Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

Marc C. Steinbach

# Autos, Ziegen und Streithähne

00-40 (Juli 2000)

# Autos, Ziegen und Streithähne

Marc C. Steinbach

## Zusammenfassung

Das aus den Medien bekannte umstrittene Ziegenproblem (auch Drei-Türen-Problem genannt) wird vollständig analysiert und gelöst. In der Streitfrage spielen sprachliche Mehrdeutigkeiten der Problemformulierung eine wesentliche Rolle; zudem werden Zufallsereignisse mit willkürlicher Information über deren Ergebnisse verwechselt. Tatsächlich erweisen sich beide strittigen Lösungen als teilweise richtige Bestandteile der Gesamtlösung. Die Argumentation wird in allgemeinverständlicher Sprache geführt und anschließend durch eine formale mathematische Betrachtung ergänzt.

## 1 Was bisher geschah

Im Rahmenprogramm des Internationalen Mathematikerkongresses 1998 in Berlin hielt Gero von Randow einen populärwissenschaftlichen Vortrag, in dem er die Fähigkeit der Mathematik lobte, durch kontra-intuitive Ergebnisse zu verblüffen. Als Beispiel nannte er das Ziegenproblem (vgl. DMV-Mitteilungen 1998/4, [12]). Das Problem entstammt Monty Hall's Fernsehshow *Let's make a Deal* und wurde 1990 von der „IQ-Weltmeisterin" Marylin vos Savant in ihrer Kolumne *Ask Marylin* des *Parade Magazine* besprochen [13]. Dies löste eine heftige Diskussion aus. Gero von Randow griff das Problem in der ZEIT auf und entfachte damit ebenfalls eine hitzige Diskussion über die korrekte Lösung. In [12, S. 33] schreibt er, er sei „von etlichen Kollegen und vielen Lesern als ein solcher [journalistischer] Geisterfahrer angesehen worden", während doch „diesmal die anderen die Geisterfahrer waren" und er sich „perfekt als Besserwisser fühlen" könne.

Dieser Beitrag soll den Streit endgültig beilegen. Es wird sich zeigen, daß beide Parteien teilweise recht haben, aber keine vollständig. Um in obiger Metapher zu bleiben: die Streithähne begegnen sich auf der Landstraße, während sie sich auf der Autobahn wähnen und gegenseitig für Geisterfahrer halten. Dies geht aus der Diskussion der diversen möglichen Interpretationen des Problems hervor, wobei dessen Formulierung ganz entscheidend ist.

Die folgenden (weitgehend populärwissenschaftlichen) Ausführungen enthalten drei wesentliche Aspekte, die in der umfangreichen Literatur zum Ziegenproblem (und seinen älteren Verwandten) nicht oder nur versteckt zum Ausdruck kommen. Nach Herleitung der vollständigen Lösung in allgemeinverständlicher Sprache wird der formale mathematische Hintergrund dargestellt, dessen Verständnis Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der analytischen Geometrie erfordert. In der abschließenden Zusammenfassung gehe ich kurz auf die bisherige Literatur ein, insbesondere auf von Randow's sehr lesenswertes Buch [11], dem er die Passagen in [12] entnommen hat.

## 2 Das Originalproblem

In der Formulierung aus [11, 12], die für die spätere Analyse in markierte Abschnitte unterteilt ist, lautet das Originalproblem (Problem $O$):

> $O1$) Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet ein Preis: ein Auto. Hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir: Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; $O2$) mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. $O3$) Nun fragt der Moderator: Bleiben Sie bei Nummer eins oder wählen Sie Nummer zwei?

Zwei Lösungsvorschläge liegen im Streit [12]:

$L1$) „Tür Nummer zwei hat bessere Chancen.“ Grund: „Nur in einem von drei Fällen ist Wechseln schlechter, denn in diesem haben Sie auf Anhieb richtig geraten.“

$L2$) „Nachdem der Moderator eine Tür aussortiert hat, steht es fifty-fifty“. Grund: „Wahl zwischen zwei Türen“.

Marilyn vos Savant und Gero von Randow verteidigen $L1$ als die „richtige“ Lösung, während viele Leserzuschriften dies vehement bestreiten und die $L2$-Partei ergreifen. Bevor wir der Sache auf den Grund gehen, wollen wir als lehrreiches Beispiel ein leicht abgewandeltes Problem studieren.

