



BAM

Bundesanstalt für
Materialforschung
und -prüfung

Dr. rer. nat. Frank Liebau
Dr.-Ing. Reinald Rudolphi

**Berechnung von Temperatur- und
Wärmestromverteilungen mittels
algebraischer Mehrgittermethoden
auf der Basis der Methode der
finiten Volumen bei allgemeiner
Triangulierung mit Winkeln über 90°**

227

Forschungsbericht



Die Aufgaben
der Bundesanstalt
stehen unter der Leitlinie:

Sicherheit und Zuverlässigkeit in Chemie- und Materialtechnik

Die Aufgaben

Die BAM hat gemäß ihrem Gründungserlaß die Zweckbestimmung, die Entwicklung der deutschen Wirtschaft zu fördern. Sie ist im Aufgabenverbund „Material – Chemie – Umwelt – Sicherheit“ zuständig für:

- > Hoheitliche Funktionen zur öffentlichen technischen Sicherheit, insbesondere im Gefahrstoff- und Gefahrgutrechtsbereich;
- > Mitarbeit bei der Entwicklung entsprechender gesetzlicher Regelungen, z. B. bei der Festlegung von Sicherheitsstandards und Grenzwerten;
- > Beratung der Bundesregierung, der Wirtschaft sowie der nationalen und internationalen Organisationen im Bereich der Materialtechnik und Chemie;
- > Entwicklung und Bereitstellung von Referenzmaterialien und -verfahren, insbesondere der analytischen Chemie und der Prüftechnik;
- > Unterstützung der Normung und anderer technischer Regeln für die Beurteilung von Stoffen, Materialien, Konstruktionen und Verfahren im Hinblick auf die Schadensfrüherkennung bzw. -vermeidung, den Umweltschutz und den Erhalt volkswirtschaftlicher Werte.

Die Tätigkeitsbereiche

Das Tätigkeitsspektrum der BAM umfaßt die sich ergänzenden und aufeinander bezogenen Tätigkeiten:

- > Forschung und Entwicklung
- > Prüfung, Analyse und Zulassung
- > Beratung und Information.

Die nationale und internationale Zusammenarbeit

Die Aufgaben der BAM für Technik, Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft erfordern eine interdisziplinäre Zusammenarbeit. Insofern arbeitet die Bundesanstalt mit Technologieinstitutionen des In- und Auslandes, insbesondere den nationalen Schwesterinstitutionen, eng zusammen. Sie berät Bundesministerien, Wirtschaftsverbände, Industrieunternehmen sowie Verbraucherorganisationen und unterstützt mit Fachgutachten Verwaltungsbehörden sowie Gerichte. Daneben ist sie in die internationale technische Zusammenarbeit eingebunden und im Bereich „Meßwesen – Normung – Prüftechnik – Qualitätssicherung“ (MNPQ) als nationale Institution für die Prüftechnik zuständig. Die Mitarbeiter der Bundesanstalt wirken in zahlreichen Fachgremien, gesetzlichen Körperschaften und normensetzenden Institutionen an der Aufstellung von technischen Regeln und Sicherheitsbestimmungen mit und vertreten die Bundesrepublik in nationalen und supranationalen Einrichtungen.

Der Status

Die BAM ist als technisch-wissenschaftliche Bundesoberbehörde im Geschäftsbereich des Bundesministeriums für Wirtschaft und Technologie eine der 1971 gegründeten Staatlichen Materialprüfungsämter sowie der 1920 gebildeten Chemisch-Technischen Reichsanstalt (CTR). Sie hat dementsprechend die Funktion einer materialtechnischen und chemisch-technischen Bundesanstalt. In ihr sind etwa 1700 Mitarbeiter, darunter mehr als 800 Wissenschaftler und Ingenieure, auf dem Stammgelände in Berlin-Lichterfelde sowie auf den Zweiggeländen in Berlin-Steglitz und Berlin-Adlershof tätig.

Dr. rer. nat. Frank Liebau
Technische Universität Berlin,
Fachbereich Mathematik

Dr.-Ing. Reinald Rudolphi
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung

**Berechnung von Temperatur- und
Wärmestromverteilungen mittels
algebraischer Mehrgittermethoden
auf der Basis der Methode der
finiten Volumen bei allgemeiner
Triangulierung mit Winkeln über 90°**

Forschungsbericht 227

Berlin 1998

Impressum

Forschungsbericht 227

Herausgegeben von
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 12205 Berlin
Telefon (030) 81 04-0
Telefax (030) 8 11 20 29

Copyright ©1998 by Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung

Herstellung und Verlag:
Wirtschaftsverlag NW
Verlag für neue Wissenschaft GmbH
Bürgermeister-Smidt-Str. 74-76, 27511 Bremerhaven
Postfach 10 11 10, 27611 Bremerhaven
Telefon (0471) 9 46 44-0
Telefax (0471) 9 45 44 77/88

Design-Umschlag: Lutz Mittenzwei

ISSN 0938-5533

ISBN 3-89701-187-5

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Diskretisierung	2
2.1	Aufstellung der Systemmatrizen: Konzept der Elementmatrizen	6
2.2	Steifigkeitsmatrix nach dem MD-Schema (Schwerpunktboxen)	9
2.3	Steifigkeitsmatrix nach dem PB-Schema (Voronoi-Diagramm)	11
2.4	Integrale für Randboxen	13
2.5	Massematrix	14
2.6	Triangulierung mit dem Programm TRIANGLE	16
3	Mehrgitterverfahren	21
3.1	Zum klassischen Mehrgitterverfahren	22
3.2	Algebraisches Mehrgitter	25
4	Numerik	28
4.1	Modellproblem I: Beispiel mit analytischer Lösung	29
4.2	Modellproblem II: Eckbereich	35
4.3	Modellproblem III: Leichtbau-Sandwichkonstruktion	38
4.3.1	Zur Wahl der Parameter	38
4.4	Modellproblem IV: Hochlochziegel mit Schlitzlochung	43
A	Anhang	45
A.1	Notation	45
A.2	Elementare geometrische Beziehungen	46
A.3	Transformationen	47
A.4	Berechnung des Wärmestromes	48
	Abbildungsverzeichnis	49
	Tabellenverzeichnis	50
	Algorithmenverzeichnis	51
	Literaturverzeichnis	52

Zusammenfassung — Abstract

Ausgehend von einer Triangulierung, die auch Dreiecke mit Innenwinkeln über 90° beinhalten kann, wird eine Finite-Volumen-Elemente-Methode zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung angegeben. Auf der Basis dieser Box-Methode wird die Auflösung der bei der Berechnung von Temperatur- und Wärmestromverteilungen entstehenden großen schwachbesetzten Bandgleichungssysteme mittels algebraischer Mehrgittermethoden beschrieben. Algebraische Mehrgittermethoden haben dabei gegenüber den klassischen Iterationsverfahren den großen Vorzug, unabhängig von dem Grad der Feinheit des Netzes schnell zu konvergieren. Dreieckselemente mit Winkeln über 90° ermöglichen neben einer wesentlich flexibleren Elementierung komplizierter Geometrien (Schrägen, Kreisbögen) auch eine automatische Triangulierung der beschriebenen Gebiete, etwa mit dem Programm Triangle von Richard Shewchuk. Anhand von vier Anwendungsbeispielen wird gezeigt, daß diese Methoden effektiv arbeiten.

The paper presents a very effective algebraic multi-grid method to solve sparse matrix problems that occur in connection with the steady state heat transfer problems using a finite volume element method and triangles with angles more than $\pi/2$. Four heat conduction examples show that these techniques are very powerful to solve problems with unstructured grids and ill-conditioned problems. The usefulness of a 2D quality delaunay mesh generator such as TRIANGLE is demonstrated.

Vorwort

Experimentelle Untersuchungen werden auf allen Gebieten immer mehr durch rechnerische Analysen und Computersimulationen ersetzt. Außer der damit verbundenen Kosten- und Zeitersparnis können bereits im Projektstadium mit geringem Aufwand Parametervariationen und Optimierungen einer Konstruktion vorgenommen werden. Waren bisher Berechnungen zur Beurteilung des Brand- und Wärmeschutzes komplizierter Baukonstruktionen eine Domäne von Großrechnern oder Workstations und meist Universitäten und wissenschaftlichen Instituten vorbehalten, so sind heute aufgrund neuer mathematischer Verfahren, leistungsfähiger Computer und Computersoftware geometrisch komplizierte, dreidimensionale Brand- und Wärmeschutzprobleme auch auf einem PC lösbar.

Fortschritte bei bauphysikalischen Temperatur- und Wärmebrückenberechnungen gingen in jüngster Zeit vor allem von neuen Methoden der numerischen Mathematik aus. So können geometrisch komplizierte, dreidimensionale Wärmeschutzprobleme unter Verwendung der *Methode der finiten Volumen* als Ortsdiskretisierung auch auf einem PC (mit 32-Bit-Betriebssystem, z.B. Windows 98) gelöst werden. Die Anzahl der Unbekannten wird nur noch durch die Größe des Hauptspeichers und die tolerierte Rechenzeit begrenzt. Erweitert man die Methode der finiten Volumen so, daß auch Dreieckselemente *mit Winkeln* $> 90^\circ$ benutzt werden können, ist neben einer wesentlich flexibleren Elementierung komplizierter Geometrien (Schrägen, Kreisbögen) die Möglichkeit für eine *automatische Triangulierung* geschaffen. Das Programm Triangle von Richard Shewchuk liefert ausgehend von 2D-Polygonzügen eine Delaunay-Triangulierung der beschriebenen Gebiete. Die Feinheit der Triangulierung kann durch Vorgabe von Minimalwinkeln oder der maximal zulässigen Dreiecksfläche gesteuert werden. Da bei Vorgabe von Minimalwinkeln bestimmte Seitenverhältnisse bei den Dreiecken nicht unterschritten werden, ist eine stabilere Diskretisierung möglich. Die entstehenden großen Gleichungssysteme können besonders schnell mit einem *algebraischen Mehrgitterverfahren* gelöst werden. Mehrgittermethoden zeichnen sich gegenüber den klassischen Iterationsmethoden wie dem Gauß-Seidel-Verfahren, der Over-Relaxations-Methode oder einem cg-Verfahren (z.B. Methode der konjugierten Gradienten mit Cholesky-Vorkonditionierung) dadurch aus, daß *mit immer feinerem Gitter die Konvergenzgeschwindigkeit sich nicht verkleinert*. Sie sind also besonders für starke Verfeinerungen geeignet. Zusätzlich können auch Problemstellungen behandelt werden, die eine große Variation der Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung aufweisen, also zu hohen Konditionszahlen führen (cg-Verfahren konvergieren in diesem Fall schlecht). Modellproblems III, eine Wärmebrückenkonstruktion mit extrem unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten (Aluminium und Polystyrol-Hartschaum), ist hierfür ein Beispiel.

Ausgehend von einer Triangulierung, die auch Dreiecke mit Innenwinkeln über 90° beinhalten kann, werden eine Finite-Volumen-Methode (Box-Methode) zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung und ein algebraisches Mehrgitterverfahren zur Auflösung der großen schwachbesetzten Bandgleichungssysteme beschrieben. Vier Anwendungsbeispiele (davon drei *"real life problems"*) zeigen, daß diese Methoden sehr schnell und effektiv arbeiten.

2

Diskretisierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Die lineare zeitabhängige Wärmeleitung in Ω wird durch das mathematische Modell (Wärmeleitungsgleichung)

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) T_t(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbf{Q} = \Omega \times (0, t_E], \\
 \frac{\partial}{\partial n} T &= \alpha(T - T_\infty) & \text{auf } \Gamma_C, \quad t > 0, \\
 \frac{\partial}{\partial n} T &= 0 & \text{auf } \partial\Gamma_N, \quad t > 0, \\
 T &= g & \text{auf } \Gamma_D, \quad t > 0, \\
 T &= \varphi, & \text{auf } \Omega, \quad t = 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

beschrieben. Dabei seien T die Temperatur, λ , c , α und ρ Materialeigenschaften, die nicht von der Temperatur, sondern nur vom Ort x bzw. der Zeit t abhängig sind, T_∞ die Außentemperatur, φ die Temperturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ und f der Quellterm (häufig $f \equiv 0$). Sind die Materialeigenschaften auch von der Temperatur abhängig, so liegt ein nichtlineares Problem vor. Mögliche Randbedingungen sind

1. Dirichlet-Randbedingungen: die Temperatur wird für bestimmte Randpunkte vorgegeben, d.h.

$$T(\mathbf{x}, t) = T_{\Gamma_D}(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, t > 0.$$

2. Neumann-Randbedingungen:

$$\lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = q_{\Gamma_N}(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, t > 0,$$

wobei $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\text{out}}$ die nach außen gerichtete Normale ist. Diese Randbedingung bedeutet, daß die Wärmestromdichte, die die Oberfläche pro Zeiteinheit erreicht, bekannt ist (vgl. [12]). Eine totale Isolation des Randes $\partial\Omega$ ist gegeben durch die natürliche Randbedingung:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

3. Robin-Randbedingung (gemischte Randbedingungen, Randbedingungen 3.Art oder Fourier-Randbedingung): Mit dieser Randbedingung sind (erzwungene) Konvektionsvorgänge zu modellieren (freie Konvektion erfordert immer eine Kopplung zwischen Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld). [12]: "Beim Übergang der Wärme von einem Medium in ein anderes, z.B. von der strömenden Außenluft in das Mauerwerk eines Gebäudes, bildet sich eine sehr dünne Grenzschicht aus, deren Wärmespeichervermögen vernachlässigbar klein ist, die jedoch einen wesentlichen Wärmeübergangswiderstand aufweisen kann. Der Kehrwert dieses Widerstandes heißt Wärmeübergangskoeffizient α und ist eine Funktion der Temperatur, der Strömungsgeschwindigkeit und anderer Stoffeigenschaften" (vgl. auch [1]).

$$\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x})(T_\infty(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t)) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_C, t > 0. \tag{2.2}$$

In gleicher Weise (allerdings nichtlinear) kann Wärmestrahlung über eine gemischte Randbedingung berücksichtigt werden

$$\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x})(T_{\infty}^4(\mathbf{x}, t) - T^4(\mathbf{x}, t)) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_C, t > 0. \quad (2.3)$$

Der Parameter h ist abhängig vom Emissionsgrad, der Geometrie, Stoffeigenschaften usw. (vgl. [12]). Die Randbedingungen (2.2) und (2.3) können auch gemeinsam auftreten.

Ist T eine Temperaturverteilung (in Kelvin) bzgl. des Gebietes Ω , d.h. $T : \Omega \rightarrow (0, \infty)$, so ist die zugehörige Wärmestromdichte q das Vektorfeld

$$q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad q(\mathbf{x}) = -\lambda(\mathbf{x})\nabla T(\mathbf{x}), \quad \text{f.a. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Der Wärmestrom Φ [W] bzgl. der Oberfläche A ist definiert durch das Integral

$$\Phi(A) = \int_A \langle q(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}$$

($n(\mathbf{x})$ ist der Normalenvektor bzgl. A). Φ beschreibt die Wärme (Energie), die die Oberfläche A pro Zeiteinheit "durchdringt". Das Integral

$$\int_{t_0}^T \int_A \langle q(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} dt$$

ist dann die entsprechende Leistung.

Für praktische (bauphysikalische) Anwendungen ist der Wärmedurchgangskoeffizient k [W/(m²K)] eine wichtige Kenngröße. Er berechnet sich nach DIN 4108 (Teil 5) aus

$$q_{\text{din}} = k(\theta_{\text{in}} - \theta_{\text{out}}), \quad (2.4)$$

dabei sind q_{din} [W/m²] die (skalare) Wärmestromdichte¹, θ_{in} und θ_{out} die Temperaturen des Mediums (Luft) auf der Warm- bzw. Kaltseite des Bauteiles.

Die Wärmestromdichte aus (2.4) kann als "Mittelwert" angesehen werden:

$$q_{\text{din}} := \frac{\Phi}{A} = \frac{1}{A} \int_A \langle q(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x},$$

so daß q_{din} eine Dichte für Φ ist: $\Phi = \int_A q_{\text{din}} d\mathbf{x}$.

Zur Diskretisierung von (2.1) können unterschiedliche Methoden eingesetzt werden:

- Differenzenverfahren (FDM): in Gleichung (2.1) werden die Ableitungen durch Differenzquotienten ersetzt. Dieses Vorgehen ist sehr einfach, bereitet aber für komplizierte Gebiete, die sich nicht mit einem regelmäßigen Gitter überziehen lassen, Probleme (ein Ausweg können hier die Shortley-Weller-Diskretisierungen sein, vgl. Hackbusch[8]).
- Finite-Element-Methode (FEM): Ausgangspunkt ist eine Variationsformulierung, die dann für Funktionen aus den Ansatz- und Testräumen zu erfüllen ist.
- Finite-Volumen-Methode (FVM): Häufig werden die in den Bilanzgleichungen (2.5) auftretenden Normalenableitungen durch Differenzquotienten und die Integration durch Multiplikation mit der Intervalllänge ersetzt. Aus dieser Sicht kann die Finite-Volumen Methode als Differenzenverfahren aufgefaßt werden. Eine ausführliche Darstellung in diesem Kontext findet sich in Heinrich[13].

Eine weitere Diskretisierung ergibt sich, wenn die Bilanzgleichungen für Funktionen aus einem Ansatzraum erfüllt werden. d.h es werden aus dem klassischen Finite-Volumen-Verfahren die Bilanzbereiche und aus der Finite-Element-Methode die Ansatzfunktionen als Komponenten der Diskretisierung benutzt (Liebau[14]). Werden hier lineare Ansätze und die Bilanzbereiche nach Definition 1 gewählt, so sind die resultierenden Steifigkeitsmatrizen identisch zu denen der FEM mit linearen Ansatz- und Testfunktionen (aber die Massematrizen unterscheiden sich, vgl. Hackbusch[9]). Für quadratische Ansätze gilt dieses nicht mehr.

¹In der DIN ist $\theta_{\text{in}} > \theta_{\text{out}}$, so daß die Wärmestromdichte positives Vorzeichen hat, also in Richtung des Temperaturanstieges zeigt und nicht wie sonst in Richtung des Abstieges.

Vom physikalischen Standpunkt aus tritt eher die Integralform als die partielle Differentialgleichung auf. Diese kann als Ausgangspunkt der Diskretisierung dienen. Für das Modell (2.1) seien hier Robin- und homogene Neumannrandbedingungen vorgegeben. Unter hinreichenden Regularitätsannahmen² liefert die Integration von (2.1) über Kontrollvolumen $b \subset \bar{\Omega}$ und anschließende Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den Divergenzterm die Bilanzgleichungen

$$\int_b \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) T_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial b \cap \Omega} \lambda(s) \frac{\partial T}{\partial n}(s, t) ds + \int_{\partial b \cap \Gamma} \alpha(s) T(s, t) ds = \int_{\partial b \cap \Gamma} \alpha(s) T_\infty(s, t) ds + \int_b f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad b \subset \bar{\Omega}. \quad (2.5)$$

Die Randintegrale

$$\int_{\partial b \cap \Gamma_C} \alpha(s) T(s, t) ds \quad \text{und} \quad \int_{\partial b \cap \Gamma_C} \alpha(s) T_\infty(s, t) ds$$

entstehen dabei durch Einsetzen der Randbedingung (2.2). Dank der homogenen Neumannrandbedingung entfällt ein entsprechendes Randintegral über $\partial b \cap \Gamma_N$. Der Übergang von der kontinuierlichen Formulierung (2.5) zu einem endlichdimensionalen Problem erfolgt durch die Wahl von

1. Ansatzfunktionen für die gesuchte Temperatur:

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x). \quad (2.6)$$

Die endliche Basis

$$V^h := \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \quad (2.7)$$

heißt Ansatzraum. Ihre Wahl ist, neben den oben schon genannten Regularitätseigenschaften, entscheidend für die Güte der Approximation.

2. Kontrollvolumen, die das Gebiet in endliche viele Bilanzbereiche aufteilen.

Zur Konstruktion der Basis (2.7) sei das Polygonegebiet Ω mit Hilfe der zulässigen Triangulierung τ (vgl. 3) zerlegt. Weiter sei die Menge der Knoten eindeutig numeriert (die globale Numerierung). Sie bildet das diskrete Gitter

$$\Omega_h := \{\mathbf{x}^i : \mathbf{x}^i \text{ ist Eckpunkt eines Dreiecks } t \in \tau\}.$$

Als Ansatzraum werden die stetigen stückweise linearen Funktionen

$$\mathcal{P}^1(\tau) := \{u : u \in C(\bar{\Omega}), u \text{ ist auf } t \in \tau \text{ linear}\}$$

gewählt. Jedem Gitterpunkt \mathbf{x}^i wird eine Basisfunktionen $\phi_i \in \mathcal{P}^1$ mittels der Forderung

$$\phi_i(\mathbf{x}^j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

zugeordnet. Eine Funktion $T^h \in \mathcal{P}^1$ wird somit durch die Werte in den Knoten, dem Knotenvektor

$$u_h(t) := (u_i(t))_{i=1}^n$$

in (2.6), bestimmt. Der erste Schritt zur Diskretisierung von (2.5) ist damit gemacht.

Die Wahl der Kontrollvolumen erfolgt auch auf Grundlage der Triangulierung.

Definition 1 (Bilanzbereiche via Seitenhalbierende). (MD-Schema; [13])

Sei \mathbf{x}^i Eckpunkt eines $t \in \tau$. Für jedes Dreieck $t \in \tau$, das \mathbf{x}^i als Eckpunkt besitzt, wird der Schwerpunkt (der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) von t mit den beiden Seitenmittelpunkten verbunden, die durch eine Kante mit \mathbf{x}^i verbunden sind. Der so entstandene geschlossene Polygonzug ∂b_i definiert die Box b_i als sein Inneres.

²d.h. die Funktionen besitzen bestimmte Differenzierbarkeitseigenschaften

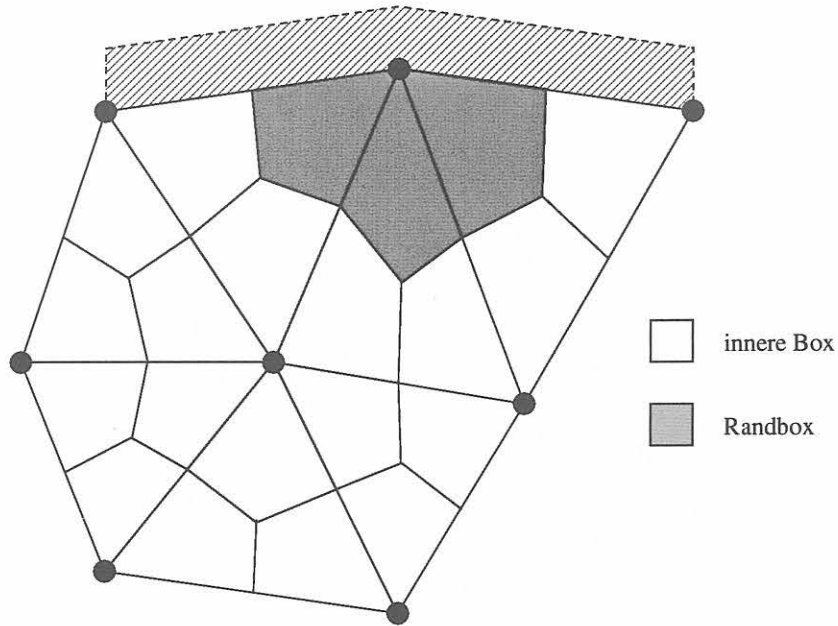


Abbildung 2.1: Bilanzbereiche nach dem MD-Schema.

Das Voronoi-Netz ist eine weitere Möglichkeit Ω in Bilanzbereiche aufzuteilen:

Definition 2 (Bilanzbereiche via Mittelsenkrechte). (PB-Schema; [13])

Sei für alle $t \in \tau$ kein Winkel größer als $\pi/2$. Sei \mathbf{x}^i Eckpunkt eines $t \in \tau$. Die Box b_i zum Knoten \mathbf{x}^i ergibt sich dadurch, daß für jedes Dreieck $t \in \tau$, das \mathbf{x}^i als Eckpunkt besitzt, der Mittelpunkt (der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) von t mit den beiden Seitenmittelpunkten verbunden wird, die durch eine Kante mit \mathbf{x}^i verbunden sind (Voronoi-Netz)

$$b_i := \{\mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^j\| \text{ für alle } \mathbf{x}^j \in \Omega_h, i \neq j\}.$$

Die Menge der Boxen sei mit

$$\mathcal{B} := \{b_i : b_i \text{ f.a. Eckpunkte } \mathbf{x}^i \text{ entweder nach Def.1 oder Def.2 gewählt}\}$$

bezeichnet. Die Wahl der Boxen über die erste Definition hat den Vorteil, daß keine Einschränkung an die Dreiecke gemacht werden müssen. Mit der Festlegung der Bilanzbereiche ist die Diskretisierung abgeschlossen.

Die Gleichung (2.5) ist nun für eine Funktion T^h aus dem Ansatzraum \mathcal{P}^1 und alle $b \in \mathcal{B}$ zu erfüllen:

$$\int_b \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) T_t^h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial b \cap \Omega} \lambda(s) \frac{\partial T^h}{\partial n}(s, t) ds + \int_{\partial b \cap \Gamma} \alpha(s) T^h(s, t) ds = \int_{\partial b \cap \Gamma} \alpha(s) T_\infty(s, t) ds + \int_b f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}.$$

Das ist das diskrete Problem. Einsetzen von (2.6) ergibt das Gleichungssystem

$$M_h(\rho, c) u_h'(t) + A_h(\lambda, \alpha) u_h(t) = f_h^*(t) \quad (2.8)$$

für den Knotenvektor $u_h(t)$ mit der Massematrix

$$M_h(\rho, c) := \left(\int_{b_i} \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)_{i,j=1}^n, \quad (2.9)$$

der Steifigkeitsmatrix

$$A_h(\lambda, \alpha) := A_h(\lambda, 0) + A_h(0, \alpha) := \left(- \int_{\partial b_i \cap \Omega} \lambda(s) \frac{\partial \phi_j}{\partial n}(s) ds + \int_{\partial b_i \cap \Gamma} \alpha(s) \phi_j(s) ds \right)_{i,j=1}^n \quad (2.10)$$

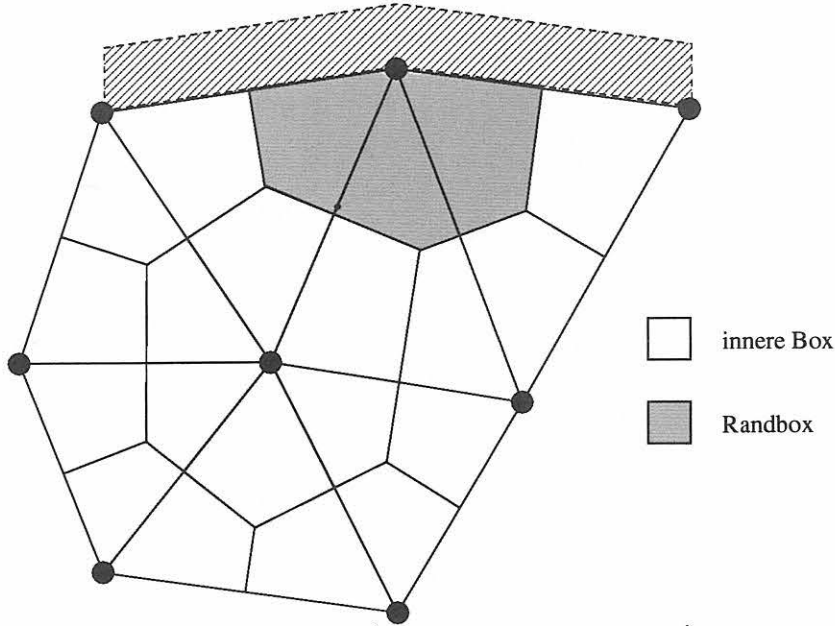


Abbildung 2.2: Bilanzbereiche nach dem PB-Schema.

und der rechten Seite

$$f_h^*(t) := \left(\int_{\partial b_i \cap \Gamma} \alpha(s) T_\infty(s, t) ds + \int_{b_i} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right)_{i=1}^n. \quad (2.11)$$

Die Abhängigkeiten der Matrizen von den Materialeigenschaften und des Knotenvektors sowie der rechten Seite von der Zeit t wird durch die jeweiligen Argumente deutlich. Eine Zeitintegration kann z.B. mit dem θ -Schema durchgeführt werden. Im stationären Fall verschwindet $u'_h(t)$, so daß hier das Gleichungssystem

$$A_h(\lambda, \alpha) u_h = f_h^*$$

zu lösen ist (zur Lösbarkeit im FEM-Fall vgl. Glowinski [6]).

