          | 19          | 20          |
| 1              | 0.5990E-05  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 3              | -0.4272E-04 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 4              | -0.1218E-04 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 5              | 0.0000E+00  | 1           | 0.128E-01   | 0.290E-01   | 0.523E-01   | 0.554E-01   | 0.476E-01   | 0.452E-01   | 0.518E-01   | 0.474E-01   |
| 6              | 0.3056E-04  | 11          | 0.490E-01   |             |             |             |             |             |             |             |
| 7              | 0.3314E-05  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 9              | 0.1774E-03  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 10             | -0.3318E-04 | 1           | 0.719E-02   | 0.276E-01   | 0.517E-01   | 0.550E-01   | 0.474E-01   | 0.450E-01   | 0.516E-01   | 0.473E-01   |
| 11             | 0.1870E-03  | 11          | 0.489E-01   |             |             |             |             |             |             |             |

| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN) |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        |
| 1   | 0.128E-01 |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
| 2   |           | 0.490E-01 |           |           |           |           |           |           |           |           |
| 3   |           |           | 0.719E-02 |           |           |           |           |           |           |           |
| 4   |           |           |           | 0.276E-01 |           |           |           |           |           |           |
| 5   |           |           |           |           | 0.517E-01 |           |           |           |           |           |
| 6   |           |           |           |           |           | 0.550E-01 |           |           |           |           |
| 7   |           |           |           |           |           |           | 0.474E-01 |           |           |           |
| 8   |           |           |           |           |           |           |           | 0.450E-01 |           |           |
| 9   |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.516E-01 |           |
| 10  |           |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.473E-01 |
| 11  |           |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.502E-01 |

| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROBZAHLEN) |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        |
| 1   | 0.719E-02 |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
| 2   |           | 0.490E-01 |           |           |           |           |           |           |           |           |
| 3   |           |           | 0.517E-01 |           |           |           |           |           |           |           |
| 4   |           |           |           | 0.474E-01 |           |           |           |           |           |           |
| 5   |           |           |           |           | 0.450E-01 |           |           |           |           |           |
| 6   |           |           |           |           |           | 0.516E-01 |           |           |           |           |
| 7   |           |           |           |           |           |           | 0.473E-01 |           |           |           |
| 8   |           |           |           |           |           |           |           | 0.502E-01 |           |           |
| 9   |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.502E-01 |           |
| 10  |           |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.502E-01 |
| 11  |           |           |           |           |           |           |           |           |           | 0.502E-01 |

CAUGHEY-MATRIX

|    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.1877E-03  | 0.0000E+00  | -0.2546E-03 | -0.3244E-04 | 0.0000E+00  | 0.8010E-04  | 0.1953E-04  | 0.0000E+00  | -0.5828E-04 | -0.2689E-05 |
| 2  | 0.0000E+00  | 0.2264E-01  | 0.0000E+00  | -0.2384E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1768E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3  | -0.2546E-03 | 0.0000E+00  | 0.1789E-02  | 0.8010E-04  | 0.0000E+00  | -0.1321E-02 | 0.1963E-03  | 0.0000E+00  | 0.4370E-03  | -0.8010E-04 |
| 4  | -0.3244E-04 | 0.0000E+00  | 0.8010E-04  | 0.3950E-03  | 0.0000E+00  | -0.3129E-03 | -0.3513E-04 | 0.0000E+00  | 0.8010E-04  | -0.1570E-04 |
| 5  | 0.0000E+00  | -0.2384E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2088E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2384E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6  | 0.8010E-04  | 0.0000E+00  | -0.1321E-02 | -0.3129E-03 | 0.0000E+00  | 0.2226E-02  | 0.634E-291  | 0.0000E+00  | -0.1321E-02 | 0.3129E-03  |
| 7  | 0.1953E-04  | 0.0000E+00  | 0.1963E-03  | -0.3513E-04 | 0.0000E+00  | 0.171E-293  | 0.3403E-03  | 0.0000E+00  | -0.1963E-03 | -0.3513E-04 |
| 8  | 0.0000E+00  | -0.1768E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2384E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2264E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9  | -0.5828E-04 | 0.0000E+00  | 0.4370E-03  | 0.8010E-04  | 0.0000E+00  | -0.1321E-02 | -0.1963E-03 | 0.0000E+00  | 0.1789E-02  | -0.8010E-04 |
| 10 | -0.2689E-05 | 0.0000E+00  | -0.8010E-04 | -0.1570E-04 | 0.0000E+00  | 0.3129E-03  | -0.3513E-04 | 0.0000E+00  | -0.8010E-04 | 0.3950E-03  |
| 11 | -0.1761E-04 | 0.0000E+00  | 0.5828E-04  | -0.2689E-05 | 0.0000E+00  | -0.8010E-04 | 0.1953E-04  | 0.0000E+00  | 0.2546E-03  | -0.3244E-04 |
| 11 | 0.0000E+00  |
| 12 | 0.0000E+00  |
| 13 | 0.0000E+00  |
| 14 | 0.0000E+00  |
| 15 | 0.0000E+00  |
| 16 | 0.0000E+00  |
| 17 | 0.0000E+00  |
| 18 | 0.0000E+00  |
| 19 | 0.0000E+00  |
| 20 | 0.0000E+00  |
| 1  | -0.1761E-04 | 0.0000E+00  |
| 2  | 0.0000E+00  |
| 3  | 0.5828E-04  | 0.0000E+00  |
| 4  | -0.2689E-05 | 0.0000E+00  |
| 5  | 0.0000E+00  | 1           | 0.979E-02   | 0.150E-01   | 0.302E-01   | 0.515E-01   | 0.591E-01   | 0.606E-01   | 0.417E-01   | 0.519E-01   |
| 6  | -0.8010E-04 | 11          | 0.491E-01   |             |             |             |             |             |             |             |
| 7  | 0.1953E-04  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 8  | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 9  | 0.2546E-03  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 10 | -0.3244E-04 | 1           | 0.336E-02   | 0.134E-01   | 0.295E-01   | 0.511E-01   | 0.588E-01   | 0.604E-01   | 0.415E-01   | 0.518E-01   |
| 11 | 0.1877E-03  | 11          | 0.490E-01   |             |             |             |             |             |             |             |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN)

Tabelle A.3-21a 11 DOF bis 100 Hz, Fourier N= 83,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|
| 1              | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9          | 10          | 11          |            |            |
| 1              | -0.174E+186 | 0.0000E+00  | 0.345E+173  | -0.349E+186 | 0.0000E+00  | 0.480E+173  | -0.349E+186 | 0.0000E+00 | 0.333E+173  | -0.349E+186 |            |            |
| 2              | 0.0000E+00  | -0.211E+191 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.299E+191  | 0.0000E+00  | -0.211E+191 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 3              | 0.345E+173  | 0.0000E+00  | -0.377E+173 | 0.492E+173  | 0.0000E+00  | -0.533E+173 | 0.123E+172  | 0.0000E+00 | -0.377E+173 | -0.468E+173 |            |            |
| 4              | -0.349E+186 | 0.0000E+00  | 0.492E+173  | -0.698E+186 | 0.0000E+00  | 0.679E+173  | -0.698E+186 | 0.0000E+00 | 0.468E+173  | -0.698E+186 |            |            |
| 5              | 0.0000E+00  | 0.299E+191  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.423E+191 | 0.0000E+00  | 0.299E+191  | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 6              | 0.480E+173  | 0.0000E+00  | -0.533E+173 | 0.679E+173  | 0.0000E+00  | -0.754E+173 | -0.380E-111 | 0.0000E+00 | -0.533E+173 | -0.679E+173 |            |            |
| 7              | -0.349E+186 | 0.0000E+00  | 0.123E+172  | -0.698E+186 | 0.0000E+00  | -0.219E-112 | -0.698E+186 | 0.0000E+00 | -0.123E+172 | -0.698E+186 |            |            |
| 8              | 0.0000E+00  | -0.211E+191 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.299E+191  | 0.0000E+00  | -0.211E+191 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |            |            |
| 9              | 0.333E+173  | 0.0000E+00  | -0.377E+173 | 0.468E+173  | 0.0000E+00  | -0.533E+173 | -0.123E+172 | 0.0000E+00 | -0.377E+173 | -0.492E+173 |            |            |
| 10             | -0.349E+186 | 0.0000E+00  | -0.468E+173 | -0.698E+186 | 0.0000E+00  | -0.679E+173 | -0.698E+186 | 0.0000E+00 | -0.492E+173 | -0.698E+186 |            |            |
| 11             | -0.174E+186 | 0.0000E+00  | -0.333E+173 | -0.349E+186 | 0.0000E+00  | -0.480E+173 | -0.349E+186 | 0.0000E+00 | -0.345E+173 | -0.349E+186 |            |            |
| 1              | -0.174E+186 | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18         | 19          | 20          |            |            |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 3              | -0.333E+173 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 4              | -0.349E+186 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 5              | 0.0000E+00  | 1           | -0.11E+174  | -0.21E+174  | 0.32E+174   | 0.86E+174   | 0.24E+177   | 0.57E+174  | -0.52E+174  | -0.12E+166  | -0.37E+176 | -0.46E+189 |
| 6              | -0.480E+173 | 11          | -0.17E+192  |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 7              | -0.349E+186 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 9              | -0.345E+173 |             |             |             |             |             |             |            |             |             |            |            |
| 10             | -0.349E+186 | 1           | 0.473E-01   | 0.473E-01   | -0.364E+38  | -0.155E+85  | -0.36E+103  | -0.28E+117 | -0.12E+149  | -0.69E+157  | -0.37E+176 | -0.46E+189 |
| 11             | -0.174E+186 | 11          | -0.17E+192  |             |             |             |             |            |             |             |            |            |



Tabelle A.3-22a 11 DOF bis 500 Hz, Fourier N= 83,  $\beta = 5\%$

CAUGHEY-MATRIX

|    | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | -0.1168E+72 | 0.0000E+00  | 0.1960E+59  | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | 0.2714E+59  | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | 0.1878E+59  | -0.2335E+72 |
| 2  | 0.0000E+00  | -0.1459E+77 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2063E+77  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1459E+77 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3  | 0.1960E+59  | 0.0000E+00  | -0.2131E+59 | 0.2797E+59  | 0.0000E+00  | -0.3014E+59 | 0.8274E+57  | 0.0000E+00  | -0.2131E+59 | -0.2631E+59 |
| 4  | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | 0.2797E+59  | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | 0.3838E+59  | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | 0.2631E+59  | -0.4671E+72 |
| 5  | 0.0000E+00  | 0.2063E+77  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2917E+77 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2063E+77  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6  | 0.2714E+59  | 0.0000E+00  | -0.3014E+59 | 0.3838E+59  | 0.0000E+00  | -0.4263E+59 | -0.330E-225 | 0.0000E+00  | -0.3014E+59 | -0.3838E+59 |
| 7  | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | 0.8274E+57  | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | -0.113E-226 | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | -0.8274E+57 | -0.4671E+72 |
| 8  | 0.0000E+00  | -0.1459E+77 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2063E+77  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.1459E+77 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9  | 0.1878E+59  | 0.0000E+00  | -0.2131E+59 | 0.2631E+59  | 0.0000E+00  | -0.3014E+59 | -0.8274E+57 | 0.0000E+00  | -0.2131E+59 | -0.2797E+59 |
| 10 | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | 0.2631E+59  | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | -0.3838E+59 | -0.4671E+72 | 0.0000E+00  | -0.2797E+59 | -0.4671E+72 |
| 11 | -0.1168E+72 | 0.0000E+00  | -0.1878E+59 | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | -0.2714E+59 | -0.2335E+72 | 0.0000E+00  | -0.1960E+59 | -0.2335E+72 |

|    | 11          | 12 | 13         | 14        | 15         | 16        | 17        | 18         | 19         | 20         |
|----|-------------|----|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 1  | -0.1168E+72 |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 2  | 0.0000E+00  |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 3  | -0.1878E+59 |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 4  | -0.2335E+72 |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 5  | 0.0000E+00  | 1  | -0.250E+59 | 0.192E+59 | -0.798E+58 | 0.820E+59 | 0.684E+62 | -0.177E+59 | 0.460E+59  | -0.836E+51 |
| 6  | -0.2714E+59 | 11 | -0.118E+78 |           |            |           |           |            |            |            |
| 7  | -0.2335E+72 |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 8  | 0.0000E+00  |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 9  | -0.1960E+59 |    |            |           |            |           |           |            |            |            |
| 10 | -0.2335E+72 | 1  | 0.568E-01  | 0.528E-01 | 0.511E-01  | 0.480E-01 | 0.455E-01 | -0.577E+02 | -0.445E+34 | -0.294E+43 |
| 11 | -0.1168E+72 | 11 | -0.118E+78 |           |            |           |           |            |            |            |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROEZAHLEN)



