

Dipl.-Math. Uladzimir Samadurau

**Entwicklung nichtlinearer  
tomographischer Rekonstruktions-  
verfahren für die Materialprüfung  
und Prozessüberwachung**

Die vorliegende Arbeit entstand an der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM). Es handelt sich hierbei um eine von der Fakultät Maschinenwesen der Technischen Universität Dresden zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur – Dr.-Ing. – angenommene Dissertation von Dipl.-Math. Uladzimir Samadurau, geb. am 22. 10. 1977 in Minsk/Belarus

Gutachter Prof. Dr. rer. nat. habil. H.-J. Ullrich  
Dr. rer. nat. et Ing. habil. G.-R. Jaenisch  
Prof. Dr. rer. nat. M. P. Hentschel

Vorsitzender der  
Promotionskommission Prof. Dr. rer. nat. M. Schaper

Tag der Verteidigung: 30. Juni 2004

Impressum

**Entwicklung nichtlinearer tomographischer  
Rekonstruktionsverfahren für die Materialprüfung  
und Prozessüberwachung**

2005

Herausgeber:  
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)  
Unter den Eichen 87  
12205 Berlin  
Telefon: +49 30 8104-0  
Telefax: +49 30 8112029  
E-mail: info@bam.de  
Internet: www.bam.de

Copyright © 2005 by Bundesanstalt für  
Materialforschung und -prüfung (BAM)

Verlag und Vertrieb:  
Wirtschaftsverlag NW  
Verlag für neue Wissenschaft GmbH  
27568 Bremerhaven  
Telefon: +49 471 94544-0  
Telefax: +49 471 94544-77/-88

Layout: BAM-Arbeitsgruppe Z.03

ISSN 1613-4249  
ISBN 3-86509-301-9

In der vorliegenden Arbeit werden die Aufgaben der Prozesstomographie betrachtet. In der Prozesstomographie werden dynamische Objekte bzw. Prozesse untersucht. Solche Aufgaben sind in den verschiedensten Gebieten der Natur- und Ingenieurwissenschaften anzutreffen. Unter anderem sind die automatische Überwachung und zuverlässige Einschätzung bzw. Rekonstruktion des aktuellen Zustandes von Prozessen zu nennen. Zur Lösung solcher Aufgaben ist die Untersuchung des Prozesses in Echtzeit erforderlich. Gleichzeitig sollen die Ergebnisse mit ausreichender Qualität geliefert werden. Das stellt große Forderungen an die Methoden zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung von Methoden und Algorithmen zur Rekonstruktion dynamischer Prozesse. Dabei werden neue Ansätze zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe vorgestellt. Die Grundlage für die entwickelten Methoden bildet die statistische Estimationstheorie. Die aus der statistischen Estimationstheorie bekannten Algorithmen zur Rekonstruktion von dynamischen Prozessen haben im Vergleich zu traditionellen Rekonstruktionsverfahren einige Vorteile, die u.a. die Lösung der Rekonstruktionsaufgabe in Echtzeit ermöglichen.

Die in dieser Arbeit entwickelten Algorithmen beschränken sich auf strahlendiagnostische Verfahren. Die entwickelte Theorie kann allerdings auch auf andere Untersuchungsmethoden übertragen werden.

In the presented work tasks of the Process Tomography are considered. The Process Tomography deals with the investigation of dynamic processes and objects. Such tasks appear in different areas of natural and engineering science. Among others it should be mentioned automatic control and reliable monitoring, i.e. reconstruction of the current state of processes. For such tasks real-time investigations are required. At the same time the results have to be provided with sufficient quality. This the requirements on methods for solving the reconstruction problem are high.

This work deals with the development of methods for the reconstruction of dynamic processes. New approaches for the solution of the reconstruction task are presented. the developed methods are based on the Statistic Estimation Theory. Algorithms for the reconstruction of dynamic processes, which are known from the Statistical Estimation Theory, have some advantages compared to traditional reconstruction methods, that allow real-time solutions of the reconstruction task.

The algorithms developed in this work are restricted to radiation techniques in non-destructive testing. However, the developed theory can be applied for other diagnostic methods.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>7</b>
<b>2. Mathematische Modelle</b>	<b>10</b>
2.1 Physikalische Grundlagen	10
2.2 Auswahl eines mathematischen Modells	11
2.3 Modell des dynamischen Bildes	12
2.4 Markov-Folgen und ihre Eigenschaften	14
2.5 Lineares Modell dynamisches Bildes	17
2.6 Beispiel der Modellierung eines dynamischen Bildes mit linearem Modell	21
2.7 Nichtlineares Modell eines dynamischen Bildes	25
2.8 Beobachtungsmodell	30
Literatur zum Kapitel 2	35
<b>3. Rekonstruktion</b>	<b>36</b>
3.1 Rekonstruktion: Problemstellung	36
3.2 Grundlagen der statistischen Estimationstheorie	37
3.3 Rekonstruktion als Aufgabe der optimalen Filterung	43
3.4 Herleitung der Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion	45
3.5 Herleitung der Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion für das Gauß'sche Prozessmodell	48
3.6 Gleichung der optimalen linearen Filterung. Kalman Filter	51
3.7 Zusammenfassung des Verfahrens zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe	56
Literatur zum Kapitel 3	58
<b>4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen</b>	<b>59</b>
4.1 Problemstellung	59
4.2 Linearisierte Rekonstruktionsaufgabe	60
4.3 Erweiterter Kalman-Filter	62
4.4 Stochastische Linearisierung nichtlinearer Funktionen	63
4.5 Quasioptimaler Rekonstruktionsalgorithmus auf Grundlage der a posteriori stochastischen Linearisierung	65
4.6 Quasioptimaler Rekonstruktionsalgorithmus auf Grundlage der a priori stochastischen Linearisierung	66
4.7 Stochastische Linearisierung für das zweistufige Modell eines dynamischen Bildes	70
Literatur zum Kapitel 4	74
<b>5. Einsatz der entwickelten Methode für die Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung</b>	<b>75</b>
5.1 Problemstellung	75
5.2 Mathematisches Modell einer mehrphasigen Strömung	76
5.3 Algorithmus für die Bestimmung der Konzentration von Phasen in mehrphasigen Strömungen	80
5.4 Rekonstruktion des Bildes und Bestimmung der Phasenkonzentration in Strömungen verschiedener Typen.	82
Literatur zum Kapitel 5	88
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>89</b>
<b>Danksagung</b>	<b>92</b>



## 1. Einführung

Das in der vorliegenden Arbeit betrachtete Problem ist dem Bereich der Bildrekonstruktion unter Benutzung vorhandener Projektionen zuzuordnen. Entsprechende Aufgaben sind in den verschiedensten Gebieten der Natur- und Ingenieurwissenschaften anzutreffen. An erster Stelle sei hier die Röntgentomographie zu nennen. Die Entwicklung dieser Methode zur Untersuchung des menschlichen Körpers mit Hilfe von Röntgenstrahlung hat neue Möglichkeiten für die medizinische Diagnostik eröffnet und zum Erfolg der medizinischen Computertomographie geführt. Auch für industrielle Anwendungen werden tomographische Techniken heute eingesetzt, beispielsweise zur Bestimmung von Dichteunterschieden in Keramik-Grünkörpern oder zur Prüfung der Masshaltigkeit von Leichtmetallgussteilen u.v.m. Die zuverlässige Einschätzung des aktuellen Zustandes eines Werkstoffsystems, ohne es dabei zu beschädigen, steht im Mittelpunkt der zerstörungsfreien Prüfung. Die fortschreitende Entwicklung der Computertechnik ermöglicht die Entwicklung neuer, effektiverer Methoden, die den wachsenden Anforderungen der industriellen Praxis entsprechen.

Unter anderem sind heutzutage Ansätze zur Untersuchung dynamischer Prozesse und Systemen von wachsendem Interesse. Die Besonderheit hierbei besteht darin, dass das untersuchte Objekt bzw. System seinen Zustand mit der Zeit ändert. Die Untersuchung der menschlichen inneren Organe bzw. die Überwachung chemischer Reaktoren dienen als anschauliche Beispiele dafür. Eine besondere Herausforderung stellt die Tatsache dar, dass häufig die Untersuchung dieser Prozesse in Echtzeit erforderlich ist und dabei gleichzeitig die Ergebnisse mit ausreichender Qualität geliefert werden sollen. Die erste Schwierigkeit besteht darin, dass die zur Verfügung stehenden Anlagen wegen ihres Arbeitsprinzips eine wesentlich geringere Anzahl von Projektionen in Echtzeit aufnehmen können, als es für die Computertomographie im klassischen Sinne erforderlich ist. Deswegen muss bei der Rekonstruktion davon ausgegangen werden, dass in den gemessenen Projektionsdaten nur unzureichend Information über das betrachtete Objekt zur Verfügung steht. Das stellt entsprechende Forderungen an die Methoden der Lösung der sich ergebenden Rekonstruktionsaufgabe.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung von Methoden und Algorithmen zur Rekonstruktion dynamischer Prozesse. Bei Beschränkung auf strahlendiagnostische Verfahren werden neue Ansätze zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe vorgestellt. Die entsprechenden Algorithmen werden abgeleitet und anhand eines Beispiels die Anwendbarkeit der entwickelten Algorithmen dargestellt.

Die Grundlage für die in dieser Arbeit entwickelten Methoden bildet die statistische Estimationstheorie. Ihr großer Vorteil besteht darin, dass die in dieser Theorie verfügbaren Rekonstruktionsmethoden die Verarbeitung aller Informationen über das betrachtete Objekt ermöglichen, die während des Untersuchungsprozesses gewonnen wurden. Das bedeutet, dass Aussagen über den aktuellen Zustand des Objektes nicht nur ausgehend von den zu diesem Zeitpunkt akquirierten Projektionen gemacht werden, sondern dass alle zur Verfügung stehenden Messdaten berücksichtigt werden, die während der Untersuchung aufgenommen und akkumuliert wurden. In der Praxis hat dies große Bedeutung für die Rekonstruktion in Echtzeit, denn – wie oben schon erwähnt – die vorhandenen Anlagen können wegen ihres Arbeitsprinzips nur eine wesentlich geringere Anzahl von Projektionen aufnehmen.

## 1. Einführung

Einen weiteren Vorteil stellt die Berücksichtigung vorhandenen a priori Wissens über den untersuchten dynamischen Prozess dar. In Verknüpfung mit der oben genannten Akkumulation von Informationen ermöglicht dies, eine bessere Qualität und Anwendbarkeit im Vergleich zu traditionellen Rekonstruktionsmethoden zu erreichen. Der untersuchte dynamische Prozess und das Beobachtungssystem werden in dieser Arbeit mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik beschrieben. Das führt zu einer allgemeinen Darstellung des Problems, die von den konkret zugrunde liegenden Prinzipien der Erscheinung des Prozesses oder des Arbeitsprinzips des Beobachtungssystems unabhängig ist. Das eröffnet Möglichkeiten zur Anwendung der entwickelten Methoden für verschiedene praktische Aufgabenstellungen. Es muss allerdings auch darauf hingewiesen werden, dass eine solche Beschreibung mit bedingter mathematischer Rigorosität und Formalismus verbunden ist. Das führt zwangsläufig zu einer gewissen mathematischen Orientierung dieser Arbeit.

Die vorliegende Arbeit ist insgesamt in 6 Kapitel gegliedert, deren Inhalt im Folgenden kurz zusammengefasst wird.

Im Mittelpunkt des zweiten Kapitels steht die Entwicklung mathematischer Modelle zur Beschreibung dynamischer Prozesse sowie deren messtechnische Erfassung mit Hilfe eines Beobachtungssystems. Die wichtigsten Grundlagen der Wahl eines mathematischen Modells für eine konkrete Aufgabe werden diskutiert. Zur Beschreibung eines dynamischen Prozesses wird ein Zustand-Raum-Modell gewählt. Die in der statistischen Estimationstheorie übliche Darstellung eines dynamischen Prozesses als Markov-Prozess wird diskutiert. Ein Abschnitt dieses Kapitels fasst daher die wichtigsten Grundlagen der Theorie der Markov-Prozesse zusammen. Mathematische Modelle lassen sich grundsätzlich in zwei Klassen aufteilen – lineare und nichtlineare Modelle. Dementsprechend unterscheiden sich auch die damit verknüpften Rekonstruktionsaufgaben und -methoden. Im zweiten Kapitel werden beide Ansätze diskutiert und die sich damit ergebenden mathematischen Modelle für den dynamischen Prozess sowie das verwendete Beobachtungssystem abgeleitet und diskutiert.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Lösung der sich ergebenden Rekonstruktionsaufgabe. Es wird eine allgemeine Formulierung des Problems eingeführt. Desweiteren werden die in der statistischen Estimationstheorie vorhandenen Lösungsmethoden diskutiert. Ein klassischer Algorithmus zur Lösung der linearen Aufgabe – der so genannte Kalman-Filter-Algorithmus – wird herleitet und seine Eigenschaften eingehend untersucht. Dieses Kapitel beschränkt sich dementsprechend nur auf die Lösung linearer Aufgaben.

Im Kapitel 4 werden verschiedene Ursachen betrachtet, die dazu führen können, dass der betrachtete dynamische Prozess und/oder dessen Beobachtung ein nichtlineares Verhalten aufweisen, was zur Formulierung einer nichtlinearen Aufgabe führt. Die Lösung nichtlinearer Probleme ist meistens nichttrivial bzw. bekannte Lösungsansätze können in der Praxis häufig nicht angewendet werden. Ein offensichtlicher und häufig benutzter Ansatz zur Lösung der nichtlinearen Aufgabe besteht in ihrer Linearisierung. In diesem Kapitel werden verschiedene Linearisierungsmethoden vorgestellt und diskutiert. Es wird gezeigt, dass für die Anwendung der Lösungsmethoden, die aus der Estimationstheorie bekannt sind, die stochastische Linearisierung am besten geeignet ist. Es werden zwei Hauptansätze der stochastischen Linearisierung betrachtet und die sich damit ergebenden Rekonstruk-



## *1. Einführung*

tionsalgorithmen hergeleitet. Grundlage für diese Algorithmen bildet der im dritten Kapitel vorgestellte Kalman-Filter, der für nichtlineare Probleme angepasst wird.

Im fünften Kapitel wird die praktische Anwendbarkeit der in dieser Arbeit entwickelten Methoden anhand eines Beispiels diskutiert. Dabei sind die Charakteristika mehrphasiger Strömungen in Rohren zu bestimmen. Dazu wird ein entsprechendes mathematisches Modell für diesen konkreten nichtlinearen Prozess konstruiert, der auf der vorgestellten Erweiterung des Kalman-Filters basierende Rekonstruktionsalgorithmus entwickelt und die Ergebnisse der Rekonstruktion dargestellt und diskutiert.

Das Kapitel 6 fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und zeigt mögliche Erweiterungen auf.

## 2. Mathematische Modelle

Als ein Ansatzpunkt zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe muss ein entsprechendes mathematisches Modell des betrachteten Prüfobjektes oder -systems sowie des Beobachtungssystems entwickelt werden. Ein mathematisches Modell ist eine näherungsweise Beschreibung einer realen Erscheinung. Für die Auswahl eines passenden Modells ist das Verständnis des Wesens der modellierten Erscheinung und des Zwecks des Modells nötig. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Grundlagen der Durchstrahlungsprüfung und der Entwicklung mathematischer Modelle diskutiert. Entsprechende Modelle werden vorgestellt und untersucht.

### 2.1 Physikalische Grundlagen

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und praktische Anwendung von Algorithmen zur Bildrekonstruktion unter Verwendung vorhandener Projektionen. Diese Aufgabenstellung trägt interdisziplinären Charakter, schließt also verschiedene Gebiete aus Natur- und Ingenieurwissenschaften ein. Für mögliche Anwendungen sei an erster Stelle die Computertomographie in der medizinischen Diagnostik zu nennen. Die entsprechenden Projektionen werden hier durch Durchstrahlung des menschlichen Körpers mit Hilfe von Röntgenstrahlen innerhalb eines Winkelbereiches von  $180^\circ$  bzw.  $360^\circ$  gewonnen. Auch andere physikalische Effekte werden in der medizinischen Diagnostik benutzt, um Aussagen über den Patienten im Sinne einer Tomographie zu erhalten, wie beispielsweise bei der Magnet-Spin-Resonanz-Tomographie (MSR) oder der Positron-Elektron-Annihilations-Tomographie (PET). Auch im nichtmedizinischen Bereich gibt es eine Vielzahl von Anwendungen für Bildrekonstruktionsverfahren, die von der Radioastronomie bis zur elektrischen Mikroskopie reichen. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Entwicklung von Rekonstruktionsalgorithmen für ingenieurtechnische Anwendungen, im Speziellen für die zerstörungsfreie Materialprüfung.

In diesem Sinne soll unter einem Bild im Allgemeinen ein Querschnitt des Prüfobjektes verstanden werden, der als zweidimensionales Grauwertbild dargestellt werden kann. Dieses Bild wird im Weiteren in eine Menge diskreter Punkte unterteilt, die als Bildelemente bzw. Pixel bezeichnet werden. Jedem Pixel wird ein Grauwert zugeordnet, der auf einer diskreten oder analogen Skala angegeben werden kann. Damit besteht die Rekonstruktionsaufgabe darin, den Grauwert jedes Pixels zu ermitteln. Die physikalische Interpretation der Bedeutung des Grauwertes ist direkt mit dem benutzten Prüfverfahren verknüpft, hängt also von den physikalischen Mechanismen ab, die zur Gewinnung der Projektionsdaten verwendet werden. Hier werden hauptsächlich Durchstrahlungsverfahren betrachtet, die auf der Schwächung von Röntgen- oder Gammastrahlung beim Durchgang durch Materie basieren. Entsprechend stellt der Grauwert ein Maß für die Schwächungseigenschaften des Materials dar, gegeben durch den Schwächungskoeffizienten oder die Dichte des Materials.

Das Bild wird aus der Information rekonstruiert, die in den vorhandenen Projektionsdaten enthalten ist. Wie bei der Fächerstrahlgeometrie bei der 2D CT, liegen die Projektionsdaten bei Verwendung einer Detektorzeile in Form eines Vektors vor. Natürlich sind die entwickelten Algorithmen auch für den Fall der Verwendung von Flächendetektoren, wie sie bei der 3D CT verwendet werden, verallgemeinerbar. Unter einer Projektion wird hier eine Reihe von Messungen eines integralen Parameters des Objektes verstanden. Die Integrati-

on wird entlang einer geraden Linie – des Strahles von der Quelle zum Detektorelement – ausgeführt und als Strahlensumme bezeichnet. Die Bestimmung der Strahlensumme mit Hilfe eines mathematischen Modells wird ausführlich im nächsten Abschnitt diskutiert.

## 2.2 Auswahl eines mathematischen Modells

Unter einem mathematischen Modell einer Naturerscheinung wird eine näherungsweise Beschreibung anhand mathematischer Symbolik verstanden. Die Komplexität des Modells und die Genauigkeit der Beschreibung werden von dem Anwendungszweck bestimmt. Einer Naturerscheinung kann man eine Menge von Modellen zuordnen. Aus dieser Menge wird ein Modell ausgewählt, das für die betrachtete Aufgabe am besten geeignet ist.

Nach den allgemeinen Prinzipien der Entwicklung mathematischer Modelle sollen diese die folgenden Annahmen erfüllen:

- dem Anwendungszweck des modellierten Systems zu entsprechen,
- den Zusammenhang und das Wesen der betrachteten Erscheinungen widerzuspiegeln,
- die realen Bedingungen, unter denen das System funktioniert, in Betracht zu ziehen,
- auf den schon bekannten experimentellen Daten zu basieren,
- mit anderen Modellen, die das System genauer beschreiben, zu korrelieren,
- möglichst einfach und praktisch anwendbar zu sein.

In der statistischen Estimationstheorie von stochastischen Prozessen, die in dieser Arbeit benutzt wird, werden mathematische Modelle dynamischer Prozesse und Systeme behandelt. Sie werden anhand des Zustandes des Prozesses beschrieben und Zustandsraummodelle genannt. Im Allgemeinen enthält der Zustand eines Prozesses die Information über den vorliegenden sowie über den vorigen Wert des Prozesses als auch über die mit ihm verbundenen Parameter. Bei Kenntnis der Charakteristika äußerer Einflüsse kann aus diesen Daten das zukünftige Verhalten des Prozesses abgeschätzt werden.

Ein dynamisches Bild wird in der vorliegenden Arbeit durch ein scalares Feld dargestellt, dessen Werte sich mit der Zeit stochastisch ändern. Mathematisch werden solchen Felder durch die Funktion  $x(t, \mathbf{r})$  beschrieben, wobei  $x$  den Wert des Feldes im Raumpunkt mit dem Koordinatenvektor  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet. Im Allgemeinen hängen nicht nur die Werte, sondern auch die statistischen Charakteristika des Feldes  $x$  von den Raumkoordinaten  $\mathbf{r}$  und von der Zeit  $t$  ab. Die Felder, die die realen physikalischen Prozesse beschreiben, sind in ihrem Definitionsbereich stetig in Raum und Zeit. Wenn die räumlichen statistischen Charakteristika des Feldes sich zu einem beliebigen Zeitpunkt nicht ändern, nennt man das Feld homogen. Wenn die statistischen Charakteristika eines beliebigen Punktes des Feldes sich nicht mit der Zeit ändern, heißt das Feld stationär. Die gemischten Varianten können auch auftreten.

Zur Entwicklung mathematischer Modelle gibt es physikalische und phänomenologische Ansätze. Die physikalischen Modelle beschreiben das Feld aufgrund des Wissens über die physikalischen Mechanismen zur Bildung des Feldes und werden anhand von Gleichungen der mathematischen Physik dargestellt [2.1]. Für solche Modelle stehen eine mathematische Theorie und entwickelte numerische Lösungsmethoden zur Verfügung. Als prinzipiell

## 2. Mathematische Modelle

Ihr Mangel der entsprechenden Modelle ist ihr beschränkter Anwendungsbereich zu nennen, da jedes Modell nur mit einem bestimmten physikalischen Prozess verbunden ist.

Diesen Mangel weisen die phänomenologischen Modelle nicht auf. Sie beschreiben die statistischen Charakteristika eines Feldes, ohne deren Erscheinungsmechanismen direkt in Betracht zu ziehen. Phänomenologische Modelle spielen eine besonders große Rolle, wenn die Faktoren, die die Charakteristika des Feldes beeinflussen, so vielfältig und kompliziert sind, dass es unmöglich ist, jeden von ihnen zu berücksichtigen. Eine Schwierigkeit bei der Anwendung der phänomenologischen Modelle besteht darin, dass statistisches a priori Wissen über das Feld vorausgesetzt wird. In der Praxis wird diese Information aus experimentellen Daten oder empirisch, ausgehend von der Kenntnis und dem Verständnis des Prozesses, der durch entsprechende Felder beschrieben wird, erhalten.

In der vorliegenden Arbeit wird der phänomenologische Ansatz benutzt, der es ermöglicht, Prozessmodelle zu entwickeln, ohne die einzelnen Bildungsmechanismen zu behandeln. Die so konstruierten Modelle sind relativ einfach, allgemein und für die Anwendung der statistischen Estimationstheorie geeignet.

Phänomenologische Modelle können auf verschiedene Weise entwickelt werden. Ein naheliegender Weg besteht darin, das Verteilungsgesetz des Feldes  $x(t, \mathbf{r})$  direkt anzugeben. In der Praxis führt ein solcher Ansatz aber zu komplizierten und umfassenden Lösungen. Das tritt besonderes im Fall hochdimensionaler Felder auf. In diesem Fall wird das Verteilungsgesetz durch Wahrscheinlichkeitsmomente, üblicherweise nicht höher als von zweiter Ordnung, bestimmt. Es ist bekannt, dass eine solche Beschreibung nur für Gauß-Prozesse vollständig ist. Felder mit anderen Verteilungsgesetzen werden damit nur näherungsweise beschrieben.

Die Darstellung des Modells in Form von stochastischen Differenzialgleichungen stellt einen weiteren, häufig benutzten Zugang zur Entwicklung phänomenologischer Modelle dar. Diese Methode ist in dem Sinne indirekt, dass die statistischen Charakteristika des Feldes nicht direkt angegeben werden, sondern sich durch die Struktur der entsprechenden Gleichungen ausdrücken lassen. Sie ist besonders für die Beschreibung von dynamischen Feldern geeignet und ermöglicht die Anwendung der rekurrenten Methoden der statistischen Estimationstheorie, die sehr effektiv für die Lösung der dynamischen Aufgabe sind. Deshalb wird diese Methode hier ausgewählt.

### 2.3 Modell des dynamischen Bildes

In der vorliegenden Arbeit wird ein dynamisches Bild als ein zweidimensionales diskretes stochastisches Feld im zweidimensionalen reellen metrischen euklidischen Raum betrachtet. Das Bild wird bei Annahme eines rechtwinkligen Gitters mit äquidistanten horizontalen und vertikalen Schritten in einzelne gleichflächige Elemente geteilt. Jedem Element wird ein Paar von Indizes  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$  zugeordnet, wie in *Abb. 2.1a* dargestellt. Die Elemente werden als Bildelemente oder Pixel (von "picture element") bezeichnet. Es wird angenommen, dass das Feld innerhalb eines Bildelementes denselben Wert hat. Dieser wird Grauwert des Bildelementes genannt und mit  $x_{ij}$  bezeichnet. Entsprechend wird das Bild als quadratische Matrix  $\mathbf{x} = (x_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, N}$  dargestellt, die den aktuellen Prozesszustand angibt. Wenn die Bildelemente, wie in *Abb. 2.1b* dargestellt, geordnet werden,

ergibt sich die Darstellung des Bildes als Vektor  $x = (x_i), i = \overline{1, S}$ , wobei  $S = N \times N$  die Anzahl der Bildelemente angibt. Diese Darstellung erleichtert die Bezeichnung und ermöglicht die Anwendung der Matrizenalgebra in den Gleichungen des Modells.

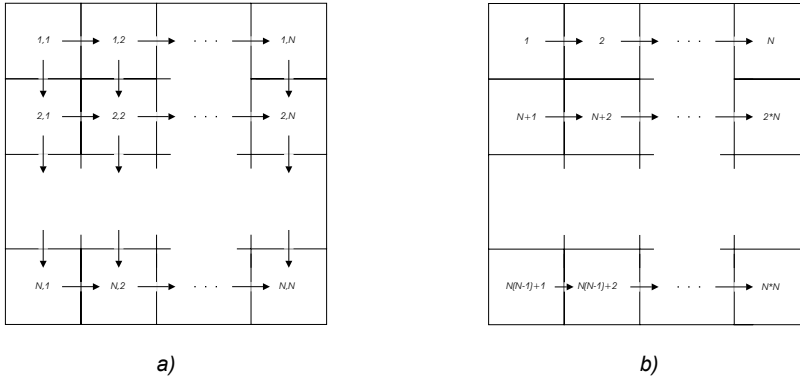


Abb. 2.1. Die Anordnung der Bildelemente bei Darstellung eines dynamischen Bildes a) als Matrix und b) als Vektor.

In der statistischen Estimationstheorie wird der Begriff des Prozesszustandes eingeführt, um mathematische Modelle zu beschreiben[2.2]. Im Allgemeinen wird der Zustand des Prozesses (im Weiteren mit  $X$  bezeichnet) durch eine Gesamtheit der Informationen über den aktuellen und vorhergehenden Zustand des Prozesses, sowie durch die mit ihm verbundenen Parameter (zum Beispiel, äußere Einwirkungen) bestimmt, die es ermöglichen, das zukünftige Verhalten des Prozesses zu beschreiben. Es wird davon ausgegangen, dass  $X$  ein Element des Zustandsraums  $\aleph$  ist, der alle möglichen Werte des Prozesszustandes enthält. Damit ergibt sich die Möglichkeit, die zeitliche Änderungen des Prozesses als eine Bewegung der Größe  $X$  im Zustandsraum  $\aleph$  zu betrachten. Im Allgemeinen kann diese Bewegung durch folgende Gleichung beschrieben werden [2.2]

$$\frac{d}{dt} X(t) = F[t, X(t), U(t), W(t)], \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.1)$$

wobei  $F[\cdot]$  eine bekannte nichtlineare Funktion,  $U(t)$  ein bekannter Führungsvektor und  $W(t)$  einen stochastischen Einfluss bezeichnen.

In der vorliegenden Arbeit wird der Zustand des Prozesses durch den oben eingeführten Zustandsvektor  $x(t)$  angegeben. In dieser Bezeichnung wird nur die Abhängigkeit dieses Vektors von der Zeit  $t$  direkt angegeben. Es sei hier aber erwähnt, dass der Zustand des Prozesses, wie oben diskutiert, auch von den vorhergehenden Werten des Prozesses und dessen Parametern abhängt.

Wenn  $W(t)$  weißes Gauß'sches Rauschen darstellt, ist der Prozess, der durch Gl. (2.1) beschrieben wird, ein Markov-Prozess [2.2]. Das wichtigste Merkmal eines Markov-Prozesses besteht darin, dass bei bekanntem aktuellem Prozesszustand der zukünftige Zustand unabhängig von den vorangegangenen ist. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist für solche Prozesse die Entwicklung von rekurrenten Lösungsverfahren für die Rekonstruktionsaufgabe möglich. Jeder stochastische Prozess kann mit gewünschter Präzision als Teil

## 2. Mathematische Modelle

eines Markov-Prozesses betrachtet werden. Aus diesem Grund ist die Darstellung durch Gl. (2.1) sehr effektiv. Im Weiteren werden alle betrachteten Prozesse als Markov-Prozesse behandelt.

Zusätzlich wird angenommen, dass die Zeitvariable  $t$  diskrete Werte annimmt. In diesem Fall wird von einer Markov-Folge gesprochen. Die Zeitvariable wird mit  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , bezeichnet. Somit kann eine einfacher Form der Gl. (2.1) betrachtet werden

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (2.2)$$

Hier ist  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(k), k)$  eine bekannte, im allgemeinen Fall nichtlineare Funktion,  $\mathbf{u}(k)$  ein bekannter Führungsvektor und  $\mathbf{w}(k)$  ein stochastischer Einfluss mit dem Erwartungswert  $\langle \mathbf{w}(k) \rangle = 0$ . Der Vektor  $\mathbf{w}(k)$  wird in der Form  $\mathbf{w}(k) = \mathbf{B}(k) \cdot \xi(k)$  verwendet. Der Vektor  $\xi(k)$  bezeichnet weißes Gauß'sches Rauschen mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 1. Unter diesen Bedingungen wird die Kovarianzmatrix des Prozesses durch

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(l) \rangle &= \langle \mathbf{B}(k) \xi(k) \cdot \xi^T(l) \mathbf{B}^T(l) \rangle \\ &= \begin{cases} \mathbf{Q}(k) = \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{B}^T(k), & \text{falls } l = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

angegeben.

Bei entsprechender Wahl der Komponenten der Gl. (2.2) ergeben sich die gewünschten statistischen Charakteristika. Damit kann die Aufgabe der Entwicklung eines mathematischen Modells des dynamischen Prozesses als gelöst betrachtet werden. Als statistische Charakteristika dienen der Erwartungswert, die räumliche Varianz und die zeitliche Kovarianz.

Das stationäre Feld wird als ein Spezialfall dynamischer Felder behandelt und ist durch die Gleichung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$$

gegeben. Dessen statistische Charakteristika werden durch die Anfangsbedingungen vollständig bestimmt, denn zu jedem nachfolgenden Zeitpunkt gilt  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(0)$ .

Dementsprechend wird das mathematische Modell des dynamischen Prozesses bzw. Bildes in Form einer stochastischen Differenzgleichung angegeben. Anhand eines Beispiels wird im Weiteren gezeigt, wie ein dynamisches Bild mit den angegebenen Charakteristika modelliert werden kann. Da für diese Aufgabe die Theorie der Markov-Prozesse benutzt wird, werden im nächsten Abschnitt deren Grundlagen diskutiert.

### 2.4 Markov-Folgen und ihre Eigenschaften

Die Theorie der Markov-Prozesse [2.2,2.3,2.4] stellt ein großes und wichtigstes Gebiet der Theorie stochastischer Prozesse dar. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundlagen vorgestellt, die für die weiteren Untersuchungen notwendig sind.

Ein Prozess  $x(t)$  heißt Markov-Prozess, wenn bei einem gegebenen Wert  $x(u)$  die Werte  $x(t)$ ,  $t > u$ , von allen Werten  $x(s)$ ,  $s < u$ , unabhängig sind. Das bedeutet, dass

für jeden Markov-Prozess das Folgende gilt: für alle beliebigen Zeitpunkte  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  ist die bedingte Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $\mathbf{x}(t_n)$ , bedingt darauf, dass die Realisierungen, die die Zufallsgrößen  $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_{n-1})$  angenommen haben, identisch mit der bedingten Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $\mathbf{x}(t_n)$ , bedingt darauf, dass die Realisierung der letzten zurückliegenden Zufallsgröße  $\mathbf{x}(t_{n-1})$  bekannt ist

$$F(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = F(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}) \quad (2.4)$$

wobei  $F(\cdot | \cdot)$  eine bedingte Verteilungsfunktion bezeichnet.

Ein Markov-Prozess, dessen Wertevorrat eine kontinuierliche Menge und dessen Definitionsbereich eine diskrete Menge sind, heißt Markov-Folge.

Für Markov-Folgen ergibt sich aus der Definition (2.4) die folgende Gleichung für die  $n$ -dimensionale Verteilungsdichtefunktion, die einen Zufallsprozess vollständig beschreibt

$$p(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = p(\mathbf{x}_0) \cdot \prod_{i=0}^k \pi(\mathbf{x}_{i+1} | \mathbf{x}_i). \quad (2.5)$$

Hier bezeichnet  $\pi(\mathbf{x}_{i+1} | \mathbf{x}_i)$  eine bedingte Verteilungsdichtefunktion und wird als Übergangsdichte bezeichnet. Gl. (2.5) zeigt, dass eine Markov-Folge durch eine eindimensionale Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_0)$  zum Zeitpunkt  $k=0$  und eine Übergangsdichte  $\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$  vollständig beschrieben wird.