2.1 Aufstellung der Systemmatrizen: Konzept der Elementmatrizen

Im folgenden werden die Einträge der Steifigkeitsmatrix (2.10) im stationären Fall bestimmt. Das Verfahren kann entsprechend auf die Massematrix (2.9) angewandt werden. Zur Vereinfachung seien die Funktionen λ , α , ρ und c auf jedem Dreieck der Triangulierung konstant. Weitere Voraussetzungen sind:

1. eine globale Numerierung der Knoten durch die Indexmenge $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$,
2. eine Numerierung der Dreiecke $t \in \tau$,
3. eine eindeutige lokale Numerierung in allen $t \in \tau$ (vgl. Abb. 2.3(a)) und
4. eine surjektive Abbildung

$$j : \tau \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathcal{I}, \quad j(t, i) \in \mathcal{I},$$

die jedem Dreieck t und jeder lokalen Nummer $i \in \{1, 2, 3\}$ eine globale Knotennummer zuordnet.

Mit der Abbildung j gelingt ein elementweiser Aufbau der Matrizen aus dem Gleichungssystem (2.8). Für $t \in \tau$ sei die Matrix $R(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$(R(t))_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{für } j(t, i) = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{j(t, i)k}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, k \in \mathcal{I}. \quad (2.12)$$

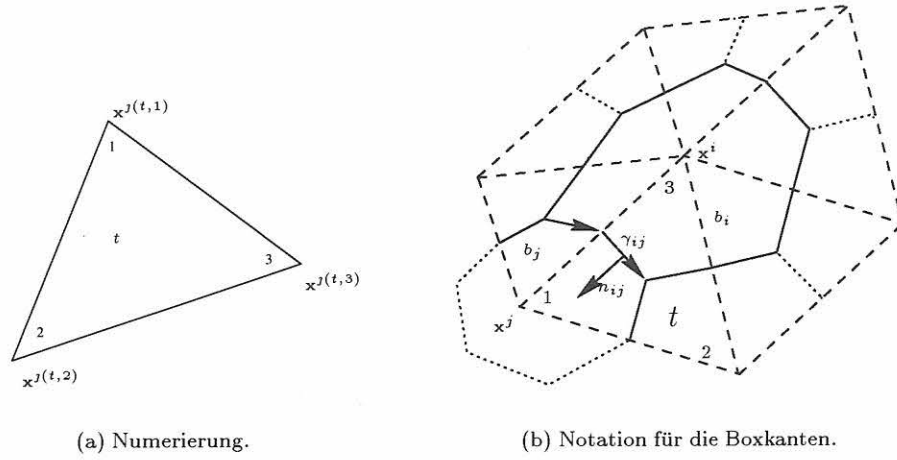


Abbildung 2.3: Bezeichnungen

Die Matrix $R(t)$ angewandt auf den globalen Knotenvektor $u_h \in \mathbb{R}^n$ ergibt den lokalen Knotenvektor, den Elementvektor zum Dreieck t

$$R(t) u_h = u_t, \quad u_t = (u_1, u_2, u_3)^T. \quad (2.13)$$

Die Geometrie eines Dreiecks $t \in \tau$ spiegelt sich in den beiden Faktoren

$$a_t := \frac{\|\mathbf{x}^{j(t,3)} - \mathbf{x}^{j(t,1)}\|}{\|\mathbf{x}^{j(t,2)} - \mathbf{x}^{j(t,1)}\|} \quad (2.14)$$

(Seitenverhältnis) und

$$c_t := \cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{x}^{j(t,3)} - \mathbf{x}^{j(t,1)}, \mathbf{x}^{j(t,2)} - \mathbf{x}^{j(t,1)} \rangle}{\|\mathbf{x}^{j(t,3)} - \mathbf{x}^{j(t,1)}\| \cdot \|\mathbf{x}^{j(t,2)} - \mathbf{x}^{j(t,1)}\|}, \quad s_t := \sqrt{1 - c_t^2}, \quad (2.15)$$

wider. Nach Konstruktion besteht der Rand ∂b der Box $b \in \mathcal{B}$ aus einem Polygonzug

$$\partial b_i = \sum_{j \in J_i} \gamma_{ij}.$$

J_i ist die Indexmenge der Nachbarn des Knotens \mathbf{x}^i , γ_{ij} die eindeutig bestimmte gemeinsame Boxkante der Knoten \mathbf{x}^i und \mathbf{x}^j (vgl. Abb. 2.1 und Abb 2.3(b)). Das Randintegral $\int_{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial n} u(s) ds$ kann genauso aufgeteilt werden. Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

$$- \int_{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial n} u(s) ds = \sum_{j \in J_i} - \int_{\gamma_{ij}} \frac{\partial}{\partial n_{ij}} u ds = \sum_{j \in J_i} S_{ij}(u), \quad (2.16)$$

mit der Setzung $S_{ij}(u) := - \int_{\gamma_{ij}} \frac{\partial}{\partial n_{ij}} u ds$. Weiter sei

$$S_{ij}^t(u) := - \int_{\gamma_{ij} \cap t} \frac{\partial}{\partial n_{ij}} u ds.$$

Insbesondere gilt $S_{ij}^t(u) = -S_{ji}^t(u)$. Sei $\lambda = 1$ und $\alpha = 0$, d.h. $A_h := A_h(1, 0)$ (vgl. (2.10)). Das Skalarprodukt $\langle A_h u_h, v_h \rangle$ kann nun elementweise berechnet werden.

$$\begin{aligned} \langle A_h u_h, v_h \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i \left(\int_{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial n} u^h(s) ds \right)_i \stackrel{(2.16)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} v_i S_{ij}(u^h) \\ &= \sum_{\{i,j\} \in J} (v_i - v_j) S_{ij}(u^h) = \sum_{t \in \tau} \sum_{\{i,j\} \in J_t} (v_i - v_j) S_{ij}^t(u^h), \end{aligned}$$

wobei J die Indexmenge aller Boxkanten ist und J_t diejenige der in t verlaufenden Boxkanten. J_t kann mit $\{1, 2, 3\}$ identifiziert werden, so daß γ_{ij}^t , $\{i, j\} \in J_t$, kürzer als γ_l^t , $l \in \{1, 2, 3\}$, geschrieben werden kann. Sei $\Psi^t \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Matrix

$$\Psi_{l,k}^t := - \int_{\gamma_l^t} \frac{\partial}{\partial n_l} \varphi_k(s) ds, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Es folgt

$$S_{ij}^t(u^h) = - \int_{\gamma_l^t} \frac{\partial}{\partial n_l} u^h(s) ds = \sum_{k=1}^3 \Psi_{lk}^t u_k = (\Psi^t u_t)_l, \quad u_k = u^h(\mathbf{x}^k).$$

Mit einer 3×3 Matrix P , welche die Differenzen $v_i - v_j$ aus dem lokalen Knotenvektor v_t berechnet, gilt schließlich

$$\sum_{\{i,j\} \in J_t} (v_i - v_j) S_{ij}^t(u^h) = \langle \Psi^t u_t, P v_t \rangle = \langle P^T \Psi^t u_t, v_t \rangle =: \langle A^e(t) u_t, v_t \rangle.$$

D.h.

$$\langle A_h u_h, v_h \rangle = \sum_{t \in \tau} \langle A^e(t) u_t, v_t \rangle \quad \forall u_h, v_h \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man noch die Darstellung (2.13) der lokalen Knotenvektoren ein, so folgt unmittelbar

Bemerkung 1. Für das Skalarprodukt $\langle A_h u_h, v_h \rangle$ gilt mit der 3×3 Elementmatrix

$$A^e(t) = P^T \Psi^t$$

die Darstellung

$$\langle A_h u_h, v_h \rangle = \sum_{t \in \tau} \langle R^T(t) A^e(t) R(t) u_h, v_h \rangle \quad \forall u_h, v_h \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Eine elementare Rechnung zeigt nun

Bemerkung 2. Gilt für eine Matrix A (2.18), so bestimmen sich die Matrixeinträge zu

$$A_{pq} = \sum_{t \in \tau} \sum_{i,k=1}^3 A^e(t)_{ik} \delta_{j(t,k)q} \delta_{j(t,i)p}, \quad p, q \in \mathcal{I}. \quad (2.19)$$

Demnach ist der erste Teil der Diskretisierungsmatrix (2.10)

$$(A_h(\lambda, 0))_{pq} = \sum_{t \in \tau} \lambda(t) \sum_{i,k=1}^3 A^e(t)_{ik} \delta_{j(t,k)q} \delta_{j(t,i)p}, \quad p, q \in \mathcal{I}.$$

Zur Diskretisierung der Neumann- bzw. Robin-Randbedingungen werden die Integrale der Art

$$\int_{\Gamma} u^h(s) ds$$

benötigt, wobei Γ ein Teil oder auch der gesamte Rand des Gebietes Ω ist und u^h eine Funktion aus dem Ansatzraum.

$$\int_{\Gamma} u(s) ds = \sum_{\substack{t \in \tau \\ \bar{b} \cap \Gamma \neq \emptyset}} \sum_{i=1}^3 u_i \int_{\bar{b}_i \cap \partial \bar{t}} \varphi_i(s) ds.$$

Für eine Box b , deren Rand teilweise mit dem Gebietsrand übereinstimmt (Randbox), liest man aus der Abbildung 2.4 die Numerierung der auf $\partial \bar{t}$ liegenden Boxränder ab: z.B. ist $\Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \bar{b}_2 \cap \partial \bar{t}$ usw. Nach der Ermittlung von

$$(M^\Gamma(t))_{kl} := \int_{\Gamma_k} \varphi_l(s) ds, \quad k = 4, \dots, 9, \quad l = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

bestimmt sich das letzte Integral aus (2.10) durch Aufsummierung passender Einträge von $M^\Gamma(t)$ (vgl. hierzu die Bemerkungen 7 und 8). Anzumerken ist noch, daß die Randintegrale nicht von der Wahl der Boxen abhängen, da sowohl das PB-Schema als auch das MD-Schema die Seitenmittelpunkte eines Dreieckes benutzt.

2.2 Steifigkeitsmatrix nach dem MD-Schema (Schwerpunktboxen)

Seien

$$\gamma_{12} := s - \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2}, \quad \gamma_{23} := s - \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3}{2}, \quad \gamma_{31} := s - \frac{\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^1}{2} \quad \text{mit } s = \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3}{3}$$

die Boxkanten (=Wege) und sei

$$J_t := \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

die Indexmenge dieser Kanten in t . J_t kann mit $\{1, 2, 3\}$ identifiziert werden (1 entspricht (1, 2) usw., vgl. Abbildung 2.4), d.h. $\gamma_1 = \gamma_{12}$, $\gamma_2 = \gamma_{23}$ und $\gamma_3 = \gamma_{31}$. Die Orientierung der Boxkanten ist so gewählt, daß für

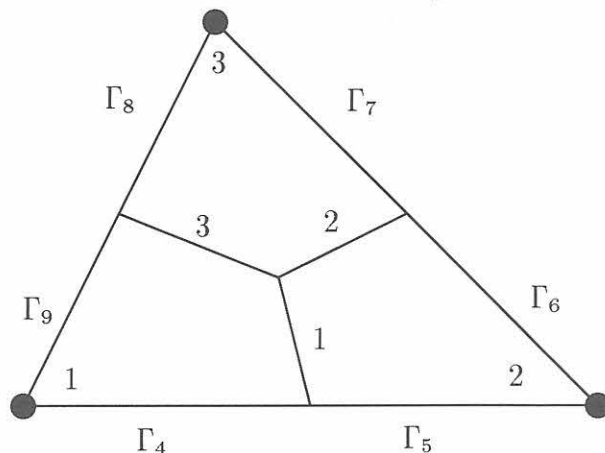


Abbildung 2.4: Lokale Numerierung der Knoten und Wege

die Normalenvektoren mit der Drehung D aus (A.5)

$$n_l = -\frac{1}{|\gamma_l|} D \gamma_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

gilt. Zur Berechnung der Elementmatrix sind die Integrale aus (2.17) zu berechnen:

$$\Psi_{l,k}^t := -\int_{\gamma_l^t} \frac{\partial}{\partial n_l} \varphi_k(s) ds, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Aufgrund des linearen Ansatzes ist $\frac{\partial}{\partial n_l} \varphi_k(s)$ auf t konstant. Es gilt mit den Bezeichnungen aus A.3 und der Identität (A.4)

$$\Psi_{l,k}^t = -|\gamma_l| \frac{\partial}{\partial n_l} \varphi_k = -|\gamma_l| \langle n_l, \nabla \varphi_k \rangle = -|\gamma_l| \langle B_t n_l, \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_k \rangle = \langle B_t D \gamma_l, \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_k \rangle. \quad (2.21)$$

In (A.5) wird $B_t D$ spaltenweise angegeben.

$$\Psi_{l,k}^t = (B_t D \gamma_l)^T \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_k = \det B_t \gamma_l^T [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1] \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_k$$

Die Gradienten der Basisfunktionen im Referenzdreieck sind

$$\widehat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

$$\Psi^t = \det B_t \begin{bmatrix} \langle \gamma_1, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_1, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_1, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_2, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_2, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_2, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_3, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_3, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \end{bmatrix}.$$

Entsprechend der Bemerkung 1 und Abb. 2.4 hat man

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

und die gesuchte Elementmatrix ist

$$\begin{aligned}
A^e(t) &= P^T \Psi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Psi^t \\
&= \det B_t \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \gamma_1, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_1, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_1, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_2, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_2, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_2, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_3, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_3, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \end{bmatrix} \\
&= \det B_t \begin{bmatrix} \langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_2 - \gamma_1, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_2 - \gamma_1, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_2 - \gamma_1, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \\ \langle \gamma_3 - \gamma_2, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \rangle & \langle \gamma_3 - \gamma_2, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle & \langle \gamma_3 - \gamma_2, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle \end{bmatrix}. \\
\gamma_1 - \gamma_3 &= \frac{\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^1}{2} - \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2} = \frac{\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2}{2} \\
\gamma_2 - \gamma_1 &= \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2} - \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3}{2} = \frac{\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3}{2} \\
\gamma_3 - \gamma_2 &= \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3}{2} - \frac{\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^1}{2} = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{2}.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Matrix reicht es aus, die Skalarprodukte

$$\langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle, \quad \langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle, \quad \langle \gamma_2 - \gamma_1, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle$$

zu berechnen, da $A^e(t)$ symmetrisch und jede Zeilensumme gleich Null ist.

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle &= \langle \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \rangle / 2 = -BA \cos(\gamma) / 2, \\
\langle \gamma_1 - \gamma_3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle &= \langle \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle / 2 = -AC \cos(\beta) / 2, \\
\langle \gamma_2 - \gamma_1, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle &= \langle \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \rangle / 2 = -BC \cos(\alpha) / 2.
\end{aligned}$$

Mit $a_t = B/C$, (A.3) und (2.15) ist

$$\det B_t = \frac{1}{\sqrt{1 - c_t^2} BC},$$

und deshalb mit (A.2)

$$\begin{aligned}
-\det B_t BA \cos \gamma &= -\frac{A}{2s_t C} \cos(\gamma) = \frac{1}{2s_t} (c_t - a_t), \\
-\det B_t AC \cos \beta &= -\frac{A}{2s_t B} \cos(\beta) = \frac{1}{2s_t} (c_t - a_t^{-1}), \\
-\det B_t BC \cos \alpha &= -\frac{1}{2s_t} \cos(\alpha) = \frac{-c_t}{2s_t}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$A_{\text{box}}^e(t) := \frac{1}{2\sqrt{1 - c_t^2}} \begin{bmatrix} a_t + \frac{1}{a_t} - 2c_t & c_t - a_t & c_t - \frac{1}{a_t} \\ c_t - a_t & a_t & -c_t \\ c_t - \frac{1}{a_t} & -c_t & \frac{1}{a_t} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

a_t, c_t entsprechend (2.14) und (2.15). Eine alternative Darstellung der Elementmatrix für ein $t \in \tau$ ist

$$A_{\text{box}}^e(t) := \frac{1}{a_t \sqrt{1 - c_t^2}} (W_{l,1} + a_t^2 W_{l,2} - 2a_t c_t W_{l,3})$$

mit dem Matrizen

$$W_{l,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{l,2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{l,3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 3. Sei die Funktion λ bzgl. der Triangulierung τ stückweise konstant, $A_h(\lambda, 0)$ die Steifigkeitsmatrix aus der Box-Methode mit linearen Ansatzfunktionen und $A^e(t)$ die Matrix aus (2.24). Es gilt

1.

$$A_h = \sum_{t \in \tau} \lambda(t) R^T(t) A_{\text{box}}^e(t) R(t),$$

2. $A_{\text{box}}^e(t)$ ist positiv-semidefinit mit $\ker A_{\text{box}}^e(t) = (1, 1, 1)^T$,

3. $A_h = L_h$, wobei L_h die Steifigkeitsmatrix der Finite-Elemente-Diskretisierung mit linearen Ansatz- und Testfunktionen ist.

Beweis. 1. ist klar. Durch Berechnung der Eigenwerte erhält man 2. Die Gleichheit der Steifigkeitsmatrizen bzgl. FE-Diskretisierung mit linearen Ansatz- und Testfunktionen und der hier betrachteten Box-Methode wird in Hackbusch [9] gezeigt \square

2.3 Steifigkeitsmatrix nach dem PB-Schema (Voronoi-Diagramm)

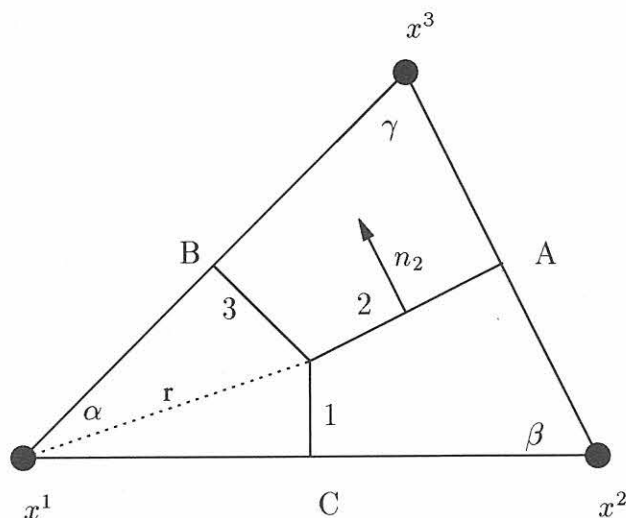


Abbildung 2.5: Lokale Numerierung der Knoten und Boxkanten (PB-Schema)

Vorausgesetzt sei nun, daß kein Dreieckswinkel größer als $\pi/2$ ist. Die Bezeichnungen der Abbildung 2.5 entsprechen denen in Abbildung 2.4 für den Fall der Schwerpunktknoten. Gleichung (2.21) zur Bestimmung der Randintegrale (2.17) gilt hier sinngemäß. Da die Boxränder aus den Mittelsenkrechten konstruiert worden sind, gilt für die Normalenvektoren:

$$n_1 = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{C}, \quad n_2 = \frac{\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2}{A}, \quad n_3 = \frac{\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3}{B},$$

wobei A, B und C die entsprechenden Seitenlängen sind. Für das Bild von n_1 unter B_t ist dann

$$B_t n_1 = B_t(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)/C = \hat{x}^1/C = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und genauso für die beiden anderen Normalenvektoren

$$B_t n_2 = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_t n_3 = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gradienten (2.22) liefern

$$\Psi^t = - \left(|\gamma_l| \langle B_t n_l, \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_k \rangle \right)_{l,k} = - \begin{bmatrix} |\gamma_1|/C & 0 & 0 \\ 0 & |\gamma_2|/A & 0 \\ 0 & 0 & |\gamma_3|/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe des Sinussatzes (vgl. Abbildung 2.5)

$$2r = \frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

bestimmen sich die Längen $|\gamma_i|$, $i = 1, 2, 3$ zu

$$\begin{aligned} |\gamma_1|^2 &= r^2 - (C/2)^2 = \frac{C^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) = \frac{C^2}{4} \cot^2 \gamma \\ |\gamma_2|^2 &= r^2 - (A/2)^2 = \frac{A^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) = \frac{A^2}{4} \cot^2 \alpha \\ |\gamma_3|^2 &= r^2 - (B/2)^2 = \frac{B^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) = \frac{B^2}{4} \cot^2 \beta. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$ sind die Kotangenswerte $\cot \alpha, \cot \beta$ und $\cot \gamma$ positiv. Es ist dann

$$\Psi^t = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cot \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cot \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Numerierungen in Abb. 2.5 und 2.4 entsprechen einander, somit kann die Matrix P aus (2.23) übernommen werden. Insgesamt:

$$\begin{aligned} A^e(t) &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cot \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cot \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cot \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot \gamma & 0 & -\cot \beta \\ -\cot \gamma & \cot \alpha & 0 \\ 0 & -\cot \alpha & \cot \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cot \gamma - \cot \beta & \cot \gamma & \cot \beta \\ \cot \gamma & -\cot \gamma - \cot \alpha & \cot \alpha \\ \cot \beta & \cot \alpha & -\cot \alpha - \cot \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Satz 1. Für alle $t \in \tau$ sei kein Winkel größer als $\pi/2$. Dann ist die Elementmatrix zur Steifigkeitsmatrix bzgl. des PB-Schemas nach Definition 2 gegeben durch

$$A^e(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot \gamma + \cot \beta & -\cot \gamma & -\cot \beta \\ -\cot \gamma & \cot \gamma + \cot \alpha & -\cot \alpha \\ -\cot \beta & -\cot \alpha & \cot \alpha + \cot \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi. \quad (2.25)$$

Der konstante Vektor $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0. Die beiden anderen Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = \cot \beta + \cot \gamma + \cot \alpha \pm \sqrt{(\cot \beta + \cot \gamma + \cot \alpha)^2 - 3}$$

Anmerkung 1: Wäre ein Winkel größer als $\pi/2$, so liegt der Mittelpunkt des Dreiecks selbst nicht mehr im Dreieck, es entsteht die Situation der Abbildung 2.6. Dem Knoten \mathbf{x} läßt sich zwar noch eine Box b zuordnen, aber diese Box liegt dann teilweise im Dreieck t_2 , obwohl dort die Basisfunktion zum Knoten \mathbf{x} verschwindet. Überraschenderweise findet man

Bemerkung 4. Für jedes Dreieck $t \in \tau$ einer zulässigen Triangulierung τ sind die Elementmatrizen aus (2.25) und (2.24) identisch.

Beweis. Seien $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ mit $\pi = \alpha + \beta + \gamma$. Z.z. ist

1. $-\cot \gamma = (c_t - a_t)/s_t$. Mit dem Sinussatz, $\sin(\pi - x) = \sin x$ und dem Additionstheorem

$$\cot x \pm \cot y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$$

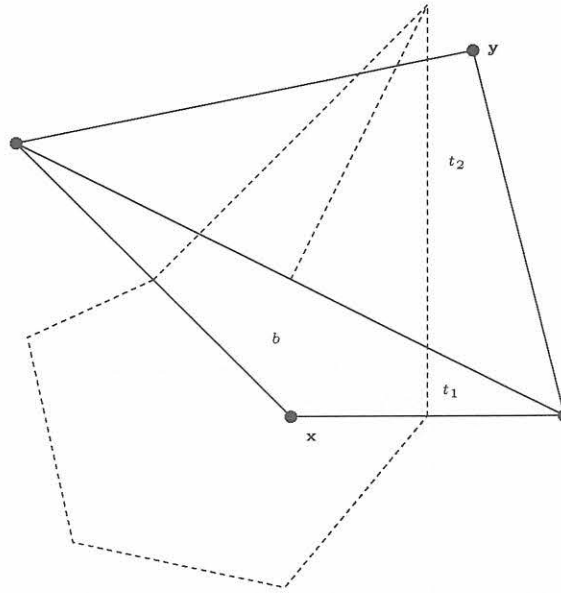


Abbildung 2.6: PB-Box für ein Dreieck mit $\alpha > \pi/2$.

gilt

$$\begin{aligned} (c_t - a_t)/s_t &= \cot \alpha - \frac{B}{C \sin \alpha} = \cot \alpha - \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} = \cot \alpha - \frac{\sin(\pi - \gamma - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} \\ &= \cot \alpha - \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} = \cot \alpha - (\cot \gamma + \cot \alpha) = -\cot \gamma. \end{aligned}$$

2. $-\cot \beta = (c_t - a_t^{-1})/s_t$. Da $a_t^{-1} = C/B$ ergibt sich diese Gleichung sofort aus 1., wenn dort γ und β vertauscht werden.
3. $-\cot \alpha = -c_t/s_t$ ist trivial

□

Anmerkung 2: So gesehen kann die Einschränkung auf Dreiecke mit einem größten Winkel kleiner als $\pi/2$ entfallen. Bemerkung 4 erhält man auch, indem der Beweis in Hackbusch [9] zur Gleichheit der Steifigkeitsmatrizen zur FEM-Diskretisierung und für das MD-Schema auf das PB-Schema ausgedehnt wird.

Trotzdem sind die beiden Box-Diskretisierungen eigenständige Verfahren, die zwar zu identischen Steifigkeitsmatrizen führen, sich aber in den Massematrizen unterscheiden, d.h es ergeben sich im allgemeinen unterschiedliche Gleichungssysteme.

2.4 Integrale für Randboxen

Ist $b \in \mathcal{B}$ eine Randbox, wie z.B. in den Abbildung 2.1 oder 2.2, so stimmen teilweise Dreiecksseite und Rand des Bilanzbereiches überein. Zur Berechnung der Bilanz über so eine Box sind die Kurvenintegrale

$$J_{kl} = - \int_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n_{\text{out},k}} \varphi_l(s) ds, \quad k = 4, \dots, 9, \quad l = 1, 2, 3.$$

zu bestimmen (Notation: vgl. Abbildung 2.4). Wie für die Boxkanten im Inneren von t hat man

$$J_{kl} = \int_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n_{\text{out},k}} \varphi_l(s) ds = |\gamma_k| \langle n_k, \nabla \varphi_l \rangle = |\gamma_k| \langle B_t n_k, \widehat{\nabla} \varphi_l \rangle.$$

Analog zu den Berechnungen in den beiden vorherigen Abschnitten 2.2 und 2.3 zeigt man die

Bemerkung 5.

$$J_{kl} = \frac{1}{2a\sqrt{1-c^2}} \begin{bmatrix} 1-2ac & 2ac & -1 \\ 1-2ac & 2ac & -1 \\ -4-4a^2+8ac & 4+4a^2-4ac & -4ac \\ -4-4a^2+8ac & 4+4a^2-4ac & -4ac \\ a^2+2ca & -a^2 & -2ac \\ a^2+2ca & -a^2 & -2ac \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

bzw.

$$J_{kl} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot \beta & \cot \alpha & -\cot \alpha - \cot \beta \\ \cot \beta & \cot \alpha & -\cot \alpha - \cot \beta \\ 4(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) & 6 \cot \alpha + 4 \cot \beta + 4 \cot \gamma & -2 \cot \alpha \\ 4(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) & 6 \cot \alpha + 4 \cot \beta + 4 \cot \gamma & -2 \cot \alpha \\ -\cot \gamma - 2 \cot \alpha & -\cot \gamma - \cot \alpha & -\cot \alpha \\ -\cot \gamma - 2 \cot \alpha & -\cot \gamma - \cot \alpha & -\cot \alpha \end{bmatrix}.$$

2.5 Massematrix

Die Bestimmung der Volumenintegrale (2.9) erfolgt analog zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix, d.h auch hier gilt die Darstellung

$$M_h = \sum_{t \in \tau} \rho(t) c(t) R^T(t) M^e(t) R(t) \quad (2.27)$$

mit der Elementmatrix

$$M^e(t) = \left(\int_{b_i \cap t} \varphi_j(\mathbf{x}) dx \right)_{i,j=1}^3,$$

falls die Materialeigenschaften auf einem Dreieck als konstant angenommen werden. Sie bestimmt sich zu

$$M^e(t) = \frac{2|t|}{216} \begin{bmatrix} 22 & 7 & 7 \\ 7 & 22 & 7 \\ 7 & 7 & 22 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Bemerkung 2 zeigt

$$M_{pq} = \sum_{t \in \tau} \rho(t) c(t) \sum_{i,k=1}^3 M^e(t)_{ik} \delta_{j(t,k)q} \delta_{j(t,i)p}, \quad p, q \in \mathcal{I}.$$

Bemerkung 6. Sei f der Quellterm in (2.1) und $f_h(t)$ der entsprechende Knotenvektor. Wird in (2.27) $c(t) \rho(t) \equiv 1$ gesetzt, so kann das Volumenintegral in (2.11) mittels $M_h f_h(t)$ bestimmt werden.