# 3 Ein abgewandeltes Problem

Das abgewandelte Problem (Problem $A$), ebenfalls unterteilt in markierte Abschnitte, lautet

> $A1$) Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet ein Preis: ein Auto. Hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir: Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; $A2$) er agiert nach folgender Regel: Falls Sie richtig getippt haben, öffnet er eine andere Tür und Sie dürfen neu wählen. Andernfalls öffnet er die Tür mit dem Auto und Sie haben verloren. $A3$) Diese Regel ist Ihnen in der Show nicht bekannt. Konkret passiert folgendes: $A4$) mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was“ öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. $A5$) Nun fragt der Moderator: Bleiben Sie bei Nummer eins oder wählen Sie Nummer zwei?

Hier ist die Situation klar: konkret habe ich als Showkandidat die Tür mit dem Auto gewählt. Folglich gewinne ich mit Sicherheit, wenn ich bei Tür eins bleibe. Dies weiß ich als außenstehender Denksportler, der die Regel $A2$ kennt, aber wegen $A3$ *nicht* als Showkandidat.

So gesehen liegt also nicht ein Problem vor, sondern zwei: einerseits das *explizit* im Text gestellte *Entscheidungsproblem* des *Kandidaten* ($A5$), der in der *konkreten* (für ihn einmaligen) Showsituation das Auto gewinnen möchte, und andererseits das *implizit* vorhandene *Metaproblem* des *Denksportlers*, der eine *allgemeine* Gewinnstrategie sucht. Der Haken an der Sache: Die optimale Gewinnstrategie (bleibe bei Tür eins) ist für den Kandidaten *völlig irrelevant*, da ihm mit der Regel $A2$ genau die entscheidende Information fehlt, auf der die Strategie beruht.[1] Ganz ähnlich, aber subtiler, wird sich die Situation im Problem $O$ erweisen. Es sei noch angemerkt daß die allgemeine Strategie nur in 1/3 der Fälle gewinnt (dann aber sicher), denn in 2/3 der Fälle kommt es gemäß $A2$ garnicht zum zweiten Wahlgang. Der Kandidat steht konkret besser da: er kann mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gewinnen. Dies wird in Abschnitt 4.2 ausführlich diskutiert.

# 4 Die Lösung des Originalproblems

## 4.1 Entscheidungsproblem und Metaproblem

Betrachtet man die Lösungsvorschläge $L1$ und $L2$, so drängt sich der Verdacht auf, daß die $L1$-Partei das Problem $O$ aus Sicht des Denksportlers betrachtet, während die $L2$-Partei den Standpunkt des Kandidaten einnimmt. Es müßten sich also auch hier ein Entscheidungsproblem und ein Metaproblem unterscheiden lassen, von denen aber typischerweise nur eines erkannt wird. Woran liegt das?

Meiner Meinung nach liegt es einfach an der *mangelnden sprachlichen Präzision* der Problemstellung. Die bekannte Eigenschaft des menschlichen Gehirns, fehlende Information durch mehr oder weniger willkürliche, immer aber *subjektive Annahmen* zu ersetzen, führt nun dazu, daß das *nicht eindeutig gestellte* Problem trotzdem von den meisten Menschen in eindeutiger Weise *interpretiert* wird – allerdings auf unterschiedliche Weise! Genau daher rührt wohl der Streit. Zur genaueren Erläuterung stellen wir zunächst fest, daß die Beschreibung von

[1] Genaugenommen könnte es trotzdem sein, daß der Kandidat (aus anderen Gründen) zu derselben Lösung kommt. Tatsächlich ist dies aber nicht der Fall, vgl. Abschnitt 4.2.

Problem $O$ vollständig in der von Problem $A$ enthalten ist: $(O1, O2, O3) = (A1, A4, A5)$. Entscheidend ist der Abschnitt $O2$ und sein Zusammenhang mit $A2$–$A4$. Was passiert hier?

Einerseits beschreibt $O2$ die *Regel*, nach der der Moderator agiert, ohne allerdings (wie bei $A2$) diese Regel explizit kenntlich zu machen. Das Erkennen der Regel als solche stellt somit bereits eine *Interpretation* des Textes durch den Denksportler dar. Nach meiner Meinung ist diese Interpretation insofern vertretbar, als sie dem üblichen Sprachgebrauch folgt, eine allgemeine Problembeschreibung (hier $O1$–$O3$) eben als „den allgemeinen Fall" aufzufassen und nicht nur als eine spezielle Probleminstanz.[2] So weit, so gut.