Tabelle A.3-23a 11 DOF bis 1600 Hz, Fourier N= 83,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5          | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| 1              | 0.1893E-03  | 0.0000E+00  | -0.1651E-03 | -0.2950E-04 | 0.0000E+00 | 0.1561E-04  | -0.3125E-06 | 0.0000E+00  | -0.1689E-04 | 0.1057E-04  |
| 2              | 0.0000E+00  | 0.1751E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1676E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.5352E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3              | -0.1651E-03 | 0.0000E+00  | 0.3018E-02  | 0.1561E-04  | 0.0000E+00 | -0.1522E-02 | 0.1482E-03  | 0.0000E+00  | -0.3460E-03 | -0.1561E-04 |
| 4              | -0.2950E-04 | 0.0000E+00  | 0.1561E-04  | 0.3782E-03  | 0.0000E+00 | -0.1820E-03 | -0.1893E-04 | 0.0000E+00  | 0.1561E-04  | 0.1093E-04  |
| 5              | 0.0000E+00  | 0.1676E-02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1215E-01 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1676E-02  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6              | 0.1561E-04  | 0.0000E+00  | -0.1522E-02 | -0.1820E-03 | 0.0000E+00 | 0.2672E-02  | -0.627E-280 | 0.0000E+00  | -0.1522E-02 | 0.1820E-03  |
| 7              | -0.3125E-06 | 0.0000E+00  | 0.1482E-03  | -0.1893E-04 | 0.0000E+00 | 0.261E-280  | 0.3898E-03  | 0.0000E+00  | -0.1482E-03 | -0.1893E-04 |
| 8              | 0.0000E+00  | -0.5352E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1676E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1751E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9              | -0.1689E-04 | 0.0000E+00  | -0.3460E-03 | 0.1561E-04  | 0.0000E+00 | -0.1522E-02 | -0.1482E-03 | 0.0000E+00  | 0.3018E-02  | -0.1561E-04 |
| 10             | 0.1057E-04  | 0.0000E+00  | -0.1561E-04 | 0.1093E-04  | 0.0000E+00 | 0.1820E-03  | -0.1893E-04 | 0.0000E+00  | -0.1561E-04 | 0.3782E-03  |
| 11             | 0.5820E-05  | 0.0000E+00  | 0.1689E-04  | 0.1057E-04  | 0.0000E+00 | -0.1561E-04 | -0.3125E-06 | 0.0000E+00  | 0.1651E-03  | -0.2950E-04 |
| 11             | 11          | 12          | 13          | 14          | 15         | 16          | 17          | 18          | 19          | 20          |
| 1              | 0.5620E-05  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 3              | 0.1689E-04  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 4              | 0.1057E-04  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 5              | 0.0000E+00  | 1           | 0.242E-01   | 0.590E-01   | 0.467E-01  | 0.489E-01   | 0.490E-01   | 0.517E-01   | 0.512E-01   | 0.486E-01   |
| 6              | -0.1561E-04 | 11          | 0.198E-01   |             |            |             |             |             |             |             |
| 7              | -0.3125E-06 |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 9              | 0.1651E-03  |             |             |             |            |             |             |             |             |             |
| 10             | -0.2950E-04 | 1           | 0.242E-01   | 0.590E-01   | 0.467E-01  | 0.489E-01   | 0.490E-01   | 0.517E-01   | 0.512E-01   | 0.486E-01   |
| 11             | 0.1893E-03  | 11          | 0.198E-01   |             |            |             |             |             |             |             |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSSZAHLEN)

Tabelle A.3-23b 11 DOF bis 1600 Hz, Fourier N= 850,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1              | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |             |
| 1              | 0.1870E-03  | 0.0000E+00  | -0.1613E-03 | -0.3227E-04 | 0.0000E+00  | 0.1326E-05  | -0.1409E-05 | 0.0000E+00  | 0.2757E-05  | 0.2385E-06  |
| 2              | 0.0000E+00  | 0.2101E-01  | 0.0000E+00  | -0.2642E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2437E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 3              | -0.1613E-03 | 0.0000E+00  | 0.2929E-02  | 0.1326E-05  | 0.0000E+00  | -0.1464E-02 | 0.1640E-03  | 0.0000E+00  | 0.6418E-05  | -0.1326E-05 |
| 4              | -0.3227E-04 | 0.0000E+00  | 0.1326E-05  | 0.3727E-03  | 0.0000E+00  | -0.1585E-03 | -0.3204E-04 | 0.0000E+00  | 0.1326E-05  | -0.1930E-05 |
| 5              | 0.0000E+00  | -0.2642E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.1857E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2642E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 6              | 0.1326E-05  | 0.0000E+00  | -0.1464E-02 | -0.1585E-03 | 0.0000E+00  | 0.2935E-02  | -0.318E-247 | 0.0000E+00  | -0.1464E-02 | 0.1585E-03  |
| 7              | -0.1409E-05 | 0.0000E+00  | 0.1640E-03  | -0.3204E-04 | 0.0000E+00  | -0.953E-248 | 0.3736E-03  | 0.0000E+00  | -0.1640E-03 | -0.3204E-04 |
| 8              | 0.0000E+00  | -0.2437E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | -0.2642E-02 | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  | 0.2101E-01  | 0.0000E+00  | 0.0000E+00  |
| 9              | 0.2757E-05  | 0.0000E+00  | 0.6418E-05  | 0.1326E-05  | 0.0000E+00  | -0.1464E-02 | -0.1640E-03 | 0.0000E+00  | 0.2929E-02  | -0.1326E-05 |
| 10             | 0.2385E-06  | 0.0000E+00  | -0.1326E-05 | -0.1930E-05 | 0.0000E+00  | 0.1585E-03  | -0.3204E-04 | 0.0000E+00  | -0.1326E-05 | 0.3727E-03  |
| 11             | -0.2607E-06 | 0.0000E+00  | -0.2757E-05 | 0.2385E-06  | 0.0000E+00  | -0.1326E-05 | -0.1409E-05 | 0.0000E+00  | 0.1613E-03  | -0.3227E-04 |
| 11             | 11          | 12          | 13          | 14          | 15          | 16          | 17          | 18          | 19          | 20          |
| 1              | -0.2607E-06 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 2              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 3              | -0.2757E-05 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 4              | 0.2385E-06  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 5              | 0.0000E+00  | 1           | 0.496E-01   | 0.490E-01   | 0.503E-01   | 0.498E-01   | 0.501E-01   | 0.502E-01   | 0.499E-01   | 0.511E-01   |
| 6              | -0.1326E-05 | 11          | 0.452E-01   |             |             |             |             |             |             |             |
| 7              | -0.1409E-05 |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 8              | 0.0000E+00  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 9              | 0.1613E-03  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 10             | -0.3227E-04 | 1           | 0.496E-01   | 0.490E-01   | 0.503E-01   | 0.498E-01   | 0.501E-01   | 0.502E-01   | 0.499E-01   | 0.511E-01   |
| 11             | 0.1870E-03  | 11          | 0.452E-01   |             |             |             |             |             |             |             |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS

EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS

FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROBZAHLEN)

Tabelle A.3-24a 40 DOF bis 5000 Hz, Gauß  $N=10$ ,  $\beta=5\%$

**CAUGHEY-MATRIX**

|    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.3893E+09  | -0.5480E+09 | 0.7214E+09  | -0.8590E+09 | 0.5755E+09  | -0.8668E+09 | 0.3984E+09  | -0.6763E+09 | 0.2421E+09  | -0.4372E+09 |
| 2  | -0.5480E+09 | 0.2210E+10  | -0.8590E+09 | 0.2877E+10  | -0.3188E+09 | 0.1950E+10  | 0.1827E+09  | 0.5400E+09  | 0.4296E+09  | -0.3958E+09 |
| 3  | 0.7214E+09  | -0.8590E+09 | 0.1354E+10  | -0.1415E+10 | 0.1120E+10  | -0.1535E+10 | 0.8177E+09  | -0.1304E+10 | 0.5294E+09  | -0.9202E+09 |
| 4  | -0.8590E+09 | 0.2877E+10  | -0.1415E+10 | 0.4160E+10  | -0.6763E+09 | 0.3417E+10  | 0.1108E+09  | 0.1554E+10  | 0.6151E+09  | -0.1310E+09 |
| 5  | 0.5755E+09  | -0.3188E+09 | 0.1120E+10  | -0.6763E+09 | 0.1021E+10  | -0.9852E+09 | 0.8524E+09  | -0.1103E+10 | 0.6396E+09  | -0.9877E+09 |
| 6  | -0.8668E+09 | 0.1950E+10  | -0.1535E+10 | 0.3417E+10  | -0.9852E+09 | 0.3764E+10  | -0.2439E+09 | 0.2746E+10  | 0.4271E+09  | 0.9936E+09  |
| 7  | 0.3984E+09  | 0.1827E+09  | 0.8177E+09  | 0.1108E+09  | 0.8524E+09  | -0.2439E+09 | 0.8425E+09  | -0.6689E+09 | 0.7501E+09  | -0.9133E+09 |
| 8  | -0.6763E+09 | 0.5400E+09  | -0.1304E+10 | 0.1554E+10  | -0.1103E+10 | 0.2746E+10  | -0.6689E+09 | 0.3204E+10  | -0.5434E+08 | 0.2394E+10  |
| 9  | 0.2421E+09  | 0.4296E+09  | 0.5294E+09  | 0.6151E+09  | 0.6396E+09  | 0.4271E+09  | 0.7501E+09  | -0.5434E+08 | 0.7904E+09  | -0.5706E+09 |
| 10 | -0.4372E+09 | -0.3958E+09 | -0.9202E+09 | -0.1310E+09 | -0.9877E+09 | 0.9936E+09  | -0.9133E+09 | 0.2394E+10  | -0.5706E+09 | 0.3018E+10  |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 31 | 0.7802E+09  | -0.5255E+09 | 0.7260E+09  | -0.8047E+09 | 0.5875E+09  | -0.7459E+09 | 0.4271E+09  | -0.4323E+09 | 0.3062E+09  | 0.1310E+09  |
| 32 | -0.5255E+09 | 0.3204E+10  | 0.5434E+08  | 0.2746E+10  | 0.6689E+09  | 0.1554E+10  | 0.1103E+10  | 0.5400E+09  | 0.1304E+10  | 0.6763E+09  |
| 33 | 0.7260E+09  | 0.5434E+08  | 0.7904E+09  | -0.4271E+09 | 0.7501E+09  | -0.6151E+09 | 0.6396E+09  | -0.4296E+09 | 0.5294E+09  | 0.2421E+09  |
| 34 | -0.8047E+09 | 0.2746E+10  | -0.4271E+09 | 0.3764E+10  | 0.2439E+09  | 0.3417E+10  | 0.9852E+09  | 0.1950E+10  | 0.1535E+10  | 0.8668E+09  |
| 35 | 0.5875E+09  | 0.6689E+09  | 0.7501E+09  | 0.2439E+09  | 0.8425E+09  | -0.1108E+09 | 0.8524E+09  | -0.1827E+09 | 0.8177E+09  | 0.3984E+09  |
| 36 | -0.7459E+09 | 0.1554E+10  | -0.6151E+09 | 0.3417E+10  | -0.1108E+09 | 0.4160E+10  | 0.6763E+09  | 0.2877E+10  | 0.1415E+10  | 0.8590E+09  |
| 37 | 0.4271E+09  | 0.1103E+10  | 0.6396E+09  | 0.9852E+09  | 0.8524E+09  | 0.6763E+09  | 0.1021E+10  | 0.3188E+09  | 0.1120E+10  | 0.5755E+09  |
| 38 | -0.4323E+09 | 0.5400E+09  | -0.4296E+09 | 0.1950E+10  | -0.1827E+09 | 0.2877E+10  | 0.3188E+09  | 0.2210E+10  | 0.8590E+09  | 0.5480E+09  |
| 39 | 0.3062E+09  | 0.1304E+10  | 0.5294E+09  | 0.1535E+10  | 0.8177E+09  | 0.1415E+10  | 0.1120E+10  | 0.8590E+09  | 0.1354E+10  | 0.7214E+09  |
| 40 | 0.1310E+09  | 0.6763E+09  | 0.2421E+09  | 0.8668E+09  | 0.3984E+09  | 0.8590E+09  | 0.5755E+09  | 0.5480E+09  | 0.7214E+09  | 0.3893E+09  |

**DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)**

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.142E-01 | 0.105E-01 | 0.207E-01 | 0.345E-01 | 0.482E-01 | 0.572E-01 | 0.585E-01 | 0.526E-01 | 0.458E-01 | 0.456E-01 |
| 11 | 0.513E-01 | 0.529E-01 | 0.480E-01 | 0.485E-01 | 0.525E-01 | 0.471E-01 | 0.522E-01 | 0.314E+00 | 0.136E+02 | 0.119E+04 |
| 21 | 0.422E+04 | 0.256E+05 | 0.141E+06 | 0.687E+06 | 0.304E+07 | 0.124E+08 | 0.474E+08 | 0.171E+09 | 0.581E+09 | 0.188E+10 |
| 31 | 0.577E+10 | 0.167E+11 | 0.455E+11 | 0.114E+12 | 0.262E+12 | 0.538E+12 | 0.969E+12 | 0.150E+13 | 0.197E+13 | 0.215E+13 |

**DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSZAHLEN)**

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.234E-02 | 0.927E-02 | 0.204E-01 | 0.342E-01 | 0.478E-01 | 0.569E-01 | 0.582E-01 | 0.525E-01 | 0.459E-01 | 0.459E-01 |
| 11 | 0.515E-01 | 0.532E-01 | 0.482E-01 | 0.484E-01 | 0.527E-01 | 0.473E-01 | 0.522E-01 | 0.314E+00 | 0.136E+02 | 0.119E+04 |
| 21 | 0.422E+04 | 0.256E+05 | 0.141E+06 | 0.687E+06 | 0.304E+07 | 0.124E+08 | 0.474E+08 | 0.171E+09 | 0.581E+09 | 0.188E+10 |
| 31 | 0.577E+10 | 0.167E+11 | 0.455E+11 | 0.114E+12 | 0.262E+12 | 0.538E+12 | 0.969E+12 | 0.150E+13 | 0.197E+13 | 0.215E+13 |

| CAUGHEY-MATRIX   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|  | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| 1  | -0.1454E+66 | 0.2997E+65  | -0.2878E+66 | 0.5808E+65  | -0.2789E+66 | 0.8264E+65  | -0.2648E+66 | 0.1023E+66  | -0.2462E+66 | 0.1164E+66  |
| 2  | 0.2997E+65  | -0.1852E+65 | 0.5808E+65  | -0.3512E+65 | 0.5267E+65  | -0.4814E+65 | 0.4427E+65  | -0.5645E+65 | 0.3373E+65  | -0.5957E+65 |
| 3  | -0.2878E+66 | 0.5808E+65  | -0.5697E+66 | 0.1126E+66  | -0.5526E+66 | 0.1604E+66  | -0.5251E+66 | 0.1990E+66  | -0.4890E+66 | 0.2267E+66  |
| 4  | 0.5808E+65  | -0.3512E+65 | 0.1126E+66  | -0.6666E+65 | 0.1023E+66  | -0.9157E+65 | 0.8640E+65  | -0.1077E+66 | 0.6663E+65  | -0.1141E+66 |
| 5  | -0.2789E+66 | 0.5267E+65  | -0.5526E+66 | 0.1023E+66  | -0.5370E+66 | 0.1463E+66  | -0.5120E+66 | 0.1825E+66  | -0.4790E+66 | 0.2092E+66  |
| 6  | 0.8264E+65  | -0.4814E+65 | 0.1604E+66  | -0.9157E+65 | 0.1463E+66  | -0.1262E+66 | 0.1244E+66  | -0.1493E+66 | 0.9663E+65  | -0.1593E+66 |
| 7  | -0.2648E+66 | 0.4427E+65  | -0.5251E+66 | 0.8640E+65  | -0.5120E+66 | 0.1244E+66  | -0.4908E+66 | 0.1566E+66  | -0.4626E+66 | 0.1817E+66  |
| 8  | 0.1023E+66  | -0.5645E+65 | 0.1990E+66  | -0.1077E+66 | 0.1825E+66  | -0.1493E+66 | 0.1566E+66  | -0.1778E+66 | 0.1236E+66  | -0.1916E+66 |
| 9  | -0.2462E+66 | 0.3373E+65  | -0.4890E+66 | 0.6663E+65  | -0.4790E+66 | 0.9663E+65  | -0.4626E+66 | 0.1236E+66  | -0.4405E+66 | 0.1464E+66  |
| 10   | 0.1164E+66  | -0.5957E+65 | 0.2267E+66  | -0.1141E+66 | 0.2092E+66  | -0.1593E+66 | 0.1817E+66  | -0.1916E+66 | 0.1464E+66  | -0.2092E+66 |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| .....  | 31          | 32          | 33          | 34          | 35          | 36          | 37          | 38          | 39          | 40          |
| 31   | -0.3942E+66 | -0.8645E+65 | -0.4135E+66 | -0.6556E+65 | -0.4287E+66 | -0.4396E+65 | -0.4396E+66 | -0.2204E+65 | -0.4462E+66 | -0.2242E+66 |
| 32   | -0.8645E+65 | -0.1778E+66 | -0.1236E+66 | -0.1493E+66 | -0.1566E+66 | -0.1077E+66 | -0.1825E+66 | -0.5645E+65 | -0.1990E+66 | -0.1023E+66 |
| 33   | -0.4135E+66 | -0.1236E+66 | -0.4405E+66 | -0.9663E+65 | -0.4626E+66 | -0.6631E+65 | -0.4790E+66 | -0.3373E+65 | -0.4890E+66 | -0.2462E+66 |
| 34   | -0.6556E+65 | -0.1493E+66 | -0.9663E+65 | -0.1262E+66 | -0.1244E+66 | -0.9157E+65 | -0.1463E+66 | -0.4814E+65 | -0.1604E+66 | -0.8264E+65 |
| 35   | -0.4287E+66 | -0.1566E+66 | -0.4626E+66 | -0.1244E+66 | -0.4908E+66 | -0.8640E+65 | -0.5120E+66 | -0.4427E+65 | -0.5251E+66 | -0.2648E+66 |
| 36   | -0.4396E+65 | -0.1077E+66 | -0.6631E+65 | -0.9157E+65 | -0.8640E+65 | -0.6666E+65 | -0.1023E+66 | -0.3512E+65 | -0.1126E+66 | -0.5808E+65 |
| 37   | -0.4396E+66 | -0.1825E+66 | -0.4790E+66 | -0.1463E+66 | -0.5120E+66 | -0.1023E+66 | -0.5370E+66 | -0.5267E+65 | -0.5526E+66 | -0.2789E+66 |
| 38   | -0.2204E+65 | -0.5645E+65 | -0.3373E+65 | -0.4814E+65 | -0.4427E+65 | -0.3512E+65 | -0.5267E+65 | -0.1852E+65 | -0.5808E+65 | -0.2997E+65 |
| 39   | -0.4462E+66 | -0.1990E+66 | -0.4890E+66 | -0.1604E+66 | -0.5251E+66 | -0.1126E+66 | -0.5526E+66 | -0.5808E+65 | -0.5697E+66 | -0.2878E+66 |
| 40   | -0.2242E+66 | -0.1023E+66 | -0.2462E+66 | -0.8264E+65 | -0.2648E+66 | -0.5808E+65 | -0.2789E+66 | -0.2997E+65 | -0.2878E+66 | -0.1454E+66 |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1  | -0.578E+54  | -0.251E+54  | -0.176E+54  | 0.282E+54   | -0.928E+53  | -0.120E+54  | 0.979E+53   | -0.893E+53  | 0.666E+53   | 0.212E+53   |
| 11   | 0.143E+54   | 0.262E+54   | 0.739E+53   | 0.374E+52   | 0.198E+53   | -0.116E+54  | -0.519E+53  | -0.836E+53  | 0.716E+53   | 0.305E+54   |
| 21   | 0.227E+54   | -0.172E+54  | -0.775E+53  | -0.158E+54  | 0.125E+53   | 0.247E+53   | 0.133E+54   | 0.389E+54   | 0.197E+54   | 0.133E+53   |
| 31   | 0.684E+53   | -0.452E+56  | -0.261E+59  | -0.988E+61  | -0.215E+64  | -0.235E+66  | -0.111E+68  | -0.196E+69  | -0.116E+70  | -0.213E+70  |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSSZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1  | 0.108E-02   | 0.431E-02   | 0.963E-02   | 0.169E-01   | 0.238E-01   | 0.358E-01   | 0.459E-01   | 0.548E-01   | 0.603E-01   | 0.597E-01   |
| 11   | 0.518E-01   | 0.422E-01   | 0.477E-01   | 0.561E-01   | 0.485E-01   | 0.481E-01   | 0.445E-01   | -0.490E+05  | -0.144E+12  | -0.145E+20  |
| 21   | -0.372E+22  | -0.130E+26  | -0.379E+29  | -0.786E+32  | -0.120E+36  | -0.140E+39  | -0.131E+42  | -0.107E+45  | -0.829E+47  | -0.684E+50  |
| 31   | -0.588E+53  | -0.451E+56  | -0.261E+59  | -0.988E+61  | -0.215E+64  | -0.235E+66  | -0.111E+68  | -0.196E+69  | -0.116E+70  | -0.213E+70  |

Tabelle A.3-25a 40 DOF bis 20000 Hz, Gauß  $N=10$ ,  $\beta=5\%$

| CAUGHEY-MATRIX   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          | .....       |
| 1  | 0.6013E-04  | -0.3270E-03 | 0.1340E-05  | -0.1140E-04 | -0.1733E-05 | 0.1089E-04  | 0.2034E-05  | 0.2831E-05  | -0.2254E-05 | 0.1085E-04  |
| 2  | -0.3270E-03 | 0.1859E-01  | -0.1140E-04 | -0.1168E-01 | 0.3379E-03  | 0.5981E-03  | 0.1424E-04  | 0.1106E-02  | -0.4120E-07 | -0.5381E-03 |
| 3  | 0.1340E-05  | -0.1140E-04 | 0.1185E-03  | -0.3161E-03 | 0.3374E-05  | -0.8574E-05 | 0.2174E-04  | 0.3687E-05  | 0.1236E-04  |             |
| 4  | -0.1140E-04 | -0.1168E-01 | -0.3161E-03 | 0.1919E-01  | 0.2831E-05  | -0.1058E-01 | 0.3378E-03  | 0.5998E-04  | -0.3789E-05 | 0.1406E-02  |
| 5  | -0.1733E-05 | 0.3379E-03  | 0.3374E-05  | 0.2831E-05  | 0.1180E-03  | 0.3161E-03  | 0.2994E-05  | -0.2660E-04 | -0.1330E-05 | 0.6812E-05  |
| 6  | 0.1089E-04  | 0.5981E-03  | -0.8574E-05 | -0.1058E-01 | -0.3161E-03 | 0.1865E-01  | -0.1519E-04 | 0.1028E-01  | 0.3229E-03  | 0.7733E-04  |
| 7  | 0.2034E-05  | 0.1424E-04  | -0.3988E-05 | 0.3378E-03  | 0.2994E-05  | 0.3378E-03  | 0.1207E-03  | -0.3310E-03 | -0.4147E-06 | -0.6706E-05 |
| 8  | 0.2831E-05  | 0.1106E-02  | 0.2174E-04  | 0.5998E-04  | -0.2660E-04 | -0.1028E-01 | -0.3310E-03 | 0.1867E-01  | 0.4698E-05  | -0.1036E-01 |
| 9  | -0.2254E-05 | -0.4120E-07 | 0.3687E-05  | -0.3789E-05 | -0.1330E-05 | 0.3229E-03  | -0.4147E-06 | 0.4698E-05  | 0.1188E-03  | -0.3228E-03 |
| 10   | 0.1085E-04  | -0.5381E-03 | -0.1236E-04 | 0.1406E-02  | 0.6812E-05  | 0.7733E-04  | -0.6706E-05 | -0.1036E-01 | -0.3228E-03 | 0.1864E-01  |
| :  | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           |
| .....  | 31          | 32          | 33          | 34          | 35          | 36          | 37          | 38          | 39          | 40          |
| 31   | 0.1203E-03  | -0.3312E-03 | 0.8230E-06  | -0.1610E-04 | -0.3234E-05 | 0.1497E-04  | 0.2785E-06  | 0.1802E-04  | -0.1851E-05 | 0.1654E-05  |
| 32   | -0.3312E-03 | 0.1867E-01  | -0.4698E-05 | -0.1028E-01 | 0.3310E-03  | 0.5998E-04  | 0.2660E-04  | 0.1106E-02  | -0.2174E-04 | -0.2831E-05 |
| 33   | 0.8230E-06  | -0.4698E-05 | 0.1188E-03  | -0.3229E-03 | -0.4147E-06 | 0.3789E-05  | -0.1330E-05 | 0.4120E-07  | 0.3687E-05  | -0.2254E-05 |
| 34   | -0.1610E-04 | -0.1028E-01 | -0.3229E-03 | 0.1865E-01  | 0.1519E-04  | -0.1058E-01 | 0.3161E-03  | 0.5981E-03  | 0.8574E-05  | -0.1089E-04 |
| 35   | -0.3234E-05 | 0.3310E-03  | -0.4147E-06 | 0.1519E-04  | 0.1207E-03  | -0.3378E-03 | 0.2994E-05  | -0.1424E-04 | -0.3988E-05 | 0.2034E-05  |
| 36   | 0.1497E-04  | 0.5998E-04  | 0.3789E-05  | -0.1058E-01 | -0.3378E-03 | 0.1919E-01  | -0.2831E-05 | -0.1168E-01 | 0.3161E-03  | 0.1140E-04  |
| 37   | 0.2785E-06  | 0.2660E-04  | -0.1330E-05 | 0.3161E-03  | 0.2994E-05  | -0.2831E-05 | 0.1180E-03  | -0.3379E-03 | 0.3374E-05  | -0.1733E-05 |
| 38   | 0.1802E-04  | 0.1106E-02  | 0.4120E-07  | 0.5981E-03  | -0.1424E-04 | -0.1168E-01 | -0.3379E-03 | 0.1859E-01  | 0.1140E-04  | 0.3270E-03  |
| 39   | -0.1851E-05 | -0.2174E-04 | 0.3687E-05  | 0.8574E-05  | -0.3988E-05 | 0.3161E-03  | 0.3374E-05  | 0.1140E-04  | 0.1185E-03  | 0.1340E-05  |
| 40   | 0.1654E-05  | -0.2831E-05 | -0.2254E-05 | -0.1089E-04 | 0.2034E-05  | 0.1140E-04  | -0.1733E-05 | 0.3270E-03  | 0.1340E-05  | 0.6013E-04  |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1  | 0.912E-02   | 0.448E-02   | 0.619E-02   | 0.976E-02   | 0.145E-01   | 0.202E-01   | 0.266E-01   | 0.332E-01   | 0.399E-01   | 0.461E-01   |
| 11   | 0.514E-01   | 0.555E-01   | 0.581E-01   | 0.590E-01   | 0.583E-01   | 0.563E-01   | 0.534E-01   | 0.502E-01   | 0.475E-01   | 0.449E-01   |
| 21   | 0.451E-01   | 0.463E-01   | 0.486E-01   | 0.513E-01   | 0.532E-01   | 0.536E-01   | 0.521E-01   | 0.494E-01   | 0.473E-01   | 0.473E-01   |
| 31   | 0.497E-01   | 0.524E-01   | 0.522E-01   | 0.492E-01   | 0.472E-01   | 0.494E-01   | 0.526E-01   | 0.524E-01   | 0.500E-01   | 0.489E-01   |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSSZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1  | 0.587E-03   | 0.234E-02   | 0.524E-02   | 0.921E-02   | 0.142E-01   | 0.200E-01   | 0.264E-01   | 0.331E-01   | 0.398E-01   | 0.460E-01   |
| 11   | 0.513E-01   | 0.555E-01   | 0.580E-01   | 0.590E-01   | 0.583E-01   | 0.563E-01   | 0.533E-01   | 0.502E-01   | 0.475E-01   | 0.449E-01   |
| 21   | 0.450E-01   | 0.463E-01   | 0.486E-01   | 0.513E-01   | 0.532E-01   | 0.536E-01   | 0.521E-01   | 0.494E-01   | 0.472E-01   | 0.473E-01   |
| 31   | 0.497E-01   | 0.524E-01   | 0.522E-01   | 0.492E-01   | 0.472E-01   | 0.494E-01   | 0.526E-01   | 0.524E-01   | 0.500E-01   | 0.489E-01   |