Beweis. Die Interpolierende $f^h(x, t) := \sum_j f(\mathbf{x}^j, t) \varphi_j(\mathbf{x})$ ergibt gerade die Quadraturformel

$$(f_h^*(t))_i = \sum_j (f_h(t))_j \int_{b_i} \varphi_j(\mathbf{x}) dx$$

□

Die Berechnung von $A_h(0, \alpha)$ und des ersten Teils in (2.11) erfordert die Auswertung von Integralen der Art $\int_\gamma \varphi(s) ds$ über passende Boxkanten γ und Basisfunktionen φ . Mit den Bezeichnungen der Abbildung 2.4 sei

$$M_{kl}^\Gamma(t) = \int_{\gamma_k} \varphi_l(s) ds, \quad k = 4, \dots, 9, \quad l = 1, 2, 3.$$

Für die Randboxen ergeben sich aus den Werten für das Referenzdreieck

$$M^\Gamma(T) := \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

der Beziehung (A.3) und den entsprechenden Vorfaktoren (A, B und C die Seitenlängen aus Abb. A.1):

$$M^\Gamma(t) = \left(\frac{|\gamma_k|}{|\bar{\gamma}_k|} M_{kl}^\Gamma(T) \right)_{kl} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3C & C & 0 \\ C & 3C & 0 \\ 0 & 3A & A \\ 0 & A & 3A \\ B & 0 & 3B \\ 3B & 0 & B \end{bmatrix}.$$

Sei

$$\beta : \mathcal{I} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \beta(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x}^i \in \Gamma_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Abbildung, mit der entschieden werden kann, ob der Knoten \mathbf{x}^i ein (Robin-) Randknoten ist und

$$\eta : \{1, 2, 3\}^2 \rightarrow \{\{1\}, \dots, \{6\}, \{6, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\},$$

$$\eta(i, j) = \begin{cases} \{1\} & \text{für } i = 1 \text{ und } j = 2 \\ \{2\} & \text{für } i = 2 \text{ und } j = 1 \\ \{3\} & \text{für } i = 2 \text{ und } j = 3 \\ \{4\} & \text{für } i = 3 \text{ und } j = 2 \\ \{5\} & \text{für } i = 3 \text{ und } j = 1 \\ \{6\} & \text{für } i = 1 \text{ und } j = 3 \\ \{6, 1\} & \text{für } i = 1 \text{ und } j = 1 \\ \{2, 3\} & \text{für } i = 2 \text{ und } j = 2 \\ \{4, 5\} & \text{für } i = 3 \text{ und } j = 3 \end{cases}$$

eine Abbildung, die einem Paar von lokalen Knotennummern entsprechend der Abbildung 2.4 Boxkantenindizes zuordnet: die lokalen Nummern $i = 1$ (lokale Boxnummer) und $j = 2$ (lokale Ansatznummer), erhalten die Kante γ_1 usw. Die Indizes sind dabei gegenüber der Abbildung 2.4 um 3 verschoben um die "richtige" Zeile in der Matrix $M^\Gamma(t)$ auszuwählen.

Bemerkung 7.

$$\begin{aligned} A_h(0, \alpha)_{pq} &= \int_{\partial b_p \cap \Gamma} \alpha(s) \phi_q(s) ds \\ &= \beta(p) \beta(q) \sum_{\substack{t \in \tau \\ \bar{t} \cap \Gamma \neq \emptyset}} \alpha(t) \sum_{i,k=1}^3 \delta_{j(t,k)q} \delta_{j(t,i)p} \sum_{j \in \eta(i,k)} M_j^\Gamma(t), \quad p, q \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Sei $T_{\infty, h}(t)$ der Knotenvektor zu

$$\bar{T}_\infty(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} T_\infty(\mathbf{x}, t) & \text{falls } \mathbf{x} \in \Gamma_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(diese Fortsetzung hat nur formale Gründe: in der nächsten Gleichung kann sich die Summe über alle Indizes $i \in \mathcal{I}$ erstrecken).

Bemerkung 8. Das erste Integral im Quellterm (2.11) bestimmt sich zu

$$\int_{\partial b_p \cap \Gamma} \alpha(s) T_\infty(s, t) ds = \sum_{i \in \mathcal{I}} A_h(0, \alpha)_{pi} (T_{\infty, h}(t))_i, \quad p \in \mathcal{I}.$$

Damit ist

$$f_h^*(t) = A_h(0, \alpha) T_{\infty, h}(t) + M_h f_h(t). \quad (2.30)$$

2.6 Triangulierung mit dem Programm TRIANGLE

Das Programm TRIANGLE von Richard Shewchuk [19] liefert ausgehend von einem 2D-Polygonzug eine Delaunay-Triangulierung des beschriebenen Gebietes. Die Optionen lassen eine weitgehende Manipulation der Triangulierung zu. Hierzu, zur Beschreibung der Eingabe- und Ausgabeformate und zu dem Copyright sei auf die TRIANGLE-Dokumentationen verwiesen. Als Bezugsquelle kann die Web-Adresse

<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>

dienen.

Zur Illustrierung ein Beispiel: Das Gebiet Ω sei durch den Polygonzug der Abbildung 2.7(a) gegeben.

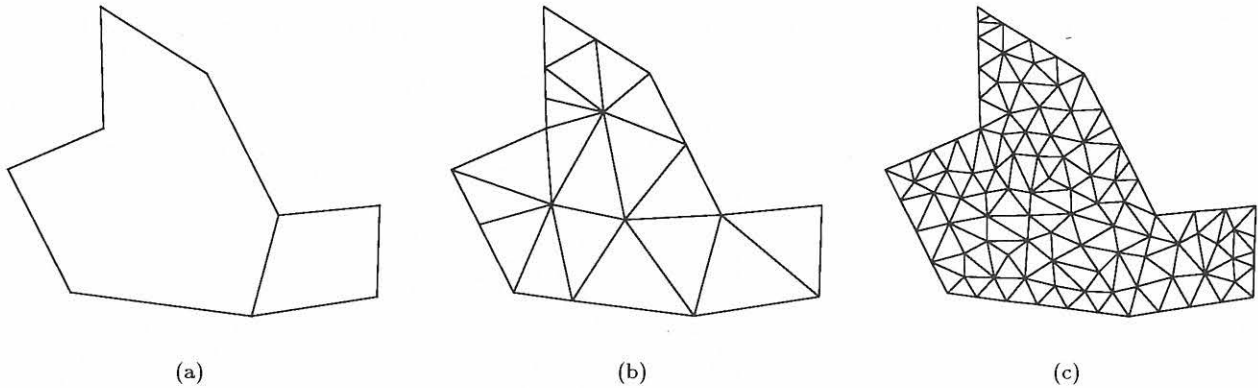


Abbildung 2.7: Polygonzug mit Materialgrenze.

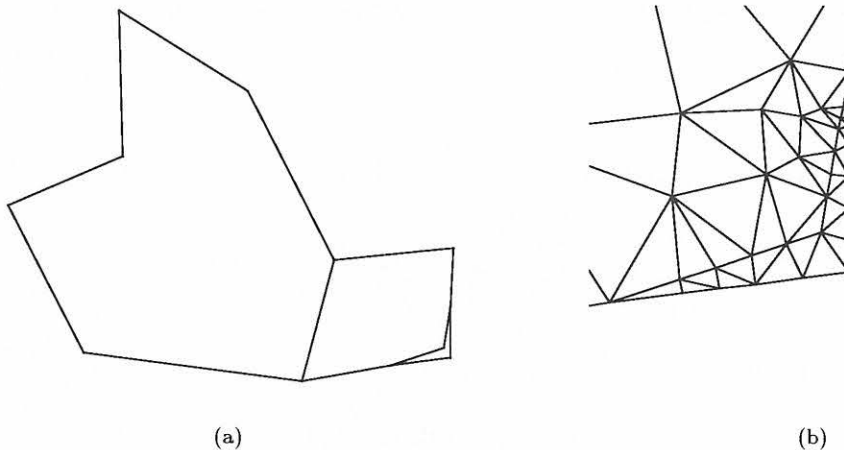


Abbildung 2.8: rechte untere Ecke besser aufgelöst.

Die in Ω verlaufende Linie sei dabei eine Materialgrenze. TRIANGLE mit der Qualitätsoption `-q20`, d.h kein Dreieckswinkel ist kleiner als 20 Grad, und einer Forderung an die Dreiecksfläche (`-a`-Option) ergibt das Netz der Abbildung 2.7(b). Um zu einer feineren Triangulierung zu gelangen, ist nur der Parameter der Flächenoption zu verkleinern (Abbildung 2.7(c)). Die Materialgrenze bleibt bei allen Triangulierungen erhalten.

Durch Einfügen weiterer Linien in den Ausgangspolygonzug ist es möglich einen besonders interessierenden Bereich des Gebietes feiner aufzulösen. Abbildung 2.8(b) zeigt einen Zoom in die rechte untere Ecke.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß Konvertierungsprogramme nötig sind, um die Ausgabeformate von TRIANGLE für eigene Zwecke zu nutzen. Ein eindrucksvolles Beispiel der Leistungsfähigkeit des Programmes ist in den Abbildungen 2.9 - 2.11 aufgeführt. Ausgehend von der Geometrie eines Hochlochziegels mit Schlitzloch (in der Draufsicht), die als `dx`-File vorliegt, werden über ein Konvertierungsprogramm die Polygonzüge

aus Abb. 2.9 gewonnen. Die Wärmeleitfähigkeiten der beteiligten Materialien (Außen- und Innenputz, Ton und die Luft in den Waben) können ins Eingabefile aufgenommen werden, so daß nach der Triangulierung jedes Dreieck einem Material zugeordnet ist. Der Aufruf von `triangle` mit der Option `-q20` führt auf die Triangulierung der Abb. 2.10 mit 10601 Dreiecken und 5377 Knoten (für einen quadratischen Ansatz erhält man 20024 Knoten). Abbildung 2.11 zeigt das Ergebnis mit verkleinerter Flächenoption (31539 Dreiecke mit 16067 Knoten; im quadratischen Fall 63011 Knoten).

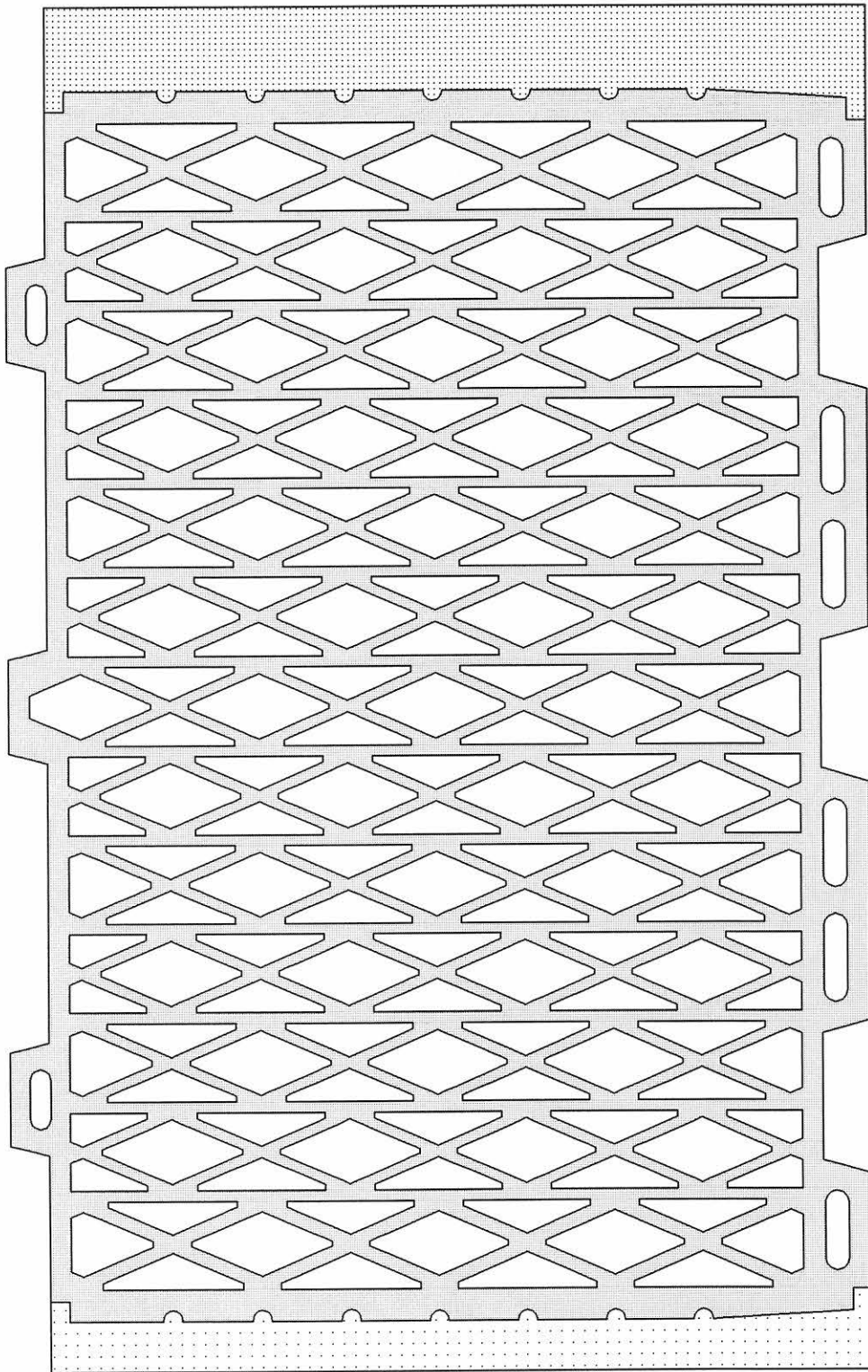


Abb. 2.9: Hochlochziegel mit Schlitzlochung und Putzschichten.

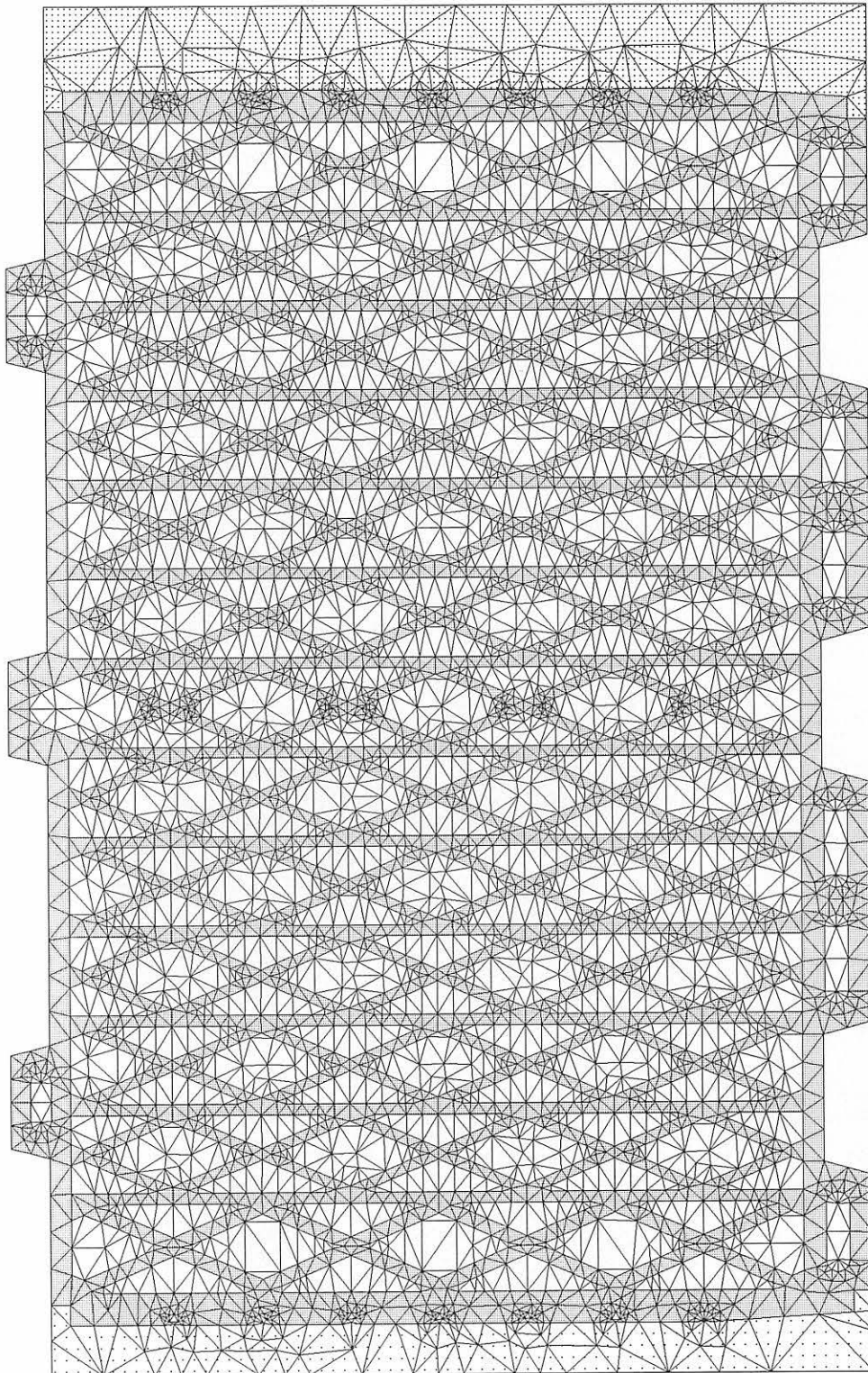


Abb. 2.10: Triangulierung Hochlochziegel mit Qualitätsoption -q20.

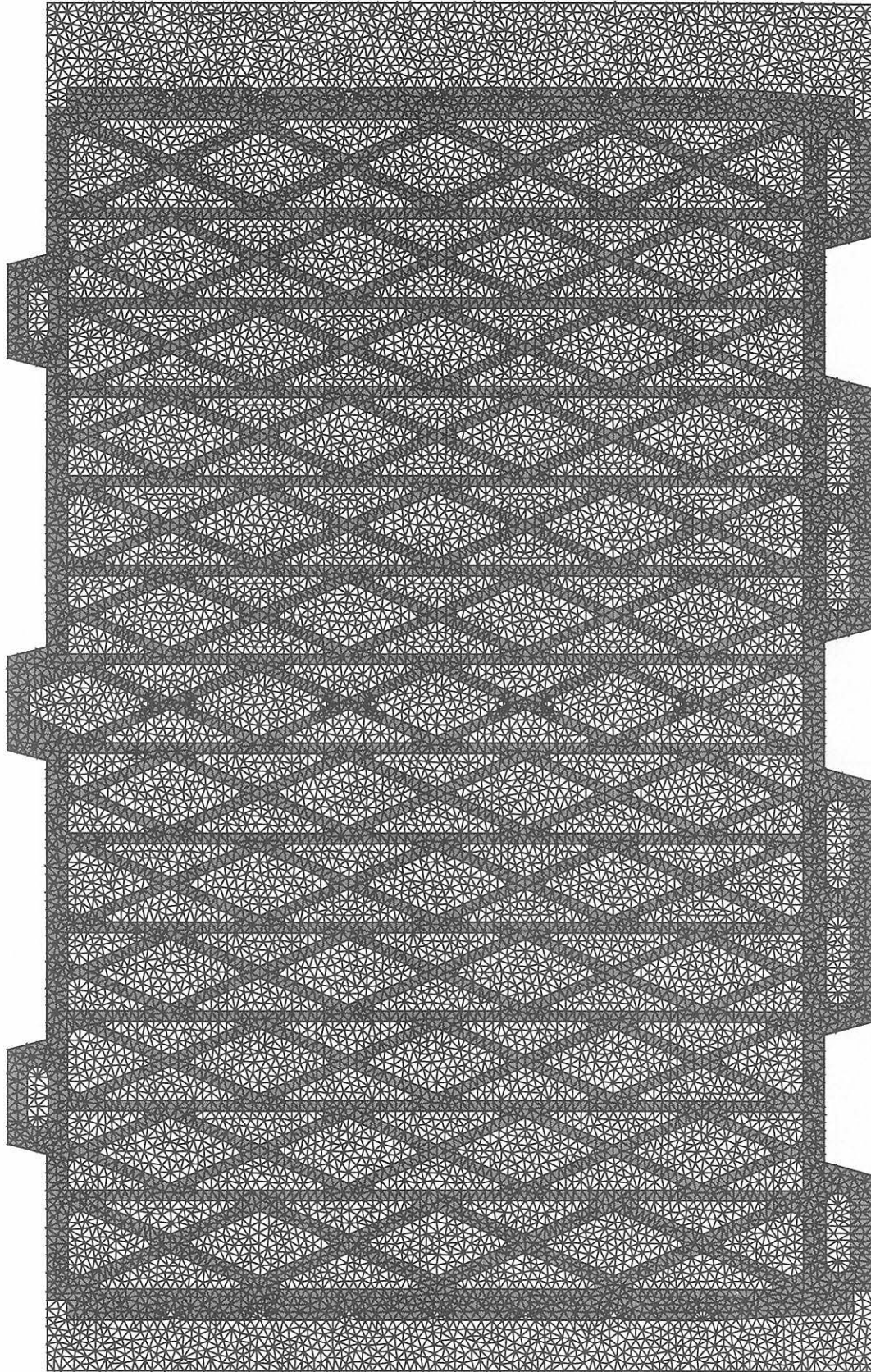


Abb. 2.11: Triangulierung Hochlochziegel mit Qualitäts- und Flächenoption.

3

Mehrgitterverfahren

Aus der Diskretisierung der stationären Wärmeleitungsgleichung (2.1) sei das lineare Gleichungssystem

$$A_l x_l = f_l \tag{3.1}$$

gegeben. x_l ist dabei der zum Galerkin-Ansatz

$$T_l(\mathbf{x}) = \sum_i (x_l)_i \phi_i(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

gehörende Knotenvektor (ϕ_i eine Knotenbasis). Da das Gleichungssystem (3.1) aus der Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung (2.1) mittels Finite-Volumen-Verfahren hervorgeht, ist die Systemmatrix schwachbesetzt, d.h. in jeder Zeile treten nur wenige Einträge auf, die von Null verschieden sind.

Ist die Anzahl der Unbekannten in diesem Gleichungssystem nicht zu groß, so können zur Auflösung sowohl direkte als auch iterative Methoden benutzt werden. Eine naive Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens, d.h. Informationen über die Struktur der Matrix A_l werden nicht benutzt, erfordert einen Rechenaufwand der proportional zu n^3 -Operationen ist. Weiterhin vergrößert sich mit wachsender Anzahl der Unbekannten nicht nur die Rechenzeit erheblich, sondern auch der Speicherbedarf durch den sogenannten "fill in". Detaillierte Beschreibungen des Gaußschen Verfahrens und auch effizientere Varianten finden sich z.B. in Bunse & Bunse-Gerstner [2] oder auch in Duff, Erisman & Reid [4].

Iterative Methoden zur Auflösung von (3.1) bestimmen ausgehend von einem Startvektor $x_l^{(0)}$, im Falle der Konvergenz des Verfahrens, eine Folge $x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, \dots$ von Näherungen zur exakten Lösung:

$$x_l^{(m)} \rightarrow x_l, \quad m \rightarrow \infty.$$

Jedes lineare iterative Verfahren kann durch die Vorschrift

$$x_l^{(m+1)} = M_l x_l^{(m)} + N_l f_l, \quad m \geq 0, \tag{3.3}$$

beschrieben werden, wobei die Matrix M_l die Iterationsmatrix ist. Ihr kommt entscheidende Bedeutung zu, denn das Verfahren (3.3) konvergiert genau dann, wenn der Spektralradius von M_l , das ist das Maximum der Beträge der Eigenwerte von M_l , kleiner als eins ist:

$$(3.3) \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \rho(M_l) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } M_l\} < 1.$$

Der Wert $\rho(M_l)$, die sogenannte *Konvergenzrate*, erlaubt nicht nur zu entscheiden, ob ein lineares Verfahren konvergent ist, sondern informiert auch über die Konvergenzgeschwindigkeit. Ist $e_l^{(m)} := x_l^{(m)} - x_l$ der Fehler bzgl. der m -ten Iterierten, so gilt für den nächsten Fehler die Normabschätzung

$$\|e_l^{(m+1)}\| \leq \zeta_m \|e_l^{(m)}\|,$$

mit einer *Kontraktionszahl* ζ_m , die sich asymptotisch der Konvergenzrate annähert (hierzu sei auf Hackbusch [10] verwiesen).

Im Falle des Jacobi-Verfahrens und auch für das Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung der Gleichung (3.1) ist die Konvergenzrate stark von der Dimension $n = \dim A_l$ der Systemmatrix abhängig. Ist für ein zweidimensionales Problem h_l der Diskretisierungsparameter (typischer Abstand zweier Knoten der Diskretisierung), so

ergibt sich die Konvergenzrate in der Größenordnung $1 - \mathcal{O}(h_l^2)$, d.h. je kleiner die Schrittweite h_l ist, also um so mehr Knoten vorhanden sind, desto näher liegt $\rho(M_l)$ bei eins. Es ist also nur eine langsame Konvergenz zu erwarten. Eine Verbesserung der Situation ergibt sich beim Einsatz des optimalen SOR-Verfahrens oder einer Variante des cg-Verfahrens¹. Eine ausführliche Diskussion dieser Verfahren findet sich wiederum in Hackbusch [10] oder auch Bunse[2]. Aber auch hier ist Konvergenzrate i.a. immer noch von der Größenordnung $1 - \mathcal{O}(h_l)$.

Mehrgitterverfahren sind hier eindeutig überlegen, da sie für die hier betrachtete Situation, das Gleichungssystem stammt aus der Diskretisierung einer elliptischen Differentialgleichung, unter gewissen, hinlänglich allgemeinen Bedingungen, eine von der Schrittweite h_l , bzw. von der Anzahl der Unbekannten, *unabhängige* Konvergenzrate sichern. Der Aufwand zur Lösung von (3.1) ist dann typischerweise in der Größenordnung $\mathcal{O}(n \log(n))$ (vgl. Hackbusch [10],[11]).

Ein wesentlicher Aspekt des Mehrgitterverfahrens ist das Vorhandensein einer Hierarchie von (Ansatz- oder Finite-Element-) Räumen

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l. \quad (3.4)$$

Die Galerkin-Lösung T_i aus (3.2) liege dabei in V_i . In den "kleineren" Räumen V_i , $i = 0, \dots, l-1$, werden Hilfsprobleme gelöst. Die Forderung (3.4) spiegelt sich gerade in der Diskretisierung bzw. in einem entsprechenden Programm wider: es muß eine Struktur vorhanden sein, die den Zugriff auf die Räume V_i , $i = 0, \dots, l$, und Abbildungen

$$P_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}, \quad R_{i+1} : V_{i+1} \longrightarrow V_i, \quad i = 0, \dots, l-1$$

zwischen diesen erlaubt. Konkret repräsentieren unterschiedlich feine, geschachtelte Gitter

$$\Omega_{h_0} \subset \Omega_{h_1} \subset \dots \subset \Omega_{h_l}$$

die Ansatzräume V_i und Rechtecksmatrizen die Transferabbildungen P_i und R_i .