Andererseits beschreibt $O2$ auch die *konkrete Situation* des Kandidaten in der Show, entsprechend $A4$ in Problem $A$. Die entscheidende Frage ist nun, ob er die obengenannte Regel *kennt*. Im Gegensatz zu $A3$ in Problem $A$ gibt der Text darauf keine eindeutige Antwort. Nach meinem Sprachverständnis ist aber $O2$ so zu lesen, daß der Kandidat die Regel *nicht* kennt: andernfalls sind die Worte des Moderators aus seiner Sicht unsinnig, denn er erwartet ja bereits, eine Ziege gezeigt zu bekommen.

Akzeptiert man beide genannten Textinterpretationen ($O2$ ist eine Spielregel, aber der Kandidat weiß es nicht), so hat der Kandidat ein Entscheidungsproblem zu lösen und der Denksportler ein Metaproblem – genau wie in Problem $A$, nur mit anderer Spielregel.

Nimmt man hingegen an, daß der Kandidat die Regel kennt, hat auch er das Metaproblem zu lösen. In diesem Fall erübrigt sich eine Unterscheidung und die „Musterlösung" $L1$ ist richtig.

Nimmt man umgekehrt an, daß $O2$ keine Regel sondern nur den konkreten Fall meint, so hat auch der Denksportler das Entscheidungsproblem des Kandidaten zu lösen; wieder erübrigt sich eine Unterscheidung. Vermutlich haben die Vertreter der $L2$-Partei das Problem $O$ so verstanden. Ganz eindeutig geht dies aber aus [12] nicht hervor. Da $L2$ recht schwammig formuliert ist, bleibt auch unklar, inwieweit damit die im folgenden beschriebene Lösung des Entscheidungsproblems gemeint ist.

[2] Dieser Sprachgebrauch ist jedenfalls in der Mathematik (einschließlich Denksport) üblich.

## 4.2 Die Lösung des Entscheidungsproblems

Es wird jetzt gezeigt, daß sowohl im Fall $A$ als auch im Fall $O$ das Entscheidungsproblem des Kandidaten (aufgrund seiner Unkenntnis der Regel) zu einer anderen Lösung führt als das jeweilige Metaproblem. Während der Denksportler im Fall $A$ stets Tür eins wählt und im Fall $O$ stets Tür zwei, ist die konkrete Situation des Kandidaten tatsächlich in beiden Fällen *exakt dieselbe*. Diese Erkenntnis ist bereits ein wesentlicher Schritt zur Lösung. Allein aus den Worten des Moderators und dem Anblick der Ziege kann der Kandidat nämlich nicht erkennen, ob irgendeine Spielregel gilt – und schon garnicht, welche. Aus seiner Sicht handelt der Moderator völlig willkürlich. *Der Kandidat hat keinerlei Anhaltspunkt, welches Spiel mit ihm gespielt wird!*

Wie also soll er sich entscheiden? Tür eins oder zwei? Interessanterweise darf er sich *weder* für die eine *noch* für die andere Tür (systematisch) entscheiden; vielmehr muß er *zufällig* und mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit eine der beiden Türen wählen, also z. B. durch Münzwurf. Nur so kann er sicher sein, eine Gewinnchance von $1/2$ zu erreichen!

Woran liegt das? Nehmen wir an, der Kandidat wechselt systematisch auf Tür zwei. Wenn er Pech hat, wird nach Regel $A$ gespielt und er verliert sicher. Tür zwei ist also eine schlechte Wahl. Wählt er systematisch Tür eins und es wird nach Regel $O$ gespielt, hat er etwas weniger Pech und gewinnt immerhin mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Aber der Moderator könnte auch das Gegenteil von Spiel $A$ spielen, Spiel $G$, bei dem die Regel $A2$ ersetzt wird durch

> $G2$) er agiert nach folgender Regel: Falls Sie falsch getippt haben, öffnet er die Tür mit der anderen Ziege und Sie dürfen neu wählen. Andernfalls öffnet er die Tür mit dem Auto und Sie haben gewonnen.