Aus Gl. (2.5) folgen eine Reihe wichtiger Beziehungen, die im Weiteren näher erläutert werden.

In Analogie zur Gl. (2.5) ergibt sich für die Zeitpunkte  $k$  und  $k+1$ :

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = p(\mathbf{x}_k) \cdot \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k).$$

Durch Integration dieser Beziehung über die Variable  $\mathbf{x}_k$  in ihrem gesamten Definitionsbereich entsteht eine rekursive Gleichung für die eindimensionale Dichtefunktion zum Zeitpunkt  $k+1$ , die durch die eindimensionale Dichtefunktion zum Zeitpunkt  $k$  und die Übergangsdichte bestimmt wird

$$p(\mathbf{x}_{k+1}) = \int_{(\mathbf{x}_k)} \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (2.6)$$

Damit ergibt sich mit Gl. (2.5) die bedingte Verteilungsdichte zu

$$\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_0) = p^{-1}(\mathbf{x}_0) \cdot p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k+1}) = \prod_{i=0}^k \pi(\mathbf{x}_{i+1} | \mathbf{x}_i).$$

Durch Integration dieser Gleichung über die Variablen  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  folgt die rekursive Chapman-Kolmogorov-Gleichung für die Übergangsdichte zwischen den Zeitpunkten  $0$  und  $k+1$ :

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_0) = \int_{(\mathbf{x}_k)} \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \cdot \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_k. \quad (2.7)$$

Die Beziehungen (2.6) und (2.7) sind in der Theorie der Markov-Folgen sehr wichtig. Insbesondere kann ausgehend von ihnen die folgende Gleichung erhalten werden

## 2. Mathematische Modelle

$$p(\mathbf{x}_{k+1}) = \int_{(\mathbf{x}_k)} \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_0) \cdot p(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0. \quad (2.8)$$

Diese rekursive Gleichung ermöglicht es, ausgehend von der Anfangsdichtefunktion und der Übergangsdichte die Dichtefunktion zum aktuellen Zeitpunkt  $k+1$  zu gewinnen.

Eine Markov-Folge behält ihre Eigenschaften auch in der umgekehrten Zeitrichtung. Um das zu zeigen, wird von folgender Beziehung ausgegangen

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_{k+n}) &= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{k+n}) [p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_{k+n})]^{-1} \\ &= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \pi(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+3}, \dots, \mathbf{x}_{k+n} | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \times \\ &\quad \times [p(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot \pi(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+3}, \dots, \mathbf{x}_{k+n} | \mathbf{x}_{k+1})]^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft einer Markov-Folge ergibt sich

$$\pi(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+3}, \dots, \mathbf{x}_{k+n} | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \pi(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+3}, \dots, \mathbf{x}_{k+n} | \mathbf{x}_{k+1}).$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die vorhergehende Gleichung folgt

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_{k+n}) = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})}{p(\mathbf{x}_{k+1})} = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}).$$

Damit ist gezeigt, dass dieselbe Eigenschaft auch in Zeitumkehr gilt.

Im Weiteren wird gezeigt, dass die Folge, die durch die Differenzgleichung (2.2)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

gegeben ist, eine Markov-Folge ist. Hier sei daran erinnert, dass der Beitrag  $\mathbf{w}(k) = \mathbf{B}(k) \cdot \xi(k)$  ein weißes Gauß'sches Rauschen mit einem Erwartungswert von 0 und einer Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}(k) = \mathbf{B}(k)\mathbf{B}^T(k)$  dargestellt, gegeben durch Gl. (2.3). Die Verteilungsdichte des Rauschens  $\mathbf{w}(k)$  zum Zeitpunkt  $k$  hat die Form

$$p[\mathbf{w}(k)] = p(\mathbf{w}_k) = e_k \cdot \exp(-0.5 \cdot \mathbf{w}_k^T \cdot \mathbf{Q}_k^{-1} \cdot \mathbf{w}_k), \quad (2.9)$$

wobei  $e_k$  ein Normierungskoeffizient ist und der Index  $k$  den entsprechenden Zeitpunkt bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Werte  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  einschließlich bis zum Zeitpunkt  $k$  bekannt sind. Aus der Struktur der Gl. (2.2) und den Eigenschaften des weißen Rauschens  $\mathbf{w}_k$  folgt, dass die bedingte Verteilungsdichte der Zufallsgröße  $\mathbf{x}_{k+1}$  nur durch die Werte der Zufallsgröße  $\mathbf{x}_k$  und die Verteilungsdichte (2.9) des Rauschens  $\mathbf{w}_k$  bestimmt sind und unabhängig von den Werten der Folge zu Zeitpunkten bis einschließlich  $k-1$  ist. Das bedeutet, der Zufallsprozess  $\mathbf{x}_{k+1}$  ist eine Markov-Folge. Um seine Verteilungsdichtefunktion zu bestimmen, wird Gl. (2.2) nach der Rauschkomponente umgestellt:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k. \quad (2.10)$$

Durch Anwendung der bekannten Regeln zur Umwandlung von Verteilungsdichtefunktionen, ergibt sich ausgehend von den Gln. (2.9) und (2.10) die Beziehung

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = c_{k+1} \exp\left\{-0.5 \cdot [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k]^T \mathbf{Q}_k^{-1} [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k]\right\}, \quad (2.11)$$



wobei  $c_{k+1}$  ein Normierungskoeffizient ist. Die durch Gl. (2.11) gegebene Funktion stellt die Dichtefunktion der Gaußverteilung dar. Die entsprechende Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1})$  wird sich nach Gl. (2.6) von einer Gauß'schen Funktion unterscheiden und von der Struktur der Funktion  $a(\mathbf{x}_k)$  abhängen. Die mehrdimensionale Verteilungsdichte kann mit Gl. (2.5) erhalten werden. Durch Anwendung dieser Vorschrift können alle beliebigen speziellen Charakteristika der Folge  $\mathbf{x}_k$ , beispielsweise der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix, bestimmt werden.

Für das weitere Vorgehen ist es wichtig, folgende Eigenschaft zu betonen. Nach einer nichtlinearen nichtsingulären Transformation einer Markov-Folge

$$\mathbf{y}(k+1) = f[\mathbf{x}(k+1)] \quad (2.12)$$

werden die Markov-Eigenschaften beibehalten [2.3]. Mit anderen Worten, der sich ergebende Prozess  $\mathbf{y}(k+1)$  ist auch ein Markov-Prozess.

## 2.5 Lineares Modell dynamisches Bildes

Vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet, können die Grauwerte eines Bildes keine negativen Werte annehmen. Deshalb besteht die Besonderheit der hier betrachteten Aufgaben der Bildrekonstruktion darin, dass die Werte des Prozesses, die geschätzt werden sollen, immer positiv sind. Bei der Auswahl eines zufälligen Feldes als mathematisches Modell des Bildes muss sichergestellt werden, dass das ausgewählte Feld nur positive Werte annimmt und dem entsprechenden Verteilungsgesetz gehorcht. Das führt zu Schwierigkeiten, weil in diesem Fall nichtlineare Rekonstruktionsalgorithmen zu verwenden sind. Andererseits wird in der Estimationstheorie gezeigt, dass für lineare Gaußverteilte Prozesse lineare optimale Estimationsalgorithmen zur Verfügung stehen [2.2]. Diese Algorithmen führen zu Lösungen mit hinreichender Genauigkeit und sind praktisch anwendbar. In der Estimationstheorie ist es meistens vorzuziehen, anstatt ein nichtlineares Problem zu lösen, ein lineares Modell zu benutzen, das das nichtlineare Problem hinreichend annähert. Deswegen ist es von besonderem Interesse, die Bildrekonstruktionsaufgaben in linearer Näherung als ersten Ansatz zu betrachten. Die lineare Näherung bildet auch eine gute Grundlage für die Entwicklung von quasioptimalen nichtlinearen Algorithmen. In diesem Sinne haben die linearen Modelle dynamischer Bilder große Bedeutung.

Wie schon oben dargestellt, wird ein dynamisches Bild in der vorliegenden Arbeit durch Gl. (2.2) angegeben. Die lineare Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{w}(k) &= \mathbf{B}(k)\xi(k), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

stellt einen Spezialfall der Gl. (2.2) dar. Ein Prozess, der durch diese Gleichung bestimmt ist, wird im Weiteren linearer Prozess bzw. lineares Bild genannt. Es wird angenommen, dass der Anfangsprozess  $\mathbf{x}_0$  dem Gauß'schen Verteilungsgesetz gehorcht.

Die Verteilungsdichte der Folge (2.13) kann aus Gl. (2.11) abgeleitet werden und hat die Form

## 2. Mathematische Modelle

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = c_{k+1} \cdot \exp\left[-0,5(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k)^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k)\right].$$

Sie stellt eine Gaußfunktion sowohl für die Variable  $\mathbf{x}_{k+1}$  wie auch für  $\mathbf{x}_k$  dar. Die Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt  $k+1$  ist durch Gl. (2.8) bestimmt. Es kann gezeigt werden, dass auch die Zustände für alle nachfolgenden Zeiten  $k > 0$  Gaußverteilt sind, wenn  $p(\mathbf{x}_0)$  eine Gauß'sche Verteilungsdichte ist.

Dementsprechend gibt die lineare Differenzgleichung (2.13) mit Gauß'scher Anfangsbedingung ein lineares Modell eines Gaußverteilten dynamischen Bildes an.

Die Anfangsverteilungsdichte  $p_0(\mathbf{x}_0)$  wird durch die Gleichung

$$p_0(\mathbf{x}_0) = c_0 \cdot \exp\left[-0,5(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)\right],$$

$$c_0 = \left[(2\pi)^S \det \mathbf{P}_0\right]^{-0,5}$$

dargestellt, wobei  $\mathbf{m}_0 = \langle \mathbf{x}_0 \rangle$  den Erwartungswert der Anfangsbedingung angibt, und  $\mathbf{P}_0 = \langle (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)^T \rangle$  die Kovarianzmatrix der Anfangsbedingung ist. Die Gauß'sche Verteilungsdichte des Prozesses zum Zeitpunkt  $k+1$  wird dann durch die Gleichung

$$p_0(\mathbf{x}_{k+1}) = c_{k+1} \cdot \exp\left[-0,5(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{0k+1})^T \mathbf{P}_{0k+1}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{0k+1})\right]$$

$$c_{k+1} = \left[(2\pi)^S \det \mathbf{P}_{0k+1}\right]^{-0,5} \quad (2.14)$$

beschrieben. In Gl. (2.14) sind die folgende Bezeichnungen verwendet worden:  $\mathbf{m}_{0k+1} = \mathbf{m}_0(k+1) = \langle \mathbf{x}_{k+1} \rangle$  — Erwartungswert des Bildes zum Zeitpunkt  $(k+1)$ ,  $\mathbf{P}_{0k+1} = \mathbf{P}_0(k+1) = \langle (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{0k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{0k+1})^T \rangle$  — Kovarianzmatrix des Bildes zum Zeitpunkt  $(k+1)$ .

Durch Angabe des Erwartungswertvektors  $\mathbf{m}_0(k+1)$  und der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0(k+1)$  werden alle statistischen Charakteristika des linearen Modells eines Gauß'schen Bildes vollständig festgelegt. Diese Charakteristika können mit Hilfe der Gl. (2.8) erhalten werden. Allerdings erscheint es vernünftiger, sie direkt aus der Gleichung des Modells (2.13) zu gewinnen.

Durch Anwendung der bekannten Regeln für die Berechnung des Erwartungswertes ergibt sich aus Gl. (2.13)

$$\langle \mathbf{x}(k+1) \rangle = \mathbf{A}(k) \langle \mathbf{x}(k) \rangle + \mathbf{u}(k) + \langle \mathbf{w}(k) \rangle.$$

Wird berücksichtigt, dass der Erwartungswert des verwendeten weißen Rauschens gleich 0 ist, d.h.  $\langle \mathbf{w}(k) \rangle = \mathbf{0}$ , ergibt sich folgende Beziehung

$$\mathbf{m}_0(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{m}_0(k) + \mathbf{u}(k), \quad (2.15)$$

wobei  $\mathbf{m}_0(k)$  den Erwartungswert  $\langle \mathbf{x}(k) \rangle$  bezeichnet.

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0(k+1)$  bestimmt den statistischen Charakter des Prozesses zum Zeitpunkt  $k+1$ . Sie zeigt, wie die möglichen Werte des Prozesses  $\mathbf{x}(k)$  um den Erwartungswert herum verteilt sein können. Von Interesse ist weiterhin die Frage, wie sich der

Charakter des Prozesses mit der Zeit ändert. Um diese Frage zu diskutieren, wird wie folgt vorgegangen. Durch Subtrahieren der Gl. (2.15) von Gl. (2.13) ergibt sich

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (2.16)$$

In diesem Ausdruck taucht die neue Variable  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{m}_0(k)$  auf, die den zentrierten Zustandsvektor angibt. Um die zeitlichen statistischen Charakteristika zu untersuchen, werden die nacheinander folgende Zeitpunkte  $(k+l+1)$ ,  $l=0,1,2,\dots$ , in Betracht gezogen. Ausgehend von Gl. (2.16), gilt für diese Zeiten

$$\hat{\mathbf{x}}(k+l+1) = \mathbf{A}(k+l) \hat{\mathbf{x}}(k+l) + \mathbf{w}(k+l). \quad (2.17)$$

Durch sukzessives Einsetzen der Werte  $\hat{\mathbf{x}}(k+l)$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(k+l-1)$ , ...,  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  in die rechte Seite von Gl. (2.17) und nachfolgender Zusammenfassung der Summanden, transformiert Gl. (2.17) in die Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+l+1) = & \left\{ \prod_{i=0}^l \mathbf{A}(k+i) \right\} \hat{\mathbf{x}}(k) + \\ & + \sum_{i=1}^l \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}(k+l-j) \right\} \mathbf{w}(k+l-i) + \mathbf{w}(k+l). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wird die so genannte Autokorrelationsmatrix durch

$$\mathbf{P}_0(k+l+1 | k+l) = \left\langle \hat{\mathbf{x}}(k+l+1) \cdot \hat{\mathbf{x}}^T(k+l) \right\rangle \quad (2.19)$$

dargestellt, so folgt durch Einsetzen der vorher erhaltenen Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(k+l+1 | k+l) = & \left\{ \prod_{i=0}^l \mathbf{A}(k+i) \right\} \mathbf{P}_0(k) \mathbf{A}^T(k) + \\ & + \left\{ \prod_{i=0}^{l-1} \mathbf{A}(k+l-i) \right\} \mathbf{Q}(k), \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei  $\mathbf{P}_0(k) = \mathbf{P}_0(k | k)$  die Kovarianzmatrix des Bildes ist. Für  $l=0$  ergibt sich für die Matrix  $\mathbf{P}_0(k+1)$

$$\mathbf{P}_0(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{P}_0(k) \mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k). \quad (2.21)$$

Die Gln. (2.15) und (2.21) legen die Charakteristika des Modells eines Gauß'schen Bildes fest, das durch Gl. (2.13) definiert ist.

Die Matrix  $\mathbf{P}_0(k+l+1 | k+l)$  ist in dem Sinne allgemeiner als  $\mathbf{P}_0(k+l)$ , dass sie nicht nur die räumliche sondern auch die zeitliche Kovarianz des dynamischen Bildes zwischen den Zeitpunkten  $k+l$  und  $l$  beschreibt.

Im Fall, wenn die Matrizen  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}(k) = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{Q}$ , und der Vektor  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}$  konstant sind, sowie das Modell des Prozesses stabil ist, konvergiert das entsprechende dynamische Bild zu einem Bild, das stationär in statistischem Sinne ist. D.h. der Erwartungswert

## 2. Mathematische Modelle

ungswert  $\mathbf{m}_0(k) = \mathbf{m}_0$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0(k) = \mathbf{P}_0$  werden unabhängig von Zeit. Aus Gl. (2.15) ergibt sich dann folgende Beziehung für den Erwartungswert

$$\mathbf{m}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u}, \quad (2.22)$$

wobei mit  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet wird. Weiterhin gibt Gl. (2.21) die Beziehung für die Kovarianzmatrix an

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{A}\mathbf{P}_0\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (2.23)$$

Die Gln. (2.22) und (2.23) bestimmen die Parameter der Verteilungsdichtefunktion (2.14) des stationären Bildes vollständig.

Im Fall eines stationären Prozesses ist es sinnvoll, die Funktion  $\mathbf{F}_0(l) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_0(k+l+1 | k+l)$  zu betrachten, um die räumlich-zeitlichen Charakteristika des stationären Bildes zu beschreiben. Aus Gl. (2.20) ergibt sich

$$\mathbf{F}_0(l) = \mathbf{A}^{l+1} \mathbf{P}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^l \mathbf{Q}.$$

Durch Einsetzen von  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{A}\mathbf{P}_0\mathbf{A}^T$  aus Gl. (2.23) folgt

$$\mathbf{F}_0(l) = \mathbf{A}^l \mathbf{P}_0. \quad (2.24)$$

Die Diagonalelemente dieser Matrix

$$\mathbf{G}_0(l) = \text{diag} \mathbf{F}_0(l) \quad (2.25)$$

beschreiben die zeitliche Kovarianzfunktion jedes Bildelementes, die Autokorrelation genannt wird.

Die Gln. (2.22)–(2.25) können für die Berechnung der Parameter eines stationären Bildes bei gegebenen  $\mathbf{m}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{F}_0(l)$  benutzt werden. Die entsprechenden Gleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{F}_0(l) \mathbf{P}_0^{-l} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{A} \mathbf{P}_0 \mathbf{A}^T \\ \mathbf{u} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hier ist zu betonen, dass das Modell (2.13) des Bildes stabil sein muss. Das stellt Beschränkungen für die Auswahl der Matrix  $\mathbf{A}$  dar. Es ist bekannt [2.5], dass das lineare Modell (2.13) mit konstanter Matrix  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}$  in dem Fall stabil ist, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i(\mathbf{A})$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$  der Matrix  $\mathbf{A}$  die Bedingung

$$|\lambda_i(\mathbf{A})| < 1$$

erfüllen.

In diesem Abschnitt wurde ein lineares Modell des dynamischen Prozesses vorgestellt. Es wurde gezeigt, wie ein stationäres dynamisches Bild mit gegebenen Charakteristika erhalten werden kann. Ein linearer stationärer Prozess kann in vielen Fällen als adäquates mathematisches Modell realer physikalischer Prozesse dienen. Die entsprechenden linearen Algorithmen liefern hinreichend stabile Lösungen der Rekonstruktionsaufgabe [2.2]. Die

statistischen Charakteristika, die die Rolle von a priori Wissen spielen, bestimmen hauptsächlich die Qualität der Darstellung eines realen Prozesses. In der Praxis werden diese Charakteristika aus der Kenntnis über den physikalischen Prozess und aus verfügbaren experimentellen Daten erhalten. Im Weiteren wird das vorgestellte Modell die Grundlage für die Entwicklung weiterer Modelle bilden. Um die praktische Anwendung des Modells zu veranschaulichen, wird im folgenden Abschnitt ein entsprechendes Beispiel vorgestellt und diskutiert.

## 2.6 Beispiel der Modellierung eines dynamischen Bildes mit linearem Modell

Die Komplexität des linearen Modells wird von der Struktur der Matrix  $A(k)$  bestimmt. Deswegen sind Fälle von besonderem Interesse, wenn die Matrix  $A(k)$  (und damit auch das Modell) eine vergleichbar einfache Form annimmt. Im Weiteren wird der Fall untersucht, wenn die Matrix  $A(k)$  von Diagonalgestalt ist. Soweit eine Diagonalmatrix keine Zusammenhänge zwischen den Bildelementen angibt, werden die Kovarianzcharakteristika des Modells (2.13) allein durch die Gestalt der Matrix  $Q(k)$  festgelegt. Das eröffnet die Möglichkeit wesentlich einfachere Ausdrücke für die statistischen Charakteristika des Modells herzuleiten. Weiterhin werden die wichtigsten Eigenschaften für dieses mathematische Modell dargestellt.

Die Matrix  $A(k)$  sei von der Gestalt

$$A(k) = \text{diag}[a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}] = \text{diag}[\mathbf{a}], \quad (2.27)$$

wobei mit  $\mathbf{a}$  der Vektor der Hauptdiagonalelemente  $A_{ii} = a_i, i = 1, 2, \dots, S$  bezeichnet wird, d.h.  $\mathbf{a} = [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}]^T$ . Es wird weiterhin angenommen, dass die Matrizen  $A(k) = \text{diag}[a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}]$  und  $Q$  konstant sind, d.h. das dynamische Bild ist in statistischem Sinne stationär.

Zuerst wird die Stabilität des Modells untersucht. Das Stabilitätskriterium jedes Bildelementes wird durch die Stabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= a_i x_i(k), \\ x_i(0) &= x_{i0} \end{aligned}$$

bestimmt. Sie ist immer dann stabil, wenn

$$0 < a_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (2.28)$$

gilt. Dementsprechend bestimmen die Ungleichungen (2.28) die Stabilität des verwendeten Modells.

Ausgehend von den im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Beziehungen werden im Folgenden die Parameter und Charakteristika des betrachteten Modells bestimmt.

Die Ausdrücke für die Kovarianzmatrix  $P_0$  und den Erwartungswert  $m_0$  des Bildes werden aus Gl. (2.26) gewonnen. Die Matrix  $Q$  nimmt folgende Form an

$$Q = P_0 - A P_0 A^T. \quad (2.29)$$

## 2. Mathematische Modelle

Für ihre Elemente gilt

$$q_{ij} = (1 - a_i a_j) p_{0ij}, \quad (2.30)$$

wobei  $p_{0ij}$  das entsprechende Element der Matrix  $\mathbf{P}_0$  angibt. Der Vektor  $\mathbf{u}$  ist durch

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{m}_0 \quad (2.31)$$

gegeben. Die Elemente  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ) des Vektors  $\mathbf{u}$  werden aus

$$u_i = (1 - a_i) m_{0i} \quad (2.32)$$

bestimmt, wobei  $m_{0i}$  das entsprechende Element des Erwartungswertvektors  $\mathbf{m}_0$  ist. Wegen Gl. (2.24) folgt die zeitliche Kovarianzmatrix zu

$$\mathbf{F}_0(l) = \text{diag}[a_1^l, a_2^l, \dots, a_S^l] \mathbf{P}_0$$

und die zeitlichen Kovarianzfunktionen (2.25) von jedem Bildelement werden mit

$$q_{0ij}(l) = a_i^l p_{0ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, S \quad (2.33)$$

berechnet, wobei  $q_{0ij}(l)$  ein Element der zeitlichen Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_0(l)$  ist.

Für das hier betrachtete mathematische Modell sind weiterhin folgende Charakteristika von Interesse.

Wird der Korrelationsradius  $r_{ki}$  betrachtet, der durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0ij} = p_{0ii}(r_{ki} + 1),$$

dann folgt direkt

$$r_{ki} = p_{0ii}^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0ij} - 1. \quad (2.34)$$

Dieser Wert beschreibt den maximalen Abstand zwischen einem gegebenen Bildelement und einem anderen beliebigen Element, mit dem das betrachtete Element noch korreliert. Alle Elemente mit einem größeren Abstand sind von diesem Element unabhängig.

Wenn die Matrix  $\mathbf{P}_0$  von Diagonalgestalt ist, ist der Korrelationsradius null. Für den Spezialfall, dass die Elemente der Kovarianzmatrix die Form  $p_{0ij} = p_{0ii} \alpha_i^{(j-i)}$ ,  $0 \leq \alpha_i < 1$  haben, kann der Korrelationsradius durch

$$r_{ki} = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \quad (2.35)$$

berechnet werden.

Weiterhin ist die Korrelationszeit von Interesse. Sie wird mit  $l_{ki}$  bezeichnet und durch

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_i^l = l_{ki} + 1,$$

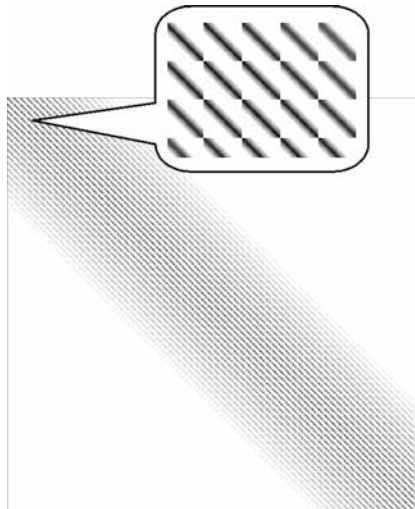
indirekt definiert. Daraus folgt

$$l_{ki} = \frac{a_i}{1 - a_i}. \quad (2.36)$$

Diese Größe beschreibt das Zeitintervall, nach dem der dynamische Prozess seinen stationären Zustand erreicht hat.

Damit ist das mathematische Modell des betrachteten dynamischen Prozesses vollständig bestimmt. Trotz der Einfachheit dieser Beschreibung, ermöglicht sie die Modellierung eines stochastischen Bildes mit gegebenem Erwartungswert und Kovarianzmatrix.

Als ein Beispiel sind in *Abb. 2.3* die Realisierungen eines stationären dynamischen Bildes dargestellt. In der linken Spalte ist das zweidimensionale Grauwertbild gezeigt und in der rechten Spalte ist ein 3D-Graph des entsprechenden Feldes dargestellt. Dieses Bild hat die Dimension  $S = N \times N = 64 \times 64$ . Die Koeffizienten  $a_i$  sind gleich gewählt:  $a_i = 0.95$ . Wegen Gl. (2.36) ist die Korrelationszeit jedes Bildelementes  $l_k = 20$ .



*Abb. 2.2. Struktur der Rauschmatrix des Bildmodells*

Die Matrix  $\mathbf{B}$ , die die räumliche Kovarianzeigenschaften des Bildes bestimmt, wird wie folgt konstruiert. Es wird das  $i$ -te Element  $w_i$  des Rauschvektors  $\mathbf{w} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi}$  betrachtet, das dem  $(t, s)$ -ten Element  $x_{ts}$  des Bildes entspricht. Weiterhin wird angenommen, dass das Element  $w_i$  nur mit den Elementen  $w_j$  korreliert, die den Elementen  $x_{t's'}$  des Bildes entsprechen, für die die Bedingung  $d(x_{ts}, x_{t's'}) = \max(|t' - t|, |s' - s|) \leq r$  gilt. Diese Elemente sind von  $x_{ts}$  nicht weiter als  $r$  entfernt. Die Korrelationslänge ist dann durch die lineare Beziehung

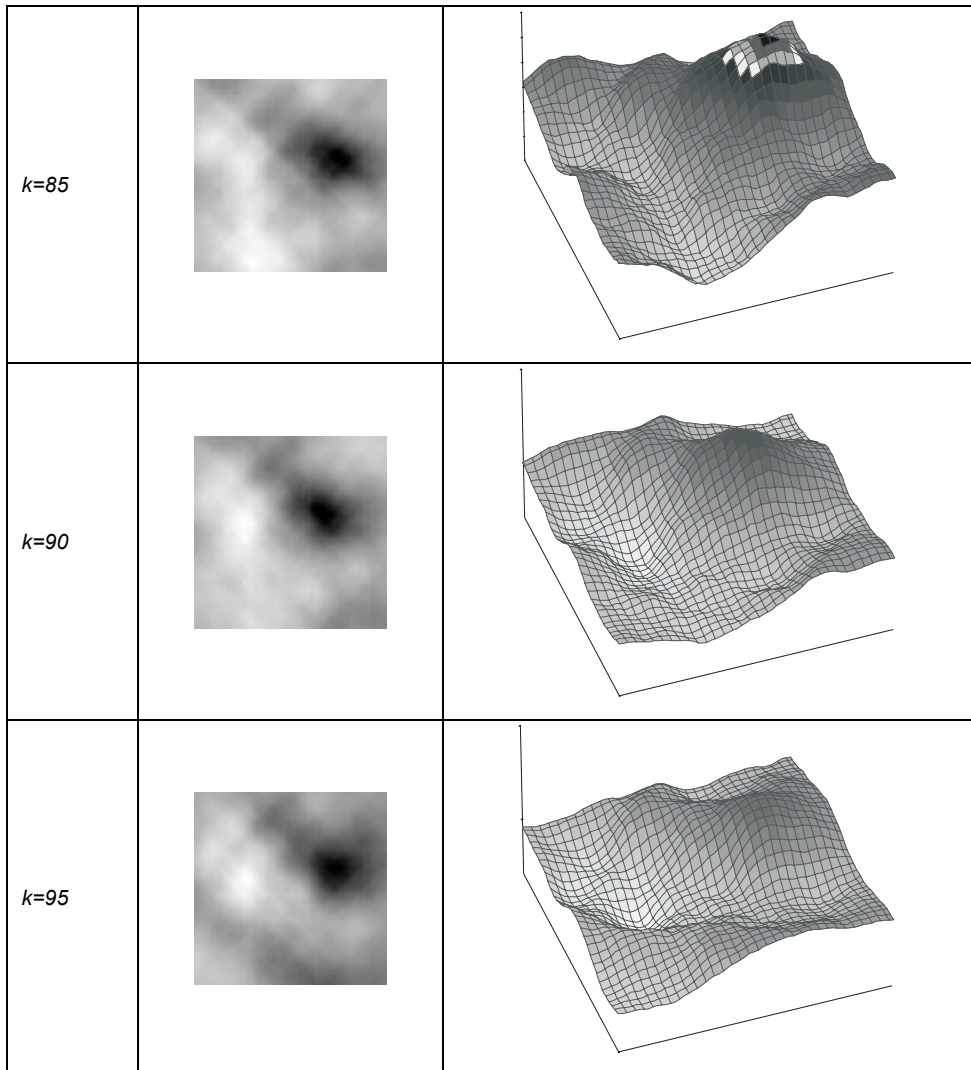
$$b_{ij} = \frac{b_0}{(r + 1)} (r + 1 - d(x_{ts}, x_{t's'}))$$

gegeben, wobei  $b_0$  ein Maßstabskoeffizient ist.

## 2. Mathematische Modelle

Eine auf diese Weise konstruierte Matrix  $B$  ergibt für das Modell den Kovarianzradius  $r$  an. Die entsprechende Matrix hat eine Streifenstruktur, wie in *Abb. 2.2* dargestellt. Im vorgestellten Beispiel ist als Kovarianzradius  $r = 16$  gewählt. Der Erwartungswert des Bildes ist gleich 0.

Dieses Beispiel wird im Weiteren als Grundlage für andere, insbesondere nichtlineare Modelle benutzt.



*Abb. 2.3.* Die Realisierungen des stationären Feldes für das lineare Modell des dynamischen Bildes.



## 2.7 Nichtlineares Modell eines dynamischen Bildes

In dem Fall, in dem als a priori Wissen für das mathematische Modell allein der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix dienen, ist ein lineares Modell adäquat und wird damit am häufigsten verwendet. Im allgemeinen Fall kann auch das Verteilungsgesetz des Bildgrauwertes bekannt sein. Das gilt insbesondere, wenn berücksichtigt werden muss, dass der modellierte Prozess ausschließlich positive Werte annimmt. Wird für diesen Fall das Verteilungsgesetz berücksichtigt, so ergibt sich ein nichtlineares Modell. Bei einem nichtlinearen Ansatz werden die Lösungsmethoden für die entsprechende inverse Aufgabe komplizierter und die Estimationsaufgabe kann praktisch nur näherungsweise gelöst werden.

Der allgemeine Ansatz zur Entwicklung eines nichtlinearen Modells besteht darin, direkt von Gl. (2.2) auszugehen, wobei die Funktion  $\mathbf{a}$  nichtlinear ist. Obwohl in der Estimationstheorie für Markov-Prozesse eine entsprechende Methode entwickelt worden ist [2.3,2.4], ist sie in der Praxis wegen ihrer Komplexität häufig nicht anwendbar. Als a priori Wissen dienen am häufigsten eindimensionale Verteilungsgesetze, d.h. die Verteilungsgesetze  $p(x_i(k))$  jedes  $i$ -ten Bildelementes, die Kenntnis des mehrdimensionalen Verteilungsgesetzes  $p(x_1, x_2, \dots, x_N)$  steht meist nicht zur Verfügung. Eine derartige Beschränkung des a priori Wissens kann in dem mathematischen Modell berücksichtigt werden und ermöglicht damit eine Vereinfachung der Lösungsmethode.

Eine Möglichkeit zur nichtlinearen Modellierung eines dynamischen Bildes besteht darin, das nichtlineare Bild durch die Transformation eines linearen Bildes zu erhalten. Demzufolge gliedert sich das nichtlineare Modell in zwei Blöcke, wie in Abb. 2.4 dargestellt. Der erste Block formt den linearen Prozess  $\mathbf{x}(k)$ , gegeben durch

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k).$$

Im zweiten Block wird der Prozess  $\mathbf{x}(k)$  durch Anwendung einer nichtlinearen Transformation  $f[\dots]$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]$$

in einen nichtlinearen Prozess  $\mathbf{y}(k)$  umgewandelt.

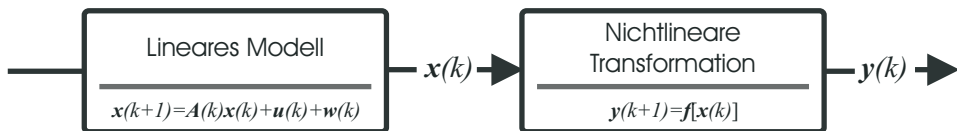


Abb.2.4. Zweistufiges Modell der Erzeugung eines dynamisches nichtlineares Prozesses

Entsprechend wird hier das betrachtete nichtlineare Modell durch ein Gleichungssystem

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (2.37)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)], \quad (2.38)$$

beschrieben, was einen Spezialfall des Modells (2.2) darstellt. Die Dimension dieses Systems ist doppelt so groß, wie die Dimension des modellierten Bildes  $\mathbf{y}(k)$ . Durch Wahl der nichtlinearen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  kann das gewünschte Verteilungsgesetz des Bildgrauwertes sichergestellt werden. Hier sei daran erinnert, dass nach einer nichtlinearen Transformation die Markov-Eigenschaften des Prozesses erhalten bleiben, d.h. dass  $\mathbf{y}(k)$  eine Markov-Folge ist, wenn der lineare Prozess  $\mathbf{x}(k)$  eine Markov-Folge ist. In Analogie wird der Gesamtprozess  $[\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k)]$  die Markov-Eigenschaften behalten. Somit kann im Weiteren der nichtlineare Prozess als Markov-Folge behandelt werden.