Tabelle A.3-25b 40 DOF bis 20000 Hz, Gauß  $N=60$ ,  $\beta=5\%$ 

## CAUGHEY-MATRIX

|   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1   | 0.6078E-04  | -0.3687E-03 | -0.1098E-05 | 0.7549E-05  | 0.3561E-05  | 0.1806E-04  | -0.4323E-05 | 0.1941E-04  | 0.3666E-05  | -0.3235E-04 |
| 2   | -0.3687E-03 | 0.1464E-01  | 0.7549E-05  | -0.1006E-01 | 0.3868E-03  | 0.2152E-02  | 0.1186E-04  | -0.6816E-03 | -0.5040E-04 | 0.6748E-03  |
| 3   | -0.1098E-05 | 0.7549E-05  | 0.1251E-03  | -0.3507E-03 | -0.5421E-05 | 0.2695E-04  | 0.7228E-05  | -0.1429E-04 | -0.3918E-05 | 0.3060E-04  |
| 4   | 0.7549E-05  | -0.1006E-01 | -0.3507E-03 | 0.1679E-01  | 0.1941E-04  | -0.1074E-01 | 0.3364E-03  | 0.2827E-02  | 0.3641E-05  | -0.8748E-03 |
| 5   | 0.3561E-05  | 0.3868E-03  | -0.5421E-05 | 0.1941E-04  | 0.1252E-03  | -0.4011E-03 | -0.6934E-06 | 0.1874E-04  | 0.1413E-05  | 0.3582E-04  |
| 6   | 0.1806E-04  | 0.2152E-02  | 0.2695E-04  | -0.1074E-01 | 0.1746E-01  | 0.1119E-04  | -0.1093E-01 | -0.1093E-01 | 0.3865E-03  | 0.2515E-02  |
| 7   | -0.4323E-05 | 0.1186E-04  | 0.7228E-05  | 0.3364E-03  | -0.6934E-06 | 0.1119E-04  | 0.1194E-03  | -0.3510E-03 | 0.8197E-06  | -0.4699E-05 |
| 8   | 0.1941E-04  | -0.6816E-03 | -0.1429E-04 | 0.2827E-02  | 0.1874E-04  | -0.1093E-01 | -0.3510E-03 | 0.1715E-01  | -0.1225E-04 | -0.1072E-01 |
| 9   | 0.3666E-05  | -0.5040E-04 | -0.3918E-05 | 0.3641E-05  | 0.1413E-05  | 0.3865E-03  | 0.8197E-06  | -0.1225E-04 | 0.1239E-03  | -0.3809E-03 |
| 10  | -0.3235E-04 | 0.6748E-03  | 0.3060E-04  | -0.8748E-03 | 0.3582E-04  | 0.2515E-02  | -0.4699E-05 | -0.1072E-01 | -0.3809E-03 | 0.1734E-01  |
| :   | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           | :           |
| 31  | 0.1205E-03  | -0.3566E-03 | -0.1838E-05 | 0.1980E-04  | 0.5935E-05  | 0.2997E-06  | -0.2405E-05 | 0.8216E-05  | 0.1518E-05  | 0.4046E-06  |
| 32  | -0.3566E-03 | 0.1715E-01  | 0.1225E-04  | -0.1093E-01 | 0.3510E-03  | 0.2827E-02  | -0.1874E-04 | -0.6816E-03 | 0.1429E-04  | -0.1941E-04 |
| 33  | -0.1838E-05 | 0.1225E-04  | 0.1239E-03  | -0.3865E-03 | 0.8197E-06  | -0.3641E-05 | 0.1413E-05  | 0.5040E-04  | -0.3918E-05 | 0.3666E-05  |
| 34  | 0.1980E-04  | -0.1093E-01 | -0.3865E-03 | 0.1746E-01  | -0.1119E-04 | -0.1074E-01 | 0.4011E-03  | 0.2152E-02  | -0.2695E-04 | -0.1806E-04 |
| 35  | 0.5935E-05  | 0.3510E-03  | 0.8197E-06  | -0.1119E-04 | 0.1194E-03  | -0.3364E-03 | -0.6934E-06 | -0.1186E-04 | 0.7228E-05  | -0.4323E-05 |
| 36  | 0.2997E-06  | 0.2827E-02  | -0.3641E-05 | -0.1074E-01 | -0.3364E-03 | 0.1679E-01  | -0.1941E-04 | -0.1006E-01 | 0.3507E-03  | -0.7549E-05 |
| 37  | -0.2405E-05 | -0.1874E-04 | 0.1413E-05  | 0.4011E-03  | -0.6934E-06 | -0.1941E-04 | 0.1252E-03  | -0.3868E-03 | -0.5421E-05 | 0.3561E-05  |
| 38  | 0.8216E-05  | -0.6816E-03 | 0.5040E-04  | 0.2152E-02  | -0.1186E-04 | -0.1006E-01 | -0.3868E-03 | 0.1464E-01  | -0.7549E-05 | 0.3687E-03  |
| 39  | 0.1518E-05  | 0.1429E-04  | -0.3918E-05 | -0.2695E-04 | 0.7228E-05  | 0.3507E-03  | -0.5421E-05 | -0.7549E-05 | 0.1251E-03  | -0.1098E-05 |
| 40  | 0.4046E-06  | -0.1941E-04 | 0.3666E-05  | -0.1806E-04 | -0.4323E-05 | -0.7549E-05 | 0.3561E-05  | 0.3687E-03  | -0.1098E-05 | 0.6078E-04  |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.970E-02   | 0.344E-02   | 0.348E-02   | 0.487E-02   | 0.700E-02   | 0.968E-02   | 0.128E-01   | 0.164E-01   | 0.203E-01   | 0.244E-01   |
| 11  | 0.288E-01   | 0.332E-01   | 0.378E-01   | 0.422E-01   | 0.466E-01   | 0.506E-01   | 0.542E-01   | 0.572E-01   | 0.594E-01   | 0.611E-01   |
| 21  | 0.608E-01   | 0.594E-01   | 0.566E-01   | 0.524E-01   | 0.476E-01   | 0.432E-01   | 0.414E-01   | 0.444E-01   | 0.521E-01   | 0.579E-01   |
| 31  | 0.517E-01   | 0.425E-01   | 0.541E-01   | 0.492E-01   | 0.504E-01   | 0.478E-01   | 0.543E-01   | 0.448E-01   | 0.530E-01   | 0.561E-01   |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.271E-03   | 0.108E-02   | 0.242E-02   | 0.427E-02   | 0.661E-02   | 0.941E-02   | 0.126E-01   | 0.162E-01   | 0.201E-01   | 0.243E-01   |
| 11  | 0.287E-01   | 0.332E-01   | 0.377E-01   | 0.422E-01   | 0.465E-01   | 0.505E-01   | 0.541E-01   | 0.571E-01   | 0.593E-01   | 0.610E-01   |
| 21  | 0.608E-01   | 0.594E-01   | 0.566E-01   | 0.524E-01   | 0.475E-01   | 0.432E-01   | 0.414E-01   | 0.444E-01   | 0.521E-01   | 0.579E-01   |
| 31  | 0.517E-01   | 0.425E-01   | 0.541E-01   | 0.492E-01   | 0.504E-01   | 0.478E-01   | 0.543E-01   | 0.448E-01   | 0.530E-01   | 0.560E-01   |

Tabelle A.3-26a 40 DOF bis 5000 Hz, Fourier  $N = 83$ ,  $\beta = 5\%$

| CAUGHEY-MATRIX  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| 1   | -0.3944E+87 | 0.5750E+86  | -0.7831E+87 | 0.1125E+87  | -0.7660E+87 | 0.1625E+87  | -0.7384E+87 | 0.2057E+87  | -0.7015E+87 | 0.2404E+87  |
| 2   | 0.5750E+86  | -0.2523E+86 | 0.1125E+87  | -0.4862E+86 | 0.1050E+87  | -0.6853E+86 | 0.9324E+86  | -0.8368E+86 | 0.7793E+86  | -0.9326E+86 |
| 3   | -0.7831E+87 | 0.1125E+87  | -0.1555E+88 | 0.2200E+87  | -0.1521E+88 | 0.3181E+87  | -0.1467E+88 | 0.4030E+87  | -0.1395E+88 | 0.4715E+87  |
| 4   | 0.1125E+87  | -0.4862E+86 | 0.2200E+87  | -0.9376E+86 | 0.2057E+87  | -0.1323E+87 | 0.1830E+87  | -0.1618E+87 | 0.1534E+87  | -0.1807E+87 |
| 5   | -0.7660E+87 | 0.1050E+87  | -0.1521E+88 | 0.2057E+87  | -0.1490E+88 | 0.2979E+87  | -0.1440E+88 | 0.3783E+87  | -0.1372E+88 | 0.4440E+87  |
| 6   | 0.1625E+87  | -0.6853E+86 | 0.3181E+87  | -0.1323E+87 | 0.2979E+87  | -0.1870E+87 | 0.2658E+87  | -0.2293E+87 | 0.2240E+87  | -0.2570E+87 |
| 7   | -0.7384E+87 | 0.9324E+86  | -0.4030E+87 | 0.1618E+87  | -0.1467E+88 | 0.1830E+87  | -0.1395E+88 | 0.3390E+87  | -0.1334E+88 | 0.4000E+87  |
| 8   | 0.2057E+87  | -0.8368E+86 | 0.4030E+87  | -0.1618E+87 | 0.3783E+87  | -0.2293E+87 | 0.3390E+87  | -0.2822E+87 | 0.2875E+87  | -0.3178E+87 |
| 9   | -0.7015E+87 | 0.7793E+86  | -0.1395E+88 | 0.1534E+87  | -0.1372E+88 | 0.2240E+87  | -0.1334E+88 | 0.2875E+87  | -0.1283E+88 | 0.3422E+87  |
| 10  | 0.2404E+87  | -0.9326E+86 | 0.4715E+87  | -0.1807E+87 | 0.4440E+87  | -0.2570E+87 | 0.4000E+87  | -0.3178E+87 | 0.3422E+87  | -0.3602E+87 |
| :   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 31  | 0.1169E+88  | -0.2272E+87 | -0.1220E+88 | -0.1751E+87 | -0.1260E+88 | -0.1189E+87 | -0.1289E+88 | -0.6014E+86 | -0.1307E+88 | -0.6567E+87 |
| 32  | -0.2272E+87 | 0.2822E+87  | -0.2875E+87 | -0.2293E+87 | -0.3390E+87 | -0.1618E+87 | -0.3783E+87 | -0.8368E+86 | -0.4030E+87 | -0.2057E+87 |
| 33  | -0.1220E+88 | -0.2875E+87 | -0.1283E+88 | -0.2240E+87 | -0.1334E+88 | -0.1534E+87 | -0.1372E+88 | -0.7793E+86 | -0.1395E+88 | -0.7015E+87 |
| 34  | -0.1751E+87 | -0.2293E+87 | -0.2240E+87 | -0.1870E+87 | -0.2658E+87 | -0.1323E+87 | -0.2979E+87 | -0.6853E+86 | -0.3181E+87 | -0.1625E+87 |
| 35  | -0.1260E+88 | -0.3390E+87 | -0.1334E+88 | -0.2658E+87 | -0.1395E+88 | -0.1830E+87 | -0.1440E+88 | -0.9324E+86 | -0.1467E+88 | -0.7384E+87 |
| 36  | -0.1189E+87 | -0.1618E+87 | -0.1534E+87 | -0.1323E+87 | -0.1830E+87 | -0.9376E+86 | -0.2057E+87 | -0.4862E+86 | -0.2200E+87 | -0.1125E+87 |
| 37  | -0.1289E+88 | -0.3783E+87 | -0.1372E+88 | -0.2979E+87 | -0.1440E+88 | -0.2057E+87 | -0.1490E+88 | -0.1050E+87 | -0.1521E+88 | -0.7660E+87 |
| 38  | -0.6014E+86 | -0.8368E+86 | -0.7793E+86 | -0.6853E+86 | -0.9324E+86 | -0.4862E+86 | -0.1050E+87 | -0.2523E+86 | -0.1125E+87 | -0.5750E+86 |
| 39  | -0.1307E+88 | -0.4030E+87 | -0.1395E+88 | -0.3181E+87 | -0.1467E+88 | -0.2200E+87 | -0.1521E+88 | -0.1125E+87 | -0.1555E+88 | -0.7831E+87 |
| 40  | -0.6567E+87 | -0.2057E+87 | -0.7015E+87 | -0.1625E+87 | -0.7384E+87 | -0.1125E+87 | -0.7660E+87 | -0.5750E+86 | -0.7831E+87 | -0.3944E+87 |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.352E+76   | 0.648E+75   | 0.115E+76   | 0.127E+76   | -0.343E+75  | -0.410E+75  | 0.204E+75   | -0.938E+75  | -0.980E+75  | 0.139E+75   |
| 11  | 0.285E+75   | 0.152E+75   | 0.449E+75   | 0.168E+75   | -0.118E+75  | 0.340E+75   | 0.397E+75   | 0.560E+75   | 0.113E+75   | 0.172E+75   |
| 21  | 0.304E+75   | 0.102E+76   | 0.707E+75   | 0.479E+75   | -0.271E+75  | 0.255E+75   | 0.639E+75   | 0.221E+75   | 0.415E+75   | 0.219E+75   |
| 31  | -0.166E+76  | -0.156E+76  | -0.222E+76  | -0.118E+80  | -0.240E+83  | -0.181E+86  | -0.415E+88  | -0.239E+90  | -0.294E+91  | -0.686E+91  |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.798E-02   | 0.302E-01   | 0.543E-01   | 0.562E-01   | 0.451E-01   | 0.526E-01   | 0.462E-01   | 0.519E-01   | 0.480E-01   | 0.509E-01   |
| 11  | 0.511E-01   | 0.488E-01   | 0.487E-01   | 0.502E-01   | 0.519E-01   | 0.534E-01   | 0.579E-01   | -0.586E-01  | -0.529E+04  | -0.202E+15  |
| 21  | -0.694E+18  | -0.169E+24  | -0.450E+29  | -0.906E+34  | -0.132E+40  | -0.140E+45  | -0.111E+50  | -0.652E+54  | -0.286E+59  | -0.914E+63  |
| 31  | -0.205E+68  | -0.299E+72  | -0.260E+76  | -0.118E+80  | -0.240E+83  | -0.181E+86  | -0.415E+88  | -0.239E+90  | -0.294E+91  | -0.686E+91  |