In diesem Fall verliert der Kandidat sicher, wenn er systematisch bei Tür eins bleibt. Also ist auch Tür eins schlecht. Der springende Punkt ist, daß der Kandidat keinerlei Informationen zur Gewinnwahrscheinlichkeit der *einzelnen* Türen hat; beide liegen *irgendwo* zwischen null und eins. Je nach Verhalten des Moderators kann er mit jeder Tür Glück oder Pech haben. Er sollte deshalb versuchen, selbst im *schlimmsten Fall* eine möglichst hohe Gewinnchance zu erreichen, also gewissermaßen den Moderator als *Gegner* anzusehen. Es bleibt nur der Münzwurf: so erwischt der Kandidat – unabhängig vom Verhalten des Moderators! – mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die richtige Tür. Jegliche Bevorzugung einer bestimmten Tür würde dagegen seine Chance im schlimmsten Fall verringern.

# 5 Haarspaltereien

In Abschnitt 4 haben wir die entscheidenden Fragen (Ist $O2$ Spielregel? Weiß das der Kandidat?) in allen möglichen Kombinationen beantwortet und das Ziegenproblem vollständig gelöst.[3] Drei weitere (stillschweigende, aber unstrittige bzw. irrelevante) Annahmen werden jetzt noch besprochen.

> 1. Der Kandidat wählt zunächst zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit (1/3) eine der drei Türen.

Diese Annahme wird meines Wissens von niemandem in Frage gestellt. Sie ist ganz natürlich, denn sie entspricht der Spielidee und nichts deutet darauf hin, daß der Kandidat eine bestimmte Tür bevorzugen könnte. Er wird (auch ohne Absicht) zufällig wählen. (Hätte er beispielsweise zwischen einer roten, gelben und braunen Tür zu wählen, sähe dies aus farbpsychologischen Gründen wohl anders aus.) Wir haben Annahme 1 ebenfalls vorausgesetzt.

> 2. Das Auto wurde zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit (1/3) hinter einer der drei Türen aufgestellt.

Auch Annahme 2 wird von fast allen Rätsellösern vorausgesetzt. Nach meiner Ansicht ist sie aber keineswegs natürlich, denn es ist fraglich, ob auch hinter der Bühne alle Türen „gleich“ sind. Beispielsweise könnte Tür eins nahe an der Zufahrt liegen, oder es könnte schwierig sein, das Auto zur Tür drei zu rangieren. Die Positionierung mit gleicher Wahrscheinlichkeit wird daher im allgemeinen eine Absicht (und sorgfältige Durchführung) erfordern. Wir haben Annahme 2 nicht vorausgesetzt.

> 3. Falls Regel $O2$ gilt und der Kandidat richtig tippt, öffnet der Moderator zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit (1/2) eine der beiden Ziegen-Türen.

Diese Annahme hat ihre Tücken: sie erscheint zwar natürlich, denn die Bevorzugung einer Tür erfordert eine Absicht. Wenn aber der Moderator die Spielregeln festlegt, ist nicht ausgeschlossen, daß er eine solche Absicht hat, z. B. um bei mehrfacher Durchführung des Spiels die Kandidaten zu foppen (vgl. dazu Abschnitt 7). Wir lassen die Annahme durchgehen, aber mit Warnung zur Vorsicht.

Welche Rolle spielen diese Annahmen?

Die Lösung $L1$ des Metaproblems beruht ganz entscheidend darauf, daß mindestens eine der Annahmen 1 oder 2 zutrifft. Beide führen (einzeln oder zusammen) dazu, daß der Kandidat bei der ersten Wahl in 1/3 der Fälle richtig tippt. Träfen beide Annahmen nicht zu, so könnte man über die Trefferquote keine Aussage machen.

Auch Annahme 3 spielt im Metaproblem eine Rolle: sie unterbindet jegliche Willkür des Moderators, so daß der systematische Türwechsel die Gewinnchance 2/3 hat. (Ohne Annahme 3 wäre der Wechsel immer noch optimal, aber die Gewinnchance läge irgendwo im Bereich von 1/2 bis 1.)