In Analogie zu den im vorangegangenen Abschnitt erhaltenen Ausdrücken, können folgende Beziehungen für den Erwartungswertvektor  $\mathbf{m}_x$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_x$  abgeleitet werden

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{m}_x(k) + \mathbf{u}(k), \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}_x(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}_x(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{B}^T(k). \quad (2.40)$$

Unter Zugrundelegung eines Gauß'schen Verteilungsgesetzes für den Prozess  $\mathbf{x}(k)$  folgt mit Gln. (2.39) und (2.40)

$$p_x(\mathbf{x}, k) = \left( (2\pi)^S \cdot \det \mathbf{P}_x(k) \right)^{-0.5} \times \exp \left\{ -0,5 [\mathbf{x} - \mathbf{m}_x(k)]^T \mathbf{P}_x^{-1}(k) [\mathbf{x} - \mathbf{m}_x(k)] \right\}. \quad (2.41)$$

Für den nichtlinearen Prozess  $\mathbf{y}(k)$  ergeben sich der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix durch folgende Formeln

$$\mathbf{m}_y(k+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) p_x(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}_y(k+1) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_y(k)][\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_y(k)]^T p_x(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x}. \quad (2.43)$$

Wegen ihrer Komplexität erlaubt diese Beschreibung im allgemeinen Fall keine praktisch anwendbaren Ansätze zur Festlegung der gewünschten statistischen Charakteristika des Prozesses. Es existieren keine so einfachen Beziehungen mehr, wie sie für lineare stationäre Prozesse erhalten wurde, die die gewünschten statistischen Charakteristika mit den Parametern des Modells verbinden. Deswegen muss in der Praxis eine Näherung für das Verteilungsgesetz eingeführt werden. Im Weiteren wird diese Methode diskutiert.

Wenn die Parameter des linearen Modells (2.37) gegeben sind, dann stellt die Bestimmung der nichtlinearen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  im Prinzip die Suche nach der Transformationsvorschrift dar, die die Gauß'sche Verteilungsdichte für den linearen Prozess  $\mathbf{x}$  in die gewünschte Verteilungsdichte des nichtlinearen Prozesses überführt. Diese Aufgabe ist nicht trivial, weil es im Allgemeinen für Funktionen mit mehreren Variablen keine eindeutige Umkehrfunktion gibt.

Das Problem wird für den beschriebenen Spezialfall wesentlich vereinfacht, wenn jede Koordinate  $y_i$  nur von der entsprechenden Koordinate  $x_i$  abhängig ist. Dementsprechend nimmt die nichtlineare Funktion  $f(\mathbf{x})$  die Gestalt  $f(\mathbf{x}) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_S(x_S)]^T$  an. Weiterhin wird angenommen, dass die Funktionen  $f_i(x_i)$  stetig und differenzierbar sind und ihre Definitionsbereiche in  $I$  Unterbereiche unterteilt werden können, in denen für jede  $f_i(x_i)$  die Umkehrfunktion existiert. Dann kann die neue Verteilungsdichte durch

$$p_{y_i}(y_i) = \sum_{r=1}^I p_{x_r} [f_r^{-1}(y_i)] \cdot \left| [f_r^{-1}(y_i)]' \right| \quad (2.44)$$

erhalten werden, wobei  $f_r^{-1}(y_i)$  die Umkehrfunktionen von  $f_i(x_i)$  sind und  $[f_r^{-1}(y_i)]' = df_r^{-1}(y_i)/dy_i$  gilt. Im Weiteren werden zwei praktische Fälle betrachtet: (i) wenn die Funktionen  $f_i(x_i)$  positiv und monoton wachsend sind und (ii) wenn die Funktionen  $f_i(x_i)$  positiv und gerade sind, d.h.  $f_i(x_i) = f_i(-x_i)$ . Diese Funktionen ermöglichen es, eine große Menge von Verteilungsdichtefunktionen  $p_{y_i}(y_i)$  zu erhalten. Im Fall monoton wachsender Funktionen nimmt Gl. (2.44) eine einfache Form an

$$p_{y_i}(y_i) = p_{x_i} [f_i^{-1}(y_i)] \cdot \left| [f_i^{-1}(y_i)]' \right|$$

Für gerade Funktionen folgt

$$p_{y_i}(y_i) = \left( p_{x_i} [f_i^{-1}(y_i)] + p_{x_i} [-f_i^{-1}(y_i)] \right) \cdot \left| [f_i^{-1}(y_i)]' \right|$$

In der *Tabelle 2.1* sind drei grundlegende Transformationen schematisch dargestellt.

Für den hier betrachteten Fall werden die Beziehungen für die statistischen Charakteristika, bzw. den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix wesentlich vereinfacht.

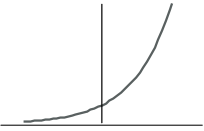
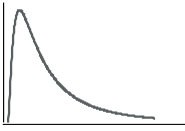
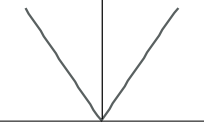
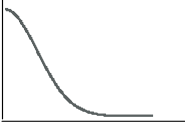
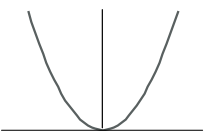
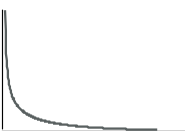
Der nichtlineare Prozess  $\mathbf{y}(k)$  wird durch Anwendung der Transformation  $f(\mathbf{x}) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_S(x_S)]^T$  aus dem Gaußverteilten Prozess  $\mathbf{x}(k)$  erhalten. Der Erwartungswert kann dementsprechend durch

$$\begin{aligned} m_{y_i}(k+1) &= \langle f_i[x_i(k)] \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) \cdot (2\pi p_{ii}(k))^{-0.5} \exp \left[ -0.5 \frac{(x_i - m_{xi}(k))^2}{p_{ii}(k)} \right] dx_i \end{aligned} \quad (2.45)$$

berechnet werden, wobei  $m_{xi}(k)$  das  $i$ -en Element des Vektors (2.39) ist und  $p_{ii}(k)$  ein Diagonalelement der Kovarianzmatrix (2.40) angibt. Im allgemeinen Fall kann Gl. (2.45) numerisch gelöst werden. In einige Fälle steht eine Darstellung durch elementare Funktionen zu Verfügung. In der *Tabelle 2.2* sind die entsprechenden Ausdrücke für die nichtlinearen Funktionen aus der *Tabelle 2.1* angegeben.

## 2. Mathematische Modelle

Tabelle 2.1. Beispiele der Überföhren der Gauß'schen Verteilungsdichte durch Anwendung von nichtlinearen Transformationen.

		$p_x(x) = (2\pi\sigma_x^2)^{-0.5} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \Phi(z) = (2\pi)^{-0.5} \int_0^z \exp(-0.5t^2) dt$		
		$y = f(x)$	$p_y(y)$	
1	$e^{\alpha(x-a)}$		$c \cdot y \cdot \exp\left[-\left(2\sigma_x^2\alpha^2\right)^{-1} \times \left(\ln y + \alpha(a - m_x)\right)^2\right];$ $c = \alpha(2\pi\sigma_x^2)^{-0.5}.$	
2	$ x $		$c \cdot \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right];$ $c = \frac{(0.5 + \Phi(m_x / \sigma_x))^{-1}}{2\pi\sigma_x^2}.$	
3	$x^2$		$c \cdot y^{-0.5} \cdot \exp\left[-\frac{y+m_x^2}{2\sigma_x^2}\right] \times$ $\times \operatorname{ch}\left[\frac{y^{0.5} m_x}{\sigma_x^2}\right];$ $c = (2\pi\sigma_x^2)^{-0.5}.$	

Die Kovarianzmatrix kann direkt aus ihrer Definition erhalten werden

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y(k+1) &= \left\langle \hat{\mathbf{y}}(k+1) \hat{\mathbf{y}}^T(k+1) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)] \mathbf{f}^T[\mathbf{x}(k)] \right\rangle - \mathbf{m}_y(k+1) \mathbf{m}_y^T(k+1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist eine Matrix mit den Elementen  $\langle f_i(x_i) f_j(x_j) \rangle, i, j = 1, 2, \dots, S$ . Sie werden durch

$$\langle f_i(x_i) f_j(x_j) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) f_j(x_j) p_x(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2.47)$$

berechnet, wobei  $p_x(x_i, x_j)$  die zweidimensionale Gauß'sche Verteilungsdichte

$$p_x(x_i, x_j) = (2\pi \det P_{xij})^{-0.5} \exp\left[(x_i - m_{xi})^T P_{xij}^{-1} (x_i - m_{xi})\right] \quad (2.48)$$

ist. Hier bezeichnet  $P_{xij}$  die zweidimensionale Kovarianzmatrix. Soweit die Funktion (2.48) bekannt ist, können alle Elemente der Matrix (2.46) berechnet werden. In Tabelle 2.2 sind

die Formeln für die Berechnung der Dispersion  $\sigma_y^2$  bzw. der Diagonalelemente der Matrix  $P_y(k+1)$  für die nichtlinearen Funktionen aus *Tabelle 2.1* angegeben.

Insofern können die statistischen Charakteristika, bzw. der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des nichtlinearen Prozesses aus den Charakteristika des linearen Prozesses berechnet werden. Die Aufgabe der Modellierung des realen physikalischen Prozesses besteht dann darin, eine passende nichtlineare Transformationsvorschrift zu finden und die statistischen Charakteristika des linearen Modells zu wählen.

*Tabelle 2.2 Berechnung von Erwartungswert und Dispersion der Zufallsgrößen für einige nichtlineare Transformationen.*

$p_x(x) = (2\pi\sigma_x^2)^{-0.5} \cdot \exp(-(x - m_x)^2 / 2\sigma_x^2), \Phi(z) = (2\pi)^{-0.5} \int_0^z \exp(-0.5t^2) dt$			
	$y = f(x)$	$m_y$	$\sigma_y^2$
1	$e^{\alpha(x-a)}$	$\exp[\alpha(m_x - a) + 0.5\alpha^2\sigma_x^2]$	$\exp[\alpha(m_x - a) + 0.5\alpha^2\sigma_x^2] \times (\exp[\alpha(m_x - a)] - 1)$
2	$ x $	$(2\sigma_x^2 / \pi)^{0.5} \exp\left[-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}\right] + 2m_x \cdot \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)$	$\sigma_x^2 + m_x^2 - \left( (2\sigma_x^2 / \pi)^{0.5} \exp\left[-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}\right] + 2m_x \cdot \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) \right)^2$
3	$x^2$	$\sigma_x^2 + m_x^2$	$2\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2 m_x^2$

Als Beispiel für die Anwendung des hier vorgestellten mathematischen Modells werden zwei nichtlineare Prozesse modelliert. Als zugrunde liegender linearer Prozess wird das im vorhergehenden Abschnitt vorgestellte Beispiel gewählt. Im ersten Fall wird das Gauß'sche dynamische Bild mittels der Funktion

$$y(k+1) = \exp[x(k)] \tag{2.49}$$

transformiert. Bei dieser Wahl der Transformation wird ein Bild  $y(k)$  ohne negative Grauwerte erzeugt. Die entsprechenden Realisierungen des Bildes sind in *Abb. 2.4.a* dargestellt.

Im zweiten Fall wird die nichtlineare Transformation

$$y(k+1) = x(k) \cdot \left(1 + (x(k))^2\right)^{-0.5} \tag{2.50}$$

angewendet. Diese Transformation ermöglicht es, einen begrenzten Bereich der Bildgrauwerte zu berücksichtigen. Realisierungen des erhaltenen Bildes sind in *Abb. 2.4.b* dargestellt.

Hier sei nochmals erwähnt, dass in beiden Fällen das nichtlineare Bild  $y(k+1)$  aus  $x(k)$  erzeugt wird, das dem vorherigen Zeitpunkt entspricht.

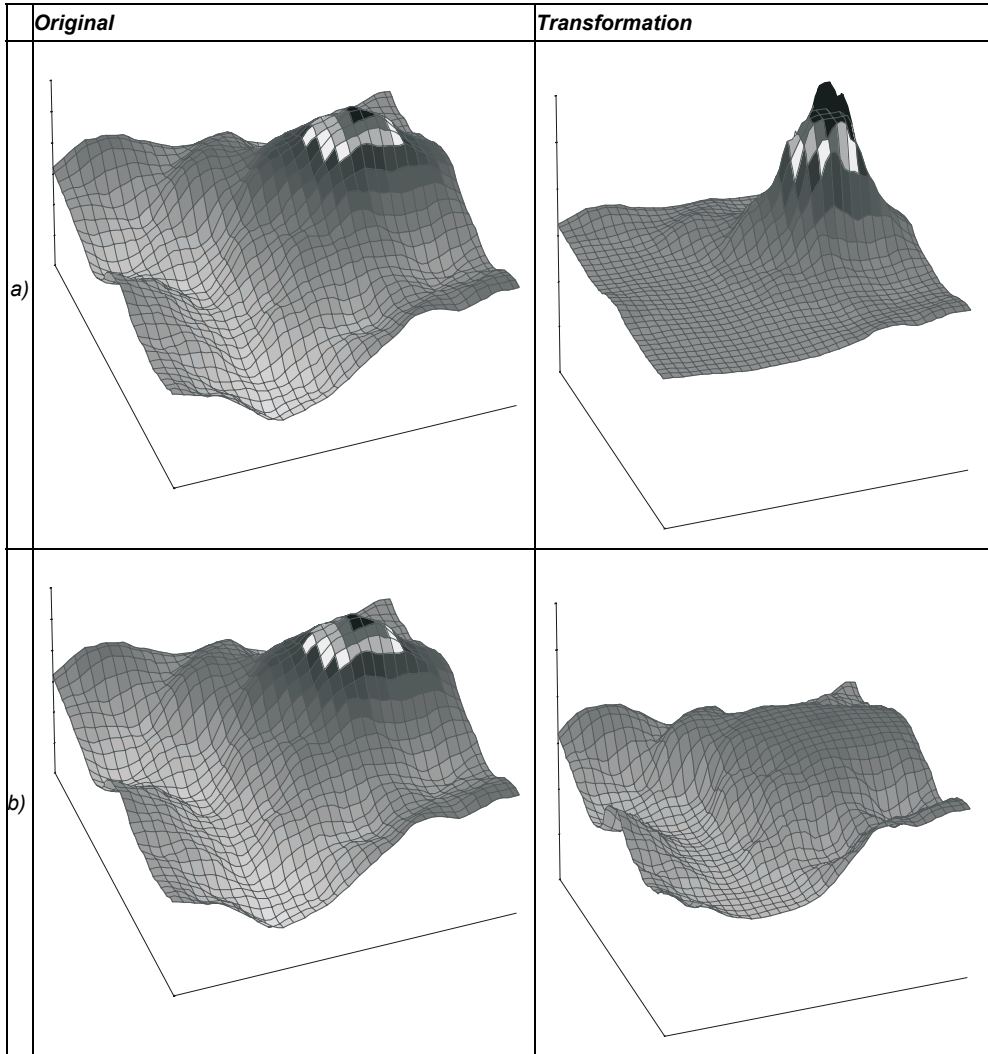


Abb. 2.5. Realisierungen des Gaußverteilten Bildes und der entsprechenden nichtlinearen Bilder

## 2.8 Beobachtungsmodell

Nachdem das mathematische Modell des Prozesses ausgewählt ist, muss ebenfalls ein Modell für den Beobachtungsprozess entwickelt werden. In diesem Abschnitt werden mathematische Modelle für die Beobachtung und den Beobachtungsprozess diskutiert.

Die Information über den betrachteten Prozess  $x(t)$  wird durch einen Beobachtungsprozess als eine Folge von Signale erhalten. Sie werden im Weiteren Projektionen genannt. Obwohl die Projektionen mittels verschiedener Verfahren erhalten werden können, die auf

verschiedenen physikalischen Prinzipien basieren, liegt ihnen ein allgemeines Schema zu Grunde.

Wie oben erwähnt stellt eine Projektion eine Reihe von Messungen eines integralen Parameters des Objektes dar. Die Integration wird entlang einer geraden Linie ausgeführt. Mathematisch gesehen wird sie durch ein Linienintegral dargestellt. Weiterhin wird angenommen, dass der Grauwert des Bildes durch eine Funktion  $f(x, y)$  gegeben wird. Ein Linienintegral entlang der Linie  $L$  wird durch

$$P_L = \int_L f(x, y) ds \quad (2.51)$$

angegeben. Die Linie  $L$  stellt einen Strahl dar, der in der Strahlungsquelle erzeugt wird und durch das Prüfobjekt durchdringt. Die Gesamtheit solcher Integrale, die entlang einer Reihe von Linien berechnet werden, stellt eine Projektion dar.

In der Praxis können reale Daten auf unterschiedliche Weise erhalten werden. Bei der Röntgentomographie wird das Prüfobjekt mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Die durch das Objekt durchgehende Strahlung wird geschwächt und in einem Detektor registriert. Das Maß der Schwächung wird durch den so genannten linearen Schwächungskoeffizienten bestimmt. Hier wird angenommen, dass die realen Messungen den Linienintegralen der Form (2.51) entsprechen. In der Praxis sind sie nur Approximationen, denn die realen physikalischen Prozesse können nicht als Linienintegrale behandelt werden. Für verschiedene Aufgaben ist diese Approximation dennoch ausreichend.

In Analogie zu dem Zustandsraummodell des dynamischen Bildes werden die Projektionen als ein  $m \times I$ -dimensionaler Vektor  $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]^T$  im Beobachtungsraum dargestellt. Die Anzahl  $m$  der Komponenten hängt von der Geometrie des Beobachtungssystems ab. In der Praxis werden üblicherweise die Fälle  $m = S$  oder  $m < S$  behandelt, wobei  $S$  die Größe des zu beobachtenden Prozesses  $x(t)$  darstellt. Im ersten Fall nennt man die Beobachtungen vollständig. Im zweiten Fall werden sie unvollständig genannt. Sei  $m = I$ , so heißen die Beobachtungen skalar, und für  $m > I$  werden sie als vektoriell bezeichnet. Vom Verhältnis zwischen der Anzahl von Projektionen  $m$  und der Anzahl von Bildelementen  $S$  hängt die Qualität der Rekonstruktion direkt ab. Je mehr Projektionsdaten zur Verfügung stehen, desto bessere Rekonstruktionsergebnisse können erreicht werden. Bei vollständiger Beobachtung kann der Prozess, im Idealfall, exakt rekonstruiert werden. Unvollständige Beobachtungen und Ursachen, die zu unvollständigen Beobachtungen führen, werden detailliert im nächsten Kapitel diskutiert.

Im allgemeinen Fall kann ein Beobachtungsmodell durch die Gleichung

$$z(t) = \mathbf{h}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)] \quad (2.52)$$

angegeben werden. Hier bezeichnet  $\mathbf{h}[\cdot]$  eine bekannte, im Allgemeinen nichtlineare Funktion und  $\mathbf{v}(t)$  stellt den Einfluss von Rauschen und Verzerrungen dar. In einigen Spezialfällen kann die nichtlineare Funktion  $\mathbf{h}[\cdot]$  als eine aus einer nichtlinearen und einer linearen Transformation zusammengesetzte Funktion dargestellt werden. Das erleichtert die Bezeichnungen und Berechnungen. Damit ergeben sich zwei grundsätzliche Varianten. Wenn

## 2. Mathematische Modelle

nicht der Prozess  $x(t)$ , sondern seine nichtlineare Transformation beobachtet wird, nimmt die Gl. (2.52) die Form

$$z(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{h}[x(t),v(t)] \quad (2.53)$$

an, wobei  $\mathbf{H}(t)$  eine  $m \times S$ -Matrix bezeichnet, die Beobachtungsmatrix genannt wird.

Die Gleichung

$$z(t) = \mathbf{h}[\mathbf{H}(t)x(t),v(t)] \quad (2.54)$$

stellt den Fall dar, wenn die lineare Transformation zuerst angewandt wird. Welches Modell für einen bestimmten Fall auszuwählen ist, wird von der Funktionsweise des verwendeten Messungsgerätes bestimmt.

Das einfachste Beobachtungsmodell ist das lineare Modell. Ohne Berücksichtigung von Rauschen und Verzerrungen, die später diskutiert werden, wird es durch

$$z(t) = \mathbf{H}(t)x(t) \quad (2.55)$$

dargestellt.

In der Praxis tauchen im Messprozess unvermeidlich Verzerrungen und Rauschen auf. Die Verzerrungen können von verschiedenen Faktoren verursacht werden, beispielsweise durch Konstruktion, Funktionsprinzip und Messfehler des Beobachtungssystems. Diese Ursachen sind in den meisten Fällen bekannt und können in der Gleichung des Modells erfasst werden.

Ein mathematisches Modell der Verzerrungen kann in allgemeiner Form durch

$$\tau(t) = \mathbf{g}[x(t)] \quad (2.56)$$

angegeben werden, wobei  $\mathbf{g}[\cdot]$  eine bekannte nichtlineare Vektorfunktion ist

$$\mathbf{g}[x(t)] = [g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \dots, g_S(x_S(t))]^T.$$

In Analogie zu Gl. (2.53) und Gl. (2.54) kann diese Beziehung unter gewissen Bedingungen vereinfacht werden. Entsprechend folgt:

$$\tau(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{g}(x(t)) \quad (2.57)$$

bzw.

$$\tau(t) = \mathbf{g}(\mathbf{D}(t)x(t)). \quad (2.58)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{D}(t)$  eine  $S \times S$ -Verzerrungsmatrix. Mit Hilfe dieser Matrix könnten zum Beispiel die Unschärfen und/oder Verzerrungen, die bei der Bewegung des Prüfobjektes oder des Messgerätes entstehen, behandelt werden. Der Vektor  $\tau(t)$  stellt dann ein verzerrtes Bild dar. Offensichtlich hat dieser Vektor dieselbe Struktur und denselben physikalischen Sinn wie das Originalbild und kann in alle Gleichungen statt des Vektors  $x(t)$  eingesetzt werden.



Die Übertragung von Signalen wird immer von verschiedenen Störungen begleitet, die als Rauschen bezeichnet werden. Obwohl es vielfältige Ursachen für das Auftauchen von Rauschen gibt, sind einige typische Modelle für dessen Berücksichtigung entwickelt worden. Hier werden zwei dieser Ansätze kurz diskutiert. Das erste Modell wird als Modell mit additivem Rauschen bezeichnet und kann wie folgt dargestellt werden:

$$z(t) = \mathbf{h}[t, \mathbf{x}(t)] + v(t), \quad (2.59)$$

wobei  $v(t)$  ein Zufallsprozess ist, der den Beitrag des Rauschens mit gewissen statistischen Charakteristika erfasst.

Das zweite hier zu erwähnte Modell heißt Modell mit multiplikativem Rauschen und wird durch

$$z(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{h}[t, \mathbf{x}(t)] \quad (2.60)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{V}(t)$  eine  $m \times m$  Diagonalmatrix ist. Die Hauptdiagonalelemente entsprechen dem Vektor des Rauschens  $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)]^T$ , d.h.  $\mathbf{V}(t) = \text{diag } \mathbf{v}(t)$ .

Im Weiteren wird ein Beispiel vorgestellt, um zu erläutern, wie ein Beobachtungsmodell abgeleitet werden kann. Dabei wird von einem linearen Modell ausgegangen, das durch die Differenzgleichung

$$z(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + v(k) \quad (2.61)$$

gegeben ist.

Hier wird ein Beobachtungssystem mit einer Geometrie angenommen, wie sie in *Abb. 2.5* dargestellt ist. Dazu wird das Bild in ein rechteckiges Gitter mit äquidistanten horizontalen und vertikalen Schritten in  $S = N \times N$  gleichgroße Bildelemente geteilt. Die Strahlenquelle wird als Punktquelle angenommen. Sie kann sich auf Positionen befinden, die auf einem Kreis liegen. Diese Quellpositionen müssen nicht notwendigerweise in äquidistanten Winkelschritten voneinander entfernt sein. Die Projektionsdaten werden mittels eines Detektorsystems gewonnen, das aus  $M$  Einzeldetektoren bzw. einer Detektorzeile besteht und sich gegenüber der Strahlenquelle befindet. Die Projektionsmatrix  $\mathbf{H}(k)$  wird wie folgt angesetzt:  $s_0$  sei der Flächeninhalt eines Bildelementes,  $s_{ijk}$  sei der Flächeninhalt der Schnittfläche des  $i$ -ten Strahlungssektors mit dem  $j$ -ten Element des Bildes. Das entsprechende Element  $h_{ijk}$  der Matrix  $\mathbf{H}_k$  wird dann durch das Verhältnis  $h_{ijk} = s_{ijk} / s_0$  definiert. Die Systemantwort  $z_k(k)$  am  $i$ -ten Detektorelement wird Strahlensumme genannt und ist durch die folgende Gleichung gegeben

$$z_i(k) = \sum_{j=1}^S h_{ij}(k) \cdot x_j + v_i(k). \quad (2.62)$$

Dieses Ergebnis entspricht genau Gl. (2.61). Somit enthält der Projektionsvektor  $z(k)$   $M$  Strahlensummen. Physikalisch gesehen, akkumuliert jede Projektion Informationen über die Schwächungskoeffizienten, die hier als Grauwert  $x_j$  bezeichnet werden.

In allen Gleichungen dieses Beispiels bezeichnet  $k$  eine diskrete Zeitvariable. Wir haben den Fall diskutiert, wenn zum einem Zeitpunkt, bzw. bei einer Projektionsaufnahme,

## 2. Mathematische Modelle

nur eine Punktstrahlenquelle betrachtet wird. Für die praktische Anwendung, wenn das Beobachtungssystem eine kompliziertere Geometrie hat, kann dieses Modell sinngemäß erweitert werden.

Ein auf diese Weise erzeugtes Beobachtungsmodell wird im Weiteren für die Lösung der Rekonstruktionsaufgabe benutzt.

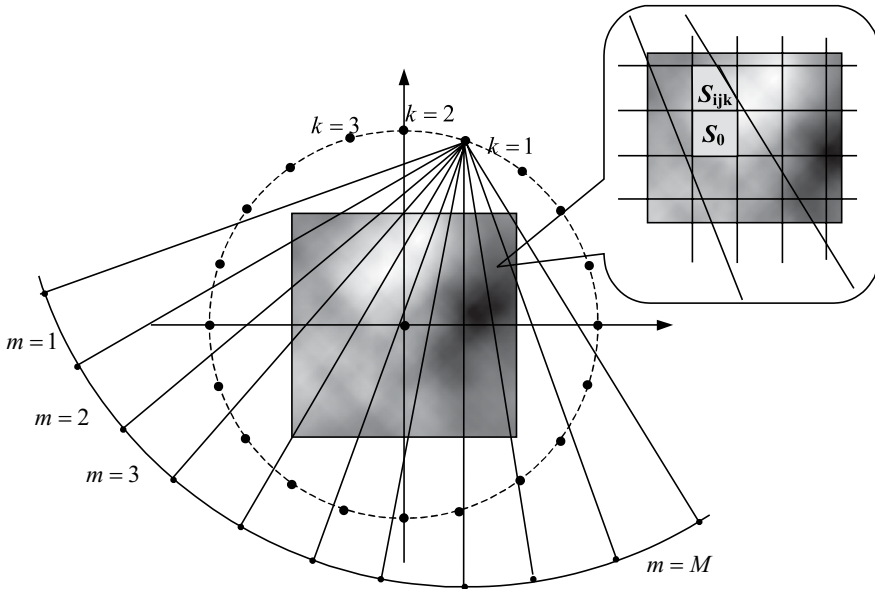


Abb. 2.6. Aufnahmegeometrie

## Literatur zum Kapitel 2

- 2.1. Tichonov A.N., Samarskiy A.A. Gleichungen der mathematischen Physik (in Russisch). Nauka, Moskva, 1972.
- 2.2. Jarlikov M.S., Mironov M.A. Markov Theorie der Estimation von stochastischen Prozessen. (in Russisch) Radio i Svjaz, Moskau, 1993.
- 2.3. Tichonov V.I., Mironov M.A., Markov Prozesse (in Russisch). Sov. Radio, Moskau, 1977
- 2.4. Stratonovich R.L, Topics in the Theory of Random Noise. Gordon and Breach, New York, 1967
- 2.5. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, NJ, 1999.

### 3. Rekonstruktion

Dieser Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung eines Ansatzes zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe. In dem vorhergehenden Kapitel wurden die mathematischen Modelle des dynamischen Bildes und des Beobachtungsprozesses entwickelt, die alle von statistischer Natur sind und anhand stochastischer Gleichungen beschrieben werden. Die entsprechenden Rekonstruktionsverfahren werden im Rahmen der statistischen Estimationstheorie entwickelt und untersucht. Im vorliegenden Kapitel werden die wichtigsten Grundlagen dieser Theorie und die vorhandenen Methoden zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe vorgestellt. Es wird ein klassischer Algorithmus diskutiert, der die Grundlage für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode für die Lösung der nichtlinearen Aufgabe bildet.

#### 3.1 Rekonstruktion: Problemstellung

Im vorhergehenden Kapitel wurde ein Ansatz zur mathematischen Beschreibung eines Bildes vorgestellt und die entsprechenden mathematischen Modelle entwickelt. Diesem Ansatz liegt die Beschreibung des in dem hier betrachteten Fall zweidimensionalen Bildes anhand der Funktion  $f(x, y)$  zugrunde, die jedem Bildpunkt mit den Koordinaten  $(x, y)$  einen skalaren Wert (Grauwert) zuordnet. Wie schon erwähnt, hängt die physikalische Interpretation der Bedeutung dieses Wertes von dem betrachteten Problem ab und wird beispielsweise in dem hier untersuchten Fall als ein Maß der Schwächung von Röntgen- oder Gammastrahlung beim Durchgang durch Materie angesehen. Das Prinzip der im Weiteren diskutierten Rekonstruktionsmethoden ist allerdings von der physikalischen Interpretation unabhängig. Unter der Rekonstruktionsaufgabe wird die Bestimmung des Grauwertes für jedes Bildelement verstanden. Das heißt, dass die Funktion  $f(x, y)$  zu ermitteln ist. Im Weiteren wird dieses Problem eingehend diskutiert.

Hier wird die radiographische Durchleuchtung als Verfahren zur Messwertgewinnung betrachtet. Die Messwerte werden in Form von Projektionen erhalten. Wie im vorhergehenden Kapitel diskutiert wurde, stellt eine Projektion eine Reihe von Messungen eines integralen Parameters des untersuchten Objektes dar. Mathematisch wird sie als Linienintegral

$$P_L = \int_L f(x, y) ds \quad (3.1)$$

beschrieben, wobei die Linie  $L$  den Strahl darstellt, der in der Strahlungsquelle erzeugt wird und das Prüfobjekt durchdringt. Gl. (3.1) wird als Radon-Transformation bezeichnet. In allgemeiner Form kann Gl. (3.1) als Operatorgleichung angegeben werden

$$P = \mathbf{I} f, \quad (3.2)$$

wobei  $\mathbf{I}$  den durch Gl. (3.1) definierten Integraloperator bezeichnet. Diese Operatorgleichung stellt das so genannte direkte Problem dar, das in der Bestimmung der Systemantwort  $P$  bei bekannter Funktion  $f$  besteht. Die Lösung dieses direkten Problems wurde in Kapitel 2 behandelt. Die dort entwickelten verschiedenen Modelle für dynamische Prozesse beschreiben die Funktion  $f$  und die Modelle für das Beobachtungssystem stellen den Operator  $\mathbf{I}$  dar. Dieses Kapitel beschäftigt sich hingegen mit der Rekonstruktion der

Funktion  $f$  bei bekannter Systemantwort  $P$ . Diese Aufgabe wird als inverses Problem bezeichnet und mathematisch in einer allgemeinen Form durch die Gleichung

$$f = \mathbf{\Pi}^{-1} P \quad (3.3)$$

beschrieben. Die Lösung des inversen Problems und - im Besonderen - die Entwicklung von praktisch anwendbaren Rekonstruktionsverfahren ist im Allgemeinen nicht trivial. In der Praxis tritt dieses Problem in verschiedenen Varianten auf. In jedem Fall sind gewisse Schwierigkeiten zu erwarten, wenn der zur Verfügung stehende Datensatz unvollständig ist. Dieses Problem wird im Weiteren eingehend diskutiert.

Im Prinzip existiert eine analytische Lösung des inversen Problems (3.3). Sie ist durch die bekannte inverse Radon-Transformation gegeben [3.1]. Praktisch realisiert wird die Inversion in diskreter Form, wobei sich ein vollständig bestimmtes lineares Gleichungssystem ergibt [3.2,3.3]. Diese Transformation bildet die Grundlage für die klassischen Rekonstruktionsalgorithmen in der Computertomographie, wie die Verfahren der Rückprojektion einschließlich gefilterter Rückprojektion. Diese Verfahren lösen das Rekonstruktionsproblem im Prinzip exakt, wenn ein entsprechender vollständiger Datensatz zu Verfügung steht, das heißt, hinreichende Informationen für die Rekonstruktion enthält. Bei praktischen Aufgaben ist aber häufig von unvollständigen bzw. unzureichenden Datensätzen auszugehen (für eine strenge Definition des vollständigen bzw. unvollständigen Datensatzes siehe Kapitel 2). Dies wird beispielsweise durch beschränkte Zugänglichkeit verursacht, so dass die Datenaufnahme nur innerhalb eines beschränkten Winkelbereiches möglich ist, oder durch für die Datenaufnahme begrenzt zur Verfügung stehende Zeit. Auch das Vorhandensein von Rauschen, sowie von Verzerrungen als Folge des Messvorgangs oder eventuelle Bewegungen des betrachteten Objektes, begrenzen die Anwendbarkeit von auf der inversen Radon-Transformation basierten Rekonstruktionsverfahren.