CAUGHEY-MATRIX

|     |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1   | 0.544E+186  | -0.357E+185 | 0.108E+187  | -0.706E+185 | 0.107E+187  | -0.103E+186 | 0.105E+187  | -0.133E+186 | 0.103E+187  | -0.160E+186 |
| 2   | -0.357E+185 | 0.940E+184  | -0.706E+185 | 0.185E+185  | -0.678E+185 | 0.270E+185  | -0.632E+185 | 0.347E+185  | -0.570E+185 | 0.414E+185  |
| 3   | 0.108E+187  | -0.706E+185 | 0.216E+187  | -0.139E+186 | 0.214E+187  | -0.204E+186 | 0.210E+187  | -0.264E+186 | 0.206E+187  | -0.317E+186 |
| 4   | -0.706E+185 | 0.185E+185  | -0.139E+186 | 0.364E+185  | -0.133E+186 | 0.532E+185  | -0.124E+186 | 0.684E+185  | -0.112E+186 | 0.816E+185  |
| 5   | 0.107E+187  | -0.678E+185 | 0.214E+187  | -0.133E+186 | 0.212E+187  | -0.196E+186 | 0.208E+187  | -0.254E+186 | 0.204E+187  | -0.304E+186 |
| 6   | -0.103E+186 | 0.270E+185  | -0.204E+186 | 0.532E+185  | -0.196E+186 | 0.778E+185  | -0.183E+186 | 0.100E+186  | -0.165E+186 | 0.119E+186  |
| 7   | 0.105E+187  | -0.632E+185 | 0.210E+187  | -0.124E+186 | 0.208E+187  | -0.183E+186 | 0.205E+187  | -0.237E+186 | 0.201E+187  | -0.284E+186 |
| 8   | -0.133E+186 | 0.347E+185  | -0.264E+186 | 0.684E+185  | -0.254E+186 | 0.100E+186  | -0.237E+186 | 0.128E+186  | -0.214E+186 | 0.153E+186  |
| 9   | 0.103E+187  | -0.570E+185 | 0.206E+187  | -0.112E+186 | 0.204E+187  | -0.165E+186 | 0.201E+187  | -0.214E+186 | 0.197E+187  | -0.257E+186 |
| 10  | -0.160E+186 | 0.414E+185  | -0.317E+186 | 0.816E+185  | -0.304E+186 | 0.119E+186  | -0.284E+186 | 0.153E+186  | -0.257E+186 | 0.184E+186  |
| ... | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         | ...         |
| 31  | 0.188E+187  | 0.185E+186  | 0.193E+187  | 0.143E+186  | 0.196E+187  | 0.976E+185  | 0.198E+187  | 0.494E+185  | 0.200E+187  | 0.100E+187  |
| 32  | 0.185E+186  | 0.128E+186  | 0.214E+186  | 0.100E+186  | 0.237E+186  | 0.684E+185  | 0.254E+186  | 0.347E+185  | 0.264E+186  | 0.133E+186  |
| 33  | 0.193E+187  | 0.214E+186  | 0.197E+187  | 0.165E+186  | 0.201E+187  | 0.112E+186  | 0.204E+187  | 0.570E+185  | 0.206E+187  | 0.103E+187  |
| 34  | 0.143E+186  | 0.100E+186  | 0.165E+186  | 0.778E+185  | 0.183E+186  | 0.532E+185  | 0.196E+186  | 0.270E+185  | 0.204E+186  | 0.103E+186  |
| 35  | 0.196E+187  | 0.237E+186  | 0.201E+187  | 0.183E+186  | 0.205E+187  | 0.124E+186  | 0.208E+187  | 0.632E+185  | 0.210E+187  | 0.105E+187  |
| 36  | 0.976E+185  | 0.684E+185  | 0.112E+186  | 0.532E+185  | 0.124E+186  | 0.364E+185  | 0.133E+186  | 0.185E+185  | 0.139E+186  | 0.706E+185  |
| 37  | 0.198E+187  | 0.254E+186  | 0.204E+187  | 0.196E+186  | 0.208E+187  | 0.133E+186  | 0.212E+187  | 0.678E+185  | 0.214E+187  | 0.107E+187  |
| 38  | 0.494E+185  | 0.347E+185  | 0.570E+185  | 0.270E+185  | 0.632E+185  | 0.185E+185  | 0.678E+185  | 0.940E+184  | 0.706E+185  | 0.357E+185  |
| 39  | 0.200E+187  | 0.264E+186  | 0.206E+187  | 0.204E+186  | 0.210E+187  | 0.139E+186  | 0.214E+187  | 0.706E+185  | 0.216E+187  | 0.108E+187  |
| 40  | 0.100E+187  | 0.133E+186  | 0.103E+187  | 0.103E+186  | 0.105E+187  | 0.706E+185  | 0.107E+187  | 0.357E+185  | 0.108E+187  | 0.544E+186  |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

|    |            |            |            |            |            |            |            |            |           |            |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|------------|
| 1  | -0.45E+174 | -0.15E+176 | -0.84E+175 | -0.19E+175 | 0.71E+175  | -0.48E+175 | 0.17E+176  | -0.40E+175 | 0.23E+175 | -0.74E+175 |
| 11 | 0.10E+175  | -0.62E+175 | -0.19E+175 | -0.20E+175 | -0.19E+176 | 0.64E+175  | -0.91E+175 | 0.17E+175  | 0.27E+175 | 0.10E+176  |
| 21 | 0.84E+175  | 0.30E+175  | -0.14E+176 | 0.93E+175  | -0.29E+176 | -0.30E+175 | -0.29E+175 | -0.91E+175 | 0.12E+175 | -0.11E+176 |
| 31 | 0.38E+175  | -0.63E+175 | 0.31E+176  | -0.86E+175 | 0.13E+176  | 0.56E+179  | 0.36E+184  | 0.14E+188  | 0.23E+190 | 0.13E+191  |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN)

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.158E-01 | 0.512E-01 | 0.527E-01 | 0.498E-01 | 0.476E-01 | 0.497E-01 | 0.501E-01 | 0.495E-01 | 0.490E-01 | 0.504E-01 |
| 11 | 0.501E-01 | 0.498E-01 | 0.498E-01 | 0.509E-01 | 0.495E-01 | 0.483E-01 | 0.471E-01 | 0.120E+01 | 0.718E+13 | 0.230E+35 |
| 21 | 0.353E+42 | 0.315E+53 | 0.338E+64 | 0.207E+75 | 0.657E+85 | 0.111E+96 | 0.10E+106 | 0.51E+115 | 0.14E+125 | 0.21E+134 |
| 31 | 0.15E+143 | 0.47E+151 | 0.50E+159 | 0.14E+167 | 0.77E+173 | 0.56E+179 | 0.36E+184 | 0.14E+188 | 0.23E+190 | 0.13E+191 |

Tabelle A.3-27a 40 DOF bis 20000 Hz, Fourier  $N = 83$ ,  $\beta = 5\%$

CAUGHEY-MATRIX

|   | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1   | 0.6106E-04  | -0.3318E-03 | 0.2640E-05  | 0.1338E-04  | 0.8728E-06  | 0.1349E-05  | 0.1425E-05  | -0.2889E-05 | 0.1726E-05  | -0.3696E-05 |
| 2   | -0.3318E-03 | 0.1884E-01  | 0.1338E-04  | -0.9607E-02 | 0.3332E-03  | 0.4725E-04  | -0.1627E-04 | -0.2363E-03 | -0.5046E-05 | -0.3128E-03 |
| 3   | 0.2640E-05  | 0.1338E-04  | 0.1230E-03  | -0.3305E-03 | 0.4066E-05  | 0.1049E-04  | 0.2598E-05  | -0.2347E-05 | 0.2649E-05  | -0.4890E-05 |
| 4   | 0.1338E-04  | -0.9607E-02 | -0.3305E-03 | 0.1889E-01  | -0.2889E-05 | -0.9843E-02 | 0.3281E-03  | -0.2655E-03 | -0.1538E-04 | -0.9574E-04 |
| 5   | 0.8728E-06  | 0.3332E-03  | 0.4066E-05  | -0.2889E-05 | 0.1238E-03  | -0.3355E-03 | 0.3865E-05  | 0.1138E-04  | 0.2212E-05  | 0.6418E-05  |
| 6   | 0.1349E-05  | 0.4725E-04  | 0.1049E-04  | -0.9843E-02 | -0.3355E-03 | 0.1857E-01  | -0.2001E-05 | -0.9702E-02 | 0.3369E-03  | 0.3172E-03  |
| 7   | 0.1425E-05  | -0.1627E-04 | 0.2598E-05  | 0.3281E-03  | 0.3865E-05  | -0.2001E-05 | 0.1234E-03  | -0.3267E-03 | 0.3202E-05  | 0.8729E-05  |
| 8   | -0.2889E-05 | -0.2363E-03 | -0.2347E-05 | 0.2655E-03  | 0.1138E-04  | -0.9702E-02 | -0.3267E-03 | 0.1916E-01  | -0.4649E-05 | -0.9870E-02 |
| 9   | 0.1726E-05  | -0.5046E-05 | 0.2649E-05  | -0.1538E-04 | 0.2212E-05  | 0.3369E-03  | 0.3202E-05  | -0.4649E-05 | 0.1223E-03  | -0.3401E-03 |
| 10  | -0.3696E-05 | -0.3128E-03 | -0.4890E-05 | -0.9574E-04 | 0.6418E-05  | 0.3172E-03  | 0.8729E-05  | -0.9870E-02 | -0.3401E-03 | 0.1891E-01  |
| :   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 31  | 0.1214E-03  | 0.3235E-03  | 0.2393E-05  | 0.1803E-04  | 0.1039E-05  | -0.3719E-05 | 0.1987E-05  | -0.8880E-06 | 0.3065E-05  | 0.1224E-05  |
| 32  | -0.3235E-03 | 0.1916E-01  | 0.4649E-05  | -0.9702E-02 | 0.3267E-03  | -0.2655E-03 | -0.1138E-04 | -0.2363E-03 | 0.2347E-05  | 0.2889E-05  |
| 33  | 0.2393E-05  | 0.4649E-05  | 0.1223E-03  | -0.3369E-03 | 0.3202E-05  | 0.1538E-04  | 0.2212E-05  | 0.5046E-05  | 0.2649E-05  | 0.1726E-05  |
| 34  | 0.1803E-04  | -0.9702E-02 | -0.3369E-03 | 0.1857E-01  | 0.2001E-05  | -0.9843E-02 | 0.3355E-03  | 0.4725E-04  | -0.1049E-04 | -0.1349E-05 |
| 35  | 0.1039E-05  | 0.3267E-03  | 0.3202E-05  | 0.2001E-05  | 0.1234E-03  | -0.3281E-03 | 0.3865E-05  | 0.1627E-04  | 0.2598E-05  | 0.1425E-05  |
| 36  | -0.3719E-05 | -0.2655E-03 | 0.1538E-04  | -0.9843E-02 | -0.3281E-03 | 0.1889E-01  | 0.2889E-05  | -0.9607E-02 | 0.3305E-03  | -0.1338E-04 |
| 37  | 0.1987E-05  | -0.1138E-04 | 0.2212E-05  | 0.3355E-03  | 0.3865E-05  | 0.2889E-05  | 0.1238E-03  | -0.3332E-03 | 0.4066E-05  | 0.8728E-06  |
| 38  | -0.8880E-06 | -0.2363E-03 | 0.5046E-05  | 0.4725E-04  | 0.1627E-04  | -0.9607E-02 | -0.3332E-03 | 0.1884E-01  | -0.1338E-04 | 0.3318E-03  |
| 39  | 0.3065E-05  | 0.2347E-05  | 0.2649E-05  | -0.1049E-04 | 0.2598E-05  | 0.3305E-03  | 0.4066E-05  | -0.1338E-04 | 0.1230E-03  | 0.2640E-05  |
| 40  | 0.1224E-05  | 0.2889E-05  | 0.1726E-05  | -0.1349E-05 | 0.1425E-05  | -0.1338E-04 | 0.8728E-06  | 0.3318E-03  | 0.2640E-05  | 0.6106E-04  |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.200E-02   | 0.796E-02   | 0.176E-01   | 0.299E-01   | 0.429E-01   | 0.536E-01   | 0.588E-01   | 0.571E-01   | 0.510E-01   | 0.458E-01   |
| 11  | 0.458E-01   | 0.502E-01   | 0.534E-01   | 0.515E-01   | 0.479E-01   | 0.481E-01   | 0.513E-01   | 0.518E-01   | 0.490E-01   | 0.504E-01   |
| 21  | 0.517E-01   | 0.503E-01   | 0.483E-01   | 0.507E-01   | 0.509E-01   | 0.484E-01   | 0.509E-01   | 0.504E-01   | 0.486E-01   | 0.518E-01   |
| 31  | 0.484E-01   | 0.510E-01   | 0.501E-01   | 0.484E-01   | 0.534E-01   | 0.463E-01   | 0.486E-01   | 0.577E-01   | 0.582E-01   | 0.563E-01   |
| DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROSZAHLEN) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 1   | 0.200E-02   | 0.796E-02   | 0.176E-01   | 0.299E-01   | 0.429E-01   | 0.536E-01   | 0.588E-01   | 0.571E-01   | 0.510E-01   | 0.458E-01   |
| 11  | 0.458E-01   | 0.502E-01   | 0.534E-01   | 0.515E-01   | 0.479E-01   | 0.481E-01   | 0.513E-01   | 0.518E-01   | 0.490E-01   | 0.504E-01   |
| 21  | 0.517E-01   | 0.503E-01   | 0.483E-01   | 0.507E-01   | 0.509E-01   | 0.484E-01   | 0.509E-01   | 0.504E-01   | 0.486E-01   | 0.518E-01   |
| 31  | 0.484E-01   | 0.510E-01   | 0.501E-01   | 0.484E-01   | 0.534E-01   | 0.463E-01   | 0.486E-01   | 0.577E-01   | 0.582E-01   | 0.563E-01   |