Für die Lösung des Entscheidungsproblems sind *alle* Annahmen völlig *irrelevant*. Die Situation ist ja gerade so, daß der Kandidat nichts über die einzelnen Türen weiß – außer, daß Tür drei sicher eine Niete ist. Interessant ist aber, welchen Einfluß das Öffnen von Tür drei auf sein Wissen hat. Wenn Annahme 2 zutrifft und der Kandidat dies weiß, kennt er bei seiner ersten Wahl die Gewinnwahrscheinlichkeit jeder einzelnen Tür, nämlich 1/3. Nachdem aber der Moderator Tür drei geöffnet hat, weiß er im einzelnen nichts über Türen eins und zwei. Etwas konkreter: nach dem Anblick der Ziege weiß er nicht mehr, ob seine Tür (eins) mit Wahrscheinlichkeit 1/3 die richtige ist. Die ursprüngliche Information ist also zerstört! Der Grund ist, daß der Moderator durch Öffnen der Tür eine *willkürliche* Information zum Ausgang eines Zufallsereignisses gibt. Der Kandidat kann daraus keine eindeutigen Wahrscheinlichkeiten ableiten, sondern nur einen ganzen Bereich (hier [0,1], bei Regelkenntnis $[\frac{1}{2}, 1]$).

Die letzten Punkte der Diskussion sind sicher nicht einfach nachzuvollziehen und für die Lösung nebensächlich. Für ein vollständiges *Verständnis* der Lösung sind sie dagegen wichtig. Das Verständnis soll im nächsten Abschnitt noch vertieft werden.

[3] Die hypothetische Kombination „$O2$ ist keine Spielregel, obwohl der Kandidat dies denkt“ ist durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen. (Vgl. aber Abschnitt 7!)

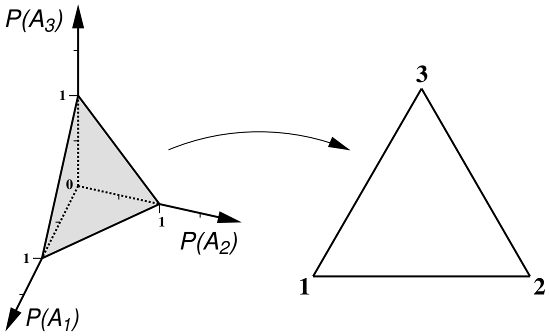


Abbildung 1: Das Informationsdreieck und seine Darstellung in der Ebene.

# 6 Wahrscheinlichkeitsräume

In der ersten Runde spielen zwei *Zufallsereignisse* eine Rolle: Das Positionieren des Autos hinter einer Tür und die Wahl einer Tür durch den Kandidaten. Die Mengen der *Elementarereignisse* sind

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}, \qquad \mathcal{W} = \{W_1, W_2, W_3\},$$

wobei $A_j$ bedeutet „Das Auto steht hinter Tür $j$" und $W_j$ bedeutet „Der Kandidat wählt Tür $j$". Die zugehörigen *Wahrscheinlichkeiten* seien $P(A_j)$ und $P(W_j)$. Durch $p = (P(A_1), P(A_2), P(A_3))$ und $q = (P(W_1), P(W_2), P(W_3))$ sind diskrete *Verteilungen* definiert, die zusammen mit den Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W}$ *Wahrscheinlichkeitsräume* erzeugen. Für unsere Zwecke sind diese Räume aber übertrieben abstrakt, die geometrische Bedeutung der Vektoren $p, q$ ist viel nützlicher. Da die Werte $P(A_j)$ in [0,1] liegen und sich zu eins summieren, kann $p$ irgendwo im Dreieck der Abbildung 1 liegen, das wir *Informationsdreieck* nennen wollen. Anfangs können weder Kandidat noch Denksportler $p$ genauer lokalisieren, denn sie wissen nichts über die einzelnen Türen – es sei denn, Annahme 2 gilt: dann liegt $p$ genau in der Mitte (siehe Tabelle 1). Der Kandidat wählt $q$ im Dreieck beliebig und bestimmt so seine Wahlstrategie.

Die Gewinnchance (also die Wahrscheinlichkeit, richtig zu tippen), ist die *totale Wahrscheinlichkeit*

$$\begin{aligned} P(G) = P(G|W_1)P(W_1) &+ P(G|W_2)P(W_2) \\ &+ P(G|W_3)P(W_3). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $P(G|W_j)$ die Gewinnchance unter der Bedingung, daß der Kandidat Tür $j$ wählt

Tabelle 1: Information zur Position des Autos vor der ersten Wahl (a-priori-Wahrscheinlichkeiten).

| Annahme 2 | $P(A_1)$ | $P(A_2)$ | $P(A_3)$ |
|---|---|---|---|
| gilt | 1/3 | 1/3 | 1/3 |
| gilt nicht | [0,1] | [0,1] | [0,1] |