Hat man die Absicht in einem Programmpaket, das ein Pre- und Postprocessing, sowie (Eingitter-) Algorithmen zur Lösung der Gleichung (3.1) enthält, die Vorteile des Mehrgitterverfahrens zu nutzen, so stößt die Integration der Struktur (3.4) auf erhebliche programmiertechnische Probleme oder ist sogar völlig unmöglich, da z.B. Eingriffe in den Source-Code (etwa bei kommerziellen Produkten) nicht erlaubt sind. Einen Ausweg bietet hier das *algebraische Mehrgitterverfahren*. Dabei werden die erforderlichen Abbildungen und Grobgitter nur aus der Kenntnis der Diskretisierungsmatrix A_l konstruiert (vgl. 3.2). Zwar zeigt das algebraische Mehrgitterverfahren ähnliche Konvergenzeigenschaften wie das "gewöhnliche" Mehrgitterverfahren, jedoch ist im Gegensatz zu diesem keine Konvergenztheorie bekannt.

3.1 Zum klassischen Mehrgitterverfahren

Die Diskretisierung der elliptischen Randwertaufgabe (2.1) auf einem vorgegebenen Gitter

$$\Omega_H := \{\mathbf{x}^i : \mathbf{x}^i \text{ ist Knoten der Diskretisierung}\}$$

ergebe ein Gleichungssystem

$$A_H x_H = f_H \quad (3.5)$$

mit positiv definiten Matrix A_H . Durch Halbierung der Schrittweite H , d.h. Verfeinerung des Gitters Ω_H , erhält man ein weiteres Gleichungssystem, das die gleiche Struktur wie (3.5), jedoch die 4-fache Dimension, aufweist. Die Approximation der Lösung von (2.1) durch den Ansatz (3.2) verbessert sich, jedoch wächst der Aufwand zur Lösung des entsprechenden Gleichungssystems.

Sei nun x_h^* die Lösung des Gleichungssystems $A_h x_h = f_h$ im Gitter Ω_h und \tilde{x}_h eine Näherung der Lösung. Es gilt somit

$$A_h(\tilde{x}_h - x_h^*) = A_h \tilde{x}_h - f_h := d_h.$$

Der Vektor d_h ist der Defekt und

$$e_h := \tilde{x}_h - x_h^*$$

der Fehler zwischen Näherung und Lösung. Insbesondere folgt die *Defektgleichung*

$$A_h e_h = d_h, \quad \text{bzw.} \quad e_h = A_h^{-1} d_h. \quad (3.6)$$

¹Das cg-Verfahren ist kein lineares Iterationsverfahren (trotzdem kann hier eine Konvergenzrate angegeben werden).

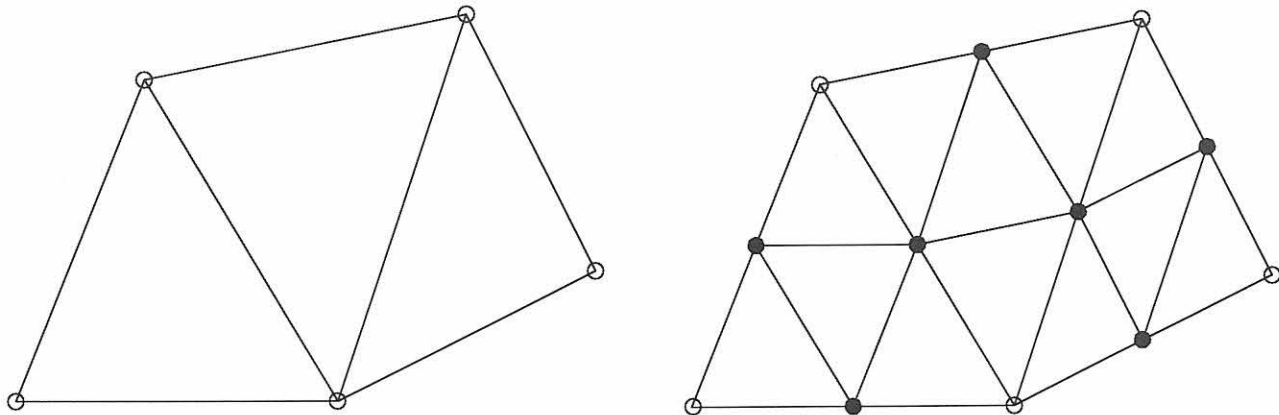


Abbildung 3.1: links: Gitter Ω_H , Grobgitterpunkte: o; rechts: die Verfeinerung Ω_h mit $h = H/2$, Feingitterpunkte: o und •

Ist durch Lösung des Ersatzgleichungssystems (3.6) der Fehler e_h bekannt, so ergibt sich die gesuchte Lösung sofort durch

$$x_h^* = \tilde{x}_h - e_h.$$

Im Vergleich zur Ausgangssituation ist nichts gewonnen, da die Lösung von (3.6) genauso schwierig (aufwendig) ist, wie die der Gleichung $A_h x_h = f_h$. Der entscheidende Gedanke ist nun, die Defektgleichung auf das grobe Gitter Ω_H mittels einer Abbildung² $r : \Omega_h \rightarrow \Omega_H$ (Restriktion) zu übertragen:

$$A_H e_H = (r d_h), \tag{3.7}$$

und nach e_H aufzulösen: $e_H = A_H^{-1} r d_h$. Der Defekt d_h wird also (in geeigneter Weise) auf das grobe Gitter "transportiert". Die anschließende Lösung des Gleichungssystems (3.7) ist weniger aufwendig, als die der ursprünglichen Gleichung ($\dim A_H = (\dim A_h)/4$). Eine neue Näherung ergibt sich nun durch

$$x_h^{\text{new}} := \tilde{x}_h - p e_H, \tag{3.8}$$

wobei die Abbildung p (die Prolongation) die Korrektur e_H auf das feine Gitter überträgt. Sind r_h und p_h die Matrixdarstellungen der Restriktion und Prolongation, so wird häufig

$$r_h = \sigma p_h^T \tag{3.9}$$

gewählt, dabei ist σ ein Skalierungsfaktor. Implizit geht hier die Wahl der Diskretisierung (Finite-Elemente-Methode, Finite-Differenzen-Verfahren) und der Skalarprodukte für die Vektoren auf den verschiedenen Gittern ein.

Ausgehend vom groben Gitter Ω_H läßt sich die Menge der Vektoren X_h (auch Menge der Gitterfunktionen genannt) zum feinen Gitter Ω_h in zwei Kategorien einordnen (vgl. Abbildung 3.1):

1. die Menge der hochfrequenten Gitterfunktion $X_{h,\text{oz}}$: "schlechte" Darstellung auf dem groben Gitter und
2. die Menge der niederfrequenten Gitterfunktionen $X_{h,\text{glatt}} = X_h \setminus X_{h,\text{oz}}$: "gute" Darstellung auf dem groben Gitter.

Ein Vektor $x_h \in X_h$ kann also in hoch- und niederfrequente Anteile zerlegt werden

$$x_h = \sum_{e_i \in X_{h,\text{glatt}}} \alpha_i e_i + \sum_{e_j \in X_{h,\text{oz}}} \alpha_j e_j.$$

Da es (hochfrequente) Feingitterfunktionen gibt, die das grobe Gitter nicht "sieht"³, bildet das durch (3.8) gegebene Verfahren i.a. keine konvergente Iteration. Die folgende Beobachtung hilft an dieser Stelle entscheidend weiter: Klassische Iterationsverfahren, wie etwa das Gauß-Seidel-Verfahren, haben gerade Probleme die niederfrequenten Anteile in der Lösung zu erfassen, reduzieren aber die hochfrequenten Fehleranteile gut. Eine Kombination aus klassischem Iterationsverfahren und der Grobgitterkorrektur (3.8) ergibt das Zweigitterverfahren:

² Ω_h und Ω_H und stehen hier stellvertretend für den entsprechenden Raum der Gitterfunktionen, vgl [10].

³genauer: der Kern der Abbildung $p_h A_H^{-1} r_h$ ist nicht trivial

Ausgehend von einer Näherung $x^{(i)}$ kann ein Schritt (also die Berechnung der nächsten Iterierten) im eben beschriebenen Zweigitterverfahren (Algorithmus 2) auch als lineares Iterationsverfahren

$$x^{(i+1)} = S_h x^{(i)} - p_h A_H^{-1} r_h (A_h S_h x_h^{(i)} - \tilde{f}_h)$$

geschrieben werden. Die Iterationsmatrix des Zweigitterverfahrens ist also

$$M_h^{\text{ZGM}} := (I_h - p_h A_H^{-1} r_h A_h) S_h.$$

Mit Hilfe von Annahmen über die Regularität der Lösung⁴ der zu Grunde liegenden partiellen Differentialgleichung, weiterer Voraussetzungen an die Diskretisierung (geschachtelte Unterräume, Approximationseigenschaften) und an die Glättungiteration \mathcal{S}_l kann gezeigt werden, daß der Spektralradius der Iterationsmatrix M_h^{ZGM} *unabhängig* von der Schrittweite h ist:

$$\rho(M_h^{\text{ZGM}}) \leq \zeta(\alpha) < 1, \quad \text{f.a. } \alpha \geq \alpha_0.$$

Das Verfahren 2 konvergiert demnach, unter hier nicht näher genannten Voraussetzungen, unabhängig von h . Der Übergang vom Zweigitter- zum Mehrgitterverfahren ist jetzt nur noch ein kleiner Schritt: das exakte Lösen der Grobgittergleichung wird nun wiederum durch ein Zweigitterverfahren ersetzt, usw. Die sehr guten Konvergenzeigenschaften bleiben dabei erhalten und es zeigt sich, daß der Aufwand optimal ist ([10]). Das Unterprogramm, das einen Mehrgitterschritt ausführt kann folgendermaßen beschrieben werden

Algorithmus 3 mgmstep (var x_ν, f_ν :Gp; ν :integer);

```

if  $\nu = 0$  then
     $x_0 := A_0^{-1} f_0;$                                      { Grobgitterlösung }
else
     $x_\nu := \mathcal{S}_\nu^{\alpha_1}(x_\nu, f_\nu);$                    {  $\alpha_1$  Glättungsschritte }
     $d_\nu := A_\nu x_\nu - f_\nu;$                                { Defekt }
     $d_{\nu-1} := r_\nu d_\nu;$                                  { Restriktion }
     $e_{\nu-1} := 0;$ 
    for  $k = 0$  to  $\gamma$  do
        mgm ( $e_{\nu-1}, d_{\nu-1}, \nu - 1$ );                 {  $\gamma$ -facher rekursiver Aufruf }
                                                    {  $\gamma = 0$ : V-Zyklus;  $\gamma = 1$ : W-Zyklus }
    end for
     $x_\nu := x_\nu - p_\nu e_{\nu-1};$                              { Grobgitterkorrektur }
     $x_\nu := \mathcal{S}_\nu^{\alpha_2}(x_\nu, f_\nu);$                  {  $\alpha_2$  Nachglättungen }
end if

```

Die Mehrgitteriteration ist dann

Algorithmus 4 Mg-Verfahren

```

... { Setzung aller nötigen Strukturen }
l=maxlevel;
repeat
    mgmstep ( $x_l, f_l, l$ );
    norm:=  $\|A_l x_l - f_l\|;$ 
    inc(step);
until norm < tol) or (step > stepmax);

```

Die angesprochenen Themenbereiche können in Hackbusch[10] nachgelesen werden. Eine tiefere Darstellung der Mehrgitterverfahren findet sich in Hackbusch[11].

3.2 Algebraisches Mehrgitter

Gegeben sei nun nur das Gleichungssystem (3.1)

$$A_h x_h = f_h$$

⁴D.h. es wird vorausgesetzt, daß bestimmte Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllt sind.

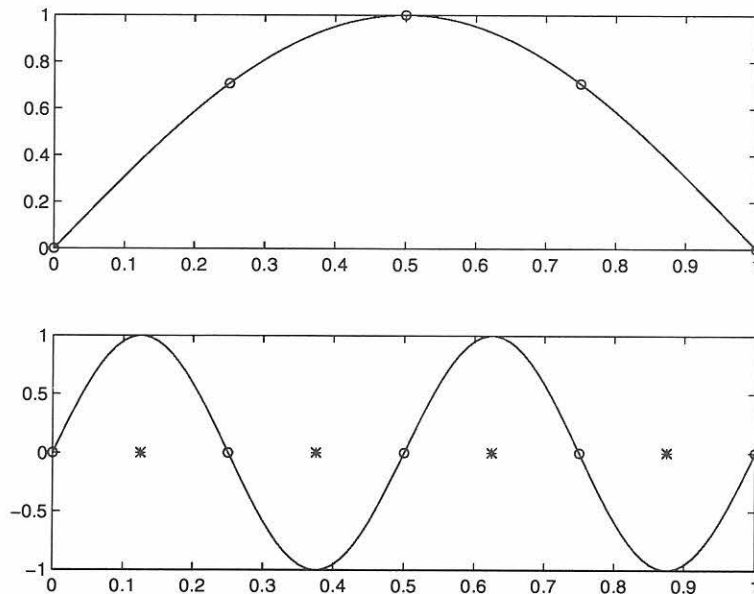


Abbildung 3.2: eindimensionales Beispiel: (oben) glatte (niederfrequente) Gitterfunktion, gut darstellbar auf dem groben Gitter (= o); (unten) hochfrequente Gitterfunktion, nicht "sichtbar" im groben Gitter

1. Glättung: führe einige Schritte (meist weniger als vier) mit einem geeigneten Iterationsverfahren durch,
2. Grobgitterkorrektur: anschließend wird eine neue Näherung mittels (3.8) berechnet
3. falls $\|A_h x_h^{\text{new}} - f_h\| < \text{tol}$ oder eine maximale Anzahl von Iterationen überschritten ist: Stop; sonst gehe zu 1.

Algorithmus 3.1 beschreibt ein Unterprogramm, das einen Zweigitterschritt ausführt, und Algorithmus 2 die Zweigitteriteration.

Algorithmus 1 zgmstep (var x_h, f_h :Gp)

$x_h := S_h^\alpha(x_h, f_h);$	{ α Glättungsschritte }
$d_h := A_h x_h - f_h;$	{ Defekt }
$d_H := r_h d_h;$	{ Restriktion }
$e_H := A_H^{-1} d_H;$	{ Grobgitterlösung }
$x_h := x_h - p_h e_H;$	{ Grobgitterkorrektur }

Algorithmus 2 Zweigitterverfahren

```

... { Setzung aller nötigen Strukturen }
repeat
  zgmstep ( $x_l, f_l, l$ );
  norm :=  $\|A_l x_l - f_l\|$ ;
  inc(step);
until norm < tol) or (step > stepmax);

```

Dabei ist

$$S_l(x_h, f_h) := S_h x_h + N_h f_h$$

eine konsistente Iteration, die zur Glättung benutzt wird. Ist diese die Jacobi-Iteration, so gilt (D_h die Diagonale von A_h)

$$S_h = I_h - D_h^{-1} A_h, \quad N_h = D_h^{-1}.$$

bzgl. eines Gitters Ω_h . Ist die Struktur (3.4) bekannt, so können Prolongationen P_l zwischen den Räumen und die Grobgittermatrix durch das Galerkin-Produkt

$$A_{l-1} := P_l^T A_l P_l$$

erklärt werden und der Mehrgitteralgorithmus 3.1 ist durchführbar.

Die nun fehlende Hierarchie (3.4) und damit die unbekanntenen Prolongationen sind aus den Einträgen der Diskretisierungsmatrix $A_l = (a_{ij})$ zu bestimmen: Jede Zeile der Diskretisierungsmatrix repräsentiert für einen Knoten im Gitter seine Nachbarschaftsbeziehungen. Die Menge $R_l = \{1, \dots, \dim A_l\}$ aller Zeilenindizes von A_l stellt das Ausgangsgitter, die feinste Diskretisierung, dar. Eine disjunkte Zerlegung der Indexmenge R_l kann als Vergrößerung dieses Gitters angesehen werden und definiert in einfacher Weise eine Prolongation \hat{P}_l (vgl. (3.10)), die anschließend durch ein gedämpftes Jacobi-Verfahren geglättet wird (vgl. (3.11)). Mit dieser Prolongation, der Restriktion nach (3.9), der Definition der Grobgittermatrix über das Galerkin-Produkt und einer Glättung, z.B. eine Gauß-Seidel-Iteration, sind die Komponenten des Zwei- bzw. Mehrgitterverfahren bekannt und das Gleichungssystem (3.1) läßt sich mit Algorithmus (4) lösen. Dieser Zugang stammt von Vanek[20]. Alternative Vorgehensweisen finden sich in z.B. in Ruge und Stüben[18] oder Braess[3].

Algorithmus 5 AMG: Zerlegungsphase ([20])

- Bestimme das Muster der Matrix A_l in Abhängigkeit von einem Schwellwert, d.h.

$$N_i(\epsilon) := \{\mathbf{x}^j \in \Omega_l : |a_{ij}| > \epsilon \sqrt{a_{ii} a_{jj}}\}, \quad \text{für alle } \mathbf{x}^i \in \Omega_l.$$

Der Wert ϵ ist ein wählbarer Parameter im Verfahren.

- Konstruiere aus $\{N_i(\epsilon) : i = 1, \dots, n_l\}$ eine disjunkte Zerlegung

$$C_1, C_2, \dots, C_{n_l-1}$$

der Menge R_l :

```

for  $i := 1$  to  $n_l$  do
  if  $N_i(\epsilon) \subset R_l$  then {falls  $N_i$  ganz in  $R_l$ }
     $C_j := N_i(\epsilon);$  { setze  $C_j$  gleich  $N_i$  }
     $R_l := R_l \setminus C_j;$  { entferne  $C_j$  aus  $R_l$  }
     $j := j + 1$ 
  end if
end for

```

- Finde für die restlichen Knoten "angrenzende" Mengen:

```

for  $l = 1$  to  $j$  do
   $\tilde{C}_j := C_j$  { kopiere alle  $C_j$  }
end for
while  $R_l \neq \emptyset$  do { solange  $R_l$  nicht leer }
   $i \in R_l;$  { wähle ein  $i$  }
  if  $N_i(\epsilon) \cap \tilde{C}_k \neq \emptyset$  then { falls ein Nachbar von  $i$  in  $\tilde{C}_k$  liegt }
     $C_k := C_k \cup \{\mathbf{x}^i\};$  { ergänze  $C_k$  um  $i$  }
     $R_l := R_l \setminus \{\mathbf{x}^i\}$  { entferne  $i$  aus  $R_l$  }
  end if
end while

```

Eine disjunkte Zerlegung von R_l ergibt sich aus dem Algorithmus 5. Die so entstandenen Mengen C_1, \dots, C_{n_l-1} sind nun als "Grogitterpunkte" aufzufassen. Dementsprechend wird die (vorläufige) Prolongation definiert durch die Zuordnung eines Feingitterpunktes i zu der eindeutig gegebenen Menge C_k :

$$\hat{P} : \mathbb{R}^{n_{l-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l}, \quad \hat{P}_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in C_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.10)$$

In [20] wird eine Modifikation dieser stückweise konstanten Prolongation durch eine Glättung mit dem Jacobi-

Verfahren vorgeschlagen, so daß sich die endgültige Prolongation als

$$P := (I - \omega D^{-1} A_l^F) \hat{P} \quad (3.11)$$

ergibt. Dabei sind D die Diagonale und A_l^F eine "gefilterte" Matrix ([20]):

$$a_{ij}^F := \begin{cases} a_{ij} & \text{für } \mathbf{x}^j \in N_i(\epsilon_{AF}), \quad i \neq j \\ a_{ii} - \sum_{i \neq j} a_{ij} - a_{ij}^F & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In den Testrechnungen zeigte sich, daß die Wahl der Parameter ϵ_{AF} bzw. ϵ großen Einfluß auf die Konvergenzrate und die Anzahl der Nichtnullelemente, d.h. den Speicherplatzverbrauch, hat (vgl. z.B. die Abbildung 4.12(a)). Vanek [20] wählte $\epsilon_{AF} = \epsilon$.

Insgesamt ergibt sich das folgende Vorgehen:

- bestimme nach Algorithmus 5 die Prolongationen P_ν und die zugehörigen Grobgittermatrizen durch das Galerkin-Produkt

$$A_\nu := P_\nu^T A_{\nu+1} P_\nu, \quad \nu = 0, \dots, l-1, \quad (3.12)$$

- löse nun das Gleichungssystem (3.1) mit Algorithmus 4.

4

Numerik

Die numerische Lösung der Aufgabe (2.1) umfasst die

Phase 1: Diskretisierung des Problems:

d.h. Bestimmung des algebraischen Systems (3.1) auf dem feinsten Gitter mittels der Methoden aus Kapitel 2.

Phase 2: Gleichungsauflösung:

(a) ‘Zerlegung’ der Systemmatrix:

Neben der Setzung aller Steuerungsparameter, sind auch alle weiteren Matrizen zu kompilieren. Das sind im einzelnen die Matrizen

i. zur Beschreibung der Prolongation bzw. Restriktion,

ii. evtl. zur ILU-Glättung und

iii. die sich (rekursiv) ergebenden Systemmatrizen auf den gröberen Gittern nach (3.12).

(b) Lösung des Gleichungssystems mit Algorithmus 4.

Der Algorithmus 5 zur Erzeugung der Grobgitterstrukturen wird gesteuert durch die Wahl der Parameter

- ϵ : in der Definition der Mengen N_i (die Verbindungen des Knoten \mathbf{x}^i),
- ϵ_{AF}, ω : in der Definition der Prolongation (Dämpfungparameter).

Im Mehrgitteralgorithmus selbst sind wählbar

- die Glättung: es standen für die Modellrechnungen als Glätter eine ILU-Iteration, eine symmetrische SOR-Iteration, eine Produktiteration aus ILU- und SSOR-Verfahren und einige cg-Varianten zur Verfügung,
- die Anzahl der Glättungsschritte,
- V- oder W-Zyklus,
- Toleranzen, die den Abbruch der Rechnung steuern.

Seien $\|\cdot\|$ eine passende Norm, x_i^m die m -te Iterierte und $r_i^m := A_i x_i^m - f_i$ das m -te Residuum des Verfahrens. Als Abbruchkriterium der Iteration kann

$$\frac{\|r_i^m\|}{\|r_i^0\|} \leq \text{tol}$$

dienen, denn für den m -ten Fehler $e_i^m := x^m - A_i^{-1} f_i$ gilt die Abschätzung

$$\frac{\|e_i^m\|}{\|e_i^0\|} \leq \kappa(A_i) \frac{\|r_i^m\|}{\|r_i^0\|},$$

wobei $\kappa(A_i)$ die Kondition der Systemmatrix ist. Typischerweise ist $\kappa(A_i) = \mathcal{O}(h_i^{-2})$. Eine weitere Abschätzung für den Fehler ist

$$\|e_i^m\| \leq \|A_i^{-1}\| \|r_i^m\| = \mathcal{O}(h_i^{-2}) \|r_i^m\|.$$

Zur Beurteilung der Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens werden die Reduktionsfaktoren (vgl. auch [10])

$$\rho_m := \frac{\|A_l x_l^{m+1} - f_l\|}{\|A_l x_l^m - f_l\|} = \frac{\|r_l^{m+1}\|}{\|r_l^m\|}$$

bzw. deren geometrisches Mittel

$$\bar{\rho} := \left(\prod_{i=0}^n \rho_i \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

herangezogen.

4.1 Modellproblem I: Beispiel mit analytischer Lösung

Das erste Modellproblem wurde so gewählt, daß die Lösung analytisch angegeben werden kann und diese im Ansatzraum der stückweise linearen Funktion liegt. Das Gebiet Ω ist ein Rechteck mit zwei unterschiedlichen Materialien:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = (0, 2) \times (a, \eta), \quad \Omega_2 = (0, 2) \times (\eta, b), \quad \eta \in (a, b).$$

In Ω sei die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) &= 0 && \text{in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \\ \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{x})(T_\infty(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})) && \text{für } y \in \{a, b\} \\ \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } x = 0 \text{ oder } x = 2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit der Transmissionsbedingung ($x \in (0, 2)$)

$$\begin{aligned} T(x, \eta_-) &= T(x, \eta_+) \\ \lambda(x, \eta_-) \frac{\partial T}{\partial n}(x, \eta_-) &= \lambda(x, \eta_+) \frac{\partial T}{\partial n}(x, \eta_+). \end{aligned} \quad (4.2)$$

gegeben. Dabei ist $\mathbf{x} = (x, y)$ ein Punkt aus $\bar{\Omega}$ und n der bzgl. des entsprechenden Gebietes nach außen gerichtete Normalenvektor. Die Größen T_∞ , α und λ seien stückweise konstant

$$T_\infty(\mathbf{x}) = \begin{cases} T_{\infty,1} & \text{für } y = a \\ T_{\infty,1} & \text{für } y = b \end{cases}, \quad \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{für } y = a \\ \alpha_2 & \text{für } y = b \end{cases},$$

und

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{für } y < \eta \\ \lambda_2 & \text{für } y > \eta \end{cases}.$$

Bemerkung 9. *Unter diesen Voraussetzungen ist*

$$T(x, y) = \begin{cases} m_1 y + n_1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ m_2 y + n_2 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

Lösung der Aufgabe (4.1), (4.2). $T|_{\Omega_i} \in C^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, ist klassische Lösung des Transmissionsproblems.

Beweis. Nach Wloka[21] ist (4.1), (4.2) eindeutig lösbar (vgl. auch Neittaanmäki[15]). Offensichtlich ist $\Delta T(\mathbf{x}) = 0$ in Ω_1 und Ω_2 . Die homogene Neumann-Randbedingung wird erfüllt, da die Normalenableitung der partiellen Ableitung bzgl. x entspricht:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad x = 2, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad x = 0.$$

Die restlichen vier Bedingungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \eta & -\eta & 1 & -1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 + \alpha_1 a & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha_2 b & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 T_{\infty,1} \\ \alpha_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

zur Bestimmung der Parameter $m_i, n_i, i = 1, 2$. Sei K die Matrix in (4.3), so sind $m_i, n_i, i = 1, 2$, für

$$\det K = (-\alpha_1 - \alpha_2)\lambda_1\lambda_2 + \alpha_1\alpha_2(a\lambda_2 - b\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\eta) \neq 0.$$

eindeutig bestimmt □

Die Daten für das Modellproblem seien

- $a = 0 \text{ m}, \eta = 1.5 \text{ m}$ und $b = 3.5 \text{ m}$,
- $\lambda_1 = 0.04 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \lambda_2 = 1.2 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$,
- $\alpha_1 = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}, \alpha_2 = 23 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$,
- $T_{\infty,1} = 20^\circ \text{C}, T_{\infty,2} = -15^\circ \text{C}$.

Damit ergibt sich aus (4.3)

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.24473817528669 \\ -0.74149127250956 \\ 19.88877630912356 \\ -12.36609404504214 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$T(x, y) = \begin{cases} -22.2447 y + 19.8888 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ -0.7415 y - 12.3661 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

ist *die* analytische Lösung.