**CAUGHEY-MATRIX**

|    |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.5998E-04  | -0.3319E-03 | 0.8622E-06  | 0.1403E-04  | -0.1115E-05 | 0.1695E-05  | -0.2182E-06 | 0.3546E-06  | -0.8193E-07 | 0.8203E-06  |
| 2  | -0.3319E-03 | 0.1880E-01  | 0.1403E-04  | -0.9594E-02 | 0.3335E-03  | 0.1462E-03  | -0.1368E-04 | 0.8160E-05  | -0.8744E-06 | -0.2790E-04 |
| 3  | 0.8622E-06  | 0.1403E-04  | 0.1188E-03  | -0.3302E-03 | 0.6439E-06  | 0.1439E-04  | -0.1197E-05 | 0.2515E-05  | -0.1503E-06 | 0.2181E-06  |
| 4  | 0.1403E-04  | -0.9594E-02 | -0.3302E-03 | 0.1894E-01  | 0.3546E-06  | -0.9586E-02 | 0.3327E-03  | 0.1183E-03  | -0.1417E-04 | -0.9648E-05 |
| 5  | -0.1115E-05 | 0.3335E-03  | 0.6439E-06  | 0.3546E-06  | 0.1199E-03  | -0.3310E-03 | 0.9301E-06  | 0.1390E-04  | -0.9279E-06 | 0.1181E-05  |
| 6  | 0.1695E-05  | 0.1462E-03  | 0.1439E-04  | -0.9586E-02 | -0.3310E-03 | 0.1891E-01  | -0.1365E-06 | -0.9604E-02 | 0.3313E-03  | 0.1209E-03  |
| 7  | -0.2182E-06 | 0.1368E-04  | -0.1197E-05 | 0.3327E-03  | 0.9301E-06  | -0.1365E-06 | 0.1201E-03  | -0.3324E-03 | 0.9784E-06  | 0.1388E-04  |
| 8  | 0.3546E-06  | 0.8160E-05  | 0.2515E-05  | 0.1183E-03  | 0.1390E-04  | -0.9604E-02 | -0.3324E-03 | 0.1892E-01  | -0.1476E-06 | -0.9605E-02 |
| 9  | -0.8193E-07 | -0.8744E-06 | -0.1503E-06 | -0.1417E-04 | -0.9279E-06 | 0.3313E-03  | 0.9784E-06  | -0.1476E-06 | 0.1200E-03  | -0.3325E-03 |
| 10 | 0.8203E-06  | -0.2790E-04 | 0.2181E-06  | -0.9648E-05 | 0.1181E-05  | 0.1209E-03  | 0.1388E-04  | -0.9605E-02 | -0.3325E-03 | 0.1892E-01  |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| :  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 31 | 0.1199E-03  | 0.3312E-03  | 0.8420E-06  | 0.1418E-04  | -0.1071E-05 | 0.2209E-05  | -0.1020E-06 | 0.4911E-06  | 0.1056E-06  | 0.6792E-07  |
| 32 | -0.3312E-03 | 0.1892E-01  | 0.1476E-06  | -0.9604E-02 | 0.3324E-03  | 0.1183E-03  | -0.1390E-04 | 0.8160E-05  | -0.2515E-05 | -0.3546E-06 |
| 33 | 0.8420E-06  | 0.1476E-06  | 0.1200E-03  | -0.3313E-03 | 0.9784E-06  | 0.1417E-04  | -0.9279E-06 | 0.8744E-06  | -0.1503E-06 | -0.8193E-07 |
| 34 | 0.1418E-04  | -0.9604E-02 | -0.3313E-03 | 0.1891E-01  | 0.1365E-06  | -0.9586E-02 | 0.3310E-03  | 0.1462E-03  | -0.1439E-04 | -0.1695E-05 |
| 35 | -0.1071E-05 | 0.3324E-03  | 0.9784E-06  | 0.1365E-06  | 0.1201E-03  | -0.3327E-03 | 0.9301E-06  | 0.1368E-04  | -0.1197E-05 | -0.2182E-06 |
| 36 | 0.2209E-05  | 0.1183E-03  | 0.1417E-04  | -0.9586E-02 | -0.3327E-03 | 0.1894E-01  | -0.3546E-06 | -0.9594E-02 | 0.3302E-03  | -0.1403E-04 |
| 37 | -0.1020E-06 | -0.1390E-04 | -0.9279E-06 | 0.3310E-03  | 0.9301E-06  | -0.3546E-06 | 0.1199E-03  | -0.3335E-03 | 0.6439E-06  | -0.1115E-05 |
| 38 | 0.4911E-06  | 0.8160E-05  | 0.8744E-06  | 0.1462E-03  | 0.1368E-04  | -0.9594E-02 | -0.3335E-03 | 0.1880E-01  | -0.1403E-04 | 0.3319E-03  |
| 39 | 0.1056E-06  | -0.2515E-05 | -0.1503E-06 | -0.1439E-04 | -0.1197E-05 | 0.3302E-03  | 0.6439E-06  | -0.1403E-04 | 0.1188E-03  | 0.8622E-06  |
| 40 | 0.6792E-07  | -0.3546E-06 | -0.8193E-07 | -0.1695E-05 | -0.2182E-06 | -0.1403E-04 | -0.1115E-05 | 0.3319E-03  | 0.8622E-06  | 0.5998E-04  |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS EIGENFORMEN UND -WERTEN (STANDARDOPERATIONEN)

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.196E-01 | 0.567E-01 | 0.463E-01 | 0.529E-01 | 0.519E-01 | 0.514E-01 | 0.505E-01 | 0.492E-01 | 0.507E-01 | 0.497E-01 |
| 11 | 0.496E-01 | 0.499E-01 | 0.500E-01 | 0.499E-01 | 0.497E-01 | 0.500E-01 | 0.502E-01 | 0.498E-01 | 0.501E-01 | 0.499E-01 |
| 21 | 0.502E-01 | 0.500E-01 | 0.499E-01 | 0.500E-01 | 0.502E-01 | 0.499E-01 | 0.501E-01 | 0.499E-01 | 0.498E-01 | 0.498E-01 |
| 31 | 0.498E-01 | 0.499E-01 | 0.502E-01 | 0.503E-01 | 0.502E-01 | 0.497E-01 | 0.496E-01 | 0.495E-01 | 0.509E-01 | 0.490E-01 |

DIAGONALGLIEDER DER ORTHOGONALISIERTEN CAUGHEY-MATRIX AUS FUNKTIONSWERTEN IN DEN EIGENWERTEN (GROßZAHLEN)

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.196E-01 | 0.567E-01 | 0.463E-01 | 0.529E-01 | 0.519E-01 | 0.514E-01 | 0.505E-01 | 0.492E-01 | 0.507E-01 | 0.497E-01 |
| 11 | 0.496E-01 | 0.499E-01 | 0.500E-01 | 0.499E-01 | 0.497E-01 | 0.500E-01 | 0.502E-01 | 0.498E-01 | 0.501E-01 | 0.499E-01 |
| 21 | 0.502E-01 | 0.500E-01 | 0.499E-01 | 0.500E-01 | 0.502E-01 | 0.499E-01 | 0.501E-01 | 0.499E-01 | 0.498E-01 | 0.498E-01 |
| 31 | 0.498E-01 | 0.499E-01 | 0.502E-01 | 0.503E-01 | 0.502E-01 | 0.497E-01 | 0.496E-01 | 0.495E-01 | 0.509E-01 | 0.490E-01 |

# Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/1968

**Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)**  
Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/1970 (vergriffen)

G. Andreas  
**Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergebern**

Nr. 3/1970

J. Ziebs  
**Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungseilen als Beispiel für Verbundbauteile**

Nr. 4/1970 (vergriffen)

A. Burmester  
**Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit - Grundlagen und Vergütungsverfahren**

Nr. 5/1971

N. Steiner  
**Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken**

Nr. 6/1971

P. Schneider  
**Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen**

Nr. 7/1971

H.-J. Petrowitz  
**Chromatographie und chemische Konstitution - Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnschicht-Chromatographie**

Nr. 8/1971

H. Veith  
**Zum Spannungs-Drehungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung**

Nr. 9/1971

K.-H. Möller  
**Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen**

Nr. 10/1972

D. Aurich, E. Martin  
**Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode**

Nr. 11/1972

H.-J. Krause  
**Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden**

Nr. 12/1972

H. Feuerberg  
**Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren**

Nr. 13/1972

K.-H. Habig, K. Kirschke, W.-W. Maennig, H. Tischer  
**Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen  $760$  und  $2.10^{-7}$  Torr**

Nr. 14/1972

E. Fischer  
**Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz**

Nr. 15/1972

H. Pohl  
**Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse**

Nr. 16/1972

E. Knublauch  
**Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102, Blatt 2, im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadenfeuer**

Nr. 17/1972

P. Reimers  
**Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen**

Nr. 18/1973

W. Struck  
**Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches**

Nr. 19/1973

K. Kaffanke, H. Czichos  
**Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen**

Nr. 20/1973

R. Rudolphi  
**Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden**

Nr. 21/1973

D. Klaffke, W. Maennig  
**Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung**

Nr. 22/1973

R. Rudolphi, E. Knublauch  
**Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen**

Nr. 23/1973

W. Ruske  
**Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin. Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen**

Nr. 24/1973

J. Stanke, E. Klement, R. Rudolphi  
**Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung**

Nr. 25/1973

E. Knublauch  
**Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen**

Nr. 26/1974

P. Jost, P. Reimers, P. Weise  
**Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM - Eigenschaften und erste Anwendungen**

Nr. 27/1974

H. Wüstenberg  
**Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall**

Nr. 28/1974

H. Heinrich  
**Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern**

Nr. 29/1974

P. Schneider  
**Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem Idealisotropen porösen Material mit starrem Skelet für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall**

Nr. 30/1974 (vergriffen)

H. Czichos, G. Salomon  
**The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology**

Nr. 31/1975

G. Fuhrmann  
**Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung**

Nr. 32/1975

R. Rudolphi, B. Böttcher  
**Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärmestromverteilungen mit Anwendungsbeispielen**