Mathematisch kann das Problem wie folgt beschrieben werden. Wenn von einem unvollständigen Datensatz ausgegangen wird, wird von einer schlecht gestellten Aufgabe nach Hadamard gesprochen. Ein Problem heißt gut gestellt [3.4], wenn (i) mindestens eine Lösung existiert, (ii) diese Lösung eindeutig ist und (iii) stetig von den Eingangsdaten abhängt. Ein schlecht gestelltes Problem ist dasjenige, das mindestens eine der genannten Bedingungen nicht erfüllt.

Die Aufgabe der Rekonstruktion stellt im obigen Sinne eine schlecht gestellte Aufgabe dar. Für die Lösung solcher Aufgaben gibt es verschiedene Ansätze. Die Hauptidee, die allen Verfahren zugrunde liegt, besteht darin, a priori Wissen zu benutzen, d.h. Information über das betrachtete Objekt, die schon vor Beginn der Rekonstruktion zur Verfügung steht. Damit wird ein gewisser Teil der durch die vorhandenen Daten nicht verfügbaren Information ausgeglichen. Das a priori Wissen kann in verschiedener Form zur Verfügung stehen, dementsprechend unterscheiden sich auch die Lösungsmethoden. In der vorliegenden Arbeit wird von statistischem a priori Wissens ausgegangen und Methoden der statistischen Estimationstheorie benutzt, wie im Weiteren diskutiert wird.

## 3.2 Grundlagen der statistischen Estimationstheorie

Viele praktischen Probleme lassen sich im Allgemeinen auf folgende Weise formulieren: Durch einen Beobachtungsprozess werden Informationen über das zu untersuchende Sys-

### 3. Rekonstruktion

tem (Objekt, Prozess usw.) gewonnen. Diese Informationen werden verarbeitet, um bestimmte Aussagen über das System und/oder seine Eigenschaften zu gewinnen. Ausgehend von diesen Aussagen wird eine bestimmte Entscheidung getroffen. Die Art der Aussagen und der Entscheidung hängt von dem betrachteten Problem ab. Die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Aufgabe der Rekonstruktion eines dynamischen Bildes gehört zum Problembereich der Messwertgewinnung und -verarbeitung und ist damit auch den oben beschriebenen Problemen zuzuordnen. Die Besonderheit dieser Aufgaben besteht darin, dass jede Beobachtung oder Messung mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet ist. Diese Problematik tritt bei jedem Mess- oder Beobachtungsprozess auf und muss daher bei der Lösung der Aufgaben berücksichtigt werden.

Bei der oben beschriebenen Aufgabenstellung handelt es sich um ein Entscheidungsproblem, wobei im Allgemeinen deterministische und stochastische Entscheidungsprobleme unterschieden werden [3.5]. Im hier betrachteten Fall handelt es sich um ein stochastisches Entscheidungsproblem, für das eine entsprechende Theorie existiert. Diese Theorie ist nicht auf konkrete Probleme beschränkt und stellt einen allgemeinen Zugang für die Entwicklung konkreter Lösungsmethoden in jedem spezifischen Problembereich dar. Im Rahmen dieser Theorie werden die entsprechenden mathematischen Modelle entwickelt und die allgemeinen Ansätze zur Lösung behandelt [3.6]. Folgende Prinzipien liegen diesen Ansätzen zugrunde:

1. Um eine Entscheidung über das untersuchte System, das durch die Variable  $x$  beschrieben wird, zu treffen, müssen folgende Daten vorhanden sein: 1) die Messungen  $z$ , die durch ein Messverfahren gewonnen werden und 2) a priori Wissen über das Objekt und über den Messprozess.
2. Das Ziel, das zu erreichen ist, muss so formuliert werden, dass es eine quantitative Bewertung des Ergebnisses zulässt.
3. Aus der Menge aller möglichen Lösungen wird diejenige ausgewählt, die die beste Qualität aufweist, d.h. am Besten geeignet ist, das formulierte Ziel zu erreichen. Eine solche Lösung wird optimale Lösung genannt.

Um verschiedene Varianten von Lösungen vergleichen zu können und aus der Menge der möglichen Entscheidungen diejenige auszuwählen, die in gewissem Sinne optimal ist, muss ein Maß für die Qualität der Entscheidung eingeführt werden. Grundsätzlich ist die Wahl dieses Maßes durch den physikalischen oder technischen Inhalt der konkreten Aufgabe bestimmt. Mathematisch wird dieses Maß üblicherweise durch eine skalare Funktion  $l(x, d(z))$  beschrieben, wobei die Funktion  $d(z)$  eine Entscheidung aufgrund der Messwerte  $z$  liefert. Es wird weiterhin angenommen, dass  $d(z)$  eine eindeutige Funktion ist, d.h. sie ordnet jedem Messwert  $z$  nur eine Entscheidung zu. Die (möglichen) Fälle, in denen  $d(z)$  keine eindeutige Entscheidung, sondern die Wahrscheinlichkeit für eine Entscheidung liefert, werden in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet. Die Art der Entscheidung hängt - wie schon erwähnt - von dem konkret betrachteten Problem ab. Beispielsweise kann die Frage von Interesse sein, ob der betrachtete Prozess ein nützliches Signal enthält oder nur aus Rauschen besteht. In anderen Fällen sind bestimmte Parameter des Prozesses von Interesse. Bei in der vorliegenden Arbeit betrachteten Problemen sind die Werte des Prozesses selbst zu bestimmen, was im Weiteren eingehend diskutiert wird. Die Funktion  $d(z)$  wird Entscheidungsregel und die Funktion  $l(x, d(z))$  Funktion des Verlust-

tes bzw. Verlustfunktion genannt. Hier wird eine skalare Funktion wegen der Einfachheit der Beschreibung gewählt. Natürlich gibt es auch Aufgaben, bei denen eine Matrix-Funktion erforderlich ist. In der Regel sind die vorhandenen Informationen über das beobachtete System (a priori Wissen, Messungen u.a.) von statistischer Natur. Deswegen werden sie meistens als Zufallsvariablen eingeführt, so dass die Verlustfunktion  $l(\mathbf{x}, \mathbf{d}(\mathbf{z}))$  selbst eine Zufallsvariable ist und beim Vergleich von verschiedenen Lösungsvarianten von ihren statistischen Charakteristika ausgegangen wird. In der statistischen Entscheidungstheorie ist es zweckmäßig, die Erwartungswerte der Verlustfunktion an dieser Stelle zu verwenden. Sie werden als Funktion des Risikos bzw. Risikofunktion bezeichnet. Die Risikofunktion, wie auch die Verlustfunktion, kann auf unterschiedliche Weisen gewählt werden. Unter der optimalen Lösung wird dann diejenige Lösung verstanden, die die Risikofunktion in Bezug auf die gewählte Verlustfunktion minimiert.

Einen wichtigen Teil der statistischen Entscheidungstheorie bildet die statistische Estimationstheorie. Sie beschränkt sich auf bestimmte Arten von Entscheidungen. Im Rahmen dieser Theorie werden die optimalen Schätzungen  $\hat{\mathbf{x}}$  des untersuchten Systems  $\mathbf{x}$  betrachtet. Da in der vorliegenden Arbeit dynamische Prozesse untersucht werden, wird im Weiteren  $\mathbf{x}$  als Prozess behandelt. Eine Schätzung hat dieselbe Struktur und dieselbe Bedeutung wie der untersuchte Prozess. In Bezug auf die Aufgabe der Bildrekonstruktion bedeutet das, dass die Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  des Bildes  $\mathbf{x}$  auch selbst ein Bild darstellt.

In der Estimationstheorie wird üblicherweise der Schätzfehler (Estimationsfehler)  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  eingeführt und die Funktion  $l(\mathbf{x}, \mathbf{d}(\mathbf{z})) = l(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  wird in der Form  $l(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = l(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = l(\mathbf{e})$  geschrieben. Bei vielen praktischen Aufgaben soll diese Funktion üblicherweise folgende Voraussetzungen erfüllen [3.2]:

1. Im Fall der exakten Schätzung, d.h. wenn der Estimationsfehler gleich Null ist,  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , muss die Verlustfunktion auch gleich Null sein, d.h.  $l(\mathbf{0}) = 0$ .
2. Bei Anwachsen des Estimationsfehlers dürfen die Verluste nicht sinken, d.h.  $l(\mathbf{e}_1) \geq l(\mathbf{e}_2)$ , wenn  $\|\mathbf{e}_1\| \geq \|\mathbf{e}_2\|$ .  $\|\cdot\|$  bezeichnet hier die Norm des Vektors.
3. Die Verlustfunktion muss eine gerade Funktion sein, d.h.  $l(\mathbf{e}) = l(-\mathbf{e})$ .

Als Verlustfunktionen werden häufig folgende Funktionen verwendet.

Die so genannte Einheitsverlustfunktion (Abb. 3.1.a)

$$l(\mathbf{e}) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \|\mathbf{e}\| > \varepsilon/2 \\ 0, & \|\mathbf{e}\| \leq \varepsilon/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

mit nichtnegativem Koeffizienten  $\varepsilon$ . Üblicherweise wird der Fall  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachtet, wobei die Funktion (3.4) in eine Delta-Funktion übergeht. Die Verwendung der Einheitsverlustfunktion ist dann zweckmäßig, wenn alle Fehler in gleicher Weise unerwünscht sind, oder wenn es keine Gründe gibt, die Verluste zu unterscheiden, die mit verschiedenen Werten der Verlustfunktion verbunden sind. In der Praxis sind aber Situationen typisch, bei denen die Qualität der Entscheidung vom Maß des Estimationsfehlers abhängt. Typischen Verlustfunktionen, die in solchen Fällen verwendet werden, sind:

### 3. Rekonstruktion

Modul-Verlustfunktion (Abb. 3.1.b):

$$l(e) = \|e\|. \quad (3.5)$$

Quadratische Verlustfunktion (Abb. 3.1.c):

$$l(e) = \|e\|^2. \quad (3.6)$$

Bei der Wahl der Verlustfunktion für eine konkrete Aufgabe ist es wichtig, die vorhandenen a priori Informationen zu berücksichtigen. Wenn zum Beispiel ein Prozess mit einem diskreten Wertebereich betrachtet wird, dann ist es zweckmäßig, die Einheitsverlustfunktion oder eine Stufenfunktion zu benutzen, denn die Werte, die die quadratische oder Modulfunktion liefert, können eventuell nicht im Bereich der möglichen Werte des Prozesses liegen.

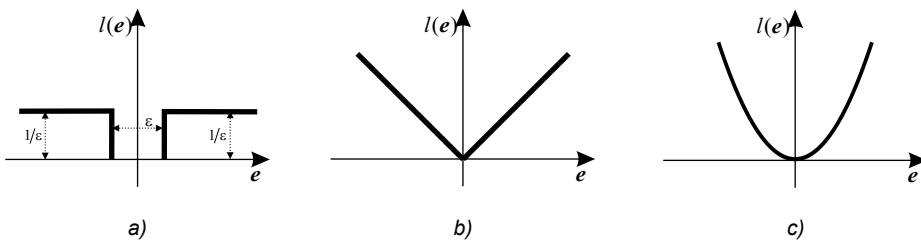


Abb. 3.1. Drei Typen der Verlustfunktionen:

a) Einheitsfunktion b) Modul-Funktion c) Quadratische Funktion

Wie oben erwähnt, stellt die Rekonstruktion eine schlecht gestellte Aufgabe dar, so dass a priori Wissen für ihre Lösung erforderlich ist. In der statistischen Estimationstheorie wird statistisches a priori Wissen vorausgesetzt. Unter statistischem Wissen wird Kenntnis über den Prozess in statistischem Sinne verstanden. Dabei werden zwei Fälle unterschieden.

Im ersten Fall wird vollständiges a priori Wissen vorausgesetzt. Im statistischen Sinne heißt das, dass das Verteilungsgesetz des Prozesses a priori bekannt ist. Normalerweise wird dabei von der Verteilungsdichtefunktion  $p(x)$  ausgegangen. In diesem Fall wird ein Bayes'scher Ansatz zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe verwendet und die entsprechenden Lösungen werden als Bayes'sche Lösungen bezeichnet. Im zweiten Fall wird das a priori Verteilungsgesetz als unbekannt vorausgesetzt. Dieser Ansatz wird dementsprechend nicht-Bayes'scher Ansatz genannt. In vielen Fällen wird das a priori Wissen über den Prozess unvollständig sein, so dass nur bestimmte statistische Charakteristika des Verteilungsgesetzes bekannt sind, wie beispielsweise der Erwartungswert und die Kovarianzeigenschaften. Um einen Bayes'schen Ansatz zu verwenden, wird dann empirisches a priori Wissen im Betracht gezogen. Ein solcher Ansatz wird pseudo-bayes'scher Ansatz genannt [3.6].

Bei dem Bayes'schen Ansatz wird als Risikofunktion das so genannte mittlere Risiko gewählt, das durch folgende Gleichung angegeben ist

$$r_a = \iint l(x, d(z)) p(x, z) dx dz. \quad (3.7)$$



$p(\mathbf{x}, z)$  bezeichnet dabei die Verteilungsdichtefunktion des beobachteten Prozesses  $\mathbf{x}$  und der Messungen  $z$ . Hier und im Weiteren wird die Integration über den ganzen Definitionsbereich der Variablen verstanden. Zur Bestimmung der optimalen Schätzung wird das mittlere Risiko (3.7) in Bezug auf alle möglichen Entscheidungsregeln  $\mathbf{d}(z)$  minimiert. Auf die Abhängigkeit der Risikofunktion von der Entscheidungsregel  $\mathbf{d}(z)$  weist ein unten stehender Index hin.

Von besonderem Interesse ist für die Estimationsaufgaben eine weitere statistische Charakteristik, das so genannte a posteriori Risiko. Das a posteriori Risiko ist ein bedingter Erwartungswert, gegeben durch

$$r_d(z) = \int l(\mathbf{x}, \mathbf{d}(z)) p(\mathbf{x} | z) d\mathbf{x}. \quad (3.8)$$

Dabei bezeichnet  $p(\mathbf{x} | z)$  die bedingte Verteilungsdichtefunktion des Prozesses  $\mathbf{x}$ , unter der Bedingung, dass die Messungen  $z$  bekannt sind. Wie aus Gl. (3.8) zu sehen ist, kann aus einem a posteriori Risiko zum mittleren Risiko durch Integration über  $z$  übergegangen werden. Das Kriterium des minimalen mittleren Risikos ist im Bayes'schen Fall äquivalent zum Kriterium des Minimums des a posteriori Risikos. Es muss allerdings auf den Unterschied zwischen den beiden Kriterien hingewiesen werden. Im ersten Fall wird als optimale Entscheidungsregel diejenige ausgewählt, die den Zahlenwert, den Gl. (3.7) liefert, minimiert. Im zweiten Fall werden die Entscheidungsregeln folgendermaßen miteinander verglichen: Entscheidungsregel  $\mathbf{d}_1(z)$  ist besser als Entscheidungsregel  $\mathbf{d}_2(z)$ , wenn für alle  $z$  aus dem Definitionsbereich gilt  $r_{d_1}(z) \leq r_{d_2}(z)$  und mindestens ein  $z_0$  existiert, so dass  $r_{d_1}(z_0) < r_{d_2}(z_0)$ . Die Verwendung des a posteriori Risikos als Risikofunktion erleichtert normalerweise die Lösung der Aufgabe. In manchen Fällen kann für die Minimierung von  $r(z)$  auch eine analytische Lösung gefunden werden. Deswegen spielt die bedingte Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x} | z)$  eine besonders große Rolle in der statistischen Entscheidungstheorie. Im Weiteren wird diese Funktion eingehend diskutiert. In Übereinstimmung mit der Bayes-Formel [3.7], gilt für die Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}, z)$

$$p(\mathbf{x}, z) = p(\mathbf{x} | z)p(z) = p(z | \mathbf{x})p(\mathbf{x}).$$

Damit lässt sich die folgende Beziehung herleiten

$$p(\mathbf{x} | z) = \frac{p(z | \mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(z)}. \quad (3.9)$$

Hier bezeichnet  $p(\mathbf{x})$  die a priori Verteilungsdichtefunktion des Prozesses  $\mathbf{x}$  und  $p(z | \mathbf{x})$  die bedingte Verteilungsdichtefunktion der Messungen  $z$ , unter der Bedingung, dass die Realisierung  $\mathbf{x}$  bekannt ist. Die Funktion  $p(z | \mathbf{x})$  wird als Likelihoodfunktion bezeichnet und ist durch die Struktur und die Eigenschaften des Beobachtungssystems bestimmt. Aus der Struktur der Gl. (3.9) ist ein Vorteil für die Verwendung der bedingte Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x} | z)$  zu erkennen: Diese Funktion wird grundsätzlich durch  $p(z | \mathbf{x})$  und  $p(\mathbf{x})$  bestimmt. Die Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x})$ , die das vorhandene a priori Wissen berücksichtigt, und die Likelihoodfunktion  $p(z | \mathbf{x})$ , die die Information über den Messprozess enthält, werden als bekannt vorausgesetzt. Damit sind alle Komponente der Gl. (3.8) vollständig bestimmt. Die Verteilungsdichte  $p(z)$  der Messungen hängt nicht von  $\mathbf{x}$  ab und spielt deswegen für das Problem der Minimierung des mittleren Risikos (3.8)

### 3. Rekonstruktion

keine Rolle. Sie kann in einem von  $\mathbf{x}$  unabhängigen Koeffizienten berücksichtigt werden und spielt damit nur die Rolle einer Normierungskonstante.

Wie aus oben geführter Diskussion folgt, hängt die Wahl der optimalen Schätzung von der Wahl der Verlustfunktion ab. Es ist aber bekannt [3.6], dass für die meisten Aufgaben eine optimale Schätzung bezogen auf eine bestimmte Verlustfunktion nicht nur für diese Funktion optimal ist, sondern für eine Klasse von Verlustfunktionen eine optimale Schätzung bleibt. Dementsprechend existiert in jedem konkreten Fall eine gewisse Willkür bei der Auswahl der Verlustfunktion. In der vorliegenden Arbeit wird die quadratische Funktion (3.6) verwendet, da sie zu vergleichsweise einfachen Algorithmen für die Lösung der Estimationsaufgabe führt. Üblicherweise wird eine gewichtete quadratische Form verwendet

$$l(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (3.10)$$

wobei  $\mathbf{W}$  eine quadratische, positiv definite Wichtungsmatrix darstellt. Durch die Wahl der Matrix  $\mathbf{W}$  kann jedem Element des Vektors  $\mathbf{e}$  sein eigenes Qualitätskriterium zugeordnet werden.

Durch Einsetzen von Gl. (3.10) in Gl. (3.8) ergibt sich

$$r(\mathbf{z}) = \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Für diejenige Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$ , die das a posteriori Risiko minimiert, muss folgende Bedingung erfüllt sein [3.8]

$$\frac{\partial r(\mathbf{z})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{W} \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.12)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann wie folgt angegeben werden [3.6,3.8,3.9]

$$\hat{\mathbf{x}} = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x}. \quad (3.13)$$

Das bedeutet aber, dass die optimale Lösung dem Mittelwert der a posteriori Verteilungsdichte entspricht. Die optimale Schätzung (3.13) wird a posteriori Erwartungswert genannt. Sie hängt von der Wichtungsmatrix  $\mathbf{W}$  nicht ab, d.h. sie minimiert nicht nur den Fehler der Schätzung des gesamten Vektors  $\mathbf{x}$ , sondern auch jeden seiner Komponenten. Darin besteht einer der Vorteile der Wahl einer quadratischen Verlustfunktion.

Um auf einen weiteren Vorteil hinzuweisen, wird der Mittelwert des Estimationsfehlers untersucht. Unter Berücksichtigung des oben erhaltenen Ausdrucks (3.13) für die optimale Schätzung, ergibt sich

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \int \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x}. \quad (3.14)$$

Nach der Definition des Mittelwertes folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e} \rangle &= \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x} = \\ &= \int \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) d\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Somit stimmt der Erwartungswert von  $\hat{x}$  mit dem Erwartungswert von  $x$  überein. Das bedeutet, dass die Schätzung keine regelmäßigen Abweichungen von dem untersuchten Prozess aufweist. Solche Schätzungen werden erwartungstreue Schätzungen (unbiased estimate) genannt [3.7, 3.9].

In Übereinstimmung mit Gl. (3.8) können die mittleren Verluste mit

$$r(z) = \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x} | z) d\mathbf{x} \quad (3.16)$$

bestimmt werden. Da die optimale Schätzung  $\hat{x}$  der Erwartungswert der Funktion  $p(\mathbf{x} | z)$  ist, stellen die mittleren Verluste (3.16) die Dispersion der a posteriori Verteilungsdichte dar. Sie werden als a posteriori Dispersion oder die Dispersion des Estimationsfehlers bezeichnet.

Für die zwei anderen oben erwähnten Verlustfunktionen, die Einheitsfunktion und die Modulfunktion, können mit Gl. (3.8) die Bayes'schen Lösungen analog hergeleitet werden.

Die dargestellten Grundlagen können auch auf den Fall verallgemeinert werden, wenn die Variable  $x$  von der Zeit abhängt, wie er in der vorliegenden Arbeit behandelt wird. Die Estimationsaufgabe lässt sich dann wie folgt formulieren: Es werden die diskreten Zeitpunkte  $k = 0, 1, 2, \dots$  und die entsprechende Folge von Vektoren  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)$  betrachtet, die den Zustand des Prozesses (siehe Kapitel 2) zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  angeben. Durch eine Beobachtung des Prozesses wird ein Satz von Messungen  $\mathbf{z}^k = [\mathbf{z}^T(1), \mathbf{z}^T(2), \dots, \mathbf{z}^T(k)]^T$ , im Weiteren als Projektionen bezeichnet, gewonnen. Ziel ist es, den Vektor  $\mathbf{x}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = 1, 2, \dots$  zu schätzen. Es sei hier betont, dass der Zeitpunkt  $t$  im allgemeinen Fall mit dem Zeitpunkt  $k$  nicht übereinstimmt. Dementsprechend werden drei prinzipielle Fälle unterschieden: 1)  $t = k$ , die Estimationsaufgabe wird in diesem Fall optimale Filterung genannt; 2)  $t > k$ , in diesem Fall wird von einer optimalen Extrapolation gesprochen; 3)  $t < k$ , die Estimationsaufgabe wird optimale Interpolation genannt.

Um die Estimationsaufgabe zu lösen, wird, in Analogie zur oben beschriebenen Herleitung, von der a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}^k)$  ausgegangen und das Kriterium des minimalen a posteriori Risikos (3.8) benutzt. Die optimale Lösung ist in diesem Fall durch

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t \in X} \int l(\mathbf{x}_t, \hat{\mathbf{x}}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_t, \quad (3.17)$$

gegeben. Für die Aufgabe der optimalen Filterung ergibt sich dann

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \min_{\mathbf{x}_k \in X} \int l(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_k. \quad (3.18)$$

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie die oben eingeführte Technik auf die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Aufgabe der Rekonstruktion dynamischer Prozesse angepasst werden kann.

### 3.3 Rekonstruktion als Aufgabe der optimalen Filterung

In Übereinstimmung mit den im zweiten Kapitel entwickelten mathematischen Modellen für den dynamischen Prozess und das Beobachtungsmodell kann die Rekonstruktionsauf-

### 3. Rekonstruktion

gabe wie folgt interpretiert werden. Es sei eine Reihe von Projektionsdaten vorhanden, die als Vektor  $z^k = [z^T(1), z^T(2), \dots, z^T(k)]^T$  dargestellt werden. Hier bezeichnet  $k = 1, 2, \dots$  den Zeitpunkt, zu dem die Projektionen  $z(k)$  aufgenommen wurden. Die Aufgabe besteht nun darin, zu jedem Zeitpunkt  $k$  möglichst eine optimale Schätzung  $\hat{x}(k)$  des untersuchten Prozesses  $x(k)$  zu finden. Entsprechend der im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Klassifikation gehört diese Rekonstruktionsaufgabe zu den Aufgaben der optimalen Filterung. Im zweiten Kapitel wurden lineare und nichtlineare Modelle für dynamische Prozesse und das Beobachtungsmodell vorgestellt. Dementsprechend ergeben sich, wie im Weiteren gezeigt wird, drei Varianten der Formulierung des Rekonstruktionsproblems.

Ein rein lineares Modell besteht aus folgenden Gleichungen

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u(k) + w(k) \quad (3.19)$$

$$z(k+1) = H(k+1)[D(k+1)x(k+1) + n(k+1)] + v(k+1). \quad (3.20)$$

Die erste Gleichung stellt das Modell des dynamischen Prozesses dar, mit einer Matrix  $A(k)$ , die den Zusammenhang zwischen den Elementen des Vektors  $x(k)$  bestimmt, dem Vektor  $u(k)$ , der einen bekannten Führungseinfluss bezeichnet, und mit dem Vektor  $w(k)$ , der einen stochastischen Einfluss mit dem Erwartungswert  $\langle w(k) \rangle = 0$  beschreibt. Die zweite Gleichung stellt in einer allgemeinen Form das Modell des Beobachtungsprozesses dar. Hier beschreibt die Matrix  $H(k+1)$  die Aufnahmegeometrie. Die Matrix  $D(k+1)$  und die Vektoren  $n(k+1)$  und  $v(k+1)$  berücksichtigen den Einfluss von Rauschen und Verzerrungen. Die Struktur dieser Modelle wurde im zweiten Kapitel eingehend diskutiert.

Die zweite Variante kombiniert ein lineares Prozessmodell mit einem nichtlinearen Beobachtungsmodell.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u(k) + w(k) \quad (3.21)$$

$$z(k+1) = h[x(k+1), v(k+1), k+1]. \quad (3.22)$$

Hier bezeichnet  $h[\cdot]$  eine bekannte, nichtlineare Funktion.

In der dritten Variante wird von einem nichtlinearen Prozessmodell und einem nichtlinearen Beobachtungsmodell ausgegangen. In Übereinstimmung mit der im zweiten Kapitel geführten Diskussion, wird in der vorliegenden Arbeit ein zweistufiges nichtlineares Prozessmodell verwendet, wobei ein linearer Prozess  $x(k)$  anhand einer bekannten nichtlinearen Transformation  $f[x(k)]$  in einen nichtlinearen Prozess  $y(k)$  überführt wird. Damit ergeben sich in diesem Fall drei Gleichungen

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u(k) + w(k) \quad (3.23)$$

$$y(k+1) = f[x(k+1)] \quad (3.24)$$

$$z(k+1) = h[x(k+1), v(k+1), k+1]. \quad (3.25)$$

Die optimale Lösung für die Aufgaben (3.19), (3.20) und (3.21), (3.22) ist durch Gl. (3.18) gegeben. In der Aufgabe (3.23) – (3.25) muss die Schätzung für den Prozess  $y(k)$  bestimmt werden. Somit nimmt Gl. (3.18) die Form

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \arg \min_{\mathbf{y}_k \in Y} \int l(\mathbf{y}_k, \hat{\mathbf{y}}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{y}_k \quad (3.26)$$

an, wobei  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}^k)$  die a posteriori Verteilungsdichte des Vektors  $\mathbf{y}(k)$  bezeichnet (um die Bezeichnungen zu vereinfachen, wird in Gl. (3.26) die Zeitvariable  $k$  als unterer Index eingeführt). Die Abhängigkeit des Vektors  $\mathbf{y}(k)$  vom Vektor  $\mathbf{x}(k)$  ist durch eine bekannte Funktion gegeben. Den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie zufolge kann die Schätzung (3.26) auch in der Form

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \arg \min_{\mathbf{x}_k \in X} \int l(f(\mathbf{x}_k), \hat{\mathbf{y}}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_k \quad (3.27)$$

angegeben werden, wobei die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  des Vektors  $\mathbf{x}(k)$  wieder auftritt. Somit kann die Aufgabe (3.23) – (3.25) wieder in die Aufgabe (3.21), (3.22) überführt werden.

Abschließend kann hier folgende Aussage getroffen werden: Die Aufgabe der Rekonstruktion dynamischer Prozesse kann als Aufgabe der optimalen Filterung für ein lineares Modell (3.19), (3.20) oder für ein nichtlineares Modell (3.21), (3.22) betrachtet werden. Für die Lösung dieser Aufgabe können Methode der statistischen Estimationstheorie bzw. der optimalen Filterung verwendet werden. Im Weiteren werden diese Methoden und die entsprechenden Algorithmen für die Lösung des linearen und nichtlinearen Problems vorgestellt. Dazu wird mit einer Diskussion über die a posteriori Verteilungsdichte begonnen.

### 3.4 Herleitung der Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion

In den vorhergehenden Abschnitten wurde auf die wichtige Rolle der a posteriori Verteilungsdichte für die Lösung der Rekonstruktionsaufgabe im Rahmen der Estimationstheorie hingewiesen. In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für Bestimmung und Berechnung dieser Funktion für die Aufgabe der Rekonstruktion dynamischer Prozesse hergeleitet. Die im zweiten Kapitel diskutierte Theorie der Markov-Prozesse wird dabei benutzt.

$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{z}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  seien zwei Folgen von Vektoren, die miteinander verknüpft sind und zusammen einen zweikomponentigen Markov-Prozess bilden. Die Übergangsdichte dieses Prozesses wird als  $\pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k)$  bezeichnet. Dabei stellt der Vektor  $\mathbf{z}_k$  die beobachteten Komponenten (die Messdaten) und der Vektor  $\mathbf{x}_k$  die nicht-beobachteten Komponenten (der untersuchte Prozess) dar. Betrachtet wird die Aufgabe der optimalen Filterung des Prozesses  $\mathbf{x}_k$  ausgehend von vorhandenen Messdaten (Beobachtungen)  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$ . Da im Weiteren meistens die Abhängigkeit von den zu den Zeitpunkten  $k = 0, 1, 2, \dots$  aufgenommenen Projektionsdaten im Betracht gezogen wird, werden sie in einem vergrößerten Vektor  $\mathbf{z}^k = [\mathbf{z}^T(1), \mathbf{z}^T(2), \dots, \mathbf{z}^T(k)]^T$  zusammengefasst. Zu bestimmen ist die a posteriori Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  des Vektors  $\mathbf{x}_k$  im Bezug auf die Beobachtungen  $\mathbf{z}^k$ . Der Prozess  $\mathbf{x}_k$  stellt, wie im zweiten Kapitel diskutiert wurde, eine Markov-Folge dar.

Es wird angenommen, dass zum Zeitpunkt  $k$  die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  vollständig bekannt ist. Zu bestimmen ist also die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1})$  zum Zeitpunkt  $k+1$  unter Berücksichtigung der ebenfalls zum Zeitpunkt  $k+1$  erhaltenen Beobachtungen  $\mathbf{z}_{k+1}$ .

### 3. Rekonstruktion

Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) = \int p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k | \mathbf{z}^{k+1}) d\mathbf{x}_k. \quad (3.28)$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Verteilungsdichte kann in Übereinstimmung mit der Bayes-Formel [3.5] in die Form

$$p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k | \mathbf{z}^{k+1}) = \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k)}{p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k)} \quad (3.29)$$

überführt werden. Die im Zähler der rechten Seite stehende Funktion wird in Form eines Produktes dargestellt:

$$p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k) = p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k, \mathbf{x}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k). \quad (3.30)$$

Da, den oben eingeführten Annahmen gemäß, der zweikomponentige Prozess  $[\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k]$  ein Markov-Prozess ist, stellt nun der erste Faktor auf der rechten Seite der Beziehung (3.30) eine Übergangsdichtefunktion

$$p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k, \mathbf{x}_k) = \pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \quad (3.31)$$

dar. Nach Einsetzen von (3.31), (3.30) und (3.29) in Gl. (3.28), ergibt sich

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) = \frac{\int \pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^{k+1}) d\mathbf{x}_k}{p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{z}^k)}. \quad (3.32)$$

Die im Nenner stehende Funktion hängt nicht von  $\mathbf{x}_{k+1}$  ab und kann deswegen in Übereinstimmung mit der Normierungsbedingung

$$\int p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1} = 1 \quad (3.33)$$

in einem Normierungskoeffizienten berücksichtigt werden. Abschließend ergibt sich dann die Beziehung

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) = c_{k+1} \int \pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_k, \quad (3.34)$$

wobei

$$c_{k+1} = \left[ \iint \pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^{k+1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1} \right]^{-1} \quad (3.35)$$

ein Normierungskoeffizient ist.

Gl. (3.34) stellt in den Aufgaben der optimalen Filterung eine rekurrente Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion dar. Diese Gleichung ermöglicht es, die Lösungen zu den Zeitpunkten  $k = 0, 1, 2, \dots$  nacheinander zu berechnen. Im ersten Schritt bzw. zum Zeitpunkt  $k = 0$  wird als Anfangswert die a priori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_0)$  benutzt.

Der rekurrente Charakter der hergeleiteten Gleichung hat einen wichtigen Vorteil: Es ergibt sich die Möglichkeit die optimalen Lösungen zum jedem Zeitpunkt  $k$  zu berechnen, was in der Praxis zu der Möglichkeit der Rekonstruktion im Echtzeit führt. Es sei hier auch

darauf hingewiesen, dass damit nicht nur die laufenden, d.h. zum Zeitpunkt  $k+1$  aufgenommenen, sondern auch die vorigen, d.h. zu den Zeitpunkten  $0, 1, \dots, k$  erhaltenen Messdaten, berücksichtigt werden. Alle diese Informationen sind in der zum Zeitpunkt  $k$  schon berechneten Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  enthalten.

Es sei auch betont, dass die Annahme eines zweikomponentigen Markov-Prozesses  $[\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k]$  zum rekurrenten Charakter der Gleichung führt. Dabei darf allerdings jeder Komponente für sich alleine genommen keine Markov-Eigenschaften zugewiesen werden. In der Praxis wird der Zustand eines Prozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt üblicherweise durch eine Reihe von Parametern mit gewisser Genauigkeit vollständig bestimmt. Ist außerdem die Regel für die Änderung des Prozesszustandes bekannt, hängt sie meistens nur vom derzeitigen Zustand ab und nicht vom vorigen. Ist diese Regel nicht bekannt, kann von einer Abhängigkeit des aktuellen oder zukünftigen Zustandes von der Vergangenheit nicht gesprochen werden. Das heißt, dass dieser Prozess als Markov-Prozess betrachtet werden kann und die Markov-Theorie angewendet werden kann. Das Gleiche gilt auch für den Beobachtungsprozess: die nacheinander erhaltenen Projektionen werden üblicherweise als von einander unabhängige Messungen betrachtet. Deswegen ist bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Rekonstruktionsaufgaben der Markov-Charakter des oben erwähnten zweikomponentigen Prozesses  $[\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k]$  gegeben.