Seien Γ_{in} und Γ_{out} die Warm- bzw. Kaltseite. Für die "mittlere" Wärmestromdichte nach (2.4) gilt mit (12)

$$q(\Gamma_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int_0^2 \alpha_1 (T_{\infty,1} - T(x, a)) dx = 0.88978952701152 \quad [W/m^2]$$

und

$$q(\Gamma_{\text{out}}) = \frac{1}{2} \int_0^2 \alpha_2 (T_{\infty,2} - T(x, b)) dx = -0.88978952701117 \quad [W/m^2].$$

D.h es berechnet sich ein k -Wert

$$k = \frac{q(\Gamma_{\text{in}})}{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}} = 0.02542255791461 \quad [W/(m^2 K)].$$

DIN 4108 schreibt für geschichtete Materialien zur Ermittlung des Wärmedurchlaßwiderstandes $1/\Lambda$ die Formel

$$\frac{1}{\Lambda} = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\lambda_i}$$

vor. Dabei ist λ_i die Wärmeleitfähigkeit der i -ten Schicht mit Dicke s_i . Der Wärmedurchgangswiderstand $1/k$ ergibt sich dann zu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Für die Situation hier erhält man

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1.5}{0.04} + \frac{2}{1.2} = \frac{235}{6} = 39.1\bar{6}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{23} + \frac{1}{\Lambda} \right)^{-1} = (0.125 + 0.0434 + 39.1666)^{-1} \\ &= 0.02542255791461 \quad [W/(m^2 K)]. \end{aligned}$$

Zur numerischen Bestimmung der Temperaturverteilung werden eine Rechtecksgitter- und eine unregelmäßige Triangulierung (Abbildung 4.1) gewählt. In den Tabellen 4.1 und 4.2 sind die ermittelten Werte und Abweichungen zwischen der exakten und der numerischen Lösung aufgelistet (Abbruch der Rechnung

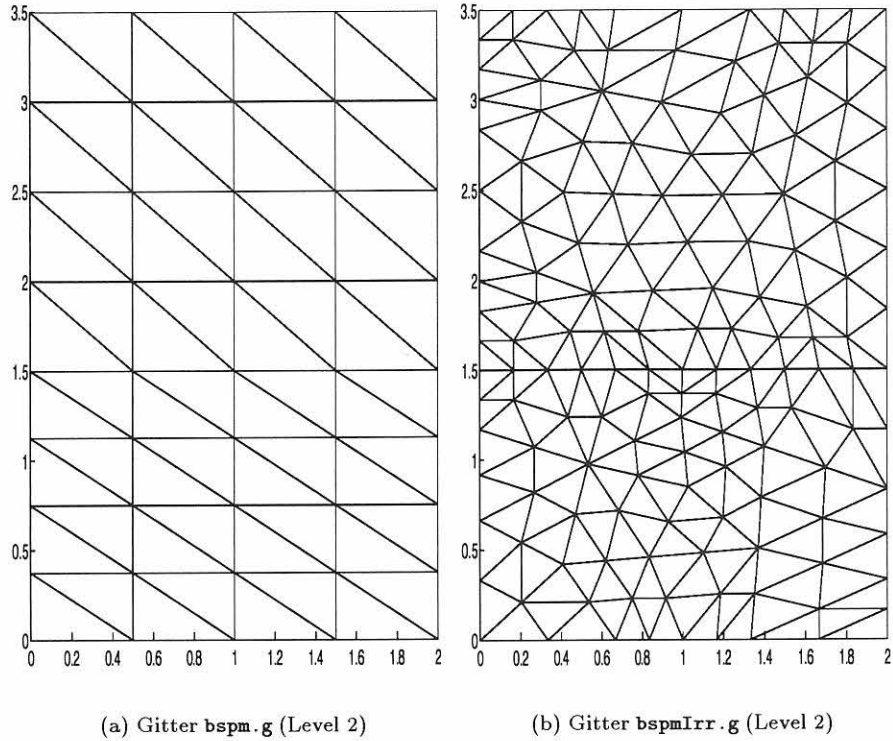


Abbildung 4.1: Triangulierungen zum Modellproblem I

y	$T(x, y)$	$u(x, y)$	$\max_{x \in [0, 2]} T(x, y) - u(x, y) $
0	19.888776	19.8887763	1.0658e-14
0.75	3.205222	3.205222	1.0214e-13
1.125	-5.136554	-5.1365541	1.4388e-13
1.5	-13.478330	-13.4783309	1.5987e-13
3.5	-14.961313	-14.9613134	2.1316e-14

Tabelle 4.1: Werte zum Gitter nach Abbildung 4.1(a).

y	$T(x, y)$	$u(x, y)$	$\max_{x \in [0, 2]} T(x, y) - u(x, y) $
0	19.888776	19.888776	1.0658e-14
0.716	3.961543	3.961543	2.7133e-13
1.151	-5.714917	-5.714917	4.2810e-13
1.5	-13.478330	-13.478330	5.0981e-13
3.5	-14.961313	-14.961313	4.2632e-14

Tabelle 4.2: Werte zum Gitter nach Abbildung 4.1(b).

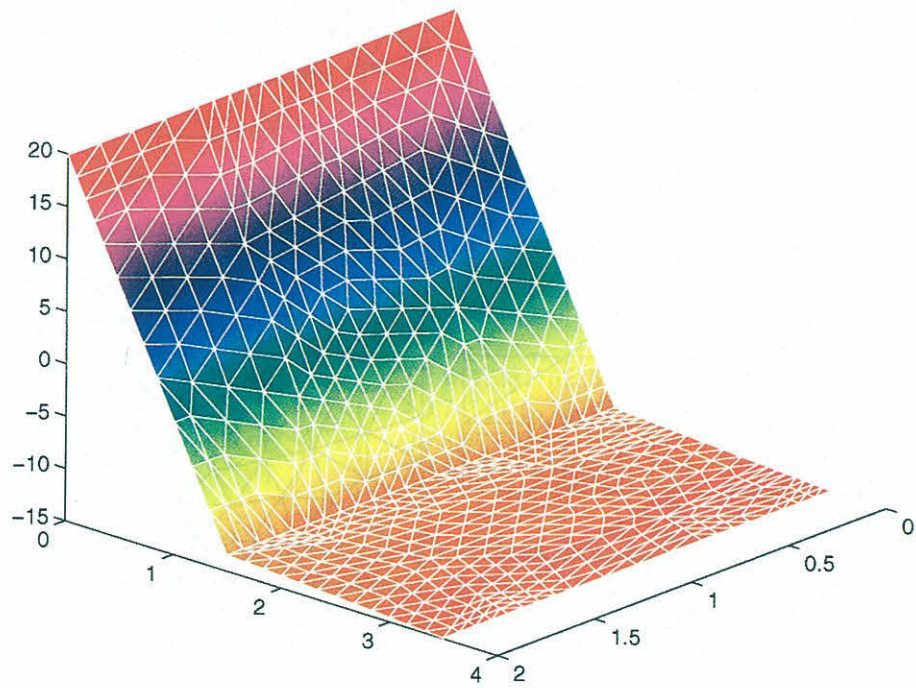


Abbildung 4.2: Numerische Lösung $T^h(\mathbf{x})$ (Gitter **bspmIrr.g**, Level 1).

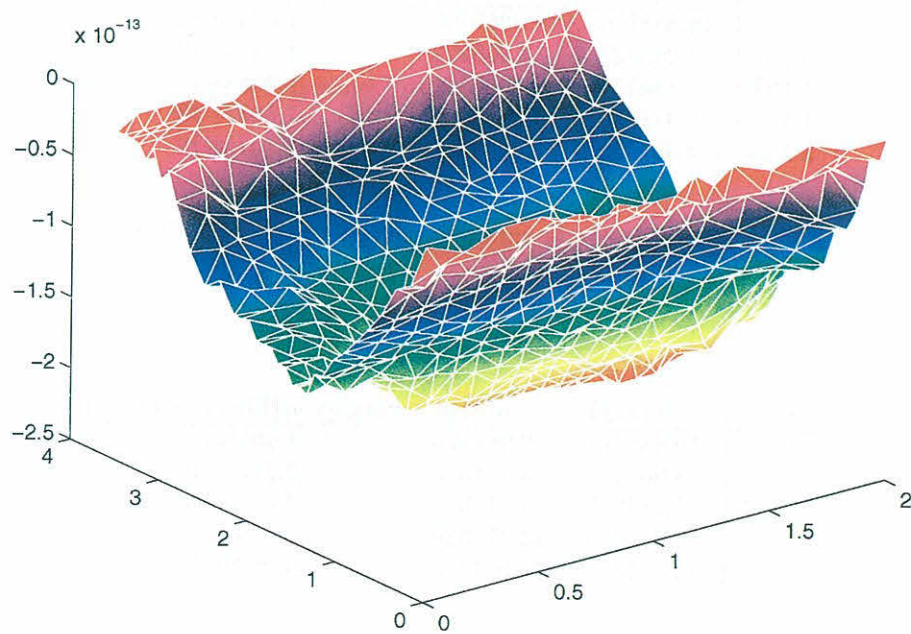


Abbildung 4.3: Fehler $T(\mathbf{x}) - T^h(\mathbf{x})$ (Gitter **bspmIrr.g**, Level 1).

l	I.a.0	I.a.1	I.a.2	I.a.3	I.a.4	I.a.5	I.a.6
4						16641 (136257)	66049 (542849)
3					4225 (34337)	2177 (52127)	8386 (203276)
2				1089 (8721)	576 (13374)	267 (7109)	960 (27138)
1		81 (597)	289 (2249)	154 (3300)	84 (1976)	40 (790)	133 (3380)
0	25 (167)	18 (245)	50 (962)	27 (465)	15 (193)	9 (81)	33 (797)

Tabelle 4.3: Statistik zu den Problemen I.a.0 - I.a.6; Gitter nach Abb. 4.1(a).

l	I.b.0	I.b.1	I.b.2	I.b.3	I.b.4	I.b.5
4				8249 (80457)	32625 (320273)	129761 (1277985)
3			2109 (20309)	992 (23380)	3801 (93091)	14891 (371759)
2		551 (5175)	264 (5721)	114 (2388)	404 (9862)	1487 (39441)
1	150 (1343)	77 (1462)	36 (614)	21 (363)	67 (1531)	186 (4640)
0	25 (393)	10 (90)	5 (25)	5 (25)	19 (333)	28 (556)

Tabelle 4.4: Statistik zu den Problemen I.b.0 - I.b.5; Gitter nach Abb. 4.1(a).

für $\|A_h u_h - f_h\|_h < 10^{-14} \|f_h\|$). Abbildung 4.2 zeigt die numerisch bestimmte Temperaturverteilung und Abbildung 4.3 den Fehler.

Für die Modellrechnungen werden ausgehend von einem Gitter Ω_0 durch uniforme Verfeinerung Gleichungssysteme unterschiedlicher Dimension konstruiert. Diese Probleme werden fortlaufend nummeriert: I.a.i bezeichnet dabei das Gleichungssystem, das aus i -facher Verfeinerung aus dem Gitter der Abb. 4.1(a) entstanden ist, entsprechendes gilt für I.b.i. Die Dimensionen und die Anzahl der Nichtnullelemente sind den nachfolgenden Tabellen 4.3 und 4.4 zu entnehmen. Grundlage der Diskretisierung ist hierbei die Box-Methode mit quadratischen Ansatzfunktionen aus Liebau[14]. Gegenüber einer Diskretisierung nach Kapitel 2 führt der Fall der quadratischen Ansatzfunktionen bei Verwendung gleicher Gitter zu einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden und einer nicht mehr symmetrischen Diskretisierungsmatrix. Die wichtigsten Parameter im dann eingesetzten Mehrgitterverfahren sind

- Produkt-Glättung aus SSOR- und ILU-Iteration $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2)$,
- cg-Verfahren als Löser auf dem größten Gitter
- W-Zyklus $\gamma = 2$,
- Abbruch der Rechnung für $\|A_h u_h - f_h\|_h < \text{tol} \|f_h\|$

Die Tabellen 4.5 - 4.6 enthalten die mittleren Konvergenzfaktoren $\bar{\rho}$ und die Rechenzeit, die Abbildung 4.4 die Entwicklung der Konvergenzfaktoren und die Abbildung 4.5 die Entwicklung des Defektes während der Rechnung, welche auf einem Linux-PC (133MHz, 64MB) durchgeführt wurden.

Problem	$\bar{\rho}$	# Schritte	# Knoten	# Dreiecke	Zeit [sec]
I.a.0			25	8	0.01
I.a.1	0.117	10	81	32	0.08
I.a.2	0.240	14	289	128	0.51
I.a.3	0.262	15	1089	512	1.99
I.a.4	0.258	16	4225	2048	9.60
I.a.5	0.255	16	16641	8192	40.75
I.a.6	0.256	16	66049	32768	165.93

Tabelle 4.5: Konvergenzfaktoren und Rechenzeiten bzgl. des Gitters nach Abb. 4.1(a).

l	$\bar{\rho}$	# Schritte	# Knoten	# Dreiecke	# NonZeros	Zeit [sec]
I.b.0	0.153	11	150	63	1343	0.18
I.b.1	0.164	11	551	252	5175	0.69
I.b.2	0.181	12	2109	1008	20309	3.37
I.b.3	0.225	14	8249	4032	34337	17.73
I.b.4	0.323	19	32625	16128	320273	99.03
I.b.5	0.416	24	129761	64512	1277985	504.02

Tabelle 4.6: Konvergenzfaktoren und Rechenzeiten bzgl. des Gitters nach Abb. 4.1(b).

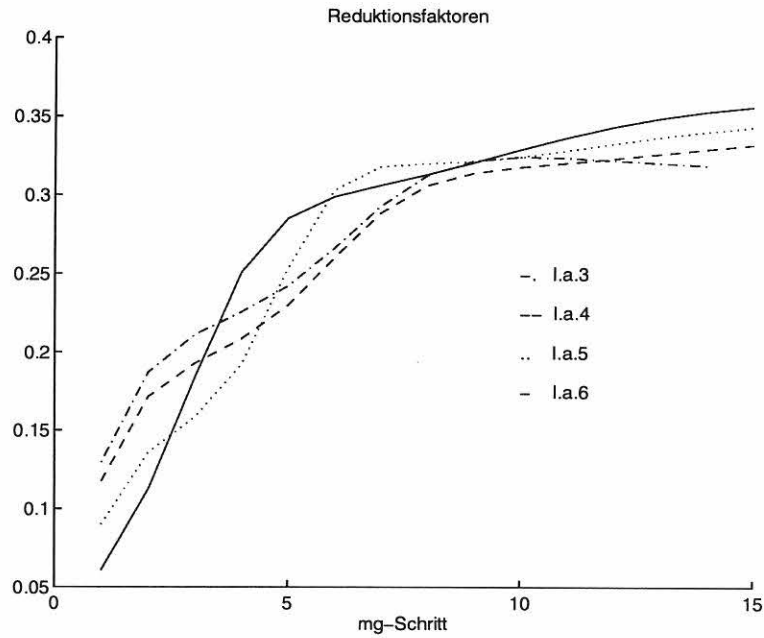


Abbildung 4.4: Reduktionsfaktoren zum Testproblem I.a.

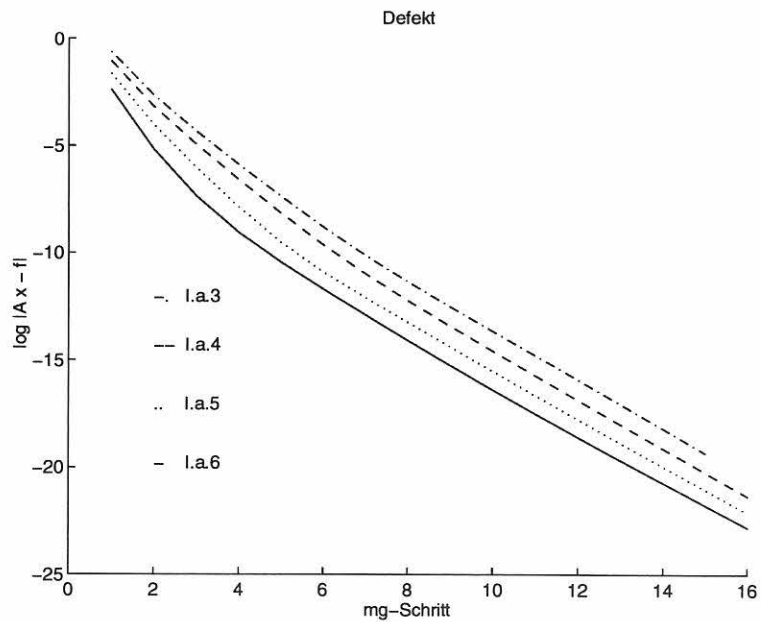


Abbildung 4.5: Defekte zum Testproblem I.a.

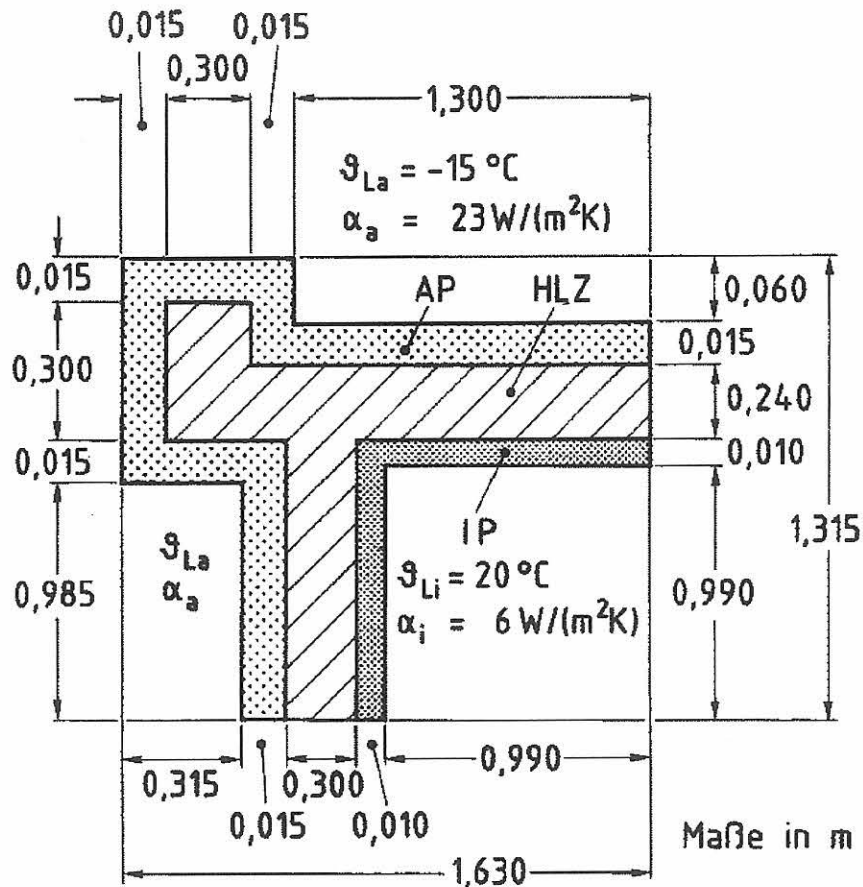


Abbildung 4.6: Skizze zum Modellproblem II.

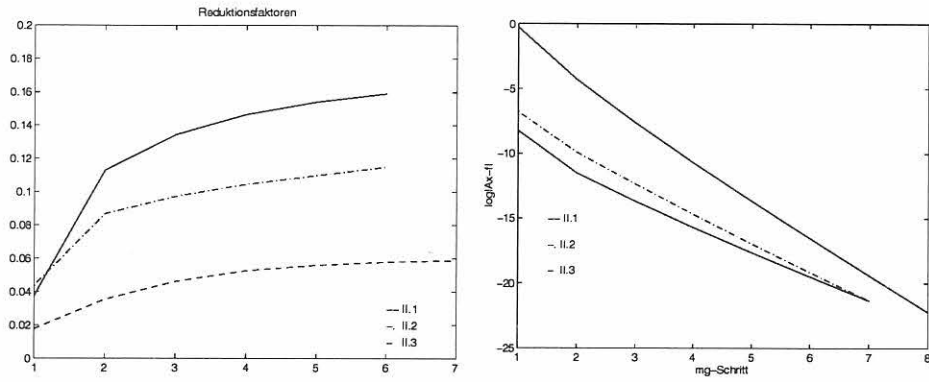
4.2 Modellproblem II: Eckbereich

Als zweites Beispiel wurde das Modellproblem "Eckbereich" aus Rudolphi, Kownatzki [17] gewählt. Die Diskretisierungsmatrizen sind dem in [17] vorgestellten Programm STAT2D entnommen. Im Gegensatz zur Diskretisierung im ersten Modellproblem wurden hier lineare Ansätze benutzt, so daß symmetrische Probleme entstehen. Eine analytische Lösung ist nicht bekannt. Die physikalischen Parameter der Modellrechnung sind der Tabelle 4.7 zu entnehmen. Entsprechend dem ersten Modellproblem wurden auch hier drei Verfei-

Material	Rohdichte ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	Wärmeleitfähigkeit λ [$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$]	Wärmeübergangskoeffizient α [$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$]
Innenputz	1400	0.70	6
Ziegel	800	0.34	-
Außenputz	1800	0.87	23

Tabelle 4.7: Materialeigenschaften .

nerungsstufen einer Grunddiskretisierung betrachtet. Die entstehenden Gleichungssysteme seien mit II.1-II.3 bezeichnet. Die folgende Tabelle faßt diese Fälle zusammen (pro Spalte eine Rechnung). Die Abbildungen 4.7(a) und 4.7(b) enthalten die zugehörigen Ergebnisse. Insbesondere Abbildung 4.7(b) zeigt eindrucksvoll ein mehrgittertypisches Verhalten: die Reduktion des Defektes hängt nicht mehr von der Dimension des Gleichungssystems ab.



(a) Reduktionsfaktoren

(b) Defekte

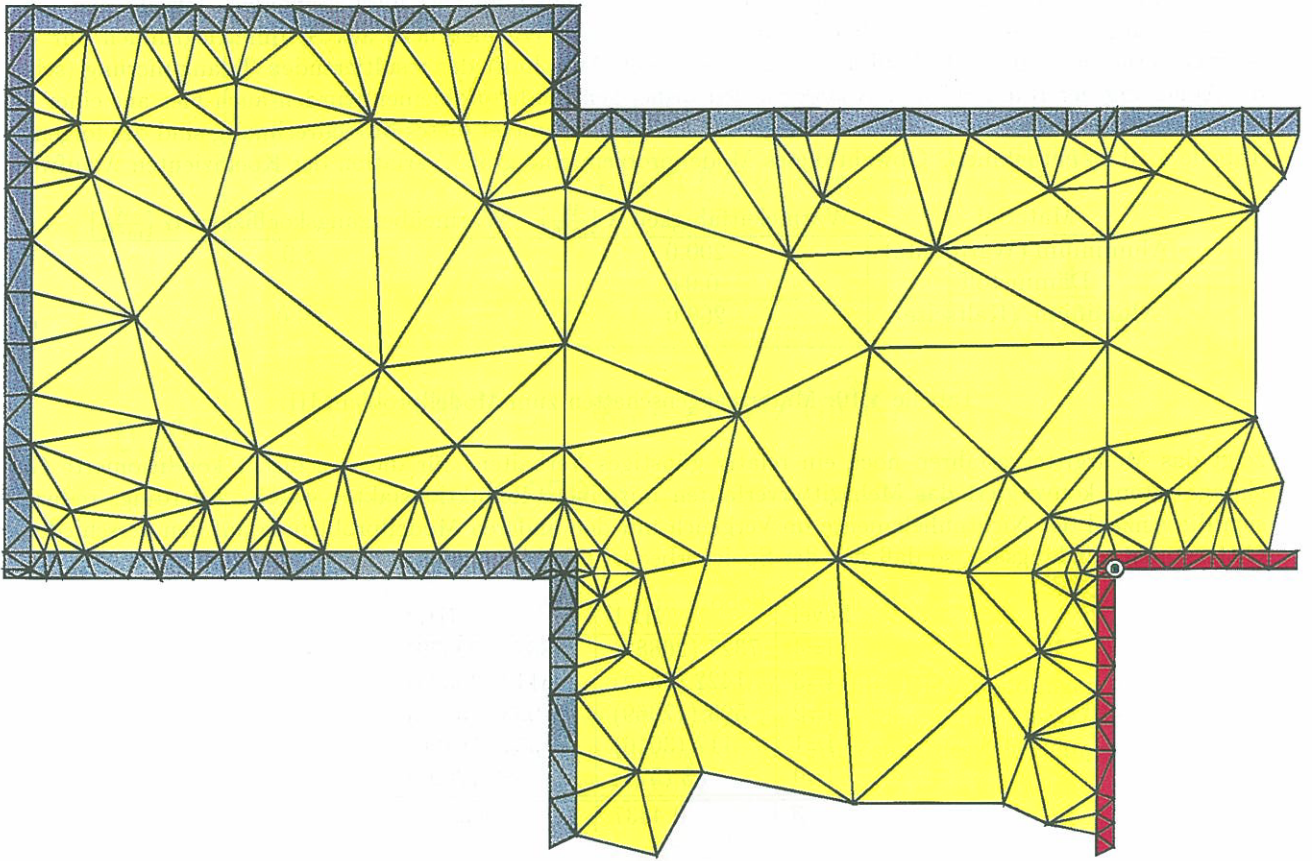
Abbildung 4.7: Ergebnisse zum Testproblem II

Level	II.1	II.2	II.3
l=4			12049 (46913)
l=3	874 (3173)	3173 (12049)	2061 (14823)
l=2	148 (957)	530 (3489)	281 (3245)
l=1	34 (367)	77 (875)	49 (674)
l=0	17 (149)	38 (586)	16 (134)

Tabelle 4.8: Dimensionen und die Anzahl der Nichtnullelemente für II.1-II.3.

Problem	$\bar{\rho}$	# Schritte	# Knoten
II.1	0.05	8	874
II.2	0.11	7	3173
II.3	0.15	7	12049

Tabelle 4.9: Konvergenzfaktoren bzgl. des Gitters nach Abb. 4.8.



K= »41, NKN= 877, X= 0.325000 m, Y= 0.640000 m, T= 9.77 °C




	3, INNENPUTZ,	RHO = 1400 --> LA=0.700 W/(m K)
	4, LEICHTHOCHLOCHZIEGEL POROTON,	RHO = 800 --> LA=0.340 W/(m K)
	5, AUSSENPUTZ,	RHO = 1800 --> LA=0.870 W/(m K)

Abbildung 4.8: Triangulierter Ausschnitt des Gebietes zum Modellproblem Eckbereich.

4.3 Modellproblem III: Leichtbau-Sandwichkonstruktion

Als drittes Modellproblem wurde eine Leichtbau-Sandwichkonstruktion, bestehend aus einer auf der Kalt- und Warmseite mit einer 1 mm dicken Aluminiumschicht bekleideten, 100 mm dicken Kern-Wärmedämmstoffschicht, gewählt. An den Stoßfugen von 2 Sandwichelementen tritt hierbei ebenfalls jeweils eine 1 mm starke Aluminiumschicht auf, wobei zur Berechnung dieser Wärmebrücke aus Symmetriegründen nur eine Schicht berücksichtigt wird. Abbildung 4.11 zeigt einen Ausschnitt der resultierenden Triangulierung (schön: die Auflösung der Randschicht). Analog zu den bisherigen Modellproblemen wurden auch hier aus einer Anfangstriangulierung weitere Testprobleme gewonnen. Die Parameter dieser Modellrechnung sind der folgenden Tabelle 4.10 zu entnehmen. Obwohl dieses Modellproblem eine große Variation der Koeffizienten λ aufweist,

Material	Wärmeleitfähigkeit λ [$\frac{W}{mK}$]	Wärmeübergangskoeffizient α [$\frac{W}{m^2K}$]
Aluminium (Warmseite)	200.0	8.0
Dämmstoff	0.04	-
Aluminium (Kaltseite)	200.0	20.0

Tabelle 4.10: Materialeigenschaften zum Modellproblem III.

zeigt das Mehrgitterverfahren noch ein relativ günstiges Verhalten: für dieses schlecht konditionierte Gleichungssystem konvergiert das Mehrgitterverfahren mit einem Reduktionsfaktor < 0.5 . Allerdings reduziert sich die Anzahl der Nichtnullelemente im Vergleich mit den anderen Modellproblemen auf den verschiedenen Gitterstufen nur langsam, so daß sich der Speicherbedarf erhöht.

Level	III.1	III.2
l=4	7327 (26882)	26882 (102679)
l=3	1422 (9340)	5110 (35333)
l=2	503 (17969)	993 (13995)
l=1	117 (3016)	354 (18126)
l=0	38 (576)	82 (2005)
$\bar{\rho}$	0.4437	0.31926

Tabelle 4.11: Dimensionen und die Anzahl der Nichtnullelemente für III.1-III.2.