Nr. 33/1975

A. Wagner, G. Kieper, R. Rudolphi  
**Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nicht-stationären Meßverfahrens**

Nr. 34/1976 (vergriffen)

H.-J. Deppe  
**Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoff**

Nr. 35/1976

E. Limberger  
**Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper - Vorschlag für ein Prüfverfahren -**

Nr. 36/1976 (vergriffen)

J. Hundt  
**Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles**

Nr. 37/1976

W. Struck  
**Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen - Vorschlag für ein Prüfverfahren -**

Nr. 38/1976

K.-H. Habig  
**Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionitriertem Stahl 42 CrMo 4**

Nr. 39/1976

K. Kirschke, G. Kempf  
**Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit Nicht-Newton'schem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Schwerbeanspruchung**

Nr. 40/1976

H. Hantsche  
**Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren**

Nr. 41/1976

B. Böttcher  
**Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten**

Nr. 42/1976

S. Dietlen  
**Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft**

Nr. 43/1976

W. Struck  
**Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches**

Nr. 44/1976

W. Matthees  
**Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms "Stab-Werk"**

- Nr. 45/1976  
W. Paatsch  
**Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten**
- Nr. 46/1977 (vergriffen)  
G. Schickert, H. Winkler  
**Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung**  
**Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses**
- Nr. 47/1977  
A. Plank  
**Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen**
- Nr. 48/1977  
U. Holzlhöner  
**Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn**
- Nr. 49/1977  
G. Wittig  
**Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung**
- Nr. 50/1978 (vergriffen)  
N. Czaika, N. Mayer, C. Amberg, G. Magiers, G. Andraea, W. Markowski  
**Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und Überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern**
- Nr. 51/1978  
J. Sickfeld  
**Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen**
- Nr. 52/1978  
A. Tomov  
**Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung**
- Nr. 53/1978  
R.-G. Rohrmann, R. Rudolphi  
**Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge**
- Nr. 54/1978  
H. Sander  
**Magnetisches Verhalten dünner Eisen-schichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung**
- Nr. 55/1978  
D. Klaffke  
**Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristalle polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung**
- Nr. 56/1979  
W. Brünner, C. Langlie  
**Stabilität von Sandwichbauteilen**
- Nr. 57/1979  
M. Stadthaus  
**Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung**  
**Investigations on Inspection-Media for Magnetic Particle-Testing**
- Nr. 58/1979  
W. Struck  
**Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau**
- Nr. 59/1979  
G. Plauk  
**Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der**
- Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl**
- Nr. 60/1979  
H. Spreckelmeyer, R. Helms, J. Ziebs  
**Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken**
- Nr. 61/1979  
K. Richter  
**Beschreibung von Problemen der höheren Farbmetrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems**
- Nr. 62/1979  
W. Gerisch, G. Becker  
**Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle**
- Nr. 63/1979  
E. Behrend, J. Ludwig  
**Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase**
- Nr. 64/1980  
W. Rucker  
**Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung**
- Nr. 65/1980  
P. Schmidt, D. Aurich, R. Helms, H. Veith, J. Ziebs  
**Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte**
- Nr. 66/1980  
M. Hattwig  
**Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung**
- Nr. 67/1980  
W. Matthees  
**Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung**
- Nr. 68/1980  
D. Petersohn  
**Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik. Entwicklung eines vollleuzentrischen Präzisions-Goniometers**
- Nr. 69/1980  
F. Buchhardt, P. Brandl  
**Untersuchungen zur Integrität den Liners von Reaktorsicherheitshüllen (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise**
- Nr. 70/1980 (vergriffen)  
G. Schickert  
**Schwellenwerte beim Betondruckversuch**
- Nr. 71/1980  
W. Matthees, G. Magjera  
**Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen**
- Nr. 72/1980  
R. Rudolphi  
**Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen**
- Nr. 73/1980  
P. Wegener  
**Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen**
- Nr. 74/1980  
R. Rudolphi, R. Müller  
**ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz**
- Nr. 75/1980  
H.-J. Heinrich  
**Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen**
- Nr. 76/1980  
D. Klaffke, W.-W. Maennig  
**Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop**
- Nr. 77/1981  
M. Gierloff, M. Mautzsch  
**Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen**
- Nr. 78/1981  
W. Rucker  
**Dynamische Wechselwirkung eines Schienenschwellensystems mit dem Untergrund**
- Nr. 79/1981  
V. Neumann  
**Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflussten Kalttrübeigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch**
- Nr. 80/1981  
A. Plank, W. Struck, M. Tzschätzsch  
**Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten**
- Nr. 81/1981  
J. Schmidt  
**Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik**
- Nr. 82/1982  
R. Helms, H.-J.- Kühn, S. Ledworuski  
**Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches**  
**Assessment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test**
- Nr. 83/1982  
H. Czichos, P. Feinle  
**Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen**  
**- Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen -**
- Nr. 84/1982  
R. Müller, R. Rudolphi  
**Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)**
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231 -X/1982  
H. Czichos  
**Technische Materialforschung und -prüfung - Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm "Basic Technological Research" Materials Research and Testing - Development Trends and Outline Proposals for a Community Programme "Basic Technological Research" -**
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/1982  
K. Niesel, P. Schimmelwitz  
**Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale**
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/1982  
B. Isecke, W. Stichel  
**Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren**

- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/1983  
A. Erhard  
**Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall**
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/1983  
D. Conrad, S. Dietlen  
**Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid**
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/1983  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members**
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/1983  
M. Weber  
**Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz**
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/1983  
L. Auersch  
**Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden**
- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/1983  
P. Studt  
**Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen**
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/1983  
Xian-Quan Dong  
**Untersuchungen der Störschwingungen beim Kerbschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen**
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/1983  
M. Römer  
**Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatten**
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/1983  
H. Eifler  
**Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem Betonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken**
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/1983  
G. Fuhrmann, W. Schwarz  
**Typische Bruchflächenausbildung thermoplastischer Kunststoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung**
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/1983  
E. Schnabel  
**Bestimmung des elastischen Verhaltens von Maschenwaren  
- Stretch- und Erholungsvermögen -**
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/1983  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members**
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/1984  
G. Klamrowski, P. Neustupny  
**Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Frostwiderstand**
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/1984  
P. Reimers, J. Goebbels, H. Heidt, P. Weise, K. Wilding  
**Röntgen- und Gammastrahlen-Computer-Tomographie**
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/1984  
G. Magiers  
**Weiterentwicklung des hydraulischen Kompensationsverfahrens auf Druckspannungsmessung in Beton**
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/1984  
D. Schnitger  
**Radiographie mit Elektronen aus Metallverstärkerfolien**
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/1984  
M. Gierloff  
**Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen**
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/1984  
B. Schulz-Forberg  
**Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen**
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/1984  
J. Lehnert  
**Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last**
- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/1984  
W. Stichel, J. Ehreke  
**Korrosion von Strahlradiator**
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/1984  
L. Auersch  
**Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen - Ergebnisse von Modellrechnungen**
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/1985  
M. Omar  
**Zur Wirkung der Schrumpfbegrenzung auf den Schweißspannungszustand und das Spröbruchverhalten von unterpulvergeschweißten Blechen aus St E 460 N**
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/1985  
H. Walde, B. Kropp  
**Wasserstoff als Energieträger**
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/1985  
K. Ziegler  
**Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Umsetzung von Anfox-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte**
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/1985  
W. Lützwow  
**Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen**
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/1985  
R. Helms, H. Henke, G. Oelrich, T. Saito  
**Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf die Schwingungskorrosion von Offshore-Konstruktionen**
- Nr. 114/ISBN 3-88314-419-3/1985  
P. Rose, P. Raabe, W. Daum, A. Szameit  
**Neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen**
- Nr. 115/ISBN 3-88314-420-7/1985  
K. Richter  
**Farbempfindungsmerkmal Elementarabunton und Buntheitsabstände als Funktion von Farbart und Leuchtdichte von In- und Umfeld**
- Nr. 116/ISBN 3-88314-460-6/1985  
F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi, A. Wagner  
**Theoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik**
- Nr. 117/ISBN 3-88314-468-1/1985  
H. Czichos, G. Sievers  
**MaterialsTechnologies and Techno-Economic Development  
A Study for the German Foundation for International Development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)**
- Nr. 118/ISBN 3-88314-469-X/1985  
H. Treumann, H. Andre, E. Blossfeld, N. Pfeil, M.-M. Zindler  
**Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung - Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen**
- Nr. 119/ISBN 3-88314-472-X/1985  
J. Herter, K. Brandes, E. Limberger  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil 1  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part 1**
- Nr. 120/ISBN 3-88314-514-9/1986  
A. Hecht  
**Zerstörungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückstreuung**
- Nr. 121/ISBN 3-88314-530-0/1986  
P. Feinle, K.-H. Habig  
**Versagenskriterien von Stahlgleitpaarungen unter Mischreibungsbedingungen; Einflüsse von Stahlzusammensetzung und Wärmebehandlung**
- Nr. 122/ISBN 3-88314-521-1/1986  
J. Mischke  
**Entsorgung kerntechnischer Anlagen  
Sonderkolloquium der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) am 10. 12. 1985 mit Beiträgen von B. Schulz-Forberg, K. E. Wieser und B. Droste**
- Nr. 123/ISBN 3-88314-531-9/1986  
D. Rennoch  
**Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organisch-chemischer Baustoffe entstehenden Brandgase**
- Nr. 124/ISBN 3-88314-538-6/1986  
H.-M. Thomas  
**Zur Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung**
- Nr. 125/ISBN 3-88314-540-8/1986 (vergriffen)  
B. Droste, U. Probst  
**Untersuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzisolierung von Flüssiggas-Lagertanks**
- Nr. 126/ISBN 3-88314-547-5/1986  
W. Stichel  
**Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmhallen**
- Nr. 127/ISBN 3-88314-564-5/1986 (vergriffen)  
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil 1  
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part 1**
- Nr. 128/ISBN 3-88314-568-8/1986 (vergriffen)  
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members  
Versuche an Stahlbetonbalken, Teil 11  
Tests on Reinforced Concrete Beams, Part 11**
- Nr. 129/ISBN 3-88314-569-6/1980 (vergriffen)  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter, K. Berner  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen  
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load  
Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit  
Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates**