(*bedingte Wahrscheinlichkeit*). Diese ist $P(A_j)$, so daß man das *innere Produkt* von $p$ und $q$ erhält:

$$P(G) = \sum\nolimits_{j=1}^{3} P(A_j)P(W_j) = p \cdot q.$$

Unter Annahme 1 ist $P(W_j) = 1/3$ für jede Tür $j$ und $q$ steht senkrecht auf dem Informationsdreieck. *Unabhängig* von der Verteilung $P(A_j)$ gilt also

$$P(G) = \frac{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)}{3} = \frac{1}{3}.$$

Der Kandidat kann somit auf jeden Fall (ohne $p$ zu kennen) die Gewinnchance 1/3 erzielen. Unter Annahme 2 ist umgekehrt $P(A_j) = 1/3$ für jede Tür $j$, also ebenfalls $P(G) = 1/3$, jetzt unabhängig von der Wahl $q$.

In der zweiten Runde sind die Elementarereignisse dieselben wie zuvor, aber die anfangs gleiche Information des Kandidaten und des Denksportlers hat sich auf unterschiedliche Weise geändert. $P(A_j|Z_3)$ sei die Wahrscheinlichkeit, das Auto hinter Tür $j$ zu finden, nachdem der Moderator die Ziege hinter Tür 3 gezeigt hat. Diese Werte lassen sich mit der *Formel von Bayes* berechnen,

$$P(A_j|Z_3) = \frac{P(Z_3|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^{3} P(Z_3|A_k)P(A_k)},$$

sofern die Wahrscheinlichkeiten $P(Z_3|A_j)$ bekannt sind, daß der Moderator eine Ziege hinter Tür 3 zeigt, wenn das Auto hinter Tür $j$ steht. Letztere hängen von der aktuellen Spielregel (und eventuell der Willkür des Moderators) ab, außerdem von der bereits feststehenden ersten Wahl des Kandidaten.

Die Details der Berechnungen interessieren hier nicht; wir wollen nur die wesentlichen Ergebnisse festhalten. Offensichtlich gilt stets $P(Z_3|A_3) = 0$; dagegen sind $P(Z_3|A_1)$ und $P(Z_3|A_2)$ nur dann eindeutig, wenn die Regel jede Willkür ausschließt: andernfalls können sie in einem ganzen Bereich liegen.

Tabelle 2: Information zur Autoposition vor der zweiten Wahl (a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten). Bei Regel $O$ gelte Annahme 3, bei Regel $O^*$ nicht.

| Regel | $P(A_1\|Z_3)$ | $P(A_2\|Z_3)$ | $P(A_3\|Z_3)$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 0 | 0 |
| $O$ | 1/3 | 2/3 | 0 |
| $G$ | 0 | 1 | 0 |
| $O^*$ | $[0,\frac{1}{2}]$ | $[\frac{1}{2},1]$ | 0 |
| — | $[0,1]$ | $[0,1]$ | 0 |

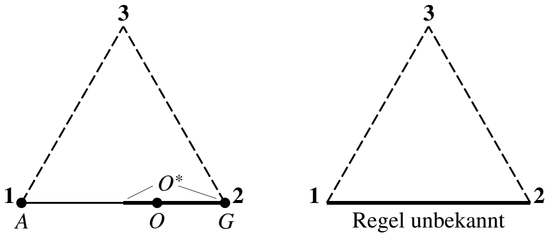


Abbildung 2: Das Informationsdreieck des Denksportlers für verschiedene Regeln (links) sowie des Kandidaten (rechts) vor der zweiten Wahl.

Diese Eigenschaften übertragen sich mit der Formel von Bayes auf $P(A_j|Z_3)$, mit den Ergebnissen in Tabelle 2. Auf jeden Fall gilt $P(A_3|Z_3) = 0$ („Aussortieren einer Niete"); der neue Informationsvektor $p = (P(A_1|Z_3), P(A_2|Z_3), P(A_3|Z_3))$ kann also nur auf dem unteren Schenkel des Informationsdreiecks liegen (Abbildung 2). Genau dies ist jetzt die einzige sichere Information des Kandidaten: seine Regelunkenntnis, also die potentielle Willkür des Moderators, führt zu vollständigem Verlust seiner Information zu Türen 1 und 2. Regel $O$ schränkt bereits ohne Annahme 3 die Willkür so stark ein, daß eine klare Entscheidung für Tür 2 gefällt werden kann, während die Regeln $A$, $G$ und $O$ (mit Annahme 3) die exakte Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten gestatten, also den Punkt $p$ auf dem unteren Schenkel eindeutig festlegen.