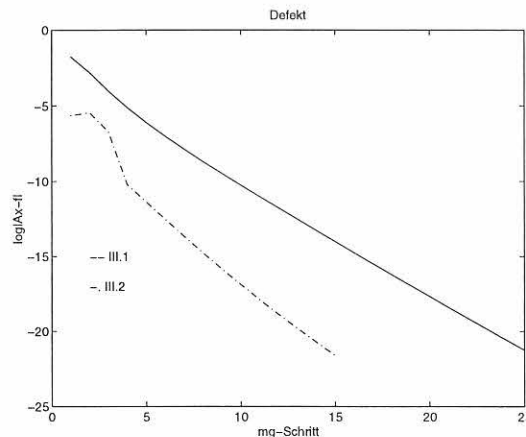


Abbildung 4.9: Defekte zum Testproblem III

4.3.1 Zur Wahl der Parameter

In den nachfolgenden Beispielen wurde die Geometrie aus dem letzten Modellproblem beibehalten aber die Parameter ϵ und ϵ_{AF} aus Algorithmus 5 variiert. Das Gleichungssystem wurde auf der Basis von linearen Ansätzen bzgl. Rechteckselementen mit dem Programm STAT2D aus Rudolphi, Kownatzki [17] erzeugt. Als

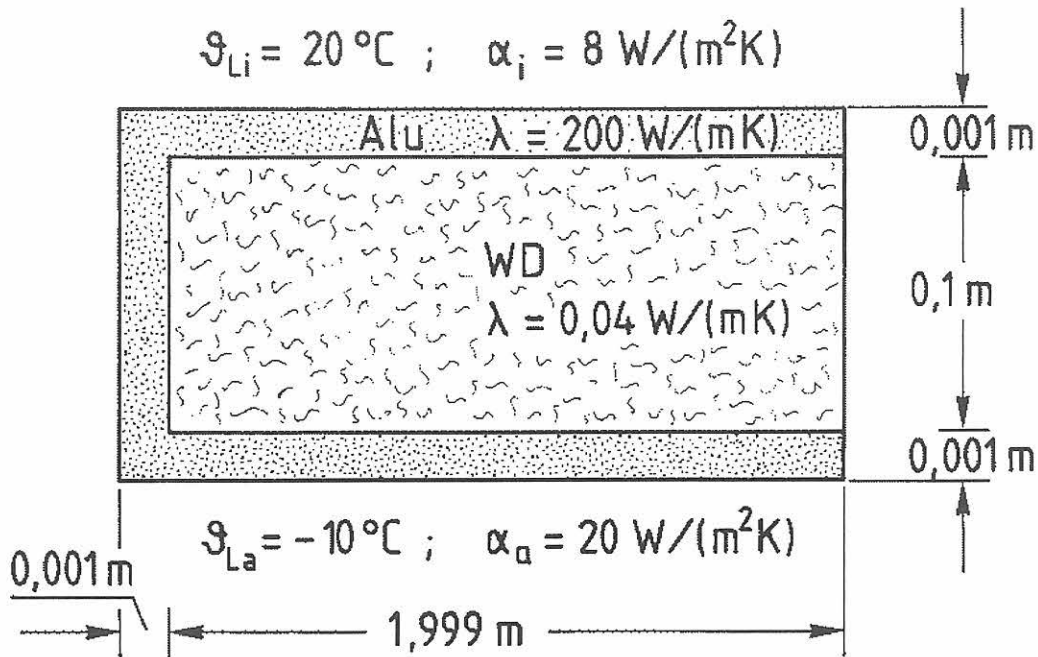


Abbildung 4.10: Skizze zum Modellproblem III.

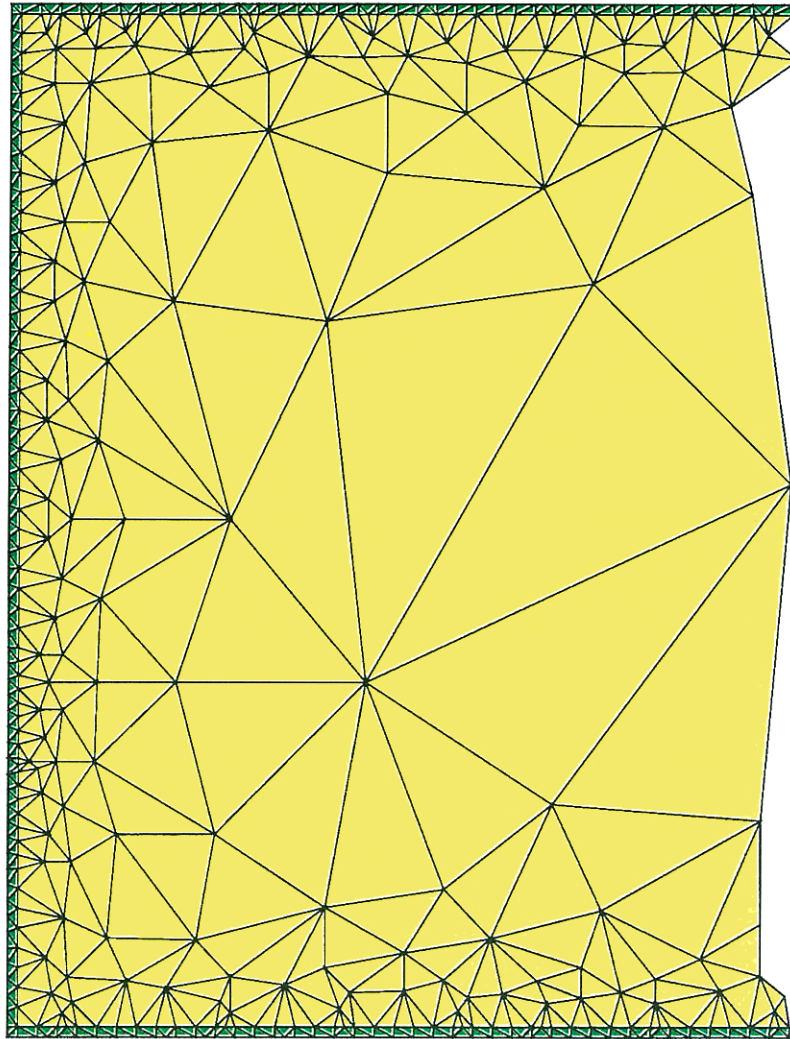
Testbeispiele wurden Diskretisierungen mit 3969 und 15617 Knoten gewählt. Die Abbildungen 4.14 und 4.15 zeigen die Temperaturverteilung zum Modellfall mit 3969 Knoten bzw. den Fehler der Mehrgitterlösung (nach 15 Iteration) im Vergleich mit einer MATLAB-Lösung (direkte Auflösung des Gleichungssystems): die Temperaturen stimmen bis auf 5 Nachkommastellen überein.

Für die fünf Fälle

- (1) $\epsilon_{AF} = 0.1$, (2) $\epsilon_{AF} = 0.075$, (3) $\epsilon_{AF} = 0.05$, (4) $\epsilon_{AF} = 0.025$ und (5) $\epsilon_{AF} = 0.01$

zur Wahl des Parameters ϵ_{AF} in der Prolongation wurde in Abhängigkeit von ϵ (definiert die Nachbarschaftsbeziehungen in der Diskretisierungsmatrix) die Reduktionsfaktoren und die Nichtnullelemente ermittelt. Abbildung 4.12(a) zeigt die Anzahl der Nichtnullelemente zum Testproblem `pbngrob`, $\dim A_h = 3969$, und Abbildung 4.12(b) die entsprechenden Reduktionsfaktoren. Abbildungen 4.13(a) und 4.13(b) zeigen die entsprechenden Werte für das Problem mit 15617 Freiheitsgraden.

Bemerkenswert ist, daß in beiden Fällen für $\epsilon < e^{-5.5} = 0.004$ die Reduktionsfaktoren für alle Werte von ϵ_{AF} teilweise stark abnehmen, während der Bedarf an Speicherplatz kontinuierlich mit fallendem ϵ bzw. ϵ_{AF} steigt. Deutlich sind aus den Abbildungen 4.12(b) und 4.13(b) zwei unterschiedliche Konvergenzniveaus ablesbar. Die Experimente legen die Vermutung nahe, daß diese Modellprobleme erst ab einem Schwellenwert für ϵ von den Algorithmen 5 und 4 "richtig" erfaßt werden. Angemerkt sei noch, daß die sonstigen Modellprobleme mit den Parametern $\epsilon = 0.08$ und $\epsilon_{AF} = 0.001$ gerechnet wurden, und alle zufriedenstellende Konvergenzresultate erzielten. In weiteren Experimenten wäre zu klären, ob die starken Anisotropien dieses Problems Ursache für dieses Konvergenzverhaltens sind (finden sich für die anderen Modellprobleme entsprechende Schwellenwerte?), oder ob hier ein weiterer Vorteil der vorgestellten Diskretisierung zutage tritt.



PBNGR_1.DAT ERZEUGT VON TRIANGLE UND TRIBSTAT

	3, WAERMEDAEMMSTOFF	--> LA=0.040 W/(m K)
	4, ALUMINIUM	--> LA=200.0 W/(m K)

Abbildung 4.11: Triangulierter Ausschnitt des Gebietes zum Modellproblem III.

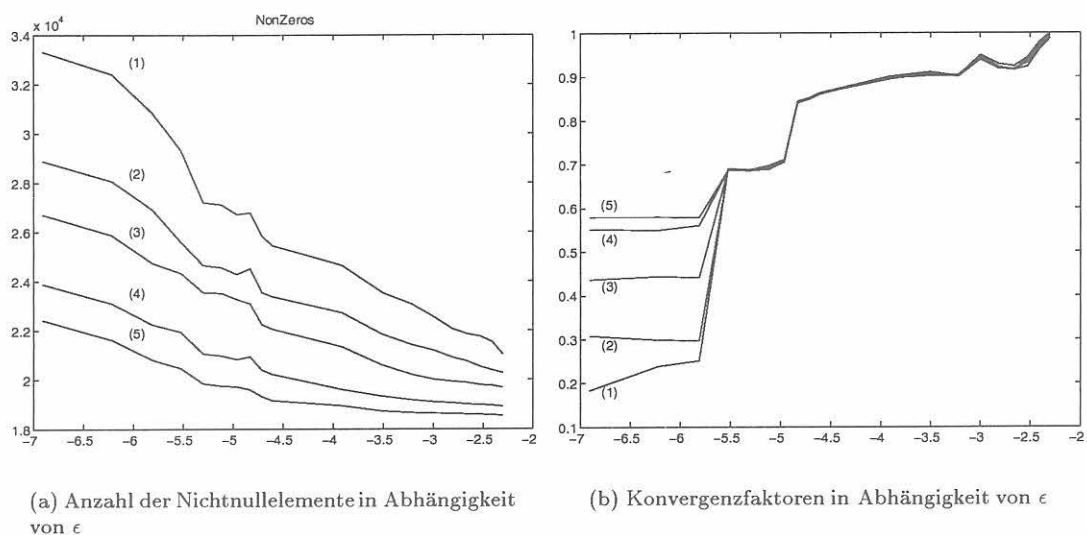


Abbildung 4.12: Abhängigkeit von ϵ , $\dim A_h = 3969$.

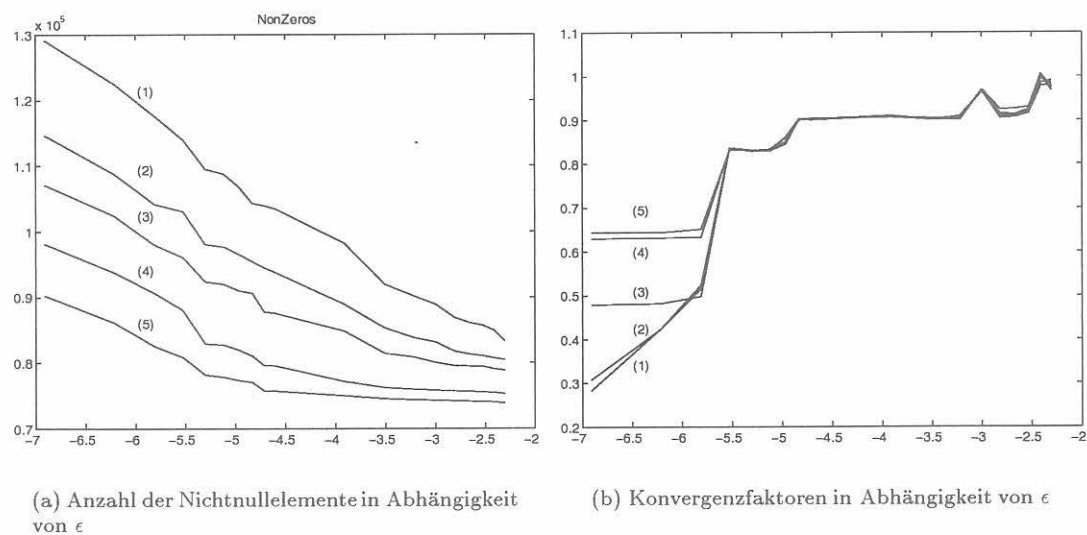


Abbildung 4.13: Abhängigkeit von ϵ , $\dim A_h = 15617$.

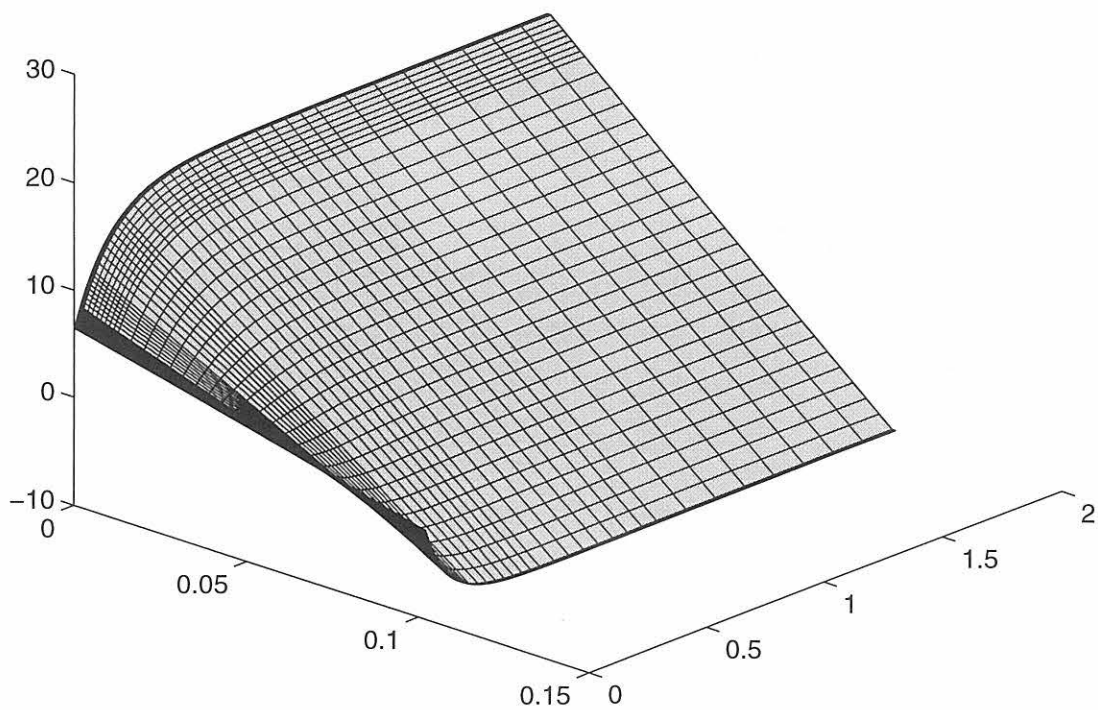


Abbildung 4.14: Temperaturverteilung zum Testproblem III, $\dim A_h = 3969$; stark verzerrt

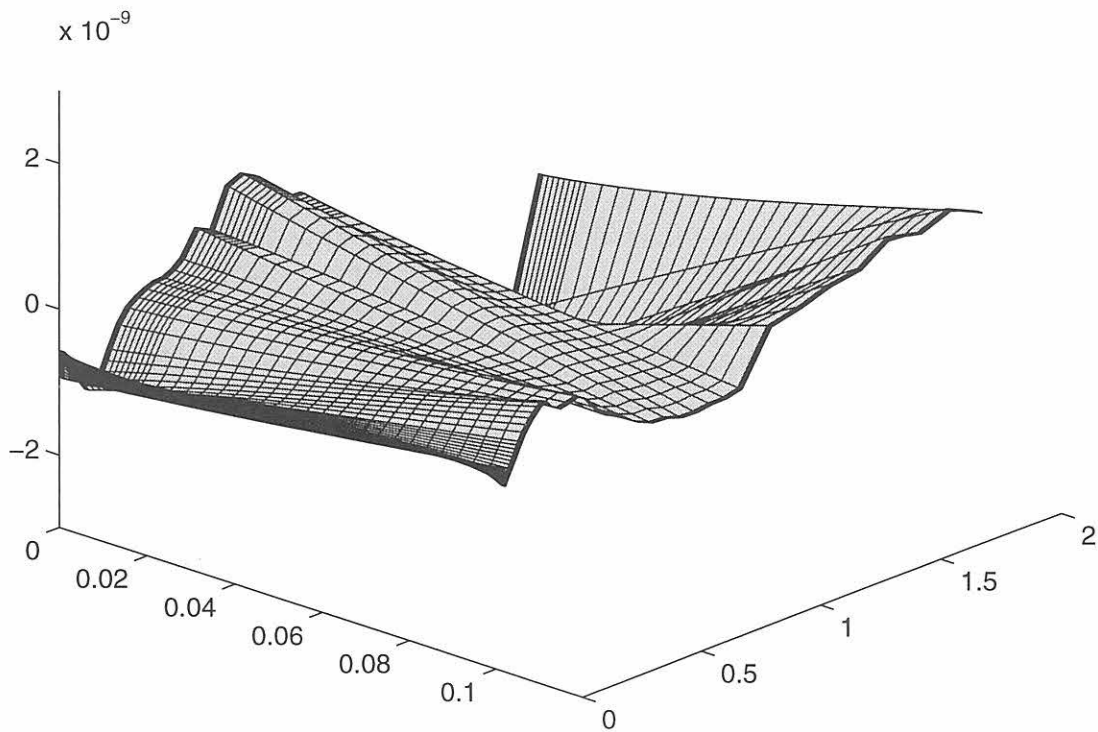


Abbildung 4.15: Fehler: Mehrgitterlösung - direktes Verfahren

Material	Wärmeleitfähigkeit λ [$\frac{W}{mK}$]	Wärmeübergangskoeffizient α [$\frac{W}{m^2K}$]
Aussenputz	0.25	23.0
Ton	0.35	-
Wabenluft	0.0591	-
Innenputz	0.70	7.69

Tabelle 4.12: Materialeigenschaften Modellproblem IV.

4.4 Modellproblem IV: Hochlochziegel mit Schlitzlochung

Als abschließendes Beispiel sei eine Rechnung des Hochlochziegels aus Abbildung 2.9 mit den Materialeigenschaften entsprechend der Tabelle 4.12 angegeben. Zur Diskretisierung wurden lineare Ansatzfunktionen benutzt, d.h. die Steifigkeitsmatrix wurde nach Kapitel 2 mittels (2.19) und (2.20) bzw. (2.26) aufgestellt. Ausgehend von einer Triangulierung mit 16027 Knoten (über TRIANGLE) werden vom Algorithmus 5 die Vergrößerungen

Level	4	3	2	1	0
Dimension A_l	16027	2566	430	67	9
Nonzeros	63515	20860	6332	1009	45

erzeugt. Die Defekte und Reduktionsfaktoren sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. Der mittlere

Iterationsschritt	Defekt	Reduktionsfaktor
1	2.5539E-0002	
2	6.8050E-0004	0.026646
3	6.7160E-0005	0.098692
4	9.0141E-0006	0.134218
5	1.3834E-0006	0.153474
6	2.3173E-0007	0.167501
7	4.1329E-0008	0.178353
8	7.6982E-0009	0.186266
9	1.4754E-0009	0.191659
10	2.8805E-0010	0.195234

Tabelle 4.13: Defekte und Reduktionsfaktoren zum Hochlochziegel.

Reduktionsfaktor ergibt sich zu $\bar{\rho} = 0.1309$, welches angesichts der komplizierten Geometrie noch einmal die Praxistauglichkeit des algebraischen Mehrgitterverfahrens unterstreicht.

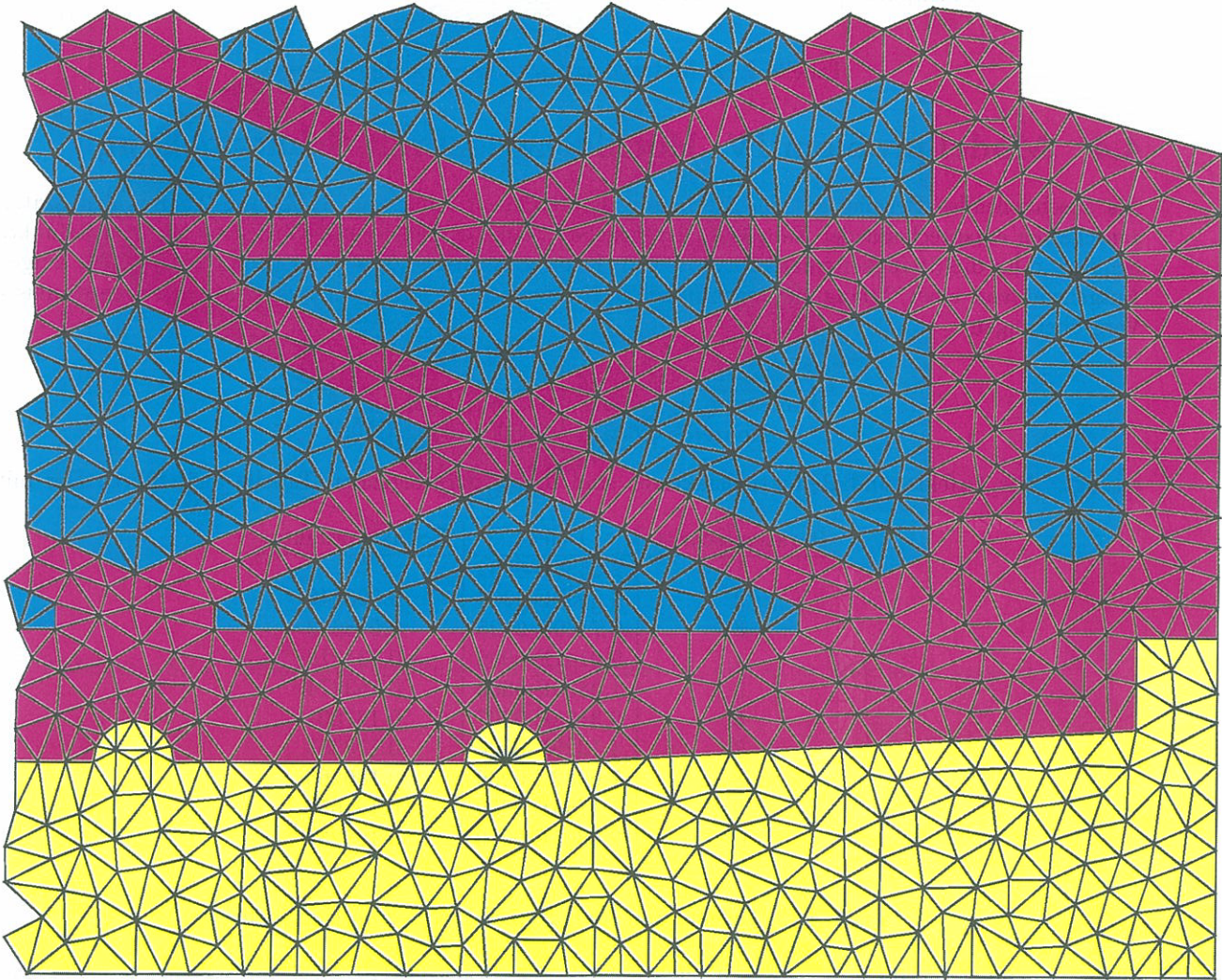


Abbildung 4.16: Triangulierter Ausschnitt zum Modellproblem Hochlochziegel mit Schlitzlochung.

Anhang A

A.1 Notation

T	Temperatur [K] oder [°C]
t_E	obere Grenze zur Zeititeration [s]
t, τ	Zeit, Zeitschrittweite
$t \in \tau$	Dreieck einer Triangulierung τ
$\Omega \subset \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \Omega$	Gebiet aus \mathbb{R}^d , Punkt aus Ω
Γ	Teilmenge von $\partial\Omega$
Ω_h	Menge der Knoten, Gitter
\mathbf{Q}	$\Omega \times (0, T]$
h	Ortsschrittweite
ρ	Rohdichte [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]
k	Wärmedurchgangskoeffizient [$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$]
$\lambda = k \rho c$	Wärmeleitfähigkeit [$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$]
α	Wärmeübergangskoeffizient [$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$]
c	spezifische Wärmekapazität [$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$]
$C(\Omega)$	die auf Ω stetigen Funktionen
u^h	Funktion aus dem Ansatzraum
$u_h(t)$	globaler Knotenvektor (zeitabhängig)
u_t	lokaler Knotenvektor, Elementvektor
A_h, M_h	Diskretisierungsmatrizen
$x_l, x_h, f_h, f_l, e_h, e_l, d_h$	Vektoren
$A^e(t)$	Elementmatrix zum Dreieck $t \in \tau$
a_t, c_t	Faktoren bzgl. $t \in \tau$, vgl. (2.14), (2.15)
b	Bilanzbereich, Box
$\gamma, \hat{\gamma}$	Integrationsweg (Integrationsweg bzgl. des Referenzdreiecks)
$n, n_{ij}, n_{\text{out}}$	Normalenvektoren
$\phi(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x})$	Basisfunktionen (Basisfunktionen bzgl. des Referenzdreiecks)
$\mathcal{O}(\cdot)$	Landau-Symbol
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$j(t, i)$	vgl. (2.12)
\mathcal{I}	Indexmenge zu Ω_h

Definition 3 (zulässige Triangulierung, [8]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygonebiet.

$$\tau := \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$$

heißt zulässige Triangulierung von Ω , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. t_i ($i = 1, \dots, k$) sind offene Dreiecke,

2. die "finiten Elemente" t_i sind disjunkt: $t_i \cap t_j = \emptyset$ für $i \neq j$,

$$3. \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^k \bar{t}_i,$$

4. für $i \neq j$ ist $\bar{t}_i \cap \bar{t}_j$ entweder

(a) leer oder

(b) eine gemeinsame Seite der Elemente t_i und t_j oder

(c) eine gemeinsame Ecke der Elemente t_i und t_j .

A.2 Elementare geometrische Beziehungen

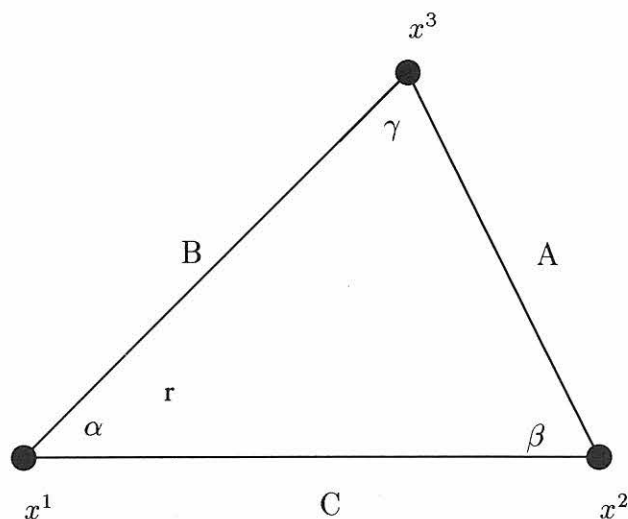


Abbildung A.1: Bezeichnungen für allgemeine Dreiecke.