Insofern die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1})$  bestimmt ist, kann, wie in dem vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, die optimale Lösung durch

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in X} \int l(\mathbf{x}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1} \quad (3.36)$$

berechnet werden. Hier bezeichnet  $l(\mathbf{x}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1})$  die Verlustfunktion und  $X$  ist der Definitionsbereich der Variablen  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Im Weiteren wird Gl. (3.34) in Bezug auf das im zweiten Kapitel eingeführte Modell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = h[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{v}(k+1), k+1] \quad (3.38)$$

konkretisiert. Es sei daran erinnert, dass es sich in diesem Fall um ein lineares Modell des dynamischen Prozesses und um ein allgemeines nichtlineares Modell des Beobachtungssystems handelt. Weiterhin wird die Zeitvariable  $k$  als ein unterer Index eingeführt, um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen.

Zunächst wird die Verteilungsdichtefunktion  $\pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k)$  aus Gl. (3.34) als folgendes Produkt dargestellt:

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) = p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k). \quad (3.39)$$

Soweit die Gleichung für das Prozessmodell (3.37) von den Beobachtungen  $\mathbf{z}_k$  nicht abhängt, stimmt offensichtlich die Funktion

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) = \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \quad (3.40)$$

### 3. Rekonstruktion

genau mit der Verteilungsdichte des Prozesses  $\mathbf{x}$  überein, der durch Gl. (3.37) beschrieben ist. Weiterhin, hängt die Variable  $z_{k+1}$  in Gl. (3.38) von  $\mathbf{x}_k$  und  $z_k$  nicht direkt ab. Deswegen gilt:

$$p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, z_k) = p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}), \quad (3.41)$$

das heißt, dass aus Gl. (3.38) die oben schon erwähnte Likelihoodfunktion bestimmt werden kann.

Nach Einsetzen der Beziehungen (3.41), (3.40) und (3.39) in Gl. (3.34) ergibt sich folgende Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1} | z^{k+1}) &= \\ &= c_{k+1} p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \int \pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | z^k) d\mathbf{x}_k = \\ &= c_{k+1} p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k+1} | z^k), \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei der Normierungskoeffizient  $c_{k+1}$  mit

$$c_{k+1} = \iint p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | z^k) d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1} \quad (3.43)$$

berechnet werden kann.

Gl. (3.42) ermöglicht nacheinander die Berechnungen der a posteriori Verteilungsdichtefunktion zu den Zeitpunkten  $k = 0, 1, 2, \dots$ , von der a priori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_0) = p_0(\mathbf{x})$  ausgehend. Sie bildet die Grundlage für die Lösung der Rekonstruktionsaufgabe für den Fall, dass das mathematische Modell des Prozesses und des Beobachtungssystem durch die Gln. (3.37) und (3.38) gegeben sind und die Berechnung der optimalen Lösung durch Gl. (3.36) bestimmt ist. Der Sinn dieser Gleichung lässt sich folgendermaßen erklären: Die im  $k$ -ten Schritt berechnete a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k | z^k)$  wird auf den nächsten Schritt  $k+1$  durch Multiplikation mit der Übergangsdichte  $\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$  des Prozesses extrapoliert. Es ergibt sich die extrapolierte a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1} | z^k)$ . Um eine neu erhaltene Beobachtung  $z_{k+1}$  zu berücksichtigen, wird das Ergebnis mit der Likelihoodfunktion  $p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})$  multipliziert. Nach der Normierung wird die a posteriori Verteilungsdichte für den Zeitpunkt  $k+1$  erhalten.

Aus den oben hergeleiteten Gleichungen ist zu erkennen, dass der konkrete Typ des Prozessmodells in der Übergangsdichtefunktion berücksichtigt wird und die Likelihoodfunktion die Information über das Modell des Beobachtungsprozesses sowie auch über den Einfluss von Rauschen enthält. Im nächsten Abschnitt wird ein wichtiger Spezialfall betrachtet.

### 3.5 Herleitung der Gleichung für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion für das Gauß'sche Prozessmodell

Im zweiten Kapitel wurde der Fall eingehend diskutiert, wenn das Beobachtungsmodell durch eine lineare Gleichung gegeben ist. In diesem Abschnitt werden die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Gleichungen für diesen Fall konkretisiert. Das System (3.37), (3.38) nimmt dementsprechend die Form



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (3.44)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{h}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \quad (3.45)$$

an. Es sei daran erinnert, dass die erste Gleichung ein mathematisches Modell des linearen Gaußverteilten dynamischen Prozesses darstellt und die zweite Gleichung ein lineares Beobachtungsmodell beschreibt. Ebenso wie in den vorhergehenden Abschnitten wird weiterhin die Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $k$  anhand des unteren Index eingeführt, um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen.

Zunächst wird gezeigt, dass unter der Bedingung, dass die Anfangsverteilungsdichte  $p_0(\mathbf{x})$  durch eine Gauß'sche Verteilung gegeben ist, die a posteriori Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  zum jeden beliebigen Zeitpunkt  $k$  ebenfalls eine Gauß'sche Verteilungsdichte bleibt. Hier sei daran erinnert, dass die Einflüsse des Rauschens  $\mathbf{w}(k)$  und  $\mathbf{v}(k)$  statistisch unabhängig sind und als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen werden. Der Erwartungswert der beiden Prozesse ist gleich 0 und die Matrizen  $\mathbf{Q}(k)$  und  $\mathbf{R}(k)$  bezeichnen die entsprechenden Kovarianzmatrizen. Da die Verteilungsdichte des Prozesses  $\mathbf{w}(k)$  eine Gauß'sche Verteilungsdichte ist und die Form  $p(\mathbf{w}_k) = c_k^I \exp(-0.5\mathbf{w}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{w}_k)$  hat, wird die Verteilungsdichtefunktion des Prozesses  $\mathbf{x}_k$  unter Berücksichtigung von Gl. (3.44) durch

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = c_k^{II} \exp[-0.5(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k)^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k)] \quad (3.46)$$

angegeben. Hier und im Weiteren werden mit  $c_k^j$ ,  $j = I, II, III, IV, \dots$  die Normierungskoeffizienten bezeichnet.

Die Verteilungsdichte des Prozesses  $\mathbf{v}(k)$  hat die Form  $p(\mathbf{v}_k) = c_k^{III} \exp(-0.5\mathbf{v}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k)$ . Unter Berücksichtigung von Gl. (3.45) wird die Likelihoodfunktion in der Form

$$p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_k) = c_{k+1}^{IV} \exp[-0.5(\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1})^T \mathbf{R}_k^{-1} \times \\ \times (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1})] \quad (3.47)$$

erhalten.

Nun wird angenommen, dass die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  zum Zeitpunkt  $k$  schon bekannt ist und durch eine Gauß'sche Verteilung gegeben ist:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) = c_k \exp[-0.5(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)]. \quad (3.48)$$

Hier stellt die Funktion  $\mathbf{m}(k) = \mathbf{m}_k$  den a posteriori Erwartungswert des Prozesses  $\mathbf{x}_k$  dar und  $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}_k$  bezeichnet seine a posteriori Kovarianzmatrix.

In Übereinstimmung mit der im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Interpretation der Gleichung für die Berechnung der a posteriori Verteilungsdichte wird nun die auf den Schritt  $k+1$  extrapolierte a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^k)$  berechnet. Dazu wird von folgender Beziehung ausgegangen:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^k) = \int \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_k. \quad (3.49)$$

### 3. Rekonstruktion

In dem unter dem Integral stehenden Ausdruck können die Funktionen (3.46) und (3.47) eingesetzt werden. Da die beiden Funktionen Exponentialfunktionen zur gleichen Basis sind, wird im Weiteren nur mit dem im Exponenten stehenden Ausdruck gearbeitet. Die Summanden werden so zerlegt, dass sich ein vollständiges Quadrat bezüglich der Variable  $\mathbf{x}_k$  ergibt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_k - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{N}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{n}_k) + \mathbf{m}_k \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{m}_k^T + (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{u}_k)^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{u}_k) - \\ & - [\mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{m}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{u}_k)]^T \mathbf{N}_k [\mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{m}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{u}_k)], \end{aligned} \quad (3.50)$$

wobei  $\mathbf{N}_k^{-1} = \mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{A}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_k$  und  $\mathbf{n}_k = \mathbf{N}_k [\mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{m}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{u}_k)]$  sind.

Der Matrix-Ausdruck

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \quad (3.51)$$

kann wie folgt umgewandelt werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^T + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}. \quad (3.52)$$

Durch Anwendung dieser Regel wird die Beziehung

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T (\mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k)^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \quad (3.53)$$

hergeleitet.

Nach der Integration der Exponentialfunktion mit dem Exponenten (3.50), werden die ersten beiden Summanden zwei konstante Produkte liefern, die durch den Normierungskoeffizienten berücksichtigt werden können. Nach der Zerlegung der Summanden in ein vollständiges Quadrat bezüglich der Variable  $\mathbf{x}_{k+1}$  ergibt sich für die auf den nächsten Schritt  $k+1$  extrapolierte a posteriori Verteilungsdichte

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) = c'_{k+1} \exp[-0.5(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{k+1,k})^T \mathbf{P}_{k+1,k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{k+1,k})], \quad (3.54)$$

wobei der extrapolierte Erwartungswert  $\mathbf{m}(k+1, k) = \mathbf{m}_{k+1,k}$  durch die Beziehung

$$\mathbf{m}_{k+1,k} = \mathbf{A}_k \mathbf{m}_k + \mathbf{u}_k \quad (3.55)$$

berechnet werden kann, und die extrapolierte Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k+1 | k) = \mathbf{P}_{k+1,k}$  wie folgt

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (3.56)$$

bestimmt werden kann.

Im nächsten Schritt wird in Übereinstimmung mit Gl. (3.42) die extrapolierte Verteilungsdichtefunktion mit der Likelihoodfunktion (3.47) multipliziert. Danach werden wiederum die Summanden so zerlegt, dass sich ein vollständiges Quadrat bezüglich der Variable  $\mathbf{x}_{k+1}$  ergibt. Somit wird folgender Ausdruck für die a posteriori Verteilungsdichtefunktion zum Zeitpunkt  $k+1$  erhalten:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) = c_{k+1} \exp[-0.5(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{k+1})^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{k+1})]. \quad (3.57)$$

Dabei wird der a posteriori Erwartungswert  $\mathbf{m}(k+1) = \mathbf{m}_{k+1}$  mit

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_{k+1,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{m}_{k+1,k}) \quad (3.58)$$

berechnet. Für die a posteriori Kovarianzmatrix gilt:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1,k} - \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1,k}. \quad (3.59)$$

Die Funktion (3.57) ist eine Gauß'sche Verteilungsdichte. Somit wurde gezeigt, dass die a posteriori Verteilungsdichtefunktion zum Zeitpunkt  $k+1$  der Gauß'schen Verteilung gehorcht, wenn die a posteriori Verteilungsdichte zum vorhergehenden Zeitpunkt  $k$  ebenfalls der Gauß'schen Verteilung gehorchte. Nach dem Prinzip der vollständigen mathematischen Induktion folgt, dass für eine Gauß'sche Anfangsverteilungsdichte  $p_0(\mathbf{x})$  die a posteriori Verteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  zum jeden Zeitpunkt  $k = 1, 2, \dots$  ebenfalls eine Gauß'sche Verteilung ist.

Eine Gauß'sche Verteilungsdichte ist durch ihren Erwartungswert  $\mathbf{m}_k$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  vollständig bestimmt. Somit kann mit den Gln. (3.58) und (3.59) die Funktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  berechnet werden. Beide Gleichungen sind rekurrent, was aus dem Markov-Charakter des betrachteten Prozesses folgt. Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass Gl. (3.58) für den Erwartungswert linear ist und vom Vektor der Messdaten  $\mathbf{z}_{k+1}$  abhängt. Gl. (3.59) für die Kovarianzmatrix stellt eine so genannte nichtlineare Rikkati-Gleichung dar. Sie hängt weder vom Vektor der Messdaten  $\mathbf{z}_{k+1}$  noch vom Erwartungswert  $\mathbf{m}_{k+1}$  ab. Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, ergibt sich daraus ein wichtiger Vorteil, denn die Werte der Kovarianzmatrix können im Voraus berechnet werden.

### 3.6 Gleichung der optimalen linearen Filterung. Kalman Filter

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus für die Lösung der Rekonstruktionsaufgabe vorgestellt. Der Algorithmus wird hier zunächst für den linearen Fall hergeleitet. Dieser Algorithmus bildet die Grundlage für die Entwicklung eines Ansatzes, der die nichtlineare Rekonstruktionsaufgabe löst.

Es wird von einem linearen dynamischen Systemmodell (3.44), (3.45) ausgegangen. Als Verlustfunktion wird die quadratische Funktion (3.10) gewählt. Wie im Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, stimmt in diesem Fall die optimale Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  mit dem Erwartungswert der a posteriori Verteilungsdichtefunktion überein, d.h.  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{m}_{k+1}$ . Dementsprechend bilden die Gln. (3.58) und (3.59) den Ausgangspunkt zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe.

Gl. (3.58) für die optimale Schätzung kann in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{h}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)] \quad (3.60)$$

geschrieben werden. Als Anfangswert  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  für diese rekurrente Gleichung dient der a priori Erwartungswert  $\mathbf{m}_0 = \int \mathbf{x} p_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Dabei hat der Vektor

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (3.61)$$

die Bedeutung der auf den nächsten Schritt  $k+1$  extrapolierten optimalen Schätzung. Gl. (3.61) stimmt mit Gl. (3.55) überein. Die Matrix  $\mathbf{K}(k+1)$  wird als Kalman-Gain-Koeffizient bezeichnet und ist durch

### 3. Rekonstruktion

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) \times \\ &\times [\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.62)$$

gegeben. Hier bezeichnet  $\mathbf{P}(k+1|k)$  eine auf den nächsten Schritt  $k+1$  prognostizierte Kovarianzmatrix. In Übereinstimmung mit Gl. (3.56) wird sie durch

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (3.63)$$

berechnet.

Die Rikkati-Gleichung für die Kovarianzmatrix nimmt unter Berücksichtigung der Gleichung für den Gainkoeffizienten die Form

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k) \quad (3.64)$$

an. Als Anfangswert  $\mathbf{P}(0)$  für diese rekurrente Gleichung wird die a priori Kovarianzmatrix benutzt, die sich aus  $\mathbf{P}_0 = \int (\mathbf{x} - \mathbf{m}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{m}_0) p_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  ergibt.

Dementsprechend besteht der lineare Algorithmus der optimalen Lösung der Filterungs- bzw. Rekonstruktionsaufgabe aus den Gln. (3.60) - (3.64). Dieser Algorithmus wird Kalman-Filter genannt. Im Weiteren werden einige seiner Eigenschaften diskutiert.

Der Filter- bzw. Rekonstruktionsfehler ist durch

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \quad (3.65)$$

gegeben. Nach Einsetzen der Modellgleichung (3.44) und der Gleichung für die optimale Schätzung (3.60) unter Berücksichtigung von der Beobachtungssystemgleichung (3.45) und der Gl. (3.61) für die extrapolierte Schätzung ergibt sich für den Rekonstruktionsfehler nach entsprechender Zerlegung der Summanden:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{e}(k) + \mathbf{w}(k) - \\ &- \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{e}(k) + \mathbf{H}(k+1)\mathbf{w}(k) + \mathbf{v}(k+1)]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Da der Erwartungswert der Rauschprozesse  $\mathbf{w}(k)$  und  $\mathbf{v}(k+1)$  gleich 0 ist, ist der Erwartungswert des Fehlers durch

$$\mathbf{m}_e(k+1) = \langle \mathbf{e}(k+1) \rangle = [\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k)]\mathbf{m}_e(k) \quad (3.67)$$

gegeben. Als Anfangsbedingung für diese rekurrente Gleichung dient

$$\mathbf{m}_e(0) = \langle \mathbf{e}(0) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0) \rangle = \mathbf{m}_0 - \hat{\mathbf{x}}(0). \quad (3.68)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{m}_0$  den a priori Erwartungswert des Prozesses  $\mathbf{x}$  und  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  ist der Anfangswert für die Filtergleichung (3.60). Für den Fall, wenn  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{m}_0$ , verschwindet der Erwartungswert des Schätzungsfehlers, d.h.  $\mathbf{m}_e(0) = 0$ . Aus Gl. (3.67) folgt, dass er zu allen weiteren Zeitpunkten ebenfalls gleich 0 ist. Daraus folgt weiterhin, dass die Auswahl des Anfangswertes für die Filtergleichung (3.60) gleich dem a priori Erwartungswert ist, was eine erwartungstreue Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  sicherstellt. Das bedeutet, dass bei Bestimmung der optimalen Schätzung im Mittel keinen Fehler gemacht wird. Die Erwartungstreue des Schätzwertes allein reicht allerdings nicht zur Beschreibung der Estimationsgüte aus. Eine

weitere Charakteristik gibt die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k+1)$  an. Der Definition zufolge ist die Kovarianz das zweite zentrierte Moment der a posteriori Verteilungsdichte:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \int [\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}] [\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}]^T p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}. \quad (3.69)$$

Diese Gleichung stimmt genau mit der Gl. (3.16) überein, die die mittleren Verluste bei Verwendung der quadratischen Verlustfunktion bestimmt. Um eine vergleichbar einfache Charakteristik für die Einschätzung der Estimationsgüte zu erhalten, ist es sinnvoll, die Spur der Kovarianzmatrix zu benutzen:

$$\mathbf{r}_{k+1} = \text{Sp } \mathbf{P}_{k+1}. \quad (3.70)$$

Sie fasst die Dispersionen aller Komponenten des Vektors  $\mathbf{e}(k+1)$  in einem Zahlenwert zusammen.

Weiterhin ist der in der Filtergleichung auftretende Ausdruck

$$\begin{aligned} \varphi(k+1) &= \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{h}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \\ &= \mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{e}(k) + \mathbf{H}(k+1)\mathbf{w}(k) + \mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \quad (3.71)$$

von Interesse. Er charakterisiert die Differenz zwischen dem tatsächlichen Wert des Prozesses  $\mathbf{x}(k+1)$  und seine auf den Schritt  $k+1$  vorausgesagte optimale Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ .  $\varphi(k+1)$  wird als Residuum bezeichnet. Wie aus der Filtergleichung (3.60) zu erkennen ist, spielt  $\varphi(k+1)$  zusammen mit dem Gainkoeffizienten  $\mathbf{K}(k+1)$  die Rolle eines Korrekturwertes, der die vorausgesagte Schätzung aufgrund der zum Zeitpunkt  $k+1$  neu erhaltenen Messdaten  $\mathbf{z}(k+1)$  korrigiert. Es kann gezeigt werden, dass im Kalman-Filter Algorithmus das Residuum  $\varphi(k+1)$  ein Gaußverteilter weißer Rauschprozess mit unterschiedlichem Erwartungswert mit durch

$$\begin{aligned} \Phi(k+1) &= \langle \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \rangle = \\ &= \mathbf{H}(k+1)[\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k)]\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1) \end{aligned} \quad (3.72)$$

gegebener Kovarianzmatrix ist.

Ein Vergleich von Gln. (3.72) und (3.62) unter Berücksichtigung von Gl. (3.63) ergibt, dass die Kovarianzmatrix  $\Phi(k+1)$  des Residuums in der Gleichung für die Berechnung des Gainkoeffizienten auftaucht. Das eröffnet gewisse Möglichkeiten für die Optimierung der praktischen Berechnung des Gainkoeffizienten. In einigen Fällen kann damit auf die numerisch aufwendige Lösung der Rikkati-Gleichung (3.64) verzichtet werden.

Für den Fall, dass das verwendete Prozessmodell und/oder Beobachtungsmodell mit dem im Kalman-Filter-Algorithmus vorausgesetzten Prozessmodell nicht übereinstimmt, verliert der Prozess  $\varphi(k+1)$  seine Eigenschaften als ein weißer Rauschprozess, so dass aus ihm ein korrelierter Prozess wird. Dies kann für die Prüfung des Prozess- und/oder Beobachtungsmodells, sowie für das Anlegen der entsprechenden Korrekturen verwendet werden.

Da das Verständnis des Arbeitsprinzips des Kalman-Filter-Algorithmus für die in der vorliegenden Arbeit weiter führenden Diskussion erforderlich ist, wird im Folgenden eine an-

### 3. Rekonstruktion

schauliche Interpretation angeführt und alle Gleichungen des Algorithmus noch einmal zusammengefasst.

Der Kalman-Filter-Algorithmus gehört zu den so genannten Prädiktor-Korrektor-Algorithmien. Diesen Algorithmien liegt das folgende Prinzip zugrunde: Ein neuer Schätzwert wird aus dem korrigierten vorangegangenen Schätzwert berechnet. Dementsprechend sind für solche Algorithmien auch bestimmte Anfangsbedingungen nötig. Der Kalman-Filter-Algorithmus benötigt die folgenden Anfangswerte: i) Anfangswert  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  der Schätzung des Prozesses. Wie oben gezeigt wurde, ist es sinnvoll als Anfangswert den a priori Erwartungswert des untersuchten Prozesses zu benutzen. ii) A priori Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(0)$  des untersuchten Prozesses. Sie dienen als Anfangswerte für zwei Prädiktionsgleichungen:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{u}(k), \quad (3.73)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k). \quad (3.74)$$

Gl. (3.73) liefert einen Erwartungswert und Gl. (3.74) eine Kovarianzmatrix. Durch diese zwei Werte wird eine Gauß'sche Prädiktionsdichte  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_k)$  bestimmt. In dieser Funktion sind alle zum Zeitpunkt  $k$  vorhandenen Informationen über den betrachteten Prozess  $\mathbf{x}$  zusammengefasst. Der Erwartungswert dieser Verteilungsdichte stellt eine prognostizierte optimale Schätzung aufgrund der derzeitigen Messdaten dar. Er wird Maximum-a posteriori-Schätzwert genannt. Danach wird der Kalman-Gainkoeffizient bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) \times \\ &\times [\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Mit Hilfe dieses Koeffizienten werden die Schätzungen für den Erwartungswert und für die Kovarianzmatrix für den nächsten Schritt  $k+1$  berechnet:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \\ &+ \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{h}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)], \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k). \quad (3.77)$$

$\mathbf{K}(k+1)$  spielt die Rolle eines Wichtungskoeffizienten zwischen der prognostizierte Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  und dem oben eingeführten Residuum  $\varphi(k+1)$ . Entsprechend den Vorüberlegungen zur Ableitung des Kalman-Filters wird  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  als optimale Schätzung zum Zeitpunkt  $k$  angenommen. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k+1)$  dient als Messwert des Schätzfehlers.  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  und  $\mathbf{P}(k+1)$  werden weiter als neue Startwerte für die Gln. (3.73) und (3.74) eingesetzt. Eine schematische Darstellung des Arbeitsprinzips des Algorithmus ist Abb. 3.2 zu entnehmen. Im Folgenden werden die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften des Kalman-Filter-Algorithmus zusammengefasst.

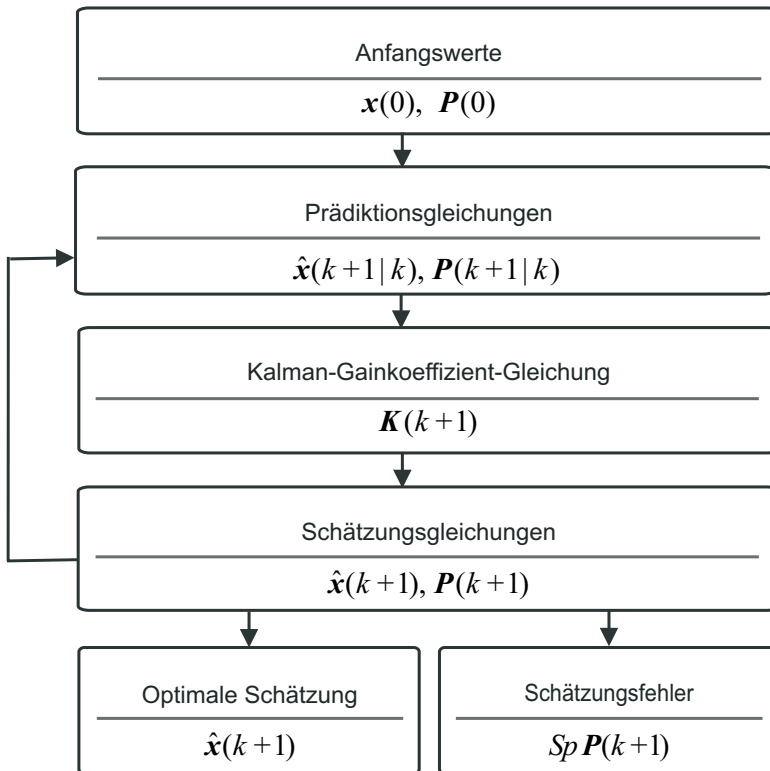


Abb. 3.2. Arbeitsprinzip des Kalman-Filter-Algorithmus

Die Filtergleichung hat einen rekurrenten Charakter. Das bedeutet, dass in jedem Schritt eine optimale Schätzung aufgrund der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Messdaten geliefert wird. Wie im zweiten Kapitel erwähnt wurde, stellt ein statisches Bild einen Spezialfall des dynamischen Bildes dar. Wenn der Kalman-Filter-Algorithmus zur Rekonstruktion des statischen Bildes benutzt wird, liefert er mit jedem Schritt eine Rekonstruktion dieses Bildes von jeweils besserer Qualität. Somit besteht die Möglichkeit, den Rekonstruktionsprozess dann abzubrechen, wenn eine hinreichende Qualität der Rekonstruktion erreicht wird. In manchen Fällen ermöglicht dies, die numerischen Berechnungen zu minimieren.

Die zweite wichtige Eigenschaft des Kalman-Filters besteht darin, dass die Rikcati- bzw. Kovarianzgleichung (3.64) nicht von den Messdaten  $z(k)$  und den Schätzungen  $\hat{x}(k)$  abhängt. Da diese Gleichung die Rekonstruktionsqualität bestimmt, ergibt sich die Möglichkeit, die Rekonstruktionsqualität für verschiedene Prozess- und Beobachtungsmodelle im Voraus abzuschätzen.

Gl. (3.62) für die Berechnung des Gainkoeffizienten hängt ebenfalls nicht von den Messdaten und den Schätzungen ab. Die Berechnung dieser Koeffizienten kann numerisch sehr aufwendig sein. Der größte numerische Aufwand entsteht in der Berechnung der Kovarianzmatrix, d.h. bei der Lösung der Rikcati-Gleichung. Deswegen ist es sinnvoll diese Berechnungen im Voraus durchzuführen. Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass die

### 3. Rekonstruktion

schon berechneten Gainkoeffizienten für die Rekonstruktion jedes Bildes geeignet sind, das dieselben statistischen Charakteristika aufweist.

Das grundsätzliche Problem des Kalman-Filter-Algorithmus besteht darin, dass bei der Rekonstruktion hochdimensionaler Bilder die Dimensionen der Matrizen, besonders derjenigen in der Rikkati-Gleichung, schnell anwachsen. Der Grund dafür sei die Notwendigkeit genannt, dass vollständige statistische Information über das Bild zur Verfügung stehen muss. Ein Ansatz, diese aufwendigen Berechnungen zu vermeiden führt zum Verzicht auf vollständige statistische Information. In diesem Fall werden nichtbayes'schen Methoden angewendet. Dabei wächst allerdings der Estimationsfehler sowie die Empfindlichkeit der Schätzungen gegenüber Ungenauigkeiten bei der Angabe der a priori Information.

### 3.7 Zusammenfassung des Verfahrens zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Aufgabe der Bildrekonstruktion in allgemeiner Form als Aufgabe der statistischen Estimationstheorie aufgefasst. Es wurde gezeigt, wie diese Aufgabe gelöst werden kann sowie ein konkreter Algorithmus für deren Lösung hergeleitet. Zum besseren Verständnis des Rekonstruktionsverfahrens sowie für die weitere Diskussion werden hier die wesentlichen Schritte noch einmal zusammengefasst.

1. Die Aufgabe der Bildrekonstruktion kann in einer allgemeinen Form als ein so genanntes inverses Problem formuliert werden. Sie besteht in dem in der vorliegenden Arbeit betrachteten zweidimensionalen Fall in der Bestimmung der Bildfunktion  $f(x, y)$  aus vorhandenen Messdaten.

2. In der Estimationstheorie wird ein dynamisches Bild als ein stochastischer Prozess  $x$  betrachtet. Die Berechnung einer Schätzung  $\hat{x}$  dieses Prozesses wird als Ergebnis der Rekonstruktion aufgefasst. Dieses Ergebnis wird durch die Entscheidungsregel  $d(z)$  geliefert, wobei  $z$  einen Satz von Messdaten bezeichnet. Somit besteht die zu lösende Aufgabe darin, eine Entscheidungsregel zu finden, die eine in einem bestimmten Sinne optimale Schätzung liefert.

3. Ist das a priori Verteilungsgesetz des Prozesses  $x$  bekannt, wird ein Bayes'scher Ansatz gewählt. Die oben erwähnte Entscheidungsregel lautet in diesem Fall wie folgt: Die gesuchte optimale Schätzung ist diejenige, die durch

$$\hat{x} = \int x p(x | z) dx$$

gegeben wird. Hier bezeichnet  $p(x | z)$  die a posteriori Verteilungsdichtefunktion, die zu bestimmen ist.

4. Mit der Annahme, dass der zweikomponentige Prozess  $[x_k, z_k]$  als Markov-Prozess betrachtet werden kann, kann die a posteriori Verteilungsdichtefunktion durch folgende rekurrente Gleichung bestimmt werden:

$$p(x_{k+1} | z^{k+1}) = c_{k+1} \int \pi(x_{k+1}, z_{k+1} | x_k, z_k) \cdot p(x_k | z^k) dx_k .$$



Dabei bezeichnet  $\pi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k)$  die Übergangsdichte des Prozesses  $[\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k]$  und  $c_{k+1}$  ist ein Normierungskoeffizient. Diese Gleichung wird unter Verwendung der Anfangsbedingung  $p(\mathbf{x}_0) = p_0(\mathbf{x})$  gelöst, wobei  $p_0(\mathbf{x})$  die bekannte a priori Verteilungsdichtefunktion des Prozesses  $\mathbf{x}$  bezeichnet.

5. Für den Fall, wenn i) das Prozessmodell und das Beobachtungsmodell linear sind und ii) der Prozess  $\mathbf{x}$  sowie auch die vorhandenen Rauschprozesse als Gaußverteilte Prozesse angenommen werden können, wird von einer linearen Gauß'schen Aufgabe gesprochen. In diesem Fall bleiben alle Verteilungsgesetze im Verlauf der Zeit Gaußverteilt und können damit durch den Erwartungswert und die Kovarianz vollständig bestimmt werden. Zur Bestimmung des Erwartungswertes  $\mathbf{m}_{k+1}$  und der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k+1}$  des Prozesses  $\mathbf{x}$  ergibt sich dann ein optimaler linearer rekurrenter Algorithmus, der Kalman-Filter-Algorithmus genannt wird. Der Kalman-Filter gehört zu den so genannten Prädiktor-Korrektor-Algorithmen, bei denen ein neuer Schätzwert aus dem korrigierten vorangegangenen Schätzwert berechnet wird. Zu jedem Zeitpunkt liefert der Kalman-Filter-Algorithmus eine optimale Lösung des Estimationsproblems.

Damit ist die Lösung der linearen Bildrekonstruktionsaufgabe vollständig unter den hier gemachten Annahmen gegeben. Im nächsten Kapitel werden nichtlineare Probleme betrachtet. Der in diesem Kapitel vorgestellte und eingehend diskutierte lineare Algorithmus wird als Grundlage für die Lösung der nichtlinearen Probleme verwendet.

### Literatur zum Kapitel 3

- 3.1. G.-R. Tillack. Simulation und Rekonstruktion für strahlendiagnostische Verfahren. Shaker Verlag, Aachen, 2001.
- 3.2. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Bericht Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. Kl. 69 (1917), 262 – 267.
- 3.3. G. T. Herman. Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography. Academic Press, New York, 1980.
- 3.4. C. Kak, M. Slaney. Principles of Computerized Tomographic Imaging. New York, IEEE Press, 1988.
- 3.5. H.-J. Girlich, P. Köchel, H.-U. Kuenle. Steuerung dynamischer Systeme. Fachbuchverlag Leipzig, 1990.
- 3.6. P. Sage, G. L. Melse. Estimation Theory with Application to Communication and Control. New York, McGraw-Hill, 1972.
- 3.7. E. S. Ventcel. Wahrscheinlichkeitstheorie (in Russisch). Vishaya Shkola, Moskva, 2001.
- 3.8. Jarlikov M.S., Mironov M.A. Markov Theorie der Estimation von stochastischen Prozessen. (in Russisch) Radio i Svjaz, Moskau, 1993.
- 3.9. O. Loffeld. Estimationstheorie. Grundlagen und stochastische Konzepte. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1990.
- 3.10. V. M. Artemiev. Theorie der dynamischen Systeme von Zufallsstruktur (in Russisch). Vishaya Shkola, Minsk, 1978.
- 3.11. H. Cramer. Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- 3.12. G. Demoment. Image Reconstruction and Restorations: Overview of Common Estimation Structures and Problems. IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol.37, No. 2, 1989.