Der Denksportler muß nun $q$ so wählen, daß die Gewinnchance $p \cdot q$ möglichst groß wird, und zwar für vorgegebenes $p$ (nach einer der Regeln). Das Metaproblem ist somit ein *lineares Maximierungsproblem*:

$$\max_q \{p \cdot q : q_1 + q_2 + q_3 = 1, q_1, q_2, q_3 \geq 0\}.$$

Die allgemeine optimale Lösung ist leicht zu finden: Für $p_1 > 1/2$ ist Tür 1 zu wählen, also $q_1 = 1$ und $q_2 = q_3 = 0$; die Gewinnchance ist $p_1$. Umgekehrt ist für $p_1 < 1/2$ Tür 2 zu wählen, mit der Gewinnchance $p_2$. Für $p_1 = 1/2$ ist $q_1 \in [0,1]$ beliebig, $q_2 = 1 - q_1$, $q_3 = 0$, und die Gewinnchance $1/2$.

Der Kandidat muß $q$ bei unbekanntem $p$ so bestimmen, daß seine kleinstmögliche Gewinnchance $p \cdot q$ möglichst groß wird. Das Entscheidungsproblem ist damit ein *lineares Minimaxproblem*:

$$\max_q \{ \min_p \{p \cdot q : p_1 + p_2 = 1, p_1, p_2 \geq 0, p_3 = 0\} : \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1, q_1, q_2, q_3 \geq 0 \ \}.$$

Wiederum ist die optimale Lösung leicht zu finden: Man wählt $q$ senkrecht auf dem unteren Schenkel, also $q_1 = q_2 = 1/2$, $q_3 = 0$, und gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. (Für beliebiges $q$ ist die Gewinnchance schlimmstenfalls $(1 - q_3)\min(q_1, q_2)$.)

# 7 Schlußwort

Eine Literaturübersicht zum Ziegenproblem und seinen zahlreichen Verwandten findet sich in [1]. Weitere (dort nicht genannte) Quellen sind z. B. die Bücher [2, 4, 5, 9, 14] sowie die Web-Seiten [3, 7, 8, 10, 15]. Bei [3] findet man viele hyperlinks. In den Quellen, die ich selbst gelesen habe, kommen folgende wichtigen Aspekte zu kurz:

1) Nirgends wird zwischen Kandidat und Denksportler unterschieden. Dazu verführt der Text $O1$–$O3$ geradezu, was bisher unerwähnt blieb: „ich" (der Angesprochenene) trete zugleich in beiden Rollen auf. Hierin sehe ich übrigens einen wesentlichen Grund für die Heftigkeit der Kontroverse: um einer Art Schizophrenie zu entgehen, schlüpfen wohl die meisten Menschen (unbewußt und intuitiv) sofort in eine der beiden Rollen, mit der sie sich sodann stark identifizieren. Durch die Nicht-Unterscheidung wird auch nirgends (explizit) die entscheidende Frage aufgeworfen, ob der Kandidat die Spielregel kennt. Von Randow's Argumentation läßt sogar fast vermuten, daß er dies garnicht für relevant hält [11, S. 12, Fall drei].

2) Die Rolle der Willkür wird nur ansatzweise erkannt. Fast allen Streithähnen ist klar, daß $O2$ als Spielregel vorausgesetzt werden muß, um zur Musterlösung zu gelangen, und daß andere Regeln zu anderen Ergebnissen führen (vgl. [10, 11, 15]). Gillman [6] erkennt, daß sogar das Originalproblem

ohne Annahme 3 noch Willkür zuläßt: er betrachtet $P(Z_3|A_1)$ als Parameter und kommt zu den Ergebnissen für $O^*$ in Tabelle 2. Die Erkenntnis, daß die mögliche Willkür eine schon vorhandene Information verwischen und im Extremfall zerstören kann, scheint aber völlig neu zu sein. (Mir ist auch keine mathematische Theorie bekannt, die – wie hier geschehen – Information als unstrukturierte Menge von Wahrscheinlichkeitsräumen beschreibt.)

3) Das Problem wird für unlösbar gehalten, wenn keine Spielregel gilt. Dies behauptet Dr. Diaconis in [10], und auch in [11] wird es so dargestellt. Wie wir gesehen haben, lassen sich dann tatsächlich keine eindeutigen Wahrscheinlichkeiten berechnen. Trotzdem gibt es aber eine eindeutige Lösung – und sogar eine verblüffende!