Der Schwerpunkt s im Dreieck t ist

$$s = \frac{1}{3} (\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3).$$

Sinusatz:

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}. \quad (\text{A.1})$$

Kosinussatz:

$$\cos(\alpha) = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}, \quad \cos(\beta) = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC}, \quad \cos(\gamma) = \frac{B^2 + A^2 - C^2}{2AB}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} \cos(\gamma) &= \frac{B^2 + A^2 - C^2}{2BC} = -\frac{-B^2 - A^2 + C^2 + 2B^2 - 2B^2}{2BC} \\ &= -\cos(\alpha) + \frac{B}{C} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} \cos(\beta) &= \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2BC} = -\frac{-A^2 - C^2 + B^2 + 2C^2 - 2C^2}{2BC} \\ &= -\cos(\alpha) + \frac{C}{B}. \end{aligned}$$

Bemerkung 10. Mit den Bezeichnungen aus (2.14) und (2.14) gilt

$$-\frac{A}{B} \cos(\beta) = c_t - a_t, \quad -\frac{A}{B} \cos(\beta) = c_t - \frac{1}{a_t}. \quad (\text{A.2})$$

Seien m_A , m_B und m_C die Seitenhalbierenden, so ist

$$\begin{aligned} m_C &= \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\gamma)} \\ m_B &= \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + A^2 + 2AC \cos(\beta)} \\ m_A &= \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + B^2 + 2CB \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

A.3 Transformationen

$t \in \tau$ sei gegeben durch die drei Eckpunkte $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ und \mathbf{x}^3 . Jedes Dreieck $t \in \tau$ lässt sich affin auf das Referenzdreieck abbilden, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung

$$F_t : t \rightarrow T, \quad F_t \mathbf{x} := B_t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^1)$$

bzw.

$$F_t^{-1} : T \rightarrow t, \quad F_t^{-1} \xi := B_t^{-1} \xi + \mathbf{x}^1$$

mit der regulären Matrix B_t :

$$B_t^{-1} = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_1 & (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_1 \\ (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_2 & (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_2 \end{bmatrix},$$

$$\det B_t^{-1} = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_1 (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_2 - (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_2 (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_1$$

und

$$B_t = \frac{1}{\det B_t^{-1}} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_2 & (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3)_1 \\ (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)_2 & (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_1 \end{bmatrix}.$$

Ist $|t| = \mathcal{O}(h^2)$, d.h. $\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| = \mathcal{O}(h)$ für $i \neq j$, so gilt

$$\det(B_t) = \mathcal{O}(h^{-2}) \quad \text{und} \quad \det(B_t^{-1}) = \mathcal{O}(h^2).$$

Bemerkung 11. Für ein beliebiges Dreieck seien a und c die Größen aus (2.14) bzw. (2.15). Dann gilt

$$|\det B_t| = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2} a \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|^2} = \frac{1}{2|t|}. \quad (\text{A.3})$$

Zu jeder Funktion $\hat{u} : T \rightarrow \mathbb{R}$ definiert

$$u(\mathbf{x}) := \hat{u}(F_t(\mathbf{x})) \quad \text{d.h.} \quad u = \hat{u} \circ F_t$$

eine Funktion $u : t \rightarrow \mathbb{R}$.

Für den Gradienten von u gilt (Kettenregel)

$$\nabla u(\mathbf{x}) = B_t^T \widehat{\nabla} \hat{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{x}} = F_t(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in t, \quad \widehat{\mathbf{x}} \in T.$$

Ist n_{ij} der Normalenvektor zu einer Boxkante γ_{ij} , so berechnet sich die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{x})$ zu

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{x}) = \langle \vec{n}, \nabla u(\mathbf{x}) \rangle = \langle \vec{n}, B_t^T \widehat{\nabla} \hat{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \rangle = \langle B_t \vec{n}, \widehat{\nabla} \hat{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \rangle = \frac{\partial}{\partial B_t n} \hat{u}(\widehat{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.4})$$

Die Basisfunktionen im Referenzdreieck werden mit $\widehat{\varphi}_i$, $i = 1, 2, 3$, bezeichnet. Sie lauten

$$\widehat{\varphi}_1(x, y) := 1.0 - x + y, \quad \widehat{\varphi}_2(x, y) := x, \quad \text{und} \quad \widehat{\varphi}_3(x, y) := y.$$

Zu jedem Gitterpunkt $\mathbf{x}^j \in \Omega_h$ wird eine Basisfunktion $\varphi_j \in C(\overline{\Omega})$ mit

$$\varphi_j(\mathbf{x}^k) = \delta_{jk}, \quad \mathbf{x}^k \in \Omega_h$$

gewählt. Die (auf ein $t \in \tau$) eingeschränkten Basisfunktionen sind durch die affine Abbildung $F_t : t \rightarrow T$ gegeben:

$$\varphi_{j(i,t)} \Big|_t (\mathbf{x}) := \widehat{\varphi}_i(F_t(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in t, \quad t \in \tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ein Normalenvektor n geht aus γ durch Drehung um $\pi/2$ entgegen dem Uhrzeigersinn hervor, besitzt also die Darstellung

$$n = \frac{1}{|\gamma|} D \gamma = \frac{1}{|\gamma|} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \gamma.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} B_t D &= \frac{1}{\det B_t^{-1}} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)_2 & (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3)_1 \\ (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)_2 & (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det B_t^{-1}} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3)_1 & (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3)_2 \\ (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_1 & (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)_2 \end{bmatrix} \\ &= \det B_t [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1]^T. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Sei T das Referenzdreieck, $t \in \tau$, $\gamma \subset t$ eine Boxkante und $\widehat{\gamma} \subset T$ mit $\widehat{\gamma} = F_t(\gamma)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} u(s) ds = \frac{|\gamma|}{|\widehat{\gamma}|} \int_{\widehat{\gamma}} \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

A.4 Berechnung des Wärmestromes

Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 hat man die

Bemerkung 12. Sei Γ_{in} die Warmseite eines Gebietes. Es gilt dann

$$\Phi(\Gamma_{in}) = \int_{\Gamma_{in}} \alpha(\mathbf{x})(T_{\infty} - T(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

bzw.

$$q_{\text{din}}(\Gamma_{in}) = \frac{1}{|\Gamma_{in}|} \int_{\Gamma_{in}} \alpha(\mathbf{x})(T_{\infty} - T(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Beweis: Die Warm- bzw. Kaltseite des Bauteils ist gerade der Bereich mit Robin-Randbedingungen. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma_{in}) &= \int_{\Gamma_{in}} \langle q(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{in}} \lambda(\mathbf{x}) \langle \nabla T(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_{in}} \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{in}} \alpha(\mathbf{x})(T_{\infty} - T(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

□

Abbildungsverzeichnis

2.1	Bilanzbereiche nach dem MD-Schema.	5
2.2	Bilanzbereiche nach dem PB-Schema.	6
2.3	Bezeichnungen	7
2.4	Lokale Numerierung der Knoten und Wege	9
2.5	Lokale Numerierung der Knoten und Boxkanten (PB-Schema)	11
2.6	PB-Box für ein Dreieck mit $\alpha > \pi/2$	13
2.7	Polygonzug mit Materialgrenze.	16
2.8	Zoom in die rechte untere Ecke	16
2.9	Hochlochziegel mit Schlitzlochung und Putzschichten	18
2.10	Triangulierung des Hochlochziegels mit der Qualitätsoption -q20	19
2.11	Triangulierung des Hochlochziegels mit Qualitäts- und Flächenoption	20
3.1	Grob- und Feingitterpunkte	23
3.2	Nieder- und hochfrequente Gitterfunktion	24
4.1	Triangulierungen zum Modellproblem I.	31
4.2	Numerische Lösung $T^h(\mathbf{x})$ (Gitter <code>bspmIrr.g</code> , Level 1).	32
4.3	Fehler $T(\mathbf{x}) - T^h(\mathbf{x})$ (Gitter <code>bspmIrr.g</code> , Level 1).	32
4.4	Reduktionsfaktoren zum Testproblem I.a.	34
4.5	Defekte zum Testproblem I.a.	34
4.6	Skizze zum Modellproblem II.	35
4.7	Ergebnisse zum Testproblem II	36
4.8	Eckbereich	37
4.9	Defekte zum Testproblem III	38
4.10	Skizze zum Modellproblem III.	39
4.11	Modellproblem III	40
4.12	Abhängigkeit von ϵ , $\dim A_h = 3969$	41
4.13	Abhängigkeit von ϵ , $\dim A_h = 15617$	41
4.14	Temperaturverteilung zum Testproblem III, $\dim A_h = 3969$; stark verzerrt	42
4.15	Fehler: Mehrgitterlösung - direktes Verfahren	42
4.16	Hochlochziegel mit Schlitzlochung	44
A.1	Bezeichnungen für allgemeine Dreiecke.	46

Tabellenverzeichnis

4.1	Werte zum Gitter nach Abbildung 4.1(a).	31
4.2	Werte zum Gitter nach Abbildung 4.1(b).	31
4.3	Statistik zum Gitter nach Abb. 4.1(a)	33
4.4	Statistik zum Gitter nach Abb. 4.1(a)	33
4.5	Konvergenzfaktoren und Rechenzeiten bzgl. des Gitters nach Abb. 4.1(a).	33
4.6	Konvergenzfaktoren und Rechenzeiten bzgl. des Gitters nach Abb. 4.1(b).	34
4.7	Materialeigenschaften Modellproblem II	35
4.8	Dimensionen und die Anzahl der Nichtnullelemente für II.1-II.3.	36
4.9	Konvergenzfaktoren bzgl. des Gitters nach Abb. 4.8.	36
4.10	Materialeigenschaften Modellproblem III	38
4.11	Dimensionen und die Anzahl der Nichtnullelemente für III.1-III.2.	38
4.12	Materialeigenschaften Modellproblem IV	43
4.13	Statistik Hochlochziegel	43

Algorithmenverzeichnis

1	Zweigitterschritt	24
2	Zweigitterverfahren	24
3	Mehrgitterschritt	25
4	Mehrgitterverfahren	25
5	AMG: Zerlegungsphase	26

Literaturverzeichnis

- [1] Alexiades, V., Solomon, A.D.: Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. Hemisphere Publishing Corporation, Washington 1993.
- [2] Bunse W., Bunse-Gerstner A.: Numerische lineare Algebra. Teubner, Stuttgart 1985.
- [3] Braess, D.: Towards Algebraic Multigrid for Elliptic Problems of Second Order. Computing 55, 379-393 (1995).
- [4] Duff, I.S., Erisman, A.M., Reid, J.K.: Direct Methods for Sparse Matrices. Clarendon Press, Oxford 1986.
- [5] Fischer, G.: Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig 1979.
- [6] Glowinski, G.: Numerical methods for Nonlinear Variational Problems (Springer Series in Computational Physics). Springer-Verlag, New York 1984.
- [7] Gustavson, F.G.: Two fast Algorithms for Sparse Matrices: Multiplication and Permuted Transposition. ACM Transactions on Mathematical Software Vol. 4 (3), 250-269 (1978).
- [8] Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart 1986.
- [9] Hackbusch, W.: On first and second Order Box Schemes. Computing 41, 277-296 (1989).
- [10] Hackbusch, W.: Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme. Teubner, Stuttgart 1991.
- [11] Hackbusch, W.: Multi-grid methods and applications. Springer-Verlag, Berlin 1985.
- [12] Häfner, F., Sames, D., Voigt, H.-D.: Wärme- und Stofftransport. Mathematische Methoden. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [13] Heinrich, B.: Finite Difference Methods on Irregular Networks. A generalized approach to second order problems. ISNM Vol. 82. Birkhäuser, Basel 1987.
- [14] Liebau, F.: The Finite Volume Element Method with Quadratic Basis Function. Computing 57, 281-299 (1996).
- [15] Neittaanmäki, P., Tiba, D.: Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Marcel Dekker Inc., New York 1994.
- [16] Rudolphi, R., Müller, R.: Bauphysikalische Temperaturberechnungen in FORTRAN. Band 1: Zwei - bzw. dreidimensionale stationäre Probleme des Wärmeschutzes. Teubner, Stuttgart 1985.
- [17] Rudolphi, R., Kownatzki, B.: PC-Computersimulation von Tauwasserschäden und Wärmebrückenwirkungen mit Dreiecks- und Rechteckselementen auf Diskette. Teil 1: wksb 40, Neue Folge 36, 35-42 (1995). Teil 2: wksb 41, Neue Folge 37, 2-11 (1996).
- [18] Ruge, J., Stüben, K.: Algebraic Multigrid (AMG). Arbeitspapiere der GMD 210. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH, Sankt Augustin 1986.
- [19] Shewchuk, J.R.: Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In: First Workshop on Applied Computational Geometry, 124-133, Association for Computing Machinery 1996.

- [20] Vanek, P., Mandel, J., Brezina, M.: Algebraic Multigrd by smoothed aggregation for second and fourth order elliptic Problems. *Computing* 56, 179-196 (1996).
- [21] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Teubner, Stuttgart 1982.

Bisher erschienene Forschungsberichte der BAM

Nr. 1/1968
Forschung und Entwicklung in der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)

Rechenschaftsbericht für den Bundesminister für Bildung und Wissenschaft

Nr. 2/1970 (vergriffen)

G. Andreas

Zum Problem des Feuchtigkeitsschutzes von Dehnungsmeßstreifen und Halbleitergeräten

Nr. 3/1970

J. Ziebs

Über das mechanische Verhalten von Aluminium-Stahl-Freileitungsseilen als Beispiel für Verbundbauteile

Nr. 4/1970 (vergriffen)

A. Burmester

Formbeständigkeit von Holz gegenüber Feuchtigkeit — Grundlagen und Vergütungsverfahren

Nr. 5/1971

N. Steiner

Die Bedeutung der Netzstellenart und der Netzwerkkettendichte für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften und des Abbaus von elastomeren Netzwerken

Nr. 6/1971

P. Schneider

Zur Problematik der Prüfung und Beurteilung des Luftschallschutzes von Bauelementen bei unterschiedlichen Einbaubedingungen

Nr. 7/1971

H.-J. Petrowitz

Chromatographie und chemische Konstitution — Untersuchungen über den Einfluß der Struktur organischer Verbindungen auf das Verhalten bei der Dünnenschicht-Chromatographie

Nr. 8/1971

H. Veith

Zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Baustählen bei Wechselbeanspruchung

Nr. 9/1971

K.-H. Möller

Untersuchung über die sichernde Wirkung poröser Massen in Acetylenflaschen

Nr. 10/1972

D. Aurich, E. Martin

Untersuchungen über die Korngrößenbestimmung mit Ultraschall zur Entwicklung einer für die Praxis geeigneten zerstörungsfreien Meßmethode

Nr. 11/1972

H.-J. Krause

Beitrag zur Kenntnis der Schnittriefenbildung und Schnittgütwerte beim Brennschneiden

Nr. 12/1972

H. Feuerberg

Über Veränderungen von Nylon-6-Fasern beim Texturieren

Nr. 13/1972

K.-H. Habig, K. Kirschke, W.-W. Maennig, H. Tischer
Festkörpergleitreibung und Verschleiß von Eisen, Kobalt, Kupfer, Silber, Magnesium und Aluminium in einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch zwischen 760 und $2 \cdot 10^{-7}$ Torr

Nr. 14/1972

E. Fischer

Untersuchungen zur Amplitudenabhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Metallen bei 20 kHz

Nr. 15/1972

H. Pohl

Studie und Probleme der chemischen Edelmetall-Analyse

Nr. 16/1972

E. Knublauch

Über Ausführung und Aussagefähigkeit des Normbrandversuches nach DIN 4102 Blatt 2 im Hinblick auf die Nachbildung natürlicher Schadenfeuer

Nr. 17/1972

P. Reimers

Aktivierungsanalyse mit schnellen Neutronen, Photonen und geladenen Teilchen

Nr. 18/1973

W. Struck

Das Sprödbruchverhalten des Baustahles R St 37-2 N in geschweißten Konstruktionen, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches

Nr. 19/1973

K. Kaffanke, H. Czichos

Die Bestimmung von Grenzflächentemperaturen bei tribologischen Vorgängen

Nr. 20/1973

R. Rudolphi

Brandrisiko elektrischer Leitungen und Installationen in Wänden

Nr. 21/1973

D. Klaffke, W. Maennig

Die kontinuumsmechanische Erfassung des zeitlichen Ablaufs der elastisch-plastischen Dehnungen bei der Zerrüttung

Nr. 22/1973

R. Rudolphi, E. Knublauch

Untersuchungen für ein Prüfverfahren zur Bemessung der Brandschutzbekleidung von Stahlstützen

Nr. 23/1973

W. Ruske

Reichs- und preußische Landesanstalten in Berlin. Ihre Entstehung und Entwicklung als außeruniversitäre Forschungsanstalten und Beratungsorgane der politischen Instanzen

Nr. 24/1973

J. Stanke, E. Klement, R. Rudolphi

Das Brandverhalten von Holzstützen unter Druckbeanspruchung

Nr. 25/1973

E. Knublauch

Über das Brandgeschehen vor der Fassade eines brennenden Gebäudes unter besonderer Berücksichtigung der Feuerbeanspruchung von Außenstützen

Nr. 26/1974

P. Jost, P. Reimers, P. Weise

Der Elektronen-Linearbeschleuniger der BAM — Eigenschaften und erste Anwendungen

Nr. 27/1974

H. Wüstenberg

Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung mit Ultraschall

Nr. 28/1974

H. Heinrich

Zum Ablauf von Gasexplosionen in mit Rohrleitungen verbundenen Behältern

Nr. 29/1974

P. Schneider

Theorie der dissipativen Luftschalldämmung bei einem Idealisotropen porösen Material mit starrem Skelett für senkrechten, schrägen und allseitigen Schalleinfall

Nr. 30/1974 (vergriffen)

H. Czichos, G. Salomon

The Application of Systems Thinking and Systems Analysis to Tribology

Nr. 31/1975

G. Fuhrmann

Untersuchungen zur Klärung des Verhaltens thermoplastischer Kunststoffe bei Wechseldehnungsbeanspruchung

Nr. 32/1975

R. Rudolphi, B. Böttcher

Ein thermo-elektrisches Netzwerkverfahren zur Berechnung stationärer Temperatur- und Wärme-stromverteilungen mit Anwendungsbeispielen

Nr. 33/1975

A. Wagner, G. Kieper, R. Rudolphi

Die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Baustoffen mit Hilfe eines nichtstationären Meßverfahrens

Nr. 34/1976 (vergriffen)

H.-J. Deppe

Untersuchungen zur Vergütung von Holzwerkstoff

Nr. 35/1976

E. Limberger

Der Widerstand von Platten, die als Beplankungsmaterial leichter Wände verwendet werden, gegenüber dem Aufprall harter Körper — Vorschlag für ein Prüfverfahren

Nr. 36/1976 (vergriffen)

J. Hundt

Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles

Nr. 37/1976

W. Struck

Die stoßartige Beanspruchung leichter, nichttragender Bauteile durch einen mit der Schulter gegenprallenden Menschen — Vorschlag für ein Prüfverfahren

Nr. 38/1976

K.-H. Habig

Verschleißuntersuchungen an gas-, bad- und ionitriertem Stahl 42 CrMo 4

Nr. 39/1976

K. Kirschke, G. Kempf

Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (mit Nicht-Newtonschem Fließverhalten) insbesondere bei höherer Schwerbeanspruchung

Nr. 40/1976

H. Hantsche

Zum Untergrundabzug bei energiedispersiven Spektren nach verschiedenen Verfahren

Nr. 41/1976

B. Böttcher

Optische Eigenschaften cholesterinischer Flüssigkeiten

Nr. 42/1976

S. Dietlen

Ermittlung der Mindestzündenergie brennbarer Gase in Mischung mit Luft

Nr. 43/1976

W. Struck

Das Sprödbruchverhalten geschweißter Bauteile aus Stahl mit zäh-sprödem Übergang im Bruchverhalten, dargestellt mit Hilfe der Methode des Temperaturvergleiches

Nr. 44/1976

W. Matthees

Berechnung von räumlichen, linear elastischen Systemen, die aus finiten Stab- und Balkenelementen zusammengesetzt sind, unter Verwendung des Programms "Stab-Werk"

Nr. 45/1976

W. Paatsch

Untersuchung des Elektrodenverhaltens im Vakuum aufgedampfter Metallschichten

Nr. 46/1977 (vergriffen)

G. Schickert, H. Winkler

Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung (Results of Test Concerning Strength and Strain of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses)

- Nr. 47/1977
A. Plank
Bautechnische Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Kunststoffdübeln für Fassadenbekleidungen
- Nr. 48/1977
U. Holzöhner
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last, angewendet auf die Fundamente einer geplanten Schnellbahn
- Nr. 49/1977
G. Wittig
Untersuchungen zur Anwendung von Mikrowellen in der zerstörungsfreien Prüfung
- Nr. 50/1978 (vergriffen)
N. Czaika, N. Mayer, C. Amberg, G. Magiera, G. Andraea, W. Markowski
Zur Meßtechnik für die Sicherheitsbeurteilung und Überwachung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern
- Nr. 51/1978
J. Sickfeld
Auswirkung von chemischen und physikalisch-technologischen Einflußfaktoren auf das Beständigkeitsverhalten von Oberflächenbeschichtungen auf der Basis von Reaktionsbeschichtungsstoffen
- Nr. 52/1978
A. Tomov
Zum Einfluß der Gleitgeschwindigkeit auf das tribologische Verhalten von Werkstoffen hoher Härte bei reiner Festkörperreibung
- Nr. 53/1978
R.-G. Rohrmann, R. Rudolphi
Bemessung und Optimierung beheizbarer Straßen- und Brückenbeläge
- Nr. 54/1978
H. Sander
Magnetisches Verhalten dünner Eisenschichten bei mechanischer Wechselbeanspruchung
- Nr. 55/1978
D. Klaffke
Beobachtung und Orientierungsbestimmung der Oberflächenkristalle polykristalliner 99,999 %-Al-Proben bei Biegewechselbeanspruchung
- Nr. 56/1979
W. Brünner, C. Langlie
Stabilität von Sandwichbauteilen
- Nr. 57/1979
M. Stadthaus
Untersuchungen an Prüfmitteln für die Magnetpulverprüfung (Investigations on Inspection-Media for Magnetic Particle-Testing)
- Nr. 58/1979
W. Struck
Ermittlung des Bauteilwiderstandes aus Versuchsergebnissen bei vereinbartem Sicherheitsniveau
- Nr. 59/1979
G. Plauk
Ermittlung der Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken mit der Methode der Finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung des Verbundes zwischen Beton und Stahl
- Nr. 60/1979
H. Spreckelmeyer, R. Helms, J. Ziebs
Untersuchungen zur Erfassung der Kaltformbarkeit von Feinblechen beim Strecken
- Nr. 61/1979
K. Richter
Beschreibung von Problemen der höheren Farbmetrik mit Hilfe des Gegenfarbensystems
- Nr. 62/1979
W. Gerisch, G. Becker
Geomagnetobiologisch bedingter Zusammenhang zwischen der Fraßaktivität von Termiten und der Zahl der Sterbefälle
- Nr. 63/1979
E. Behrend, J. Ludwig
Untersuchungen an Stopfbuchsen von Ventilen und Schiebern für Gase
- Nr. 64/1980
W. Rücker
Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung
- Nr. 65/1980
P. Schmidt, D. Aurich, R. Helms, H. Veith, J. Ziebs
Untersuchungen über den Einfluß des Spannungszustandes auf bruchmechanische Kennwerte
- Nr. 66/1980
M. Hattwig
Auswirkung von Druckentlastungsvorgängen auf die Umgebung
- Nr. 67/1980
W. Matthees
Beitrag zur dynamischen Analyse von vorgespannten und vorbelasteten Feder-Masse-Systemen mit veränderlicher Gliederung unter stoßartiger Beanspruchung
- Nr. 68/1980
D. Petersohn
Oberflächenmeßverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Stereomeßtechnik — Entwicklung eines volleuzentrischen Präzisions-Goniometers
- Nr. 69/1980
F. Buchhardt, P. Brandl
Untersuchungen zur Integrität des Liners von Reaktorsicherheitschülern (Containments) in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
- Nr. 70/1980 (vergriffen)
G. Schickert
Schwellenwerte beim Betondruckversuch
- Nr. 71/1980
W. Matthees, G. Magiera
Untersuchungen über durch den Boden gekoppelte dynamische Wechselwirkungen benachbarter Kernkraftwerksbauten großer Masse unter seismischen Einwirkungen
- Nr. 72/1980
R. Rudolphi
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen am Beispiel von Stahl- und Holzstützen
- Nr. 73/1980
P. Wegener
Vergleichende Untersuchungen zum Tragverhalten von Klemmkupplungen für Stahlrohrgerüste nach bestehenden deutschen Prüfvorschriften und geplanten europäischen bzw. internationalen Prüfnormen
- Nr. 74/1980
R. Rudolphi, R. Müller
ALGOL-Computerprogramm zur Berechnung zweidimensionaler instationärer Temperaturverteilungen mit Anwendungen aus dem Brand- und Wärmeschutz
- Nr. 75/1980
H.-J. Heinrich
Beitrag zur Kenntnis des zeitlichen und örtlichen Druckverlaufs bei der plötzlichen Entlastung unter Druck stehender Behälter und Behälterkombinationen
- Nr. 76/1980
D. Klaffke, W.-W. Maennig
Deformationsverhalten von Rein- und Reinstaluminium sowie Cu 99,9 und St 37 bei Biegewechselbeanspruchung im Rasterelektronenmikroskop
- Nr. 77/1981
M. Gierloff, M. Maultzsch
Untersuchung des Verhaltens von Lagerzementen
- Nr. 78/1981
W. Rücker
Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund
- Nr. 79/1981
V. Neumann
Ein Beitrag zur Untersuchung der wasserstoffbeeinflußten Kaltrißeigung höherfester niedriglegierter Feinkornbaustähle mit dem Implantversuch
- Nr. 80/1981
A. Plank, W. Struck, M. Tzschätzsch
Ursachen des Teileinsturzes der Kongreßhalle in Berlin-Tiergarten
- Nr. 81/1981
J. Schmidt
Graphisch-rechnerisches Verfahren zum Erfassen der Zündhäufigkeit zündbarer Stoffe; Anwendung auf Datenmaterial aus dem Bereich der Statistik
- Nr. 82/1982
R. Helms, H.-J. Kühn, S. Ledworuski
Zur werkstoffmechanischen Beurteilung des Kerbschlagbiegeversuches (Assesment of the mechanical behaviour of materials in the notched bar impact test)
- Nr. 83/1982
H. Czichos, P. Feinle
Tribologisches Verhalten von thermoplastischen Kunststoffen — Kontaktdeformation, Reibung und Verschleiß, Oberflächenuntersuchungen
- Nr. 84/1982
R. Müller, R. Rudolphi
Übertragbarkeit der Ergebnisse von Brandprüfungen im Kleinprüfstand (Vergleichsversuche)
- Nr. 85/ISBN 3-88314-231-X/1982
H. Czichos
Technische Materialforschung und -prüfung — Entwicklungstendenzen und Rahmenvorschläge für ein EG-Programm "Basic Technological Research"
- Nr. 86/ISBN 3-88314-232-8/1982
K. Niesel, P. Schimmelwitz
Zur quantitativen Kennzeichnung des Verwitterungsverhaltens von Naturwerksteinen anhand ihrer Gefügemerkmale
- Nr. 87/ISBN 3-88314-240-9/1982
B. Isecke, W. Stichel
Einfluß baupraktischer Umgebungsbedingungen auf das Korrosionsverhalten von Spannstählen vor dem Injizieren
- Nr. 88/ISBN 3-88314-254-9/1983
A. Erhard
Untersuchungen zur Ausbreitung von Longitudinalwellen an Oberflächen bei der Materialprüfung mit Ultraschall
- Nr. 89/ISBN 3-88314-263-8/1983
D. Conrad, S. Dietlen
Untersuchungen zur Zerfallsfähigkeit von Distickstoffoxid
- Nr. 90/ISBN 3-88314-264-6/1983
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen (Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members)
- Nr. 91/ISBN 3-88314-265-4/1983
M. Weber
Dreidimensionale Analyse von unbewehrtem Beton mit nichtlinear-elastischem Materialgesetz
- Nr. 92/ISBN 3-88314-266-2/1983
L. Auersch
Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden

- Nr. 93/ISBN 3-88314-283-2/1983
P. Studt
Unterdrückung stick-slip-induzierter Kurvengeräusche schienengebundener Fahrzeuge durch eine physikalisch-chemische Oberflächenbehandlung der Schienen
- Nr. 94/ISBN 3-88314-284-0/1983
Xian-Quan Dong
Untersuchungen der Störschwingungen beim Kerbschlagbiegeversuch und deren Abschwächungen
- Nr. 95/ISBN 3-88314-289-1/1983
M. Römer
Über die Fokussierung des Schallfeldes von Ultraschall-Prüfköpfen mit Fresnelschen Zonenplatten
- Nr. 96/ISBN 3-88314-296-4/1983
H. Eißler
Verbundverhalten zwischen Beton und geripptem Betonstahl sowie sein Einfluß auf inelastische Verformungen biegebeanspruchter Stahlbetonbalken
- Nr. 97/ISBN 3-88314-297-2/1983
G. Fuhrmann, W. Schwarz
Typische Bruchflächenbildung thermoplastischer Kunststoffe nach wechselnder mechanischer Beanspruchung
- Nr. 98/ISBN 3-88314-312-X/1983
E. Schnabel
Bestimmung des elastischen Verhaltens von Maschinenwaren — Stretch- und Erholungsvermögen
- Nr. 99/ISBN 3-88314-317-0/1983
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen
(Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members)
- Nr. 100/ISBN 3-88314-298-0/1984
G. Klamrowski, P. Neustupny
Untersuchungen zur Prüfung von Beton auf Frostwiderstand
- Nr. 101/ISBN 3-88314-327-8/1984
P. Reimers, J. Goebbels, H. Heidt, P. Weise, K. Wilding
Röntgen- und Gammastrahlen-Computer-Tomographie
- Nr. 102/ISBN 3-88314-335-9/1984
G. Magiera
Weiterentwicklung des hydraulischen Kompensationsverfahrens auf Druckspannungsmessung in Beton
- Nr. 103/ISBN 3-88314-328-6/1984
D. Schnitger
Radiographie mit Elektronen aus Metallverstärkerfolien
- Nr. 104/ISBN 3-88314-339-1/1984
M. Gierloff
Beeinflussung von Betoneigenschaften durch Zusatz von Kunststoffdispersionen
- Nr. 105/ISBN 3-88314-345-6/1984
B. Schulz-Forberg
Beitrag zum Bremsverhalten energieumwandelnder Aufsetzpuffer in Aufzugsanlagen
- Nr. 106/ISBN 3-88314-360-X/1984
J. Lehnert
Setzung von Fundamenten infolge dynamischer Last
- Nr. 107/ISBN 3-88314-361-8/1984
W. Stichel, J. Ehreke
Korrosion von Stahlradiatoren
- Nr. 108/ISBN 3-88314-363-4/1984
L. Auersch
Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen — Ergebnisse von Modellrechnungen
- Nr. 109/ISBN 3-88314-381-2/1985
M. Omar
Zur Wirkung der Schrumpfbehinderung auf den Schweißspannungszustand und das Spröbruchverhalten von unterpulvergeschweißten Blechen aus St E 460 N
- Nr. 110/ISBN 3-88314-382-0/1985
H. Walde, B. Kropp
Wasserstoff als Energieträger
- Nr. 111/ISBN 3-88314-383-9/1985
K. Ziegler
Über den Einfluß der Initiierung auf die detonative Umsetzung von Andex-Sprengstoffen unter Berücksichtigung sicherheitstechnischer Gesichtspunkte
- Nr. 112/ISBN 3-88314-409-6/1985
W. Lützwow
Zeitstandverhalten und strukturelle Veränderungen von vielfach wiederverarbeiteten Polyethylenen
- Nr. 113/ISBN 3-88314-410-X/1985
R. Helms, H. Henke, G. Oelrich, T. Saito
Untersuchungen zum Frequenzeinfluß auf die Schwingungskorrosion von Offshore-Konstruktionen
- Nr. 114/ISBN 3-88314-419-3/1985
P. Rose, P. Raabe, W. Daum, A. Szameit
Neue Verfahren für die Prüfung von Reaktorkomponenten mittels Röntgen- und Gammastrahlen
- Nr. 115/ISBN 3-88314-420-7/1985
K. Richter
Farbempfindungsmerkmal Elementaruntton und Buntheitsabstände als Funktion von Farbart und Leuchtdichte von In- und Umfeld
- Nr. 116/ISBN 3-88314-460-6/1985
F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi, A. Wagner
Theoretische Ermittlung des Wärmedurchgangskoeffizienten von Fensterkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung der Rahmenproblematik
- Nr. 117/ISBN 3-88314-468-1/1985
H. Czichos, G. Sievers
Materials Technologies and Techno-Economic Development — A Study for the German Foundation for International Development (Deutsche Stiftung für Internationale Entwicklung)
- Nr. 118/ISBN 3-88314-469-X/1985
H. Treumann, H. Andre, E. Blossfeld, N. Pfeil, M.-M. Zindler
Brand- und Explosionsgefahren explosionsgefährlicher Stoffe bei Herstellung und Lagerung — Modellversuche mit pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen
- Nr. 119/ISBN 3-88314-472-X/1985
J. Herter, K. Brandes, E. Limberger
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Versuche an Stahlbetonplatten, Teil I
(Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members — Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part 1)
- Nr. 120/ISBN 3-88314-514-9/1986
A. Hecht
Zerstörungsfreie Korngrößenbestimmung an austenitischen Feinblechen mit Hilfe der Ultraschallrückstreuung
- Nr. 121/ISBN 3-88314-530-0/1986
P. Feinle, K.-H. Habig
Versagenskriterien von Stahlgleitpaarungen unter Mischreibungsbedingungen; Einflüsse von Stahlzusammensetzung und Wärmebehandlung
- Nr. 122/ISBN 3-88314-521-1/1986
J. Mischke
Entsorgung kerntechnischer Anlagen
Sonderkolloquium der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) am 10. 12. 1985 mit Beiträgen von B. Schulz-Forberg, K. E. Wieser und B. Droste
- Nr. 123/ISBN 3-88314-531-9/1986
D. Rennoch
Physikalisch-chemische Analyse sowie toxische Beurteilung der beim thermischen Zerfall organisch-chemischer Baustoffe entstehenden Brandgase
- Nr. 124/ISBN 3-88314-538-6/1986
H.-M. Thomas
Zur Anwendung des Impuls-Wirbelstromverfahrens in der zerstörungsfreien Materialprüfung
- Nr. 125/ISBN 3-88314-540-8/1986 (vergriffen)
B. Droste, U. Probst
Untersuchungen zur Wirksamkeit der Brandschutzisolierung von Flüssiggas-Lagertanks
- Nr. 126/ISBN 3-88314-547-5/1986
W. Stichel
Korrosion und Korrosionsschutz von Metallen in Schwimmhallen
- Nr. 127/ISBN 3-88314-564-5/1986 (vergriffen)
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Versuche an Stahlbetonbalken, Teil I
(Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members — Tests on Reinforced Concrete Beams, Part I)
- Nr. 128/ISBN 3-88314-568-8/1986 (vergriffen)
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter, K. Berner
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Versuche an Stahlbetonbalken, Teil II
(Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members — Tests on Reinforced Concrete Beams, Part II)
- Nr. 129/ISBN 3-88314-569-6/1986 (vergriffen)
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter, K. Berner
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Zugversuche an Betonstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit
(Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load — Reinforcing Steel Tension Tests with high strain rates)
- Nr. 130/ISBN 3-88314-570-X/1986
W. Struck
Einfache Abschätzung der Durchbiegung und der Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material
- Nr. 131/ISBN 3-88314-585-8/1986
E. Limberger, K. Brandes, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Versuche an Stahlbetonplatten, Teil II
(Kinetic Load Bearing Capacity of Reinforced Concrete Members under Impact Load — Tests on Reinforced Concrete Slabs, Part II)
- Nr. 132/ISBN 3-88314-595-5/1987
Chr. Herold, F.-U. Vogdt
Ermittlung der Ursachen von Schäden an bituminösen Dachabdichtungen unter besonderer Berücksichtigung klimatischer Beanspruchungen
- Nr. 133/ISBN 3-88314-609-9/1987 (vergriffen)
M. Woydt, K.-H. Habig
Technisch-physikalische Grundlagen zum tribologischen Verhalten keramischer Werkstoffe
- Nr. 134/ISBN 3-88314-615-3/1987
G. Andreae, G. Niessen
Über den Kernstrahlungseinfluß auf Dehnungsmeßstreifen
- Nr. 135/ISBN 3-88314-618-8/1987
J. Ludwig, W.-D. Mischke, A. Ulrich
Untersuchungen über das Verhalten von Tankcontainern für unter Druck verflüssigte Gase bei Fallbeanspruchungen
- Nr. 136/ISBN 3-88314-636-6/1987
H.-J. Deppe, K. Schmidt
Untersuchung zur Beurteilung von Brettschichtverleimungen für den Holzbau

- Nr. 137/ISBN 3-88314-637-4/1987
D. Aurich
Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiete der Komponentensicherheit
- Nr. 138/ISBN 3-88314-635-8/1987
M. Dogunke, F. Buchhardt
Zur geowissenschaftlichen Einordnung des Gebietes der Bundesrepublik Deutschland und einer sicheren Auslegung technischer Systeme gegen den Lastfall Erdbeben
- Nr. 139/ISBN 3-88314-658-7/1987
J. Olschewski, S.-P. Scholz
Numerische Untersuchung zum Verhalten des Hochtemperaturwerkstoffes Nimonic PE 16 unter monotoner und zyklischer Belastung bei Verwendung verschiedener plastischer und viskoplastischer Materialmodelle
- Nr. 140/ISBN 3-88314-643-9/1987
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen (Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members)
- Nr. 141/ISBN 3-88314-694-3/1987
F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera, F. Mathiak
Zum Einfluß des Sicherheits- und Auslegungserdebens auf die Bemessung von Kernkraftwerken
- Nr. 142/ISBN 3-88314-695-1/1987
H. Treumann, G. Krüger, N. Pfeil, S. von Zahn-Ullmann
Sicherheitstechnische Kenndaten und Gefährzahlen binärer Mischungen aus oxidierenden und verbrennlichen Substanzen
- Nr. 143/ISBN 3-88314-701-X/1987
K. Brandes, E. Limberger, J. Herter
Kinetische Grenztragfähigkeit von stoßartig belasteten Stahlbetonbauteilen — Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen bei Stoßbelastung (Kinetic Load Bearing Capacity of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Members — Experimental and numerical Investigations concerning Load Bearing Behaviour of Reinforced Concrete Members under Impact Load)
- Nr. 144/ISBN 3-88314-702-8/1987
F. Buchhardt, G. Magiera, W. Matthees, M. Weber, J. Altes
Nichtlineare dynamische Berechnungen zum Penetrationsverhalten des AVR-Reaktorgebäudes
- Nr. 145/ISBN 3-88314-711-7/1987
U. Holzlhöner
Untersuchung selbstähnlicher Systeme zur Bestimmung von Materialeigenschaften von Reibungsböden
- Nr. 146/ISBN 3-88314-714-1/1987
W. Schon, M. Mallon
Untersuchungen zur Wirksamkeit von Wasserberieselungseinrichtungen als Brandschutzmaßnahme für Flüssiggas-Lagertanks
- Nr. 147/ISBN 3-88314-720-6/1987
H.-D. Kleinschrodt
Lösung dynamischer Biege- und Torsionsprobleme von Stabsystemen aus dünnwandigen elastischen Stäben mit offenem Querschnitt mittels frequenzabhängiger Ansatzfunktionen
- Nr. 148/ISBN 3-88314-774-5/1988
W. Müller
Theoretische Untersuchung von Variationsprinzipien für elastoplastisches Materialverhalten sowie Entwicklung und numerische Erprobung von Finite-Element-Verfahren für den ebenen Spannungszustand
- Nr. 149/ISBN 3-88314-775-3/1988
U. Holzlhöner
Bestimmung baugrunderdynamischer Kenngrößen aus der Untersuchung von Bodenproben
- Nr. 150/ISBN 3-88314-776-1/1988
M. Weber
VG3D — Zeichenprogramm für vektographische Darstellung dreidimensionaler Strukturen
- Nr. 151/ISBN 3-88314-785-0/1988
L. Auersch-Saworski
Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund, insbesondere bei Anregung durch Bodenerschütterungen
- Nr. 152/ISBN 3-88314-796-6/1988
G. Plauk, G. Kretschmann, R.-G. Rohrmann
Untersuchung des baulichen Zustandes und der Tragfähigkeit vorgespannter Riegel von Verkehrszeichenbrücken der Berliner Stadtautobahn
- Nr. 153/ISBN 3-88314-797-4/1988
H. Sander, W.-W. Maennig
Magnetisches Verhalten von Eisenproben bei mechanischer Wechselbeanspruchung
- Nr. 154/ISBN 3-88314-822-9/1988
K. Breikreutz, P.-J. Uttech, K. Haedecke
Druckgesinterte Stähle als zertifiziertes Referenzmaterial für die Spektrometrie
- Nr. 155/ISBN 3-88314-825-3/1988
L. Auersch
Zur Entstehung und Ausbreitung von Schienenverkehrserschütterungen: Theoretische Untersuchungen und Messungen am Hochgeschwindigkeitszug Intercity Experimental
- Nr. 156/ISBN 3-88314-887-3/1989
G. Klamrowski, P. Neustupny, H.-J. Deppe, K. Schmidt, J. Hundt
Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von Faserzementen
- Nr. 157/ISBN 3-88314-888-1/1989
E. Limberger, K. Brandes
Versuche zum Verhalten von Stahlbetonbalken mit Übergreifungsstößen der Zugbewehrung unter stoßartiger Belastung
- Nr. 158/ISBN 3-88314-889-X/1989
R. Wäsche, K.-H. Habig
Physikalisch-chemische Grundlagen der Feststoffschmierung — Literaturübersicht
- Nr. 159/ISBN 3-88314-890-3/1989
R. Müller, R. Rudolphi
Berechnung des Wärmedurchlaßwiderstandes und der Temperaturverteilung im Querschnitt von Hausschornsteinen nach DIN 18160 Teil 6
- Nr. 160/ISBN 3-88314-917-9/1989
W. Matthees
Entwicklung eines Makroelementes durch Kondensation am Beispiel der Lastfälle Flugzeugabsturz und Erdbeben bei Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit biegeweichen Fundamenten
- Nr. 161/ISBN 3-88314-920-9/1989
G. Mellmann, M. Maultzsch
Untersuchung zur Ermittlung der Biegefestigkeit von Flachglas für bauliche Anlagen
- Nr. 162/ISBN 3-88314-921-7/1989
W. Brünner
Untersuchungen zur Tragfähigkeit großer Glasscheiben
- Nr. 163/ISBN 3-88314-922-5/1989
W. Brünner, G. Mellmann, W. Struck
Biegefestigkeit und Tragfähigkeit von Scheiben aus Flachglas für bauliche Anlagen
- Nr. 164/ISBN 3-88314-934-9/1989
R. Helms, B. Jaenicke, H. Wolter, C.-P. Bork
Zur Schwingfestigkeit großer geschweißter Stahlträger
- Nr. 165/ISBN 3-88314-935-7/1989
P. Göbel, L. Meckel, W. Schiller
Untersuchung zur Erarbeitung von Kennwerten bei Einrichtungsmaterialien (Holzwerkstoffen, Möbeln und Textilien) hinsichtlich der Formaldehyd-Emission — Teil B: Textilien
- Nr. 166/ISBN 3-88314-936-5/1989
K. Breikreutz
Modelle für Stereologische Analysen
- Nr. 167/ISBN 3-88314-937-3/1989
A. Mitakidis, W. Rucker
Erschütterungsausbreitung im elastischen Halbraum bei transienten Belastungsvorgängen
- Nr. 168/ISBN 3-88314-958-6/1990
F.-J. Kasper, R. Müller, R. Rudolphi
Numerische Untersuchung geometriebedingter Wärmebrücken (Winkel und Ecken) unter Einsatz hochauflösender Farbgraphik bei Berücksichtigung der Tauwasserproblematik und des Mindestluftwechsels
- Nr. 169/ISBN 3-88314-959-4/1990
Chr. Kohl, W. Rucker
Integration der Untergründynamik in das Programmsystem MEDYNA, dargestellt am Beispiel des Intercity Experimental (ICE)
- Nr. 170/ISBN 3-88314-960-8/1990
P. Studt, W. Kerner, Tin Win
Untersuchung der mikrobiologischen Schädigung wassergemischter Kühlschmierstoffe mit dem Ziel der Verbesserung der Arbeitshygiene, der Minderung der Geruchsbelastung und der Menge zu entsorgender Emulsionen
- Nr. 171/ISBN 3-88314-997-7/1990
F. Buchhardt
Ein Operator zur Koppelung beliebig benachbarter dynamischer Systeme am Beispiel der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung
- Nr. 172/ISBN 3-88314-998-5/1990
J. Vielhaber, G. Plauk
Grenztragfähigkeit großer Verbundprofilstützen
- Nr. 173/ISBN 3-88314-999-3/1990
B. Droste, J. Ludwig, B. Schulz-Forberg
Höherwertige Transporttechnik und ihre Konsequenzen für die Beförderung gefährlicher Güter
- Nr. 174/ISBN 3-88429-021-8/1990
D. Aurich
Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte
- Nr. 175/ISBN 3-88429-022-6/1990
W. Brocks, D. Klingbeil, J. Olschewski
Lösung der HRR-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik
- Nr. 176/ISBN 3-88429-035-6/1990
W. Matthees, G. Magiera
Iterative Dekonvolution der seismischen Basiserregung für den Zeitraum
- Nr. 177/ISBN 3-89429-090-0/1991
G. Schickert, M. Krause, H. Wiggenhauser
Studie zur Anwendung zerstörungsfreier Prüfverfahren bei Ingenieurbauwerken
- Nr. 178/ISBN 3-89429-429-9/1991
G. Andrae, J. Knapp, G. Niessen
Entwicklung und Untersuchung eines kapazitiven Hochtemperatur-Dehnungsaufnehmers für Einsatztemperaturen bis ca. 1000 °C
- Nr. 179/ISBN 3-89429-100-1/1991
H. Eifler
Die Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbeton-Plattenbalken, bewehrt mit naturhartem Betonstahl BSt 500 S im Bereich negativer Biegemomente
- Nr. 180/ISBN 3-89429-101-X/1991
E. Klement, G. Wieser
Zur numerischen Übertragbarkeit von Prüfungsergebnissen an Hausschornsteinen auf Schornsteine mit anderen lichten Querschnitten
- Nr. 181/ISBN 3-89429-105-2/1991
H. Czichos, R. Helms, J. Lexow
Industrial and Materials Technologies Research and Development Trends and Needs

- Nr. 182/ISBN 3-89429-145-1/1992
M. Weber
Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich geometriebedingter Wärmebrücken
- Nr. 183/ISBN 3-89429-163-X/1992
F. Buchhardt
Zur Dekonvolution im Zeitbereich
- Nr. 184/ISBN 3-89429-164-8/1992
M. Maultzsch, W. Stichel, E.-M. Vater
Feldversuche zur Einwirkung von Auftaumitteln auf Verkehrsbauwerke (im Rahmen des Großversuchs "Umweltfreundlicheres Streusalz")
- Nr. 185/ISBN 3-89429-165-6/1992
Renate Müller
Ein numerisches Verfahren zur simultanen Bestimmung thermischer Stoffeigenschaften oder Größen aus Versuchen — Anwendung auf das Heißdraht-Parallelverfahren und auf Versuche an Hausschornsteinen
- Nr. 186/ISBN 3-89429-211-3/1992
B. Löffelbein, M. Woydt, K.-H. Habig
Reibungs- und Verschleißuntersuchungen an Gleitpaarungen aus Ingenieurkeramischen Werkstoffen in wässrigen Lösungen
- Nr. 187/ISBN 3-89429-216-4/1992
Th. Schneider, E. Santner
Mikrotribologie: Stand der Forschung und Anwendungsmöglichkeiten — Literaturübersicht
- Nr. 188/ISBN 3-89429-243-1/1992
K. Mallwitz
Verfahren zur Vorausermittlung der Setzung von Fundamenten auf geständerten Strecken infolge zyklischer Beanspruchung
- Nr. 189/ISBN 3-89429-244-X/1992
W. Matthees, G. Magiera
Impedanzeigenschaften von Finiten-Elemente-Modellen bei Integration im Zeitraum
- Nr. 190/ISBN 3-89429-245-8/1992
G. Zachariev
Untersuchung des Versagens thermoplastischer Kunststoffe im Kurzzeit-Zugversuch und Retardations-Zugversuch
- Nr. 191/ISBN 3-89429-246-6/1992
H.-M. Bock, S. Erbay, J. With
Kritische Stahltemperatur als charakteristischer Kennwert für die Feuerwiderstandsdauer von Bauwerkssystemen aus Stahl
- Nr. 192/ISBN 3-89429-329-2/1993
D. Aurich
Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte — Lokales Rißwachstum, Ermittlung des Rißwiderstandsverhaltens aus der Kerbschlagarbeit
- Nr. 193/3-89429-291-1/1993
W. Gerisch, Th. Fritz, S. Steinborn
Statistical Consulting in the Frame of VAMAS. The Role of the Technical Working Arfea/Advisory Group. Statistical Techniques for Interlaboratory Studies and Related Projects (VAMAS Report No. 13)
- Nr. 194/ISBN 3-89429-330-6/1993
U. Krause
Ein Beitrag zur mathematischen Modellierung des Ablaufs von Explosionen
- Nr. 195/ISBN 3-89429-331-4/1993
U. Schmidtchen, G. Würsig
Lagerung und Seetransport großer Mengen flüssigen Wasserstoffs am Beispiel des "Euro-Québec Hydro-Hydrogen Pilot Projekts. Überblick über die in Deutschland anzuwendenden Gesetze, Verordnungen und technischen Regeln
- Nr. 196/ISBN 3-89429-362-4/1993
D. Lietze
Untersuchungen über das Anlaufen von Detonationen im Innern geschlossener Systeme
- Nr. 197/ISBN 3-89429-400-0/1993
A. Skopp
Tribologisches Verhalten von Siliziumnitridwerkstoffen bei Festkörpergleitreibung zwischen 22 °C und 1000 °C
- Nr. 198/ISBN 3-89429-421-3/1994
St. Meretz
Ein Beitrag zur Mikromechanik der Interphase in polymeren Faserverbundwerkstoffen
- Nr. 199/ISBN 3-89429-422-1/1994
W. F. Rüdcker, S. Said
Erschütterungsübertragung zwischen U-Bahntunneln und dicht benachbarten Gebäuden
- Nr. 200/ISBN 3-89429-423-X/1994
D. Arndt, K. Borchardt, P. Croy, E. Geyer, J. Henschen, C. Maierhofer, M. Niedack-Nad, M. Rudolph, D. Schaurich, F. Weise, H. Wiggenhauser
Anwendung und Kombination zerstörungsfreier Prüfverfahren zur Bestimmung der Mauerwerksfeuchte im Deutschen Dom
- Nr. 201/ISBN 3-89429-475-2/1994
U. Holzlöhner, H. August, T. Meggyes, M. Brune
Deponieabdichtungssysteme — Statusbericht
- Nr. 202/ISBN 3-89429-481-7/1994
J. Schmidt
Über eine Verteilungsfunktion mit Parametern für Median, Spannweite, Schiefe und Wölbung — Konzept und Anwendung
- Nr. 203/ISBN 3-8701-193-X/1998
B. Schulz-Forberg, J. Ludwig
Sicherheitsniveaus von Transporttanks für Gefahrgut
- Nr. 204/ISBN 3-89429-484-1/1994
W. Struck, E. Limberger
Der Glaskugelsack als Prüfkörper für Beanspruchungen durch weichen Stoß — eine erweiterte Modellvorstellung
- Nr. 205/ISBN 3-89429-516-3/1995
P. Rose
Bestimmung charakteristischer Fehlermerkmale zur rechnergestützten Bildauswertung von Schweißnahradiographien
- Nr. 206/ISBN 3-89429-517-1/1995
D. Lietze
Grenze der Flammendurchschlagsicherheit von Sperrschichten aus Bandsicherungen bei Deflagrationen und bei einem Nachbrand
- Nr. 207/ISBN 3-89429-593-7/1997
W. Daum
Zur objektiven Beurteilung der Bildqualität industrieller Radioskopiesysteme
- Nr. 208/ISBN 3-89429-557-0/1995
G. Kalinka
Ein Beitrag zur Kristallisation gefüllter und ungefüllter Thermoplaste
- Nr. 209/ISBN 3-89429-594-5/1995
D. Hoffmann, K. Niesel
Zur Quantifizierung des Effekts von Luftverunreinigungen auf Putzmörtel
- Nr. 210/ISBN 3-89429-595-3/1995
F. Buchhardt, W. Matthees, G. Magiera
Zur Erfassung der hysteretischen Dämpfung im Zeitraum
- Nr. 211/ISBN 3-89429-973-8/1997
G. Meier zu Köcker, K.-H. Habig
Steigerung der Lebensdauer und der Prozeßsicherheit durch beschichtungsgerechte Fertigung von Werkzeugen und Bauteilen
- Nr. 212/ISBN 3-89429-974-6/1996
S. Dähne
Analytische Grundlagenuntersuchungen zur Laserimpulsfluorometrie im ultravioletten Spektralbereich
- Nr. 213/ISBN 3-89429-975-4/1995
J. Kelm
High Resolution NMR Spectroscopy for the Determination of Elastomers, Blends and Thermoplastic Elastomers — Carbon and Proton NMR Spectra Catalogue
- Nr. 214/ISBN 3-89429-976-2/1995
J. Moll
Exciton-Dynamics in J-Aggregates of an Organic Dye
- Nr. 215/ISBN 3-89429-950-9/1995
W. Müller u. a.
Modellhafte Untersuchungen zu Umweltschädigungen in Innenräumen anhand des Grünen Gewölbes
- Nr. 216/ISBN 3-89429-774-3/1997
C.-P. Bork, J. Hünecke, M. Golmann
Neue Stähle mit hoher statischer, dynamischer und Dauerfestigkeit für den Automobilbau
- Nr. 217/ISBN 3-89429-775-1/1997
W. Müller, M. Torge, D. Kruschke, K. Adam
Sicherung, Konservierung und Restaurierung historischer Glasmalereien
- Nr. 218/ISBN 3-89429-776-X/1997
S. Steinborn
Analyse von Verformung und Rißbildung bei Straßenbelägen durch Finite-Elemente-Methoden
- Nr. 219/ISBN 3-89429-777-8/1997
G. Fuhrmann, J. Bohse, H.-V. Rudolph
Schwingfestigkeit von Thermoplasten und Verbundwerkstoffen bei Umlaufbiegung
- Nr. 220/ISBN 3-89429-778-6/1997
D. Lietze
Grenze der Flammendurchschlagsicherheit von Sperrschichten aus Sintermetall
- Nr. 221/ISBN 3-89701-036-4/1997
R. Wäsche, F. Köse
Einfluß der Verfahrensparameter beim Gelcasting auf die Entstehung bruchauslösender Gefügefehler in hochreinen Aluminiumoxidkeramiken
- Nr. 222/ISBN 3-89701-037-2/1997
H. Frenz
Gesetzmäßigkeiten für die werkstoffmechanische Beschreibung der einkristallinen Nickelbasislegierung SC 16 unter ein- und mehrachsiger Beanspruchung
- Nr. 223/ISBN 3-89701-038-0/1998
K. Rurack, U. Resch-Genger
Design, Synthese und Charakterisierung von Fluoreszenzstandards und Fluoreszenzmarkern für die zeitaufgelöste Fluorometrie
- Nr. 224/ISBN 3-89701-159-X/1998
M. Weber
Strukturspannungsberechnung bei zylindrischen Behältern mit Aufdachungen unter Innendruck
- Nr. 225/ISBN 3-89701-160-3/1998
U. Schoknecht, J. Gunschera, H.-N. Marx, G. Marx, A. Peylo, G. Schwarz
Holzschutzmittelanalyse - Daten- und Literaturzusammenstellung für Wirkstoffe in geprüften Holzschutzmitteln
- Nr. 227/ISBN 3-89701-187-5/1998
F. Liebau, R. Rudolphi
Berechnung von Temperatur- und Wärmestromverteilungen mittels algebraischer Mehrgittermethoden auf der Basis der Methode der finiten Volumen bei allgemeiner Triangulierung mit Winkeln über 90°