## 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

Im vorhergehenden Kapitel wurde ein optimaler Algorithmus für die Lösung der linearen Aufgaben vorgestellt. Es wurde davon ausgegangen, dass der untersuchte Prozess als ein Gaußverteilter Prozess betrachtet und durch ein lineares mathematisches Modell beschrieben werden kann. Das Beobachtungssystem wurde ebenfalls durch eine lineare Gleichung angegeben. In vielen Fällen führt dieser Algorithmus zu Lösungen mit hinreichender Genauigkeit. In der Praxis treten allerdings auch Aufgaben auf, für die die Genauigkeit der linearen Beschreibung nicht ausreicht. In solchen Fällen sind nichtlineare mathematische Modelle zu benutzen. Wie im zweiten Kapitel erwähnt wurde, führt beispielsweise die Berücksichtigung der Tatsache, dass der Prozess keine negativen Werte annehmen kann, zu einem nichtlinearen Prozessmodell. Außerdem kann die Verteilungsdichtefunktion des Prozesses während der Signalübertragung und durch den Beobachtungsprozess wesentlich verzerrt werden. Im zweiten Kapitel wurden allgemeine nichtlineare mathematische Prozess- und Beobachtungsmodelle vorgestellt. Dieser Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung eines Ansatzes zur Lösung der nichtlinearen Rekonstruktionsaufgaben.

### 4.1 Problemstellung

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, bei dem das nichtlineare Prozessmodell als eine Markov-Folge angegeben werden kann, die durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.1)$$

beschrieben wird. Hier bezeichnet  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) = [a_{1k}(\mathbf{x}_k), a_{2k}(\mathbf{x}_k), \dots, a_{S_k}(\mathbf{x}_k)]^T$  eine bekannte Vektorfunktion.  $\mathbf{u}_k$  ist ein bekannter Führungsprozess. Der Rauschprozess  $\mathbf{w}_k$  wird hier wiederum als ein diskretes Gaußverteilttes weißes Rauschen angenommen. Sein Erwartungswert ist gleich 0 und seine Kovarianzmatrix wird mit  $\mathbf{Q}_k$  bezeichnet. Das nichtlineare Beobachtungsmodell wird durch

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.2)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = [h_{1k}(\mathbf{x}_k), h_{2k}(\mathbf{x}_k), \dots, h_{m_k}(\mathbf{x}_k)]^T$  eine bekannte Vektorfunktion bezeichnet, die die Informationen über die Geometrie des Beobachtungsprozesses enthält. Der Rauschprozess  $\mathbf{v}_{k+1}$  ist ebenfalls ein Gaußverteilttes weißes Rauschen. Sein Erwartungswert ist gleich 0 und seine Kovarianzmatrix wird mit  $\mathbf{R}_{k+1}$  bezeichnet. Weiterhin wird angenommen, dass die beiden Rauschprozesse  $\mathbf{w}_k$  und  $\mathbf{v}_{k+1}$  voneinander unabhängig sind.

Wie im vorhergehenden Kapitel, wird der zweikomponentige Prozess  $[\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k]^T$  als Markov-Prozess angenommen. Demzufolge erfüllt die a posteriori Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k)$  des Prozesses  $\mathbf{x}_k$  die Gleichung

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}^{k+1}) = c_{k+1} p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \int \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) d\mathbf{x}_k. \quad (4.3)$$

Wie schon erwähnt, stellt die Bestimmung dieser Funktion beim Bayes'schen Ansatz zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe das Hauptproblem dar.

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

Die Übergangsdichte des Markov-Prozesses  $\mathbf{x}_k$  wird durch

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) &= \\ &= \left( (2\pi)^S \det \mathbf{Q}_k \right)^{-0.5} \exp \left[ -0.5 (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k)^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

angegeben.

Aus Gl. (4.2) kann die Likelihoodfunktion bestimmt werden:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) &= \\ &= \left( (2\pi)^m \det \mathbf{R}_k \right)^{-0.5} \exp \left[ -0.5 (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}))^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aus den Gln. (4.4) und (4.5) ist zu erkennen, dass eine nichtlineare Abhängigkeit von den Variablen  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_{k+1}$  existiert. Daraus folgt, dass selbst bei der Wahl Gauß'scher Anfangswerte die beiden Verteilungsgesetze nicht durch die Gaußverteilung beschrieben werden können. Für diesen Fall existiert im Allgemeinen keine einfache analytische Lösung des Problems zur genauen Bestimmung der a posteriori Verteilungsdichte (4.3). Deswegen wird nach näherungsweise Lösungen gesucht. Dies führt zu den so genannten quasioptimalen Algorithmen, die in diesem Kapitel diskutiert werden.

Ein in der Estimationstheorie häufig verwendeter Ansatz zur Bestimmung dieser näherungsweise Lösung der Rekonstruktionsaufgabe besteht in der Linearisierung der Gln. (4.1) und (4.2), d.h. der Prozess- und Beobachtungsmodelle. Die Linearisierung dieser Gleichungen ermöglicht somit die Verwendung linearer optimaler Rekonstruktionsalgorithmen. Wie im Weiteren gezeigt wird, führt dies zur Bestimmung der a posteriori Verteilungsdichte in einer Gauß'schen Näherung. Im folgenden Abschnitt wird ein entsprechender Algorithmus in allgemeiner Form vorgestellt.

### 4.2 Linearisierte Rekonstruktionsaufgabe

Unter Linearisierung wird eine Näherung der nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$  und  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  durch lineare Funktionen

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{a}_k^*(\mathbf{x}_k^*) + \mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}_k^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{h}_k^*(\mathbf{x}_k^*) + \mathbf{H}_k^*(\mathbf{x}_k^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*) \quad (4.7)$$

verstanden. Hier bezeichnet  $\mathbf{x}_k^*$  einen so genannten Stützprozess, in Bezug auf den die Linearisierung durchgeführt wird. Die Koeffizienten  $\mathbf{a}_k^*$ ,  $\mathbf{A}_k^*$ ,  $\mathbf{h}_k^*$  und  $\mathbf{H}_k^*$  werden Linearisierungskoeffizienten genannt. In der vorliegenden Arbeit werden in Übereinstimmung mit der Struktur der Gln. (4.6) und (4.7)  $\mathbf{a}_k^*$ ,  $\mathbf{h}_k^*$  als Linearisierungsvektoren und  $\mathbf{A}_k^*$ ,  $\mathbf{H}_k^*$  als Linearisierungsmatrizen bezeichnet. Es existieren verschiedene Ansätze zur Wahl des Stützprozesses und/oder der Bestimmung der Linearisierungskoeffizienten bezüglich der benutzten Linearisierungsmethode. Einige der Ansätze, die für die Lösung der Bildrekonstruktionsaufgaben geeignet sind, werden in diesem Kapitel diskutiert.

Unter Berücksichtigung der Gln. (4.6) und (4.7) nehmen die Gleichungen des Prozessmodells (4.1) und des Beobachtungsmodells (4.2) die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k^* \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^* + \mathbf{w}_k \quad (4.8)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{t}_{k+1}^* + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.9)$$

an, wobei

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{a}_k^* - \mathbf{A}_k^* \mathbf{x}_k^* + \mathbf{u}_k \quad (4.10)$$

$$\mathbf{t}_{k+1}^* = \mathbf{h}_{k+1}^* - \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{x}_k^* \quad (4.11)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wird hier und im Weiteren auf die Bezeichnung der Abhängigkeit der Linearisierungskoeffizienten vom Stützprozess  $\mathbf{x}_k^*$  verzichtet.

Im Ergebnis ergeben sich dementsprechend ein lineares Modell des Prozesses und ein lineares Modell des Beobachtungssystems. Der im zweiten Kapitel hergeleitete Kalman-Filter-Algorithmus kann jetzt zur Lösung dieser Rekonstruktionsaufgabe angewendet werden. Die Gleichungen des Algorithmus nehmen folgende Form an:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{t}_{k+1}^* - \mathbf{H}_{k+1}^* \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} \right] \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = \mathbf{A}_k^* \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{u}_k^* \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T \left[ \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{P}_{k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \mathbf{A}_k^* \mathbf{P}_k (\mathbf{A}_k^*)^T + \mathbf{Q}_k \quad (4.15)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1,k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{P}_{k+1,k} \quad (4.16)$$

Es werden hier dieselben Bezeichnungen verwendet, wie für den optimalen Kalman-Filter (siehe Kapitel 2). Es sei allerdings betont, dass die Gln. (4.12)-(4.16) in diesem Fall einen quasioptimalen Algorithmus darstellen. Dementsprechend bezeichnet jetzt die Variable  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  nicht eine optimale, sondern eine in Bezug auf die gewählte Linearisierungsmethode quasioptimale Schätzung. Dasselbe gilt auch für die Matrix  $\mathbf{P}_{k+1}$ , die in diesem Fall eine näherungsweise Schätzung für die Kovarianzmatrix des Rekonstruktionsfehlers angibt. Da durch  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  und  $\mathbf{P}_{k+1}$  ein Gauß'sches Verteilungsgesetz eindeutig bestimmt werden kann, wird in diesem Fall von der Lösung der Rekonstruktionsaufgabe in Gauß'scher Näherung gesprochen.

Daraus folgt, dass bei der Entwicklung von Rekonstruktionsalgorithmen die Linearisierungsmethode die Hauptrolle spielt. Es wurden verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Linearisierungskoeffizienten entwickelt. Die unterschiedlichen Prinzipien der Linearisierung, die ihnen zugrunde liegen, führen zu Rekonstruktionsalgorithmen mit deutlich verschiedenen Charakteristika und Eigenschaften. Die Wahl einer Methode hängt im Allgemeinen von der konkreten Aufgabe ab. In den folgenden Abschnitten werden einige häufig benutzte Methoden diskutiert. Begonnen wird mit dem Linearisierungsansatz, der historisch zuerst entwickelt wurde und zum so genannten Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus (Extended Kalman-Filter) führt.

### 4.3 Erweiterter Kalman-Filter

Ein Ansatz zur Linearisierung der nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$  und  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  besteht darin, diese Funktionen in eine Reihe bezüglich bestimmter orthogonaler Basisfunktionen zu zerlegen. Dann werden die linearen Glieder dieser Reihe als Approximation der ursprünglichen Funktionen benutzt. Eine eingehende Beschreibung dieser linearen Approximation ist u.a. in [4.1] zu finden. Für die Entwicklung des Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus wird wie folgt vorgegangen: Da die beste Approximation in der Regel nur in einer bestimmten Umgebung des Stützpunktes  $\mathbf{x}_k^*$  erfolgt, wird als Stützprozess der Schätzungsprozess  $\hat{\mathbf{x}}_k$  benutzt, d.h.  $\mathbf{x}_k^* = \hat{\mathbf{x}}_k$ . Die nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$  und  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  werden in eine Taylor-Reihe bezüglich der Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_k$  zerlegt. Nur die ersten zwei Glieder dieser Reihe werden für die lineare Näherung verwendet. Damit ergibt sich für die Funktion  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$ :

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{A}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k). \quad (4.17)$$

Der Linearisierungsvektor  $\mathbf{a}_k^*$  ist durch

$$\mathbf{a}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (4.18)$$

gegeben, und die Linearisierungsmatrix  $\mathbf{A}_k^*$  stimmt mit der Jakobi-Matrix überein:

$$\mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{A}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}. \quad (4.19)$$

Unter der Jakobi-Matrix eines  $m$ -komponentigen Vektors  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  bezüglich eines  $s$ -komponentigen Vektor wird die Ableitungsmatrix

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h^1(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^1} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} & \dots & \left. \frac{\partial h^1(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^s} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial h^m(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^1} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} & \dots & \left. \frac{\partial h^m(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^s} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

verstanden. Für die Funktion  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  ergibt sich in Analogie:

$$\mathbf{h}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{H}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{H}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}. \quad (4.22)$$

Durch Einsetzen von Gln. (4.18), (4.19), (4.21) und (4.22) in die Gln. (4.12) – (4.16) folgt der Erweiterte Kalman-Filter-Algorithmus. Im Weiteren werden seine Charakteristika in Bezug auf die Bildrekonstruktionsaufgabe diskutiert.

Die Abhängigkeit der Linearisierungskoeffizienten (4.18), (4.19), (4.21) und (4.22) von der derzeitigen Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_k$  ist in der Regel nichtlinear. Das führt dazu, dass auch die Gln. (4.12) und (4.13) nichtlinear sind. Aus demselben Grund hängen die Gl. (4.14) für den Gainkoeffizient  $\mathbf{K}_k$  sowie auch die Gln. (4.15) und (4.16) für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  eben-

falls nichtlinear von der Schätzung  $\hat{x}_k$  ab. Im Ergebnis sind alle Gleichungen des Algorithmus nichtlinear und miteinander verknüpft. Dementsprechend müssen alle Gleichungen des Erweiterten Kalman-Filters zu jedem Zeitpunkt  $k = 1, 2, \dots$  gleichzeitig gelöst werden. Das bedeutet, dass die Gainkoeffizienten und die Kovarianzmatrizen nicht mehr im Voraus bestimmt werden können, was die Anwendungsmöglichkeiten dieses Algorithmus für die Lösung der Bildrekonstruktionsaufgaben in Echtzeit wesentlich begrenzt.

Eine zweite Einschränkung wird durch das Linearisierungsprinzip selbst verursacht. Die Approximation einer Funktion durch die beiden ersten Glieder einer Taylor-Reihe setzt vergleichbar geringe Abweichungen der tatsächlichen Werte des untersuchten Prozesses von dem gewählten Stützpunkt voraus. Das beschränkt den Wert des Estimationsfehlers  $\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*$ , der in Kauf genommen werden kann. Der Filter-Algorithmus erweist sich in diesem Fall als extrem empfindlich gegenüber einer falschen Wahl der Startwerte. Große Abweichungen werden von dem linearisierten Modell nicht richtig wiedergegeben und führen demzufolge leicht zum divergenten Verhalten des Algorithmus [4.1,4.2]. Die Aufgaben der Bildrekonstruktion gehören, wie im zweiten Kapitel gezeigt wurde, zu den schlechtgestellten Aufgaben. Die Abweichungen des Startwertes von den tatsächlichen Werten des untersuchten Prozesses können deshalb erheblich sein, was die Anwendung des Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus zur Lösung der Bildrekonstruktionsaufgabe praktisch unmöglich macht.

Eine weitere Beschränkung besteht darin, dass eine nichtlineare Funktion in der Umgebung des Stützpunktes differenzierbar sein muss, um in eine Taylor-Reihe zerlegt werden zu können. Bei der Verwendung des im zweiten Kapitel entwickelten zweistufigen Modells treten allerdings auch nichtkontinuierliche nichtlineare Funktionen auf, die nicht im gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind.

Die genannten Einschränkungen der Anwendbarkeit des Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus machen es notwendig weitere Linearisierungsmethoden zu betrachten. Von besonderem Interesse sind solche Ansätze, die zu Algorithmen führen, die gegenüber großen Abweichungen bei der Angabe der Startwerte stabil sind. Im nächsten Abschnitt wird das Prinzip der stochastischen Linearisierung vorgestellt, das die Approximation der nichtlinearen Funktionen nicht nur in einer bestimmten Umgebung des Stützpunktes, sondern im ganzen Definitionsbereich ermöglicht. Eine Linearisierung nichtkontinuierlicher nichtlinearer Funktionen ist bei diesem Ansatz ebenfalls möglich.

#### 4.4 Stochastische Linearisierung nichtlinearer Funktionen

Das Linearisierungsprinzip, das dem im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus zugrunde liegt, berücksichtigt die stochastische Natur der betrachteten Aufgaben nicht. Die Zerlegung einer nichtlinearen Funktion in eine Taylor-Reihe liefert eine hinreichende Approximation nur für die Funktion selbst. Die Änderung des Verteilungsgesetzes der entsprechenden stochastischen Variablen wird dabei nicht in Betracht gezogen. Die Methode der stochastischen Linearisierung beschäftigt sich, wie es sich auch in ihrem Namen widerspiegelt, mit solchen linearen Approximationen, bei denen die statistischen Charakteristika des linearisierten Prozesses von den entsprechenden Charakteristika des ursprünglichen Prozesses nicht oder kaum abweichen. Dieser Ansatz ist auch deshalb sinnvoll, da der Kalman-Filter-Algorithmus die beiden ersten statistischen Momente

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

des Prozesses berücksichtigt. Zum ersten Mal wurde die Methode der stochastischen Linearisierung in [4.3] und [4.4] vorgestellt. Beiden Varianten liegt dieselbe Grundidee zugrunde, obwohl sich die Ansätze zur Bestimmung der Linearisierungskoeffizienten unterscheiden. Im Weiteren wird das Prinzip der stochastischen Linearisierung im Allgemeinen dargestellt.

Es wird ein  $S \times I$ -Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  betrachtet. Seine Verteilungsdichtefunktion wird mit  $p(\mathbf{x})$  bezeichnet. Der Erwartungswert ergibt sich dann aus  $\mathbf{m}_x = \int \mathbf{x} \cdot p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  und die Kovarianzmatrix ist durch  $\mathbf{P}_x = \int (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  bestimmt. Die nichtlineare Transformation des Vektors  $\mathbf{x}$  in einen  $S \times I$ -Vektor  $\mathbf{y}$  wird durch eine Vektorfunktion  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  angegeben. Die Aufgabe besteht nun darin, diese Funktion durch eine Approximation der Form

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{m}_y + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \quad (4.23)$$

zu beschreiben. Hier bezeichnet  $\mathbf{m}_y$  den Vektor der stochastischen Linearisierung und  $\mathbf{F}$  die Matrix der stochastischen Linearisierung. Der erste Summand in Gl. (4.23) wird durch

$$\mathbf{m}_y = \langle \mathbf{y} \rangle = \int f(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle f(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.24)$$

bestimmt. Der Erwartungswert des zweiten Summanden in Gl. (4.23) ist offensichtlich gleich 0. Demzufolge stimmt der Erwartungswert des linearisierten Vektors mit dem Erwartungswert  $\mathbf{m}_y$  des ursprünglichen Vektors überein. In Bezug auf den Erwartungswert ist die lineare Approximation somit exakt.

Um die Linearisierungsmatrix zu bestimmen, wurde in [4.4] ein Ansatz vorgestellt, bei dem von der Minimierung des Linearisierungsfehlers

$$\delta = \mathbf{y} - \mathbf{m}_y - \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \quad (4.25)$$

ausgegangen wurde. Für die Bestimmung der Matrix ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \langle f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \rangle \mathbf{P}_x^{-1} = \\ &= \int f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}_x^{-1}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei  $\mathbf{m}_x$  und  $\mathbf{P}_x$  den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des Prozesses  $\mathbf{x}$  bezeichnen.

Für die Verwendung des Kalman-Filter-Algorithmus zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe ist jedoch der in [4.3] vorgeschlagene Ansatz von größerem Interesse. Laut dieser Methode wird die Linearisierungsmatrix so gewählt, dass die Kovarianzmatrix des linearisierten Prozesses mit der Kovarianzmatrix des ursprünglichen nichtlinearen Prozesses übereinstimmt. Die Kovarianzmatrix des linearisierten Prozesses lässt sich unmittelbar aus Gl. (4.23) herleiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y &= \left\langle \left( \mathbf{m}_y + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) - \mathbf{m}_y \right) \left( \mathbf{m}_y + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) - \mathbf{m}_y \right)^T \right\rangle = \\ &= \left\langle \left( \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \right) \left( \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \right)^T \right\rangle = \mathbf{F} \mathbf{P}_x \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (4.27)$$



Im Weiteren wird durch  $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$  die Wurzel der Matrix  $\mathbf{P}$  bezeichnet, d.h.  $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{P}^{\frac{1}{2}})^T = \mathbf{P}$ . Die Bedingung, dass die Kovarianzmatrizen übereinstimmen sollen, kann dann in der Form

$$\mathbf{P}_y^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \mathbf{P}_y^{\frac{1}{2}} \right)^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_x^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \mathbf{P}_x^{\frac{1}{2}} \right)^T \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.28)$$

angegeben werden. Daraus folgt

$$\mathbf{P}_y^{\frac{1}{2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_x^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

Durch Lösung dieser Gleichung bezüglich  $\mathbf{F}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{P}_y^{\frac{1}{2}} \left( \mathbf{P}_x^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \\ &= \left[ \int (f(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_y)(f(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_y)^T p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \mathbf{P}_x^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei  $\mathbf{m}_y$  durch Gl. (4.24) bestimmt ist.

Wie aus Gl. (4.30) folgt, ist die Kenntnis der Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x})$  erforderlich, um die Linearisierungsmatrix  $\mathbf{F}$  zu bestimmen. Wie oben erwähnt wurde, liefert der Kalman-Filter-Algorithmus eine Gauß'sche Näherung der Verteilungsdichte. Somit wird für  $p(\mathbf{x})$  eine Gauß'sche Verteilungsdichtefunktion angenommen, die durch den Erwartungswert  $\mathbf{m}_x$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_x$  vollständig bestimmt ist. Im Ergebnis können der Linearisierungsvektor  $\mathbf{m}_y$  und die Linearisierungsmatrix  $\mathbf{F}$  als Funktionen von  $\mathbf{m}_x$  und  $\mathbf{P}_x$  betrachtet werden, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_y &= \mathbf{m}_y(\mathbf{m}_x, \mathbf{P}_x) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{m}_x, \mathbf{P}_x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

In den meisten Fällen wird die Lösung dieser Gleichungen durch die numerische Integration der Gln. (4.24) und (4.30) bestimmt. In einigen Spezialfällen können diese Gleichungen auch analytisch gelöst werden. Ob die Integrale direkt ausgeführt werden können, hängt in der Regel von der Form der nichtlinearen Funktion  $f(\mathbf{x})$  ab.

Für die Wahl der Verteilungsdichtefunktion  $p(\mathbf{x})$  stehen zwei Varianten zur Verfügung: es kann entweder die a priori oder die a posteriori Verteilungsdichte benutzt werden. Dementsprechend unterscheiden sich zwei Ansätze: die a priori und die a posteriori stochastische Linearisierungsmethode. In den nächsten Abschnitten werden diese diskutiert.

## 4.5 Quasioptimaler Rekonstruktionsalgorithmus auf Grundlage der a posteriori stochastischen Linearisierung

Unabhängig von der Methode, nach der die Linearisierung der nichtlinearen Funktionen durchgeführt wird, wird die a posteriori Verteilungsdichtefunktion in einer Gauß'schen Näherung bestimmt:

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}^k) = \left( (2\pi)^S \det \mathbf{P}_k \right)^{-0.5} \exp \left[ -0.5 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) \right], \quad (4.32)$$

wobei  $\hat{\mathbf{x}}_k$  den a posteriori Erwartungswert bzw. die optimale Schätzung bezeichnet und  $\mathbf{P}_k$  die a posteriori Kovarianzmatrix ist, die den Estimationsfehler beschreibt. Die Wahl der a posteriori Verteilungsdichte (4.32) als Verteilungsdichte in Gl. (4.30) zur Bestimmung der Linearisierungsmatrix  $\mathbf{F}$  führt zu einem Rekonstruktionsalgorithmus auf der Grundlage der a posteriori stochastischen Linearisierung. Wie im Erweiterten Kalman-Filter-Algorithmus wird hier die Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_k$  als Stützprozess  $\mathbf{x}_k^*$  verwendet. Die Linearisierungskoeffizienten werden durch die Gln. (4.24) und (4.30) unter Berücksichtigung von Gl. (4.32) bestimmt. Damit werden die Beziehungen zur Bestimmung der Linearisierungsvektoren und -matrizen als Funktionen von  $\hat{\mathbf{x}}_k$  und  $\mathbf{P}_k$

$$\mathbf{a}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{a}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k), \quad \mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{A}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{h}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{h}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k), \quad \mathbf{H}_k^*(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{H}_k^*(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k) \quad (4.34)$$

erhalten.

Wie auch beim Erweiterten Kalman-Filter, werden in diesem Fall alle Gleichungen des Algorithmus (4.12) – (4.16) nichtlinear und sind miteinander verkoppelt. Dementsprechend sind alle Berechnungen gleichzeitig durchzuführen. Die Anwendbarkeit und die Genauigkeit dieses Algorithmus sind allerdings besser als die beim Erweiterten Kalman-Filter, denn die Linearisierungskoeffizienten werden zu jedem Zeitpunkt in Übereinstimmung mit der zu diesem Zeitpunkt schon vorhandenen optimalen Schätzung und dem entsprechenden Estimationsfehler bestimmt. Die Berechnung der Koeffizienten (4.33) und (4.34) ist allerdings numerisch aufwendig. Deswegen ist die Anwendbarkeit dieses Algorithmus für die Rekonstruktion dynamischer Bilder in Echtzeit meistens beschränkt. Diesen Nachteil weist der im nächsten Abschnitt vorgestellte Algorithmus nicht auf.

#### 4.6 Quasioptimaler Rekonstruktionsalgorithmus auf Grundlage der a priori stochastischen Linearisierung

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die allgemeinen Prinzipien der Lösung der Rekonstruktionsaufgabe sowie auch konkrete Rekonstruktionsalgorithmen vorgestellt. Die Eigenschaften, sowie die Vor- und Nachteile jedes Algorithmus wurden diskutiert. Die oben geführten Diskussionen ermöglichen es an dieser Stelle, die Anforderungen an einen Rekonstruktionsalgorithmus zu formulieren, der für die Rekonstruktion der dynamischen Bilder verwendet werden kann.

1. Der numerische Aufwand der oben vorgestellten Algorithmen für die Rekonstruktion hochdimensionaler Bilder ist üblicherweise sehr groß. Dieses Problem betrifft insbesondere Echtzeit-Rekonstruktionsverfahren. Deswegen ist es zweckmäßig, einen Algorithmus zu entwickeln, bei dem die aufwendigsten Gleichungen - für den Gainkoeffizienten und für die Kovarianzmatrix - nicht von den Messdaten abhängen und damit im Voraus berechenbar sind.
2. Die Linearisierungskoeffizienten für die quasioptimalen linearisierten Algorithmen sollten aus demselben Grund ebenfalls im Voraus berechenbar sein.

3. Der Rekonstruktionsalgorithmus soll gegenüber großen Abweichungen bei der Angabe der Startwerte, wie bei den Bildrekonstruktionsaufgaben üblich, stabil sein.

Als Grundlage für die Entwicklung quasioptimaler Rekonstruktionsalgorithmen wird in der vorliegenden Arbeit der im dritten Kapitel vorgestellte lineare Kalman-Filter-Algorithmus verwendet. Er erfüllt bereits die erste und die dritte der oben angeführten Forderungen. Eine Entwicklung von quasioptimalen linearen Algorithmen, die auch die zweite Forderung erfüllen, führt zu der a priori stochastischen Linearisierungsmethode, die in diesem Abschnitt vorgestellt wird. Das im Abschnitt 4.4 in allgemeiner Form dargestellte Linearisierungsverfahren wird hier für diesen Spezialfall konkretisiert.

Es wird angenommen, dass das mathematische Modell des untersuchten dynamischen Bildes und das mathematische Modell des Beobachtungssystems durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.35)$$

und

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.36)$$

gegeben sind.

Die betrachtete Methode der a priori stochastischen Linearisierung setzt die Linearisierung der nichtlinearen Gleichung des Modells als ersten Schritt voraus. Es wird nach einer linearisierten Modellgleichung gesucht, deren Erwartungswert und deren Kovarianzmatrix mit denjenigen von Gl. (4.35) übereinstimmen. Die allgemeine Gl. (4.6) nimmt im hier betrachteten Fall die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}_k^* + \mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.37)$$

an. Hier und im Weiteren wird für den linearisierten Prozess dieselbe Bezeichnung  $\mathbf{x}_{k+1}$  wie für den ursprünglichen nichtlinearen Prozess benutzt, da es kein Missverständnis hervorruft. Wie im dritten Kapitel gezeigt wurde, bleibt unter Gauß'schen Anfangswerten die Verteilungsdichte des Prozesses  $\mathbf{x}_{k+1}$  ebenfalls Gaußverteilt und wird hier durch

$$p_x(\mathbf{x}_k) = \left( (2\pi)^S \det \mathbf{P}_{xk} \right)^{-0.5} \exp \left[ -0.5(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{xk})^T \mathbf{P}_{xk}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{xk}) \right] \quad (4.38)$$

angegeben. Dabei bezeichnet  $\mathbf{m}_{xk}$  den Erwartungswert,  $\mathbf{P}_{xk}$  die Kovarianzmatrix und  $S$  die Dimension bzw. Anzahl der Elemente des Bildes. Die Erwartungswerte der nichtlinearen (4.35) und linearen (4.37) Prozesse lassen sich entsprechend durch

$$\mathbf{m}_{xk+1} = \langle \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) \rangle + \mathbf{u}_k \quad (4.39)$$

und

$$\mathbf{m}_{xk+1} = \mathbf{a}_k^* + \mathbf{u}_k \quad (4.40)$$

bestimmen. Der Vergleich beider Gleichungen zeigt, dass zur Übereinstimmung der Erwartungswerte, die Bedingung

$$\mathbf{a}_k^* = \langle \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) \rangle = \int \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \quad (4.41)$$

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

erfüllt sein muss. Da hier von einer Gauß'schen Verteilungsdichte ausgegangen wird, kann der Linearisierungsvektor als Funktion von Erwartungswert und Kovarianzmatrix des Bildes dargestellt werden, d.h.  $\mathbf{a}_k^* = \mathbf{a}_k^*(\mathbf{m}_{x_k}, \mathbf{P}_{x_k})$ .

Zur Bestimmung der Linearisierungsmatrix wird wie folgt vorgegangen: Von Gl. (4.35) wird Gl. (4.39) subtrahiert. Damit ergibt sich die Gleichung für den zentrierten Prozess  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{x_{k+1}}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \langle \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) \rangle + \mathbf{w}_k = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* + \mathbf{w}_k. \quad (4.42)$$

In Analogie dazu wird durch Subtrahieren der Gl. (4.40) von Gl. (4.37) die Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k^* \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.43)$$

erhalten. Die Kovarianzmatrix kann aus  $\mathbf{P}_{x_k} = \langle \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_k^T \rangle$  bestimmt werden. Nach Einsetzen der Gln. (4.42) und (4.43) ergibt sich dann

$$\mathbf{P}_{x_{k+1}} = \left\langle \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right) \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right)^T \right\rangle + \mathbf{Q}_k \quad (4.44)$$

und

$$\mathbf{P}_{x_{k+1}} = \mathbf{A}_k^* \mathbf{P}_{x_k} \left( \mathbf{A}_k^* \right)^T + \mathbf{Q}_k. \quad (4.45)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Linearisierungsmatrix  $\mathbf{A}_k^*$  entsprechend der Beziehung

$$\mathbf{A}_k^* \mathbf{P}_{x_k} \left( \mathbf{A}_k^* \right)^T = \left\langle \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right) \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right)^T \right\rangle = \mathbf{P}_{a_k} \quad (4.46)$$

zu wählen ist.  $\mathbf{P}_{a_k}$  bezeichnet hier die Kovarianzmatrix der nichtlinearen Zufallsfunktion  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$ . Aus Gl. (4.46) lässt sich die Gleichung für die Bestimmung der Linearisierungsmatrix herleiten:

$$\mathbf{A}_k^* = \mathbf{P}_{a_k}^{1/2} \left( \mathbf{P}_{x_k}^{1/2} \right)^{-1} = \mathbf{A}_k^*(\mathbf{m}_{x_k}, \mathbf{P}_{x_k}), \quad (4.47)$$

wobei

$$\mathbf{P}_{a_k} = \int \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right) \left( \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{a}_k^* \right)^T p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (4.48)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass die Gln. (4.41) und (4.47) für die Bestimmung der Linearisierungskoeffizienten mit den entsprechenden im Abschnitt 4.4 hergeleiteten Gln. (4.24) und (4.30) übereinstimmen.

Im Ergebnis kann die nichtlineare Modellgleichung (4.35) durch die linearisierte Gleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k^* \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^* + \mathbf{w}_k \quad (4.49)$$

ersetzt werden, wobei

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{a}_k^* - \mathbf{A}_k^* \mathbf{m}_{xk}^* . \quad (4.50)$$

Diese Ersetzung erfolgt unter der Bedingung der Übereinstimmung der statistischen Charakteristika des ursprünglichen und des linearisierten Ersatzprozesses. Es wurde angenommen, dass die Verteilungsdichte des ursprünglichen Prozesses durch eine Gauß'sche Verteilungsdichte (4.38) angenähert wird, die durch den Erwartungswert  $\mathbf{m}_{xk}^*$  und die Kovarianz  $\mathbf{P}_{xk}^*$  beschrieben wird. Der Linearisierungsvektor wird durch Gl. (4.41) und die Linearisierungsmatrix durch die Gln. (4.47) und (4.48) bestimmt. Der Erwartungswert  $\mathbf{m}_{xk}^*$  lässt sich aus Gl. (4.40) und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{xk}^*$  aus Gl. (4.45) berechnen. Alle Gleichungen (4.38), (4.40), (4.41), (4.45), (4.47), (4.48), (4.49) und (4.50) bilden ein Gleichungssystem und werden gleichzeitig gelöst. Von Interesse sind die Variablen  $\mathbf{a}_k^*$ ,  $\mathbf{A}_k^*$  und  $\mathbf{u}_k^*$ , die die linearisierten Modellgleichungen (4.49) und (4.50) bestimmen und im Kalman-Filter-Algorithmus benutzt werden. Es sei hier betont, dass alle diese Berechnungen im Voraus durchgeführt werden können, da keine Abhängigkeit von den Daten besteht.

Gleichzeitig wird die in Gl. (4.36) auftretende nichtlineare Funktion  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  linearisiert. Im Ergebnis wird die nichtlineare Gl. (4.36) durch

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{t}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.51)$$

ersetzt, mit

$$\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}^* - \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{m}_{xk+1}^* . \quad (4.52)$$

Die Bestimmung des Linearisierungsvektors  $\mathbf{h}_k^*(\mathbf{m}_{xk}^*, \mathbf{P}_{xk}^*)$  und der Linearisierungsmatrix  $\mathbf{H}_k^*(\mathbf{m}_{xk}^*, \mathbf{P}_{xk}^*)$  erfolgt in Analogie zu den oben angeführten Herleitungen. Alle Berechnungen können ebenfalls im Voraus durchgeführt werden.

Somit sind die Linearisierungskoeffizienten für die linearisierten Gleichungen im Voraus berechenbar und die zweite der am Anfang dieses Abschnittes formulierten Forderungen ist damit erfüllt.