Was kann man aus alledem lernen? Wie vieles im Leben hat sich auch der Ziegenstreit nicht an einer Sachfrage entzündet, sondern an mehrdeutigen Formulierungen, die individuell unterschiedlich interpretiert wurden. Die Streithähne haben ihre eigene Interpretation jeweils als einzig mögliche aufgefaßt und schlicht aneinander vorbei geredet. Nachdem dies klar wurde, ging es um die „Richtigkeit“ der Interpretationen. Genauer ging es darum, wie realistisch die jeweiligen Annahmen sind – eine wesentliche Frage, wenn man die Ergebnisse auf die Realität übertragen will. Abgesehen davon, daß die tatsächliche Showsituation anders war als im Problem $O$ (vgl. [15, Let's Make a Deal]), hat Monty Hall in einer Diskussionsrunde demonstriert, daß die Annahmen der Musterlösung nicht gerechtfertigt sind [10]: er hat durch willkürliches Handeln mehrere Kandidaten ausgetrickst. Die Beschwerde, er halte sich nicht an die Regeln, quittierte er mit der Bemerkung „Wo steht, daß ich ... muß? *Ich* bin der Showmaster.“ Dieser Vorgang belegt auch, daß den Kandidaten keine Regeln verraten wurden.

Wir können also lernen, daß eine Situation in der Realität oft komplizierter ist, als man denkt – insbesondere, wenn Willkür ins Spiel kommt, und daß man vor der Anwendung einer abstrakten mathematischen Theorie mit angemessener Sorgfalt nachprüfen muß, ob deren Voraussetzungen auch wirklich gegeben sind. Mit diesen Gedanken im Hinterkopf sollte von Randow's amüsantes und (selbst für Berufsmathematiker) interessantes Buch [11] noch spannender zu lesen sein. Ausgebuffte Wahrscheinlichkeitstheoretiker, denen bisher alles zu einfach war, können sich dabei statt der Ziegen ebensogut die Wellenfunktionen halbtoter Schrödinger-Katzen vorstellen. Aber das ist ein anderes Thema ...

## Literatur


[1] E. Barbeau. Fallacies, flaws, and flimflam: The problem of the car and goats. *The College Mathematics Journal*, 24(2):149–154, Mar. 1993.

[2] A. K. Dewdney. *200 % of nothing. An eye-opening tour through the twists and turns of math abuse and innumeracy.* John Wiley & Sons, 1993.

[3] D. Donovan. The WWW Tackles The Monty Hall Problem. `http://math.rice.edu/~ddonovan/montyurl.html`.

[4] R. Falk. *Understanding probability and statistics. A book of problems. With the cooperation of Raphael Falk.* A. K. Peters, Wellesley, MA, 1993.

[5] M. Gardner. *aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight.* Freeman & Co, New York, 1982.

[6] L. Gillman. The car and the goats. *The American Mathematical Monthly*, 99(1):3–7, Jan. 1992.

[7] B. Klumpp. Das Ziegenproblem. `http://www.knowhow-kompakt.com/dm/misc/dmmi001.htm`.

[8] K. Siegrist. The Monty Hall Problem. `http://www.math.uah.edu/stat/games/games6.html`.

[9] S. K. Stein. *Strength in numbers. Discovering the joy and power of mathematics in everyday life.* John Wiley & Sons, 1996.

[10] J. Tierney. Behind Monty Hall's doors: Puzzle, debate and answer? *The New York Times*, July 21, 1991. Vgl. `http://www.dartmouth.edu/~chance/course/topics/Monty_Hall.html`.

[11] G. von Randow. *Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten.* rororo science. Rowolth, 1992.

[12] G. von Randow. Geisterfahrer des Journalismus oder: wie kommt Mathematik in die Zeitung? *DMV-Mitteilungen*, (4):30–35, Dez. 1998.

[13] M. vos Savant. Ask Marilyn. *Parade Magazine*, Sept. 9, 1990.

[14] M. vos Savant. *The Power of Logical Thinking: Easy Lessons in the Art of Reasoning ... and Hard Facts About Its Absence in Our Lives.* St. Martin's Press, 1996.

[15] H. Weiner. Marilyn is tricked by a game show host. `http://www.wiskit.com/marilyn.gameshow.html`.