- Nr. 130/ISBN 3-88314-570-X/1986  
W. Struck  
**Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material**
- Nr. 131/ISBN 3-88314-585-8/1986  
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen**  
Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load  
Versuche an Stahlbetonplatten, Teil 11  
Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part 11
- Nr. 132/ISBN 3-88314-595-5/1987  
Chr. Herold, F.-U. Vogdt  
**Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen**
- Nr. 133/ISBN 3-88314-609-9/1987 (vergriffen)  
M. Woydt, K.-H. Habig  
**Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe**
- Nr. 134/ISBN 3-88314-615-3/1987  
G. Andreas, G. Niessen  
**Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen**
- Nr. 135/ISBN 3-88314-618-8/1987  
J. Ludwig, W.-D. Mischke, A. Ulrich  
**Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen**
- Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/1987  
H.-J. Deppe, K. Schmidt  
**Untersuchung zur Beurteilung von Brett-schichtverleimungen für den Holzbau**
- Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/1987  
D. Aurich  
**Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiete der Komponentensicherheit**
- Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/1987  
M. Dogurike, F. Buchhardt  
**Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben**
- Nr. 139/ISBN 3-88314-658-7/1987  
J. Olschewski, S.-P. Scholz  
**Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle**
- Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/1987  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen**  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members
- Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/1987  
F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera, F. Mathiak  
**Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdbebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken**
- Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/1987  
H. Treumann, G. Krüger, N. Pfeil, S. von Zahn-Ullmann  
**Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefahrzahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen**
- Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/1987  
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter  
**Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen**  
Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively
- Loaded Reinforced Concrete Members**  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung  
Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load
- Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/1987  
F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber, J. Altes  
**Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktor-gebäudes**
- Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/1987  
U. Holzlöhner  
**Untersuchung selbständlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden**
- Nr. 146/ISBN 3-88314 714-1/1987  
W. Schon, M. Mallon  
**Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks**
- Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/1987  
H.-D. Kleinschrodt  
**Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen**
- Nr. 148/ISBN 3-88314-774-5/1988  
W. Müller  
**Theoretische Untersuchung von Variationsprinzipien für elastoplastisches Materialverhalten sowie Entwicklung und numerische Erprobung von Finite-Element-Verfahren für den ebenen Spannungszustand**
- Nr. 149/ISBN 3-88314-775-3/1988  
U. Holzlöhner  
**Bestimmung baugrunddynamischer Kenngrößen aus der Untersuchung von Bodenproben**
- Nr. 150/ISBN 3-88314-776-1/1988  
M. Weber  
**VG3D Zeichenprogramm für vektorgraphische Darstellung dreidimensionaler Strukturen**
- Nr. 151/ISBN 3-88314-785-0/1988  
L. Auersch-Saworski  
**Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch Bodenerschütterungen**
- Nr. 152/ISBN 3-88314-796-6/1988  
G. Plauk, G. Kretschmarin, R.-G. Rohrmann  
**Untersuchung des baulichen Zustandes und der Tragfähigkeit vorgespannter Riegel von Verkehrszeichenbrücken der Berliner Stadtautobahn**
- Nr. 153/ISBN 3-88314-797-4/1988  
H. Sander, W.-W. Maennig  
**Magnetisches Verhalten von Eisenproben bei mechanischer Wechselbeanspruchung**
- Nr. 154/ISBN 3-88314-822-9/1988  
K. Breitzkreutz, P.-J. Uttech, K. Haedecke  
**Druckgesinterte Stähle als zertifiziertes Referenzmaterial für die Spektrometrie**
- Nr. 155/ISBN 3-88314-825-3/1988  
L. Auersch  
**Zur Entstehung und Ausbreitung von Schienenverkehrserschütterungen: Theoretische Untersuchungen und Messungen am Hochgeschwindigkeitszug Intercity Experimental**
- Nr. 156/ISBN 3-88314-887-3/1989  
G. Klamrowski, P. Neustupny, H.-J. Deppe, K. Schmidt, J. Hundt  
**Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von Faserzementen**
- Nr. 157/ISBN 3-88314-888-1/1989  
E. Limberger, K. Brandes  
**Versuche zum Verhalten von Stahlbetonbalken mit Übergreifungsstößen der Zugbewehrung unter stoßartiger Belastung**
- Nr. 158/ISBN 3-88314-889-X/1989  
R. Wäsche, K.-H. Habig  
**Physikalisch-chemische Grundlagen der Feststoffschmierung - Literaturübersicht**
- Nr. 159/ISBN 3-88314-890-3/1989  
R. Müller, R. Rudolphi  
**Berechnung des Wärmedurchlaßwiderstandes und der Temperaturverteilung im Querschnitt von Hausschornsteinen nach DIN 18160, Teil 6**
- Nr. 160/ISBN 3-88314-917-9/1989  
W. Matthees  
**Entwicklung eines Makroelementes durch Kondensation am Beispiel der Lastfälle Flugzeugabsturz und Erdbeben bei Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit biegeweichen Fundamenten**
- Nr. 161/ISBN 3-88314-920-9/1989  
G. Mellmann, M. Maultzsch  
**Untersuchung zur Ermittlung der Biegefestigkeit von Flachglas für bauliche Anlagen**
- Nr. 162/ISBN 3-88314-921-7/1989  
W. Brünner  
**Untersuchungen zur Tragfähigkeit großer Glasscheiben**
- Nr. 163/ISBN 3-88314-922-5/1989  
W. Brünner, G. Mellmann, W. Struck  
**Biegefestigkeit und Tragfähigkeit von Scheiben aus Flachglas für bauliche Anlagen**
- Nr. 164/ISBN 3-88314-934-9/1989  
R. Helms, B. Jaenicke, H. Wolter, C.-P. Bork  
**Zur Schwingfestigkeit großer geschweißter Stahlträger**
- Nr. 165/ISBN 3-88314-935-7/1989  
P. Gobel, L. Meckel, W. Schiller  
**Untersuchung zur Erarbeitung von Kennwerten bei Einrichtungsmaterialien (Holzwerkstoffen, Möbeln und Textilien) hinsichtlich der Formaldehyd-Emission - Teil B: Textilien**
- Nr. 166/ISBN 3-88314-936-5/1989  
K. Breitzkreutz  
**Modelle für Stereologische Analysen**
- Nr. 167/ISBN 3-88314-937-3/1989  
A. Mitakidis, W. Rücker  
**Erschütterungsausbreitung im elastischen Halbraum bei transienten Belastungsvorgängen**
- Nr. 168/ISBN 3-88314-958-6/1990  
F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi  
**Numerische Untersuchung geometriebedingter Wärmebrücken (Winkel und Ecken) unter Einsatz hochauflösender Farbgraphik bei Berücksichtigung der Tauwasserproblematik und des Mindestluftwechsels**
- Nr. 169/ISBN 3-88314-959-4/1990  
Chr. Kohl, W. Rucker  
**Integration der Untergrunddynamik in das Programmsystem MEDYNA, dargestellt am Beispiel des Intercity Experimental (ICE)**
- Nr. 170/ISBN 3-88314-960-8/1990  
P. Studt, W. Kerner, Tin Win  
**Untersuchung der mikrobiologischen Schädigung wassergemischter Kühlschmierstoffe mit dem Ziel der Verbesserung der Arbeitshygiene, der Minderung der Geruchsbelastung und der Menge zu entsorgender Emulsionen**
- Nr. 171/ISBN 3-88314-997-7/1990  
F. Buchhardt  
**Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter dynamischer Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung**

- Nr. 172/ISBN 3-88314-998-5/1990  
J. Vielhaber, G. Plauk  
**Grenztragfähigkeit großer Verbundprofilstützen**
- Nr. 173/ISBN 3-88314-999-3/1990  
B. Droste, J. Ludwig, B. Schulz-Forberg  
**Höherwertige Transporttechnik und ihre Konsequenzen für die Beförderung gefährlicher Güter**
- Nr. 174/ISBN 3-88429-021-8/1990  
D. Aurich  
**Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte**
- Nr. 175/ISBN 3-88429-022-6/1990  
W. Brocks, D. Klingbeil, J. Olschewski  
**Lösung der HRF-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik**
- Nr. 176/ISBN 3-88429-035-6/1990  
W. Matthees, G. Magiera  
**Iterative Dekonvolution der seismischen Basiserregung für den Zeitraum**
- Nr. 177/ISBN 3-89429-090-0/1991  
G. Schickert, M. Krause, H. Wiggenhauser  
**Studie zur Anwendung zerstörungsfreier Prüfverfahren bei Ingenieurbauwerken**
- Nr. 178/ISBN 3-89429-429-9/1991  
G. Andreae, J. Knapp, G. Niessen  
**Entwicklung und Untersuchung eines kapazitiven Hochtemperatur-Dehnungsaufnehmers für Einsatztemperaturen bis ca. 1000 °C**
- Nr. 179/ISBN 3-89429-100-1/1991  
H. Eifler  
**Die Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbeton-Plattenbalken, bewehrt mit naturhartem Betonstahl BSt 500 S im Bereich negativer Biegemomente**
- Nr. 180/ISBN 3-89429-101-X/1991  
E. Klement, G. Wieser  
**Zur numerischen Übertragbarkeit von Prüfungsergebnissen an Hausschornsteinen auf Schornsteine mit anderen lichten Querschnitten**
- Nr. 181/ISBN 3-89429-105-2/1991  
H. Czichos, R. Helms, J. Lexow  
**Industrial and Materials Technologies Research and Development Trends and Needs**
- Nr. 182/ISBN 3-89429-145-1/1992  
M. Weber  
**Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich geometriebedingter Wärmebrücken**
- Nr. 183/ISBN 3-89429-163-X/1992  
F. Buchhardt  
**Zur Dekonvolution im Zeitbereich**
- Nr. 184/ISBN 3-89429-164-8/1992  
M. Maultzsch, W. Stichel, E.-M. Vater  
**Feldversuche zur Einwirkung von Aufbaumitteln auf Verkehrsbauwerke (im Rahmen des Großversuchs "Umweltfreundlicheres Streusalz")**
- Nr. 185/ISBN 3-89429-165-6/1992  
Renate Müller  
**Ein numerisches Verfahren zur simultanen Bestimmung thermischer Stoffeigenschaften oder Größen aus Versuchen Anwendung auf das Heißdraht-Parallelverfahren und auf Versuche an Hausschornsteinen**
- Nr. 186/ISBN 3-89429-211-3/1992  
B. Löffelbein, M. Woydt, K.-H. Habig  
**Reibungs- und Verschleißuntersuchungen an Gleitpaarungen aus Ingenieurkeramischen Werkstoffen in wässrigen Lösungen**
- Nr. 187/ISBN 3-89429-216-4/1992  
Th. Schneider, E. Santner  
**Mikrotribologie: Stand der Forschung und Anwendungsmöglichkeiten. Literaturübersicht**
- Nr. 188/ISBN 3-89429-243-1/1992  
K. Mallwitz  
**Verfahren zur Voraussmittlung der Setzung von Fundamenten auf geständerten Strecken infolge zyklischer Beanspruchung**
- Nr. 189/ISBN 3-89429-244-X/1992  
W. Matthees, G. Magiera  
**Impedanzeigenschaften von Finiten Elementen Modellen bei Integration im Zeitraum**
- Nr. 190/ISBN 3-89429-245-8/1992  
G. Zachariev  
**Untersuchung des Versagens thermoplastischer Kunststoffe im Kurzzeit-Zugversuch und Retardations-Zugversuch**
- Nr. 191/ISBN 3-89429-246-6/1992  
H.-M. Bock, S. Erbay, J. With  
**Kritische Stahitemperatur als charakteristischer Kennwert für die Feuerwiderstandsdauer von Bauwerkssystemen aus Stahl**
- Nr. 192/ISBN 3-89429-329-2/1993  
D. Aurich  
**Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte; Lokales Ribwachstum, Ermittlung des Ribwiderstandsverhaltens aus der Kerbschlagarbeit**
- Nr. 193/3-89429-291-1/1993  
W. Gerisch, Th. Fritz, S. Steinborn  
**Statistical Consulting in the Frame of VAMAS. The Role of the Technical Working Arfea/Advisory Group. Statistical Techniques for Interlaboratory Studies and Related Projects (VAMAS Report No. 13)**
- Nr. 194/ISBN 3-89429-330-6/1993  
U. Krause  
**Ein Beitrag zur mathematischen Modellierung des Ablaufs von Explosionen**
- Nr. 195/ISBN 3-89429-331-4/1993  
U. Schmidtchen, G. Würsig  
**Lagerung und Seetransport großer Mengen flüssigen Wasserstoffs am Beispiel des "Euro-Québec Hydro-Hydrogen Pilot Projekts. Überblick über die in Deutschland anzuwendenden Gesetze, Verordnungen und technischen Regeln**
- Nr. 196/ISBN 3-89429-362-4/1993  
D. Lietze  
**Untersuchungen über das Anlaufen von Detonationen im Innern geschlossener Systeme**
- Nr. 197/ISBN 3-89429-400-0/1993  
A. Skopp  
**Tribologisches Verhalten von Siliziumnitridwerkstoffen bei Festkörpergleitreibung zwischen 22 °C und 1000 °C**
- Nr. 198/ISBN 3-89429-421-3/1994  
St. Meretz  
**Ein Beitrag zur Mikromechanik der Interphase in polymeren Faserverbundwerkstoffen**
- Nr. 199/ISBN 3-89429-422-1/1994  
W. F. Rücker, S. Said  
**Erschütterungsübertragung zwischen U-Bahntunneln und dicht benachbarten Gebäuden**
- Nr. 200/ISBN 3-89429-423-X/1994  
D. Arndt, K. Borchardt, P. Croy, E. Geyer, J. Henschen, C. Maierhofer, M. Niedack-Nad, M. Rudolph, D. Schaurich, F. Weise, H. Wiggenhauser  
**Anwendung und Kombination zerstörungsfreier Prüfverfahren zur Bestimmung der Mauerwerksfeuchte im Deutschen Dom**
- Nr. 201/ISBN 3-89429-475-2/1994  
U. Holzlöhner, H. August, T. Meggyes, M. Brune  
**Deponieabdichtungssysteme; Statusbericht**
- Nr. 202/ISBN 3-89429-481-7/1994  
J. Schmidt  
**Über eine Verteilungsfunktion mit Parametern für Median, Spannweite, Schiefe und Wölbung; Konzept und Anwendung**
- Nr. 203/ISBN 3-89429-483-3/1994  
B. Schulz-Forberg, J. Ludwig  
**Sicherheitsniveaus von Transporttanks für Gefahrgut**
- Nr. 204/ISBN 3-89429-484-1/1994  
W. Struck, E. Limberger  
**Der Glaskugelsack als Prüfkörper für Beanspruchungen durch weichen Stoß - eine erweiterte Modellvorstellung**
- Nr. 205/ISBN 3-89429-516-3/1994  
P. Rose  
**Bestimmung charakteristischer Fehlermerkmale zur rechnergestützten Bildauswertung von Schweißnahradiographien**
- Nr. 206/ISBN 3-89429-517-1/1994  
D. Lietze  
**Grenze der Flammendurchschlagsicherheit von Speerschichten aus Bandsicherungen bei Deflagrationen und bei einem Nachbrand**
- Nr. 207/ISBN 3-89429-593-7/1995  
W. Daume  
**Zur objektiven Beurteilung der Bildqualität industrieller Radioskopiesysteme**
- Nr. 208/ISBN 3-89429-557-0/1995  
G. Kalinka  
**Ein Beitrag zur Kristallisation gefüllter und ungefüllter Thermoplaste**
- Nr. 209/ISBN 3-89429-594-5/1995  
D. Hoffmann, K. Niesel  
**Zur Quantifizierung des Effekts von Luftverunreinigungen auf Putzmörtel**
- Nr. 210/ISBN 3-89429-595-3/1995  
G. Magiera  
**Zur Erfassung der hysteretischen Dämpfung im Zeitraum**



**Bundesanstalt für  
Materialforschung und -prüfung (BAM)**

**Federal Institute for  
Material Research and Testing**

**Institut Fédéral pour la  
Recherche et l'Essai des Matériaux**

Unter den Eichen 87  
D-12205 Berlin  
☒ D-12200 Berlin

Telefon (0 30) 81 04-0  
Telefax (0 30) 8 11 20 29  
Telex 1 83 261 bamb d

- *Berichte*
- *Gutachten*
- *Zulassungen*
- *Zertifikate*
- *Tagungspapiere*
- *Prüfungszeugnisse*
- *Prüfstellenanerkennungen*