Im Ergebnis der oben geführten Diskussionen kann folgende qualitative Zusammenfassung gegeben werden: Es wurden drei Varianten von linearisierten Rekonstruktionsalgorithmen betrachtet. Der Erweiterte Kalman-Filter ist in der Praxis nur unter der Voraussetzung kleiner Abweichungen des angegebenen Anfangswertes von den realen Werten des untersuchten Prozesses anwendbar. Der Algorithmus auf Grundlage der a posteriori stochastischen Linearisierungsmethode überwindet diese Beschränkung und liefert Rekonstruktionsergebnisse besserer Qualität. Für praktische Probleme, wie die Rekonstruktion dynamischer Prozesse in Echtzeit, kann dieser allerdings wegen seines numerischen Aufwandes ebenso wenig benutzt werden. Die a priori stochastische Linearisierung ermöglicht die Entwicklung von Algorithmen, die gegenüber großen Abweichungen des Anfangswertes von den realen Werten des untersuchten Prozesses stabil sind. Die Qualität der bei diesen Algorithmen gelieferten Rekonstruktionsergebnisse ist nicht so gut wie die, die bei den zwei oben genannten Algorithmen erreicht werden kann. Für die Lösung der Rekonstruktionsaufgaben in Echtzeit ist er allerdings wesentlich besser geeignet und besitzt dementsprechend vielfältige praktische Anwendungsmöglichkeiten. In mehreren Fällen kann der nicht-lineare dynamische Prozess anhand des im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit entwi-

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

ckelten zweistufigen nichtlinearen Modells beschrieben werden. Im nächsten Abschnitt wird eine Linearisierungsmethode für diesen Fall diskutiert.

### 4.7 Stochastische Linearisierung für das zweistufige Modell eines dynamischen Bildes

Ein zweistufiges mathematisches Modell zur Beschreibung eines nichtlinearen dynamischen Bildes wurde im zweiten Kapitel vorgestellt. Es wird durch die zwei Gleichungen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.53)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = f[\mathbf{x}_k] \quad (4.54)$$

angegeben, wobei  $f[\cdot]$  eine bekannte nichtlineare Transformation bezeichnet.

Weiterhin wird das nichtlineare Beobachtungsmodell

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.55)$$

betrachtet.

Die nichtlinearen Gleichungen (4.54) und (4.55) können nach der im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Methode linearisiert werden. Damit ergeben sich die linearisierten Modelle des Prozesses und des Beobachtungssystems zu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{f}_k^*(\mathbf{m}_{xk}, \mathbf{P}_{xk}) + \mathbf{F}_k^*(\mathbf{m}_{xk}, \mathbf{P}_{xk}) \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_{xk}), \quad (4.57)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}^*(\mathbf{m}_{xk}, \mathbf{P}_{xk}) + \mathbf{H}_{k+1}^*(\mathbf{m}_{xk}, \mathbf{P}_{xk}) \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_{xk}) + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (4.58)$$

Eine Besonderheit und ein Vorteil des zweistufigen Modells besteht darin, dass die Linearisierungsvektoren  $\mathbf{f}_k^*$ ,  $\mathbf{h}_{k+1}^*$  und die Linearisierungsmatrizen  $\mathbf{F}_k^*$ ,  $\mathbf{H}_{k+1}^*$  durch das bekannte Gauß'schen Verteilungsgesetz des Vektors  $\mathbf{x}_k$  bestimmen sind. Damit verschwindet der Fehler der Estimation der Verteilungsdichte. Die Verteilungsdichtefunktion des Prozesses (4.56) ist durch

$$p_x(\mathbf{x}_k) = \left( (2\pi)^S \cdot \det \mathbf{P}_{xk} \right)^{-0.5} \times \exp \left[ -0.5 \left[ \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_{xk} \right]^T \mathbf{P}_{xk}^{-1} \left[ \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_{xk} \right] \right] \quad (4.59)$$

gegeben. Der Erwartungswertsvektor  $\mathbf{m}_{xk}$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{xk}$  werden aus

$$\mathbf{m}_{xk+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{m}_{xk} + \mathbf{u}_k \quad (4.60)$$

$$\mathbf{P}_{xk+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{xk} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (4.61)$$

bestimmt.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Linearisierungsvektoren nehmen die Form

$$\mathbf{f}_k^* = \int f(\mathbf{x}_k) p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \quad (4.62)$$

$$\mathbf{h}_k^* = \int h_{k+1} [f(\mathbf{x}_k)] p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \quad (4.63)$$

an. Da die Verteilungsdichte  $p_x(\mathbf{x}_k)$  bekannt ist, können die Integrale in den Gln. (4.62) und (4.63) mit der erforderlichen Genauigkeit numerisch berechnet werden. Die Kovarianzmatrizen werden entsprechend der benutzten Linearisierungsmethode aus Gl. (4.47) bestimmt. Für den hier betrachteten Fall nehmen diese Gleichungen die Form

$$\mathbf{F}_k^* = \left[ \int (f(\mathbf{x}_k) - f_k^*) (f(\mathbf{x}_k) - f_k^*)^T p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \right]^{1/2} \cdot (\mathbf{P}_{xk}^{1/2})^{-1} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{H}_k^* = \left[ \int (h_{k+1}(f(\mathbf{x}_k)) - \mathbf{h}_{k+1}^*) (h_{k+1}(f(\mathbf{x}_k)) - \mathbf{h}_{k+1}^*)^T p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \right]^{1/2} \cdot (\mathbf{P}_{xk}^{1/2})^{-1} \quad (4.65)$$

an.

Sind die Linearisierungskoeffizienten bestimmt, wird der Rekonstruktionsalgorithmus auf der Grundlage der Kalman-Filter-Gleichungen (4.12) – (4.16) entwickelt.

Die Anzahl der Bildelemente wird durch  $S$  bezeichnet. Dementsprechend ist  $\mathbf{x}_k$  ein  $S \times I$ -dimensionaler Zufallsvektor. Der durch die Transformation  $f[\cdot]$  erhaltene Prozess  $\mathbf{y}_k$  ist ebenfalls als ein  $S \times I$ -dimensionaler Zufallsvektor gegeben. Zur Vereinfachung der weiteren Diskussion ist es sinnvoll, statt einer separaten Betrachtung der Vektoren  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{y}_k$  einen erweiterten  $2S \times I$ -dimensionalen Vektor  $\bar{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k]^T$  zu verwenden, der durch

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}_k^* \bar{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{u}}_k^* + \bar{\mathbf{w}}_k \quad (4.66)$$

angegeben wird. Hier werden die Bezeichnungen

$$\bar{\mathbf{A}}_k^* = \left[ \mathbf{A}_k^T, (\mathbf{F}_k^*)^T \right]^T \quad (4.67)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_k^* = [\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^*]^T, \mathbf{u}_k^* = \mathbf{f}_k^* - \mathbf{F}_k^* \mathbf{m}_{xk} \quad (4.68)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_k, 0]^T \quad (4.69)$$

benutzt. Gl. (4.66) fasst somit die beiden linearen Gln. (4.56) und (4.57) zusammen.

Der Erwartungsvektor des erweiterten Bildes wird ebenfalls aus zwei Vektoren zusammengesetzt,  $\bar{\mathbf{m}}_{xk+1} = [\mathbf{m}_{xk+1}, \mathbf{m}_{yk+1}]^T$ , wobei  $\mathbf{m}_{xk+1}$  aus Gl. (4.60) und  $\mathbf{m}_{yk+1}$  aus

$$\mathbf{m}_{yk+1} = \int f(\mathbf{x}_k) p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k^* \quad (4.70)$$

bestimmt werden.

Die Kovarianzmatrix des erweiterten Vektors (4.66) besteht in diesem Fall aus vier Blöcken:

$$\mathbf{P}_{\bar{x}k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xk+1} & \mathbf{P}_{xyk+1} \\ \mathbf{P}_{yxk+1} & \mathbf{P}_{yk+1} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{yxk+1} = \mathbf{P}_{xyk+1}^T \quad (4.71)$$

#### 4. Quasioptimale Rekonstruktionsalgorithmen

Die Matrix  $\mathbf{P}_{x_{k+1}}$  ist durch Gl. (4.61) gegeben. Die drei anderen Matrizen lassen sich wie folgt bestimmen. Für die Matrix  $\mathbf{P}_{y_{k+1}}$  gilt

$$\mathbf{P}_{y_{k+1}} = \int (f(\mathbf{x}_k) - f_k^*)(f(\mathbf{x}_k) - f_k^*)^T p_x(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (4.72)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (4.64) für die Linearisierungsmatrix kann diese Gleichung als

$$\mathbf{P}_{y_{k+1}} = \mathbf{F}_k^* \mathbf{P}_{x_k} (\mathbf{F}_k^*)^T \quad (4.73)$$

umgeschrieben werden.

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{xy_{k+1}}$  ist in allgemeiner Form durch

$$\mathbf{P}_{xy_{k+1}} = \iint (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{x_{k+1}})(f(\mathbf{x}_k) - f_k^*)^T p_x(\mathbf{x}_k) \pi_x(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1} \quad (4.74)$$

gegeben, wobei  $\pi_x(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$  die Übergangsverteilungsdichte des Prozesses (4.53) darstellt und die Form

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = c_{k+1} \exp\left[-0.5 \cdot [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k]^T \mathbf{Q}_k^{-1} [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_k]\right] \quad (4.75)$$

annimmt.

Um mit den oben eingeführten Bezeichnungen übereinzustimmen, wird das Beobachtungsmodell in der Form

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{H}}_{k+1}^* \bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \bar{\mathbf{t}}_{k+1}^* + \mathbf{v}_{k+1} \quad (4.76)$$

mit

$$\bar{\mathbf{H}}_{k+1}^* = [0, \mathbf{H}_{k+1}^*] \quad (4.77)$$

angegeben.

Im Ergebnis werden das linearisierte Modell des Prozesses (4.66) und das linearisierte Beobachtungsmodell (4.76) erhalten. Zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe kann der linearisierte Kalman-Filter-Algorithmus (4.12) – (4.16) benutzt werden. Da die Gleichungen in diesem Fall eine spezielle Block-Struktur aufweisen, kann die Berechnung des Gainkoeffizienten vereinfacht werden. Die vorhergesagte Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k+1,k}$  aus Gl. (4.15) kann in Analogie zur Gl. (4.71) ebenfalls in vier Blöcke zerlegt werden:

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x,k+1,k} & \mathbf{P}_{xy,k+1,k} \\ \mathbf{P}_{yx,k+1,k} & \mathbf{P}_{y,k+1,k} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{yx,k+1,k} = \mathbf{P}_{xy,k+1,k}^T. \quad (4.78)$$

Unter Verwendung von Gln. (4.14) und (4.77) kann gezeigt werden, dass die Matrix  $\mathbf{K}_{k+1}$  aus folgenden zwei Blöcken besteht:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x_{k+1}} \\ \mathbf{K}_{y_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xy,k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T \left[ \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{P}_{y,k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \\ \mathbf{P}_{y,k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T \left[ \mathbf{H}_{k+1}^* \mathbf{P}_{y,k+1,k} (\mathbf{H}_{k+1}^*)^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$



Eine Berücksichtigung dieser Struktur ermöglicht es, die numerischen Berechnungen zu reduzieren.

Es muss hier erwähnt werden, dass die vorgestellte Methode auch für die a posteriori stochastische Linearisierung verwendet werden kann. Alle Gleichungen lassen sich durch Ersetzen des a priori Erwartungswert  $\mathbf{m}_{x_k}$  und der a priori Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{x_k}$  durch die entsprechenden a posteriori Charakteristika herleiten.

Damit kann die in diesem Kapitel diskutierte Lösung der nichtlinearen Bildrekonstruktionsaufgaben als eine Verallgemeinerung der Lösung linearer Aufgaben aufgefasst werden. Das nächste Kapitel stellt beispielhaft die Anwendung der hier entwickelten Methoden dar. Dazu wird als Beispiel die Aufgabe der Rekonstruktion von mehrphasigen Strömungen betrachtet. Die entsprechenden nichtlinearen mathematischen Modelle werden konstruiert und praktisch anwendbare Algorithmen werden entwickelt.

## Literatur zum Kapitel 4

- 4.1. Jarlikov M.S., Mironov M.A. Markov Theorie der Estimation von stochastischen Prozessen (in Russisch). Radio i Svjaz, Moskau, 1993.
- 4.2. O. Loffeld. Estimationstheorie. Grundlagen und stochastische Konzepte. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1990.
- 4.3. Booton R.C. Nonlinear Control Systems with Random Inputs. Trans. IRE, Prof. group on circuit theory. PGIT-1, 1954.
- 4.4. Kasakov I.E. Approximative Methode der stochastischen Linearisierung von nichtlinearen Systeme (in Russisch). Trans. VVIA Zukovskogo, Vol. 394, 1954.
- 4.5. V. M. Artemiev. Theorie der dynamischen Systeme von Zufallsstruktur (in Russisch). Vishaya Shkola, Minsk, 1978.
- 4.6. Jazwinski A.H. Stochastic Process and Filtering Theory. Academic Press 1998.
- 4.7. Kasakov I.E. Statistische Theorie der Steuerungssysteme im Zustandsraum (in Russisch). Nauka, Moskau, 1975.

## 5. Einsatz der entwickelten Methode für die Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

### 5.1 Problemstellung

Die Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung, die durch ein Rohr fließt, ist von großer praktischer Bedeutung. Von besonderem Interesse ist dies in der Erdöl- und chemischen Industrie. Deshalb wird dieses Problem seit den 80'er Jahren untersucht. Zurzeit gibt es eine Reihe von Geräten und Systemen, die für diesen Anwendungsfall entwickelt und praktisch angewendet wurden. Die Charakteristika und eine Vergleichungsanalyse für diese Untersuchung sind in [5.1] dargestellt.

Im Rahmen des beschriebenen Problems können unter anderem folgende Aufgaben unterschieden werden: (i) Bestimmung der Form der Strömung, (ii) Bestimmung des prozentualen Anteils der einzelnen in der Strömung vorhandenen Phasen, (iii) Messung der Geschwindigkeit jeder Phase. Die entwickelten und zur Verfügung stehenden Systeme sind noch nicht in der Lage, die Strömungsform zu unterscheiden und die Geschwindigkeit separat zu messen. Außerdem gibt es noch Schwierigkeiten bei der Bestimmung des prozentualen Anteils einzelner Phasen in Echtzeit. In der Mitte der 90'er Jahre wurde vorgeschlagen, spezielle tomographische Techniken zur Lösung der oben genannten Probleme zu benutzen. Grundlage dieser Techniken bildet die Rekonstruktion des Strömungsquerschnittes. Die vorgeschlagenen Systeme basieren auf elektrischen Verfahren und benutzen Verfahren der Prozesstomographie [5.2]. Dabei wurden Standardrekonstruktionsverfahren verwendet, wie beispielsweise die gefilterte Rückprojektion. Die Anwendung dieser Technik ist mit der Forderung verknüpft, praktisch unmittelbar alle Projektionen desselben Strömungsquerschnittes zu messen und eine schnelle Bildrekonstruktion mit traditionellen Methoden anzuwenden [5.3, 5.4].

Für die oben erwähnten Zwecke werden selten radiographische Systeme benutzt, da sie vergleichsweise langsam bei der Datenaufnahme sind und große geometrische Abmessungen haben [5.5, 5.6].

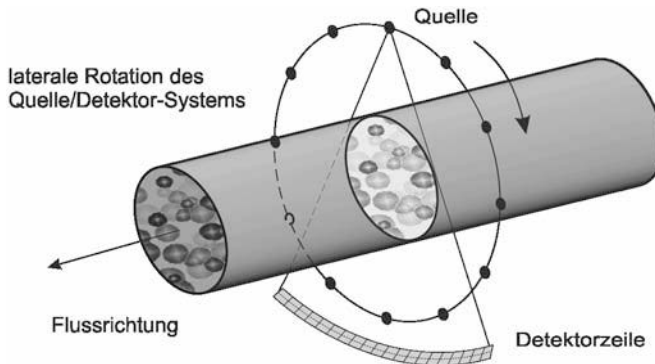
Die Forderung einer gleichzeitigen Messung von mehreren Projektionen führt zur Anwendung von Mehrkanalssystemen, d.h. mehrere Messkanäle sind in einer Ebene positioniert. Wegen konstruktiver Schwierigkeiten ist die Anzahl der Kanäle, die für die Datengewinnung eingesetzt werden können, wesentlich begrenzt. Für elektrische Tomographie-Systeme werden üblicherweise nicht mehr als 16 Kanäle benutzt; für die Röntgen-Tomographie stehen höchstens 5 Kanäle zur Verfügung [5.1]. Das beschränkt die Qualität der erhaltenen Rekonstruktionsbilder. Jedoch haben Röntgen-Tomographie-Systeme eine größere Zuverlässigkeit als vergleichbare elektrische Systeme und werden daher häufig vorzuziehen sein.

Die Anwendung der klassischen Rekonstruktionsverfahren ist einer der wichtigsten Faktoren, die die Möglichkeit der Rekonstruktion für Echtzeit-Systeme beschränkt [5.2, 5.7]. Diese Verfahren basieren auf der gleichzeitigen Behandlung aller Projektionen, ohne deren Abhängigkeit zu berücksichtigen. Diese Technik fügt sukzessive die in den Projektionen enthaltene Information dem Rekonstruktionsresultat hinzu, wobei jeder Rekonstruktions-schritt als unabhängig von dem vorangegangenen betrachtet wird.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Zugang zur Rekonstruktion vorgestellt, der auf den in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Methoden basiert. Sie ermöglicht die Rekonstruktion in Echtzeit und berücksichtigt die Abhängigkeit zwischen den nacheinander aufgenommenen Messungen.

Die Geometrie des betrachteten Beobachtungssystems ist *Abb. 5.1* zu entnehmen. Sie entspricht der Geometrie des Beobachtungssystems, das im ersten Kapitel eingeführt wurde. Ein entsprechendes mathematisches Modell wurde dort entwickelt. Wie schon erwähnt, entspricht diese Aufnahmegeometrie derjenigen, die bei medizinischen CT Anwendungen benutzt wird. Hier wird eine mehrphasige Strömung betrachtet, die durch ein Rohr fließt. Die mittlere Geschwindigkeit des Flusses wird als konstant angenommen. Im Weiteren beschränkt sich die Analyse auf eine der oben genannten Aufgaben, die Bestimmung des prozentualen Anteils jeder Phase. Der entsprechende Algorithmus, der es ermöglicht, den prozentualen Anteil jeder Phase in Echtzeit zu verfolgen und in der Praxis anwendbar ist, wird hier abgeleitet und diskutiert.



*Abb. 5.1. Schema des Beobachtungssystems.*

### 5.2 Mathematisches Modell einer mehrphasigen Strömung

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, ein mathematisches Modell einer mehrphasigen Strömung abzuleiten, das es ermöglicht, die oben entwickelte Methode zur Lösung der in dem vorhergehenden Abschnitt erwähnten Aufgaben anzuwenden.

Mehrphasige Objekte werden seit einiger Zeit intensiv untersucht. Eine Klassifikation derartiger Systeme ist [5.9] zu entnehmen. Drei verschiedene Typen mehrphasiger Strömungen werden in der vorliegenden Arbeit betrachtet. Im ersten Fall wird angenommen, dass der Fluss von der Gestalt eines homogenen Gemisches ist. In diesem Fall sind alle in der Strömung enthaltenen Phasen statistisch homogen gemischt, wie in *Abb. 5.2.a* dargestellt. Wenn die Phasekomponenten homogene Schichten formen, heißt der Fluss geschichtete Strömung. Ein schematisches Beispiel ist in *Abb. 5.2.b* dargestellt. In *Abb. 5.2.c* ist der letzte betrachtete Typ dargestellt, wobei jede Phasekomponente die Form eines Kreises annimmt. In dem ersten Fall hat das Bild des Querschnittes eine statistisch homogene räumliche Struktur. In den beiden letzteren Fällen sind die Bilder statistisch nicht homogen.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

Der Fluss wird als ein dynamischer Prozess betrachtet. Damit ergibt sich die Möglichkeit ein Modell in Form stochastischer Differenzgleichungen darzustellen, in dem die räumlichen und zeitlichen statistischen Charakteristika der Strömung berücksichtigt werden. Dies ermöglicht die Anwendung der entwickelten Rekonstruktionsverfahren, wie sie oben diskutiert wurden.

Weiterhin wird angenommen, dass die Struktur des Flusses sich mit der Zeit der Untersuchung nicht ändert, obwohl in dem Fluss jederzeit stochastische Änderungen erfolgen. In diesem Fall kann das a priori Wissen über die Struktur des Flusses im Modell berücksichtigt werden, um die Rekonstruktionsergebnisse zu verbessern.

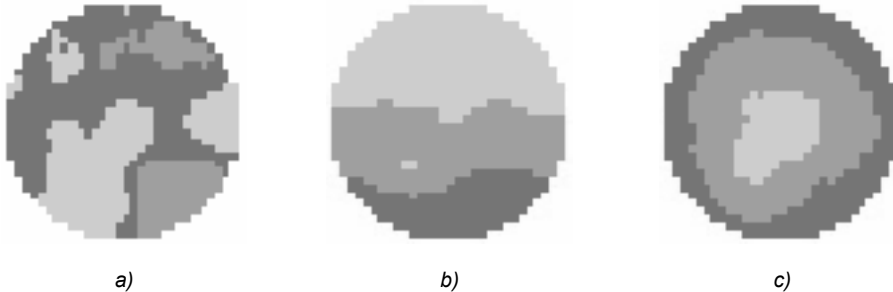


Abb. 5.2. Das Bild des Querschnittes mehrphasiger Strömung für verschiedene Formen: a – homogen gemischte, b – geschichtete, c – ringartige

Der mehrphasige Fluss wird als Gesamtheit von kleinen Volumenelementen (Voxeln) angesehen. Es wird davon ausgegangen, dass sich zu jedem Zeitpunkt in einem Volumenelement des Flusses, das einem Element des diskreten Bildes entspricht, nur eine der möglichen Phasekomponenten der Strömung befinden kann. Das heißt, dass der Grauwert des Bildes nur eine bestimmte Anzahl von Werten annehmen kann, da der betrachtete mehrphasige Fluss nur eine bestimmte Anzahl von Komponenten besitzt, und jeder Komponente genau ein Grauwert zugeordnet wird. Das bedeutet, dass die Prozesse nicht nur in der Zeit, sondern auch im Wertebereich diskret sind. Solche Prozesse werden Markov-Ketten genannt.

Ein mathematischer Ansatz zur Beschreibung von Markov-Ketten kann [5.10] entnommen werden. Dieser Ansatz erfordert die Anwendung spezieller mathematischer Techniken, die in der vorliegenden Arbeit nicht im Detail diskutiert werden sollen. Der zweite Ansatz beschreibt den Prozess als Markov-Folge, die anhand spezieller nichtlinearer Transformationen in einen diskreten Prozess überführt wird. Bei diesem Ansatz kann das zweistufige Modell, das in dem Kapitel 2 entwickelt wurde, zur Lösung der Aufgabe verwendet werden. Somit kann der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Rekonstruktionsalgorithmus für die Lösung der formulierten Aufgabe verwendet werden.

Ausgehend von der obigen Diskussion nimmt das Modell folgende Form an: In einem ersten Schritt wird ein Gauß'scher Prozess  $x_k$  erzeugt (vgl. Kapitel 2). Seine statistischen Charakteristika werden ähnlich dem dort betrachteten Beispiel angenommen. Im zweiten Schritt wird  $x_k$  durch eine spezielle nichtlineare Transformation in einen nichtlinearen Prozess  $y_k$  mit diskreten Grauwerten und bestimmten statistischen Charakteristika überführt. Das entspricht genau dem oben diskutierten zweistufigen Modell zur Erzeugung nichtlinearer dynamischer Bilder.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

Die Gleichung für den Gauß'schen Prozess wird wieder in Form einer linearen stochastischen Differenzgleichung angegeben

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (5.1)$$

mit Eigenschaften, die im ersten Kapitel eingeführt wurden. Das nichtlineare Bild wird dann durch die Transformation

$$\mathbf{y}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) \quad (5.2)$$

erzeugt, wobei  $f(\mathbf{x}_k)$  eine nichtlineare Funktion darstellt, die den Prozess mit kontinuierlichem Wertvorrat in einen Prozess mit diskretem Wertvorrat überführt.

An dieser Stelle wird ein einfaches lineares Beobachtungsmodell verwendet, das durch folgende Gleichung gegeben ist (siehe Kapitel 2)

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (5.3)$$

Im Weiteren wird die Gestalt der nichtlinearen Funktion  $f(\mathbf{x}_k)$  diskutiert. Für die Bestimmung der entsprechenden Transformationsvorschrift wird der Fall einer dreiphasigen Strömung betrachtet, d.h. der Grauwert kann drei mögliche Werte annehmen. Es wird vorausgesetzt, dass alle drei Werte a priori bekannt sind (in der Praxis, zum Beispiel, durch eine experimentelle Kalibrierung bestimmt wurden). Sie werden mit  $y^{(l)}$  bezeichnet, wobei  $l = 1, 2, 3$ . Um ein 3-phasiges Bild zu gewinnen, wird der lineare Prozess  $\mathbf{x}$  durch folgende Transformation umgewandelt:

$$y_{ik} = \begin{cases} y^{(1)}, & x_{ik} < x_{ik}^{(1)} \\ y^{(2)}, & x_{ik}^{(1)} \leq x_{ik} < x_{ik}^{(2)} \\ y^{(3)}, & x_{ik} \geq x_{ik}^{(2)} \end{cases}. \quad (5.4)$$

Hier bezeichnet der untere Index  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ , die Nummer des Bildelementes und  $k$  gibt den diskreten Zeitpunkt an. Die Transformation (5.4) überführt die Markov-Folge  $\mathbf{x}$  in eine Markov-Kette  $\mathbf{y}$ . Abb. 5.3 gibt eine anschauliche Darstellung der eingeführten Transformation. Wie aus Gl. (5.4) zu entnehmen ist, hängen die Werte  $x_{ik}^{(1)}$  und  $x_{ik}^{(2)}$  im Allgemeinen von beiden Parametern, also dem Index  $i$  und der Zeit  $k$  ab. Deren Auswahl wird (indirekt) durch die a priori Information bestimmt, wie im Weiteren gezeigt wird. Die nichtlineare Funktion (5.4) wandelt die Gauß'sche Verteilungsdichte des Grauwerts jedes Bildelementes

$$p(x_{ik}) = (2\pi p_{ik})^{-0.5} \exp[-0.5 p_{ik}^{-1} (x_{ik} - m_{ik})^2] \quad (5.5)$$

in eine nichtgauß'sche Verteilungsdichte  $p(y_{ik})$  um. Hier bezeichnet  $m_{ik}$  den Erwartungswert und  $p_{ik}$  die Dispersion des Grauwertes des  $i$ -ten Bildelementes  $x_{ik}$ . Die Verteilungsdichte des Bildelementes  $y_{ik}$  nimmt nach der Transformation die Form

$$p(y_{ik}) = \alpha_{ik}^{(1)} \delta(y_{ik} - y^{(1)}) + \alpha_{ik}^{(2)} \delta(y_{ik} - y^{(2)}) + \alpha_{ik}^{(3)} \delta(y_{ik} - y^{(3)}) \quad (5.6)$$

mit der Normierungsbedingung  $\alpha_{ik}^{(1)} + \alpha_{ik}^{(2)} + \alpha_{ik}^{(3)} = 1$  an. Die Verteilungsdichte des 3-phasigen Prozesses  $\mathbf{y}$  gehört zur a priori Information über diesen Prozess. Die bekannten/geschätzten Werte der Koeffizienten  $\alpha_{ik}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , sind dementsprechend in das

### 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

Modell einzufügen. Das erfolgt durch die Wahl der Schwellwerte  $x_{ik}^{(1)}$  und  $x_{ik}^{(2)}$ , sowie durch die Charakteristika des Gauß'schen Bildes  $m_{ik}$  und  $p_{ik}$ . Die Transformation des Verteilungsgesetzes ist in dem in *Abb. 5.4* dargestellten Schema erklärt. Ausgehend von der Gl. (5.4) folgt die Beziehung für die Berechnung der Werte  $\alpha_{ik}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}^{(1)} &= \int_{-\infty}^{x_{ik}^{(1)}} p(x_{ik}) dx_{ik} = 0.5 + \Phi\left(\frac{x_{ik}^{(1)} - m_{ik}}{\sqrt{p_{ik}}}\right), \\ \alpha_{ik}^{(2)} &= \int_{x_{ik}^{(1)}}^{x_{ik}^{(2)}} p(x_{ik}) dx_{ik} = \Phi\left(\frac{x_{ik}^{(2)} - m_{ik}}{\sqrt{p_{ik}}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{ik}^{(1)} - m_{ik}}{\sqrt{p_{ik}}}\right), \\ \alpha_{ik}^{(3)} &= \int_{x_{ik}^{(2)}}^{+\infty} p(x_{ik}) dx_{ik} = 0.5 - \Phi\left(\frac{x_{ik}^{(2)} - m_{ik}}{\sqrt{p_{ik}}}\right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei mit  $\Phi(z)$  das Wahrscheinlichkeitsintegral  $\Phi(z) = (2\pi)^{-0.5} \int_{-\infty}^z \exp(-0.5t^2) dt$  mit  $\Phi(-z) = -\Phi(z)$  bezeichnet ist. Die Funktionen  $\alpha_{ik}^{(l)}$  geben die Wahrscheinlichkeit an, dass das  $i$ -te Bildelement  $y_{ik}$  zum Zeitpunkt  $k$  im  $l$ -ten Phasenzustand ist, d.h. den Wert  $y^{(l)}$  annimmt. Gl. (5.7) zeigt den Zusammenhang zwischen ihnen und den Parametern des mathematischen Modells.

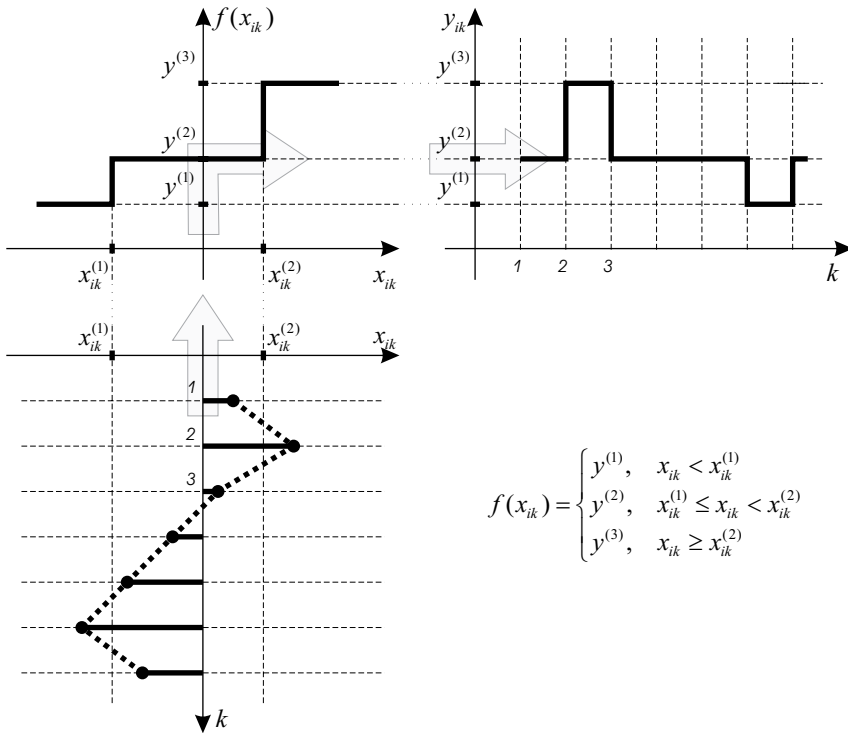


Abb. 5.3. Prozess der Erzeugung eines dreiphasigen Bildes.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

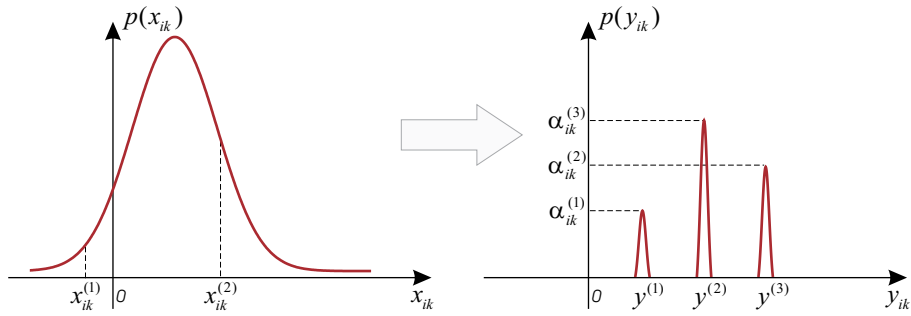


Abb. 5.4. Zusammenhang zwischen den Verteilungsdichtefunktionen von ursprünglichen und erzeugten Bildern.

### 5.3 Algorithmus für die Bestimmung der Konzentration von Phasen in mehrphasigen Strömungen

Wie schon erwähnt, bildet die Rekonstruktion des Strömungsquerschnittes die Grundlage für die Lösung der in diesem Kapitel betrachteten Aufgabe der Bestimmung des prozentualen Anteils von den in der Strömung vorhandenen Phasen. Um den Querschnitt zu rekonstruieren wird das im vorhergehenden Abschnitt betrachtete Rekonstruktionsverfahren benutzt.

Da das Prozessmodell, das im vorhergehenden Abschnitt vorgestellt wurde, nichtlinear und zweistufig ist, wird im Weiteren die Rekonstruktionsmethode verwendet, die auf der a priori statistischen Linearisierung basiert, wie sie im Kapitel 4 diskutiert wurde. Der erste Schritt dieser Methode besteht in der Berechnung der Matrix und des Vektors der statistischen Linearisierung für die nichtlineare Funktion (5.4). Der Vektor der stochastischen Linearisierung wird nach Gl. (4.24) ermittelt. Für die hier betrachtete Aufgabe gilt für seine Elemente

$$t_{ik}^* = \langle f_i(x_{ik}) \rangle = \int f_i(x_{ik}) p(x_{ik}) dx_{ik}, \quad (5.8)$$

wobei  $p(x_{ik})$  die Gauß'sche Verteilungsdichte (5.5) ist. Nach Einsetzen in Gl. (5.8) und Integration ergibt sich

$$t_{ik}^* = \sum_{l=1}^3 \alpha_{ik}^{(l)} \cdot y^{(l)}, \quad (5.9)$$

wobei die Funktionen  $\alpha_{ik}^{(l)}$  im vorhergehenden Abschnitt diskutiert wurden.

Da die nichtlineare Funktion des Bildmodells eindimensional ist, ist die Matrix  $\mathbf{F}_{ik}^*$  der Koeffizienten der statistischen Linearisierung eine Diagonalmatrix, d.h.  $\mathbf{F}_{ik}^* = \text{diag} \left[ f_{ik}^* \right]$ . Die Matrix der Koeffizienten der statistischen Linearisierung ist Gl. (4.30) zu entnehmen. Für die hier betrachtete Aufgabe ergibt sich

$$f_{ik}^* = \left[ \langle f_{ik}^2(x_{ik}) \rangle - \langle f_{ik}(x_{ik}) \rangle^2 \right]^{0.5} \cdot p_{ik}^{-0.5},$$



## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

wobei  $p_{ik}$  die Diagonalelementen der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  des Bildes bezeichnen. Nach Einsetzen der Funktionen (5.4) sowie (5.5) und Integration, ergibt sich

$$f_{ik}^* = \left[ \sum_{l=1}^3 \alpha_{ik}^{(l)} \cdot (y^{(l)})^2 - (t_{ik}^*)^2 \right]^{0.5} \cdot p_{ik}^{-0.5}. \quad (5.10)$$

Somit wird das Modell des dynamischen Bildes, das anhand der Gleichungen (5.1) und (5.2) gegeben ist, durch ein linearisiertes Modell ersetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{t}_{k+1}^* + \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{x}_{k+1} \end{aligned}$$

wobei der Vektor  $\mathbf{t}_k^* = [t_{1k}^*, t_{2k}^*, \dots, t_{Sk}^*]^T$  die Elemente (5.8) enthält und die diagonale Matrix  $\mathbf{F}_k^*$  aus Gl. (5.10) folgt.

Nach Einsetzen der ersten Gleichung in die letztere und unter Berücksichtigung des Beobachtungsmodells, ergibt sich folgendes linearisiertes Gleichungssystem

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{A}_k (\mathbf{F}_{k+1}^*)^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{u}_k + \mathbf{t}_{k+1}^* + \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{w}_k, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (5.12)$$

An dieser Stelle kann die Rekonstruktionsaufgabe wie folgt formuliert werden: Das linearisierte Modell des Bildes (5.11) und das Beobachtungsmodell (5.12) sind gegeben. Zur Rekonstruktion wird ein optimaler (quasioptimaler) Algorithmus benutzt, der die Minimierung der Funktion des a posteriori Risikos mit der Verlustfunktion

$$\varphi_k = (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^T (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (5.13)$$

garantiert.

Die Gleichung der optimalen Rekonstruktion nimmt die Form

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \arg \min_{\hat{\mathbf{y}}_k} \int (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^T (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \hat{p}(\mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k$$

an, wobei  $\hat{p}(\mathbf{y}_k)$  die a posteriori Verteilungsdichte bezeichnet. Es ist bekannt, dass diese Gleichung folgende Lösung hat (siehe Kapitel 3)

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \int \mathbf{y}_k \hat{p}(\mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k. \quad (5.14)$$

Bei der statistischen Linearisierung wird die a posteriori Verteilungsdichtefunktion  $\hat{p}(\mathbf{y}_k)$  durch eine Gaußsche Funktion approximiert. Sie ist durch den Vektor des a posteriori Erwartungswertes und die a posteriori Kovarianzmatrix vollständig bestimmt. Daraus folgt, dass für die Berechnung der optimalen Schätzung, die durch Gl. (5.14) gegeben ist, der Kalman-Filter zu verwenden ist, da durch Anwendung dieses Filters die Gaußsche a posteriori Verteilungsdichte gewonnen werden kann. Somit führt die vorgeschlagene Technik zur Anwendung des Kalman-Filters als Basis für den Rekonstruktionsalgorithmus.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

Der Kalman-Filter (4.9)–(4.13) nimmt jetzt folgende Form an

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \hat{\mathbf{y}}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}^* - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1,k} \right], \quad (5.15)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1,k} = \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \left( \mathbf{F}_{k+1}^* \right)^{-1} \hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{u}_k + \mathbf{t}_{k+1}^*, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1,k} \left( \mathbf{H}_{k+1} \right)^T \left[ \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1,k} \left( \mathbf{H}_{k+1} \right)^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \left( \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \left( \mathbf{F}_{k+1}^* \right)^{-1} \right) \mathbf{P}_k \left( \mathbf{F}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \left( \mathbf{F}_{k+1}^* \right)^{-1} \right) + \mathbf{Q}_k, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1,k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1,k}. \quad (5.19)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert den a posteriori Erwartungswert und die a posteriori Kovarianzmatrix. Aus diesen Daten kann schließlich die a posteriori Verteilungsdichte in Gauß'scher Näherung bestimmt werden

$$\hat{p}(\mathbf{y}_k) = \left[ (2\pi)^s \det \mathbf{P}_k \right]^{-0.5} \cdot \exp \left[ -0.5 (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \right]. \quad (5.20)$$

Die Schätzung von  $\hat{\mathbf{y}}_k$  liefert nur den Mittelwert des Grauwertes. Nach dem eingeführten Modell kann der Grauwert aber nur drei bestimmte Werte annehmen. Darum besteht der nächste Schritt in der optimalen Wahl eines von drei möglichen Werten aufgrund der a posteriori Verteilungsdichte (5.20). Um diese Aufgabe zu lösen wird folgendes Kriterium eingeführt

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \arg \min_{\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbf{y}_k^{(1)}} \int (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^T (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \hat{p}(\mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k. \quad (5.21)$$

Dieses Kriterium führt zur Auswahl desjenigen Wertes, für den die a posteriori Dispersion des Fehlers minimal ist. Nach der Rekonstruktion des diskreten Bildes  $\bar{\mathbf{y}}_k$  kann die a posteriori Konzentration der Phasen  $\hat{\alpha}_k^{(1)}$  aus der Anzahl der Bildelemente bestimmt werden, die jeweils einer Phase zugeordnet sind, bezogen auf die Gesamtzahl der Bildelemente  $S$ .

Auf diese Weise kann das gestellte Problem der Bestimmung der Konzentration von Phasen in einer mehrphasigen Strömung unter Anwendung des Kalman-Filters (5.15)–(5.19), der Gl. (5.20) für die a posteriori Verteilungsdichte und der Gl. (5.21) für die Estimation von diskreten Werten, gelöst werden.

### 5.4 Rekonstruktion des Bildes und Bestimmung der Phasenkonzentration in Strömungen verschiedener Typen.

In diesem Abschnitt wird die Anwendbarkeit des oben beschriebenen Algorithmus für die Rekonstruktion von dreiphasigen Strömungen gezeigt. Dafür werden Beispiele für die Rekonstruktion des Querschnittes und für die Bestimmung der Konzentration jeder Strömungsphase vorgestellt. Die Aufgabe wird für alle drei oben betrachteten Strömungstypen (siehe Abschnitt 5.2) gelöst: homogen gemischter, geschichteter und ringartiger Typ. Diese drei Typen sind in *Abb. 5.2* dargestellt.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

Für die Erzeugung des dreiphasigen Bildes wird das in Abschnitt 2.7 (siehe *Abb. 2.4*) diskutierte zweistufige Modell verwendet. Als erste Stufe dient ein Gauß'sches Bild, das durch Gl. (5.1) gegeben ist. Der Erwartungswert des Bildes wird zu Null, die Korrelationszeit zu 40 und der Kovarianzradius zu 8 gewählt. Die Erzeugung dieses Bildes wurde im zweiten Kapitel dieser Arbeit grundsätzlich diskutiert.

In der zweiten Stufe ist das ursprüngliche lineare Bild einer nichtlinearen Transformation der Form (5.4) zu unterziehen, um ein nichtlineares dreiphasiges Bild zu erhalten. Zur Veranschaulichung des Algorithmus, wird er in der Praxis in zwei Schritte unterteilt.

Zunächst erfolgt im ersten Schritt die Transformation

$$\tilde{x}_k = x_k + m_{y_k}, \quad (5.22)$$

wobei  $m_{y_k}$  der Erwartungsvektor des zu erzeugenden nichtlinearen Bildes ist. Durch die Wahl des Vektors  $m_{y_k}$  kann die gewünschte Strömungsform in das Modell eingeführt werden. Tatsächlich bedeutet das, wenn der Fluss eine bestimmte Struktur hat, dass für einen beliebigen Pixel einer der möglichen Grauwerte eine wesentlich größere Wahrscheinlichkeit hat im Vergleich zu den Anderen. Der Definition des Erwartungswertes zufolge wird sich der mittlere Grauwert dieses Pixels von dem Grauwert mit der größten Wahrscheinlichkeit kaum unterscheiden. Diese Aussage ermöglicht es, die Struktur der Strömung im Erwartungswert  $m_{y_k}$  widerzuspiegeln. In *Abb. 5.5* ist die Struktur dieses Vektors für jede der betrachteten Strömungsformen dargestellt. Da der homogen gemischte Fluss keine bestimmte Struktur aufweist, haben die Pixels des in *Abb. 5.5 a* dargestellten Bildes alle den gleichen Grauwert. Bei den beiden anderen Bildern ist die Struktur deutlich zu sehen. Es sei an dieser Stelle nochmals erwähnt, dass die Erwartungswerte a priori bekannt sind oder geschätzt wurden. *Abb. 5.6* zeigt die durch die Transformation (5.22) erhaltenen vorläufigen Bilder  $\tilde{x}_k$ .

Schließlich wird auf das Bild  $\tilde{x}_k$  folgende Transformation angewendet

$$y_{ik} = \begin{cases} y^{(1)}, & \tilde{x}_{ik} < x_k^{(1)} \\ y^{(2)}, & x_k^{(1)} \leq \tilde{x}_{ik} < x_k^{(2)} \\ y^{(3)}, & \tilde{x}_{ik} \geq x_k^{(2)} \end{cases}. \quad (5.23)$$

Es sei hier darauf hingewiesen, dass in dieser Transformation die Schwellwerte  $x_k^{(1)}$  und  $x_k^{(2)}$  nicht mehr von der Nummer des Bildelementes abhängen. Deren Werte, wie im Abschnitt 5.2 diskutiert, werden derart gewählt, um ein bestimmtes Verteilungsgesetz für das erzeugte nichtlineare Bild sicherzustellen.

Die in *Abb. 5.2* dargestellten dreiphasigen Bilder geben Beispiele für die Anwendung der beschriebenen Methode an.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

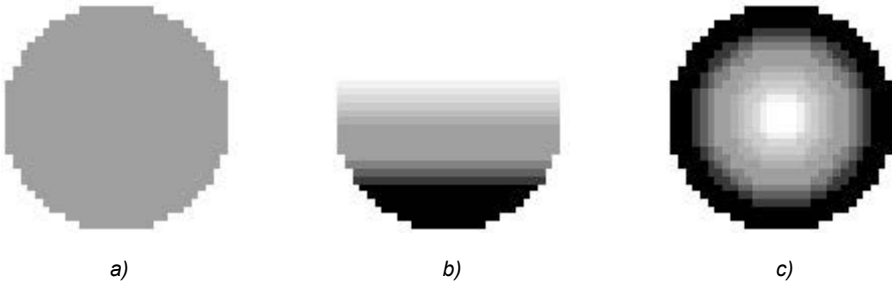


Abb. 5.5. Erzeugung des nichtlinearen Bildes.  
Die Struktur des Erwartungsvektors für verschiedene Strömungsformen:  
a – homogen gemischte, b – geschichtete, c – ringartige

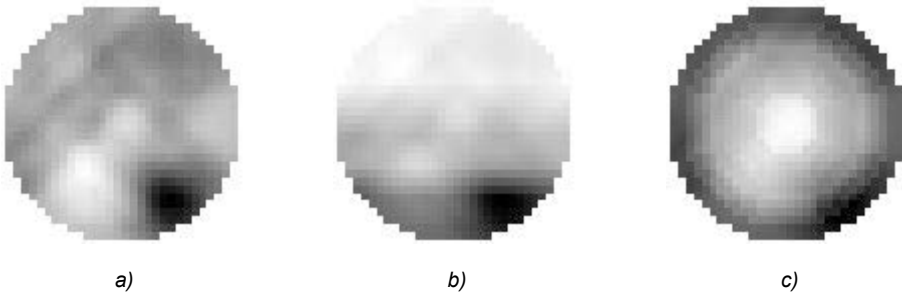


Abb. 5.6. Erzeugung des nichtlinearen Bildes.  
Vorläufige Bilder für verschiedene Strömungsformen:  
a – homogen gemischte, b – geschichtete, c – ringartige

Als Beobachtungsmodell wird das durch Gl. (5.3) gegebene lineare Modell verwendet. Die Geometrie des Beobachtungsmodells entspricht dem im Abschnitt 5.1 diskutierten Aufnahmesystem. Die Berechnungen werden für verschiedene Anzahlen von in einem Schritt aufgenommenen Projektionen durchgeführt und die Ergebnisse werden miteinander verglichen.

Für die Rekonstruktion wird die Methode der a priori statistischen Linearisierung (siehe Kapitel 4) angewendet. Der Algorithmus zur Bestimmung des Vektors und der Matrix der statistischen Linearisierung wurde in Abschnitt 5.3 diskutiert.

Die Lösung der gestellten Rekonstruktionsaufgabe erfolgt in drei Etappen. Zunächst wird mit Hilfe des modifizierten Kalman-Filter-Algorithmus (5.15)–(5.19) die a posteriori Verteilungsdichte in Gauß'scher Näherung berechnet. Daran schließt sich, in Übereinstimmung mit Gl. (5.21), die Rekonstruktion des dreiphasigen Bildes an. Aus dem erhaltenen Rekonstruktionsergebnis wird schließlich die Konzentration jeder Phase gewonnen.

Abb. 5.7 zeigt Beispiele für die Rekonstruktion eines dreiphasigen Bildes und Abb. 5.8 stellt die Konzentration jeder Phase im Ausgangsbild den durch die Rekonstruktion erhaltenen Werten gegenüber.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

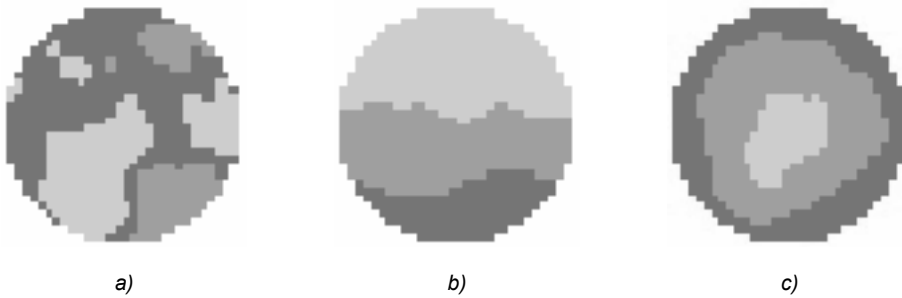


Abb. 5.7. Die Rekonstruktion des dreiphasigen Bildes für verschiedene Strömungsformen: a – homogen gemischte, b – geschichtete, c – ringartige

Alle hier vorgestellten Ergebnisse sind für den Fall erhalten, dass in jedem Rekonstruktionsschritt fünf Projektionen verwendet werden. Um zu zeigen, wie die Qualität der Rekonstruktion von der Anzahl der in einem Schritt benutzten Projektionen abhängt, werden in Abb. 5.9 die Fehlerkurven für die Fälle verglichen, wenn eine, fünf und fünfzig Projektionen pro Schritt verwendet werden. Dieser Graph zeigt, dass mit dem Anwachsen der Anzahl benutzter Projektionen pro Rekonstruktionsschritt die Qualität der Rekonstruktion wesentlich verbessert wird. Diesem Bild ist auch zu entnehmen, dass sich der Fehler der Rekonstruktion nach einer bestimmten Zeit stabilisiert, also der Rekonstruktionsprozess einen stationären Zustand erreicht. Dieses Phänomen wurde bereits in Abschnitt 4 diskutiert.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

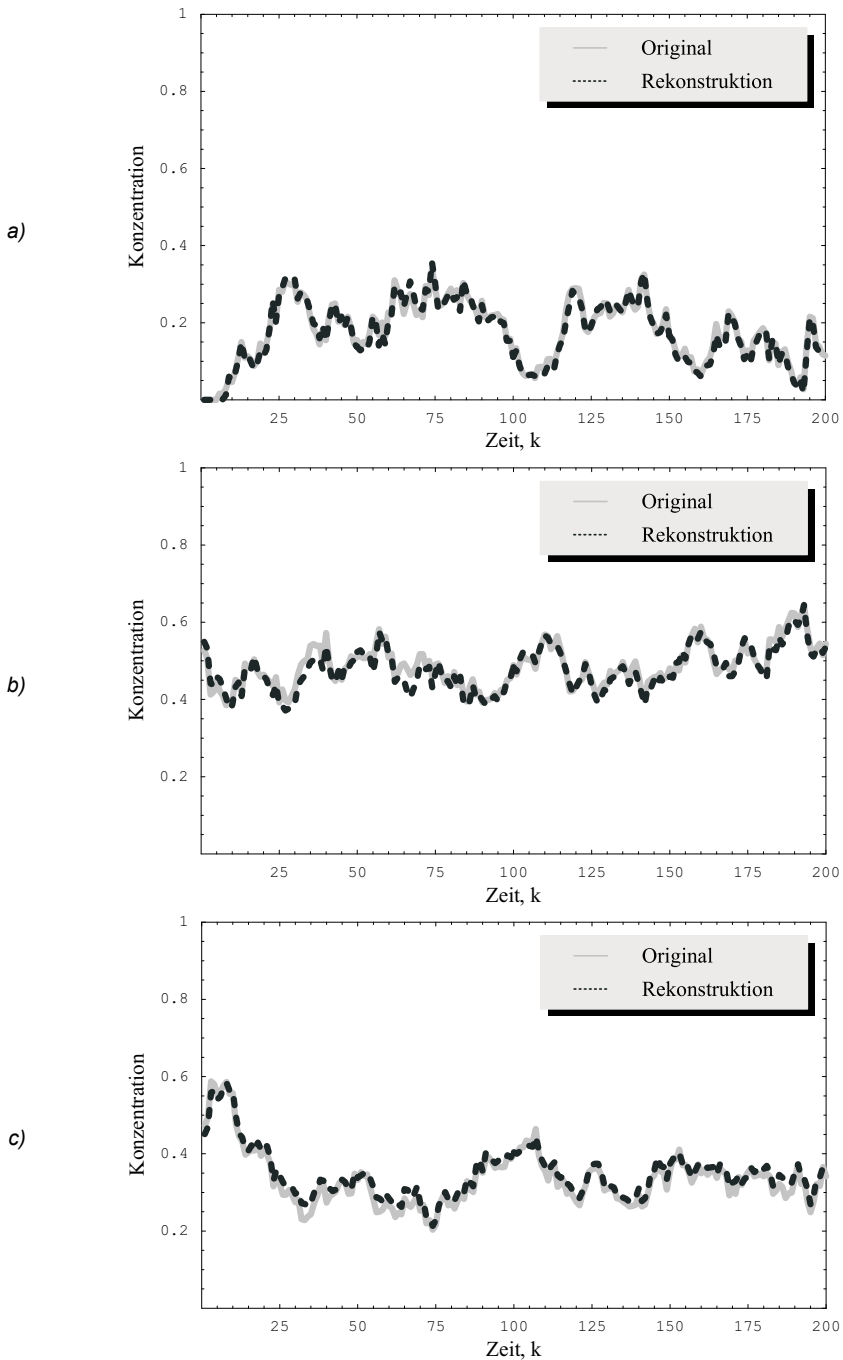


Abb. 5.8. Die Rekonstruktion des prozentualen Anteils der in dreiphasigen Strömung erhaltenen Phasen: a) – Phase 1, b) – Phase 2, c) – Phase 3.

## 5. Bestimmung von Charakteristika einer mehrphasigen Strömung

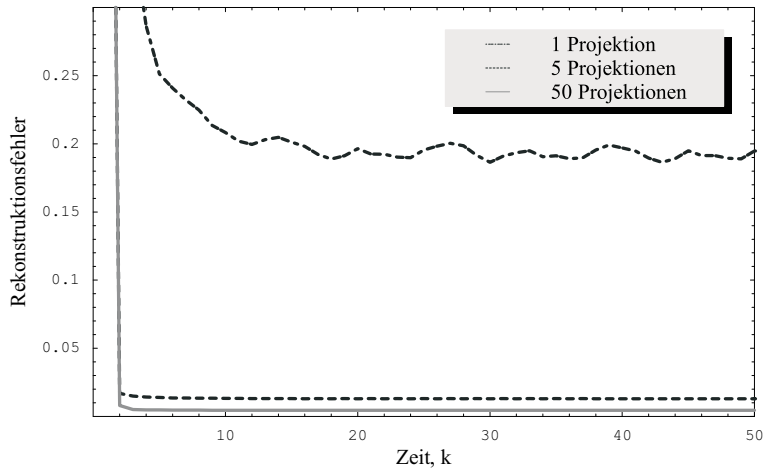


Abb. 5.9. Die Abhängigkeit der Qualität der Rekonstruktion von der Anzahl den in einem Schritt benutzten Projektionen.

## Literatur zum Kapitel 5

- 5.1. Thorn R., Johansen G.A. and Hammer E.A. *Recent developments in three-phase flow measurement*. 1997, Meas. Sci. and Technol., 8, 7, 691 – 701.
- 5.2. Williams R.A., Beck M.S. *Process Tomography – Principles, Techniques and Applications*, 1995, Butterworth Heinemann.
- 5.3. Williams R.A., Xie C.-G. *Tomographic Technique for Characterization Particular Processes*. 1993, Par. Sgst. Charact. 10, 252-261.
- 5.4. Dyakowski T., Edwards R.B., Xie C.-G., Williams R.A. *Application of Capacitance Tomography to Gas – solids Flows*. 1997, Chem. Eng. Sci., 52(13), 2099-2110
- 5.5. Thorn R., Johansen G.A. and Hammer E.A. *Three Phase Flow Measurement in the Offshore Oil Industry*. Proc. of the 1-st Congress on Industrial Tomography, Buxton, UK, April 1999.
- 5.6. Toge D., Marchot P., Crine M., Pelseer A.-M., L'Homme G. *Local Measurement of Void Fraction and Liquid Holdup in Packet Columns Using X-ray Computed Tomography*. 1998, Chem. Eng. Process, 37(6), 511-520.
- 5.7. Peng L., Xiao D., Zhang B. *Registration Based Image Reconstruction for Electrical Capacitance Tomography*. Proc. 2-nd World Conf. On Industrial Process Tomography, Hannover, Germany, August 2001.
- 5.8. Barsett H., Swindell W. *Radiological Imaging. The theory of Image Formation, Detection and Processing*. 1981, NY, Academic Press.
- 5.9. Hesteroni G. *Handbook of Multiphase Systems*. 1982, Washington – London: Hemisphere.
- 5.10. Jarlikov M.S., Mironov M.A. Markov *Theorie der Estimation von stochastischen Prozessen (in Russisch)*. Radio i Svjaz, Moskau, 1993.



## 6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden neue Ansätze für die Anwendung tomographischer Verfahren entwickelt, die in der Lage sind, Charakteristika dynamischer Prozesse orts- und zeitaufgelöst zu erfassen. Dabei wurden für das Prozess- sowie das Abbildungsmodell allgemeine nichtlineare Zusammenhänge zugelassen, so dass die bei der klassischen Computertomographie verwendete Annahme der Linearität des Projektionsmodells, üblicherweise ausgedrückt durch die Radon-Transformation, sowie des Abbildungssystems, was zwangsläufig zu einer Einschränkung der Anwendbarkeit klassischer Rekonstruktionsverfahren führt, in dieser Arbeit überwunden wurde. Das klassische lineare Rekonstruktionsproblem wurde in ein nichtlineares Problem überführt und Methoden zur Lösung dieser nichtlinearen Aufgabe speziell angepasst an die Rekonstruktion dynamischer Prozesse entwickelt. Bei Beschränkung auf strahlendiagnostische Verfahren wurden entsprechende Ansätze zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe abgeleitet und getestet, was die Allgemeinheit der verwendeten nichtlinearen Methoden nicht einschränkt. Die Zielsetzung der Arbeit bestand darin, ein Verfahren zu entwickeln, das zur Rekonstruktion dynamischer Charakteristika in Echtzeit benutzt werden kann.

Für die Beschreibung eines dynamischen Prozesses wurde ein Zustandsraummodell gewählt, wobei die in der Estimationstheorie übliche Darstellung eines dynamischen Prozesses als Markov-Prozess verwendet wurde. Das Prozessmodell sowie das Beobachtungsmodell, das die messtechnische Erfassung des dynamischen Prozesses mit Hilfe eines Beobachtungssystems beschreibt, lassen Nichtlinearitäten zu. Im speziellen wurde ein zweistufiges nichtlineares mathematisches Modell entwickelt, welches es beispielsweise ermöglicht, eine mehrphasige Strömung zu beschreiben. Das Modell trägt phänomenologischen Charakter und berücksichtigt die dem Prozess zugrunde liegenden statistischen Charakteristika. Somit ist das Modell vom physikalischen Prinzip der Entstehung des untersuchten Prozesses unabhängig und kann deswegen zur Lösung verschiedener Aufgaben angepasst werden.

Die Grundlage für die hier entwickelten Rekonstruktionsalgorithmen bildet die statistische Estimationstheorie. Desweiteren wurde davon ausgegangen, dass die in der Praxis auftretenden Probleme in guter Näherung Markov-Eigenschaften besitzen, was die Darstellung des entsprechenden dynamischen Prozesses als eine Markov-Folge bei Annahme einer diskreten Zeitachse ermöglicht. Die aus der statistischen Estimationstheorie bekannten Algorithmen zur Rekonstruktion von Markov-Prozessen haben im Vergleich zu traditionellen Rekonstruktionsverfahren einige Vorteile. Hier sei auf die beiden im Rahmen dieser Arbeit wichtigsten hingewiesen: (i) Alle während der Datenaufnahme aufgenommene Informationen werden bei der Rekonstruktion akkumuliert und (ii) vorhandenes statistisches a priori Wissen kann bei der Rekonstruktion berücksichtigt werden. Der erstgenannte Vorteil bedeutet, dass Aussagen über den aktuellen Zustand des Objektes unter Berücksichtigung aller vorhandenen Messdaten getroffen werden, d.h. es werden nicht nur die zum gegenwärtigen Zeitpunkt erhaltenen Projektionen zur Beschreibung des aktuellen Zustandes berücksichtigt sondern alle während der gesamten Untersuchungsdauer erhalten bzw. akkumulierten Projektionen beeinflussen die Qualität der Rekonstruktion. Entsprechend sind die entwickelten Algorithmen rekursiv. Dies ermöglicht die Rekonstruktion der Objekt- bzw. Systemeigenschaften aus unzureichenden Messdaten in Echtzeit. In der Praxis hat

## 6. Zusammenfassung

dies große Bedeutung, denn die zur Verfügung stehenden Anlagen sind wegen ihres Arbeitsprinzips nicht in der Lage, einen den aktuellen Zustand vollständig beschreibenden Satz von Projektionen aufnehmen. Als Resultat folgt, dass eine Verknüpfung der Akkumulation von Information über das zu untersuchende Objekt bzw. System, die in den Messdaten enthalten ist, mit vorhandenem a priori Wissen die Möglichkeit eröffnet, eine bessere Qualität und Anwendbarkeit im Vergleich zu traditionellen linearen Rekonstruktionsalgorithmen zu erreichen, die auf dem Vorhandensein eines den Objektzustand vollständig beschreibenden Datensatzes basieren.

Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit entwickelten Rekonstruktionsalgorithmen bildete der klassische Kalman-Filter. Dieser Filter stellt den optimalen Filter für den linearen Fall dar. Einer der entscheidenden Vorteile des Kalman-Filters besteht darin, dass sowohl die Riccati-Gleichung als auch die Gleichung für die Kovarianzmatrix, deren Lösung erheblichen numerischen Aufwand erfordert, von den Messdaten unabhängig sind und dementsprechend unabhängig von der rekursiven Filter-Gleichung gelöst werden können. Während der Rekonstruktion ist lediglich die Filter-Gleichung unter Verwendung der vorab bestimmten Gain-Koeffizienten und Kovarianzmatrix zu berechnen, was eine Echtzeitanwendung dieser Filtertechnik erlaubt. Zur Behandlung nichtlinearer Probleme wurde der klassische Kalman-Filter modifiziert und erweitert, wobei zur Lösung nichtlinearer Aufgaben die zugrunde liegenden Gleichungen häufig linearisiert werden. Dazu wurden in der Arbeit verschiedene Linearisierungsmethoden vorgestellt und verglichen. Besondere Aufmerksamkeit galt dabei den stochastischen Linearisierungsmethoden, die dem Charakter des betrachteten Problems am ehesten entsprechen. Es hat sich gezeigt, dass die Modifikation und Erweiterung des Kalman-Filters unter Verwendung der a priori stochastischen Linearisierung für die Lösung der nichtlinearen Rekonstruktionsaufgabe in Echtzeit am besten geeignet ist. Dabei bleibt der o.g. Vorteil des linearen Kalman-Filters erhalten, dass die Gleichungen für die Gain-Koeffizienten und für die Kovarianzmatrix unabhängig von den Messungen sind und vorab gelöst werden können.

Die Anwendbarkeit der entwickelten Rekonstruktionsmethoden wurde anhand der Rekonstruktion einer mehrphasigen Strömung, die durch ein Rohr fließt, untersucht. Von besonderem Interesse ist dieses Problem beispielsweise in der Erdöl- und chemischen Industrie. Im Einzelnen wurde gezeigt, wie für diesen konkreten nichtlinearen Prozess ein mathematisches Modell konstruiert werden kann, welches die statistischen Charakteristika des Flusses berücksichtigt. Es basiert auf dem eingeführten zweistufigen nichtlinearen Prozessmodell, das aus einem linearen Gauß'schen Modell und einer nichtlinearen Transformation in Form einer Stufenfunktion zusammengesetzt ist. Ausgehend von diesem nichtlinearen Prozessmodell wurde auf der Basis der entwickelten Theorie ein Rekonstruktionsalgorithmus abgeleitet, der die a priori stochastischen Linearisierung verwendet.

Die vorgestellten Untersuchungen haben gezeigt, dass die Ergebnisse der Rekonstruktion hinreichend mit den Modelldaten übereinstimmen. Dabei hat sich ergeben, dass nach einer gewissen Übergangszeit, die durch die Korrelationszeit des betrachteten Prozesses gegeben ist, der Rekonstruktionsfehler einen konstanten Wert annimmt und im Weiteren nur geringen Schwankungen unterliegt. Insbesondere wurde untersucht, welchen Einfluss die Anzahl der zum aktuellen Zeitpunkt aufgenommenen Projektionen auf die Qualität der Rekonstruktion hat. Als Schlussfolgerung ergab sich, dass selbst für den Fall, dass die vorhandene Messtechnik in der Lage ist, nur eine Projektion pro Zeitpunkt zu liefern, der

prozentuale Anteil der einzelnen in der Strömung vorhandenen Phasen mit für die Praxis hinreichender Genauigkeit, d.h. mit einem Fehler von 20 %, bestimmt werden kann. In dem Fall, wenn pro Zeitpunkt fünf Projektionen geliefert werden können, liegt der Fehler unter einem Prozent. Hierzu wurde als Beispiel eine dreiphasige Strömung gewählt. Durch Modifikation der nichtlinearen Transformationsvorschrift kann die Anwendbarkeit der abgeleiteten Algorithmen erweitert werden. Das verwendete Beispiel hat gezeigt, dass die entwickelten Algorithmen für Echtzeitanwendungen in der industriellen Praxis geeignet ist, wenn entsprechenden Meßsysteme zur Verfügung stehen.

Aufgrund der gewählten Beschreibung des direkten Problems in Form allgemeiner nichtlinearer Ausdrücke für das Prozessmodell und für das Beobachtungsmodell können die hier entwickelten Techniken auf andere als radiographische Projektionsverfahren übertragen werden. Im Allgemeinen können mit der vorgestellten Formulierung Nichtlinearitäten sowohl im zu untersuchenden (dynamischen) Prozess als auch im gewählten Abbildungsverfahren berücksichtigt werden. In diesem Sinne können die hier entwickelten Methoden für verschiedenste Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften adaptiert werden.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter an der Bundesanstalt für Materialforschung und –prüfung (BAM) in Berlin. Die Projektgruppe, in der ich gearbeitet habe, trägt den Name “Modellierung und Rekonstruktion für die zerstörungsfreie Prüfung”.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Für die verständnisvolle Förderung sowie die fachlichen Diskussionen und Ratschläge möchte ich Herrn Dr. rer. nat. et Ing. habil. G.-R. Jaenisch, dem Leiter der oben genannten Projektgruppe sowie auch Prof. V. Artemiev aus dem Institut für Angewandte Physik der Nationale Akademie der Wissenschaften (IAPH), Minsk, Belarus, meinen besonderen Dank aussprechen. Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. H.-J. Ullrich, TU Dresden, Institut für Werkstoffwissenschaft, Fakultät Maschinenwesen danke ich für das entgegengebrachte Interesse und die freundliche Unterstützung.

Danken möchte ich auch allen Kollegen, die in den beiden oben erwähnten Instituten arbeiten, und durch ihre Hilfsbereitschaft und wertvollen Hinweise am Fortgang der Arbeit beteiligt waren. Dabei möchte ich besonders Dr.-Ing. C. Bellon (BAM) und Dr. A. Naumov (IAPH) nennen. Die Zusammenarbeit mit ihnen hat mir bei Anfertigung der Dissertation sehr geholfen.